

Elementare Integrationstechniken

P.O. Ludl

Universität Wien, Fakultät für Physik
Boltzmanngasse 5, 1090 Wien

Zusammenfassung

Wir wiederholen einfache und häufig benutzte Integrationstechniken und geben zu jedem Kapitel auch einige Übungsbeispiele an.

Die Menge an guten Analysisbüchern ist kaum überschaubar. Jedes Buch hat seine eigenen Vorzüge. Zur Wiederholung und Vertiefung von Analysiskenntnissen seien die beiden Klassiker [1] und [2] empfohlen.

[1] besticht durch seine pädagogisch exzellente Darstellung ohne Verlust mathematischer Exaktheit und Strenge. [2] mag auf den ersten Blick etwas antiquiert wirken, ist aber als Nachschlagewerk unersetzlich und zeichnet sich traditionsgemäß durch die große Nähe zur physikalischen Anwendung aus.

Beide Werke sind mehrbändig ([1]: 2 Bände, [2]: 7 Bände), im Anhang wurden jedoch nur die hier benötigten ersten Bände zitiert.

1 Bestimmte und unbestimmte Integrale

Im Folgenden bezeichnet das Symbol

$$\int_a^b f(x)dx$$

stets das *Riemann-Integral*¹ einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a, b \in I$) auf $[a, b] \subset I$.

1.1 Satz. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in I$. Dann gilt:

(1)

$$\int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von f auf I .

¹Es gibt auch noch andere Integralbegriffe, wie z.B. das Lebesgue-Integral.

(2) Für jede beliebige Stammfunktion F von f auf I gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.2 Definition. Das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

heißt *bestimmtes Integral* von f auf $[a, b]$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 1.1 sagt uns, dass wir das bestimmte Integral berechnen können, wenn wir eine Stammfunktion von f kennen. Eine Stammfunktion von f wird oft *unbestimmtes Integral* von f genannt. Stammfunktionen von integrierbaren Funktionen sind eindeutig bis auf eine additive Konstante.

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist, und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Die Bildung des unbestimmten Integrals ist die Umkehrung der Differentiation:

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Übungsbeispiele

- Wiederhole die Definition des Riemann-Integrals und seine Eigenschaften.

2 Das Auffinden von Stammfunktionen

Sowohl zur Berechnung bestimmter Integrale, als auch zur Lösung von Differentialgleichungen benötigen wir Techniken, die uns erlauben Stammfunktionen zu konstruieren. Beginnen wir mit einer Liste von Stammfunktionen häufig auftretender Funktionen.

$$\begin{aligned}
\int 1 dx &= x + c, \\
\int x^m dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} + c, \quad m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + c, \\
\int e^x dx &= e^x + c, \\
\int \sin x dx &= -\cos x + c, \\
\int \cos x dx &= \sin x + c.
\end{aligned}$$

Diese Tabelle alleine ermöglicht es uns leider noch nicht sehr viele Probleme zu lösen. Wir benötigen zunächst noch Methoden auch kompliziertere Integrale zu berechnen. Es stellt sich heraus, dass sich eine sehr große Klasse von Integralen auf die obigen zurückführen lässt.

Übungsbeispiele

- Beweise die hier angegebenen Integrationsregeln.

2.1 Die Methode der Variablensubstitution

Die Kettenregel für die Differentiation führt uns zu einer möglichen Integrationsmethode - die unbestimmte Integration ist ja nichts anderes als die Umkehrung der Differentiation. Die Kettenregel (in ihrer einfachsten Form) lautet:

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = \frac{dF(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi(t)} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Nach Integration folgt sofort

$$F(\phi(t)) + c = \int \frac{dF(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi(t)} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} dt.$$

Sei nun $F' = f$ (d.h. F ist Stammfunktion von f), dann folgt wegen $F(x) + c = \int f(x) dx$

$$\int f(x) dx\bigg|_{x=\phi(t)} = \int f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt.$$

Ist die Funktion $\phi(t)$ invertierbar, dann können wir schreiben:

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt\bigg|_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

Dies beschreibt die Substitutionsmethode zur Berechnung von Stammfunktionen.

Beispiele

- $\int e^{-ax} dx$. Wir möchten dieses Integral auf $\int e^t dt$ zurückführen, also setzen wir $t = \phi^{-1}(x) = -ax$ und erhalten

$$\int e^{-ax} dx = \int e^t \frac{d\phi(t)}{dt} dt|_{t=\phi^{-1}(x)} = \int e^t \left(-\frac{1}{a}\right) dt|_{t=\phi^{-1}(x)} = \left(-\frac{1}{a} e^t + c\right)|_{t=-ax} = -\frac{e^{-ax}}{a} + c.$$

Wenn wir uns klar darüber sind wie und warum die Substitutionsmethode funktioniert, können wir auch eine nicht ganz rigorose Notation benutzen um die Substitutionsmethode einprägsamer darzustellen, nämlich

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \underbrace{\frac{dx}{dt} dt}_{\text{"}dx\text{"}}|_{t=t(x)}.$$

Dazu ein weiteres Beispiel:

- $\int \frac{1}{1-3x} dx$. Wir setzen $t = 1 - 3x \Rightarrow dt = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}dt \Rightarrow$

$$\int \frac{1}{1-3x} dx = \int \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{3}\right) dt = -\frac{1}{3} \ln|t| + c = -\frac{1}{3} \ln|1-3x| + c.$$

Wir sehen anhand dieser Beispiele, dass die Substitutionsmethode auf jeden Fall zum Ziel führt, falls die eingeführte Funktion $t(x)$ (und damit ihr Inverses $x(t)$) linear ist, da dann die Ableitung $\frac{dx}{dt}$ einfach eine Konstante ist. Das heißt aber nicht, dass die Methode nicht auch in anderen Fällen nützlich sein kann. Dazu zwei Beispiele:

- Wir suchen eine Stammfunktion von $\frac{1}{3x^2-1}$ auf $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. Hier hilft uns die Substitutionsmethode nicht, da sie auf

$$\int \frac{1}{3x^2-1} dx = \int \frac{1}{6t\sqrt{\frac{t+1}{3}}} dt$$

führt, was wir nicht weiter vereinfachen können.

- Wir suchen eine Stammfunktion von $\frac{x}{3x^2-1}$ auf $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. Wir erhalten

$$\int \frac{x}{3x^2-1} dx = \int \frac{x(t)}{6tx(t)} dt = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \ln|t| + c = \frac{1}{6} \ln|3x^2-1| + c.$$

Übungsbeispiele

Berechne folgende Integrale und gib den Definitionsbereich der berechneten Stammfunktion an.

- $\int (x - 7)^{25} dx,$
- $\int \frac{1}{x - 2} dx,$
- $\int \sin\left(\frac{x + 9}{5}\right) dx,$
- $\int \sqrt{x + 1} dx,$
- $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$
- $\int \frac{e^x}{1 - 2e^x} dx.$

2.2 Partielle Integration

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel (Leibniz-Regel) für die Differentiation. Es ist auch empfehlenswert sich die Formel für die partielle Integration über den Zusammenhang mit der Produktregel zu merken, dann können keine Vorzeichenfehler passieren. Die Produktregel lautet:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Subtraktion von fg' und Integration führt auf die partielle Integration

$$\int dx f'g = \underbrace{\int dx (fg)'}_{fg} - \int dx fg',$$

also

$$\boxed{\int f'g \, dx = fg - \int fg' \, dx.}$$

Diese Methode ermöglicht das Auffinden einer Stammfunktion wenn

- die Stammfunktion f von f' bekannt ist, und
- die Stammfunktion von fg' einfach bestimmt werden kann.

Beispiele

- $\int x \sin x \, dx$. Wir wählen

$$f' = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = x$$

und erhalten

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

- Ein interessantes Beispiel ist auch $\int \ln x dx$. Auf den ersten Blick scheint es so, als wäre partielle Integration hier nicht anwendbar, aber interpretieren wir den Integranden als $1 \cdot \ln x$, erhalten wir mit $f' = 1, g = \ln x$:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x (\ln x)' \, dx = x \ln x - x + c.$$

Übungsbeispiele

Berechne folgende Integrale und gib den Definitionsbereich der berechneten Stammfunktion an.

- $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ (Hinweis: benutze partielle Integration und schaue dir beide Seiten der Gleichung genau an.),
- $\int x \cdot \cos x \, dx$,
- $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$,
- $\int \arccos x \, dx$ (Hinweis: $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$),
- Berechne

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx, \quad r > 0$$

mit Hilfe der Substitution $x = r \cdot \sin t$ und anschließender partieller Integration (setze bei der partiellen Integration gleich die Integrationsgrenzen ein und benutze $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt$). Welche geometrische Bedeutung hat das berechnete Integral?

2.3 Partialbruchzerlegung

Wir haben bereits ein Beispiel für eine Funktion gesehen die sehr einfach aussieht, aber dennoch mit den bisherigen Methoden nicht elementar integrierbar ist, nämlich

$$\frac{1}{3x^2 - 1}.$$

Die Substitutionsmethode führte nicht zum gewünschten Erfolg, also müssen wir uns eine andere Methode überlegen. Die zum Ziel führende Methode ist die sogenannte *Partialbruchzerlegung*. Auf unser Beispiel angewandt ist die Grundidee folgende: Der Nenner unserer Funktion lässt sich in Faktoren zerlegen:

$$3x^2 - 1 = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

also

$$\frac{1}{3x^2 - 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Das sieht auf den ersten Blick noch nicht wirklich einfacher aus, doch wie fast immer kommt ja noch ein kleiner Trick. Betrachten wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{A}{x - \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{B}{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ und erhalten

$$1 = A\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + B\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (A + B)x + \frac{1}{\sqrt{3}}(A - B).$$

Koeffizientenvergleich führt auf

$$A + B = 0, \quad A - B = \sqrt{3} \Rightarrow A = -B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{x - \frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{x + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right)$$

und schlussendlich

$$\frac{1}{3x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}x - 1} - \frac{1}{\sqrt{3}x + 1} \right).$$

Die Funktion auf der rechten Seite lässt sich aber mit Hilfe einer Variablensubstitution problemlos integrieren. Wir erhalten

$$\int \frac{1}{3x^2 - 1} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3}x + 1} \right| + c,$$

wobei $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ benutzt wurde.

Dies ist der allereinfachste Fall der sogenannten Partialbruchzerlegung.

Das nächste Beispiel das wir betrachten wollen ist folgendes:

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx.$$

Wenden wir die zuvor besprochene Technik an, erhalten wir:

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Der Partialbruchansatz von vorhin würde hier zu nichts führen. Anstattdessen können wir hier aber die Substitutionsmethode verwenden:

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx = \int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} + c = -\frac{1}{x - 1} + c.$$

Die Funktion

$$\frac{1}{3x^2 + 1}$$

lässt sich jedoch mit den bisherigen Methoden nicht ohne weiteres integrieren, denn $3x^2 + 1$ hat keine reellen Nullstellen². Für solche Ausdrücke kann

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + c \quad (4q - p^2 > 0)$$

benutzt werden. Diese Formel wollen wir herleiten um uns von ihrer Gültigkeit zu überzeugen. Es gilt

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

denn: $(\arctan(y(x)))' = \frac{d}{dy} \arctan(y)|_{y=y(x)} \cdot y'(x)$. Mit der geschickten Wahl $y(x) = \tan x$ erhalten wir

$$1 = \frac{d}{dy} \arctan(y)|_{y=y(x)} \cdot \underbrace{(\tan x)'}_{1 + \tan^2 x = 1 + y(x)^2},$$

also

$$\frac{d}{dy} (\arctan y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

(Effektiv haben wir den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion benutzt. Dieser lautet: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.) Daraus folgt sofort

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + c$$

und mit Hilfe der Substitutionsmethode

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c, \quad (a > 0).$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + px + q} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4q - p^2)} = \\ &= \int \frac{dy}{y^2 + \frac{1}{4}(4q - p^2)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \left(\frac{2y}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + c = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + c. \end{aligned}$$

²komplexe Nullstellen aber sehr wohl!

Zusammenfassung

Wir können bisher die folgenden Brüche integrieren:

- $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + c.$
- $\int \frac{1}{(x-a)^m} dx = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + c.$
- $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c \quad (4q-p^2 > 0).$

Das allgemeine Verfahren der Partialbruchzerlegung ist ziemlich aufwendig, und in der Praxis wird man wohl bei komplizierten rationalen Funktionen auf Computeralgebrasysteme zurückgreifen. Die in der Praxis wichtigste Form der Partialbruchzerlegung ist die Berechnung von

- Integralen der Form

$$\int \frac{dx}{P(x)} = \int \frac{A_1}{x-a_1} dx + \int \frac{A_2}{x-a_2} dx + \dots,$$

wobei $P(x)$ nur einfache reelle Nullstellen a_1, a_2, \dots hat. A_1, A_2, \dots werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt. Bei dieser einfachen Form von Integralen, ist die händische Rechnung (mit anschließender Probe durch Differentiation) auf jeden Fall schneller als die Berechnung mit einem Computeralgebra-Programm (Rechner hochfahren, Programm starten, Integral eingeben, sich ärgern, dass der Computer automatisch annimmt alle Konstanten seien komplex (wodurch im Output des Programms unzählige Fallunterscheidungen auftreten), in der Hilfe nachschlagen wie man reelle Konstanten festlegt,...)

Der Vollständigkeit halber ist die allgemeine Vorschrift zur Partialbruchzerlegung im Anhang angegeben.

Übungsbeispiele

Berechne folgende Integrale und gib den Definitionsbereich der berechneten Stammfunktion an.

- $\int \frac{1}{x^2-1} dx,$
- $\int \frac{1}{x^3-6x^2+11x-6} dx$ (Hinweis: eine Nullstelle des Nenners ist 1),
- $\int \frac{1}{x^2+1} dx.$

2.4 Weitere Typen von unbestimmten Integralen

Zur Behandlung von weiteren Typen unbestimmter Integrale, und für eine Auswahl von Beispielen zu allen vorgestellten Integrationstechniken empfehlen wir die Lektüre von [2], Kapitel 90-92.

2.5 Symmetrien bestimmter Integrale

Zu guter Letzt wollen wir uns noch einmal bestimmten Integralen zuwenden. Betrachten wir das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{400} \cos\left(\frac{x^{47} + 35x^7}{49}\right)}{3\pi x + \arctan(x^{40021} + x^3)} dx.$$

Wir möchten dieses Integral³ berechnen, und zwar wenn möglich ohne dabei den Verstand zu verlieren. Dazu denken wir ein bisschen nach. Das erste, das uns bei genauer Betrachtung auffällt, ist, dass der Integrationsbereich ein *symmetrisches* Intervall um 0 ist. Könnte das der Schlüssel zur Berechnung dieses Integrals sein? In der Tat ist die Berechnung des Integrals nicht nur möglich, sondern sogar sehr einfach, und zwar aus folgendem Grund:

2.1 Satz. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *gerade*, wenn $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und
- *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Es gilt

- f gerade $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- f ungerade $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Beweis: Wir benutzen die Substitutionsmethode:

- f gerade \Rightarrow

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx = \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(-x) dx = \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_a^0 f(y)(-1) dy = \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(y) dy = 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

³Das Integral ist definiert, da die Funktion außer bei 0 überall definiert ist und für $x \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert.

- f ungerade \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx = \\
 &= \int_0^a f(x) dx - \int_{-a}^0 f(-x) dx = \\
 &= \int_0^a f(x) dx - \int_a^0 f(y)(-1) dy = \\
 &= \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(y) dy = 0.
 \end{aligned}$$

□

Wir finden also sofort

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{400} \cos\left(\frac{x^{47} + 35x^7}{49}\right)}{3\pi x + \arctan(x^{40021} + x^3)} dx = 0.$$

Bemerkung: Mathematica ist hier chancenlos, da es nicht erkennt, dass der Integrand ungerade ist.

Wichtige Bemerkung: Bei uneigentlichen Integralen ist Vorsicht geboten! Es gilt zwar

$$\int_{-a}^a \sin x \, dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = 0$$

ist **falsch!** Die Definition lautet nämlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \sin x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} (\cos a - \cos b),$$

und der obige Limes existiert nicht, d.h.

$$\nexists \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx.$$

Übungsbeispiele

- Welche der folgenden Funktionen sind gerade oder ungerade?

$$x, \sin x, \cos(x^3), \arctan(\sin(x)), e^{-x^2}, x+1.$$

- Zeige: Das Produkt zweier gerader oder zweier ungerader Funktionen ist gerade. Das Produkt einer geraden Funktion mit einer ungeraden Funktion ist ungerade. Wie sieht es mit der Zusammensetzung von Funktionen aus (d.h. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$)?

A Die allgemeine Form der Partialbruchzerlegung

A.1 Satz. Sei $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ ein vollständig gekürzter reeller Bruch von Polynomen $Z(x)$ und $N(x)$. Sei weiters

$$N(x) = D(x - a_1)^{p_1}(x - a_2)^{p_2} \cdots (x - a_r)^{p_r} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{q_1} \cdots (x^2 + b_sx + c_s)^{q_s},$$

wobei a_i p_i -fache reelle Nullstellen von $N(x)$ sind und die Binome $(x^2 + b_jx + c_j)$ keine reellen Nullstellen haben. Dann besitzt $f(x)$ folgende Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_{11}}{x - a_1} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1p_1}}{(x - a_1)^{p_1}} + \cdots + \\ & + \cdots + \frac{A_{r1}}{x - a_r} + \frac{A_{r2}}{(x - a_r)^2} + \cdots + \frac{A_{rp_r}}{(x - a_r)^{p_r}} + \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + b_1x + c_1} + \cdots + \frac{B_{1q_1}x + C_{1q_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{q_1}} + \cdots + \\ & + \cdots + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + b_sx + c_s} + \cdots + \frac{B_{sq_s}x + C_{sq_s}}{(x^2 + b_sx + c_s)^{q_s}}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten A_{ij}, B_{kl}, C_{kl} können wieder durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Für Details (insbesondere für den Beweis dieses Satzes) siehe z.B. [1], Kapitel 69.

Nun wissen wir in welche Bausteine wir einen vollständig gekürzten Bruch zerlegen können. Dabei stellt sich zunächst die Frage: Wie kürzt man einen Bruch vollständig? Das Verfahren dazu nennt sich *Polynomdivision* (funktioniert ähnlich wie die Division von Zahlen). Bruder Beispiel ist der beste Lehrmeister:

$$\begin{aligned} (21x^3 + 35x^2 - 2x - 10)/(3x + 5) &= 7x^2 - \frac{2}{3} - \frac{\frac{20}{3}}{3x + 5}. \\ \begin{array}{r} 21x^3 + 35x^2 \\ \underline{- 2x - 10} \\ -2x - \frac{10}{3} \\ \underline{- \frac{20}{3}} \end{array} \end{aligned}$$

Nachdem wir die Polynomdivision durchgeführt haben treten nur noch Brüche der Formen

$$\frac{A}{(x - a)^m} \quad \text{und} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^p}$$

auf. Integrale der Form

$$\int \frac{A}{(x - a)^m} dx$$

können wir bereits berechnen, genauso wie Integrale der Form

$$\int \frac{C}{x^2 + bx + c}.$$

Alle anderen auftretenden Typen lassen sich auf diese beiden zurückführen. Es gilt nämlich:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^p} = \frac{2x + b}{(p-1)(4c - b^2)(x^2 + bx + c)^{p-1}} + \frac{2(2p-3)}{(p-1)(4c - b^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^{p-1}}$$

für $p \geq 2$. Weiters gilt

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2 + bx + c) + \left(C - \frac{bB}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2 + bx + c}$$

und

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^p} dx = -\frac{B}{2(p-1)(x^2 + bx + c)^{p-1}} + \left(C - \frac{bB}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^p} \quad (p \geq 2).$$

Mit diesen Methoden ist es möglich jede rationale Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ zu integrieren.

Wie bereits erwähnt ist wohl bei zu komplizierten Brüchen (vor allem bei solchen wo die angegebenen Rekursionsformeln notwendig werden, also ab $p \geq 2$) die Verwendung von Computeralgebraprogrammen zweckmäßig.

Übungsbeispiele

- $f(x) := \frac{x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 23}{x^2 - 3x + 2}$. Führe die Polynomdivision aus und berechne $\int f(x) dx$.

Literatur

- [1] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis - Teil 1*, B.G. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2003.
- [2] W.I. Smirnow, *Lehrgang der höheren Mathematik - Teil 1*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971; Heute fortgeführt von: Verlag Harri Deutsch.