EST 105

INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA

RESUMO

Probabilidade - Aula 5

Departamento de Estatística – UFV
Av. Peter Henry Rolfs, s/n
Campus Universitário
36570.977 – Viçosa, MG
http://www.det.ufv.br/

Teorema da Probabilidade Total

Suponha que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sejam uma partição do espaço amostral S, ou seja, $B_i \cap B_j = \emptyset$ com $i \neq j$ (eventos mutuamente exclusivos) e $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$ e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha ainda que para um evento qualquer A de S, se conheçam $P(A|B_i)$, para todo i=1, 2, ..., n. Assim, tem-se:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Ou seja, **relaciona a probabilidade de um evento com suas probabilidades condicionais**.

Exemplo 13

Os estudantes em uma pré-seleção para empresa júnior são classificados em 10% ótimos, 60% bons e 30% regulares. Um novo teste é proposto para classificar os estudantes em aprovado ou reprovado. Com base na classificação anterior, foram obtidas as seguintes **probabilidades condicionais** com o novo teste:

Classes	Ótimo	Bom	Regular
% de aprovados	95	80	10

Pede-se:

a) **Calcule a probabilidade de um estudante ser aprovado na seleção.**

b) **Calcule a probabilidade de um estudante não ser aprovado na seleção.**

Teorema de Bayes

Suponha que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ formem uma partição do espaço amostral S e que suas probabilidades $P(B_i)$ sejam conhecidas. Suponha ainda que para um evento A se conheçam as probabilidades condicionais $P(A|B_i)$ para todo $i = 1,2, \ldots, n$. Então, para qualquer $j = 1,2, \ldots, n$,

$$P\left(B_j \middle| A\right) = \frac{P\ (B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

em que $P(B_i) > 0$ e $P(A|B_i) > 0$ para todo $i = 1,2, \ldots, n$.

Voltando ao exemplo 13...

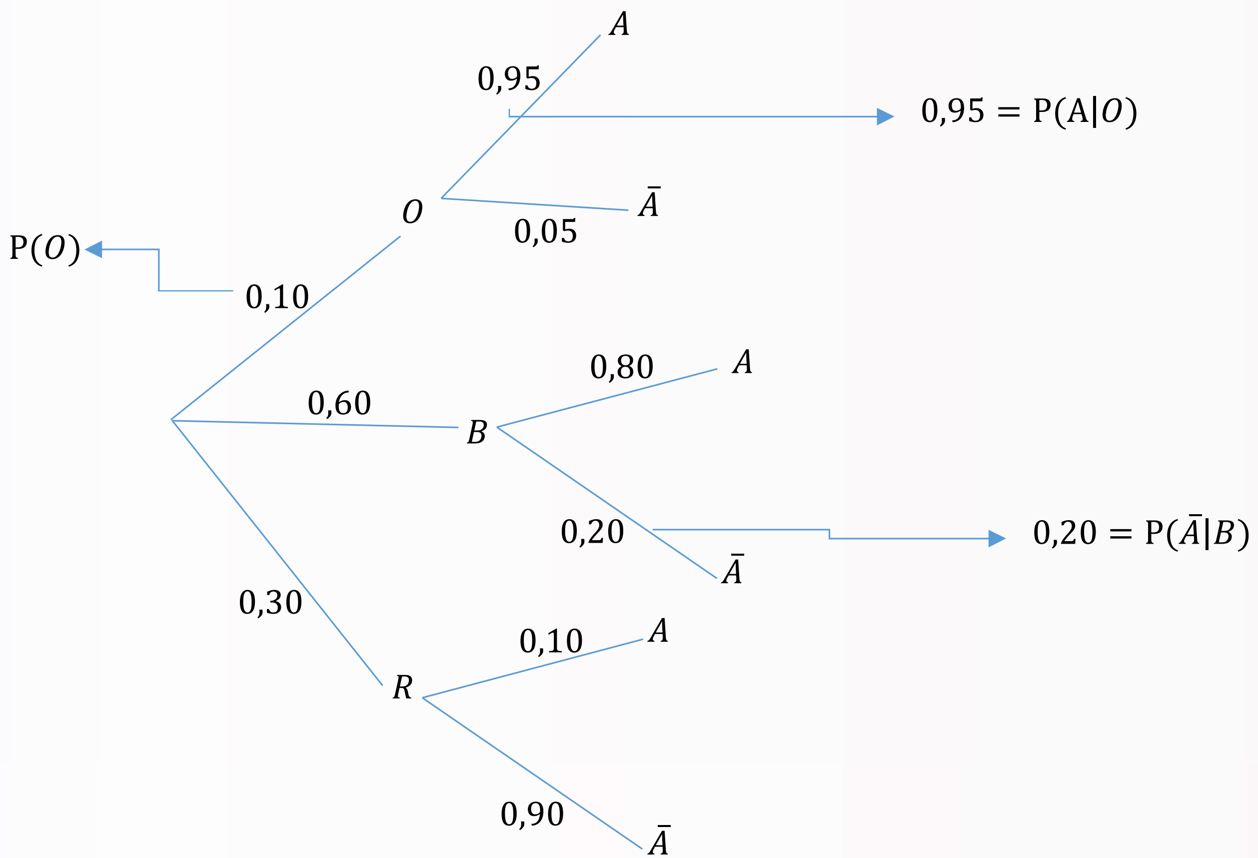
Probabilidades	$P(O) = 0{,}10$	$P(B) = 0{,}60$	$P(R) = 0{,}30$
Probabilidades condicionais	$P(A\|O) = 0{,}95$	$P(A\|B) = 0{,}80$	$P(A\|R) = 0{,}10$
	$P(\bar{A}\|O) = 0{,}05$	$P(\bar{A}\|B) = 0{,}20$	$P(\bar{A}\|R) = 0{,}90$

c) Sabendo que o estudante foi aprovado no teste, qual a probabilidade dele pertencer à classe ótimo?

d) Sabendo que o estudante não foi aprovado no teste, qual a probabilidade dele pertencer à classe bom.

Diagrama em Árvore

Classes	Ótimo (10%)	Bom (60%)	Regular (30%)
% de aprovados	95	80	10



$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}|B)P(B)}{P(\bar{A})}$$

Diagrama de árvore

- $P(O) = 0,10$
  - $P(A|O) = 0,95$ → $P(A \cap O) = P(A|O)P(O) = 0,095$
  - $P(\bar{A}|O) = 0,05$ → $P(\bar{A} \cap O) = P(\bar{A}|O)P(O) = 0,005$
- $P(B) = 0,60$
  - $P(A|B) = 0,80$ → $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,480$
  - $P(\bar{A}|B) = 0,20$ → $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}|B)P(B) = 0,120$
- $P(R) = 0,30$
  - $P(A|R) = 0,10$ → $P(A \cap R) = P(A|R)P(R) = 0,030$
  - $P(\bar{A}|R) = 0,90$ → $P(\bar{A} \cap R) = P(\bar{A}|R)P(R) = 0,270$

$+$

1

Exemplo 14

Admita o seguinte: (i) 80% do total dos estudantes do campus são de graduação, enquanto que apenas 20% são de pós-graduação; (ii) metade dos estudantes de graduação reside em alojamento dentro do campus, contra apenas 10% dos pós-graduandos; (iii) todos os estudantes (graduação e pós) que residem fora do campus consideram o preço do almoço do RU barato, enquanto que dos residentes no campus, 20% dos de graduação e 70% dos de pós-graduação, consideram o preço barato.

UFV

Considere os seguintes eventos:

$$G = \text{“}ser\ aluno\ de\ graduação\text{”}$$

$$\bar{G} = \text{“}ser\ aluno\ de\ pós - graduação\text{”}$$

$$A = \text{“}o\ aluno\ morar\ no\ alojamento\text{”}$$

$$\bar{A} = \text{“}o\ aluno\ não\ morar\ no\ alojamento\text{”}$$

$$B = \text{“}o\ aluno\ achar\ o\ RU\ barato\text{”}$$

$$\bar{B} = \text{“}o\ aluno\ não\ achar\ o\ RU\ barato\text{”}$$

a. Se aleatoriamente for entrevistado um estudante e ele informar que acha o preço do almoço barato, qual é a probabilidade condicional dele ser um estudante de pós-graduação residente fora do campus.

b. Se aleatoriamente for entrevistado um estudante e ele informar que reside fora do campus, qual é a probabilidade condicional dele achar o RU barato.

UFV

Atividade Proposta

Resolver os exercícios do Roteiro de Aulas abaixo relacionados:

- Exercício 15 – pág. 90
- Exercício 17 – pág. 90
- Exercício 26 – pág. 91
- Exercício 38 – pág. 94
- Exercício 49 – pág. 96
- Exercício 54 – pág. 98

UFV