

Princípios de cálculo aplicado à física

João Pedro Boechat Guimarães

Leandro Souza Nowacki

Pedro Henrique Trajano Lemos Tredezini

IFUSP 2020

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Números Reais, \mathbb{R}	2
3	Funções	2
3.1	Exemplos muito importantes	3
4	Limites e Continuidade	4
4.1	A definição formal	5
4.2	Propriedades de Limites	7
4.3	Limite de Função Composta	7
4.4	Teorema do Confronto	8
4.5	Limites no Infinito	8
5	Derivada	10
5.1	Noção intuitiva de derivada	10
5.2	Definição formal	11
5.3	Derivabilidade de uma função no ponto	11
5.4	Regras de derivação	13
5.5	Regra da cadeia: Derivação de função composta	13
5.6	Derivadas de ordem superior	15
5.7	Máximos e mínimos locais	15
6	Polinômio de Taylor	16

1 Introdução

Esse texto, criado por alunos do IFUSP, tem como objetivo auxiliar ingressantes a se acostumarem com as bases do cálculo diferencial e integral aplicado à física.

É comum ter problemas com conceitos no início do curso. Contudo, é de extrema importância que eles sejam rapidamente sanados para desenvolver melhor noções futuras.

2 Números Reais, \mathbb{R}

De forma bastante simplificada, o conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R} , é o conjunto de números que contém todos os números racionais (aqueles que podem ser escritos como frações de inteiros) e todos os números que não são racionais (irracionais), por exemplo $\sqrt{2}$.

A utilidade dos números reais vêm do fato de que sempre podemos reduzir um intervalo em torno de um ponto da reta. Pense assim: "Como podemos encontrar, na reta real, o número e ?". Esse processo consistirá em uma tarefa de aproximar e por intervalos $[e - \epsilon, e + \epsilon]$, $\epsilon > 0$, aos quais ele pertence. Esse o processo, que de fato é infinito, só é possível, pois sempre se pode reduzir esses intervalos, obtendo um intervalo de diâmetro menor que ainda possui e , chegando cada vez mais próximo do número que buscamos.

Inicialmente, será muito importante a ideia de chegar infinitamente próximo de um determinado ponto. O conjunto dos reais dotado de operações de soma e multiplicação usuais, aquelas conhecidas no ensino médio, e de uma relação de ordenamento forma o que se chama de Corpo Ordenado, denotado por $\mathbb{K} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. No corpo ordenado dos reais, podemos realizar as contas da forma que estamos acostumados.¹

3 Funções

A ideia de função é central na física, pois permite realizar associações entre grandezas físicas distintas, por exemplo pressão, volume e temperatura de um gás a um dado instante de tempo. Para definirmos o que é uma função, é necessário que tenhamos a ideia do que é um conjunto.

Definição 3.1 (Conjunto). De forma simples e bastante rasa, um conjunto é uma coleção de elementos que gozam de uma mesma propriedade bem definida de forma que não há dúvida se um certo objeto está ou não nessa coleção.

Podemos ter conjuntos de cores, de um certo tipo de veículo, entre vários outros. Porém, nosso interesse está em conjuntos de elementos matemáticos, como conjuntos de números, de subconjuntos, entre outros, que sejam descritos por uma regra matemática, como por exemplo o conjunto de todos números inteiros menores do que 2. Vamos, agora, definir, também de maneira rasa uma função.

Definição 3.2 (Função). Uma função f é uma relação entre dois conjuntos,

¹Recomendo a leitura do Guidorizzi Volume 1 - Capítulo 1 sobre números reais.

o domínio A ² e o contra-domínio B , i.e. $f: A \rightarrow B$. A função f é geralmente representada por uma regra que associa a cada elemento de A um **ÚNICO** elemento de B .

De forma reduzida, representamos a função f da forma seguinte:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Pela definição dada, todo elemento do domínio A é relacionado com algum elemento de B , porém, não é necessário que todo elemento de B seja atingido pela função. Assim, definiremos o conjunto imagem.

Definição 3.3 (Imagem). A imagem de uma função f é o conjunto de elementos de B que são alcançados pela função f . Assim, $Im(f) = \{f(x) \in B | x \in A\}$ é a definição de imagem.

Podemos definir também o gráfico de uma função, que se trata de um conjunto e não de um desenho³.

Definição 3.4 (Gráfico). O gráfico de uma função é um subconjunto do conjunto $A \times B$, lê-se A produto cartesiano com B , $Graph(f) = A \times Im(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B | x \in A\}$. Cada ponto do conjunto gráfico é designado por uma dupla de valores formada por **Variável Independente** x e **Variável Dependente** $y = f(x)$.

É importante ressaltar que essas definições, embora bastante simplificadas, não restringem os conjuntos A e B , mas estaremos particularmente interessados em trabalhar com subconjuntos dos reais.

3.1 Exemplos muito importantes

1) Função constante:

A função constante, como o nome já diz, associa para todos os valores de x no domínio o mesmo valor $c \in \mathbb{R}$. Assim, a representação de uma função constante é:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c. \end{aligned}$$

O desenho do gráfico de uma função constante está presente na figura 1.

²É importante levar em conta que, a menos de que seja especificado, o domínio de uma função é o maior conjunto para o qual a regra de f associa um valor em B .

³O desenho, que rotineiramente chamamos de gráfico, é a representação visual do gráfico, que nem sempre é possível de ser feita.

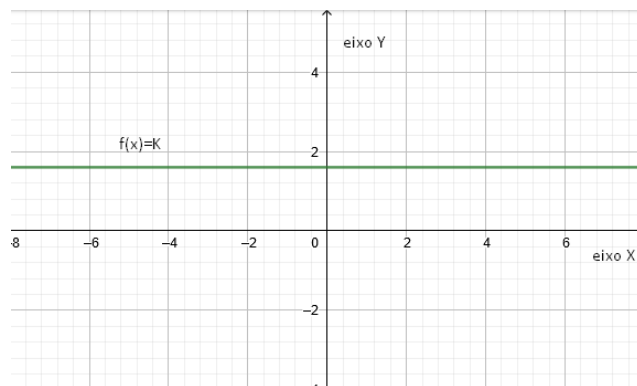


Figura 1: Representação visual do conjunto gráfico de uma função constante. Feito no GeoGebra.

As funções constantes possuem um interessante valor físico, pois podem representar grandezas que não dependem umas das outras, por exemplo a massa da Terra em função da posição de um carro de fórmula 1 na pista de Interlagos, e grandezas que não variam, como por exemplo a velocidade de uma massa pontual em movimento retilíneo uniforme.

2) Função linear:

A função linear é da forma:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a \cdot x + b$$

IMPORTANTE: Aqui é importante ressaltar a definição de inclinação da curva, conhecido como "*slope*". Peguemos um ponto $x = x_0$ e calculemos a função nesse ponto. Obviamente, $f(x_0) = a \cdot x_0 + b$. Agora vamos provocar uma perturbação no domínio da função em torno de x_0 que chamamos de Δx , $\Delta x > 0$. Calculemos, agora, a função em $x_0 + \Delta x$ e obtemos $f(x_0 + \Delta x) = a \cdot (x_0 + \Delta x) + b$.

A inclinação da reta é a razão entre $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$. Para a função linear, temos que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot (x_0 + \Delta x) + b - a \cdot x_0 - b}{\Delta x} = a$, note que podemos fazer Δx o quão pequeno quisermos, desde de que ele não seja zero. Esse resultado é muito importante e será revisitado futuramente

4 Limites e Continuidade

O conceito de limites e continuidade é uma das fundações do cálculo. Em geral, usamos esse conceito para analisar funções ao redor de um ou mais pontos.

Para facilitar o entendimento, imagine que temos um quadrado ao qual podemos adicionar mais arestas o quanto quisermos, uma a uma; e com isso, o nosso objetivo será de formar um círculo.

Se considerarmos que quando o número de lados tende a um número muito grande, o objeto tende a um círculo, estamos usando o conceito de limites, como é possível observar na figura 2.



Figura 2: Método da exaustão, já conhecido pelos gregos antigos.

E para evitar que o texto fique muito extenso desnecessariamente, não provaremos nada acerca de limites nesse paper.

4.1 A definição formal

Antes de tentar entender como limites e continuidade podem ser úteis para analisar a física de certos problemas, vamos apresentar sua definição formal.

Definição 4.1 (Limite).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \quad (1)$$

Definição 4.2 (Continuidade). Dizemos que uma função $f(x)$ é contínua em certo ponto a se, e somente se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (2)$$

Essas definições podem parecer intimidadoras em um primeiro momento, porém não se preocupem tanto com isso. No começo do curso de física o mais importante de limites (técnicas para resolução) será apresentado a frente, essa definição serve apenas para termos uma base de onde vêm a teoria.

A ideia geral quando trabalhamos com limites é analisarmos como a função se comporta quando seu argumento se aproxima de um ponto.

Teremos um intervalo infinitesimal $[a - \delta, a + \delta]$ que será "comprimido" juntamente com um intervalo $[L - \epsilon, L + \epsilon]$. É importante reparar que mesmo se $f(a)$ não pertencer à imagem e a não pertencer ao domínio de f , ainda assim é possível tomar o limite nesse ponto.

Para exemplificar como trabalhar com limites e continuidade, vamos estudar uma função $f(x)$ simples.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 2 \\ 0, & \text{se } x \leq 2 \end{cases} \quad (3)$$

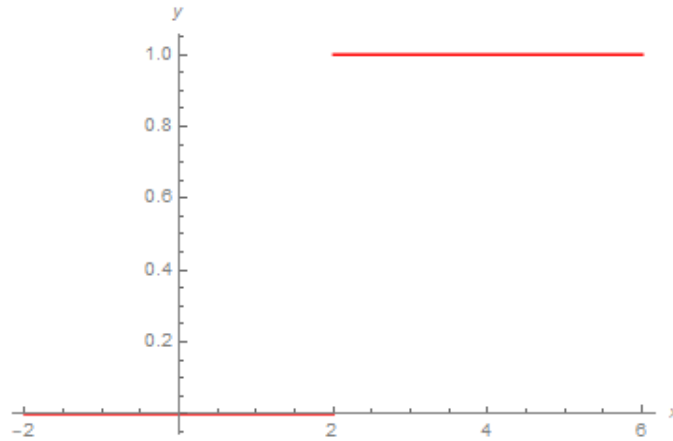


Figura 3: Imagem Ilustrativa da função $f(x)$ definida no exemplo

Como podemos observar na *figura 3*, $f(x)$ não é uma função contínua para todos os reais, sendo que ela tem um "salto" no ponto $x = 2$. Agora, vamos tomar os limites laterais⁴, sendo (4) o limite tirado de $x > 2$ e (5) $x \leq 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0 \quad (5)$$

Repare no limite da *equação (4)*. Como sabemos, o ponto $x = 2$ assume valor $f(x) = 0$. Porém, é um valor calculado em um intervalo $]2, 2 + \delta]$ e, portanto, é maior que 2.

Já na *equação (5)*, podemos calcular o limite como o valor que a função assume no próprio ponto, já que 2 tem imagem $f(x)$ igual a um $x \in [2 - \delta, 2[$ (repare que agora é um intervalo fechado).

Agora, antes de continuarmos, definiremos alguns conceitos importantes.

Definição 4.3. (Ponto interior) Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e um $x \in I$. Definimos x como um ponto interior se, e somente se $\exists \delta > 0$ tal que $[x - \delta, x + \delta] \subset I$.

Definição 4.4 (Intervalo Aberto). Um intervalo I é aberto se, e somente se, todo $x \in I$ é um ponto interior.

Definição 4.5 (Ponto de acumulação). Dado $I \subset \mathbb{R}$ e $x \in I$. O ponto x é ponto de acumulação de I se, e somente se, \exists uma sequência (x_n) tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ e $(x_n) \subset I$.

⁴Lembre-se que, por definição, o limite só existe se os limites laterais existirem, mesmo se eles não forem iguais

4.2 Propriedades de Limites

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções definidas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer. Assumindo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existam então, vale que:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Vale que o limite da soma é a soma dos limites.

3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Vale que o limite dos produtos é o produto dos produtos.

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Vale que o limite dos quocientes é o quociente dos limites.

5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n, \text{ para } n \in \mathbb{R}$

6. $\lim_{x \rightarrow a} c = c, \text{ para } c \in \mathbb{R}$

O limite de uma constante é a própria constante.

7. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

4.3 Limite de Função Composta

Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H \subset \mathbb{R}$, $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ e a ponto de acumulação de I . Supondo que os seguintes limites existam e sejam definidos por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$.

Se $g(y)$ é contínua em L ou $\exists r > 0 : \forall x \in]a - r, a + r[, f(x) \neq L$, então

$$\lim_{y \rightarrow L} g(y) = \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = M \quad (6)$$

Demonstração: Como nossos leitores estão presos em casa, achamos razoável deixar a demonstração a cargo do leitor.⁵

⁵Apesar de ser somente uma piada, fiquem em casa e cuidem de suas famílias

Repare que temos duas condições diferentes, vamos analisar o porquê disso. Se $g(y)$ for uma função contínua em L , o limite tomado nesse ponto pode ser o valor que ele assume. Agora imagine um caso diferente.

Sejam $f(x)$ e $g(y)$ funções que satisfaçam todas as condições necessárias para de fato poderem ser compostas, e g descontínua.

$$f(x) = 1$$

$$g(y) = \begin{cases} y + 1, & \text{se } y \neq 1 \\ 5, & \text{se } y = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Se tomarmos a composta teremos $g(f(x)) = 5$, com isso

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} g(y) = y + 1 = 2$$

Veja que, no segundo limite, y é diferente de 1, apesar de ser infinitesimalmente próximo. Portanto teremos, pelo teorema:

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = 5 \neq \lim_{y \rightarrow 1} g(y) = 2 \quad (8)$$

Como podemos ver, um ponto descontínuo não satisfaz o teorema, portanto não podemos simplesmente calcular o limite no ponto. Para isso criamos uma exceção que, para funções não contínuas, devemos analisar caso a caso.

4.4 Teorema do Confronto

Sejam $g, f, h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e a ponto de acumulação de I . Suponha que para $\forall x \in I$ e $x \neq a$, temos $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e também $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (9)$$

4.5 Limites no Infinito

Uma noção importante em cálculo é a convergência (ou não convergência) de funções no infinito, isto é, o que acontece com uma função $f(x)$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Podemos escrever um limite assim como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad (10)$$

E, por definição,

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \text{ t.q. se } x > M, \text{ então } \epsilon > |f(x) - L| \quad (11)$$

Para visualizarmos melhor como tratamos esse tipo de limite, vejamos um exemplo.

Assumindo $n > 0$, prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Demonstração. Queremos um $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon > \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right|$$

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

Agora, seja $M = \frac{1}{\epsilon} > 0$ e $n > M$, então

$$n > M = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\epsilon > \left| \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right|$$

□

A noção intuitiva desse limite é de que se temos $\frac{1}{\epsilon} = M$ com um epsilon tendendo a um número muito pequeno, M será cada vez maior, e com isso vale que nosso n é muito grande também.

Esse exemplo de fato não foi escolhido à toa; muitas vezes ao analisar limites no infinito nos deparamos com casos do tipo $\frac{1}{n}$, ter conhecimento disso é essencial.

Agora, vejamos um exemplo aplicado a física. Seja

$$N(t) = N_0 e^{-\tau t}$$

Que é a solução da EDO que representa o decaimento de um núcleo radioativo, sendo τ o tempo de vida-média e N_0 o número de átomos inicial e $N(t)$ o número final de átomos após um determinado tempo t .

Como consideramos $N_0 > 0$, e a exponencial nunca é definida no 0, teoricamente a função $N(t)$ nunca seria 0, porém quando tomamos o limite temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = N_0 e^{-\tau(\infty)}$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$$

E finalmente temos o valor esperado e mais compatível com a realidade.

5 Derivada

Nessa seção, iremos supor, a menos quando especificado, que as funções com as quais trabalharemos são definidas em intervalos abertos.

A ideia de derivada é relacionada à taxa de variação de uma função, i.e. como varia a imagem de uma função com respeito à uma variação no domínio.

5.1 Noção intuitiva de derivada

Considere uma partícula em queda livre no campo gravitacional \vec{g} . Suponha que ela tenha sido largada em $t = 0$ em repouso a uma altura $H > 0$ acima do solo, que iremos tomar como altura zero, assim como na figura 5.1.

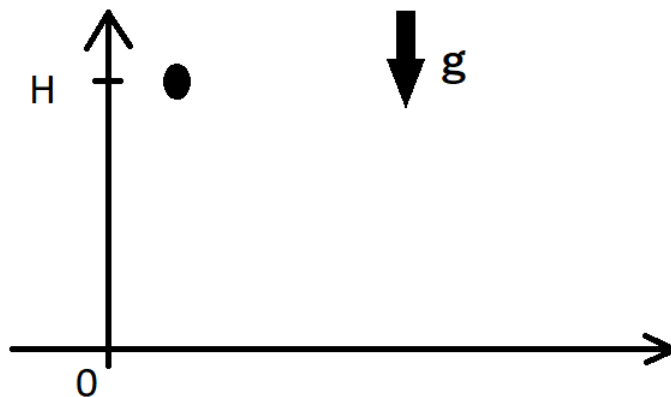


Figura 4: Orientação do sistema de referências.

É evidente que, nessa orientação, $\vec{g} = -g\hat{k}$, onde \hat{k} é o versor na direção positiva do eixo Oz .

A posição da partida é dada por $z(t) = H - \frac{g t^2}{2}$. Queremos saber a velocidade instantânea da partícula em um dado instante t_0 .

Para isso, voltemos ao conceito de velocidade média; a velocidade média entre os instantes t_0 e $t_0 + \delta t$ é

$$v_m = \frac{\delta z}{\delta t} = \frac{z(t_0 + \delta t) - z(t_0)}{\delta t} \quad (12)$$

Graficamente, como na figura 5.

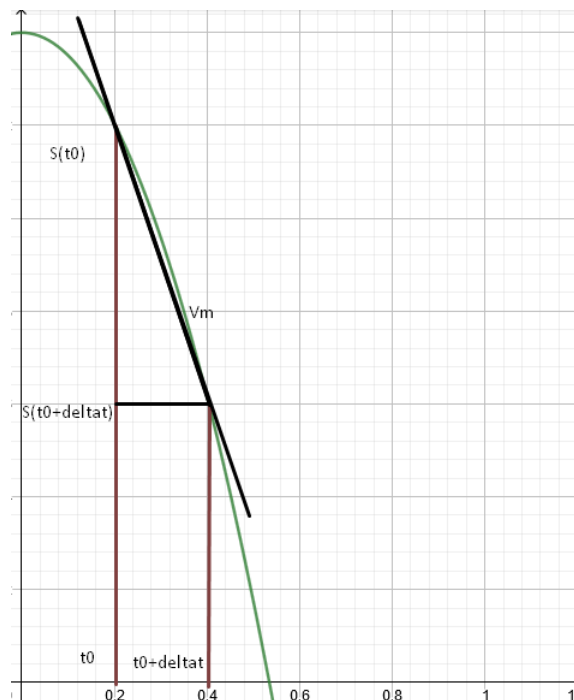


Figura 5: Velocidade média.

Definimos a velocidade instantânea no instante t_0 como o limite da razão da velocidade média com δt indo para 0.

$$v(t_0) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \delta t) - z(t_0)}{\delta t} \quad (13)$$

A taxa de variação da posição com respeito ao tempo é a velocidade, portanto, a velocidade é uma derivada, como veremos formalmente.

5.2 Definição formal

Definição 5.1 (Derivada de uma função f num ponto x). Chamamos de derivada de f num ponto x do domínio o valor do limite⁶.

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (14)$$

5.3 Derivabilidade de uma função no ponto

Dizemos que uma função f é derivável num ponto x se e somente se $\exists T \in \mathbb{R}$ tal que, definindo a função *Erro* $E(h)$ como

$$E(h) = f(x+h) - f(x) - T \cdot (h) \quad (15)$$

⁶É importante observar que a derivada só é bem definida quando o limite existe e é finito.

tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h} = 0$$

Teorema 5.1 (Enunciado). *Seja f uma função derivável num ponto x nas condições supostas no início da seção. Então, $T = \frac{df}{dx}(x)$.*

Demonstração. Considere o erro, $E(h) = f(x+h) - f(x) - T \cdot h$ como $h \neq 0$, podemos dividir a expressão por h , obtendo

$$\frac{E(h)}{h} = \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - T \right)$$

Tomando os limites com h indo para 0

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - T \right)$$

Por hipótese, f é derivável, então o primeiro membro é nulo. Assim, vale a seguinte relação, será provada em cálculo 1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - T \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} T$$

$T \in \mathbb{R}$ e o primeiro membro é a definição de derivada. Portanto, a derivada deve existir e

$$T = \frac{df}{dx}(x)$$

7

□

Antes de tratar de regras de derivação, vamos provar o seguinte teorema, que tem grande relevância.

Teorema 5.2 (Enunciado). *Seja f uma função derivável num ponto \bar{x} . Então f é contínua em \bar{x} .*

Demonstração. Por hipótese, f é derivável no ponto \bar{x} . Então, considere

$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{(x - \bar{x})} \cdot (x - \bar{x}), \text{ com } x \neq \bar{x}$$

Tomemos os limites:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) - f(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{(x - \bar{x})} \cdot (x - \bar{x})$$

⁷Verifique se vale a recíproca, i.e. se $T = \frac{df}{dx}(x)$ e a derivada existe, então f é derivável em x .

Os limites dos termos do produto no segundo membro existem individualmente, assim, podemos usar a regra do limite do produto:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) - f(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{(x - \bar{x})} \cdot \lim_{x \rightarrow \bar{x}} (x - \bar{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) - f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) \cdot 0 = 0$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

e, portanto, f é contínua em \bar{x} . \square

Então, se uma função é derivável em um ponto, ela é necessariamente contínua no ponto.

5.4 Regras de derivação

Aqui serão apresentadas algumas técnicas de derivação que serão muito úteis no curso de física. Fica aqui também o incentivo ao leitor para provar as propriedades aqui apresentadas.

Suponha que f, g são deriváveis num ponto \bar{x} e que $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $f + g$ é derivável no ponto \bar{x} e

$$(f + g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})$$

2. $f \cdot g$ é derivável no ponto \bar{x} e

$$(f \cdot g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

3. $k \cdot f$ é derivável no ponto \bar{x} e

$$(k \cdot f)'(\bar{x}) = k \cdot f'(\bar{x})$$

4. se $g(x) \neq 0 \forall x \in \text{Dom}(g)$ e $g'(\bar{x}) \neq 0$, vale que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{(g(\bar{x}))^2}$$

5.5 Regra da cadeia: Derivação de função composta

Nessa sessão, será apresentada uma das técnicas principais de derivação, aplicada quando há uma composição de funções.

Antes de tratar do teorema em si, tratemos de um lema técnico.

Lema 5.1. *Seja $f : I \rightarrow R$ uma função derivável num ponto x_0 . Então existe uma função $\Phi : I \rightarrow R$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi = 0$ contínua em x_0 .*

Demonstração. Como f é derivável em x_0 , vale que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + E(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)} = 0$$

Considere a função $\rho(x) = \frac{E(x)}{(x - x_0)} \quad \forall x \in I - \{x_0\}$. Obviamente, vale que $\lim_{x \rightarrow x_0} \rho(x) = 0$.

$$\text{Definimos, então, } \Phi : I \rightarrow R, \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ \frac{E(x)}{(x - x_0)}, & x \neq x_0 \end{cases}$$

Que é uma função contínua com as mesmas propriedades do erro, como queríamos. \square

Agora podemos provar o teorema de derivação de função composta.

Teorema 5.3 (Enunciado). *Sejam as funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ com $\text{Im}(f) \subset J$ deriváveis nos pontos $x_0 \in I$ e $y_0 = f(x_0) \in J$. Então a composta $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em x_0 e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.*

Demonstração. Considere o erro da função g :

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot (y - y_0) + E(y)$$

Na composição, temos que $y = f(x)$ e que $y_0 = f(x_0)$. Assim, fazendo a substituição e dividindo por $(x - x_0)$ com $x \neq x_0$, obtemos:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{(x - x_0)} = g'(f(y_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} + \frac{E(f(x))}{(x - x_0)}$$

Pelo lema anterior, $E(f(x)) = \Phi(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))$, com $\Phi(f(x_0)) = 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ g'(f(y_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} + \Phi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \right\}$$

Os limites do segundo membro existem individualmente, então podemos aplicar a propriedade da soma dos limites.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g'(f(y_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = g'(f(y_0)) \cdot f'(x_0) + 0 \cdot f'(x_0)$$

Então, temos que a composição $(g \circ f)$ é derivável em x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

\square

5.6 Derivadas de ordem superior

Considere uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em todo ponto do domínio. Assim, podemos pensar na derivada como uma função $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ e, portanto, podemos derivar essa função, obtendo o que chamamos de segunda derivada, ou derivada de ordem 2.

Definição 5.2 (Funções de classe $C^k(J)$). Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I aberto, é dita de classe $C^k(J)$ se possui k derivadas em um intervalo aberto $J \subseteq I$ contínuas em todo J .

Exemplo 1: $f(x) = \sin(x^2)$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$;

Exemplo 2: $g(x) = e^{-x^2}$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

5.7 Máximos e mínimos locais

A noção de derivadas de ordem superior foi introduzida rapidamente para permitir uma melhor compreensão do estudo de máximos e mínimos locais de funções.

Definição 5.3. Considere uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I aberto, derivável em I .

1. **Ponto de Máximo Local:** Dizemos que um ponto x_0 é ponto de máximo local se, e somente se, $\exists r > 0 : \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, f(x) \leq f(x_0)$;
2. **Ponto de mínimo Local:** Dizemos que um ponto x_0 é ponto de mínimo local se, e somente se, $\exists r > 0 : \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, f(x) \geq f(x_0)$.

Teorema 5.4. Enunciado: Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I aberto, uma função derivável em todo domínio. Se x_0 é um ponto extremante local, i.e. ou máximo ou mínimo local, então $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$.

A demonstração fica a cargo do leitor, mas damos uma noção intuitiva sobre a propriedade:

Se, localmente, o ponto x_0 é um extremante local, então a função não deve crescer nem diminuir naquele ponto, ou seja, sua derivada deve ser nula.

Teorema 5.5. Enunciado: Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I aberto, uma função que vamos supor de classe $C^2(I)$. Então:

1. se $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local;
2. se $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local.

A prova do teorema, novamente, fica a cargo do leitor, mas a noção intuitiva será fornecida na seção de polinômio de Taylor.

Exemplo: Partícula sujeita a um potencial.

Considere um potencial dado por $U(x) = 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5$ definido em toda a reta real. Queremos estudar máximos e mínimos de U . Vamos derivar a função e igualar a zero.

$$\frac{dU}{dx}(x) = 16x^3 + 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{105}}{16}, x_3 = \frac{-3 - \sqrt{105}}{16}$$

Para verificarmos se é ponto de máximo ou mínimo local, vamos tomar a segunda derivada de U e calcular o valor nos pontos candidatos obtidos. Calculando, obtemos que

$$\frac{d^2U}{dx^2}(x_1) < 0, \frac{d^2U}{dx^2}(x_2) > 0 \text{ e } \frac{d^2U}{dx^2}(x_3) > 0$$

Então, temos pontos de máximo local em x_1 e de mínimo local em x_2 e em x_3 como pode ser visualizado na figura 6

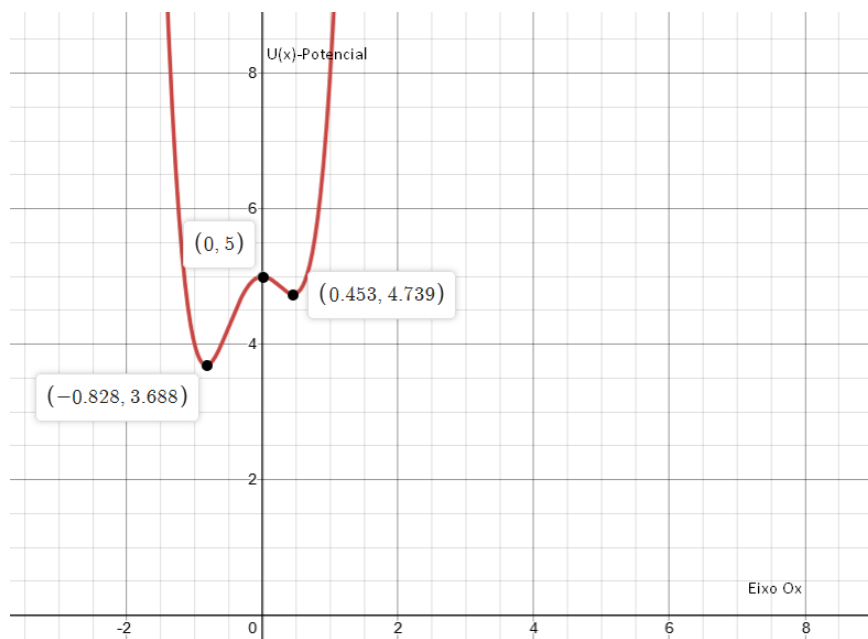


Figura 6: Potencial ao qual a partícula está sujeita.

Fisicamente, como vocês verão no curso, temos dois pontos, x_2 e x_3 , de equilíbrio estável da partícula, onde ela tende a oscilar em torno do equilíbrio. Além disso, temos x_1 ponto de equilíbrio instável, onde a partícula facilmente sai de seu estado de equilíbrio.

6 Polinômio de Taylor

Em várias situações, é útil aproximar uma função por polinômios, pois sua manipulação é fácil em derivadas e integrais (regra do tombo). Algo parecido pode ser feito aproximando uma função por funções trigonométricas, como será visto em Física Matemática 1.

Definição 6.1. Se $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função n-vezes derivável, temos que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)(x - x_0)^n + \mathcal{O}(x^{(n+1)}), \quad (16)$$

onde $\mathcal{O}(x^{(n+1)})$ é o resto de ordem n+1, que obedece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathcal{O}(x^{(n+1)})}{(x - x_0)^{(n+2)}} = 0.$$

Note que o resto é a diferença entre o valor exato da função e o valor da nossa aproximação polinomial. Essa forma de expressar o resto, apesar de nos permitir analisar a ordem do polinômio sempre, não é útil pra calcular esse resto numericamente. Para tal, utilizaremos a forma de lagrange para o resto. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n+1-vezes derivável, então existe $c \in (x_0, x)$ tal que:

$$\mathcal{O}(x^{(n+1)}) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{(n+1)}f}{dx^{(n+1)}}(c)(x - x_0)^{(n+1)}$$

Perceba que para o uso do resto de Lagrange, a função deve ser n+1 vezes derivável, ao invés de n vezes, como no resto na forma genérica, devido ao resto ter uma derivada a mais que a ordem do polinômio em sua expressão. Se calcularmos o polinômio de Taylor de algumas funções famosas em torno de $x_0 = 0$, teremos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{(n+1)})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{(n+1)})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{(2n)}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{(n+1)})$$

A aproximação por polinômio de Taylor é muito útil para resolução de alguns limites que são difíceis por técnicas tradicionais, para aproximação do número de euler e até para a prova de sua irracionalidade. Entretanto focaremos na aplicação em física. Considere um pêndulo simples de massa m restrito a se mover num plano, sob ação da gravidade:

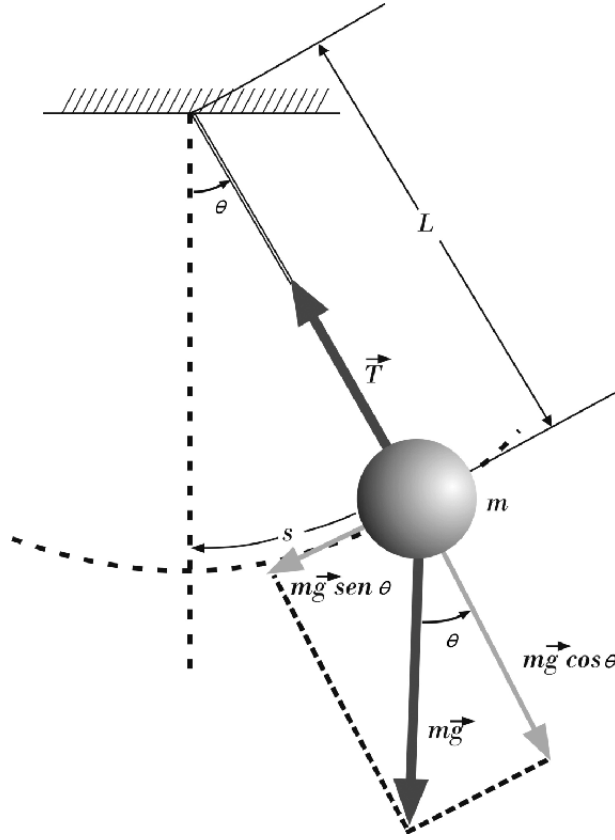


Figura 7: Pêndulo Simples

Note que este sistema tem um vínculo (além de estar restrito ao movimento 2D), a distância até o ponto de apoio é constante (L). Logo, usando um sistema de coordenadas polares, temos que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, logo, a aceleração é:

$$\vec{a} = -L\dot{\theta}^2 \hat{r} + L\ddot{\theta} \hat{\theta}$$

E pela segunda lei de Newton, temos:

$$T - mg \cos \theta = mL\dot{\theta}^2$$

$$-g \sin \theta = L\ddot{\theta}$$

Focaremos na segunda equação, por hora. Nesta primeira parte não cobriremos a teoria de equações diferenciais, mas não será necessário nada disso nesta seção. Tudo que é necessário saber é que a segunda equação é inconveniente de ser resolvida, devido à função seno que está ali (ela pode ser resolvida, veja Landau Vol. 1- Mechanics). Para facilitar, resolveremos o pêndulo simples para o caso

de ângulos pequenos, no qual aproximaremos $\sin x \approx x$, ou seja, jogamos os termos de ordem maior que 2 fora, dessa forma, obtemos:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

Onde $\omega^2 = \frac{g}{L}$. Essa é a equação do oscilador harmônico, que tem como solução o já conhecido:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Os métodos para resolução dessa equação diferencial serão feitos em outro momento, então não se preocupe por agora. Para ver mais usos da expansão de Taylor em mecânica, em outros contextos, veja Classical Dynamics of Particles and Systems- Marion Thorton.

Exemplo: Considere uma função derivável em todo seu domínio, se ela possui um ponto de mínimo local, então ela pode ser aproximada, em uma vizinhança em torno desse ponto, por uma parábola com concavidade para cima, facilitando a descrição do sistema físico. Essa afirmação pode ser facilmente verificada utilizando o polinômio de Taylor (Verifique!!!).

Como exemplo mais concreto, considere o potencial de Lennard-Jones:

$$U(r) = 4U_0 \cdot \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right],$$

onde a é uma constante com dimensão de comprimento. Derivando e igualando a zero e depois verificando o sinal da segunda derivada, obtém-se que o ponto $r_0 = a \cdot \sqrt[6]{2}$ é o ponto de mínimo da função. Em uma vizinhança $]r_0 - \epsilon; r_0 + \epsilon[$ de r_0 , o potencial de Lennard-Jones pode, então, ser descrito como uma parábola, facilitando o estudo do sistema físico. Como vocês verão no curso, aparecerá uma força do tipo da lei de Hooke restauradora, que sempre leva a partícula sujeita a esse poço de potencial a oscilar em torno do mínimo, do equilíbrio estável. Podemos visualizar o potencial e sua aproximação na figura 8

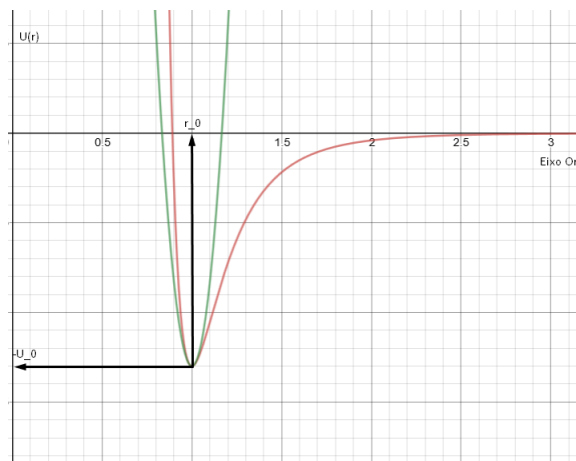


Figura 8: Potencial de Lennard-Jones e sua aproximação por parábola.