EST 105

INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA

RESUMO

Probabilidade - Aula 1

Departamento de Estatística – UFV
Av. Peter Henry Rolfs, s/n
Campus Universitário
36570.977 – Viçosa, MG
http://www.det.ufv.br/

Conceitos iniciais

Probabilidade é essencial no estudo de fenômenos aleatórios ou probabilísticos, já a física é essencial no desenvolvimento de modelos para experimentos determinísticos. Vejamos a diferença:

- **Experimento Determinístico:** Experimentos para os quais há modelos que **permitem determinar os resultados** a partir das condições em que o experimento foi realizado.

Exemplo: Suponha que se percorra uma distância $d = 120\ Km$ em $t = 1{,}5\ horas$. Qual é a velocidade?

$$v = \frac{d}{t} = \frac{120\ Km}{1{,}5\ horas} = 80\ Km/hora$$

Portanto, nesse experimento OBRIGATORIAMENTE a velocidade será igual a 80 $\boldsymbol{Km/hora}$.

❖ **<u>Experimento Probabilístico ou aleatório</u>:** Experimentos em que **as condições de execução não determinam o resultado final**, mas sim, pode-se estudar o comportamento probabilístico de todos os possíveis resultados observáveis.

❖ Os resultados dos **<u>experimentos probabilísticos ou aleatórios</u>** podem não ser os mesmos, ainda que sejam repetidos sob condições essencialmente idênticas.

Geralmente, representado pela letra maiúscula E.

Exemplos de Experimentos aleatórios:

$a)$ E_1: "Realizar um teste de vida útil de uma lâmpada e anotar os tempos em horas t_i $(i = 1,2, \dots, n)$ até queimar"

$b)$ E_2: "Lançar uma moeda e observar a face superior"

$c)$ E_3 : "Lançar um dado e observar a face superior"

❖ **Espaço amostral:** Consiste no conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Todo e qualquer experimento aleatório está associado a um espaço amostral.

O espaço amostral, geralmente, é representado por Ω (ômega) ou por S.

Aos experimentos aleatórios exemplificados anteriormente estão associados os seguintes espaços amostrais, respectivamente:

a) $S_1 =$

b) $S_2 =$

c) $S_3 =$

❖ **<u>Evento</u>:** Um evento é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Sendo assim, o próprio espaço amostral (Ω ou S – **evento certo**) e o conjunto vazio ∅ (**evento impossível**) também constituem eventos.

Um evento é representado por meio de uma letra maiúscula, como por exemplo, A, B, C, etc.

<u>Calculamos probabilidades associadas eventos de interesse</u>.

Aos experimentos aleatórios exemplificados anteriormente estão associados os seguintes eventos, respectivamente:

$a)\;\; A_1 = \{Tempo\ de\ duração\ da\ lâmpara\ ser\ inferior\ \text{à}\ 100\} =$

$b)\;\; A_2 = \{Observar\ a\ face\ cara\} =$

$c)\;\; A_3 = \{sair\ um\ número\ par\} =$

Operações básicas entre eventos

Novos eventos podem ser originados de eventos já existentes por meio das operações básicas entre eventos.

❖ **União:** A união de dois eventos A e B, denotada por A∪B, representa a ocorrência de **pelo menos** um dos eventos.

i. **Exemplo de eventos do Experimento aleatório E_3 :**

$$A_3 = \{sair\ um\ número\ par\} =$$

$$B_3 = \{sair\ um\ número\ menor\ que\ 4\} =$$

A união entre os eventos A_3 e B_3 é dada por:

$A_3 \cup B_3 =$

❖**Intersecção:** A intersecção do evento A com o evento B, denotada por A∩B, representa a **ocorrência simultânea** dos eventos.

i. Exemplo de eventos do Experimento aleatório $\boldsymbol{E_3}$:

$$A_3 = \{sair\ um\ n\acute{u}mero\ par\} =$$

$$B_3 = \{sair\ um\ n\acute{u}mero\ menor\ que\ 4\} =$$

A intersecção entre os eventos A_3 e B_3 é dada por:

$$A_3 \cap B_3 =$$

❖**Complementação:** Seja A um evento qualquer do espaço amostral Ω.

$\boldsymbol{\overline{A}}$ **ou** $\boldsymbol{A^c}$ **é dito evento complementar de A** se consiste no conjunto de todos elementos do espaço amostral Ω, exceto os elementos de A.

i. **Exemplo de eventos do Experimento aleatório $\boldsymbol{E_3}$:**

$$\bar{A}_3 =$$

$$\bar{B}_3 =$$

Atenção: Podemos verificar as seguintes condições entre o evento e seu complementar:

$$A \cap \bar{A} = \varnothing \text{ e } A \cup \bar{A} = S\,.$$

UFV

Propriedades das operações com eventos

As propriedades a seguir são úteis tanto na demonstração dos resultados quanto na resolução de exercícios de probabilidade.

i. Comutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

ii. Associativa:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propriedades das operações com eventos

iii. Distributiva:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

iv. Leis de De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \ \text{ ou } A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \ \text{ ou } A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$$

Eventos mutuamente exclusivos

Sejam A e B eventos quaisquer de um espaço amostral S. A e B são ditos eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos se, e somente se, a ocorrência do evento A impede a ocorrência do evento B e vice-versa. Sendo assim,

$$A \cap B = \emptyset.$$

i. **Exemplo de eventos mutuamente exclusivos do Experimento aleatório $\boldsymbol{E_3}$:**

$$A_3 = \{sair\ um\ número\ par\} =$$

$$C_3 = \{sair\ um\ número\ ímpar\} =$$

Conceitos de probabilidade

1. Probabilidade Clássica (ou probabilidade *a priori*)

- Conceito mais antigo.
- É uma regra prática e objetiva para o cálculo de probabilidades.
- Para utilizá-lo é preciso que o espaço amostral seja finito, enumerável e equiprovável.

Equiprovável: Todos os elementos possuem a mesma probabilidade de ocorrência.

- **Definição:** Considere um experimento aleatório E e, seja S um espaço amostral a ele associado (finito, enumerável e equiprovável), composto de n elementos. A probabilidade de qualquer evento A de S, denotado por $P(A)$, é dado pela razão entre f = número de elementos de A e n = número de elementos de S. Isto é,

$$P(A) = \frac{f}{n}.$$

Ou equivalentemente, $P(A) = \frac{NCF}{NCP}$, em que NCF é o número de casos favoráveis ao evento A e NCP é o número de casos possíveis em S.

Exemplo 1

Considere o lançamento de dois dados perfeitamente simétricos, portanto o espaço amostral pode ser indicado por $S = \{(x_1, x_2): x_i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6),\ i = 1, 2\}$, em que x_1 e x_2 são, respectivamente, os números da face superior dos dados 1 e 2.

Pede-se:

a) **Construa o espaço amostral.**

b) **Calcule a probabilidade de que o 1º dado mostre a face 2.**

c) **Calcule a probabilidade de que o 2º dado mostre uma face par.**

d) **Calcule a probabilidade de que o 1º dado mostre a face 2 e o 2º dado mostre uma face par.**

e) **Calcule a probabilidade de que o 1º dado mostre a face 2 ou o 2º dado mostre uma face par.**