INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

REGRA DO TRAPÉZIO

MAT 271 – Cálculo Numérico – UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

CALCULAR DE FORMA APROXIMADA UMA INTEGRAL DEFINIDADA

Consideremos que f seja uma função integrável no intervalo $[a, b]$.

Vamos aprender, aqui, técnicas numéricas para calcular, de forma aproximada, a integral definida

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

Serão três técnicas (Regras) baseadas na aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador $p(x)$ no intervalo $[a, b]$, de modo que:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p(x)dx\,.$$

REGRA DO TRAPÉZIO

Vamos considerar o polinômio interpolador de grau ≤ 1 para $f(x)$.

Usaremos $x_0 = a$ e $x_1 = b$ (os limites de integração) para obter tal polinômio.

Usando a interpolação de Newton, por exemplo, obtemos o polinômio interpolador $p_1(x)$ de $f(x)$:

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Observe que $x_1 - x_0 = b - a$, que é comprimento do intervalo de integração.

Vamos chamar este comprimento de h, isto é: $h = x_1 - x_0$.

REGRA DO TRAPÉZIO

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Assim:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b [f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x - x_0)]dx.$$

A integral do lado direito acima pode ser resolvida facilmente, sendo:

$$\int_a^b [f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x - x_0)]dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

REGRA DO TRAPÉZIO

Portanto:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Ou ainda:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]; \ (onde\ h = b - a)$$

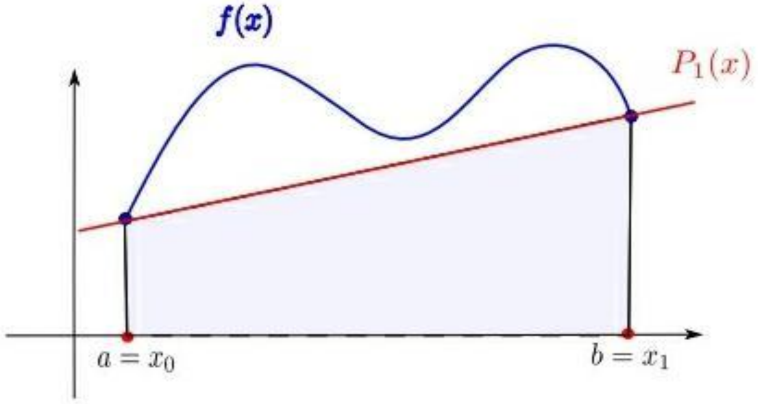
Esta é a Regra do Trapézio (Caso Simples)

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) \ + f(x_1)]$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a) \ + f(b)]$$

$\boxed{f(x) > 0}$



A ÁREA SOB O GRÁFICO DE f NO INTERVALO $[a, b]$ É APROXIMADA

PELA ÁREA DO TRAPÉZIO DE BASES $f(a)$ E $f(b)$ E ALTURA $h = b - a$.

EXEMPLO 1

Vamos aplicar a Regra do Trapézio para resolver de forma aproximada a integral:

$$\int_0^1 e^{-x} dx .$$

Temos: $f(x) = e^{-x}; a = 0, b = 1; h = 1.$

Aplicando a Regra: $\int_0^1 e^{-x} dx \cong \frac{1}{2}[f(0) \ + f(1)] = 0.5[1 + e^{-1}] = 0.6839397$

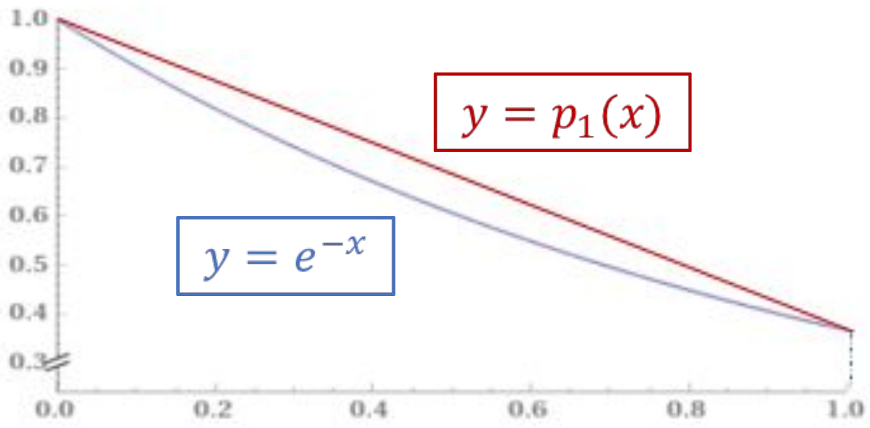
$$\boxed{\int_0^1 e^{-x} dx \cong 0.6839397}$$

EXEMPLO 1

Resolvendo analiticamente a integral (usando o Teorema Fundamental do Cálculo), temos:

$$\int_0^1 e^{-x}dx = (-e^{-x})]_0^1 = [1 - e^{-1}] = 0.6321206$$

$\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6839397 =$ ÁREA DO TRAPÉZIO $\quad \int_0^1 e^{-x}dx = 0.6321206 =$ ÁREA SOB A CURVA $y = e^{-x}$



REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA

Vamos considerar, agora, a divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$.

Assim, podemos obter $n + 1$ pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ do intervalo $[a, b]$, sendo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots, x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Logo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA

Como f é integrável em $[a, b]$:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \,.$$

Vamos, então aplicar a Regra do Trapézio (Caso Simples) a cada integral do lado direito, que é uma integral de $f(x)$ num intervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) \ + f(x_i)]\, , , i = 1, \dots, n.$$

REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

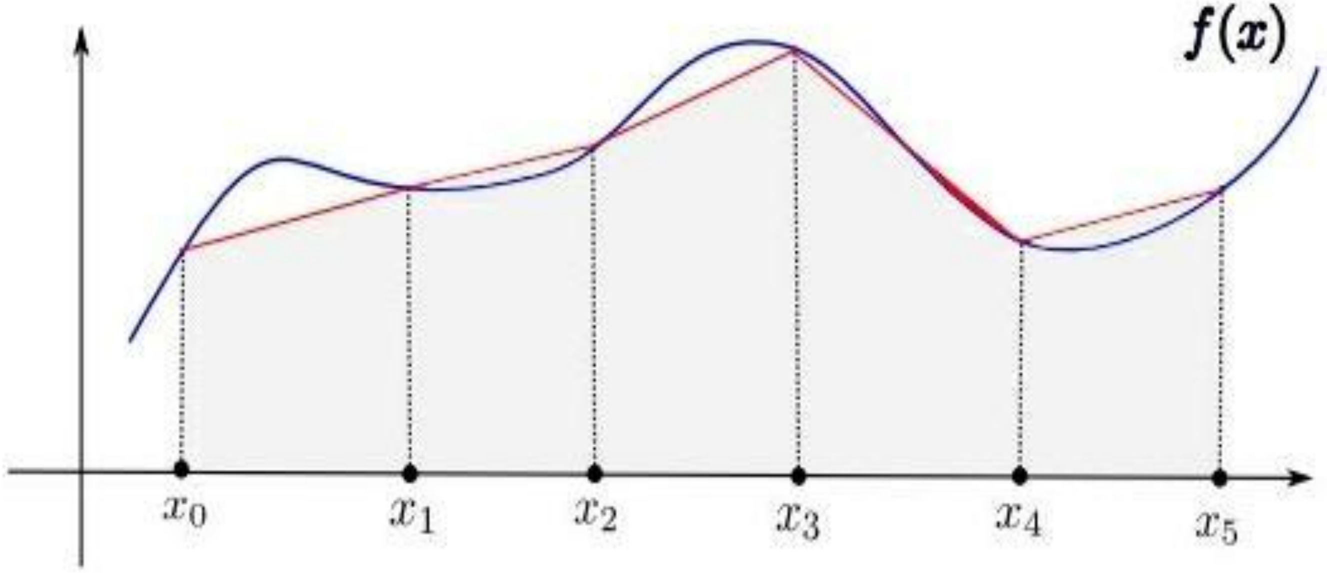
$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]}$$

REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA $n \geq 2$

REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA

ILUSTRANDO: $n = 5$



REGRA DO TRAPÉZIO

REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA $n \geq 2$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$$

REGRA DO TRAPÉZIO SIMPLES $n = 1$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

EXEMPLO 2

Vamos aplicar a Regra do Trapézio Generalizada, com $n = 2$ e $n = 4$ para resolver de forma aproximada a mesma integral do exemplo 1: $\int_0^1 e^{-x} dx$.

Temos: $f(x) = e^{-x}$; $a = 0$, $b = 1$.

Caso $n = 2$: Neste caso, $h = \frac{1-0}{2} = 0.5$, e temos: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1$.

Aplicando a Regra:
$$\int_0^1 e^{-x} dx \cong \frac{0.5}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)] = 0.25[f(0) + 2f(0.5) + f(1)]$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx \cong 0.25[1 + 2e^{-0.5} + e^{-1}] = 0.6452352$$

EXEMPLO 2

Caso $n = 4$:

Neste caso, $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$, e temos: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$ e $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ e $x_4 = 1$.

Aplicando a Regra:

$$\int_0^1 e^{-x} dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) + f(x_4)\right]$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx \cong \frac{0.25}{2}\left[f(0) + 2\big(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)\big) + f(1)\right]$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx \cong 0.125[1 + 2(e^{-0.25} + e^{-0.5} + e^{-0.75}) + e^{-1}] = 0.6354309$$

COMPARANDO

VALOR EXATO DA INTEGRAL:

$$\int_0^1 e^{-x}dx = 0.6321206$$

VALORES APROXIMADOS DA INTEGRAL COM A REGRA DO TRAPÉZIO:

$$(n = 1)\colon \int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6839397$$

CASO SIMPLES

$$(n = 2)\colon \int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6452352$$

$$(n = 4)\colon \int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6354309$$

À medida em que aumentamos o número n de subintervalos, a aproximação melhora.