LISTA 2 – INTERPOLAÇÃO E SISTEMAS LINEARES

1. Determine o polinômio interpolador de grau ≤ 2 de uma certa função f nos seguintes pontos tabelados:

x_i	1	-1	2
$f(x_i)$	0	-3	4

2. A tabela abaixo mostra a população (em milhões) do Brasil de 1960 a 2010.

Ano	1960	1970	1980	1990	2000	2010
População	72.7759	96.0604	121.7404	149.6483	174.5049	195.2102

   Estime a população do Brasil no ano 1975, usando interpolação cúbica (de grau 3).

3. Considere os polinômios reais $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ e $r(x)$, sabendo-se que estes polinômios satisfazem as seguintes condições interpolatórias:

$$\begin{array}{lll} p(-2) = r(-2) = 31 & p(-1) = r(-1) = 5 & p(0) = r(0) = 1 \\ p(1) = r(1) = 1 & p(2) = r(2) = 11 \quad \text{e} & r(3) = 30 \end{array}$$

   Escreva uma expressão da forma $r(x) = p(x) + c\phi(x)$ de modo a relacionar os polinômios interpoladores r e p. Indique a expressão de ϕ e calcule o valor da constante c. Justifique.
   Resp: $r(x) = p(x) - 31/120(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$.

4. Considere a função real $y(t) = \frac{A}{2}t^2 + Bt + C$ da qual se conhecem os valores a seguir tabelados

t	0.2	0.3	0.4	0.5
$y(t)$	0.940	0.655	0.577	0.706

   a) Aplique o método de interpolação de Newton para determinar os valores de A, B e C. **Resp:** $A = 20.70, B = -8.025$ e $C = 2.131$.

   b) Sendo s um ponto arbitrário do intervalo $[0.2, 0.5]$, qual é o valor máximo do erro absoluto de interpolação que se comete ao calcular um valor aproximado de $y(s)$ por interpolação linear (isto é, com polinômios de grau não superior a 1)? Justifique. **Resp:** 0.025875.

5. Seja $h(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$

   a) Efetuando cálculos exatos, determine o polinômio que interpola a função h nos pontos $-1, 0, 1$ e 2. **Resp:** $p(x) = x^3/12 - x^2/2 - x/12 + 1$

   b) Use o polinômio anterior para estimar o valor de $h(5\pi/24)$ e obtenha um majorante do respectivo erro de interpolação.
   Resp: $|f(5\pi/4) - P_3(5\pi/4)| \leq 0.025$

6. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	1	2	3	5
$f(x_i)$	0.9	0.7	0.6	0.5

   a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine uma expressão para o polinômio p, de menor grau e interpolador de f, nos 3 nós mais próximos de 4. Calcule um valor aproximado de $f(4)$.
   Resp: $f(4) \simeq 0.5333\cdots$

   b) Supondo que

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

   apresente um majorante para o erro absoluto que se comete ao aproximar $f(2.5)$ por $P_2(2.5)$.
   Resp: $|f(2.5) - P_2(2.5)| \leq 0.403$

7. Considere uma função de variável real f, tal que

$$f(1) = 1, \quad f(x) = f(x-2) + (x-1)^2, \quad x > 0.$$

   a) Determine o polinômio que interpola f em $x = 1, x = 3$ e $x = 5$.

   b) Mostre que $f[x, x+2, x+4, x+6] = \frac{1}{6}, \quad \forall x \geq 1$. Com base nesta igualdade e admitindo que $f \in C^3([1, \infty[)$, mostre que f é um polinômio e determine o seu grau.

8. Determinar um valor aproximado do ponto no intervalo $[0, 1]$, onde $3/2 \sin(x) = e^{-x}$.
Resp: $x = 0.44200$

9. Considere a tabela a seguir:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y = e^x$	1	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6487

Obtenha uma aproximação para o valor de x que satifaz $e^x = 1,3165$, usando interpolação quadrática. Usar a fórmula de Newton para obter $P_2(y)$. Construir a tabela de diferenças divididas. Estimar o erro cometido.

10. Resolva o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 8 \\ -6 & 3 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

usando fatorização LU (fatorização de Doolitle).
Resp: $x_3 = -2, x_2 = -1,$ e $x_1 = 3$

11. Aplique o metodo de Gauss-Seidel para resolver

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 3 \end{cases}$$

considerando um erro absoluto de $\epsilon = 0.04$ e $X^{(0)} = [\ 3 \ \ 3 \ \ -1]^T$.

12. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} \ \ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -1 \end{cases}$$

 a) Verificar a possibilidade de aplicação do método de Gauss-Siedel, usando o Criterio de Sassenfeld.

 b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item (a) com $X^{(0)} = [\ 0.5 \ \ 0.5 \ \ 0.5]^T$ e obtendo o resultado com erro absoluto $< 10^{-2}$.

13. Considere os seguintes sistemas de equações lineares

$$(I) \begin{cases} -9x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 11 \\ \ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{e} \quad (II) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

 a) Resolva os sistemas dados usando o método de Decomposição LU que considerar mais apropriado.

 b) Será possível obter a fatorização de Cholesky para a matriz dos coeficientes dos sistemas dados? Justifique.

 c) Caso haja convergência garantida, resolva os sistemas dados pelo Método Iterativo de Gauss-Siedel com $X^{(0)} = \ [0.1 \ \ 0.2 \ \ 0.5]^T$ e $\epsilon = 0.01$.

14. Dados os sistemas lineares

$$(I) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad (III) \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

estude a convergência do método de Gauss-Seidel para cada um dos sistemas dados usando o critério do raio espectral. Mostre que, reordenando as equações e incógnitas, podemos fazer com que o critério de Sassenfeld seja satisfeito, mas não o critério das linhas. Resolva-os.

15. a) Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

 Se aplicarmos o método de Jacobi-Richardson a um sistema $AX = b$, com b qualquer, poderemos garantir convergência desse método?

 b) Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

pode-se garantir que o método de Jacobi-Richardson é convergente?

16. Considere o sistema linear $AX = b$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

   a) Diga, justificando, se o método de Jacobi-Richardson é convergente para a solução do sistema dado. Em caso afirmativo, inicie o processo usando $X^{(0)} = [\ 100 \quad -100\ ]^T$ e faça 3 iterações usando o método de Jacobi-Richardson .

   b) Fazendo $X^{(0)} = [\ 0 \quad 0\ ]^T$ e efetuando cálculos exatos, obtenha a iterada $X^{(2)}$ bem como o erro absoluto $\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_\infty$

17. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 & = 0 \\ x_1 & = 5 \end{cases}$$

cuja solução é $X = [\ 5 \quad 5 \quad 9\ ]^T$.

   a) Escreva um sistema equivalente, de modo que o método de Jacobi-Richardson seja aplicável. Justifique. Obtenha a fórmula iteradora que lhe permite calcular aproximações de X por esse método.

   b) Fazendo $X^{(0)} = [\ 1 \quad 1 \quad 1\ ]^T$, calcule $X^{(3)}$.