MAT131 - Introdução à Álgebra

Anderson Tiago da Silva

Universidade Federal de Viçosa

Conjuntos

Definição

Um conjunto é uma coleção de objetos, que chamaremos de elementos do conjunto.

Notação: Desiguinaremos letras Maiúsculas para representar conjuntos. Ex: A,B, C, D,...X,Y,Z.

Letras minúsculas para representar elementos. Ex: a,b, c, d,...x,y,z.

Pertinência

Para dizermos quem um elemento "x" pertence ou não pertence a um conjunto A, usaremos o simbolo $\in$ e $\notin$, respectivamente.
Por exemplo, $x \in A$ (x pertence a A) ou $x \notin A$ (x não pertence a A).

Representação de conjuntos

Comumente usa-se três procedimentos para representar um conjunto:

i) Descrever seus elementos por uma sentença. Por exemplo:
   - Conjunto dos números naturais.
   - Conjunto dos triângulos retângulos.

ii) Listar seus elementos entre chaves. Por exemplo:
   - $\{2, 4, 6, 8\}$
   - $\{-5, 5, -4, 4, -3, 3, -2, 2, -1, 1, 0\}$

iii) Dar uma propriedade que identifique seus elementos. Por exemplo:

- $\{x \in \mathbb{N} | X > 6\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 8\}$.

Conjunto Vazio, Unitário e Universo

1)- Conjunto Vazio: è o conjunto sem elementos e pode ser representado pelo símbolo $\emptyset$ (podemos representar também o conjunto vazio com qualquer propriedade contraditória, ex: $\emptyset = \{x|x > 0 \text{ e } x < 0\}$).

2)- Conjunto Unitário: É o conjunto formado por um único elemento.

3)- Conjunto Universo: É uma representação de todos os elementos possíveis em dado conjunto. Na teoria dos conjuntos e nos fundamentos da matemática, um universo é uma classe que contém (como elementos) todas as entidades que se deseja considerar em uma certa situação. Assim, todos os conjuntos em questão seriam subconjuntos de um conjunto maior, que é conhecido como conjunto universo e indicado geralmente por U. Ex: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Conjuntos Numéricos

1) Números Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Pode-se considerar os naturais retirando-se o elemento 0 e descrevê-lo como $\mathbb{N}^{\star} = \{1, 2, \cdots\}$.

2)- Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

$\mathbb{Z}^{*} = \{\cdots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots\}$.

$\mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ e $\mathbb{Z}_{+} = \mathbb{Z}_0^{+} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

$\mathbb{Z}^{-} = \{\cdots - 3, -2, -1, \}$ e $\mathbb{Z}_{-} = \mathbb{Z}_0^{-} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0\}$.

3)- Números racionais: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}| \quad p,\ q \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ q \neq 0\}$.

$\mathbb{Q}^* = \{\frac{p}{q}| \quad p,\ q \in \mathbb{Z}^*\}$.

$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{p}{q}| \quad p,\ q \in \mathbb{Z}^* \ \text{ e } \ p.q > 0\}$.

$\mathbb{Q}_- = \{\frac{p}{q}| \quad p,\ q \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ p.q < 0\}$.

4)- Números Irracionais: $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x|x$ é um número decimal não exato com representação infinita e não periódica$\}$.

5)- Números Reais: $\mathbb{R} = \{x|x \in \mathbb{Q} \text{ ou } \mathbb{I}\}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}|x > 0\}$ e $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}|x \geq 0\}$

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}|x < 0\}$ e $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R}|x \leq 0\}$

7)- Números Complexos: $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}\}$.

Revisão de Intervalos

- Intervalo Fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
- Intervalo Aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- Intervalo Semiaberto a direita: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
- Intervalo Semiaberto a esquerda: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

Conjuntos Finitos e Infinitos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{N}$. *Dizemos que:*

i) *A é limitado inferiormente se existe um* $x_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_0 \leq x$, *para todo* $x \in A$. *E,* x_0 *é dito cota ou limitante inferior.*

ii) *A é limitado superiormente se existe um* $x_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x \leq x_1$, *para todo* $x \in A$. *Dizemos que* x_1 *é uma cota ou limitante superior.*

iii) *A é limitado se A é limitado superiormente e inferiormente.*

Conjunto Finito

Definição

Dizemos que um Conjunto A é finito se uma das duas coisas a seguir acontecer:

1) *A é vazio.*
2) *É possível associar a cada elemento de $I_m = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ um e somente um elemento de A, para algum $m \in \mathbb{N}$.*

Quando conseguimos estabelecer a correspondência entre os elementos de A e os de I_m, dizemos que A possui m elementos, denotado por $n(A) = m$ e, nesse caso escrevemos $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. No caso de A ser vazio, escrevemos $n(A) = 0$.

Exemplos

1)-Prove que todo conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$ é limitado.

Demonstração.

Feito no quadro $\square$

2)- Considere os números $1, 2, 3, 4, 5$. Prove que o conjunto $C = \{B : B$ possui 3 números $\}$ é finito.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

conjuntos Infinitos

Definição

Um conjunto A é dito infinito se A não for finito. Ainda,

- *O conjunto é dito infinito enumerável se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e os elementos de $\mathbb{N}$.*
- *Caso contrário, diremos que A é infinito não enumerável.*

Exemplo

O conjunto dos números pares é enumerável.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

Alguns Resultados Úteis

Proposição

Seja $f : A \to B$ injetiva. Se B é enumerável então A também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

Proposição

Seja $f : A \to B$ sobrejetiva. Se A é enumerável, então B também é enumerável.

Proposição

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Proposição

A união de uma família de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Exercício

O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Relações entre Conjuntos

Definição

Dizemos que um conjunto A está contido em B (ou A é um subconjunto de B)e denotaremos por $A \subset B$, se todo elemento de A é também elemento de B. Representaremos esta relação simbolicamente por:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Naturalmente, se A não esta contido em B, então existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Proposição

i) $A \subset A, \forall A.$

ii) *Se* $A \subset B$ *e* $B \subset C$, *então* $A \subset C$.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

Igualdade de Conjuntos

Definição

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais, e denotamos por $A = B$ se ambos possuem os mesmos elementos, ou seja, se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Proposição

1) $\forall A,\ A = A.$
2) *Se* $A = B$, *então* $B = A$.
3) *Se* $A = B$ *e* $B = C$, *então* $A = C$.

Quando $A \subset B$, mas $A \neq B$, dizemos que A é um subconjunto próprio de B.

Equivalência de Conjuntos

Definição

Dados dois conjuntos não vazios A e B, dizemos que A é equivalente a B se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e os elementos de B.

Quando A é equivalente a B escrevemos $A \equiv B$, caso contrário $A \not\equiv B$.

Definição

Dois conjuntos A e B são ditos comparáveis se um deles é subconjunto do outro. Isto é, se ocorre $A \subset B$ ou $B \subset A$. Se $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$, dizemos que A e B não são comparáveis.

Família de Conjuntos

Definição

Chamamos de família de conjuntos, ao conjunto cujos elementos são conjuntos. Tal família é denotada por $\{A_i\}_{i \in J}$ *, onde cada* A_i *é um conjunto e* J *é um conjunto finito ou infinito enumerável, chamado de conjunto de índices.*

Definição

Dado um conjunto A, o conjunto de partes de A, denotado por $\mathscr{P}(A)$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.
Simbolicamente $\mathscr{P}(A) = \{X : X \subset A\}$.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Logo

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Proposição

1) $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
2) $A \subset B$ *se, e somente se,* $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$.
3) $A = B$ *se, e somente se,* $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

Exercício

Assumindo que $2^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$, *mostre que se* A *possui* n *elementos, então* $\mathscr{P}(A)$ *possui* 2^n *elementos.*

Operações Entre Conjuntos

Definição

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Definimos a união de A e B, denotado por $A \cup B$, como o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A, a B ou aos dois conjuntos. Simbolicamente temos:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Proposição

1) $A \cup A = A$.
2) $A \cup \emptyset = A$.
3) $A \cup U = U$.
4) $A \cup B = B \cup A$.
5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
6) $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$.
7) $A \subset B$ *se, e somente se,* $A \cup B = B$.
8) *Se* $A \subset C$ e $B \subset D$ *então* $(A \cup B) \subset (C \cup D)$.
9) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$.
10) $A \cup B = \emptyset$ *se, e somente se* $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$.

Interseção

Definição

Dados dois conjuntos A e B, definimos oconjunto interseção, e denotamos por $A \cap B$, como o conjunto formado por elementos comuns a A e B.
Simbolicamente temos:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Proposição

1) $A \cap A = A.$
2) $A \cap \emptyset = \emptyset.$
3) $A \cap U = A.$
4) $A \cap B = B \cap A.$
5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$
6) $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B.$
7) $A \subset B$ *se, e somente se,* $A \cap B = A.$
8) *Se* $A \subset C$ e $B \subset D$ *então* $(A \cap B) \subset (C \cap D).$

Continuação

9) Se $A \subset B$, então $A \cap C \subset B \cap C$.
10) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
11) $A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$.
12) $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Diferença entre Conjuntos

Definição

Definimos a diferença entre dois conjuntos A e B, denotada por $A - B$, como sendo o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.
Simbolicamente temos:

$$A - B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Proposição

1) $A - A = \emptyset.$
2) $A - \emptyset = A.$
3) $\emptyset - A = \emptyset.$
4) $A \neq B \Rightarrow A - B \neq B - A.$
5) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$
6) $(A - B) \subset A.$
7) $A \subset B \Rightarrow (A - C) \subset (B - C).$

Proposição

8) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset.$

9) $B \cap (A - B) = \emptyset.$

10) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A.$

Diferença Simétrica

Definimos a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B, e denotamos por $A \triangle B$, como sendo o conjunto formado pelos elementos que pertencem a $A \cup B$ e que não pertencem a $A \cap B$.
Simbolicamente temos:

$$A \triangle B = \{x \in U : x \in (A \cup B) \text{ e } x \notin (A \cap B)\}.$$

Proposição

1) $A \triangle A = \emptyset$.
2) $A \triangle \emptyset = A$.
3) $A \triangle B = B \triangle A$.
4) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
5) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
6) $(A \cup C) \triangle (B \cup C) \subset (A \triangle B) \cup C$.
7) $(A \triangle B) \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.

Complementar

Definição

Sejam A e B conjuntos com $A \subset B$. Definimos o complemento de A em B, e denotaremos por $\mathscr{C}_B^A$, como sendo o conjunto de elementos que pertencem a B e não pertencem a A, ou seja, $\mathscr{C}_B^A = B - A$.
Simbolicamente temos

$$\mathscr{C}_B^A = \{x \in U : x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

No caso em que $B = U$, denotaremos $\mathscr{C}_U^A = A^c$.

Proposicao

Proposição

$A \subset B$

1) $\mathscr{C}_A^A = \emptyset.$
2) $\mathscr{C}_A^{\emptyset} = A.$
3) $\mathscr{C}_B^{A \cap C} = \mathscr{C}_B^A \cup \mathscr{C}_B^C.$
4) $\mathscr{C}_B^{A \cup C} = \mathscr{C}_B^A \cap \mathscr{C}_B^C.$

Para A e B quaisquer temos o seguinte:

1) $(A^c)^c = A$.
2) $U^c = \emptyset$ e $\emptyset^c = U$..
3) $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = U$.
4) $A - B = A \cap B^c$.
5) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

Leis de De Morgan ou Leis de Dualidade

1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.