Regra de L'Hôpital

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2022-2

As formas indeterminadas são as seguintes:

(i) $0/0$;

(ii) $\pm\infty/\pm\infty$;

(iii) $0 \cdot (\pm\infty)$;

(iv) $\infty - \infty$;

(v) 0^0;

(vi) $(\pm\infty)^0$;

(vii) $1^{\pm\infty}$.

As últimas 5, para serem resolvidas, devem ser transformadas nas duas primeiras.
Observe que 0^{∞} não é indeterminação.

Exemplos de Formas indeterminadas:

(i) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1 - 2^x}$;

(iii) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$;

(iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$;

(v) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Regra de L'Hôpital I: Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em $a \in I$.Suponha que para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$. Então se $\lim_{x\to a} f(x) = 0\ (\pm\infty)$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0\ (\pm\infty)$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, segue que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Obs:

(i) A regra continua valendo se em a forem considerados limites laterais à esquerda ou à direita;

(ii) A regra continua valendo se trocarmos L por $\pm\infty$;

(iii) A regra pode ser aplicada várias vezes.

Regra de L'Hôpital II: Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > n$, $n \in \mathbb{R}_+^*$. Suponha que para todo $x > n$, $g'(x) \neq 0$. Então se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\ (\pm\infty)$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0\ (\pm\infty)$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, segue que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Obs:

(i) A regra continua valendo se trocarmos $x \to \infty$ por $x \to -\infty$;

(ii) A regra continua valendo se trocarmos L por $\pm\infty$;

(iii) A regra pode ser aplicada várias vezes.

- LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. I e II*, São Paulo, Editora Harbra: 1990.
- STEWART, J. *Cálculo - vol I e II*, São Paulo, Thomson Learning: 2002.