

MAT146 - Cálculo I - Teste da Segunda Derivada

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Vimos anteriormente, que sob certas condições, é possível dizer se determinado ponto crítico é máximo ou mínimo relativo utilizando o teste da primeira derivada. Para isso é necessário estudar o sinal da primeira derivada. Estudar o sinal da primeira derivada pode ser um trabalho relativamente difícil. Desta maneira, pode ser conveniente em alguns casos aplicar um outro resultado para estabelecer as mesmas conclusões, chamado **Teste da Segunda Derivada**.

Teorema (Teste da Segunda Derivada)

Seja c um número crítico de f tal que $f'(c) = 0$ e $f'(x)$ exista em um intervalo aberto I contendo c . Suponha que $f''(c)$ existe. Desta forma,

- (i) se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c ;
- (ii) se $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c .

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - 1.$$

Vamos encontrar os máximos e mínimos relativos de f , caso existam.

Para isso, devemos encontrar os pontos críticos. Como f é derivável, os pontos críticos são pontos tais que $f'(x) = 0$. Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Exemplo

Assim, os pontos de abscissa $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ são os únicos pontos críticos de f . Vamos utilizar o teste da segunda derivada para classificar tais pontos. Devemos calcular a segunda derivada.

$$f''(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

Assim,

- ▶ $f''(0) = 2 > 0$, ou seja, $x = 0$ é um ponto de mínimo relativo.
- ▶ $f''(1) = -1 < 0$, ou seja, $x = 1$ é um ponto de máximo relativo.
- ▶ $f''(2) = 2 > 0$, ou seja, $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo.

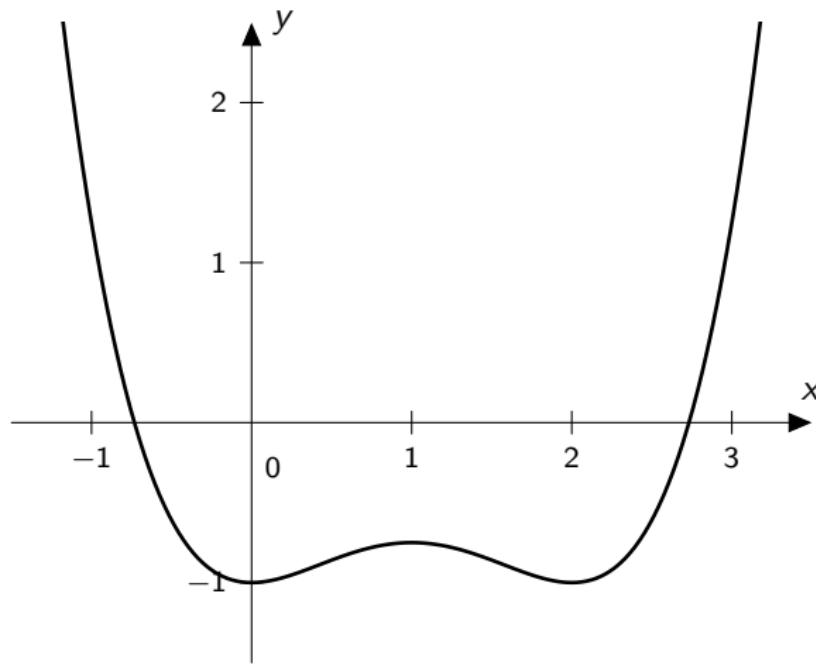


Figura : Gráfico da função $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - 1$.