UFV Universidade Federal de Viçosa

Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

UFV Universidade Federal de Viçosa

$4^{\underline{a}}$ Lista de MAT 140 - Cálculo I 2019/II

Lista elaborada por Lilian Neves Santa Rosa Valentim - DMA/UFV

---

1. Determine a derivada de cada função a seguir:

   (a) $f(x) = x\,ln\,x$
   (b) $f(x) = x\,e^{2x}$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x\,ln\,x}$
   (d) $f(x) = \dfrac{x\,tg\,x}{ln\,x}$
   (e) $f(x) = 3^{x}\,e^{x}$
   (f) $f(x) = e^{x}\,cos\,x$
   (g) $f(x) = e^{x}\,arcsen\,x$
   (h) $f(x) = x\,arccos\,x$
   (i) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{arcsen\,x}$
   (j) $f(x) = e^{3x^2+5}$
   (k) $f(x) = arcsen\,(e^{x})$
   (l) $f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x^2+4x}\right)$
   (m) $f(x) = e^{x^2} + 2\,cos\,(x^2+4)$
   (n) $f(x) = \dfrac{sen\,(3x^2-5)}{e^{2x}}$
   (o) $f(x) = ln\,(sen\,x + cos\,x)$
   (p) $f(x) = \sqrt{ln\,(x^2+1)}$
   (q) $f(x) = e^{2x}\,arctg\,(3x)$
   (r) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$
   (s) $f(x) = arctg\,(\sqrt{x^2+2})$
   (t) $f(x) = sen\,x\,arcsec\,(3x)$
   (u) $f(x) = ln\,(2x)\,arcsen\,(x^2)$

2. Utilizando derivação implícita, determine $\dfrac{dy}{dx}$:

   (a) $x^2 + y^2 = \sqrt{7}$
   (b) $x\,y + x + y = 5$
   (c) $x\,ln\,y + y^3 = ln\,x$
   (d) $cos^2\,y + sen^2\,y = y + 2$
   (e) $e^{cos\,y} = x^3\,arctg\,y$
   (f) $e^{x^2} + ln\,y = 0$
   (g) $y\,tg\,(x+y) = 4$
   (h) $e^{cos\,x} + e^{sen\,y} = \dfrac{1}{4}$

3. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto indicado:

   (a) $x\,y^2 = 1$ em $(1,-1)$.
   (b) $ln\,(x\,y) = 2x$ em $(1, e^2)$.
   (c) $sen\,(x\,y) = x$ em $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
   (d) $y^2 = \dfrac{x^2}{x\,y-4}$ em $(4,2)$.

4. A função $f(x) = x^3 - 9x$ é crescente para $x < -\sqrt{3}$. Se g é a função inversa de f neste intervalo, encontre $g'(0)$.

5. A função $f(x) = x^3 - 9x$ é decrescente para $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Se h é a função inversa de f neste intervalo, encontre $h'(0)$.

6. Dada a função $f(x) = x\,sen\,x$, calcule $f'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. Para cada item a seguir, faça o que se pede:

   (a) Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, determine a derivada de ordem n e calcule $f^{(n)}(2)$.
   (b) Dada a função $f(x) = e^{2x}$, determine a derivada de ordem n e calcule $f^{(n)}(1)$.
   (c) Dada a função $f(x) = sen\,x$, determine a derivada de ordem n e calcule $f^{(50)}(0)$.
   (d) Dada a função $f(x) = cos^2\,x$, determine a derivada de ordem n e calcule $f^{(10)}(0)$.

8. Calcule, se possível, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-\frac{2}{7}}{x+1}\right)^{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{4}{x}}$

9. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

(a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

(b) $f(x)=2-e^{-x}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x}$

(d) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

(e) $f(x)=x\,e^{-x}$

(f) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

10. Seja f a função definida por $f(x)=2x-\sqrt{x^2+3}$, $x\in\mathbb{R}$.

(a) Verifique que f' é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Verifique que $f'(x)\neq0$ para todo x em $\mathbb{R}$.

(c) Tendo em vista que $f'(0)>0$, conclua que f é estritamente crescente.

11. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão:

(a) $f(x)=xe^{-2x}$

(b) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

(c) $f(x)=x\,e^{1/x}$

(d) $f(x)=x\,ln\,x$

(e) $f(x)=e^{-2x}$

(f) $f(x)=x+sen\,x$

12. Para cada uma das funções a seguir, determine:

(i) Os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente,

(ii) Os valores de máximo e mínimo local de f,

(iii) Os intervalos nos quais f possui concavidade para baixo ou para cima e os pontos de inflexão, se existirem.

(a) $f(x)=x^4-2x^2+3$

(b) $f(x)=sen\,x+cos\,x$, $0\leq x\leq2\pi$.

(c) $f(x)=e^{2x}+e^{-x}$

(d) $f(x)=\dfrac{ln\,x}{\sqrt{x}}$

13. Esboce os gráficos das funções a seguir indicando: o domínio, as interseções com os eixos (se houver), as assíntotas (se houver), os pontos críticos (se houver), os intervalos de crescimento e decrescimento, os extremos relativos (se houver), os intervalos onde o gráfico possui concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão (se houver).

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

(b) $f(x)=\dfrac{2x}{9-x^2}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x}$

(d) $f(x)=\dfrac{16-x^2}{(x-2)^2}$

(e) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

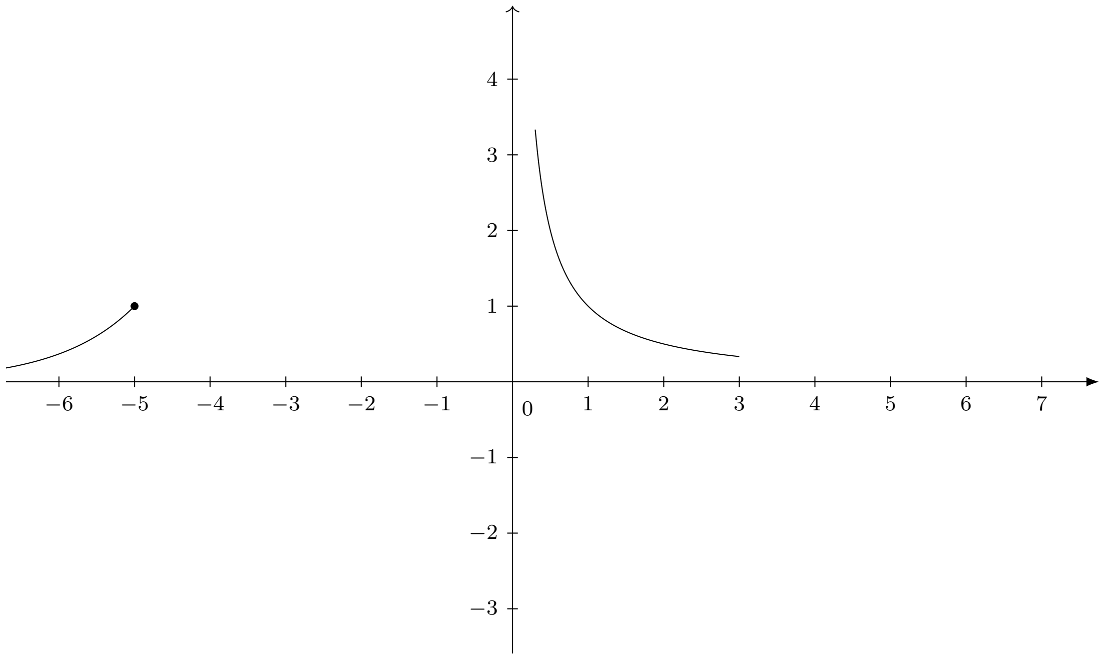
(f) $f(x)=e^{-x^2}$

(g) $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2}$

14. Seja $y=f(x)$ uma função definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, contínua em todo o seu domínio e satisfazendo as seguintes condições:

$$f(-5)=2, f(-4)=1, f(-3)=3, f(-3/2)=4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

Suponha que o gráfico de $f'(x)$ seja dado pela figura a seguir:



Responda, justificando, o que se pede:

(a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente;

(b) os pontos onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal;

(c) os pontos de máximos e mínimos relativos, caso existam;

(d) os intervalos onde o gráfico de f possui concavidade para cima e onde possui concavidade para baixo;

(e) os pontos de inflexão, caso existam;

(f) as assíntotas verticais e horizontais, caso existam;

(g) esboce o gráfico de uma função f que satisfaça as condições acima.

15. Mostre que $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$ tem exatamente uma raiz real.

16. Suponha que f seja uma função ímpar e que seja derivável em todo seu domínio. Demonstre que para todo número positivo b existe $c \in (-b, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)}{b}$.

17. Mostre que $|sen\, a - sen\, b| \leq |a - b|$, para todo a, $b \in \mathbb{R}$.

18. Sabendo que f' é crescente e $f(0) = 0$, mostre que $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente no intervalo $(0, +\infty)$.

19. Uma escada de $6m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razão de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a $4m$ do solo?

20. Dois carros, um dirigindo-se para o leste à taxa de $72km/h$ e o outro para o sul à taxa de $54km/h$ estão viajando em direção ao cruzamento de duas rodovias. A que taxa os carros se aproximam um do outro, no instante em que o primeiro estiver a $400m$ e o segundo estiver a $300m$ do cruzamento?

21. Um tanque tem a forma de um cone circular reto invertido, com $4m$ de altura e $2m$ de raio da base. Se a água entra no tanque à razão de $0,001m^3/min$, calcule a razão na qual o nível da água está subindo quando a profundidade é de $1m$.

22. Ao ser aquecida uma chapa circular de metal, seu diâmetro varia à razão de $0,01cm/min$. Determine a taxa à qual a área de uma das faces varia quando o diâmetro está em $30cm$.

23. Um incêndio em um campo aberto se alastra em forma de círculo. O raio do círculo aumenta à razão de $1m/min$. Determine a taxa à qual a área incendiada está aumentando quando o raio é de $20m$.

24. Uma luz está no alto de um poste de $5m$. Um menino de $1,6m$ se afasta do poste à razão $1,2m/s$. A que taxa aumenta o comprimento de sua sombra quando ele está a $6m$ do poste? A que taxa se move a ponta de sua sombra?

25. A areia que vaza de um depósito forma uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao raio. Se a altura da pilha aumenta à razão de $15cm/min$, determine a taxa à qual a areia está escoando quando a altura da pilha é $25cm$.

26. Suponha que uma bola de neve esférica é formada de tal maneira que seu volume aumenta à taxa de $8dm^3/min$. Determine a taxa a qual o raio é aumentado quando a bola de neve tem $4dm$ de diâmetro.

27. As extremidades de um cocho horizontal de 8 m de comprimento são trapézios isósceles de bases de $2m$ e $1m$. A altura do cocho é de $0,6m$. Se o nível da água está subindo à razão de $0,1cm/min$, quando a profundidade da água é de $0,3m$, com que velocidade a água está entrando no cocho?

28. Às $8h$ o navio A está $25km$ ao sul do navio B. Se o navio A está navegando para o oeste à $16km/h$ e o navio B está navegando para o sul a $20km/h$ então determine a razão em que a distância entre os navios está variando às $8h30min$.

29. Um farol giratório completa uma volta a cada 15 segundos. O farol está a $60m$ de P, o ponto mais próximo em uma praia retilínea. Determine a razão em que um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto, Q, a $150m$ de P.

30. Suponha que uma bola de neve esteja se derretendo, com raio decrescendo à razão constante, passando de $30cm$ para $20cm$ em 45 minutos. Qual a variação do volume quando o raio está com $25cm$?

31. Uma pessoa que solta um papagaio segura a corda a $1,5m$ do solo. A corda é liberada à razão de $0,6m/s$ na medida em que o papagaio se move horizontalmente a uma altura de $33,5m$. Supondo que a corda fique sempre esticada, determine a taxa à qual o papagaio está se movendo no instante em que foram liberados $38m$ de corda.

32. Um balão de ar quente sobe verticalmente à medida que uma corda, amarrada à sua base, é liberada à razão de $1m/min$. O carretel que libera a corda está a $6,5m$ da plataforma de embarque dos passageiros. A que taxa o balão está subindo quando tiverem sido liberados $150m$ de corda?

33. Da beira de um rochedo $60m$ acima de um lago um menino deixa cair um pedra e, depois de $2s$ deixa cair outra pedra da mesma posição. Discuta a taxa na qual a distância entre as pedras varia durante o próximo segundo (Admita que a distância percorrida em t segundos por um objeto em queda livre é $4,9t^2m$).

34. Um míssil é lançado verticalmente para cima de um ponto que está a $8km$ de uma estação de rastreamento, e à mesma altura desta. Durante os primeiros 20 segundo de voo, seu ângulo de elevação varia à razão constante de $\frac{\pi}{90}rads/s$. Determine a velocidade do míssil quando o ângulo de elevação for $\frac{\pi}{6}rads$.

35. Um meliante foge sobre uma muralha reta a uma velocidade de $4m/s$. Um holofote localizado a $20m$ de distância da muralha, e mesma altura que esta, focaliza o homem em fuga. A que taxa o holofote está girando quando o meliante se encontra a $15m$ do ponto da muralha que está mais próximo do holofote?