USANDO O MÉTODO DA BISSEÇÃO NO PROBLEMA DO CABO SUSPENSO

MAT 271 – Cálculo Numérico – UFV/2023-I

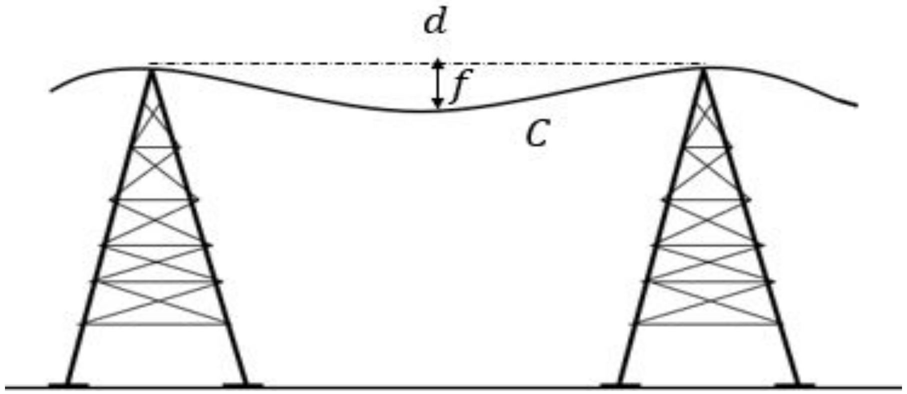
Professor Amarísio Araújo

PROBLEMA APRESENTADO EM AULA ANTERIOR

FONTE: Fundamentos de Cálculo Numérico para Engenheiros – Régis S. de Quadros; Álvaro L. de Bortoli (Porto Alegre, 2009) .

Ao fazer a instalação de uma rede de alta tensão, uma empresa de energia elétrica precisa estimar o comprimento dos cabos suspensos entre as torres.

Problema: Considerando duas torres no mesmo nível que distam entre si 550 metros e tais que os cabos fazem uma "flecha" de 80 metros, determine o comprimento de um cabo entre elas.

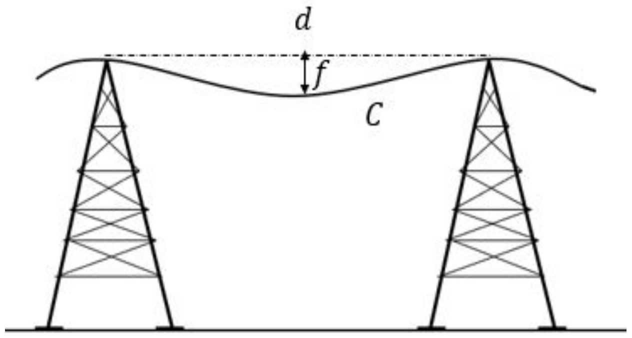


MODELANDO MATEMATICAMENTE O PROBLEMA

A curva plana descrita pelo cabo entre as duas torres, chamada de catenária, é bastante estudada na matemática e em várias engenharias, sendo importantíssima, para para se compreender, por exemplo, o comportamento mecânico de cabos suspensos.

Para uma situação como a descrita no problema acima, pode-se mostrar que o comprimento C do cabo é dado por:

$$C = 2x senh\left(\frac{d}{2x}\right)$$



onde x satisfaz a equação:

$$x\left[cosh\left(\frac{d}{2x}\right) - 1\right] - f = 0$$

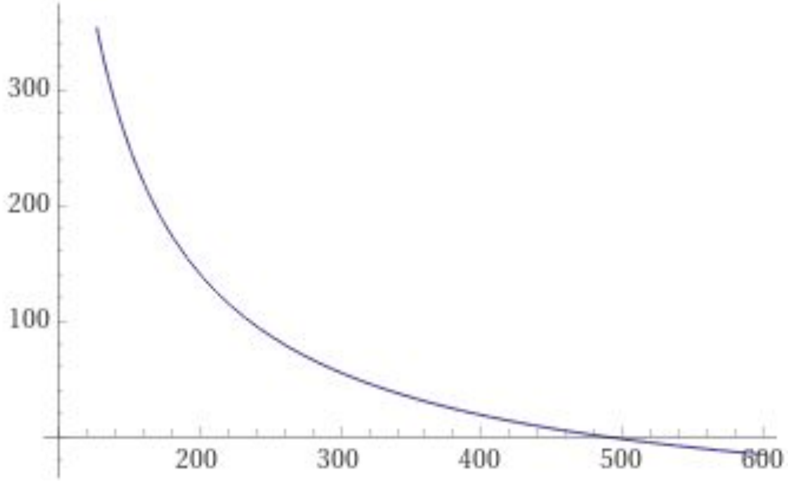
Assim, para o problema em questão, devemos encontrar a solução da seguinte equação não-linear na variável x: $x\left[cosh\left(\frac{550}{2x}\right) - 1\right] - 80 = 0$, e usá-la para calcular o comprimento C, onde:

$$C = 2x senh\left(\frac{550}{2x}\right)$$

RESOLVENDO A EQUAÇÃO NÃO-LINEAR

Temos, então, a equação não-linear $x\left[cosh\left(\frac{550}{2x}\right)-1\right]-80=0$ a ser resolvida.

Façamos um esboço de $f(x)=x\left[cosh\left(\frac{550}{2x}\right)-1\right]-80$ para estabelecer um intervalo de busca.



Usando: https://www.wolframalpha.com/

Podemos tomar $[450\,,500]$ como intervalo de busca.

USANDO O MÉTODO DA BISSEÇÃO

Vamos, então, usar o ***Método da Bisseção*** para encontrar uma aproximação da solução $\bar{x}$ da equação

$$x\left[cosh\left(\frac{550}{2x}\right)-1\right]-80=0$$

no intervalo $[450\,,500]$, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$.

APLICANDO O MÉTODO DA BISSEÇÃO

$f(x) = x\left[cosh\left(\frac{550}{2x}\right) - 1\right] - 80$, $f(450) = 6.6756 > 0$ e $f(500) = -2.44931 < 0$.

Temos: $a_0 = 450$ e $b_0 = 500$. Então $x_1 = \frac{450+500}{2} = 475$.

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_1) = f(475) = 1.8538 > 0$, mesmo sinal de $f(a_0) = f(450) > 0$. Logo: $a_1 = x_1 = 475$ e : $b_1 = b_0 = 500$.

Temos: $a_1 = 475$ e $b_1 = 500$. Então $x_2 = \frac{475+500}{2} = 487.5$.

$$\boxed{\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.0256 > 0.001}$$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_2) = f(487.5) = -0.3571 < 0$, sinal contrário de $f(a_1) = f(475) > 0$. Logo: $a_2 = a_1 = 475$ e : $b_2 = x_2 = 487.5$.

Temos: $a_2 = 475$ e $b_2 = 487.5$. Então $x_3 = \frac{475+487.5}{2} = 481.25$.

$$\boxed{\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0130 > 0.001}$$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_3) = f(481.25) = 0.7328 > 0$, mesmo sinal de $f(a_2) = f(475) > 0$. Logo: $a_3 = x_3 = 481.25$ e : $b_3 = b_2 = 487.5$.

APLICANDO O MÉTODO DA BISSEÇÃO

Temos: $a_3 = 481.25$ e $b_3 = 487.5$. Então $x_4 = \frac{481.25+487.5}{2} = 484.375$.

$$\boxed{\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.0065 > 0.001}$$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_4) = f(484.375) = 0.1841 > 0$, mesmo sinal de $f(a_3) = f(481.25) > 0$. Logo: $a_4 = x_4 = 484.375$ e : $b_4 = b_3 = 487.5$.

Temos: $a_4 = 484.375$e $b_4 = 487.5$. Então $x_5 = \frac{484.375+487.5}{2} = 485.9375$.

$$\boxed{\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.0032 > 0.001}$$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_5) = f(485.9375) = -0.0875 < 0$, sinal contrário ao de $f(a_4) = f(484.375) > 0$. Logo: $a_5 = a_4 = 484.375$ e : $b_5 = x_5 = 485.9375$.

Temos: $a_5 = 484.375$ e $b_5 = 485.9375$. Então $x_6 = \frac{484.375+485.9375}{2} = 485.15625$.

$$\boxed{\frac{|x_6 - x_5|}{|x_6|} = 0.0016 > 0.001}$$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_6) = f(485.15625) = 0.0481 > 0$, mesmo sinal de $f(a_5) = f(484.375) > 0$. Logo: $a_6 = x_6 =$485.15625 e : $b_6 = b_5 = 485.9375$.

RESOLVENDO A EQUAÇÃO

Temos: a_6 =485.15625 e $b_6 = 485.9375$. Então $x_7 = \frac{485.15625+485.9375}{2} = 485.546875$.

$$\boxed{\frac{|x_7 - x_6|}{|x_7|} = 0.0008 < 0.001}$$

Portanto $\bar{x} \approx x_7 = 485.546875$, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$.

A equação $x\left[cosh\left(\frac{550}{2x}\right) - 1\right] - 80 = 0$ tem uma solução aproximada $\bar{x} = 485.5469$, com precisão tal que o erro relativo da aproximação é menor que $\varepsilon = 0.001$.

Usando, agora, a equação $C = 2xsenh\left(\frac{550}{2x}\right)$, com o valor aproximado $x = \bar{x} \cong 485.5469$

$$C \cong 579.8798$$

Portanto o comprimento do cabo entre as torres deve ser de aproximadamente 580 metros