INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

Bulmer Mejía García

29 de março de 2023

Conteúdo

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Capítulo 2

LÓGICA PROPOSICIONAL

A Lógica Matemática é uma subárea da Matemática, cujo principal interesse é explorar as diversas aplicações da lógica formal ou simbólica em diferentes áreas do conhecimento.

A lógica formal pode ser entendida como a forma de pensamento para organizar o raciocínio sem considerar o conteúdo, ou seja é o estudo dos processos válidos do raciocínio humano e automatizado, com a finalidade de aplicá-los corretamente para validar e demonstrar uma afirmação.

A lógica, o pensamento ou raciocínio lógico, é importante no processo de aprendizagem e desenvolvimento científico. Com o avanço da tecnologia e surgimento de novas áreas e tendências na formação profissional, a lógica se aplica, por exemplo:

- ☞ Desenvolvimento de softwares e computadores;
- ☞ Inteligência artificial;
- ☞ Análise de dados;
- ☞ Matemática computacional;
- ☞ Compreensão de argumentos (matemáticos, físicos, químicos, etc) corretos, através da análise de proposições e suas componentes, ou seja, uma demonstração.

Assim como existe a lógica formal, existe a lógica informal, que se encarrega do estudo da argumentação em língua natural, como por exemplo os diálogos de Platão.

A lógica formal dividi-se em dois grupos:

- ☞ Lógica proposicional;
- ☞ Lógica de predicados.

Neste capítulo, estudaremos os aspectos essenciais da lógica proposicional (desenvolvida por primeira vez, de forma sistemática, pelo filósofo grego Aristóteles), através do uso de uma simbologia adequada.

2.1 Proposições

Definição 1 *Uma Proposição é um enunciado ou sentença declarativa que tem a propriedade fundamental de ser* **verdadeira***, V, ou* **falsa***, F, não sendo possível assumir ambos valores simultaneamente.*

Uma proposição será representada por letras minúsculas e quando necessário usaremos subíndices para distinguir uma da outra:

$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad t, \ldots$$

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \ldots, \quad p_n$$

Que uma sentença seja verdadeira ou falsa, significa que a proposição possui um valor lógico bem definido. A partir disto, a definição acima nos diz que para um enunciado ser considerado como proposição, deve ser possível atribuir um valor lógico para ela, sem depender de particularidades do enunciado para isto.

O *valor lógico* ou *valor verdade* de uma proposição pode ser visto como a função $v : P \longrightarrow \mathcal{F}$, que a cada proposição $p \in P$ associa o valor $v(p) \in \mathcal{F}$, onde $P = \{p : p \quad \text{é uma proposição}\}$ e $\mathcal{F} = \{V, F\}$.

A partir disto, passaremos a escrever $v(p) = V$ ou $v(p) = F$, para indicar o valor lógico de uma proposição.

A título de informação, em computação e engenharia, é comum assumir $\mathcal{F} = \{1, 0\}$, onde uma proposição é verdadeira se $v(p) = 1$ e é falsa se $v(p) = 0$. Aqui não usaremos essa convenção.

Exemplo 1 *As seguintes sentenças são proposições:*

(a) Todas as vogais em português têm pronuncia aberta.

(b) Um ângulo reto mede 90^o.

(c) Dez é diferente de cinco.

(d) Cinco vezes cinco é igual a vinte e cinco.

(e) Oito é maior do quatro e menor do que onze.

Conforme mencionado antes, quando uma sentença é uma proposição, esta será representada por uma letra. Uma representação das sentenças do exemplo anterior é:

p : Todas as vogais em português têm pronuncia aberta.
t : Um ângulo reto mede 90^o.
q : Dez é diferente de cinco.
r : Cinco vezes cinco é igual a vinte e cinco.
s : Oito é maior do quatro e menor do que onze.

Exemplo 2 *Os enunciados a seguir não são proposições:*

(a) *Quantas vogais tem o alfabeto português?*

(b) *O triplo de um número menos quatro é sempre igual a cinco.*

(c) *Excelente notícia!*

(d) $x^2 - 3x - 5 = 0$

Quando uma sentença não é considerada proposição não há necessidade de representá-la.

Observação 1 *Em ocasiões, nos deparamos com sentenças como:* $x^2 - 4x - 5 = 0$. *Neste caso, estamos diante de uma sentença aberta, pois depende do valor da variável x para ela ser verdadeira ou falsa.*

Sendo este o caso, iremos usar a notação $p(x)$, que se lê "p de x", para representar $x^2 - 4x - 5 = 0$, ou seja, escreveremos $p(x) : x^2 - 4x - 5 = 0$.

Note que $p(-5) : (-5)^2 - 4(-5) - 5 = 0$ e que $p(-1) : (-1)^2 - 4(-1) - 5 \neq 0$. Portanto, $v(p(-5)) = V$, enquanto $v(p(-1)) = F$.

Exemplo 3 *Determinar o valor verdade das seguintes proposições (justificar o valor associado):*

(a) *Belo Horizonte é a capital do estado de Minas Gerais.*

(b) *Para toda força corresponde uma força de reação de igual intensidade e no mesmo sentido da primeira.*

(c) $2 + 3 > 10 - 4$

(d) *O número 1331 é divisível por 11.*

Solução: *Pondo*

p : *Belo Horizonte é a capital do estado de Minas Gerais.*
q : *Para toda força corresponde uma força de reação de igual intensidade e no mesmo sentido da prime*
r : $2 + 3 > 10 - 4$
t : *O número 1331 é divisível por 11.*

Vejamos agora o valor verdade de cada proposição:

$v(p) = V$, *pois assim define o governo do estado de Minas Gerais.*
$v(q) = F$, *pois o enunciado é contrário à terceira lei de Newton.*
$v(r) = F$, *uma vez que 5 não é maior que 6.*
$v(t) = V$, *uma vez que* $1331 = 11 \times 121$

Exemplo 4 *Justificar se as sentenças declarativas a seguir são ou não proposições*

(a) *Você estuda na UFV?*

(b) *Preste atenção nas aulas!*

(c) $x + 3 \geq 3$

(d) $3x + 2y = 10$

Solução: *Analisemos cada uma das sentenças dadas.*

A sentença em (a) é uma interrogação, a qual não pode ser atribuído um valor verdade definido. Cuidado para não pretender atribuir um valor verdade a resposta dessa sentença.

A sentença em (b) é uma exclamação que carece de valor verdade definido.

A sentença em (c) é uma desigualdade, cujo valor verdade depende do valor da variável x.

A sentença em (d) define uma reta, cujo valor verdade depende dos valores que assumem as variáveis x e y.

Exemplo 5 *Decida quais das sentenças a seguir são proposições, justificando sua resposta.*

(a) *Por um ponto de uma reta passa uma e somente uma reta perpendicular a ela.*

(b) *Ela está jogando futebol.*

(c) *João está jogando tênis.*

(d) $x = 2$ *é solução da equação* $x^2 - 2x = 0$.

(e) *Qual é sua idade?*

(f) $x^2 + 1 < 0$ *para todo número real* x.

(g) $ax^2 + bx + c = 0$.

(h) $\cos(x) = sen(x)$.

(i) *A função* f *dada por* $f(x) = x$ *é injetora.*

Solução:

(a) *É uma proposição já que esta afirmação é um dos cinco postulados (de Euclides) válidos da geometria plana. O valor verdade desta proposição é V.*

(b) *Não é uma proposição, pois o sujeito "ela" não define claramente quem é a pessoa e daqui não se pode atribuir um valor verdade ao enunciado.*

(c) *É uma proposição, pois será verdadeira se João está jogando tênis e falsa em caso contrário.*

(d) *É uma proposição verdadeira, pois* $x = 2$ *é raiz da equação proposta.*

(e) *Não é uma proposição, pois não tem como associar um valor verdade a essa pergunta.*

(f) *É uma proposição que é falsa para quaisquer* $x \in \mathbb{R}$.

(g) *Não é uma proposição. É uma equação cujo valor verdade depende dos valores da variável* x.

(h) Não é uma proposição. É uma equação cujo valor verdade depende dos valores da variável x.

(i) É uma proposição, cujo valor verdade é V, pois satisfaz a definição de função injetora. A saber, uma função f é injetora se para quaisquer dois pontos $x_1 \neq x_2$ no domínio de f, temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.1.1 Proposições Simples e Compostas

1. Proposição Simples: Chamada também de proposição atômica ou elementar. É uma sentença que possui um único sujeito e um único complemento.

Exemplo 6 *São proposições simples os seguintes enunciados:*
p : *8 não é par*
q : *17 é um número primo*
r : *Todo trapézio é uma figura plana regular*
t : *Todo paralelogramo é um quadrilátero*

2. Proposição Composta: É a proposição formada por várias proposições simples, cada uma destas ligadas por conectivos.

Exemplo 7 *São proposições compostas os seguintes enunciados:*
Oito não é par e cinco é primo
Nove é divisível por três ou quarenta e dois é múltiplo de sete
Um número natural é divisível por dois se, e somente se, é par
Se as retas L_1 e L_2 são perpendiculares à reta L, então L_1 é paralela a L_2

Exemplo 8 *Para cada uma das proposições compostas a seguir, identificar as proposições simples que a compõem e o(s) termo(s) que as conecta(m):*

(a) Oito não é par e cinco é primo

(b) Nove é divisível por três ou quarenta e dois é múltiplo de sete

(c) O número natural n é divisível por dois se, e somente se, n é par

(d) Se as retas L_1 e L_2 são perpendiculares à reta L, então L_1 é paralela a L_2

Solução: *Em cada item representaremos as proposições simples que aparecem.*

(a) Aqui p_1 : Oito é par e p_2 : |Cinco é primo. Os conectivos são: **Não** *e* **e**.

(b) Aqui q_1 : Nove é divisível por três, q_2 : Quarenta e dois é múltiplo de sete. O conectivo é: **ou**.

(c) Aqui s : O número natural n é divisível por dois, t : O número n é par. O conectivo é: **se e somente se**.

(d) Aqui p_1 : A reta L_1 é perpendicular à reta L, p_2 : A reta L_2 é perpendicular à reta L, q : A reta L_1 é paralela à reta L_2. Os conectivos são: **e**, **se..., então**.

Observação 2 *O valor lógico de uma proposição composta depende dos valores verdade das proposições simples que a compõem.*

Observação 3 *Cada proposição composta possui um conectivo principal, o qual define seu valor verdade.*

2.2 Operações com Proposições

Da mesma forma que na Álgebra se estudam operações entre números, na lógica proposicional estudamos operações entre proposições. Os operadores lógicos definem as operações.

Nesta seção vamos estudar as operações: Negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional.

2.2.1 Negação ($\sim$)

Dada uma proposição p, sua negação é a proposição $\sim p$. O valor verdade de $\sim p$ é contrário ao valor verdade de p.

A leitura de $\sim p$ é: "não p", "não é verdade p", "não é o caso de p"

p	$\sim p$
V	F
F	V

Exemplo 9 *Determinar a negação literal das proposições: p : 5 é maior do que 2; q : Por dois pontos no plano passa uma única reta; r : 1121 é um número par*

Solução: *De acordo com a definição da operação $\sim$, apresentamos algumas formas literais de como pode ser escrita a negação:*

$\sim p$: *Não é o caso que 5 seja maior do que 2 / Não é verdade que 5 seja maior do que 2 / 5 não é maior do que 2 / 5 é menor ou igual a 2.*

$\sim q$: *Não é o caso que por dois pontos no plano passe uma única reta / Não é verdade que por dois pontos no plano passe uma única reta / Por dois pontos no plano não passa uma única reta.*

$\sim r$: *Não é o caso que 1121 seja um número par / Não é verdade que 1121 seja um número par / 1121 não é par / 1121 é ímpar*

Exemplo 10 *Simbolizar as proposições a seguir:*

(a) Não é verdade que dez seja múltiplo de três.

(b) Não é o caso que a soma de cinco com três seja menor do que dez.

(c) É falso que um quadrado seja um paralelogramo.

(d) Sete não é divisor de quinze.

(e) Um trapézio não é um quadrilátero.

Solução:

(a) Sendo p : Dez é múltiplo de três. A proposição é simbolizada por: $\sim p$.

(b) Pondo $p : 5 + 3 < 10$. A proposição é simbolizada por: $\sim p$.

(c) Denotando q : Um quadrado é um paralelogramo. A proposição é simbolizada por: $\sim q$.

(d) Pondo t : Sete é divisor de quinze. A proposição é simbolizada por: $\sim t$.

(e) Fazendo s : Um trapézio é um quadrilátero. A proposição é simbolizada por: $\sim s$.

2.2.2 Conjunção ($\wedge$)

Dadas duas proposições p, q, a conjunção de p e q é a proposição $p \wedge q$.

A proposição $p \wedge q$ é verdadeira, $v(p \wedge q) = V$, unicamente quando ambas as proposições p e q são verdadeiras, isto é, somente quando $v(p) = v(q) = V$. Nos demais casos é sempre falsa.

A leitura de $p \wedge q$ é: "p e q".

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Na escrita literal, no lugar de "e", podemos usar outras conjunções ou locuções conjuntivas, como por exemplo: mas, ao mesmo tempo, além disso, no entanto, ainda que, etc.

Exemplo 11 *Escrever simbolicamente as sentenças:*

(a) Luis está em BH, enquanto José está em RJ

(b) Sete é um número par e maior do que cinco

(c) O número π é um número real mas não é racional

Solução: *Primeiro vamos simbolizar as proposições simples em cada caso.*

(a) Fazendo p : Luis está em BH, q : José está em RJ, temos que a proposição dada é simbolizada por: $p \wedge q$.

(b) Pondo p : Sete é um número par, q : Sete é maior do que cinco. A proposição dada é simbolizada por: $p \wedge q$.

(c) Pondo $p : \pi$ é um número real, $q : \pi$ é um número racional. A proposição é simbolizada por: $p \wedge \sim q$.

Exemplo 12 *Determinar o valor lógico da conjunção das proposições a seguir. Depois escrever literalmente a proposição resultante.*

(a) $p : 4 < 3$, $q : 2^3 = 8$

(b) $p_1 : 2^3 < 3^2$, $p_2 : 3^2 - 2^3 = 1$

(c) s : Um triângulo equilátero possui ângulos internos iguais a 60^o, t : Todos os ângulos internos de um quadrilátero são iguais a 90^o

(d) p : A UFV está em MG, q : A UFPE está em PR

Solução:

(a) *Note que* $v(p) = F$ *e* $v(q) = V$. *Logo,* $v(p \wedge q) = F$.

$p \wedge q$: *"Quatro é menor do que três e o cubo de dois é oito".*

(b) *Note que* $v(p_1) = V$ *e* $v(p_2) = V$. *Logo,* $v(p_1 \wedge p_2) = V$.

$p_1 \wedge p_2$: *O cubo de dois é menor do que o quadrado de três, enquanto que a diferença entre o quadrado de três e o cubo de dois é um.*

(c) *Claramente,* $v(s) = V$ *e* $v(t) = F$. *Logo,* $v(s \wedge t) = F$.

$s \wedge t$: *Os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais a* 60^o, *ao mesmo tempo que os ângulos internos de um quadrilátero são iguais a* 90^o.

(d) *Note que* $v(p) = V$ *e* $v(q) = F$. *Logo,* $v(p \wedge q) = F$.

$p \wedge q$: *Enquanto a UFV está em Minas Gerais, a UFPE está no Paraná*

Exemplo 13 *Determinar o valor lógico das sentenças a seguir:*

(a) *Quinze é múltiplo de três, mas cinco não é maior do que sete*

(b) *Quatro é maior do que cinco e o cubo de quatro é igual a cento e sessenta e quatro*

(c) *Não é verdade que um plano seja uma reta e uma reta seja um ponto*

(d) *Não é caso que sete seja um número primo e também não é o caso que o número 1331 seja ímpar.*

Solução:

(a) *Fazendo* p : *quinze é múltiplo de três e* $q : 5 \not> 7$, *temos que a sentença dada é simbolizada por* $p \wedge q$.

Note que $v(p) = V$, $v(q) = V$. *Logo,* $v(p \wedge q) = V$

(b) *Fazendo* $p : 4 > 5$, $q : 4^3 = 164$. *A sentença dada é representada por* $p \wedge q$.

Como $v(p) = F$ *e* $v(q) = F$. *Segue que* $v(p \wedge q) = F$.

(c) *Fazendo* p : *Um plano é uma reta,* q : *Uma reta é um ponto.*

A sentença dada é representada por $\sim (p \wedge q)$.

Como $v(p) = F$ *e* $v(q) = F$, *temos* $v(p \wedge q) = F$. *De onde,* $v[\sim (p \wedge q)] = V$.

(d) *Fazendo* p : *Sete é um número primo e* q : *O número 1331 é ímpar. A sentença dada é representada por* $\sim p \wedge \sim q$. *Como* $v(p) = V$ *e* $v(q) = V$, *temos que* $v(\sim p) = F$ *e* $v(\sim q) = F$. *De onde,* $v(\sim p \wedge \sim q) = F$

A próxima operação é a disjunção, que basicamente consiste em juntar duas proposições pelo conectivo *OU*. Aqui convêm esclarecer que existem duas formas, uma que é inclusiva e outra que é exclusiva.

Em Matemática, de forma geral, usamos a disjunção inclusiva e em ocasiões a exclusiva. Isto ficará claro pelo contexto que se trate.

2.2.3 Disjunção Inclusiva ($\vee$)

Dadas duas proposições, a disjunção inclusiva de p e q é a proposição $p \vee q$.

A proposição $p \vee q$ é falsa, $v(p \vee q) = F$, unicamente quando ambas proposições p e q são falsas, $v(p) = v(q) = F$. Nos demais casos é sempre verdadeira.

A leitura de $p \vee q$ é: "p ou q".

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo 14 *Escrever simbolicamente os enunciados:*

(a) O carro consome muito combustível ou este é adulterado

(b) João fala pelo menos um dos seguintes idiomas: Francês, Inglês.

(c) Sete é maior ou igual do que três

(d) Davi é Matemático ou Advogado

Solução:

(a) Fazendo p : O carro consome muito combustível, q : O combustível é adulterado. Assim, o enunciado dado, simbolicamente é: $p \vee q$

(b) Fazendo p : João fala Inglês, q : João fala Francês. Temos que o enunciado é simbolizado por $p \vee q$.

(c) Sejam $p : 7 > 3$ e $q : 7 = 3$. Com isto, o enunciado é simbolizado por $p \vee q : 7 \geq 3$.

(d) Pondo p : Davi é Matemático e q : Davi é Advogado, temos que o enunciado dado, simbolicamente, se escreve como $p \vee q$.

Exemplo 15 *Considerando p : 1331 é número primo e q : 3 é solução de $x^2 = 9$. Determinar o valor verdade de:*

(a) $\sim p \vee \sim q$ (b) $\sim p \vee q$ (c) $\sim (p \vee q)$ (d) $\sim [\sim p \vee (q \vee \sim p)]$

Solução: *Notamos que $v(p) = F$, pois $1331 = 11 \times 121$ e $v(q) = V$. Com isto:*

(a) $v(\sim p \vee \sim q) = V$, pois $v(\sim p) = v$ e $v(\sim q) = F$.

(b) $v(\sim p \vee q) = V$, pois $v(\sim p) = V$ e $v(q) = V$.

(c) $v(\sim (p \vee q)) = F$, pois $v(p \vee q) = V$.

(d) Note que $v(q \vee \sim p) = V$, uma vez que $v(q) = V$ e $v(\sim p) = V$. A partir daqui,

$$v(\sim p \vee (q \vee \sim p)) = V.$$

E finalmente,

$$v(\sim [\sim p \vee (q \vee \sim p)]) = F.$$

2.2.4 Disjunção Exclusiva ($\triangle$)

Dadas duas proposições p e q, a disjunção exclusiva de p e q é a proposição $p\triangle q$.

A proposição $p\triangle q$ é verdadeira, $v(p\triangle q) = V$, unicamente se p e q possuem valores verdade diferentes, $v(p) \neq v(q)$. Nos outros casos é sempre falsa.

A leitura de $p\triangle q$ é: "p ou q".

p	q	$p\triangle q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo 16 *Escrever simbolicamente os enunciados:*

(a) BH é capital de MG ou de RJ

(b) 25 é ímpar ou divisível por 3

(c) Dos idiomas Francês e Inglês, João fala somente um deles

(d) Para ir da cidade A até a cidade B, podemos usar duas rotas diferentes: A rota BR-XX1 ou a rota BR-XX2

Solução:

(a) Fazendo p : "BH é capital de MG"e q : "BH é capital de RJ". O enunciado é simbolizado por $p\triangle q$.

(b) Fazendo p :"25 é ímpar"e q :"25 é divisível por 3", o enunciado é simbolizado por $p\triangle q$.

(c) Pondo p : João fala Francês e q : João fala Inglês. O enunciado é simbolizado por $p\triangle q$.

(d) Pondo p : Para ir da cidade A até a cidade B usamos a rota BR-XX1 e q : Para ir da cidade A até a cidade B usamos a rota BR-XX2. Logo o enunciado é simbolizado por $p\triangle q$.

Exemplo 17 *Determinar o valor lógico dos seguintes enunciados:*

(a) O Facebook foi criado por Mark Zuckerberg ou por Allan Turing

(b) Dado um número real diferente de zero, este é maior do que zero ou menor do que zero

Solução: *O primeiro a ser feito é simbolizar os enunciados. Determinar o valor verdade de cada proposição componente e finalmente determinamos o valor verdade do enunciado proposto.*

(a) Sejam p :"Facebook foi criado por Mark Zuckerberg"e q :"Facebook foi criado por Allan Turing". Logo, simbolicamente, o enunciado é $p\triangle q$. Claramente, $v(p) = V$ e $v(q) = F$. De onde $v(p\triangle q) = V$.

(b) Considerando $x \neq 0$, sejam $p : x > 0$ e $q : x < 0$, o enunciado é representado por $p\triangle q$. Claramente, somente uma das proposições pode ser verdade quando é dado um número real diferente de zero. Desse modo, fixado $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $v(p\triangle q) = V$.

2.2.5 Condicional ($\longrightarrow$):

Dadas duas proposições p e q, a condicional de p e q é a proposição $p \longrightarrow q$.

A proposição $p \longrightarrow q$ é falsa, $v(p \longrightarrow q) = F$, unicamente quando $v(p) = V$ e $v(q) = F$. Nos demais casos é sempre verdadeira.

A leitura de $p \longrightarrow q$ é: "se p, então q", "p implica q", "p, somente se q", "q, se p", "p é condição suficiente para q", "q é condição necessária para p".

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Na proposição condicional, a proposição p é chamada de antecedente/premissa/hipótese e, a proposição q é chamada de consequente/tese/conclusão.

Note também que, qualquer expressão que indique condição dentro de um enunciado que possa ser considerado como proposição, dará origem a uma proposição condicional.

Exemplo 18 *Escrever simbolicamente o enunciado "Se as retas L_1 e L_2 são perpendiculares a L, então L_1 é paralela a L_2".*

Solução: *Denotemos por $p_1 : L_1$ é paralela a L, $p_2 : L_2$ é paralela a L, $q : L_1$ é paralela a L_2*

Assim, simbolicamente, o enunciado dado é: $(p_1 \wedge p_2) \longrightarrow q$. Cujo valor verdade, considerando os axiomas da Geometria Euclidiana, é verdadeiro.

Exemplo 19 *Determinar o valor verdade da afirmação "Sabendo que o número 77 é divisível por 7 ou o número 91 é divisível por 13, concluímos que 7007 é divisível por 11".*

Solução: *Pondo $p_1 : 77\ é\ divisível\ por\, 7$, $p_2 : 91\ é\ divisível\ por\, 13$ e $q : 7007\ é\ divisível\ por\, 11$.*

Simbolicamente, o enunciado dado vem dado pela proposição condicional: $(p_1 \vee p_2) \longrightarrow q$

Claramente, $v(p_1) = V$, $v(p_2) = V$, $v(q) = F$. Assim, $v(p_1 \vee p_2) = V$. De onde, seguindo a tabela-verdade da condicional, temos $v[(p_1 \vee p_2) \longrightarrow q] = F$.

Observação 4 *A proposição condicional, em Matemática, é usada em um sentido mais amplo que na língua portuguesa. A definição dada especifica seus valores verdade, não tem como base seu uso em português. Desse modo, o conceito Matemático de condicional não possui relação causa e efeito entre a hipótese e a conclusão. Para esclarecer isto, pense no valor verdade dos seguintes enunciados:*

(a) Se hoje está ensolarado, então vou a praia

(b) Se você tirar nota 100 na prova final da disciplina, então você terá o conceito máximo.

(c) Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 5$

(d) Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 6$

Observação 5 *Mesmo que literalmente, o condicional SE p ENTÂO q, em linguagem de programação pareça com IF p THEN q. Esta última é totalmente diferente do condicional Matemático. Pense na seguinte instrução IF $2 < 3$ THEN $x := x + 2$. Para executar $x := x + 2$, o que deve ser verificado primeiro? Sempre se executa $x := x + 2$? Se antes de rodar essa instrução, o valor de $x = -1$, será possível executar $x := x + 2$?*

2.2.6 Bicondicional ($\longleftrightarrow$):

Dadas duas proposições p e q, a bicondicional de p e q é a proposição $p \longleftrightarrow q$.

A proposição $p \longleftrightarrow q$ é verdadeira, $v(p \longleftrightarrow q) = V$, unicamente quando os valores verdade de p e q coincidem, $v(p) = v(q)$. E, será falsa, $v(p \longleftrightarrow q) = F$, quando os valores de p e q são diferentes, $v(p) \neq v(q)$.

A leitura de $p \longleftrightarrow q$ é: "p se, e somente se, q", "p é condição necessária e suficiente para q".

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo 20 *Escrever simbolicamente os enunciados:*

(a) "Mônica comprará seu novo carro se, e somente se, ela conseguir o empréstimo do banco"

(b) "Para o conjunto A ser igual ao conjunto B, é necessário e suficiente que A seja subconjunto de B e que B seja subconjunto de A".

Solução:

(a) Fazendo

p : *Mônica comprará seu carro novo e,*

q : *Mônica consegue o empréstimo do banco.*

Assim, simbolicamente, o enunciado dado é: $p \longleftrightarrow q$

(b) Pondo

p : *O conjunto A é igual ao conjunto B,*

q : *A é subconjunto de B e,*

r : *B é subconjunto de A*

Assim, o enunciado é simbolizado por: $p \longleftrightarrow (q \wedge r)$

Exemplo 21 *Determinar o valor verdade da afirmação "78 é divisível por 6 se, e somente se, é divisível por 2 e por 3".*

Solução: *Pondo*

p_1 : 78 *é divisível por 6*

p_2 : 78 *é divisível por 2 e,*

q : 78 *é divisível por 3*

Simbolicamente, o enunciado é: $p_1 \longleftrightarrow (p_2 \wedge q)$

Agora, $v(p_1) = V$, $v(p_2) = V$, $v(q) = V$ *e* $v(p_2 \wedge q) = V$.

Portanto, $v[p_1 \longleftrightarrow (p_2 \wedge q)] = V$.

Exemplo 22 *Considere as proposições* $p : 4 - 7 = 2$, $q : 2^3 > 3!$, r : *O polinômio* $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ *é divisível por* $x + 1$ *se, e somente se, o resto é igual a zero. Determinar o valor lógico de* $[(p \vee r) \wedge (p \wedge q)] \longleftrightarrow [q \longleftrightarrow (r \longrightarrow q)]$.

Solução:

Notamos que $v(p) = F$, $v(q) = V$, $v(r) = F$. *Assim,* $v(p \vee r) = F$, $v(p \wedge q) = F$,

$v([(p \vee r) \wedge (p \wedge q)]) = F$, $v(r \longrightarrow q) = V$, $v[q \longleftrightarrow (r \longrightarrow q)] = V$.

Portanto, $v\left([(p \vee r) \wedge (p \wedge q)] \longleftrightarrow [q \longleftrightarrow (r \longrightarrow q)]\right) = F$.

Observações:

1. A negação é uma operação *unária* no conjunto de todas as proposições, isto é, a uma proposição associa uma outra proposição;
2. A conjunção, disjunção, condicional e bicondicional, são operações *binárias* sobre o conjunto de todas as proposições, no sentido de que a cada duas proposições associa uma nova proposição;
3. A disjunção que mais usamos em Matemática é a disjunção inclusiva $\vee$.

Tabela 2.1: Tabela-Verdade dos operadores lógicos

		Negação	Conjunção	Disjunção	Condicional	Bicondicional	Disj. Exc.
p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$	$p \triangle q$
V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V	F

EXEMPLOS ADICIONAIS

Exemplo 23 *Considerando p : 7 é maior que 9 e q : 4 é menor que 5. Determinar o valor verdade de $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \longrightarrow q$, $p \triangle q$.*

Solução:
Notamos que $v(p) = F$ e $v(q) = V$. De acordo com os valores lógicos dos operadores (ver Tabela 1.2), temos: $v(p \wedge q) = F$, $v(p \vee q) = V$, $v(p \longrightarrow q) = V$, $v(p \triangle q) = V$.

Exemplo 24 *Determine o valor verdade da seguinte afirmação: Não é verdade que 5 é maior que 2 ou que todo número ímpar é par.*

Solução: *Sejam p : 5 é maior que 2 e q : Todo número ímpar é par. Usando lógica simbólica o enunciado se escreve $\sim (p \vee q)$. Claramente, $v(p) = V$, $v(q) = F$ e $v(p \vee q) = V$. Logo, o valor de verdade da afirmação é F.*

Exemplo 25 *Determine o valor verdade da seguinte afirmação: 16 é múltiplo de 2 uma vez que 16 é um número par.*

Solução: *Sejam p : 16 é múltiplo de 2 e q : 16 é número par. Usando lógica simbólica, o enunciado se escreve $q \longrightarrow p$. Claramente, $v(p) = v(q) = V$. Logo, o valor de verdade da afirmação é V.*

Exemplo 26 *Considere as proposições p : 3 é um número par, q : 5 é maior do que 2, r : todo número primo é ímpar. Escreva em português a seguinte proposição: $\sim [(\sim r \wedge p) \wedge q]$.*

Solução: *A proposição $(\sim r \wedge p) \wedge q$ é traduzida para "3 é par, 5 é maior que 2 e nem todo número primo é ímpar". Daqui, $\sim [(\sim r \wedge p) \wedge q]$ se traduz para "não é verdade que 3 seja par, que 5 seja maior do que 2 e que nem todo número primo seja ímpar".*

Exemplo 27 *Sejam as proposições p, q e r tais que $v(p) = v(q) = F$ e $v(r) = V$. Determine o valor verdade das seguintes proposições: (a) $p \longrightarrow \sim (q \vee r)$, (b) $\sim (p \wedge \sim q) \longrightarrow (\sim r \wedge p)$ e (c) $\sim (q \longrightarrow \sim r) \longrightarrow (\sim p \longrightarrow r)$.*

Solução: *Como $v(p) = v(q) = F$ e $v(r) = V$ temos:*

(a) $v(q \vee r) = V$, logo $v[\sim (q \vee r)] = F$. De onde, $v[p \longrightarrow \sim (q \vee r)] = V$.

(b) $v(p \wedge \sim q) = F$ e $v(\sim r \wedge p) = F$. Logo, $v[\sim (p \wedge \sim q) \longrightarrow (\sim r \wedge p)] = F$.

(c) $v(q \longrightarrow \sim r) = V$ e $v(\sim p \longrightarrow r) = V$. Logo, $v[\sim (q \longrightarrow \sim r) \longrightarrow (\sim p \longrightarrow r)] = V$.

Exemplo 28 *Sejam p, r proposições e q : 4 é um número ímpar. Se $\sim [(r \vee q) \longrightarrow (r \longrightarrow p)]$ é verdadeira. Determine o valor verdade de $[r \longleftrightarrow (p \wedge q)] \longleftrightarrow (q \wedge \sim p)$.*

Solução: *Pelos dados do enunciado, $v(q) = F$ e $v((r \vee q) \longrightarrow (r \longrightarrow p)) = F$. Desta última parte, $v(r \vee q) = V$ e $v(r \longrightarrow p) = F$. Daqui resulta que $v(r) = V$ e $v(p) = F$. Portanto, $v\left([r \longleftrightarrow (p \wedge q)] \longleftrightarrow (q \wedge \sim p)\right) = v([V \longleftrightarrow (F \wedge F)] \longleftrightarrow (F \wedge V)) = V$.*

Exemplo 29 *Em quais dos seguintes casos é suficiente a informação fornecida para conhecer o valor verdade da proposição dada:*

(a) $(p \vee q) \longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, $v(q) = V$;

(b) $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee r)$, $v(p) = V$, $v(r) = F$;

(c) $p \wedge (q \longrightarrow r)$, $v(p \longrightarrow r) = V$;

(d) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r$, $v(r) = V$.

Solução: *Procuramos saber se a informação dada nos dá o valor de verdade exato da proposição.*

(a) Se $v(q) = V$, então $v(p \vee q) = V$ e $v(\sim p \wedge \sim q) = F$. Logo, $v((p \vee q) \longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)) = v(V \longleftrightarrow F) = F$. Portanto, a informação dada é suficiente para saber o valor de verdade da proposição.

(b) Se $v(p) = V$ e $v(r) = F$, então $v(p \wedge q) = v(q)$ e $v(p \vee r) = V$. Logo, $v((p \wedge q) \longrightarrow (p \vee r)) = v(q \longrightarrow V) = V$, independente do valor de verdade de q. Portanto, a informação dada é suficiente para saber o valor de verdade da proposição.

(c) Se $v(p \longrightarrow r) = V$, então de acordo ao valor de verdade da condicional, teremos os seguintes casos válidos: (i) $v(p) = V = v(r)$, (ii) $v(p) = F$ e $v(r) = V$, (iii) $v(p) = F = v(r)$.

No primeiro caso, $v(p \wedge (q \longrightarrow r)) = v(V \wedge (q \longrightarrow V)) = v(V \wedge V) = V$.
No segundo caso, $v(p \wedge (q \longrightarrow r)) = v(F \wedge (q \longrightarrow V)) = v(F \wedge V) = F$.
No terceiro caso, $v(p \wedge (q \longrightarrow r)) = v(F \wedge (q \longrightarrow F)) = F$.
Portanto, a informação dada é insuficiente para conhecer o valor de verdade da proposição.

(d) Se $v(r) = V$*, então independentemente do valor de verdade de* $p \longrightarrow q$ *teremos* $v((p \longrightarrow q) \longrightarrow r) = v((p \longrightarrow q) \longrightarrow V) = V$*. Portanto, a informação dada é suficiente para conhecer o valor de verdade da proposição.*

2.3 Avaliação de proposições compostas

Para avaliar o valor de verdade de uma proposição composta, procedemos de duas formas: (1) Via tabela-verdade; (2) Via leis da lógica para encontrar uma proposição equivalente mais simples.

Nesta seção, apresentamos a primeira forma de avaliação. Para tal, devemos saber como montar a tabela-verdade e reconhecer o conectivo principal.

2.3.1 Montagem da tabela-verdade

A montagem da tabela-verdade de uma proposição composta formada a partir de n proposições simples, segue os seguintes passos:

1. A tabela possui 2^n linhas e $n+k$ colunas, onde k representa o número de conectivos que aparece na proposição composta;

2. Preencher cada coluna j, $1 \leq j \leq n$ (as n primeiras colunas), da seguinte forma: A coluna j terá 2^{n-j} valores V inicialmente, seguida de 2^{n-j} valores F. Após isso, escreve-se 2^{n-j} valores V e novamente 2^{n-j} valores F, alternados de cima para baixo, até completar as 2^n linhas;

3. As demais colunas, $n+1 \leq j \leq n+k$, serão preenchidas de acordo com a tabela-verdade básica de cada operador.

Para entender este procedimento, veja como ficam as tabelas-verdade para os casos quando $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

Tabela 2.2: Tabela-verdade parcial para duas proposições simples, $n = 2$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Tabela 2.3: Tabela-verdade parcial para três proposições simples, $n = 3$

p	q	r	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Tabela 2.4: Tabela-verdade parcial para quatro proposições simples, $n = 4$

p	q	r	s	
V	V	V	V	
V	V	V	F	
V	V	F	V	
V	V	F	F	
V	F	V	V	
V	F	V	F	
V	F	F	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	V	V	F	
F	V	F	V	
F	V	F	F	
F	F	V	V	
F	F	V	F	
F	F	F	V	
F	F	F	F	

2.3.2 Classificação de proposições compostas

Como mencionado antes, toda proposição composta possui um conectivo principal. Observando a tabela-verdade, na coluna do conectivo principal, uma proposição composta será chamada de:

TAUTOLOGIA: Se o valor verdade do conectivo principal é sempre VERDADEIRO, qualquer que seja o valor de verdade das proposições componentes.

CONTRADIÇÃO: Se o valor verdade do conectivo principal é sempre FALSO, qualquer que seja o valor de verdade das proposições componentes.

CONTINGÊNCIA: Se o valor verdade do conectivo principal apresenta pelo menos um VERDADEIRO e um FALSO, qualquer que seja o valor de verdade das proposições componentes.

Exemplo 30 *As proposições compostas $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \longrightarrow q$, $p \longleftrightarrow q$ e $p \triangle q$ são contingências.*

Solução: *De fato, os conectivos principais nessas proposições são $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\triangle$, respectivamente. A tabela-verdade abaixo exibe os valores verdade.*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$	$p \triangle q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Exemplo 31 *Classifique como tautologia, contradição, contingência cada uma das proposições a seguir:*

(a) $[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$

(b) $[(\sim p \wedge q) \longrightarrow \sim r] \longleftrightarrow [r \wedge \sim (p \vee \sim q)]$

(c) $(q \longrightarrow r) \vee (\sim p \longrightarrow r)$

Solução: *Vamos obter a tabela-verdade de cada proposição e segundo o resultado faremos a classificação.*

(a)

p	q	$[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$		
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	V	**V**

É uma tautologia.

(b)

p	q	r	$[(\sim p \wedge q) \longrightarrow \sim r] \longleftrightarrow [r \quad \wedge \quad \sim (p \quad \vee \sim q)]$					
V	V	V	F	V	**F**	F	F	V
V	V	F	F	V	**F**	F	F	V
V	F	V	F	V	**F**	F	F	V
V	F	F	F	V	**F**	F	F	V
F	V	V	V	F	**F**	V	V	F
F	V	F	V	V	**F**	F	V	F
F	F	V	F	V	**F**	F	F	V
F	F	F	F	V	**F**	F	F	V

É uma contradição.

(c)

p	q	r	$(q \longrightarrow r)$	$\vee$	$(\sim p \longrightarrow r)$
V	V	V	V	**V**	V
V	V	F	F	**V**	V
V	F	V	V	**V**	V
V	F	F	V	**V**	V
F	V	V	V	**V**	V
F	V	F	F	**F**	F
F	F	V	V	**V**	V
F	F	F	V	**V**	F

É uma contingência.

2.4 Equivalências e Implicações

Dadas duas proposições p, q (simples ou compostas), gostaríamos de saber se uma é consequência da outra ou se ambas representam a mesma coisa. Isto é, queremos saber se uma implica a outra ou se uma é equivalente a outra. Com este propósito, vamos definir, a seguir, implicação e proposições equivalentes.

Estes conceitos vão nos permitir diferenciar e usar corretamente os termos implicação, condicional, equivalência e bicondicional.

Definição 2 (Implicação) *Dizemos que a proposição p implica a proposição q, simbolizado por $p \Longrightarrow q$, quando a proposição condicional $p \longrightarrow q$ é uma tautologia.*

Muitas vezes, por abuso de linguagem, quando não houver perigo de confusão e ficar claro no contexto, no lugar de $p \Longrightarrow q$, escrevemos $p \longrightarrow q$.

Quando p não implica q, escrevemos $p \not\Rightarrow q$.

Exemplo 32 *A proposição $\sim p \triangle \sim r$ implica a proposição $\sim (p \wedge q) \vee \sim r$.*

Solução: *De fato, é suficiente verificar que a proposição condicional*

$$(\sim p \triangle \sim r) \longrightarrow [\sim (p \wedge q) \vee \sim r]$$

é uma tautologia.

p	q	r	$(\sim p \triangle \sim r)$	$\longrightarrow$	$[\sim (p \wedge q) \vee \sim r]$
V	V	V	F	**V**	F
V	V	F	V	**V**	V
V	F	V	F	**V**	V
V	F	F	V	**V**	V
F	V	V	V	**V**	V
F	V	F	F	**V**	F
F	F	V	V	**V**	V
F	F	F	F	**V**	V

Exemplo 33 *Assumindo que $a > b$ se, e somente se, $a - b > 0$. A afirmação $a > 0$ e $b > c$ implica a afirmação $ab > ac$. A prova desta implicação será vista no Capítulo 2.*

Definição 3 (Proposições equivalentes) *Dizemos que uma proposição p é equivalente à proposição q, simbolizado por $p \Longleftrightarrow q$, quando a proposição bicondicional $p \longleftrightarrow q$ é uma tautologia.*

Muitas vezes, por abuso de linguagem, quando não houver perigo de confusão e ficar claro no contexto, no lugar de $p \Longleftrightarrow q$, escrevemos $p \longleftrightarrow q$.

Quando p não é equivalente a q, escrevemos $p \not\Leftrightarrow q$.

Exemplo 34 *A proposição $p \to q$ é equivalente à proposição $\sim q \to \sim p$.*

Solução: *De fato,*

p	q	$[p \longrightarrow q]$	$\longleftrightarrow$	$[\sim q \longrightarrow \sim p]$
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	F
F	V	V	**V**	V
F	F	V	**V**	V

Exemplo 35 *A proposição $q \to p$ é equivalente à proposição $\sim p \to \sim q$.*

Solução: *De fato,*

p	q	$[q \longrightarrow p]$	$\longleftrightarrow$	$[\sim p \longrightarrow \sim q]$
V	V	V	**V**	V
V	F	V	**V**	V
F	V	F	**V**	F
F	F	V	**V**	V

2.5 Principais Leis lógicas ou tautológicas

São leis lógicas que sempre são tautologias e que servem para obter outras tautologias ou reduzir proposições compostas a outras equivalentes mais simples.

2.5.1 Leis lógicas clássicas

São as três leis que regem o pensamento lógico.

Lei da Identidade	$p \longrightarrow p \qquad p \longleftrightarrow p$	p é idêntica a p
Lei da não Contradição	$\sim (p \wedge \sim p)$	p não pode ser verdadeira e falsa
Lei do Terceiro Excluído	$p \vee \sim p$	p é verdadeira ou falsa, não há 3ra opção

2.5.2 Equivalências Notáveis

E1	Involução ou dupla negação	$\sim(\sim p) \equiv p$
E2	Negação	$p \wedge \sim p \equiv F \qquad p \vee \sim p \equiv V$
E3	Idempotência	$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p$
E4	Comutativa	$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \longleftrightarrow q \equiv q \longleftrightarrow p$
E5	Associativa	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r \equiv p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r)$
E6	Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$ $p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r)$
E7	Leis de Morgan	$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \qquad \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
E8	Condicional	$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q \qquad \sim (p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
E9	Bicondicional	$p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ $p \longleftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
E10	Absorção	$p \wedge (p \vee q) \equiv p \qquad p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$
E11	Transposição	$p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p \qquad p \longleftrightarrow q \equiv \sim q \longleftrightarrow \sim p$
E12	Exportação	$(p \wedge q) \longrightarrow r \equiv p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$ $[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow r] \equiv [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \longrightarrow (p_n \longrightarrow r)]$
E13	Elemento Neutro	$V \wedge p \equiv p \qquad F \vee p \equiv p$
E14	Dominação	$V \vee p \equiv V \qquad F \wedge p \equiv F$

Antes de apresentar exemplos, guarde o seguinte: Escrever uma proposição na sua forma normal significa que será escrita em termos de conjunções e disjunções fazendo uso das leis lógicas.

Exemplo 36 *Simplificar a proposição* $[(p \vee \sim q) \wedge q] \longrightarrow p$

Solução: *Vamos usar as leis lógicas.*

$$
\begin{array}{rcll}
[(p\vee\sim q)\wedge q]\longrightarrow p & \equiv & \sim[(p\vee\sim q)\wedge q]\vee p & \textit{(Lei Condicional)}\\
 & \equiv & \sim[p\wedge q]\vee p & \textit{(Lei de absorção)}\\
 & \equiv & (\sim p\vee\sim q)\vee p & \textit{(Leis de Morgan)}\\
 & \equiv & (\sim p\vee p)\vee\sim q & \textit{(Leis comutativa e associativa)}\\
 & \equiv & V\vee\sim q & \textit{(Lei da negação)}\\
 & \equiv & V & \textit{(Lei de dominação)}
\end{array}
$$

Exemplo 37 *Encontrar a proposição mais simples equivalente a* $[q\longrightarrow\sim p]\vee[\sim r\longrightarrow\sim p]$

Solução:

$$
\begin{array}{rcll}
[q\longrightarrow\sim p]\vee[\sim r\longrightarrow\sim p] & \equiv & [\sim q\vee\sim p]\vee[r\vee\sim p] & \textit{(Condicional)}\\
 & \equiv & [\sim p\vee\sim p]\vee[\sim q\vee r] & \textit{(Leis comutativa e associativa)}\\
 & \equiv & (\sim p\vee\sim q)\vee r & \textit{(Leis Idempotência e associativa)}\\
 & \equiv & \sim(p\wedge q)\vee r & \textit{(Leis de Morgan)}\\
 & \equiv & (p\wedge q)\longrightarrow r & \textit{(Lei Condicional)}
\end{array}
$$

2.6 Inferência lógica ou Implicação lógica válida

Definição 4 *Entendemos por raciocínio um par ordenado* $(\{p_i\}, q)$*, onde* $\{p_i\}$ *é um conjunto finito de proposições, chamadas de premissas/hipóteses, e* q *é uma proposição, chamada de tese/conclusão.*

Definição 5 *Um* **raciocínio dedutivo** *é aquele onde as premissas fornecem ou evidenciam um fundamento definitivo da conclusão. Um* **raciocínio indutivo** *é aquele onde as premissas proporcionam somente algum fundamento da conclusão, mas não um fundamento conclusivo.*

Definição 6 *Uma inferência lógica é uma proposição condicional da seguinte forma*

$$(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_n)\longrightarrow q$$

A inferência será válida se a condicional é uma tautologia, caso contrário será uma falácia.

Teorema 1 *Se o argumento* $(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_n)\longrightarrow q$ *é uma tautologia e se as premissas* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *são verdadeiras, então a conclusão é verdadeira.*

Exemplo 38 *Determine se* $p\vee q$ *é uma conclusão válida a partir das proposições* $\sim p\longrightarrow\sim q$, $\sim q\longrightarrow r$ *e* $\sim r$.

Solução: *Queremos verificar se a implicação* $[(\sim p\longrightarrow\sim q)\wedge(\sim q\longrightarrow r)\wedge(\sim r)]\longrightarrow(p\vee q)$ *é válida.*

1ª forma: Tabela-verdade

p	q	r	$[(\sim p\longrightarrow\sim q)$	$\wedge$	$(\sim q\longrightarrow r)$	$\wedge$	$(\sim r)]$	$\longrightarrow$	$(p\vee q)$
V	V	V	V	V	V	F	F	**V**	V
V	V	F	V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	V	V	V	V	F	F	**V**	V
V	F	F	V	F	F	F	V	**V**	V
F	V	V	F	F	V	F	F	**V**	V
F	V	F	F	F	V	V	V	**V**	V
F	F	V	V	V	V	F	F	**V**	F
F	F	F	V	F	F	F	V	**V**	F
			(1)	(5)	(2)	(6)	(3)	(7)	(4)

A coluna (7) exibe que a implicação é uma tautologia. Portanto, a inferência é válida.

2^a *forma: Método prático*

Este método consiste em assumir que a implicação não é válida. Isto ocorre somente no caso em que a premissa é verdadeira e a conclusão falsa. A partir disto, procuramos os valores de verdade das proposições simples envolvidas. Caso consigamos para alguma das proposições simples mais de um valor de verdade, a implicação será VERDADEIRA. Se por outro lado, encontrarmos para cada proposição simples envolvida um único valor de verdade, a implicação será FALSA. Vejamos:

A implicação será falsa se $v((\sim p \longrightarrow \sim q) = V$, $v(\sim q \longrightarrow r) = V$, $v(\sim r) = V$ *e* $v(p \vee q) = F$. *De* $v(p \vee q) = F$ *resulta* $v(p) = v(q) = F$. *E de* $v(\sim r) = V$ *resulta* $v(r) = F$. *Logo, a partir de* $v(\sim q \longrightarrow r) = V$ *e* $v(r) = F$, *temos que* $v(q) = V$. *Isto contradiz o fato de que* $v(q) = F$. *Assim, de acordo com o exposto, a suposição da implicação ser falsa é incorreta. Portanto, a inferência é válida.*

Exemplo 39 *Mostre que a implicação* $[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$ *é válida.*

Solução: *Embora uma tabela-verdade seja adequada para este exemplo por conter só duas proposições simples, usaremos o método prático.*

Suponha que a implicação seja falsa. Isto nos fornece $v(p) = V$, $v(p \longrightarrow q) = V$ *e* $v(q) = F$. *A partir de* $v(p \longrightarrow q) = V$ *e* $v(q) = F$ *resulta* $v(p) = F$, *contrariando o fato de* $v(p) = V$. *Portanto, a suposição é incorreta e a inferência é válida.*

Exemplo 40 *A inferência* $[(p \longrightarrow q) \wedge q] \longrightarrow p$ *é válida? Justifique sua resposta.*

Solução:
A inferência será válida se, independentemente dos valores de verdade das proposições simples envolvidas, a implicação é uma tautologia. Isto não ocorre quando $v(p) = F$ *e* $v(q) = V$.

Exemplo 41 *Verificar se o seguinte argumento é válido: Se o triângulo é isósceles então tem dois lados iguais. Mas o triângulo não possui dois lados iguais. Portanto, o triângulo não é isósceles.*

Solução: *Vamos escrever o argumento em lógica formal. Seja* p : *O triângulo é isósceles,* q : *O triângulo tem dois lados iguais. Formalmente, o argumento é:* $[(p \longrightarrow q) \wedge (\sim q)] \longrightarrow (\sim p)$.
Suponha que a implicação não seja válida. Isto nos fornece $v(p \longrightarrow q) = V$, $v(\sim q) = V$ *e* $v(\sim p) = F$. *De* $v(\sim p) = F$, *resulta* $v(p) = V$ *e de* $v(\sim q) = V$, *resulta* $v(q) = F$. *Agora, a partir de* $v(p \longrightarrow q) = V$ *e* $v(q) = F$ *resulta* $v(p) = F$. *Isto contradiz o fato de que* $v(p) = V$. *Portanto, a suposição é falsa e a inferência é válida.*

Exemplo 42 *Verifique a validade do seguinte argumento: Se 6 é par, então 2 não divide 7. 5 não é primo ou 2 divide 7. Portanto, 6 é ímpar.*

Solução: *Sejam* p : *6 é par,* q : *2 divide 7,* r : *5 é primo. Formalmente o argumento é:* $[(p \longrightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q)] \longrightarrow (\sim p)$.
Observe que neste exemplo temos $v(p) = V$, $v(q) = F$ *e* $v(r) = V$. *Com isto,*

$v([(p \longrightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q)] \longrightarrow (\sim p)) = v([(V \longrightarrow V) \wedge (F \vee F)] \longrightarrow F) = V$. *Portanto, a inferência é válida.*

Como visto nos exemplos anteriores, uma outra forma de resolver é aplicando o método prático. Suponha que seja falsa a implicação, logo $v(p \longrightarrow \sim q) = V$, $v(\sim r \vee q) = V$ *e* $v(\sim p) = F$. *De* $v(\sim p) = F$, *resulta* $v(p) = V$. *A partir de* $v(p \longrightarrow \sim q) = V$ *e* $v(p) = V$ *resulta* $v(\sim q) = V$, *de onde* $v(q) = F$. *De* $v(\sim r \vee q) = V$ *e* $v(q) = F$ *resulta* $v(\sim r) = V$, *de onde* $v(r) = F$. *Mas isto é uma contradição, pois a proposição* r *é verdadeira. Portanto, a suposição é falsa e a inferência é válida.*

2.6.1 Implicações Notáveis

As implicações notáveis são inferências válidas.

Modus Ponens	$[(p \longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$
Modus Tollens	$[(p \longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$
Silogismo Disjuntivo	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Longrightarrow q$ ou $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Longrightarrow p$
Inferência equivalente	$[(p \longleftrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$
Silogismo Hipotético	$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \longrightarrow r)$
Transitividade Simétrica	$[(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r)] \Longrightarrow (p \longleftrightarrow r)$
Simplificação	$(p \wedge q) \Longrightarrow p$ ou $(p \wedge q) \Longrightarrow q$
Adição	$p \Longrightarrow (p \vee q)$ ou $q \Longrightarrow (p \vee q)$
Absurdo	$[p \longrightarrow (q \wedge \sim q)] \Longrightarrow \sim p$ ou $[\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)] \Longrightarrow p$

Exemplo 43 *Verifique se a inferência $[(p \longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$ é válida.*

Solução: *Vamos resolver de duas formas diferentes:*

1ª forma: Suponha que a inferência não seja válida, isto é, a proposição $[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$ é falsa. Como o conectivo principal é o condicional $\longrightarrow$, devemos ter $v[(p \longrightarrow q) \wedge p] = V$ e $v(q) = F$.

Como em $(p \longrightarrow q) \wedge p$ o conectivo principal é a conjunção $\wedge$, temos $v(p) = V$ e $v(p \longrightarrow q) = V$. Daqui, $v(q) = V$. Assim, $v(q) = V$ e $v(q) = F$. De acordo com a Lei da não contradição, isto não pode acontecer.

Portanto, a suposição é incorreta e, a inferência é válida.

2ª forma Vamos simplificar usando as equivalências notáveis e ver se concluímos uma tautologia.

$$
\begin{aligned}
[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q &\equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge p] \vee q && \textit{(Lei condicional)}\\
&\equiv \sim [p \wedge q] \vee q && \textit{(Lei de absorção)}\\
&\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q && \textit{(Lei de Morgam)}\\
&\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q) && \textit{(Lei associativa)}\\
&\equiv \sim p \vee V && \textit{(Lei negação)}\\
&\equiv V && \textit{(Lei dominação)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 44 *Verificar se a inferência $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Longrightarrow p$ é válida.*

Solução: *Suponha que não seja válida. Então, $v(p) = F$, $v(p \vee q) = V$ e $v(q) = F$. A partir dos dois últimos valores, $v(p) = V$. Isto va contra a lei da não contradição. Portanto, a inferência é correta.*

Exemplo 45 *Verificar se são corretas as seguintes implicações: (a) $(p \wedge q) \Longrightarrow q$ (b) $q \Longrightarrow (p \vee q)$*

Solução:

(a) Suponha que a implicação não é válida. Então, $v(q) = F$, $v(p \wedge q) = V$. Da última igualdade segue que $v(p) = v(q) = V$. Assim, $v(q) = V$ e $v(q) = F$. Isto é contrário à lei da não contradição. Portanto, a suposição é incorreta e a implicação é válida.

(b) Vamos usar equivalências notáveis.

$$
\begin{aligned}
q \longrightarrow (p \vee q) &\equiv \sim q \vee (p \vee q) && \textit{(Lei condicional)}\\
&\equiv (\sim q \vee q) \vee p && \textit{(Lei comutativa e associativa)}\\
&\equiv V \vee p && \textit{(Lei negação)}\\
&\equiv V && \textit{(Lei dominação)}
\end{aligned}
$$

Portanto, a implicação é válida.

2.7 Lógica com quantificadores

2.7.1 Função proposicional

Definição 7 *Uma função proposicional ou proposição aberta nas variáveis* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *é uma afirmação simbolizada por* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemplo 46 *São funções proposicionais:*

1. $P(x)$: $x > 3$. *Observe* $P(4)$ *é verdadeira, enquanto* $P(2)$ *é falsa.*
2. $P(x, y)$: $x + y = 5$. *Observe que* $P(4, 1)$ *é verdadeira, enquanto* $P(1, 0)$ *é falsa.*
3. $P(x, y) : x^2 - y^2 = 1$. *Observe que* $P(1, 0)$ *é verdadeira, enquanto que* $P(1, 1)$ *é falsa.*
4. $P(x, y, z) : x^2 + yz - z^2 = xy$. *Observe que* $P(1, 1, 1)$ *é verdadeira, enquanto* $P(-1, -1, 1)$ *é falsa.*
5. $P(x, y) : x$ *é amigo de* y.

O conjunto de valores onde a função proposicional é verdadeira é chamada de *domínio do discurso.*

2.7.2 Quantificadores

A partir de uma função proposicional podemos gerar proposições sem a necessidade de avaliar em valores específicos. Para isto, usamos quantificadores, que apresentamos a seguir.

Os quantificadores aparecem bastante na linguagem de conjuntos, que veremos no Capítulo 3.

Quantificador Universal ($\forall$):

"$P(x)$ é válido para todo x no domínio do discurso." Simbolicamente: $\forall x : P(x)$.

Quantificador Existencial ($\exists$):

"Existe um elemento x no domínio do discurso tal que $P(x)$." Simbolicamente: $\exists x : P(x)$

Quantificador de Unicidade ($\exists!$):

"Existe um único x no domínio do discurso tal que $P(x)$." Simbolicamente: $\exists! x : P(x)$

2.7.3 Negando proposições com quantificadores

Proposição	**Negação**
$\forall x : P(x)$	$\sim [\forall x : P(x)] \equiv \exists x :\sim P(x)$
$\exists x : P(x)$	$\sim [\exists x : P(x)] \equiv \forall x :\sim P(x)$
$\forall x \in A : P(x)$	$\sim [\forall x \in A : P(x)] \equiv \exists x \in A :\sim P(x)$
$\exists x \in A : P(x)$	$\sim [\exists x \in A : P(x)] \equiv \forall x \in A :\sim P(x)$

Exemplo 47 *Obtenha a negação da proposição* $\forall x \in A : [P(x) \longrightarrow Q(x)]$

Solução: *A negação será* $\sim [\forall x \in A : [P(x) \longrightarrow Q(x)] \equiv \exists x \in A : P(x) \wedge \sim Q(x)$

Exemplo 48 *Obtenha a negação da proposição* $\forall x \exists y \exists z : [P(x,y) \longrightarrow (Q(x) \wedge R(z))]$

Solução: *A negação será*

$$\sim [\forall x \exists y \exists z : [P(x,y) \longrightarrow (Q(x) \wedge R(z))]] \equiv \exists x \forall y \forall z : P(x,y) \wedge (\sim Q(x) \vee \sim R(z))$$

Exemplo 49 *Para* $A = \{0, 1, 2\}$*, determine o valor de verdade das proposições a seguir:*

1. $\forall x \in A, \forall y \in A : y \leq 4(x+1)$;

2. $\forall x \in A, \exists! y \in A : y = \begin{cases} \dfrac{2|x|}{x}, \ x \neq 0 \\ 2, \ x = 0 \end{cases}$

3. $\exists! x \in A / \forall y \in A : (x-1)^2 > y$;

Solução: *Analisemos cada proposição dada:*

1. $\forall x \in A, \forall y \in A : y \leq 4(x+1)$

   Se $x = 0$*, para cada* $y \in A$ *teremos* $0 \leq 4; 1 \leq 4; 4 \leq 4$.

   Se $x = 1$*, para cada* $y \in A$ *temos* $0 \leq 8; 1 \leq 8; 8 \leq 8$.

   Se $x = 2$*, para cada* $y \in A$ *temos* $0 \leq 12; 1 \leq 12; 12 \leq 12$.

   Portanto, a proposição é verdadeira.

2. $\forall x \in A, \exists! y \in A : y = \begin{cases} \dfrac{2|x|}{x}, \ x \neq 0 \\ 2, \ x = 0 \end{cases}$

   Note que para qualquer $x \in A$*,* $y = 2$ *é o único valor que torna a proposição verdadeira. Portanto, a proposição dada aqui é verdadeira.*

3. $\exists! x \in A / \forall y \in A : (x-1)^2 > y$

   A proposição é falsa, já que para qualquer $x \in A$*, o valor* $(x-1)^2 \in \{0, 1, 2\}$*, que não é maior do que qualquer* $y \in A$.

Exemplo 50 *Seja* $P(x)$ *uma função proposicional com domínio* $\{0, 1, 2, 3, 4\}$*. Escreva em termos de disjunções e/ou conjunções cada proposição a seguir:*

(a) $\exists x, P(x)$ *(b)* $\forall x, P(x)$ *(c)* $\forall x, \sim P(x)$ *(d)* $\sim \forall x, P(x)$ *(e)* $\exists x, \sim P(x)$ *(f)* $\sim \exists x, P(x)$

Solução: *Escrever, conforme pedido, só é válido quando o domínio da função proposicional é finito.*

(a) A proposição $\exists x, P(x)$ *é lida como "para algum* $x \in \{0,1,2,3,4\}$, *vale* $P(x)$. *Isto se traduz na forma* $P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$. *Portanto,* $\exists x, P(x) \equiv P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$.

(b) A proposição $\forall x, P(x)$ *é lida como "Qualquer que for* $x \in \{0,1,2,3,4\}$, $P(x)$ *é verdadeiro. Portanto,* $\forall x, P(x) \equiv P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$.

(c) e (f) Note que $\forall x, \sim P(x) \equiv \sim [\exists x, P(x)]$. *Logo,* $\forall x, \sim P(x) \equiv \sim [P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)]$.

(d) e (e) Note que $\sim \forall x, P(x) \equiv \exists x, \sim P(x)$. *Logo,* $\sim \forall x, P(x) \equiv \sim [P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)]$.

2.8 Exercícios

EXERCÍCIOS

1. Determinar o valor verdade das seguintes proposições:
   (a) Se $5+4=11$, então $6+6=12$ R. V
   (b) Não é verdade que $3+3=7$ se, e somente se, $5+5=12$. R. F
   (c) $(3+5=8)\wedge(5-3=4)$. R. F
   (d) $[(2+6>5)\wedge(7-1=6)]\longrightarrow[(3-1<2)\vee(5+7=12)]$. R. V
   (e) $[(2+6>5)\wedge(7-1=6)]\longrightarrow[(3-1<2)\vee(5+7>12)]$. R. F

2. Considerando p :João é inteligente, q : João é milionário e r : João é feliz. Escrever em linguagem proposicional os seguintes enunciados:
   (a) Se João é milionário, é feliz. R. $q\longrightarrow r$
   (b) Se João é pobre mas não inteligente, é feliz. R. $(\sim q\wedge\sim p)\longrightarrow r$
   (c) Que João seja pobre não implica que seja feliz. $\sim(r\vee q)$
   (d) João tem que ser pobre para ser feliz. R. $\sim q\longrightarrow r$
   (e) Que João seja inteligente é necessário para ser feliz. R. $r\longrightarrow p$
   (f) Que João seja inteligente é suficiente para ser milionário. R. $p\longrightarrow q$
   (g) Se João é inteligente ou milionário, é feliz. R. $(p\vee q)\longrightarrow r$
   (h) Se João é milionário, é inteligente e feliz. R. $q\longrightarrow(p\wedge r)$

3. Simbolizar as seguintes situações:
   (a) O café é agradável salvo se colocam açúcar e estiver forte.
   (b) A erva é verde, porem o céu é azul e chove.
   (c) Se o time do América vai para a Taça Libertadores, Vilma vota pelo FJG e o time do Barça chega em Viçosa.
   (d) Nem Pedro e nem o pai dele viajarão para Manaus se Pedro não tirar a carteira dele.

4. Construir a tabela-verdade das seguintes proposições:
   (a) $[(\sim p\vee q)\wedge\sim q]\longrightarrow\sim p$
   (b) $\sim(p\wedge q)\longleftrightarrow(\sim p\vee\sim q)$
   (c) $\sim\{\sim[p\vee(\sim q\longrightarrow p)]\vee\sim[(p\longleftrightarrow\sim q)\longrightarrow(q\wedge\sim p)]\}$
   (d) $[\sim p\wedge(q\vee r)]\longleftrightarrow[(p\vee r)\wedge q]$
   (e) $[p\longrightarrow(r\vee\sim q)]\longleftrightarrow(\sim r\longrightarrow\sim p)]$
   (f) $[(\sim p\vee q)\vee(\sim r\wedge\sim p)]\longleftrightarrow[\sim q\longrightarrow\sim p]$

5. Usando as leis lógicas, simplificar as seguintes proposições:
   (a) $[(\sim p\vee q)\wedge\sim q]\longrightarrow\sim p$

(b) $\sim (p \wedge q) \longrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(c) $p \longrightarrow \sim [q \wedge (q \longrightarrow p)]$

(d) $\sim p \longrightarrow (q \longrightarrow \sim p)$

(e) $(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)$

(f) $[(p \longleftrightarrow \sim q) \triangle p] \longleftrightarrow [(\sim p \longleftrightarrow q) \triangle q]$

(g) $\sim \{\sim [p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \vee \sim [(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]\}$

(h) $[\sim p \wedge (q \vee r)] \longleftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$

(i) $[p \longrightarrow (r \vee \sim q)] \longleftrightarrow (\sim r \vee \sim p)]$

(j) $\sim \{[p \wedge (s \longrightarrow s)] \vee (\sim q \vee p)\} \wedge \{\sim [p \vee (r \wedge \sim r)] \longrightarrow (q \longrightarrow \sim q)\}$

(k) $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \wedge \sim p)] \longleftrightarrow [\sim q \longrightarrow \sim p]$

(l) $\{[\sim (p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q \vee s)] \wedge (p \wedge q)\} \vee [\sim (p \vee q) \longrightarrow [(p \vee q) \wedge (s \wedge p \wedge q)]]$

6. Determinar o valor verdade, caso seja possível, das proposições r e s, em cada item, a partir das informações dadas:

   (a) $\sim r \vee \sim s$ é falsa.

   (b) $(r \wedge s) \triangle (r \vee s)$ é verdadeira.

   (c) $(r \wedge s) \longleftrightarrow (\sim r \vee \sim s)$ é falsa.

7. Sabendo que as proposições p, q, t são falsas e as proposições x, y, z são verdadeiras. Indicar quais das proposições abaixo são falsas:

   (a) $[(p \wedge x) \vee (t \wedge y)] \longrightarrow (z \vee q)$

   (b) $\sim [q \wedge t) \vee (t \wedge y)] \wedge (z \vee p)$

   (c) $[(x \longrightarrow p) \vee (q \longrightarrow x)] \longrightarrow (t \longrightarrow y)$

   (d) $[p \longrightarrow (q \vee y)] \longleftrightarrow [(t \vee z) \longrightarrow y]$

8. A partir da falsidade da proposição $(p \longrightarrow \sim q) \vee (\sim r \longrightarrow s)$. Determinar o valor verdade das seguintes proposições.

   (a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

   (b) $(\sim r \vee q) \longleftrightarrow [(\sim q \vee r)]$

   (c) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

   (d) $[(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee q)] \wedge \sim q$

9. Se $p(x) : x - 16 = 0$, $q(x) : x - 12 = 0$, $r(x) : x > 9$. Encontrar o valor verdade das proposições abaixo:

   (a) $[p(2) \wedge \sim q(2)] \longleftrightarrow r(4)$

   (b) $[\sim p(4) \longrightarrow r(5)] \vee \sim q(4)$

   (c) $\{[p(1) \wedge p(3)] \longleftrightarrow [r(2) \vee p(3)]\} \longleftrightarrow [\sim q(3) \vee \sim p(-3)]$

   (d) $\{[p(1) \wedge p(3)] \longleftrightarrow r(2)\} \vee [p(3) \longleftrightarrow \sim q(3)] \vee \sim p(-3)$

10. Substituir as reticencias por alguma das seguintes frases " *é suficiente*", "*é necessário*", " *é necessário e suficiente*", de tal forma que o enunciado seja correto.

    (a) Para ganhar na loteria ... ter feito pelo menos uma aposta.

    (b) Para que a soma de dois números reais seja um número racional ... que cada uma das parcelas seja um número racional.

    (c) Para que um triângulo seja isósceles ... que os ângulos da base sejam iguais.

    (d) Para que a equação $x^2 - 2x + q = 0$ tenha duas raízes positivas ... que seja satisfeita condição $q > 0$.

    (e) Para retornar em casa .... ter saído dela.

11. Analisar se as seguintes inferências são válidas, justificando o método que for utilizado.

    (a) $[(r \longleftrightarrow q) \wedge (\sim p \triangle \sim r) \wedge (p \longrightarrow q)] \Longrightarrow (\sim p \vee r)$

    (b) $[(p \longleftrightarrow q) \wedge (\sim p \wedge \sim r) \wedge (r \longrightarrow \sim s)] \Longrightarrow [p \longrightarrow (r \wedge q)]$

    (c) $[(p \longrightarrow r) \wedge (p \vee q)] \Longrightarrow (p \vee r)$

    (d) $\left[(p \longrightarrow q) \wedge (\sim r \longrightarrow \sim q) \wedge [\sim (\sim p \wedge \sim t)] \wedge (t \longrightarrow s) \wedge \sim r\right] \Longrightarrow s$

    (e) $\left[(r \longrightarrow q) \wedge (\sim p \longrightarrow \sim q) \wedge (r \vee t) \wedge \sim p\right] \Longrightarrow (\sim p \vee \sim r)$

    (f) $\left[(p \vee q) \wedge (t \vee s) \wedge r\right] \Longrightarrow (q \vee s)$

12. Analisar a validade dos seguintes raciocínios.

    (a) Se Carlos ou Ana vão ao cinema, então Jaime permanecerá em casa. Logo, se Ana vai ao cinema, Jaime fica em casa.

    (b) Todos os matemáticos são pessoas interessantes. Alguns advogados são cobiçosos. Certos filósofos são matemáticos. Somente os que não são interessantes são cobiçosos. Portanto, os cobiçosos não são matemáticos.

    (c) Se eu chegar a tempo em casa, irei jantar, sempre que eu esteja com fome. Em consequência não chegarei em tempo.

    (d) Se Londres não está na Holanda, então Paris não está na França. Portanto, Londres está na Holanda.

    (e) Se eu trabalho não posso estudar, trabalho ou me saio bem em Matemática, mas aprovei Matemática. Portanto, eu estudei.

    (f) Se um satélite gira em torno de la lua, então gira também ao redor da terra;e, se gira em torno da terra, também gira em torno do sol. E, se gira ao redor do sol, então gira em torno da lua, então gira ao redor da constelação da lua.

    (g) Se é acompanhado pelo calendário, então esse período de tempo es curto e se alguém tem percorrido a vida, como eu, nesse período, então esse intervalo de tempo é longo. Não entanto, se toda proposição é falsa então esse período de tempo é curto. Portanto, obtemos uma contradição.

13. Para duas proposições p, q definimos uma nova operação $*$ entre elas, da seguinte forma: $p * q \equiv \sim p \wedge \sim q$. Escrever em função dessa nova operação as seguintes proposições.

    (a) $p \wedge q$
    (b) $p \vee q$
    (c) $\sim p \vee q$
    (d) $p \longrightarrow q$
    (e) $p \longleftrightarrow q$
    (f) $p \longleftrightarrow \sim q$
    (g) $p \triangle q$

14. Para a operação definida no exercício 13, simplificar a proposição $[(p * p) * q] * [(p * p) * \sim q]$

15. Defina $t \equiv (r \longleftrightarrow s) \triangle \sim r$ e $\mu \equiv [(r \longrightarrow \sim s) \longrightarrow r]$. Se se sabe que t é falsa e μ é verdadeira. Qual o valor de verdade de $[(r \longleftrightarrow \mu) \wedge (t \triangle s)] \triangle \sim t$

16. Define-se o conectivo $\#$ entre duas proposições por $p \# q \equiv [(p \wedge q) \longrightarrow r] \wedge [r \longrightarrow \sim (p \wedge q)]$. Simplificar a proposição

$$\{[(p\# \sim q)\#(\sim p\#q)]\#[(\sim p\# \sim p)\#(p\#q)]\} \longrightarrow \{p\#q\}$$

17. Negar as seguintes proposições:

    (a) $\exists x / x + 7 < y$
    (b) $\forall x \in \mathbb{Z} / x^2 - 1 > 0$
    (c) $\exists x \in \mathbb{Z} / x^2 = x$
    (d) $\exists x : p(x) \vee \sim q(x)$
    (e) $\forall x : p(x) \longrightarrow q(x)$
    (f) $\forall x : p(x) \wedge \exists x : q(x)$
    (g) $\forall x, \exists y : (x^2 - y^2 < 10) \vee (x^2 < y + 1)$
    (h) $\forall x, \forall y : (x^2 - y^2 > -10) \wedge (x^2 > y + 1)$

18. Formalizar as seguintes proposições fazendo uso de quantificadores, após isso negar a proposição obtida e finalmente escrever em português a proposição resultante.

    (a) Todos os poetas são criativos
    (b) todos os números ímpares são primos.
    (c) Nenhum número par diferente de dois é primo.
    (d) Existem futebolistas que não satisfazem os requesitos para serem futebolistas.
    (e) Todos os números inteiros são ímpares e existem números reais irracionais, se existe algum número par se, e somente se, há algum número real irracional ou qualquer número inteiro é par, se cada número for racional.
    (f) Todo número complexo tem duas componentes se estas são diferentes de zero e, se a segunda componente é zero o número é real.

19. Encontrar o valor verdade da proposição $[(p \vee q) \longrightarrow (\sim r \vee \sim w)] \longleftrightarrow [q \longrightarrow r]$ se: $p : \exists x \in \mathbb{Q} : x + 3 = \sqrt{2} + 3$, $q : \exists x \in \mathbb{I} : x + 0 = \pi$, $r : \forall x \in \mathbb{N}/x + 2,5 = 5$ e $w : \exists x \in \mathbb{Q}/x + 0 = \sqrt{2}$

20. Estabelecer o valor lógico das seguintes afirmações:

    (a) Que $p \longrightarrow q$ seja falsa é condição necessária e suficiente para que p seja verdadeira e q seja falsa.

    (b) $p \wedge q$ implica $p \longleftrightarrow q$

    (c) É suficiente que $[(p \wedge q) \longrightarrow (\sim q \wedge \sim p)]$ que seja falsa para que p e q sejam equivalentes.

    (d) É necessário e suficiente que $v(p) = v(q) = V$ para que $v[(p \triangle q) \longrightarrow r] = V$

    (e) $p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$ é equivalente a $(p \wedge q) \longrightarrow r$

21. Considere o operador $\circledast$ cujo valor lógico é (i) $v(p \circledast q) = V$ se, e somente se $v(p) = V$; (ii) $v(p \circledast q) = F$ se, e somente se $v(p) = F$. Pede-se:

    (a) Construir a tabela-verdade do operador $\circledast$;

    (b) Construir a tabela-verdade da proposição $p \wedge (q \longrightarrow p)$;

    (c) Verificar se a proposição $p \circledast q$ é equivalente à proposição $p \wedge (q \longrightarrow p)$;

    (d) Simplificar as seguintes proposições:

        i. $(p \circledast p) \circledast (q \circledast q)$
        ii. $(p \circledast q) \circledast (q \circledast p)$
        iii. $(\sim p \circledast q) \circledast (\sim q \circledast p)$
        iv. $[p \circledast (q \circledast \sim p)] \circledast \sim q$
        v. $[(p \longrightarrow q) \circledast (q \vee r)] \circledast [s \circledast (r \circledast p)]$
        vi. $[(p \vee q) \circledast (q \circledast (r \longleftrightarrow q))] \wedge [q \circledast (p \longrightarrow (r \vee q))]$

Capítulo 3

MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

3.1 Introdução

Entendemos por demonstração uma sequência de afirmações lógicas com a finalidade de atingir uma conclusão. Uma demonstração pode ser FORMAL ou INFORMAL.

Uma demonstração é dita formal quando se deixa de forma clara, em cada passo, as leis da lógica proposicional que foram usadas.

Uma demostração é dita informal quando não se explicita as leis da lógica proposicional usadas, pulando alguns argumentos (obvios), subintendendo-se que fazem sentido e deixando por conta do leitor o preenchimento dessas lacunas. Essas últimas demonstrações são as que mais usamos em matemática. Nem por isso deixam de ser formais do ponto de vista científico.

O objetivo deste capítulo é prover, dar as bases para elaborar um argumento que nos permita mostrar um resultado ou teorema que aparece na forma de uma implicação

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$$

Com essa finalidade, nas próximas seções estudaremos: o método direto, o método indireto e o princípio de indução finita.

3.2 Importância das Proposições Condicionais

As proposições condicionais têm um papel importante em Matemática. Os teoremas ou resultados podem sempre ser escritos na forma de uma proposição condicional, ou seja, na forma de uma implicação lógica válida.

Exemplo 51 *Escrever como uma proposição condicional os seguintes resultados ou enunciados:*
(a) O quadrado de todo número real é maior ou igual do que zero;
(b) Um número $x \in \mathbb{Z}$ é par quando $x = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$;
(c) O número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n;
(d) $a \cdot b = 0$ somente se $a = 0$ ou $b = 0$.

Solução:
(a) Se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$;
(b) Se $x \in \mathbb{Z}$ é par, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2k$;
(c) Se $n(A) = n$, então $n(\mathcal{P}(A)) = 2^n$;
(d) Se $a = 0$ ou $b = 0$, então $a \cdot b = 0$.

Para toda proposição condicional $p \longrightarrow q$, associam-se três proposições igualmente importantes:

1. **Proposição Recíproca:** $q \longrightarrow p$.
2. **Proposição Inversa:** $\sim p \longrightarrow \sim q$.
3. **Proposição Contrapositiva:** $\sim q \longrightarrow \sim p$.

Exemplo 52 *Seja $p \longrightarrow q$ a proposição "Se x é par, então é divisível por 2". Obtenha as proposições recíproca, inversa e contrapostiva.*

Solução: *A proposição recíproca é $q \longrightarrow p$: "Se x é divisível por 2, então é x é par".*
A proposição inversa é $\sim p \longrightarrow \sim q$: "Se x não é par, então não é divisível por 2".
A proposição contrapostiva é $\sim q \longrightarrow \sim p$: "Se x não é divisível por 2, então x não é par".

Exemplo 53 *Se a inversa de $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \longrightarrow (q \vee \sim r)$ é falsa. Determine o valor de verdade da contrapostiva.*

Solução: *A inversa de $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \longrightarrow (q \vee \sim r)$ é $\sim [(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \longrightarrow \sim (q \vee \sim r)$. Como a inversa é falsa, temos $v[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] = F$ e $v(q \vee \sim r) = V$.*
Daqui, a proposição contrapostiva $\sim (q \vee \sim r) \longrightarrow \sim [(p \wedge q) \vee (q \wedge r)]$, tem valor de verdade V.

Exemplo 54 *Sob quais condições a inversa e a recíproca de $p \longrightarrow q$ tem o mesmo valor de verdade?*

Solução: *A inversa, $\sim p \longrightarrow \sim q$, é falsa somente se $v(\sim p) = V$, $v(\sim q) = F$, isto é, somente se $v(p) = F$ e $v(q) = V$. E, verdadeira nos demais casos.*
A recíproca, $q \longrightarrow p$, é falsa somente se $v(q) = V$ e $v(p) = F$. E, verdadeira nos demais casos.
Portanto, independente dos valores de verdade de p e q, $v(\sim p \longrightarrow \sim q) = v(q \longrightarrow p)$.

Isto pode ser visto também via tabela-verdade. Deixamos como exercício para o estudante.

Exemplo 55 *A recíproca e a contra recíproca de $p \longrightarrow q$ tem o mesmo valor de verdade?*

Solução: *Não, pois se $v(q) = F$ e $v(p) = V$ temos que $v(q \longrightarrow p) = v(F \longrightarrow V) = V$ e $v(\sim q \longrightarrow \sim p) = v(V \longrightarrow F) = F$.*

Isto também pode ser comprovado via tabela-verdade. Exercício para o estudante.

Exemplo 56 *É verdade que a negação de $p \triangle q$ é $p \longleftrightarrow q$?*

Solução: *Sim.*
$v(p \triangle q) = F$ somente se $v(p) = V = v(q)$ e $v(p) = v(q) = F$. Logo, $v[\sim (p \triangle q)] = V$ nesses valores de p e q, que é exatamente quando $v(p \longleftrightarrow q) = V$.
$v(p \triangle q) = V$ somente se $v(p) \neq v(q)$. Logo, $v[\sim (p \triangle q)] = F$ quando p e q assumem valores de verdade diferentes, que é exatamente quando $v(p \longleftrightarrow) = F$.
Portanto, $\sim (p \triangle q) = p \longleftrightarrow q$.
Exercício: *Verificar via tabela-verdade.*

3.3 Método Direto

Queremos mostrar um resultado da forma $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$.

O método direto consiste em usar as hipóteses $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e, a partir da validade delas, junto com definições, axiomas e leis, alcançar a validade da conclusão q.

Note que:

(i) Quando a conclusão q é verdadeira, a implicação torna-se naturalmente verdadeira. Nesse caso, dizemos que a implicação se verifica trivialmente ou por trivialização.

(ii) Quando a hipótese $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$ é falsa, a implicação é verdadeira naturalmente. Nesse caso, dizemos que a implicação se verifica por vacuidade.

A seguir dois exemplos de provas formais.

Exemplo 57 *Mostre que se $2x^2 + a < 9$ e $x = 2$, então $a < 1$.*

Solução: *Sejam $p : 2x^2 + a < 9$, $q : x = 2$ e $r : a < 1$. Queremos provar que $(p \wedge q) \longrightarrow r$.*

(1) Para $x = 2$, temos a inferência válida $[(2x^2 + a < 9) \wedge x = 2] \longrightarrow (2(2)^2 + a < 9)$;

(2) Fazendo $t : 2(2)^2 + a < 9$, temos que t é equivalente a $t : a < 1$. Assim, $(p \wedge q) \longrightarrow t$;

(3) O anterior ocorre pois por hipótese $p \wedge q$ é verdadeiro;

(4) Aplicando a Lei Modus Ponens a (2) e (3), a conclusão t é válida. Ou seja,é válida a inferência $[[(p \wedge q) \longrightarrow t] \wedge (p \wedge q)] \longrightarrow t$;

(5) Como $t = r$, segue que r se cumpre;

(6) Portanto, a implicação é verdadeira.

Exemplo 58 *Demonstre que $\{(p \wedge q) \wedge [(p \wedge q) \longrightarrow r] \wedge [r \longrightarrow s]\} \longrightarrow s$*

Solução: *Mostrar que $\{(p \wedge q) \wedge [(p \wedge q) \longrightarrow r] \wedge [r \longrightarrow s]\} \longrightarrow s$ é válida, equivale a mostrar que a proposição é uma tautologia. De fato,*

(1) $\{(p \wedge q) \wedge [\sim (p \wedge q) \vee r] \wedge [\sim r \vee s]\} \longrightarrow s$ (Lei da condicional)
(2) $\{(p \wedge q) \wedge r \wedge [\sim r \vee s]\} \longrightarrow s$ (Lei associativa e de absorção)
(3) $\{(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)\} \longrightarrow s$ (Lei associativa e de absorção)
(4) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (r \wedge s) \vee s$ (Lei da condicional e Morgan)
(5) $\sim (p \wedge q) \vee [\sim r \vee (\sim s \vee s)]$ (Lei de Morgan e associativa)
(6) $\sim (p \wedge q) \vee (\sim r) \vee V \equiv V$ (valor de verdade da disjunção)
Portanto, a implicação é válida.

Os exemplos a seguir, usuais no ambiente matemático, apresentam provas usando o método direto.

Exemplo 59 *Mostre que se x é um inteiro par, então x^2 é par.*

Solução: *Como x é par, existe um inteiro k tal que $x = 2k$. Logo, $x^2 = (2k)(2k) = 2(2k^2)$. Como o conjunto dos números inteiros é fechado sob a operação de multiplicação, $2k$ é inteiro. Denotando por $m = 2k^2$, temos que $x^2 = 2m$. Portanto, x^2 é par, como queríamos mostrar.*

Exemplo 60 *Mostre que se x e y são inteiros pares, então $5x + 3y$ é par.*

Solução: *Como x e y são pares, existem $k, p \in \mathbb{Z}$, tais que $x = 2k$ e $y = 2p$. Logo, $5x + 3y = 5(2k) + 3(2p) = 2(5k + 3p)$. Como $\mathbb{Z}$ é fechado pela soma e multiplicação, $m = (5k + 3p) \in \mathbb{Z}$. Portanto, $5x + 3y = 2m$ é par.* $\blacksquare$

Exemplo 61 *Mostre que se $a > 0$ e $b < c$, então $ab < ac$.*

Solução: *De fato, sabemos que $b < c$ se, e somente se, $c - b > 0$ e que o produto de dois números positivos continua sendo positivo. Assim, como $a > 0$ e $b < c$, temos que $a(c - b) > 0$. Aplicando a distributividade resulta $ac - ab > 0$. De onde, $ab < ac$, como desejávamos.* $\blacksquare$

Exemplo 62 *Mostre que se $0 < a < b$, então $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$.*

Solução: *De fato, como $a < b$, segue que $b - a > 0$. Logo, $(b - a)^2 > 0$. Adicionando $4ab$ a ambos os lados da desigualdade, obtemos $(b + a)^2 > 4ab$.*

Note que ambos os lados da desigualdade são positivos. Assim, podemos extrair raiz quadrada, o que nos dá $a + b > 2\sqrt{ab}$. De onde, $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$. $\blacksquare$

Exemplo 63 *Mostre que se $a > 0$ e $b < 0$, então $\dfrac{b+1}{a} < \dfrac{1}{a}$.*

Solução: *De fato, como $a > 0$ e $-b > 0$, temos $a(-b) > 0$. Logo, $ab < 0$. Acrescentando a em ambos os lados da desigualdade, obtemos $a(b + 1) < a$. Também, $a^2 > 0$ e $a^{-2} > 0$. Multiplicando $a(b + 1) < a$ por $a^{-2} > 0$, temos $a^{-1}(b + 1) < a^{-1}$, isto é $\dfrac{b+1}{a} < \dfrac{1}{a}$.* $\blacksquare$

Exemplo 64 *Mostre que para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, vale $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.*

Solução: *De fato, sabemos que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Assim, $(x - 1)^2 \geq 0$. Daqui, $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, de onde $x^2 + 1 \geq 2x$. Observe que sendo $x > 0$, temos que $\dfrac{1}{x} > 0$. Multiplicando por $\dfrac{1}{x}$ ambos os lados da desigualdade $x^2 + 1 \geq 2x$, temos $\dfrac{x^2+1}{x} \geq \dfrac{2x}{x}$. Logo, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.* $\blacksquare$

Exemplo 65 *Mostre que se $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, então $x \in \mathbb{Q}$.*

Solução: *De fato, por definição de número racional, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ tal que $\sqrt{x} = \dfrac{a}{b}$. De onde, $x = \dfrac{p^2}{q^2}$. Como $\mathbb{Z}$ é fechado pela multiplicação, $p^2, q^2 \in \mathbb{Z}$ e $q^2 \neq 0$. Portanto, $x \in \mathbb{Q}$.* $\blacksquare$

3.3.1 Prova por casos

Argumentos diretos as vezes requerem dividir por casos o teorema a ser mostrado. Mas, deve-se tomar cuidado ao seguir esse caminho, pois se não são considerados todos os casos possíveis, a prova deixa de ter o valor e a abrangência desejada. A seguir alguns poucos exemplos aplicando esta ideia.

Exemplo 66 *Mostre que se $x \in \mathbb{Z}$, então $x^2 + x$ é par.*

Solução: *Note que se $x \in \mathbb{Z}$, então $x = 2k$ ou $x = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.*
Se $x = 2k$, então $x^2 + x = (2k)^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$ é par.
Se $x = 2k + 1$, então $x^2 + x = (2k + 1)^2 + 2k + 1 = 2(2k + 1)(k + 1)$ é par.
Portanto, qualquer que seja $x \in \mathbb{Z}$, $x + x$ é par. ■

Exemplo 67 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \geq 0$. Mostre que $a^2 \geq b$ se, e somente se, $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$.*
Solução: *Como no enunciado aparece "se, e somente se", devemos mostrar duas sentenças:*

(1) Se $a^2 \geq b$, então $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$
(2) Se $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$, então $a^2 \geq b$

Observe que $\sqrt{b}$ existe por ser $b \geq 0$ e além disso, $\sqrt{b} \geq 0$.

Prova de (1): *A hipótese é $a^2 \geq b$. Queremos mostrar que vale $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$.*
Faremos a prova considerando casos para a.

(i) $a = 0$
A hipótese nos dá $0 \geq b$ e, como $b \geq 0$, temos $0 \geq b \geq 0$. De onde, $b = 0$. Deste modo, $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$, vale.

(ii) $a \neq 0$
Como $b \geq 0$, $b = (\sqrt{b})^2$. Assim,
$a^2 \geq b \iff a^2 \geq (\sqrt{b})^2 \iff a^2 - (\sqrt{b})^2 \geq 0 \iff [a - \sqrt{b}][a + \sqrt{b}] \geq 0$

Esta última desigualdade acima, pensando "a"como uma variável a determinar, ocorre se alguma das situações a seguir acontecer
$(a - \sqrt{b} \geq 0 \quad e \quad a + \sqrt{b} \geq 0)$ *ou* $(a - \sqrt{b} \leq 0 \quad e \quad a + \sqrt{b} \leq 0)$
O primeiro parentese ocorre se $a \geq \sqrt{b}$. Enquanto, o segundo parentese ocorre se $a \leq -\sqrt{b}$.
Assim, $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$.

Portanto, está mostrado (1).

Prova de (2): *A hipótese é $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$. Queremos mostrar que vale $a^2 \geq b$.*
Faremos a prova por casos sobre a.

(i) $a = 0$
Note que neste caso, $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$ equivale a $0 \geq \sqrt{b}$ ou $0 \leq -\sqrt{b}$. Em qualquer situação, como $b \geq 0$, temos $0 \geq \sqrt{b} \geq 0$. Logo, $b = 0$. Assim, vale $a^2 \geq b$.

(ii) $a > 0$

Note que, sendo $a > 0$, *somente uma das partes da hipótese é válida, a saber* $a \geq \sqrt{b}$ *(pois* $a \leq -\sqrt{b} \Longrightarrow \sqrt{b} < 0$, *que não é procedente). Assim, aplicando o exemplo 56 para* $a > 0$ *e* $a \geq \sqrt{b}$, *temos* $a^2 \geq a \cdot \sqrt{b}$.

Por outro lado, aplicando o exemplo 56 para $\sqrt{b} > 0$ *e* $a \geq \sqrt{b}$, *temos* $a \cdot \sqrt{b} \geq b$. *Destas duas últimas desigualdades,* $a^2 \geq b$.

(iii) $a < 0$

Note que, sendo $a < 0$, *somente uma das partes da hipótese é válida, a saber* $a \leq -\sqrt{b}$ *(pois,* $a \geq \sqrt{b} \Longrightarrow \sqrt{b} < 0$, *que não procede).*

Assim, pelo exemplo 56, aplicado para $-a > 0$ *e* $a \leq -\sqrt{b}$, *temos* $-a^2 \leq a\sqrt{b}$. *Da mesma forma, o exemplo 56 aplicado para* $\sqrt{b} \geq 0$ *e* $a \leq -\sqrt{b}$, *nos dá* $a\sqrt{b} \leq -b$.

Das desigualdades $-a^2 \leq a\sqrt{b}$ *e* $a\sqrt{b} \leq -b$, *temos* $-a^2 \leq -b$. *De onde,* $a^2 \geq b$.

Portanto, (2) está mostrada.

Isto concluí a demonstração do enunciado do exemplo. ■

Exemplo 68 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, *com* $b \geq 0$. *Mostre que* $a^2 \leq b$ *se, e somente se,* $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$.

Solução: *Como no enunciado aparece "se, e somente se", devemos mostrar duas sentenças:*

(1) Se $a^2 \leq b$, *então* $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$

(2) Se $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$, *então* $a^2 \leq b$

Prova de (1): *A hipótese é* $a^2 \leq b$, *com* $b \geq 0$. *Queremos mostrar que* $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$.

Consideramos dois casos:

(i) $a = 0$

Neste caso, a desigualdade $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$ *vale trivialmente, pois* $-\sqrt{b} \leq 0 \leq \sqrt{b}$.

(ii) $a \neq 0$

Como $b \geq 0$, $b = (\sqrt{b})^2$. *Assim,*

$a^2 \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq (\sqrt{b})^2 \Longleftrightarrow a^2 - (\sqrt{b})^2 \leq 0 \Longleftrightarrow [a - \sqrt{b}][a + \sqrt{b}] \leq 0$

A última desigualdade, pensando "a"como variável, ocorre em uma das seguintes situações:

$(a - \sqrt{b} \geq 0 \quad e \quad a + \sqrt{b} \leq 0) \quad ou \quad (a - \sqrt{b} \leq 0 \quad e \quad a + \sqrt{b} \geq 0)$

A primeira situação não possui solução, enquanto a segunda, ocorre se $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$.

Isto mostra (1).

Prova de (2): *A hipótese é* $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$. *Queremos mostrar que* $a^2 \leq b$. *Faremos a prova por casos.*

Note que $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$ *equivale a duas desigualdades simultâneas* $-\sqrt{b} \leq a$ *e* $a \leq \sqrt{b}$.

(i) $a = 0$

Neste caso, $a^2 \leq b$ *vale trivialmente, pois* $b \geq 0$.

(ii) $a > 0$

Aplicando o exemplo 56 para $(a > 0$ *e* $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b})$ *e para* $(\sqrt{b} > 0$ *e* $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b})$, *obtemos* $-a\sqrt{b} \leq a^2 \leq a\sqrt{b} \quad e \quad -b \leq a\sqrt{b} \leq b$.

Observando o lado direito destas desigualdades, temos que $a^2 \leq a\sqrt{b}$ *e* $a\sqrt{b} \leq b$. *Logo,* $a^2 \leq b$.

(iii) $a < 0$

Neste caso, $-a > 0$. *Aplicando o exemplo 56 para* ($-a > 0$ *e* $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$) *e para* ($\sqrt{b} > 0$ *e* $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$), *obtemos* $a\sqrt{b} \leq -a^2 \leq -a\sqrt{b}$ *e* $-b \leq a\sqrt{b} \leq b$.

Observando o lado esquerdo destas desigualdades, temos $a\sqrt{b} \leq -a^2$ *e* $-b \leq a\sqrt{b}$.

Logo, $-b \leq -a^2$. *De onde,* $a^2 \leq b$.

Isto mostra (2).

Portanto, o enunciado esta demonstrado. ■

Exemplo 69 *Mostre que se* $x \in \mathbb{R}$, *então* $|x| = |-x|$.

Solução: *Dado que* x *é um número real, então somente uma das opções a seguir ocorre:* $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$.

(i) Se $x > 0$, *então* $-x < 0$. *Logo, por definição de valor absoluto,* $|x| = x$ *e* $|-x| = -(-x) = x$ *e daqui,* $|x| = |-x|$.

(ii) Se $x < 0$, *então* $-x > 0$. *Logo, por definição de valor absoluto,* $|x| = -x$ *e* $|-x| = -x$ *e daqui,* $|x| = |-x|$.

(iii) Se $x = 0$, *temos* $-x = 0$ *e daqui* $|x| = 0 = |-x|$.

Portanto, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$. ■

Exemplo 70 *Mostre que se* $x, y \in \mathbb{R}$, *então* $|xy| = |x||y|$.

Solução: *Dado que* x, y, *são números reais, vamos dividir a prova por casos:*

(i) $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$

Temos $xy \geq 0$. *Por definição de valor absoluto,* $|xy| = xy$, $|x| = x$ *e* $|y| = y$. *Logo,* $|xy| = xy = |x||y|$.

(ii) $x \geq 0$ *e* $y < 0$

Temos que $xy < 0$. *Por definição de valor absoluto,* $|xy| = -xy$, $|x| = x$ *e* $|y| = -y$. *Logo,* $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$

(iii) $x < 0$ *e* $y \geq 0$

Temos que $xy < 0$. *Por definição de valor absoluto,* $|xy| = -xy$, $|x| = -x$ *e* $|y| = y$. *Logo,* $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$

(iv) $x < 0$ *e* $y < 0$

Temos que $xy > 0$. *Por definição de valor absoluto,* $|xy| = xy$, $|x| = -x$ *e* $|y| = -y$. *Logo,* $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

Em qualquer um dos casos, vale que $|xy| = |x||y|$.■

3.4 Método Indireto

O método indireto usa um argumento não direto para provar um resultado. Este método distingue dois tipos: Argumentos por contrapositiva e argumentos por redução ao absurdo.

3.4.1 Argumentos por contrapositiva

Queremos mostrar um resultado da forma $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$.

O argumento por contrapositiva, consiste em assumir como hipóteses $\sim q$ e concluir $\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$. Isto é, consiste em mostrar(pelo método direto) a implicação

$$\sim q \longrightarrow \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$$

Exemplo 71 *Seja $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar.*

Solução: *Denotemos por $p(n) : 3n+2$ é ímpar e $q(n) : n$ é ímpar. Queremos mostrar $\forall n \in \mathbb{Z} : p(n) \longrightarrow q(n)$. Vamos mostrar usando argumento da contrapositiva, $\forall n \in \mathbb{Z} :\sim q(n) \longrightarrow \sim p(n)$.*

Suponha que n seja par, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Logo, $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1)$ é par. Assim, fica mostrado o enunciado. ■

Exemplo 72 *Mostre que se x não é inteiro, então $\frac{x}{2}$ não é inteiro.*

Solução: *Sejam $p(x) : x \notin \mathbb{Z}$, $q(x) : \frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}$. Vamos mostrar $\forall x \in \mathbb{R} :\sim q(x) \longrightarrow \sim p(x)$.*

Suponha que $\frac{x}{2}$ seja inteiro, então $x = 2(\frac{x}{2}) \in \mathbb{Z}$, que é a negação de nossa hipótese. Assim, fica mostrado o enunciado. ■

Exemplo 73 *Mostre que se x é irracional, então $\frac{1}{x}$ é irracional.*

Solução: *Sejam $p(x) : x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ e $q(x) : \frac{1}{x} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Vamos mostrar $\forall x \in \mathbb{R} :\sim q(x) \longrightarrow \sim p(x)$.*

Suponha que $\frac{1}{x}$ seja racional, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, tais que $\frac{1}{x} = \frac{a}{b}$. Note que $\frac{1}{x} \neq 0$, logo $a \neq 0$. Assim, $x = \frac{b}{a}$ é racional. O enunciado esta demonstrado. ■

Exemplo 74 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que se $x+y \geq 2$, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.*

Solução: *Sejam $p(x,y) : x+y \geq 2$, $q(x) : x \geq 1$ e $r(y) : y \geq 1$. O enunciado se traduz em $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : p(x,y) \longrightarrow (q(x) \vee r(y))$. Por argumento da contrapositiva, queremos mostrar $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} :\sim (q(x) \vee r(y)) \longrightarrow \sim p(x,y)$.*

Suponha que $x < 1$ e $y < 1$. Então, $x+y < 2$, que é a negação de nossa hipótese. Assim, fica mostrado o enunciado. ■

Exemplo 75 *Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se x é irracional, então $\sqrt[3]{x}$ é irracional.*

Solução: *Sejam $p(x) : x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ e $q(x) : \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Por argumento de contrapositiva, queremos mostrar que $\forall x \in \mathbb{R} :\sim q(x) \longrightarrow \sim p(x)$.*

Suponha que $\sqrt[3]{x} \in \mathbb{Q}$. Então, existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ tais que $\sqrt[3]{x} = \frac{a}{b}$. Logo, $x = \frac{a^3}{b^3}$ é racional. Portanto, está mostrado o enunciado. ■

Exemplo 76 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Mostre que $a^2 > b^2$ se, e somente se, $a > b$.*

Solução: *Sejam $p(a,b) : a^2 > b^2$ e $q(a,b) : a > b$. Assim, o enunciado se escreve como: $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : p(a,b) \longleftrightarrow q(a,b)$.*

Desse modo, devemos mostrar duas implicações:

$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : p(a,b) \longrightarrow q(a,b)$ *e* $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : q(a,b) \longrightarrow p(a,b)$.

(i) Vamos mostrar $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : p(a,b) \longrightarrow q(a,b)$, pela contrapositiva.

Suponha que $a \not> b$. Então, $a < b$ ou $a = b$.

Se $a < b$, temos $a^2 < ab$ e $ab < b^2$. Logo, $a^2 < b^2$. Agora, se $a = b$, claramente $a^2 = b^2$. Destes dois últimos concluímos, $a^2 \leq b^2$. Portanto, está mostrado que $a^2 > b^2 \Longrightarrow a > b$.

(ii) Vamos mostrar $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : q(a,b) \longrightarrow p(a,b)$, pelo método direto.

De fato, se $a > b$, temos $a^2 > ab$ e $ab > b^2$. Logo, $a^2 > b^2$. ■

Exemplo 77 *Seja f a função real dada por $f(x) = 3x - 2$. Mostre que se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$.*

Solução: *Sejam $p(x,y) : x \neq y$ e $q(x,y) : f(x) \neq f(y)$, para f dada. Vamos mostrar a contrapositiva $\forall x, y \in Dom(f) : \sim q(x,y) \longrightarrow \sim p(x,y)$.*

Suponha que $f(x) = f(y)$. Então $3x - 2 = 3y - 2$, de onde $x = y$. Assim, fica mostrado o enunciado. ■

3.4.2 Argumentos por redução ao absurdo

Mais uma vez, estamos interessados em mostrar um teorema da forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$$

O argumento por redução ao absurdo consiste em assumir a negação da conclusão como uma hipótese verdadeira e junto com as outras premissas chegar a uma contradição. Dito de outra forma, este argumento consiste em mostrar a seguinte implicação

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge (\sim q)] \Longrightarrow \text{CONTRADIÇÃO}$$

Exemplo 78 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $a \cdot b$ é ímpar, então a é ímpar ou b é ímpar.*

Solução: *Sejam $p(a,b) : a \cdot b$ é ímpar, $q(a,b) : a$ é ímpar e $r(a,b) : b$ é ímpar. Usando o argumento de redução ao absurdo, queremos mostrar que*

$$[\forall a, b \in \mathbb{Z} : p(a,b) \wedge \sim (q(a,b) \vee r(a,b))] \Longrightarrow \textit{CONTRADIÇÃO}$$

Suponha que a e b sejam pares. Então $a = 2k$ e $b = 2m$, onde $k, m \in \mathbb{Z}$. Assim, $a \cdot b = (2k)(2m) = 2(2km)$ é par e $a \cdot b$ é ímpar por hipótese. Isto é uma contradição, pois um número inteiro ou é par ou é ímpar, não ambos simultaneamente. Portanto, temos mostrado o enunciado. ■

Exemplo 79 *Mostre que se $a \neq 0$, então a e $\dfrac{1}{a} > 0$ possuem o mesmo sinal.*

Solução: *Sabemos que $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. Vamos mostrar que se $a > 0$, então $\dfrac{1}{a} > 0$ também. O argumento que vamos usar é redução ao absurdo.*

Suponha que $a^{-1} < 0$ e $a > 0$, então $a(a^{-1}) < 0$. Isto é, $1 < 0$, absurdo! Portanto, $\dfrac{1}{a} > 0$.

A prova para o caso $a < 0$ é similar. ■

Exemplo 80 *Seja $x \in \mathbb{R}$, com $x > 0$. Mostre que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.*

Solução: *Sejam $p(x) : x > 0$ e $q(x) : x + \frac{1}{x} \geq 2$. Vamos mostrar que*

$$\forall x > 0 : [p(x) \wedge (\sim q(x))] \Longrightarrow CONTRADI\c{C}\tilde{A}O$$

Suponha que $x + \frac{1}{x} < 2$. Daqui, $x + \frac{1}{x} - 2 < 0$. Logo, $\frac{x + 1 - 2x}{x} < 0$. Como $x > 0$, temos $x(\frac{x+1-2x}{x}) < 0(x)$. Daqui, $x^2 - 2x + 1 < 0$, isto é, $(x-1)^2 < 0$, o que é um absurdo, pois sabemos que qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Portanto, está demonstrado o enunciado. ■

Exemplo 81 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que se $a > b$, $c > 0$, então $ac > bc$.*

Solução: *Sejam $p(a, b) : a > b$, $q(c) : c > 0$ e $r(a, b, c) : ac > bc$. Vamos mostrar que*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : [(p(a, b) \wedge q(c)) \wedge (\sim r(a, b, c))] \Longrightarrow CONTRADI\c{C}\tilde{A}O$$

Suponha que $ac \leq bc$, isto é, $ac - bc \leq 0$. Daqui, $c(a - b) \leq 0$. Como $c > 0$ e $a > b$, temos $(a - b)c > 0$.

Assim, $(a - b)c \leq 0$ e $(a - b)c > 0$ é um absurdo! Portanto, está demonstrado o enunciado. ■

Exemplo 82 *Mostre que $\sqrt{3}$ é irracional.*

Solução: *Sejam $p : 3 \in \mathbb{Z}^+$ e $q : \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Vamos mostrar que $(p \wedge \sim q) \Longrightarrow CONTRADI\c{C}\tilde{A}O$

Suponha que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$, tais que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. Elevando à potência em ambos os lados, temos $3b^2 = a^2$. Daqui, 3 divide a^2 e como 3 é primo, 3 divide a. Assim, $a = 3k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e $b^2 = 3k^2$. De novo, 3 divide b e daqui, 3 divide b. Portanto, 3 é um fator comum de a e b, o que é uma contradição. Isto mostra o enunciado. ■

3.5 Indução Matemática

Os números naturais e todas as suas propriedades decorrem dos Axiomas de Peano. Para tal, é dado um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais* e, uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ o valor $s(n) = n + 1$, chamado de sucessor de n.

Axioma P1: A função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é injetora. Isto é, se $s(n) = s(m)$, então $n = m$.
Axioma P2: $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ é unitário. Isto é, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro número natural. Este é simbolizado por 1. Assim, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Axioma P3: (Princípio de Indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um conjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se que $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

A partir disto, entendemos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. No entanto, se escolhermos 0 como aquele elemento que não é sucessor de nenhum outro número, teremos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e nesse caso usamos $\mathbb{N}^*$ para representar $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Uma formulação equivalente do princípio de indução, muito mais popular no ambiente matemático, é a seguinte:

Teorema 2 *(***Primeiro Princípio de Indução Finita (PIF)***) Seja $p(n), n \in \mathbb{N}$, uma função proposicional, tal que:*

1. *$p(1)$, é verdadeira;*
2. *Se da validade de $p(k), k \in \mathbb{N}$, concluí-se que $p(k+1)$ é válida.*

   Então, $p(n)$, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como aplicar corretamente o PIF? É necessário seguir os seguintes passos:

1. Verificar que a sentença é verdadeira para $n = 1$, isto é, $p(1)$ é verdadeira.
2. (**Hipótese de Indução: HI**) Aceitamos que para $n = k \in \mathbb{N}$, com $k > 1$, $p(k)$ é verdadeira.

   Nesta parte, não provamos nada, simplesmente assumimos como verdadeira a validade de $p(k)$.
3. (**Tese de Indução: TI**) Devemos mostrar que para $n = k + 1$, $p(k + 1)$ é verdadeira a partir da validade de $p(k)$.

Definição 8 *Seja $A \subset \mathbb{N}$. Dizemos que:*

(i) $a \in A$ é elemento mínimo de A, se $a \leq x$, para todo $x \in A$

(ii) $b \in A$ é elemento máximo de A, se $x \leq b$, para todo $x \in A$.

Exemplo 83 *O conjunto $I_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ tem elemento mínimo $a = 1$ e elemento máximo $b = m$.*

De fato, para todo $x \in I_m$, é válido que $1 \leq x \leq m$.

Exemplo 84 *Determinar o máximo e o mínimo do conjunto das soluções inteiras da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.*

Notamos que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Logo, resolver $x^2 - 3x + 2 = 0$, equivale a encontrar as soluções de $(x-1)(x-2) = 0$, que são $x = 1$ e $x = 2$. Pondo $A = \{1, 2\}$, obtemos que o elemento mínimo é 1 e o elemento máximo é 2.

Um resultado importantíssimo do números naturais é o princípio de boa ordenação.

Teorema 3 (Princípio de Boa Ordenação) *Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui elemento mínimo.*

Prova: Seja $A \subset \mathbb{N}$. Consideremos dois casos:

1. Se $1 \in A$ então 1 é o elemento mínimo de A e, o teorema está mostrado.

2. Se $1 \notin A$. Seja $X = \{p \in \mathbb{N} : p \notin A, 1 \leq p \leq n\}$, temos que, $1 \in X$. Claramente, $X \neq \mathbb{N}$, uma vez que $A \neq \emptyset$. E, se $n \in X$, então $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \not\subset A$, pois se não fosse assim, existiria algum $k < n$ tal que $k \in A$, que é contrário à forma como está definido o conjunto X.

Antes de prosseguir, vejamos o enunciado da contra positiva do princípio de indução (P3), dos axiomas de Peano.

> Se $X \neq \mathbb{N}$, então
>
> (i) $1 \notin X$, ou
>
> (ii) $n \in X$ e $n + 1 \notin X$.

Assim, como $X \neq \mathbb{N}$ e $1 \in X$, temos que $n \in X$, e $n + 1 \notin X$, para algum $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$.

Portanto, existe $a = n + 1$ tal que $a \in A$. Uma vez que $n + 1 = s(n)$ e $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \not\subset A$, temos que a é o menor elemento de A, como queríamos mostrar. ■

Observamos que quando temos uma proposição aberta definida para $n \in \mathbb{N}$, ela trona-se válida a partir de uma certo $n_0 > 1$.

Quando isto ocorre, se faz necessário enunciar um segundo princípio de indução finita, que sucintamente afirma que: Se $X \subset \mathbb{N}$ é tal que, dado $n \in \mathbb{N}$, $m \in X$, para todo $m < n$, implica que, $n \in X$. Então, $X = \mathbb{N}$. A prova desse enunciado é consequencia do princípio de boa ordenação.

No entanto, existe uma formulação deste segundo princípio de indução que é mais popular.

Teorema 4 (Segundo Princípio de Indução Finita) *Seja $p(n)$ uma função proposicional, tal que:*

1. *$p(n_0)$ é verdadeira;*

2. *Se da validade de $p(k)$, com $k > n_0$, conclui-se que $p(k+1)$ é verdadeira.*

Então, $p(n)$ é válida para todo $n \geq n_0$.

3.5.1 Aplicação do PIF para mostrar igualdades

Exemplo 85 *Mostre que a soma dos n primeiros números naturais é dada por* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solução: *Seja* $p(n) : 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. $p(1)$ *é verdadeira, pois* $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.

2. *(HI) Suponha que* $p(k)$ *seja verdadeira, para* $k > 1$. *Isto é,* $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é verdadeira. Isto é,*

$$1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vejamos,

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+k+(k+1) &= [1+2+\ldots+k]+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \qquad \textit{(Por HI)} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Assim, $p(k+1)$ *é verdadeira. Portanto,* $p(n)$ *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 86 *Mostre que a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é dada por* $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solução: *Seja* $p(n) : 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. $p(1)$ *é verdadeira, pois* $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

2. *(HI) Suponha que* $p(k)$ *seja verdadeira, para* $k > 1$. *Isto é,*

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é verdadeira. Isto é, vale*

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 &= [1^2+2^2+\ldots+k^2]+(k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \qquad \textit{(Por HI)} \\
&= (k+1)[\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

Assim, $p(k+1)$ é verdadeira. Portanto, $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 87 *Mostre que $4^n - 1$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Solução: *Seja $p(n) : 4^n - 1 = 3q$ para algum $p \in \mathbb{N}$.*

1. *$p(1)$ é verdadeira, pois $4^1 - 1 = 3$.*
2. *(HI) Suponha que para $k > 1$, $p(k)$ é verdadeira. Isto é, $4^k - 1 = 3q_1$.*
3. *Queremos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, isto é, vale $4^{k+1} - 1 = 3q$.*

   De fato, $4^{k+1} - 1 = 4^k 4 - 1 = 4(3q_1 + 1) - 1 = 3(q_1 + 1) = 3q$

   Portanto, $4^n - 1$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 88 *Mostre que o polinômio $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ é divisível por $x+y$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Solução: *Dizer que $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ é divisível por $x+y$, significa que existe $Q(x,y)$ tal que $x^{2n-1} + y^{2n-1} = (x+y)Q(x,y)$.*

Seja $p(n) : x^{2n-1} + y^{2n-1} = (x+y)Q(x,y)$

1. *$p(1)$ é verdadeira, pois $x^{2(1)-1} + y^{2(1)-1} = x + y$.*
2. *(HI) Suponha que, para $k > 1$, $p(k)$ é verdadeira. Isto é, $x^{2k-1} + y^{2k-1} = (x+y)Q_1(x,y)$*
3. *Queremos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira. Isto é, vale $x^{2k+1} + y^{2k+1} = (x+y)Q(x,y)$.*

   De fato,

$$\begin{aligned}
x^{2k+1} + y^{2k+1} &= x^{(2k-1)+2} + y^{(2k-1)+2} \\
&= x^{2k-1}x^2 + y^{2k-1}y^2 \qquad \textit{(Por HI)} \\
&= (x^{2k-1}x^2 + y^{2k-1}x^2) - (y^{2k-1}x^2 - y^{2k-1}y^2) \\
&= (x^{2k-1} + y^{2k-1})x^2 - y^{2k-1}(x^2 - y^2) \\
&= (x+y)Q_1(x,y)x^2 - y^{2k-1}(x+y)(x-y) \\
&= (x+y)[Q_1(x,y)x^2 - y^{2k-1}(x-y)] \\
&= (x+y)Q(x,y), \qquad \textit{onde } Q(x,y) = Q_1(x,y)x^2 - y^{2k-1}(x-y)
\end{aligned}$$

Assim, $p(k+1)$ é verdadeira. Portanto, $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 89 *Determine uma fórmula para $f(n)$ sabendo que $f(1) = 1$ e $f(n) = nf(n-1)$ para todo $n > 1$. Após isso, mostre por indução que a fórmula que encontrou é válida.*

Solução: *Vamos obter alguns valores:*

$f(2) = 2f(1) = 2 \cdot 1$; $f(3) = 3f(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$; $f(4) = 4f(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$. Assim, $f(n) = n!$.

Agora, seja $p(n) : f(n) = n!$ Vamos mostrar por indução.

1. *$p(1)$ é verdadeira pois $1! = 1$ e $f(1) = 1$.*
2. *Suponha que para $k > 1$, $p(k)$ é verdadeira, isto é $f(k) = k!$.*
3. *Queremos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, $f(k+1) = (k+1)!$. De fato,*

   Como $k > 1$, temos $k+1 > 1$, logo $f(k+1) = (k+1)f(k) = (k+1)k! = (k+1)!$

   Portanto, $f(n) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 90 *Determine uma fórmula para $f(n)$ sabendo que $f(1) = 25$ e $f(n) = f(n-1) + 4$ para todo $n > 1$. Após isso, mostre por indução que a fórmula que encontrou é válida.*

Solução: *Vamos obter alguns valores:*

$f(2) = f(1) + 4 = 25 + 4$; $f(3) = f(2) + 4 = 25 + 4 + 4 = 25 + (2)4$; $f(4) = f(3) + 4 = 25 + (2)4 + 4 = 25 + (3)4$. Assim, $f(n) = 25 + (n-1)4$.

Agora, seja $p(n) : f(n) = 25 + (n-1)4$ Vamos mostrar por indução.

1. *$p(1)$ é verdadeira pois $f(1) = 25 = 25 + (1-1)4$.*
2. *Suponha que para $k > 1$, $p(k)$ é verdadeira, isto é $f(k) = 25 + (k-1)4$.*

3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é verdadeira, ou seja,* $f(k+1) = 25 + [(k+1)-1]4 = 25+4k$. *De fato,*

   Como $k > 1$, *temos* $k+1 > 1$, *logo* $f(k+1) = f(k)+4 = 25+(k-1)4+4 = 25+[(k+1)-1]4$

   Portanto, $f(n) = 25 + (n-1)4$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 91 *Define-se a potenciação de números naturais por* $a^1 = a$, $\quad a^n = a \cdot a^{n-1}$. *Mostre que para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$, *tem-se* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Solução: *Vamos fixar* m *e mostrar que vale essa propriedade.*
Para isto, seja $p(n) : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

1. $p(1)$ *é verdadeira, pois* $a^{m+1} = a \cdot a^{(m+1)-1} = a \cdot a^m = a^m.a^1$.

2. *Suponha que para* $k > 1$ *vale* $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$.

3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é válida, isto é,* $a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}$. *De fato,*

   $a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{(m+k)+1} = a^{m+k+1}$

   Portanto, está mostrada a propriedade. De forma similar se mostra fixando n.

Exemplo 92 *Sejam* $a_1 = 1$ *e* $a_n = 2a_{n-1} + 1$ *para* $n > 1$. *Mostre que* $a_n = 2^n - 1$.

Solução: *Seja* $p(n) : a_n = 2^n - 1$.

1. $p(1)$ *é verdadeira, pois* $a_1 = 2^1 - 1 = 1$.

2. *Suponha que para* $k > 1$, $p(k)$ *é verdadeira, isto é* $a_k = 2^k - 1$.

3. *Vamos mostrar que* $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. *De fato,*

   $a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$

Portanto, $a_n = 2^n - 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

3.5.2 Aplicação do PIF para mostrar desigualdades

Exemplo 93 *Mostre que $5^n > n + 4^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.*

Solução: *Consideremos $p(n) : 5^n > n + 4^n$.*

1. *$p(2)$ é verdadeira, pois $5^2 > 2 + 4^2$.*
2. *Suponha que para $k > 2$, $5^k > k + 4^k$.*
3. *Queremos mostrar que $5^{k+1} > k + 1 + 4^{k+1}$. De fato,*
   $5^{k+1} = 5 \cdot 5^k > 5(k + 4^k)$. *Mas,* $5(k + 4^k) = 4(k + 4^k) + (k + 4^k) = 2k + 4^{k+1} + (3k + 4^k)$
   Como $k > 2$, temos $2k > k + 2 > k + 1$ e daqui $2k + 4^{k+1} + (3k + 4^k) > (k + 1) + 4^{k+1}$. Logo, $5(k + 4^k) > (k + 1) + 4^{k+1}$. Assim, $5^{k+1} > (k + 1) + 4^{k+1}$.

Portanto, $5^n > n + 4^n$ para todo $n \geq 2$.

Exemplo 94 *Mostre que $n! > 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.*

Solução: *Consideremos $p(n) : n! > 2^n$.*

1. *$p(4)$ é verdadeira, pois $4! > 2^4$.*
2. *Suponha que para $k > 4$, $k! > 2^k$.*
3. *Queremos mostrar que $(k+1)! > 2^{k+1}$. De fato, $(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$*

Portanto, $n! > 2^n$ para todo $n \geq 4$.

Exemplo 95 *Mostre que $2^n > 1 + n$, para todo $n \geq 2$.*

Solução: *Considerando $p(n) : 2^n > 1 + n$, temos:*

1. *$p(2)$ é verdadeira, pois $2^2 > 1 + 2$.*
2. *Suponha que para $k > 2$, $2^k > 1 + k$.*
3. *Queremos mostrar que $2^{k+1} > 1 + (k + 1)$. De fato, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(1 + k) > k + 2$.*

Portanto, $2^n > 1 + n$ para todo $n \geq 2$.

3.6 Exercícios

EXERCÍCIOS

1. Mostrar a validade da inferência $[\sim p \wedge (p \vee q)] \longrightarrow q$, usando:

   (a) O método direto (b) O método indireto

2. Mostre que se $x > 1$, então $x^2 > 1$.

3. mostre que se $0 < x < 1$, então $x^2 < x$.

4. Sejam $d, D \in \mathbb{Z}$. Dizemos que d divide D, denotado por $d|D$, se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $D = dc$.

   (a) Mostre que se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;

   (b) Mostre que $a|b$ e $a|c$, então $a|(b \cdot c)$;

   (c) Mostre que se $ab|c$, então $a|c$.

5. Um número $n \in \mathbb{Z}$ é dito *razoável* se $3|(n^2 + 2n)$.

   (a) Prove ou disprove que todo número ímpar é razoável;

   (b) Mostre que se $3|n$, então n é razoável.

6. Para $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 5x - 6$, mostre que existe x real tal que $f(x) = g(x)$.

7. Mostrar ou dar um contra-exemplo para a seguinte afirmação: Se x e y são inteiros positivos, então $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

8. Mostre que se $x \in \mathbb{Q}$, então $x + 5x^2 \in \mathbb{Q}$.

9. Encontrar o erro, caso esteja errado, na prova apresentada abaixo para a seguinte afirmação "Se n^2 é par, então n é par".

   Prova: Suponha que n^2 seja par. Então, $n^2 = (2k)^2 = (2k)(2k)$ para algum número k. Por outro lado, $n^2 = (n)(n)$. Daqui, igualando expressões obtemos $n = 2k$. Portanto, n é par.

10. Mostre que se x^2 é ímpar, então x é ímpar.

11. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $|x - 1| = |1 - x|$.

12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ de mesmo sinal. Mostre que $a < b$, então $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que:

    (a) $a \cdot b > 0$ se, e somente se, $(a > 0$ e $b > 0)$ ou $(a < 0$ e $b < 0)$.

    (b) $a \cdot b < 0$, se e somente se, $(a > 0$ e $b < 0)$ ou $(a < 0$ e $b > 0)$.

14. Determinar o valor de verdade das seguintes afirmações:

    (a) Se $a < 0$ e $b > 0$, então $a^2 - ab > 0$

    (b) Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $ac < bd$

(c) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$.

(d) Se $a < b$, então $a^2 < \dfrac{a^2 + ab}{2} < ab$

15. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ par, é válido $\dfrac{x^n}{x^{2n} + 1} \leq \dfrac{1}{2}$.

16. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$. Mostre que se $\sqrt{xy} \neq \dfrac{x + y}{2}$, então $x \neq y$.

17. Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}^+$, então $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$.

18. Mostre que se $c > 0$ e $a < b$, então $a < \dfrac{a + bc}{1 + c} < b$.

19. Seja $x \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $x^2 + x + 1$ é par, então x é ímpar.

20. Mostre que se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{I}$, então $x + y \in \mathbb{I}$.

21. Mostre que se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{I}$, então $x \cdot y \in \mathbb{I}$.

22. Considerando os números ímpares $1, 3, 5, \ldots$. Indique por u_1 o primeiro número ímpar, por u_2 o segundo número ímpar, por u_3 o terceiro número ímpar e assim sucessivamente. Isto é, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5, \ldots$. Determine uma fórmula para o n-ésimo número ímpar em função do índice n. Uma vez achada, mostre por indução que tal fórmula é válida.

23. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 6 + \ldots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

24. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

25. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

26. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

27. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \times (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

28. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1) \times (2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

29. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1 \times 3} + \dfrac{1}{2 \times 4} + \ldots + \dfrac{1}{n \times (n+2)} = \dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$.

30. Mostre que para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2 \times 4} + \dfrac{1}{4 \times 6} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-2) \times (2n)} = \dfrac{n-1}{4n}$.

31. Mostre que $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$.

32. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

33. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+5)$ é divisível por 6.

34. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ é divisível por 9.

35. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ é divisível por 7.

36. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ é divisível por 11.

37. Determine uma fórmula para u_n se $u_1 = 1$ e $n_k = u_{k-1} + 3$, para $k > 1$. Depois, mostre a validade da fórmula achada.

38. Seja $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$. Encontre uma fórmula para S_n em termos de n e mostre sua validade.

39. Seja $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$. Encontre uma fórmula para S_n e mostre sua validade.

40. Verificar quais das afirmações a seguir são verdadeiras:

    (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 17$ é um número ímpar.

    (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, 2^{4n} é divisível por 15.

    (c) Se $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é tal que $f(1) = 1$, $f(n+1) = f(n) + 8n$, então $f(n) = (2n-1)^2$.

41. Mostre que $2^n > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$.

42. Mostre que $2^n > n^2$ para todo $n > 4$.

43. Mostre que $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, para todo $n > 1$.

44. Mostre que $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, para todo $n > 1$.

45. Mostre que $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$, para todo $n > 1$, onde $a + b > 0$ e $a \neq b$.

46. Mostre que $3^n > 1 + 2n$, para todo $n \geq 1$.

47. Mostre que $5^n > 1 + 4n$, para todo $n \geq 1$.

48. Mostre que $3^n > 2^n + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

49. Mostre que $n^3 \geq (n+1)^2$, para todo $n \geq 6$.

50. Mostre que $n! > n^3$, para todo $n \geq 6$.

Capítulo 4

ELEMENTOS DA TEORIA DE CONJUNTOS

4.1 Introdução

Nesta capítulo, apresentaremos os rudimentos da teoria de conjuntos, as operações entre conjuntos e suas propriedades.

A teoria de conjuntos é fundamental para compreender a Matemática moderna. Deste modo, a linguagem de conjuntos proverá ao estudante suporte adequado para que possa abordar e compreender disciplinas mais avançadas de Matemática.

As propriedades usuais das operações de conjuntos serão provadas usando os diferentes métodos de demonstração já vistos. Sugerimos, caso necessário, voltar a rever o Capítulo 2.

4.2 Noção de conjunto

O matemático ruso George Cantor (1845-1918) foi o fundador da teoria de conjuntos, ele usou o termo "agregado"para conjunto. Por outro lado, o matemático alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) caracterizou de forma vaga o termo conjunto como um "objeto do pensamento, uma coisa".

Um conceito é dito *primitivo* quando este é aceito sem a necessidade de uma definição. Em Matemática, são conceitos primitivos: conjunto, elemento e a relação de pertinência.

Devido a importância desses conceitos em diferentes áreas da Matemática, aceitamos a seguinte definição.

Definição 9 (Conjunto) *Um conjunto, é coleção, agrupação ou classe de objetos, chamados de elementos do conjunto.*

Notação:
Para conjuntos usamos letras maiúsculas: $A, B, C, D, \ldots, X, Y, Z$.
Para os elementos usamos letras minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Observar que a natureza dos objetos que compõem um conjunto é variada. Desse modo, podem ser elementos de um conjunto: uma coruja, uma enxada, um número, uma variável, uma figura, uma função e, até mesmo um conjunto pode vir a ser elemento de um outro conjunto.

4.2.1 Relação de pertinência

Um conjunto estará perfeitamente definido se deixarmos claro quais objetos são ou não elementos desse conjunto. Isto é a relação de pertinência, usamos o símbolo $\in$ para essa finalidade.

$x \in A$, lê-se: x é um elemento do conjunto A, x pertence ao conjunto A.

$x \notin A$, lê-se: x não é um elemento do conjunto A, x não pertence ao conjunto A.

4.2.2 Representação de conjuntos

Essencialmente existem três formas de representar um conjunto:

1. **Por extensão:** Relacionando entre chaves todos os elementos do conjunto. A ordem da escrita não é relevante, mas deve-se entender que não convêm escrever elementos repetidos.

   Exemplo 96 *Os conjuntos a seguir estão dados por extensão:*

   $A = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$

   $B = \{a, f, 6, 56, h\}$

   $C = \{1, 2, \{a, b\}, \{a\}, \{1, b\}\}$

   $D = \{1, 2, 3, \dots, \}$

2. **Por compreensão:** Escreve-se, entre chaves, um elemento genérico fazendo uso de uma propriedade ou função proposicional que caracteriza a todos os elementos.

   Exemplo 97 *Os seguintes conjuntos são dados por compreensão:*

   $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\}$

   $B = \{x : p(x)\}$

   $C = \{f \in U : f \quad \text{é uma função injetiva}\}$

   $D = \{G : G \quad \text{é um grupo abeliano}\}$

3. **Geometricamente:** Fazendo uso de figuras geométricas que nos forneçam ideia clara do conjunto, podendo escrever todos os elementos ou alguns. Este é conhecido como diagramas de Venn-Euler.

É importante observar que a linguagem da lógica proposicional será muito útil aqui para reconhecermos proposições, mesmo que elas não apareçam de forma explícita. Por exemplo:

$p : x \in A, \quad q : x \in B$
$r : \forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 > 0$
$t : \forall x \in U; p(x) \longrightarrow q(x)$
$s : \forall x \in U; [r(x) \vee s(x)] \longleftrightarrow [p(x) \wedge q(x)]$

4.3 Conjuntos Numéricos

Em Matemática, os conjuntos numéricos característicos são:

1. **Números Naturais**: Este conjunto é representado pela letra $\mathbb{N}$. Como visto no capítulo 2, os axiomas de Peano nos permitem considerar o zero como número natural ou não.

   Se considerarmos $0 \notin \mathbb{N}$: $\quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

   Se considerarmos $0 \in \mathbb{N}$: $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \quad \text{e} \quad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

2. **Números Inteiros:** Este conjunto é representado pela letra $\mathbb{Z}$.

   $\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

   $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

   $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

   $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}_0^- = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

3. **Números Racionais:** Este conjunto é representado pela letra $\mathbb{Q}$.

   $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad b \neq 0\}$

   $\mathbb{Q}^* = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}^*\}$

   $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad ab > 0\} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{ou} \quad a, b \in \mathbb{Z}^-\}$

   $\mathbb{Q}^- = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad ab < 0\} = \{\frac{a}{b} : (a \in \mathbb{Z}^+ \text{e} \quad b \in \mathbb{Z}^-) \quad \text{ou} \quad (a \in \mathbb{Z}^- \text{e} \quad b \in \mathbb{Z}^+)\}$

4. **Números Irracionais:** Este conjunto é representado pela letra $\mathbb{I}$ ou por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

   $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x : x \quad \text{é um número decimal não exato com representação infinita e não periódica}\}$

5. **Números Reais:** Este conjunto é representado pela letra $\mathbb{R}$.

   $\mathbb{R} = \{x : x \in \mathbb{Q} \quad \text{ou} \quad x \in \mathbb{I}\}$

   $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

   $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

   $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

6. **Números Complexos:** Este conjunto é representado pela letra $\mathbb{C}$.

   $\mathbb{C} = \{x = a + ib : a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad i = \sqrt{-1}\}$

4.3.1 Intervalos

Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
Intervalo aberto: $(a, b) = \langle a, b \rangle =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
Intervalo semiaberto à direita: $[a, b) = [a, b[= [a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
Intervalo semiaberto à esquerda: $(a, b] =]a, b] = \langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Um intervalo onde $a \neq b$ é dito não degenerado. No caso em que $a = b$ o intervalo é dito degenerado.

Para o conjunto $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$, estabelecer a validade das proposições a seguir:

1. $3 \in A$
2. $\{3\} \notin A$
3. $\{1, 3\} \in A$
4. $\{1, 2\} \in A$

Solução:

1. *A afirmação é falsa, pois 3 não é elemento de A.*
2. *A proposição é falsa, visto que o elemento $\{3\}$ faz parte do conjunto A.*
3. *A proposição é falsa. Nenhum dos elementos de A é da forma $\{1, 3\}$.*
4. *A proposição é verdadeira.*

Exemplo 99 *Seja $A = \{3, \sqrt{5}, 3 + \sqrt{2}, 5i, -6\}$. Determinar o valor de verdade das seguintes proposições.*

(a) $6 \in A$

(b) $\forall x \in A, x^2 \in \mathbb{Z}$.

(c) $\exists x \in A, \exists y \in A : xy \in \mathbb{Q}$

(d) $\forall x \in A, \forall y \in A : xy \in \mathbb{R}$

Solução:

(a) *A proposição é falsa, pois 6 não aparece na relação de elementos de A.*

(b) *A proposição é falsa, pois para $x = 3 + \sqrt{2}$, $x^2 = 7 + 6\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.*

(c) *A proposição é verdadeira, pois existem $x = 3$ e $y = -6$ tais que $xy = -18 \in \mathbb{Q}$.*

(d) *A proposição é falsa, pois para $x = 3$ e $y = 5i$ temos que $xy = 15i \notin \mathbb{R}$.*

Exemplo 100 *Escrever por compreensão os seguintes conjuntos*

$$A = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}\} \qquad e \qquad B = \{0, 2, 6, 12, 20, 30\}$$

Solução: *Para resolver este tipo de exercícios o ideal é procurar um padrão ou uma fórmula que devolva os elementos do conjunto.*

Note que os elementos de A são tais que o denominador é um número ímpar. Qualquer elemento x de A pode ser escrito como $x = \dfrac{1}{2n+1}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim,

$$A = \{x = \frac{1}{2n+1} : 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$$

Para o conjunto B, observe que: $0 = 0(0 + 1)$, $2 = 1(1 + 1)$, $6 = 2(2 + 1)$, $12 = 3(3 + 1)$, $20 = 4(4 + 1)$ e $30 = 5(5 + 1)$. Assim,

$$B = \{x = n(n + 1) : 0 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$$

4.4 Conjuntos especiais

1. **Conjunto Vazio(Nulo):** É o conjunto sem elementos, é representado pela letra grega phi, $\emptyset$.
   $\emptyset = \{x : x \neq x\}$
   Note que intervalo aberto (a, a) é vazio.
2. **Conjunto Unitário:** É o conjunto formado por um único elemento.
3. **Conjunto Universo:** É o conjunto tomado como base para a formação de outros conjuntos, é representado pela letra U.
   Em Matemática, alguns dos conjuntos universo que se tomam são: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

4.5 Conjuntos Finitos e Infinitos

Definição 10 *Seja $A \subset \mathbb{N}$. Dizemos que:*

(i) A é limitado inferiormente se existe um $x_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \leq x$, para todo $x \in A$. E, x_0 é dito cota ou limitante inferior.

(ii) A é limitado superiormente se existe um $x_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq x_1$, para todo $x \in A$. E, x_1 é dito cota ou limitante superior

(iii) A é limitado se A é limitado superior e inferiormente.

Definição 11 (Conjunto finito) *Um conjunto A é dito finito se:*

1. *A é vazio;*
2. *É possível associar a cada elemento de $I_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ um e somente um elemento de A, para algum $m \in \mathbb{N}$.*

Quando conseguimos estabelecer a correspondência entre os elementos de A e os de I_m, dizemos que A possui m, denotado por $n(A) = m$ e, nesse caso escrevemos $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.
No caso de A ser vazio, escrevemos $n(A) = 0$.

Exemplo 101 *Verificar se são finitos os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} : x \quad \text{é divisor de } 12\}$.*

Solução: *De fato,*

1. *Para $A = \{a, b, c, d\}$, considerando $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, podemos estabelecer a correspondência*
   $$1 \longleftrightarrow a, \qquad 2 \longleftrightarrow b, \qquad 3 \longleftrightarrow c, \qquad 4 \longleftrightarrow d$$
   Com isto, A é finito.
2. *Para $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$, notemos primeiro que as soluções reais de $x^2 - 1 = 0$ são 1 e -1. Assim, considerando o conjunto $I_2 = \{1, 2\}$, podemos estabelecer a correspondência $1 \longleftrightarrow -1$ e $2 \longleftrightarrow 1$. Com isto, B é finito.*

3. *Para* $C = \{x \in \mathbb{N} : x$ *é divisor de 12*$\}$, *observe que o número de divisores de* $12 = 2^2 \cdot 3$ *é igual a* 6. *Assim, associando cada divisor de 12 a um e somente um elemento de* $I_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *obtemos que* C *é finito.*

Exemplo 102 *Considerando as letras* a, b, c, d, e, *seja* B *o conjunto formado por exatamente três dessas cinco letras. O conjunto* $C = \{B; B$ *pussui três elementos*$\}$ *é finito.*

Solução: *Como* C *é formado por conjuntos de três elementos, precisamos saber quantos conjuntos de três elementos podemos formar a partir de cinco letras. Isto é feito calculando o número total de combinações de 3 letras entre cinco letras,* $\binom{5}{3}$. *Ora,* $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$. *Assim, associando cada conjunto de três elementos a um e somente um elemento de* $I_{10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *conseguimos, de acordo com a definição de conjunto finito que* C *é finito.*

Exemplo 103 *Mostre que todo conjunto finito* $A \subset \mathbb{N}$ *não vazio é limitado.*

De fato, se A *é finito, podemos escrever* $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, *para algum* $m \in \mathbb{N}$. *Fazendo* $b = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, *claramente* $b \in \mathbb{N}$ *e* $x_1 \leq x \leq b$, *para todo* $x \in A$. *Portanto,* A *é limitado.*

Exemplo 104 *Seja* $A \subset \mathbb{N}$ *não vazio. Mostre que se* A *é limitado superiormente, então* A *é finito.*

De fato, como $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$, *pelo princípio de boa ordenação, existe* $a \in A$, *o menor elemento de* A. *Como* A *é limitado superiormente, existe* $b \in \mathbb{N}$, *tal que* $x \leq b$, *para todo* $x \in A$. *Assim, podemos escrever* $a \leq x \leq b$, *para todo* $x \in A$.

Se $b \in A$, *este será o elemento máximo de* A. *Assim, existe* $n \in \mathbb{N}$ *de tal forma que podemos escrever* $A = \{x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_n = b\}$.

Se $b \notin A$, *existe* $x_n \in A$ *que é o maior elemento de* A, *nesse caso,* $A = \{a, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

Portanto, A *é finito.*

Definição 12 (Conjunto infinito) *Um conjunto* A *é dito infinito se* A *não for finito. Ainda,*

a) O conjunto será infinito enumerável *se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os os elementos de* A *e os elementos de* $\mathbb{N}$.

b) O conjunto será infinito não enumerável *se não for enumerável.*

Exemplo 105 *O conjunto dos números naturais pares e o conjunto dos números naturais ímpares são conjuntos infinitos enumeráveis.*

De fato,

(a) Seja $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *estabelecemos a correspondência biunívoca* $2n$. *Assim,* P *é infinito enumerável.*

(b) Seja $I = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *estabelecemos a correspondência biunívoca* $2n - 1$. *Assim,* I *é infinito enumerável.*

Exemplo 106 *O conjunto dos números inteiros,* $\mathbb{Z}$ *é infinito enumerável.*

De fato, para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ *associamos um único número inteiro da seguinte forma:*

$$\begin{cases} \dfrac{n}{2} \quad , & se \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{é par} \\ -(\dfrac{n-1}{2}), & se \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{é ímpar} \end{cases}$$

Desse modo, $\mathbb{Z}$ é infinito enumerável.

Para $\mathbb{Q}$, primeiro observamos que

Exemplo 107 *Seja $A =$.*

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis

Exemplo 108 *As soluções inteiras da equação $2x+3y = 1$ formam um conjunto infinito enumerável.*

Exemplo 109 *Intuitivamente o conjunto $\mathbb{R}$ e os intervalos não degenerados são conjuntos infinitos não enumeráveis.*

Exemplo 110 *As soluções reais da desigualdade $x^2 - 1 > 0$ constituem um conjunto infinito não enumerável.*

4.6 Relações entre conjuntos

Nesta seção serão vistas as relações de inclusão, igualdade, equivalência, comparabilidade, família e potência entre conjuntos.

4.6.1 Inclusão e Subconjuntos

Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A está incluído em B, se todo elemento de A é também elemento de B. A notação usual é $A \subset B$.

Simbolicamente: $A \subset B \Longleftrightarrow (\forall x \in A,\ x \in A \Longrightarrow x \in B)$

A negação de $A \subset B$ escreve-se como $A \not\subset B$ e estabelece que existe pelo menos um elemento em A que não está em B.

Simbolicamente: $A \not\subset B \Longleftrightarrow (\exists x \in A,\ x \in A \wedge x \notin B)$

É usual entender $A \subset B$ como:

- ☞ A é subconjunto de B ou B tem como subconjunto A,
- ☞ A está contido em B ou B contem A,
- ☞ A está incluído em B ou B incluí A,
- ☞ A é parte de B ou B tem como parte A.

PROPRIEDADES

1. O conjunto vazio, $\emptyset$, é subconjunto de qualquer conjunto A. Ou seja, $\emptyset \subset A$, $\forall A$.

   Demonstração: De fato, a proposição $\forall x \in \emptyset, x \in \emptyset \longrightarrow x \in A$ é válida independente do conjunto A, pois $x \in \emptyset$ é falsa.

2. Todo conjunto A é subconjunto de si próprio. Ou seja, $A \subset A$, $\forall A$.

   Demonstração: De fato, para todo $x \in A$, vale que $x \in A \longrightarrow x \in A$, pela lei de identidade da lógica.

3. (Transitividade) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

   Demonstração: De fato, queremos mostrar que $A \subset C$. Para isto, seja $x \in A$. Como $A \subset B$, temos $x \in B$ e como $B \subset C$, resulta que $x \in C$. Assim, $x \in A \longrightarrow x \in C$ é válida.

4.6.2 Conjuntos Iguais

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais ou idênticos e escrevemos $A = B$, se ambos possuem os mesmos elementos. Isto é, se A está contido em B e B está contido em A.

Simbolicamente: $A = B \Longleftrightarrow A \subset B \quad e \quad B \subset A$

PROPRIEDADES:

1. Todo conjunto é igual a si próprio, $A = A$.

   Demonstração: Isto decorre, do fato de que $A \subset A$.

2. Se $A = B$, então $B = A$.

   Demonstração: Como $A = B$, temos por definição que $A \subset B$ e $B \subset A$. Assim, $B \subset A$ e $A \subset B$. Então, por definição mais uma vez $B = A$.

3. Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

   Demonstração: Como $A = B$, segue que $A \subset B$ e, como $B = C$ segue que $B \subset C$. Destas duas inclusões, segue que $A \subset C$.

   Da mesma forma, como $C = B$, temos $C \subset B$ e, como $B = A$, temos $B \subset A$. Destas duas inclusões temos $C \subset A$.

   Logo, como $A \subset C$ e $C \subset A$, segue por definição de igualdade que $A = C$.

Importante: Quando $A \subset B$, mas A não é igual a B, dizemos que A é um subconjunto próprio de B.

4.6.3 Conjuntos Equivalentes

Dados dois conjuntos não vazios A e B, dizemos que A é equivalente a B se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e os elementos de B. Isto é, a cada elemento de A se associa um e somente um elemento de B.

Quando A é equivalente a B escrevemos $A \equiv B$, caso contrário $A \not\equiv B$.

PROPRIEDADES

1. Todo conjunto é equivalente a si próprio, $A \equiv A$, $\forall A$.

2. Se $A \equiv B$, então $B \equiv A$.

3. Se $A \equiv B$ e $B \equiv C$, então $A \equiv C$.

Exemplo 111 *Os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, e, f\}$ são equivalentes.*

Solução: *De fato, a correspondência $1 \longleftrightarrow a$, $2 \longleftrightarrow f$ e $3 \longleftrightarrow e$, permite, por definição, que A e B sejam equivalentes.*

Exemplo 112 *Os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 4x + 2 = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ é divisor primo de } 15\}$ são equivalentes.*

Solução: *Observamos que $A = \{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$ e $B = \{3, 5\}$. Assim, associando $3 \longleftrightarrow 2 + \sqrt{2}$ e $5 \longleftrightarrow 2 - \sqrt{2}$, temos que $A \equiv B$.*

Exemplo 113 *Estabelecer o valor de verdade das seguintes afirmações:*

1. *Se $A = B$, então $A \equiv B$;*

2. *Se $A \equiv B$, então $A = B$;*

3. *Se $A \equiv B$ e $B = C$, então $A \equiv C$;*

4. *Se $A \equiv B$ e $B = C$, então $A = C$.*

Solução: *Vejamos:*

1. *A afirmação é verdadeira, pois se $A = B$, então ambos conjuntos possuem os mesmos elementos. Logo, associando $a \longleftrightarrow a$, para cada $a \in A = B$, segue que $A \equiv B$.*

2. *A afirmação é falsa, pois $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c\}$ são equivalentes, não entanto $A \neq B$.*

3. *A afirmação é verdadeira. De fato, como $A \equiv B$, a cada $a \in A$ associamos um único $b \in B$, $a \longleftrightarrow b$. E, como $B \equiv C$ (pois a partir de $B = C$ temos que $B \equiv C$), a cada $b \in B$, associamos um único $c \in C$, $b \longleftrightarrow c$. Assim, associando $a \in A$ com $c \in C$, obtemos que $A \equiv C$.*

4. *A afirmação é falsa. Para isto basta apresentar um contraexemplo. Tomando*

   $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = C = \{a, b, c\}$. Claramente, $A \equiv B$ e $B = C$, porém $A \neq C$.

4.6.4 Conjuntos Comparáveis

Dois conjuntos A e B são ditos *comparáveis* se um deles é subconjunto do outro. Isto é, se ocorre $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Se $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$, dizemos que A e B não são comparáveis.

Exemplo 114 *Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são comparáveis dois a dois.*

Solução: *De fato, isto se verifica devido a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.*

Exemplo 115 *Para $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$. Determinar valor de verdade da seguinte afirmação: Os conjuntos I_n e I_m são comparáveis.*

Solução: *A afirmação é verdadeira. De fato, como $n, m \in \mathbb{N}$, uma e somente uma das seguintes possibilidades ocorre:*

$$(i) \quad n < m \qquad (ii) \quad n = m \qquad (iii) \quad n > m$$

Se $n < m$, então $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset I_m = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2, \dots, m-1, m\}$
Se $n > m$, então $I_m = \{1, 2, 3, \dots, m\} \subset I_m = \{1, 2, 3, \dots, m, m+1, m+2, \dots, n-1, n\}$
Se $n = m$, então $I_n = I_m$ e daqui $I_n \subset I_m$ e $I_m \subset I_n$.
Em qualquer caso, I_n e I_m são comparáveis.

4.6.5 Família de Conjuntos

Chamamos de *família de conjuntos*, ao conjunto cujos elementos são conjuntos.

Tal família é denotada por $\{A_i\}_{i \in \mathcal{J}}$, onde cada A_i é um conjunto e $\mathcal{J}$ é um conjunto finito ou infinito enumerável, chamado de conjunto de índices.

Exemplo 116 *Indicar quais dos conjuntos a seguir são famílias de conjuntos:*

1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, 1, \{2, 3, 4\}\}$,
2. $\mathcal{F} = \{X : X \subset I_4\}$,
3. $\mathcal{F} = \{x : x \in I_5\}$

Solução:

1. *Não é uma família de conjuntos, pois $1 \in \mathcal{F}$, mas 1 não é um conjunto;*
2. *É uma família de conjuntos, uma vez que cada elemento de $\mathcal{F}$ é um subconjunto de I_4 e portanto é um conjunto;*
3. *Não é uma família de conjuntos, uma vez que cada elemento de $\mathcal{F}$ não é um conjunto.*

Exemplo 117 *Determinar os elementos da família de conjuntos $\{A_i\}_{1 \leq i \leq 4}$, onde cada A_i é definido por $A_i = \{n - i : n \in \mathbb{N} \quad \text{é primo e} \quad 1 < n < 6\}$.*

Solução: *Notamos que o conjunto de índices é $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, os elementos da família são:*

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{n - 1 : n \in \mathbb{N} \quad \text{é primo e} \quad 1 < n < 6\} = \{1, 2, 4\} \\
A_2 &= \{n - 2 : n \in \mathbb{N} \quad \text{é primo e} \quad 1 < n < 6\} = \{0, 1, 3\} \\
A_3 &= \{n - 3 : n \in \mathbb{N} \quad \text{é primo e} \quad 1 < n < 6\} = \{-1, 0, 2\} \\
A_4 &= \{n - 4 : n \in \mathbb{N} \quad \text{é primo e} \quad 1 < n < 6\} = \{-2, -1, 1\}
\end{aligned}$$

A seguir um exemplo onde se aplica esta ideia de família de conjuntos.

Exemplo 118 *Suponha que entre os habitantes de uma determinada cidade ZYX seja feita uma divisão para que um grupo de pessoas, num determinado dia útil da semana, possa comprar nos estabelecimentos comerciais da cidade.*

O conjunto de índices para isto é $\mathcal{J} = \{segunda, terça, quarta, quinta, sexta\}$

Assim, cada pessoa do grupo que possa comprar nos estabelecimentos comerciais da cidade pertence ao conjunto C_d, $d \in \mathcal{J}$.

A forma como os habitantes da cidade podem comprar durante os dias úteis da semana é dada pela família, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \{C_d\}_{d \in \mathcal{J}} = \{C_{segunda}, C_{terça}, C_{quarta}, C_{quinta}, C_{sexta}\}$

Exemplo 119 *O proprietário de um supermercado deseja organizar a seção hortifrúti, distribuindo em linhas agrupando os produtos por frutas, legumes e verduras.*

O conjunto de índices para realizar isto será $\mathcal{J} = \{legumes, verduras frutas\}$.

A forma como é organizado a seção é dada pela família $\mathcal{H} = \{H_{legumes}, H_{verduras}, H_{frutas}\}$.

No Capítulo 4, na seção de relações de equivalência, veremos de novo o conceito de família de conjuntos.

4.6.6 Conjunto Potência

Dado um conjunto A, o conjunto potência ou conjunto de partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Simbolicamente: $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$ $\qquad X \in \mathcal{P}(A) \Longleftrightarrow X \subset A$

OBSERVAÇÕES:

1. Para relacionar ou contar todos os elementos de $\mathcal{P}(A)$, o conjunto A deve ser finito.

   Para isto, supondo que A tenha n elementos, proceda da seguinte forma:

   - Relacione ou conte todos os subconjuntos de A com 0 elementos;

   - Relacione ou conte todos os subconjuntos de A com 1 elemento;

   - Relacione ou conte todos os subconjuntos de A com 2 elementos;

   - ...

   - Relacione todos os subconjuntos de A com $n-1$ elementos;

   - Relacione ou conte todos os subconjuntos de A com n elementos.

2. O conjunto $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ se, e somente se, $a \in A$;

3. $X \notin \mathcal{P}(A)$ se, e somente se, $X \not\subset A$.

PROPRIEDADES

1. Para qualquer conjunto A, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

   Demonstração: Como para todo conjunto A temos $\emptyset \subset A$, segue da definição de conjunto potência que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

2. Para qualquer conjunto A, $A \in \mathcal{P}(A)$.

   Demonstração: Como para qualquer conjunto A, vale que $A \subset A$, segue que $A \in \mathcal{P}(A)$.

3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

   Demonstração: Pela propriedade 1, $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$. Daqui, $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(\emptyset)$. Seja agora, $X \in \mathcal{P}(\emptyset)$, um elemento arbitrário. Por definição de conjunto de partes, $X \subset \emptyset$ e, como $\emptyset \subset X$, segue que $X = \emptyset$. De onde $X \in \{\emptyset\}$. Portanto, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

4. $A \subset B$ se, e somente se, $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

   Demonstração:

   ($\Longrightarrow$) Mostremos que se $A \subset B$, então $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. De fato, seja $X \in \mathcal{P}(A)$, então por definição de conjunto potência, $X \subset A$ e como $A \subset B$, segue pela propriedade transitiva da inclusão que $X \subset B$. Daqui, por definição de conjunto de partes, $X \in \mathcal{P}(B)$. Portanto, $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

   ($\Longleftarrow$) Mostremos que se $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, então $A \subset B$. De fato, seja $a \in A$, então $\{a\} \subset A$ e daqui $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Como $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, segue que $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$ e daqui $\{a\} \subset B$. Logo, $a \in B$. Portanto, $A \subset B$.

5. $A = B$ se, e somente se, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

   Demonstração:

   ($\Longrightarrow$) Mostremos que se $A = B$,então $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. De fato, como $A = B$ equivale a $A \subset B$ e $B \subset A$. Aplicando a propriedades 4 obtemos $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ e $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A)$. Portanto, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

   ($\Longleftarrow$) Mostremos que se $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, então $A = B$. De fato, como $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ equivale $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ e $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A)$, segue, aplicando a propriedade 4, $A \subset B$ e $B \subset A$. Portanto, $A = B$.

Exemplo 120 *Determinar todos os subconjuntos com 4 elementos do conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$.*
Solução: *Primeiro, vamos descobrir quantos subconjuntos de A com 4 elementos podemos ter. Para isto, calculamos $\binom{5}{4} = \dfrac{5!}{4!(5-4)!} = 5$. Agora, vamos relacionar os cinco subconjuntos de 4 elementos de A.*
$B_1 = \{a, b, c, d\}$, $B_2 = \{a, b, c, e\}$, $B_3 = \{a, c, d, e\}$, $B_4 = \{a, b, d, e\}$, $B_5 = \{b, c, d, e\}$

Exemplo 121 *Estabelecer o valor de verdade de:*

1. *$\mathcal{P}(A)$ é uma família de conjuntos;*
2. *Toda família de conjuntos é um conjunto potência;*
3. *Se $A \equiv B$, então $\mathcal{P}(A) \equiv \mathcal{P}(B)$;*
4. *Se $\mathcal{P}(A) \not\subset \mathcal{P}(B)$ então $A \not\subset B$.*

Solução:

1. *A afirmação é verdadeira.*

   De fato, como $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$, todos os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são conjuntos. Logo, por definição de família de conjuntos, $\mathcal{P}(A)$ é uma família de conjuntos.

2. *A afirmação é falsa.*

   O conjunto $\mathcal{D} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$ é uma família de conjuntos. Para $\mathcal{D}$ ser conjunto potência, devemos achar um conjunto A com dois elementos, onde cada elemento de $\mathcal{D}$ é um subconjunto de A. Mas, isto não é possível, a menos que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ que possui 4 elementos e não 2 como procurávamos.

3. *A afirmação é verdadeira.*

   Como queremos verificar informação sobre o conjunto de partes, entendemos que A e B são conjuntos finitos. Assim, como $A \equiv B$, podemos supor que $n(A) = n(B) = k$. Logo, $n(\mathcal{P}(A)) = 2^k = n(\mathcal{P}(B))$. Com isto, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathcal{P}(A)$ e os de $\mathcal{P}(B)$. Portanto, $\mathcal{P}(A) \equiv \mathcal{P}(B)$.

4. *A afirmação é verdadeira.*

   Suponha que não seja verdade que $A \not\subset B$. Isto é, $A \subset B$. Tomando $X \in \mathcal{P}(A)$ qualquer, temos $X \subset A$ e, aplicando transitividade da inclusão, $X \subset B$. Daqui, $X \in \mathcal{P}(B)$. Logo, $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, que é a negação de $\mathcal{P}(A) \not\subset \mathcal{P}(B)$. Com isto, acabamos de mostrar a contrapositiva da afirmação. Portanto, a afirmação é válida.

Exemplo 122 *Determine quantos elementos possui $\mathcal{P}(A)$ se $A = \{1, 2, 3\}$.*

Solução: *Vamos calcular o número de subconjuntos de A com, zero, um dois, três e quatro elementos.*

Com zero elementos, temos $\binom{3}{0} = 1$ *conjunto.*

Com um elemento, temos $\binom{3}{1} = 3$ *conjuntos.*

Com dois elementos, temos $\binom{3}{2} = 3$ *conjuntos.*

Com três elementos, temos $\binom{3}{3} = 1$ *conjuntos.*

Assim, $\mathcal{P}(A)$ *terá* $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$ *elementos.*

Exemplo 123 *Assumindo que $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$. Mostre que se A possui n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ possui 2^n elementos.*

Solução: *Calculemos o número de subconjuntos com zero, um, dois, ..., n elementos.*

Com zero elementos, temos $\binom{n}{0} = 1$ *conjunto.*

Com um elemento, temos $\binom{n}{1}$ *conjuntos.*

Com dois elementos, temos $\binom{n}{2}$ *conjuntos.*

Com três elementos, temos $\binom{n}{3}$ *conjuntos.*

$\ddots$

Com $n-1$ elementos, temos $\binom{n}{n-1}$ *conjuntos.*

Com n elementos, temos $\binom{n}{n}$ *conjuntos.*

Assim, $\mathcal{P}(A)$ *terá* $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$ *elementos, de acordo com a informação dada no exercício.*

4.7 Operações entre conjuntos

Nesta seção trataremos as operações usuais entre conjuntos: União, interseção, diferença, complementar.

4.7.1 União

Definição 13 *Sejam A e B conjuntos quaisquer. Definimos a união de A e B, denotado por $A \cup B$, como o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A, a B ou aos dois conjuntos.*

Simbolicamente:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$$

$$x \in (A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in A \quad \vee \quad x \in B)$$

Um elemento x não pertence a $(A \cup B)$ se, e somente se, x não pertence a A e não pertence a B.

Simbolicamente:

$$x \notin (A \cup B) \Longleftrightarrow (x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B)$$

PROPRIEDADES: Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \emptyset = A$
3. $A \cup U = U$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $A \subset (A \cup B)$
   $B \subset (A \cup B)$
7. $A \subset B$ se, e somente se, $A \cup B = B$
8. Se $A \subset C$ e $B \subset D$ então $A \cup B \subset C \cup D$
9. $A \cup B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$
10. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar algumas das propriedades e as outras serão deixadas como exercício para o leitor.

4. $A \cup B = B \cup A$

   Por se tratar de uma igualdade de conjuntos devemos mostrar duas inclusões.

   (i) Mostremos que $A \cup B \subset B \cup A$.

   Seja $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Logo, $x \in B$ ou $x \in A$. Daqui por definição de união, $x \in B \cup A$.

   (ii) Mostremos que $B \cup A \subset A \cup B$.

   Seja $x \in B \cup A$, então $x \in B$ ou $x \in A$. Logo, $x \in A$ ou $x \in B$. De onde, $x \in A \cup B$.

   Portanto, de (i) e (ii) está mostrado que $A \cup B = B \cup A$.

6. $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$

   Vamos mostrar que $A \subset (A \cup B)$. A propriedade $B \subset (A \cup B)$ é similar.

   Fazendo $p : x \in A$ e $q : x \in B$ e, lembrando da implicação notável, adição, que estabelece $p \longrightarrow (p \vee q)$. Temos, $x \in A$ implica que $x \in A$ ou $x \in B$. De onde, $x \in (A \cup B)$.

7. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

   Devemos mostrar duas implicações.

   (i) Mostremos que $A \subset B$ implica que $A \cup B = B$

   Seja $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Como $A \subset B$, de $x \in A$ concluímos que $x \in B$. A partir de $x \in A$ ou $x \in B$, temos $x \in B$ ou $x \in B$, de onde $x \in B$. Com isto, $A \cup B \subset B$.

   Por outro lado, pela propriedade 4, $B \subset A \cup B$.

   Portanto, de $A \cup B \subset B$ e $B \subset A \cup B$, concluímos que $A \cup B = B$.

   (ii) Mostremos que $A \cup B = B$ implica que $A \subset B$

   Seja $x \in A$, pela implicação notável, adição, temos $x \in A$ ou $x \in B$, ou seja, $x \in (A \cup B)$. Como por hipótese $A \cup B = B$, temos $x \in B$. Portanto, $A \subset B$.

9. $A \cup B = \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset \quad e \quad B = \emptyset$

   Precisamos mostrar duas implicações.

   (i) Mostremos que $A \cup B = \emptyset$ implica que $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$.

   Sabemos que $\emptyset \subset A$ e $\emptyset \subset B$. Restas mostrar que $A \subset \emptyset$ e $B \subset \emptyset$. De fato, seja $x \in A$ e $y \in B$. Pela propriedade 4, $x \in (A \cup B)$ e $y \in (A \cup B)$. Como por hipótese, $A \cup B = \emptyset$, temos $x \in \emptyset$ e $y \in \emptyset$. Assim, $A \subset \emptyset$ e $B \subset \emptyset$. Agora, de $A \subset \emptyset$ e $\emptyset \subset A$, temos $A = \emptyset$ e, de $B \subset \emptyset$ e $\emptyset \subset B$, temos $B = \emptyset$. Portanto, $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$.

   (ii) Mostremos que $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$ implica que $A \cup B = \emptyset$.

   Claramente $\emptyset \subset A \cup B$. Resta mostrar que $A \cup B \subset \emptyset$. De fato, seja $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Como por hipótese, $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$, temos $x \in \emptyset$ ou $x \in \emptyset$, isto é $x \in \emptyset$. Portanto, $A \cup B = \emptyset$.

10. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

    Seja $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, então $X \in \mathcal{P}(A)$ ou $X \in \mathcal{P}(B)$. Por definição de conjunto de partes, $X \subset A$ ou $X \subset B$. Logo, aplicando a propriedade 8, $X \subset (A \cup B)$. Portanto, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Analisar o valor lógico da seguinte afirmação: Se $A \cup B \subset C$, então $A \subset C$ e $B \subset C$.

Solução: *A afirmação é verdadeira.*

Pela propriedade 6, temos que $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$. Assim, de $A \subset (A \cup B)$ e $A \cup B \subset C$, temos $A \subset C$ e, de $B \subset (A \cup B)$ e $A \cup B \subset C$, temos $B \subset C$.

Exemplo 125 *É verdade que a partir de $C \subset (A \cup B)$ sempre se pode concluir que $C \subset A$ ou $C \subset B$?*

Solução: *Não, não é verdade. Por exemplo, considerando $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Claramente, o conjunto $C = \{2, 4\}$ satisfaz $C \subset (A \cup B)$, entretanto $C \not\subset A$ e $C \not\subset B$.*

Exemplo 126 *Mostre que $A \cup B$ é o menor conjunto que contem A e contem B.*

Solução: Suponha que exista um conjunto D menor do que $A \cup B$ que contenha A e contenha B. Isto é, existe $D \subset (A \cup B)$, com $A \subset D$ e $B \subset D$. Aplicando a propriedade 8, temos, $D \subset (A \cup B)$ e $A \cup B \subset D$, logo $D = A \cup B$. Portanto, $A \cup B$ é o menor conjunto que contem A e contem B.

4.7.2 Interseção

Definição 14 *Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto interseção, $A \cap B$, como o conjunto formado por elementos comuns a A e B.*

Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$$

$$x \in (A \cap B) \Longleftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \in B)$$

Um elemento x não pertence a $(A \cap B)$ se, e somente se, x não pertence a A ou não pertence a B.

Simbolicamente:

$$x \notin (A \cap B) \Longleftrightarrow (x \notin A \quad \vee \quad x \notin B)$$

PROPRIEDADES: Sejam A, B, C, D conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cap U = A$

4. $A \cap B = B \cap A$
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. $(A \cap B) \subset A$
   $(A \cap B) \subset B$
7. $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B = A$
8. Se $A \subset C$ e $B \subset D$ então $A \cap B \subset C \cap D$
9. Se $A \subset B$, então $A \cap C \subset B \cap C$

   Adicionalmente, valem as seguintes propriedades:

10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
11. $A \cap (A \cup B) = A$
    $A \cup (A \cap B) = A$
12. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar algumas das propriedades e as outras serão deixadas como exercício para o leitor.

6. $(A \cap B) \subset A$

   Seja $x \in (A \cap B)$ então, $x \in A$ e $x \in B$. Lembrando da implicação notável, simplificação, que estabelece $(p \wedge q) \longrightarrow p$, temos que $x \in A$ e $x \in B$ implica $x \in A$. Portanto, $(A \cap B) \subset A$.

7. $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B = A$

   Devemos mostrar duas implicações.

   (i) Mostremos que $A \subset B$ implica que $A \cap B = A$.

   Que $A \cap B \subset A$ se dá pela propriedade 6. Resta mostrar que $A \subset (A \cap B)$. Para isto, seja $x \in A$. Como $A \subset B$, temos de $x \in A$ implica $x \in B$. Ora, isto nos diz que o elemento x que tomamos é comum a A e a B, ou seja $x \in (A \cap B)$. Portanto, $A \cap B = A$.

   (ii) Mostremos que $A \cap B = A$ implica que $A \subset B$.

   Seja $x \in A$, como $A \cap B = A$, temos $x \in (A \cap B)$. Logo, $x \in A$ e $x \in B$. Pela lei de simplificação da lógica, $x \in B$. Assim, $A \subset B$.

11. $A \cap (A \cup B) = A$

    Note que $A \cap (A \cup B) \subset A$ é válida pela propriedade 6. Resta mostrar que $A \subset [A \cap (A \cup B)]$.

    Seja $x \in A$, então pela propriedade 6 de união, $x \in (A \cup B)$. Assim, $x \in A$ e $x \in (A \cup B)$. Por definição de interseção $x \in [A \cap (A \cup B)]$.

    Portanto, $A \cap (A \cup B) = A$.

12. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

    Devemos mostrar duas inclusões.

    (i) Mostremos que $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

    Seja $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, então $X \subset (A \cap B)$. Isto, ocorre somente se, $X \subset A$ e $X \subset B$. Logo, $X \in \mathcal{P}(A)$ e $X \in \mathcal{P}(B)$. De onde, $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

    (ii) Mostremos que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$

    Seja $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, então $X \in \mathcal{P}(A)$ e $X \in \mathcal{P}(B)$. Logo, $X \subset A$ e $X \subset B$. Usando a propriedade 8, temos $X \cap X \subset A \cap B$. Usando a propriedade 1, temos $X \subset A \cap B$. De onde, $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

    Portanto, $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Exemplo 127 *Analisar o valor lógico da afirmação: Se $C \subset (A \cap B)$, então $C \subset A$ e $C \subset B$.*

Solução: Sabemos que $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$. Assim, usando a propriedade transitiva da inclusão, temos
(i) $C \subset (A \cap B)$ e $A \cap B \subset A$ implica $C \subset A$,
(ii) $C \subset (A \cap B)$ e $A \cap B \subset B$ implica $C \subset B$.
Portanto, a afirmação é verdadeira.

Exemplo 128 *É verdade que se $(A \cap B) \subset C$, então pelo menos A ou B é subconjunto de C?*

Solução: Não, não é verdade. Pois, para $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 7, 8\}$, é claro que $A \cap B = \{2, 4\} \subset C = \{2, 4, 5\}$. No entanto, $A \not\subset C$ e $B \not\subset C$.

Exemplo 129 *Mostre que $A \cap B$ é o maior conjunto que pode estar contido em A e em B.*

Solução: Suponha que exista um conjunto D maior do que $A \cap B$ contido em A e contido em B. Isto é, existe $(A \cap B) \subset D$, com $D \subset A$ e $D \subset B$. Aplicando a propriedade 8, temos $D \subset (A \cap B)$ e $A \cap B \subset D$. Logo, $D = A \cap B$. Portanto, $A \cap B$ é o maior conjunto contido em A e em B.

4.7.3 Diferença

Definição 15 *Dados dois conjuntos A e B, a diferença entre A e B, $A - B$, é o conjunto por todos os elementos que pertencem a conjunto A e não pertencem a ao conjunto B.*

Simbolicamente:

$$A - B = \{x \in U : x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\}$$

$$x \in (A - B) \Longleftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B)$$

Um elemento x não pertence a $(A - B)$ se, e somente se, x pertence a A ou não pertence a B.
Simbolicamente:

$$x \notin (A - B) \Longleftrightarrow (x \notin A \quad \vee \quad x \in B)$$

PROPRIEDADES: Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

1. $A - A = \emptyset$
2. $A - \emptyset = A$
3. $\emptyset - A = \emptyset$
4. Quando $A \neq B$, $A - B \neq B - A$
5. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
6. $(A - B) \subset A$
7. Se $A \subset B$ então $(A - C) \subset (B - C)$
8. $A \subset B$ se, e somente se, $A - B = \emptyset$
9. $B \cap (A - B) = \emptyset$
10. $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A - B = A$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar algumas das propriedades e as outras serão deixadas como exercício para o leitor.

4. $A - B \neq B - A$

   Suponha que $A - B = B - A$.

   Para $x \in (A - B)$, temos $x \in A$ e $x \notin B$. Agora, da nossa suposição, temos $A - B \subset B - A$, ou seja $x \in (A - B)$ implica que $x \in (B - A)$. Isto é, vale que ($x \in A$ e $x \notin B$) e ($x \in B$ e $x \notin A$). Isto último é uma contradição, pois não pode ocorrer que um elemento pertencer e não pertencer ao mesmo tempo a um conjunto.

5. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

   Devemos mostra duas inclusões.

   (i) Mostremos que $A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$

   Seja $x \in A \cap (B - C)$, então $x \in A$ e $x \in (B - C)$. Logo, $x \in A$ e $x \in B$ e $x \notin C$. Assim, $x \in A$ e $x \in B$ e $x \in A$ e $x \notin C$. De onde, $x \in (A \cap B)$ e $x \in (A - C)$. Ora, se $x \in (A - C)$, então $x \notin (A \cap C)$. Portanto, $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$.

   (ii) Mostremos que $(A \cap B) - (A \cap C) \subset A \cap (B - C)$

   Seja $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$, então $x \in (A \cap B)$ e $x \notin (A \cap C)$. Logo, ($x \in A$ e $x \in B$) e ($x \notin A$ ou $x \notin C$).

   Aplicando associatividade temos $x \in B$ e [$x \in A$ e ($x \notin A$ ou $x \notin C$)]. Agora, aplicando a lei de absorção resulta $x \in B$ e [$x \in A$ e $x \notin C$]. Assim, aplicando as leis associativa e comutativa temos $x \in A$ e ($x \in B$ e $x \notin C$). Isto último se traduz em $x \in A$ e $x \in (B - C)$. Portanto, $x \in A \cap (B - C)$.

7. Se $A \subset B$ então $(A - C) \subset (B - C)$

   Seja $x \in (A-C)$, então $x \in A$ e $x \notin C$. Logo, $x \in B$ e $x \notin C$, pois $A \subset B$. Assim, $x \in (B-C)$.

10. $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A - B = A$

    Devemos mostrar duas implicações.

    (i) Mostremos que $A \cap B = \emptyset$ implica que $A - B = A$

    Que $A - B \subset A$, se cumpre pela propriedade 6. Falta mostrar que $A \subset (A - B)$.

    Seja $x \in A$ e, como $A \cap B = \emptyset$, temos que $x \notin B$. Ou seja, $x \in A$ e $x \notin B$. Logo, $x \in (A - B)$.

    Portanto, $A - B = A$.

    (ii) Mostremos que $A - B = A$ implica que $A \cap B = \emptyset$

    Que $\emptyset \subset (A \cap B)$ é sempre válido. Falta mostrar que $A \cap B \subset \emptyset$.

    Seja $x \in (A \cap B)$, então $x \in A$ e $x \in B$. Logo, $x \in (A - B)$ e $x \in B$, pois por hipótese $A - B = A$. De onde, $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \in B$. Assim, $x \in A$ e $x \in \emptyset$. Daqui, $x \in \emptyset$.

    Portanto, $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 130 *Mostre que $A - B = A - (A \cap B)$*

Solução: Devemos mostrar as inclusões $A - B \subset A - (A \cap B)$ e $A - (A \cap B) \subset A - B$.

(i) Mostremos que $A - B \subset A - (A \cap B)$
Seja $x \in A - B$, então $x \in A$ e $x \notin B$. Logo, pela lei de absorção da lógica, temos $x \in A$ e ($x \notin A$ ou $x \notin B$). Ou seja, $x \in A$ e $x \notin (A \cap B)$. De onde, $x \in A - (A \cap B)$.

(ii) Mostremos que $A - (A \cap B) \subset A - B$
Seja $x \in A - (A \cap B)$, então $x \in A$ e $x \notin (A \cap B)$. Logo, $x \in A$ e ($x \notin A$ ou $x \notin B$). Pela lei de absorção da lógica, $x \in A$ e $x \notin B$. De onde, $x \in A - B$.

Exemplo 131 *Mostre que $(U - B) \cup B = U$*

Solução: Devemos mostrar as inclusões $(U - B) \cup B \subset U$ e $U \subset (U - B) \cup B$

(i) Mostremos que $(U - B) \cup B \subset U$
Seja $x \in (U - B) \cup B$, então $x \in (U - B)$ ou $x \in B$. Logo, ($x \in U$ e $x \notin B$) ou $x \in B$. Pela equivalência notável, absorção, temos $x \in U$ ou $x \in B$. De onde, $x \in (U \cup B)$. Portanto, $x \in U$.

(ii) Mostremos que $U \subset (U - B) \cup B$
Seja $x \in U$, então $x \in U$ ou $x \in B$, pela implicação notável, adição. Pela lei de absorção, ($x \in U$ e $x \notin B$) ou $x \in B$. De onde, $x \in (U - B) \cup B$.

4.7.4 Diferença Simétrica

Definição 16 *Dados dois conjuntos A e B. A diferença simétrica, $A \triangle B$, é o conjunto formado todos os elementos que estão em $A \cup B$ e não estão em $A \cap B$.*

Simbolicamente:

$$A \triangle B = \{x \in U : x \in (A \cup B) \quad \text{e} \quad x \notin (A \cap B)\} = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$x \in (A \triangle B) \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \quad \wedge \quad x \notin (A \cap B)$$

Um elemento x não pertence a $(A \triangle B)$ se, e somente se, x não pertence a $A \cup B$ ou pertence a $A \cap B$.

Simbolicamente:

$$x \notin (A \triangle B) \Longleftrightarrow (x \notin (A \cup B) \quad \vee \quad x \in (A \cap B))$$

PROPRIEDADES: Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

1. $A \triangle A = \emptyset$
2. $A \triangle \emptyset = A$
3. $A \triangle B = B \triangle A$
4. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
5. $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$
6. $(A \cup C) \triangle (B \cup C) \subset (A \triangle B) \cup C$
7. $(A \triangle B) \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar algumas das propriedades e as outras serão deixadas como exercício para o leitor.

4. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

   Devemos mostrar as inclusões $(A \triangle B) \triangle C \subset A \triangle (B \triangle C)$ e $A \triangle (B \triangle C) \subset (A \triangle B) \triangle C$.

   $(\subset)$ Mostremos que $(A \triangle B) \triangle C \subset A \triangle (B \triangle C)$

   Seja $x \in (A \triangle B) \triangle C$, então $x \in (A \triangle B) \cup C$ e $x \notin (A \triangle B) \cap C$.

   (1)

$$\begin{aligned} x \in (A \triangle B) \cup C &\Longrightarrow x \in (A \triangle B) \quad \text{ou} \quad x \in C \\ &\Longrightarrow [x \in (A \cup B) \quad \text{e} \quad x \notin (A \cap B)] \quad \text{ou} \quad x \in C \\ &\Longrightarrow [x \in (A \cup B) \quad \text{ou} \quad x \in C] \quad \text{e} \quad [x \notin (A \cap B) \quad \text{ou} \quad x \in C] \\ &\Longrightarrow [x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \quad \text{ou} \quad x \in C] \quad \text{e} \quad [x \notin (A \cap B) \quad \text{ou} \quad x \in C] \\ &\Longrightarrow [x \in A \quad \text{ou} \quad x \in (B \cup C)] \quad \text{e} \quad [x \notin (A \cap B) \quad \text{ou} \quad x \in C] \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x \notin (A\triangle B)\cap C &\Longrightarrow x \notin (A\triangle B) \quad \text{ou} \quad x \notin C \\ &\Longrightarrow [x \notin (A\cup B) \quad \text{ou} \quad x \in (A\cap B)] \quad \text{ou} \quad x \notin C \end{aligned}$$

($\supset$) Mostremos que $A\triangle(B\triangle C) \subset (A\triangle B)\triangle C$

5. $(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$

   Devemos mostrar as inclusões $(A\triangle B)\cap C \subset (A\cap C)\triangle(B\cap C)$ e $(A\cap C)\triangle(B\cap C) \subset (A\triangle B)\cap C$

   (i) Mostremos que $(A\triangle B)\cap C \subset (A\cap C)\triangle(B\cap C)$

   Seja $x \in (A\triangle B)\cap C$, então $x \in (A\triangle B)$ e $x \in C$. Aplicando a definição de diferença simétrica, $x \in (A\cup B)$ e $x \notin (A\cap B)$ e $x \in C$. Logo, $(x \in (A\cup B)$ e $x \in C)$ e $(x \notin (A\cap B)$ e $x \in C)$. Daqui, $x \in [(A\cup B)\cap C]$ e $x \notin [(A\cap B)\cap C]$. Aplicando distributividade da interseção com relação a união, temos $x \in (A\cap C)\cup(B\cap C)$ e $x \notin (A\cap C)\cap(B\cap C)$. Portanto, por definição de diferença simétrica, temos $x \in (A\cap C)\triangle(B\cap C)$.

   (ii) Mostremos que $(A\cap C)\triangle(B\cap C) \subset (A\triangle B)\cap C$

   Seja $x \in (A\cap C)\triangle(B\cap C)$, então $x \in (A\cap C)\cup(B\cap C)$ e $x \notin (A\cap C)\cap(B\cap C)$. Daqui, $x \in (A\cup B)\cap C$ e $x \notin (A\cap B)\cap C$. Logo, $(x \in (A\cup B)$ e $x \in C)$ e $(x \notin (A\cap B)$ ou $x \notin C)$. Aplicando associatividade e absorção, temos $x \in (A\cup B)$ e $x \notin (A\cap B)$ e $x \in C$. De onde, $x \in (A\triangle B)$ e $x \in C$. Portanto, $x \in (A\triangle B)\cap C$.

6. $(A\cup C)\triangle(B\cup C) \subset (A\triangle B)\cup C$

   Seja $x \in (A\cup C)\triangle(B\cup C)$, então $x \in (A\cup C)\cup(B\cup C)$ e $x \notin (A\cup C)\cap(B\cup C)$. Logo, $x \in (A\cup B)\cup C$ e $x \notin (A\cap B)\cup C$. Daqui, $(x \in (A\cup B)$ ou $x \in C)$ e $(x \notin (A\cap B)$ e $x \notin C)$. Aplicando associatividade e absorção, temos $x \in (A\cup B)$ e $x \notin C$ e $x \notin (A\cap B)$. Aplicando a lei de simplificação da lógica, temos $x \in (A\cup B)$ e $x \notin (A\cap B)$. Isto é, $x \in (A\triangle B)$. Agora, aplicando a lei de adição da lógica, temos $x \in (A\triangle B)$ ou $x \in C$. Portanto, $x \in (A\triangle B)\cup C$.

7. $(A\triangle B)\cup(B\triangle C) = (A\cup B\cup C) - (A\cap B\cap C)$

   (i) Mostremos que $(A\triangle B)\cup(B\triangle C) \subset (A\cup B\cup C) - (A\cap B\cap C)$

   Seja $x \in (A\triangle B)\cup(B\triangle C)$, então $x \in (A\triangle B)$ ou $x \in (B\triangle C)$. Logo, $[x \in (A\cup B)$ e $x \notin (A\cap B)]$ ou $[x \in (B\cup C)$ e $x \notin (B\cap C)]$.

   Por distributividade, temos $[x \in (A\cup B)$ ou $x \in (B\cup C)]$ e $[x \notin (A\cap B)$ ou $x \in (B\cup C)]$ e $[x \in (A\cup B)$ ou $x \notin (B\cap C)]$ e $[x \notin (A\cap B)$ ou $x \notin (B\cap C)]$.

   Pela lei de simplificação da lógica, temos $[x \in (A\cup B)$ ou $x \in (B\cup C)]$ e $[x \notin (A\cap B)$ ou $x \notin (B\cap C)]$. Isto é, $x \in (A\cup B)\cup(B\cup C)$ e $x \notin (A\cap B)\cap(B\cap C)$.

   Daqui, $x \in (A\cup B)\cup C$ e $x \notin (A\cap B)\cap C$.

   Portanto, $x \in (A\cup B\cup C) - (A\cap B\cap C)$

   (ii) Mostremos que $(A\cup B\cup C) - (A\cap B\cap C) \subset (A\triangle B)\cup(B\triangle C)$

   Seja $x \in (A\cup B\cup C) - (A\cap B\cap C)$, então $x \in (A\cup B\cup C)$ e $x \notin (A\cap B\cap C)$. De onde, $x \in [(A\cup B\cup B\cup C)\cap U]$ e $x \notin [(A\cap B\cap B\cap C)\cap U]$

Observe que o conjunto universal U pode ser escrito, convenientemente, como:

$U = (U - A) \cup (U - B) \cup B \cup C$

$U = A \cup B \cup (U - B) \cup (U - C)$

Com isto, de $x \in [(A \cup B \cup B \cup C) \cap U]$ e $x \notin [(A \cap B \cap B \cap C) \cap U]$, temos

$[x \in (A \cup B)$ ou $x \in (B \cup C)]$ e $[x \notin A$ ou $x \notin B$ ou $x \in (B \cup C)]$ e $[x \in (A \cup B)$ ou $x \notin B$ ou $x \notin C]$ e $[x \notin (A \cap B)$ ou $x \notin (B \cap C)]$. Daqui,

$[x \in (A \cup B)$ ou $x \in (B \cup C)]$ e $[x \in (A \cup B)$ ou $x \in (B \cup C)]$ e $[x \in (A \cup B)$ ou $x \notin (B \cap C)]$ e $[x \notin (A \cap B)$ ou $x \notin (B \cap C)]$.

Aplicando distributividade, obtemos

$[x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup B)]$ ou $[x \in (B \cup C)$ e $x \notin (B \cap C)]$. Ou seja, $x \in (A \triangle B)$ ou $x \in (B \triangle C)$.

Portanto, $x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

Exemplo 132 *Mostre que $(A \cup B) - (A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A)$.*

Solução: *Seja $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, então $x \in (A \cup B)$ e $x \notin (A \cap B)$. Logo, ($x \in A$ ou $x \in B$) e ($x \notin A$ ou $x \notin B$). Aplicando distributividade e a lei de absorção da lógica, temos ($x \in A$ e $x \notin B$) ou ($x \in B$ e $x \notin A$). De onde, $x \in (A - B)$ ou $x \in (B - A)$. Assim, $x \in (A - B) \cup (B - A)$.*

Exemplo 133 *Mostre que $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$.*

Solução: *Seja $x \in (A - B) \cup (B - A)$, então $x \in (A - B)$ ou $x \in (B - A)$. Aplicando definição de diferença temos, ($x \in A$ e $x \notin B$) ou ($x \in B$ e $x \notin A$). Aplicando distributividade e lei de absorção da lógica, temos ($x \in A$ ou $x \in B$) e ($x \notin A$ ou $x \notin B$). De onde, $x \in (A \cup B)$ e $x \notin (A \cap B)$. Logo, $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$.*

4.7.5 Complementar

Para falar de complementar devemos considerar dois conjuntos comparáveis, isto é, dois conjuntos A e B tais que $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Definição 17 *Dados A e B, com $A \subset B$, definimos o complementar de A em relação ao conjunto B, $\mathcal{C}_B^A$, como a diferença $B - A$. Isto é, $\mathcal{C}_B^A = B - A$.*

Quando $B = U$, escrevemos $\mathcal{C}_U^A = U - A = A^c$.

Simbolicamente:

$$\mathcal{C}_B^A = \{x \in U : x \in B \quad \text{e} \quad x \notin A\}$$

$$x \in \mathcal{C}_B^A \Longleftrightarrow x \in B \quad \wedge \quad x \notin A$$

Um elemento x não pertence a $\mathcal{C}_B^A$ se, e somente se, x não pertence a B ou pertence a A.
Simbolicamente:

$$x \notin \mathcal{C}_B^A \Longleftrightarrow (x \notin B \quad \vee \quad x \in A)$$

PROPRIEDADES: Sejam A, B, C conjuntos quaisquer tais que $A \subset B$, $C \subset B$. Valem as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{C}_B^{\mathcal{C}_B^A} = A$
2. $\mathcal{C}_A^A = \emptyset$
3. $\mathcal{C}_A^\emptyset = A$
4. $A \cap \mathcal{C}_B^A = \emptyset$
5. $A \cup \mathcal{C}_B^A = B$
6. $\mathcal{C}_B^A \subset B$
7. $B - A = B \cap \mathcal{C}_B^A$
8. $\mathcal{C}_B^{A \cap C} = \mathcal{C}_B^A \cup \mathcal{C}_B^C$
9. $\mathcal{C}_B^{A \cup C} = \mathcal{C}_B^A \cap \mathcal{C}_B^C$

Quando $A \subset U$, $B \subset U$, valem propriedades análogas.

1. $(A^c)^c = A$
2. $(A \cap A^c) = \emptyset$
3. $(\emptyset)^c = U$
4. $(A - B) = A \cap B^c$
5. $(A \cup A^c) = U$
6. $U^c = \emptyset$
7. $A \subset B$ se, e somente se, $B^c \subset A^c$
8. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
9. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

DEMONSTRAÇÃO: Mostraremos algumas destas propriedades. As restantes ficam a cargo do leitor.

1. $A \cap \mathcal{C}_B^A = \emptyset$

   Note que $\emptyset \subset A \cap \mathcal{C}_B^A$. Para completar a demonstração, vamos mostrar que $A \cap \mathcal{C}_B^A \subset \emptyset$.

   Seja $x \in A \cap \mathcal{C}_B^A$, então $x \in A$ e $x \in \mathcal{C}_B^A$. Segue, $x \in A$ e $(x \in B$ e $x \notin A)$. Usando associatividade e comutatividade, temos $(x \in A$ e $x \notin A)$ e $x \in B$. Logo, $x \in \emptyset$ e $x \in B$. De onde, $x \in (\emptyset \cap B) = \emptyset$. Assim, $x \in \emptyset$.

   Portanto, $A \cap \mathcal{C}_B^A = \emptyset$

2. $B - A = B \cap \mathcal{C}_B^A$

   Devemos mostrar as inclusões $B - A \subset B \cap \mathcal{C}_B^A$ e $B \cap \mathcal{C}_B^A \subset B - A$

   (i) Mostremos que $B - A \subset B \cap \mathcal{C}_B^A$

   Seja $x \in B - A$, então $x \in B$ e $x \notin A$. Logo, $x \in B$ e $x \in B$ e $x \notin A$. Por definição de complementar, temos $x \in B$ e $x \in \mathcal{C}_B^A$. Portanto, $x \in B \cap \mathcal{C}_B^A$.

   (ii) Mostremos que $B \cap \mathcal{C}_B^A \subset B - A$

   Seja $x \in B \cap \mathcal{C}_B^A$, então $x \in B$ e $x \in \mathcal{C}_B^A$. Logo, $x \in B$ e ($x \in B$ e $x \notin A$). Por associatividade e idempotência, temos $x \in B$ e $x \notin A$. Assim, $x \in (B - A)$.

3. $\mathcal{C}_B^{A \cup C} = \mathcal{C}_B^A \cap \mathcal{C}_B^C$

   Devemos mostrar as inclusões $\mathcal{C}_B^{A \cup C} \subset \mathcal{C}_B^A \cap \mathcal{C}_B^C$ e $\mathcal{C}_B^A \cap \mathcal{C}_B^C \subset \mathcal{C}_B^{A \cup C}$

   (i) Mostremos que $\mathcal{C}_B^{A \cup C} \subset \mathcal{C}_B^A \cap \mathcal{C}_B^C$

   Seja $x \in \mathcal{C}_B^{A \cup C}$, então $x \in B$ e $x \notin (A \cup C)$. Logo, $x \in B$ e $x \notin A$ e $x \notin C$. Usando, idempotência, comutatividade e associatividade, temos ($x \in B$ e $x \notin A$) e ($x \in B$ e $x \notin C$). De onde, $x \in \mathcal{C}_B^A$ e $x \in \mathcal{C}_B^C$. Portanto, $x \in \mathcal{C}_B^A \cap \mathcal{C}_B^C$.

   (ii) Mostremos que $\mathcal{C}_B^A \cap \mathcal{C}_B^C \subset \mathcal{C}_B^{A \cup C}$

   Seja $x \in \mathcal{C}_B^A \cap \mathcal{C}_B^C$, então $x \in \mathcal{C}_B^A$ e $x \in \mathcal{C}_B^C$. Aplicando definição de complementar, temos ($x \in B$ e $x \notin A$) e ($x \in B$ e $x \notin C$). Aplicando associatividade, comutatividade e idempotência, resulta $x \in B$ e ($x \notin A$ e $x \notin C$). De onde, $x \in B$ e $x \notin (A \cup C)$. Portanto, $x \in \mathcal{C}_B^{A \cup C}$.

4. $(A - B) = A \cap B^c$

   Devemos mostrar as inclusões $(A - B) \subset A \cap B^c$ e $A \cap B^c \subset (A - B)$

   (i) Mostremos que $(A - B) \subset A \cap B^c$

   Seja $x \in (A - B)$, então $x \in A$ e $x \notin B$. Logo, $x \in A$ e $x \in B^c$. De onde, $x \in A \cap B^c$.

   (ii) Mostremos que $A \cap B^c \subset (A - B)$

   Seja $x \in A \cap B^c$, então $x \in A$ e $x \in B^c$. Logo, $x \in A$ e $x \notin B$. De onde, $x \in (A - B)$.

5. $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$

   (i) Mostremos que se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$

   Seja $x \in B^c$, então $x \notin B$. Como, $A \subset B$, temos que $x \notin A$. Logo, $x \in A^c$. Assim, $B^c \subset A^c$.

   (ii) Mostremos que se $B^c \subset A^c$, então $A \subset B$

   Seja $x \in A$, então $x \notin A^c$, mas como $B^c \subset A^c$, temos que $x \notin B^c$. Logo, $x \in B$. Portanto, $A \subset B$.

6. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   Devemos mostrar as inclusões $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ e $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$

   (i) Mostremos que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$

   Seja $x \in (A \cup B)^c$, então $x \notin (A \cup B)$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$. Daqui, $x \in A^c$ e $x \in B^c$. Portanto, $x \in (A^c \cap B^c)$.

   (ii) Mostremos que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$

   Seja $x \in (A^c \cap B^c)$, então $x \in A^c$ e $x \in B^c$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$. Daqui, $x \notin (A \cup B)$. Portanto, $x \in (A \cup B)^c$.

4.7.6 Produto Cartesiano

Intuitivamente, um **par ordenado** é um conjunto formado por dois elementos, onde cada elemento ocupa uma posição bem definida. Se os elementos são a e b, o par ordenado é simbolizado por $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$, onde $\{a\}$ determina que a é o primeiro elemento ou primeira coordenada do par ordenado e $\{a,b\}$ determina que b é o segundo elemento ou segunda coordenada do par ordenado.

O teorema a seguir, estabelece o fato conhecido da igualdade de pares ordenados. A prova usa basicamente a linguagem de igualdade de conjuntos.

Teorema 5 *Dois pares ordenados* (a,b) *e* (c,d) *são iguais se e somente se* $a = c$ *e* $b = d$*.*

Prova: Exercício! ■

Definição 18 *Dados dois conjuntos* A *e* B*, definimos o produto cartesiano de* A *por* B*, nessa ordem, denotado por* $A \times B$*, ao conjunto formado pelos pares ordenados* (a,b) *tais que* $a \in A$ *e* $b \in B$*.*

Simbolicamente

$$\boxed{A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}, \qquad (a,b) \in A \times B \longleftrightarrow a \in A \quad e \quad b \in B}$$

Note que o par ordenado (a,b) não é elemento de $A \times B$ se, e somente se, pelo menos uma das seguintes afirmações ocorre $a \notin A$ ou $b \notin B$.

Simbolicamente

$$\boxed{(a,b) \notin A \times B \longleftrightarrow (a \notin A \quad ou \quad b \notin B)}$$

Quando $A = B$, escrevemos A^2 no lugar de $A \times A$, isto é $A^2 = A \times A$. De forma geral, usamos a notação $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n vezes A), para $n \in \mathbb{N}$.

Definição 19 *A diagonal de um conjunto* A*, define-se por* $D(A) = \{(a,b) \in A^2 / a = b\}$*.*

PROPRIEDADES:

1. Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$;
2. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, para todo A, B, C;
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, para todo A, B, C;
5. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$, para todo A, B, C;
6. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$, para todo A, B, C;

7. Se $A \subset B$, então $A \times C \subset B \times C$, para todo C;

8. Se $A \subset B$ e $C \subset D$, então $A \times C \subset B \times D$, para todo A, B, C, D;

9. $[A^c \times B^c] \subset (A \times B)^c$, para todo A, B;

10. Se $A \times C = B \times C$ e $C \neq \emptyset$, então $A = B$;

11. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$, para todo A, B, C, D;

12. $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$, para todo A, B, C, D.

DEMONSTRAÇÃO: Mostraremos algumas destas propriedades. As restantes ficam a cargo do leitor.

1. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

   Devemos mostraras as inclusões $A \times (B - C) \subset (A \times B) - (A \times C)$ e $(A \times B) - (A \times C) \subset A \times (B - C)$

   (i) Mostremos que $A \times (B - C) \subset (A \times B) - (A \times C)$

   Seja $(x, y) \in A \times (B - C)$, então $x \in A$ e $y \in (B - C)$. Logo, $x \in A$ e ($y \in B$ e $y \notin C$). Usando idempotência, comutatividade e associatividade, temos ($x \in A$ e $y \in B$) e ($x \in A$ e $y \notin C$). De onde, $(x, y) \in A \times B$ e $(x, y) \notin A \times C$. Assim, $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$. Portanto, $A \times (B - C) \subset (A \times B) - (A \times C)$.

   (ii) Mostremos que $(A \times B) - (A \times C) \subset A \times (B - C)$

   Seja $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$, então $(x, y) \in A \times B$ e $(x, y) \notin A \times C$. Logo, ($x \in A$ e $y \in B$) e ($x \notin A$ ou $y \notin C$). Usando associatividade e comutatividade podemos escrever isto último como $y \in B$ e [$x \in A$ e ($x \notin A$ ou $y \notin C$)]. Usando a lei de absorção, obtemos, $y \in B$ e ($x \in A$ e $x \notin C$). Por comutatividade e associatividade, temos $x \in A$ e ($y \in B$ e $y \notin C$). De onde, $x \in A$ e $y \in (B - C)$. Daqui, $(x, y) \in A \times (B - C)$. Portanto, $(A \times B) - (A \times C) \subset A \times (B - C)$.

2. Se $A \subset B$ e $C \subset D$, então $A \times C \subset B \times D$, para todo A, B, C, D

   Seja $(x, y) \in A \times C$, então $x \in A$ e $y \in C$. Como, $A \subset B$ e $C \subset D$, temos $x \in B$ e $y \in D$. De onde, $(x, y) \in B \times D$.

3. Se $A \times C = B \times C$ e $C \neq \emptyset$, então $A = B$

   Vamos fazer uma prova por redução ao absurdo. Suponha que $A \not\subset B$, isto é, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Desse modo, para qualquer $y \in C$, temos que se $(x, y) \in A \times C$, então $(x, y) \notin B \times C$. Mas, como $A \times C = B \times C$, deveríamos de ter $(x, y) \in B \times C$. Assim, $(x, y) \in B \times C$ e $(x, y) \notin B \times C$ é um absurdo. Portanto, $A = B$.

4. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$, para todo A, B, C, D

   (i) Mostremos que $(A \times B) \cap (C \times D) \subset (A \cap C) \times (B \cap D)$

   Seja $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$, então $(x, y) \in (A \times B)$ e $(x, y) \in (C \times D)$. Logo, $(x \in A$ e $y \in B)$ e $(x \in C$ e $y \in D)$. De onde, $(x \in A$ e $x \in C)$ e $(y \in B$ e $y \in D)$. Assim, $x \in (A \cap C)$ e $y \in (B \cap D)$. Portanto, $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

   (ii) Mostremos que $(A \cap C) \times (B \cap D) \subset (A \times B) \cap (C \times D)$

   Seja $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$, então $x \in (A \cap C)$ e $y \in (B \cap D)$. Logo, $(x \in A$ e $x \in C)$ e $(y \in B$ e $y \in D)$. Por associatividade e comutatividade, temos $(x \in A$ e $y \in B)$ e $(x \in C$ e $y \in D)$. De onde, $(x, y) \in (A \times B)$ e $(x, y) \in (C \times D)$. Portanto, $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

Exemplo 134 *Para $A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 3\}$. Determinar $(A \times B) \cap B^2$ e $(A - B) \times (A \cap B)$.*

Solução: *Note que $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{1, 2\}$. Logo, $A - B = \{-1, 0\}$ e $A \cap B = \{1\}$. Assim, $A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$ e $B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.*
Portanto, $(A \times B) \cap B^2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ e $(A - B) \times (A \cap B) = \{(-1, 1), (0, 1)\}$

Exemplo 135 *Os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$ são iguais? Justifique sua resposta.*

Solução: *Para dar resposta distinguimos dois casos:*

1. *Se $A = B$, então a igualdade se cumpre.*

2. *Se $A \neq B$, como por exemplo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3\}$, temos $A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\}$ e $B \times A = \{(3, 1), (3, 2)\}$. Claramente $A \times B \neq B \times A$*

Exemplo 136 *Os espaços euclidianos bidimensional e tridimensional são dados por, respectivamente:*
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

No entanto, em ocasiões e por motivos instrucionais podemos representar $\mathbb{R}^3$ pela formas que aparecem a seguir, mas isto não significa que o produto cartesiano seja associativo.
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \{(w, z) : w = (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ z \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(x, w) : x \in \mathbb{R},\ w = (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

Exemplo 137 *Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer. Mostre que se $(A \times B) \subset (C \times D)$, então $A \subset C$ e $B \subset D$.*

Solução: De fato, sejam $x \in A$ e $y \in B$, então $(x, y) \in A \times B$. Usando a hipótese dada temos que $(x, y) \in C \times D$, de onde $x \in C$ e $y \in D$. Assim, conseguimos $x \in A \longrightarrow x \in C$ e $y \in B \longrightarrow y \in D$.

Exemplo 138 *Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer. Estabelecer a validade das seguintes afirmações:*

1. *Se $(A \times B) \subset (C \times D)$, então $[B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B)$.*

2. $A^c \times B^c = (A \times B)^c$.

3. *Se* $A \subset B \subset D$, *então* $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = A \times C$.

4. *Se* $A \subset D \subset B$, *então* $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = A \times C$.

Solução: Vejamos cada um dos itens.

1. Do exemplo anterior temos que $A \subset C$ e $B \subset D$, logo $A \cup C = C$ e $B \cap D = B$. Assim, $[B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B)$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

2. Se $(x, y) \in A^c \times B^c$, temos $x \in A^c \quad e \quad y \in B^c$, de onde $x \notin A \quad e \quad y \notin B$.

   Por outro lado, se $(x, y) \in (A \times B)^c$, temos $(x, y) \notin (A \times B)$ de onde, $x \notin A$ ou $y \notin B$.

   Claramente, ($x \notin A \quad e \quad y \notin B$) e ($x \notin A$ ou $y \notin B$) não são equivalentes. Portanto, $A^c \times B^c \neq (A \times B)^c$ e a afirmação é falsa.

   (OBS. Pode verificar que essa igualdade não é verdade considerando $U = \{1, 3\}$, $A = \{1\}$ e $B = \{3\}$)

3. A afirmação é falsa. De fato, como $A \subset B \subset D$ então $B - D = \emptyset$ e $(B - D) \cap A = \emptyset$. De onde $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = [(B - D) \cap A] \times C = \emptyset \times C = \emptyset \neq A \times C$

4. A afirmação é falsa. De fato, como $A \subset D \subset B$ temos $(B - D) \cap A = \emptyset$. De onde $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = [(B - D) \cap A] \times C = \emptyset \times C = \emptyset \neq A \times C$

4.8 Número de elementos

Nesta seção os conjuntos em consideração são conjuntos finitos. Por $n(A)$ indicamos o número de elementos que o conjunto A tem.

PROPRIEDADES:

1. Se $A \cap B = \emptyset$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$;
2. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$;
3. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;
4. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$;
5. Se $n(A) = k$, então $n[\mathcal{P}(A)] = 2^k$.
6. Se os conjuntos A eB são finitos, então $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. Se $A \cap B = \emptyset$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

   Seja $n(A) = p$ e $n(B) = q$. Como não há elementos em comum entre A e B, o número de elementos de $A \cup B$ é $p + q$. Isto é, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

2. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

   Note que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ e que $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Assim, pela propriedade 1, temos que $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$. De onde, $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$.

3. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

   Note que $A \cup B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \emptyset$. Assim, pelas propriedades 1 e 2, temos $n(A \cup B) = n(A) + n(B - A) = n(A) + n(B) - n(B \cap A)$.

   Portanto, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

4. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

   Usando associatividade e as propriedades anteriores temos

   $n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C]$

   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

5. Se $n(A) = k$, então $n[\mathcal{P}(A)] = 2^k$

   Vamos determinar o número de subconjuntos com zero, um, dois, ... , k elementos.

   Com zero elementos, temos $\binom{n}{0}$ conjuntos.

   Com um elemento, temos $\binom{n}{1}$ conjuntos.

   Com dois elementos, temos $\binom{n}{2}$ conjuntos.

   Com três elementos, temos $\binom{n}{3}$ conjuntos.

   $\ddots$

   Com $n-1$ elementos, temos $\binom{k}{k-1}$ conjuntos.

   Com k elementos, temos $\binom{k}{k}$ conjuntos.

   Assim, $\mathcal{P}(A)$ terá $\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\ldots\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}$ elementos.

   Lembrando que $(a+b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0+\binom{k}{1}a^{k-1}b^1+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}a^1b^{k-1}+\binom{k}{k}a^0b^k.$

   Fazendo $a = b = 1$ temos que $\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\ldots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k} = 2^k$

   Portanto, $n[\mathcal{P}(A)] = 2^k$.

6. $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

   De fato, suponha que $n(A) = k$, $n(B) = m$ e $(a, b) \in A \times B$. Temos k formas de escolher o primeiro elemento do par ordenado e para cada escolha desse primeiro elemento temos m escolhas possíveis para o segundo elemento do par ordenado. No total temos $k \times m$ pares ordenados, isto nos dá $n(A \times B) = km = n(A) \cdot n(B)$.

Exemplo 139 *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Sabendo que:*
(i) $n(C - B^c) \leq 0$, (ii) $n[A \times (B \cup C)] = 60$, (iii) $n(A \times B) = 2n(A \times C)$. Determinar $n(A \times C)$.

Solução: *Notamos que $C - B^c = C \cap (B^c)^c = C \cap B$. Logo, como o número de elementos de um conjunto é maior ou igual do que zero temos:*

De (i) que $n(C \cap B) = 0$ e daqui $B \cap C = \emptyset$.

De (ii) e pela propriedade distributiva resulta $n[A \times (B \cup C)] = n(A \times B) + n(A \times C) = 60$, pois $B \cap C = \emptyset$. E, usando (iii) temos $n(A \times B) + n(A \times C) = 2n(A \times C) + n(A \times C) = 60$, de onde $n(A \times C) = 20$.

Exemplo 140 *Considerando* $U = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A = \{1, 3\}$ *e* $B = \{2, 4\}$. *Determinar o número de elementos de* $(A \times B^c)^c$.

Solução: *Como* $B = \{2, 4\}$, $B^c = \{1, 3\}$, *de onde* $n(A \times B^c) = 4$ *e* $n(U^2) = 16$. *Portanto,* $n(A \times B^c)^c = 16 - 4 = 12$

4.9 Exercícios

EXERCÍCIOS

1. Considerando os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}/x > 4 \longrightarrow x = 6\}$,
   $B = \{x \in \mathbb{N}/x > 1 \land x \leq 7\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z}/ \sim [x \geq 1 \longrightarrow x^2 \neq 4x - 3]\}$. Encontrar $M = (A \cap B) - (B \cap C)$.

2. Se $A = \{x \in \mathbb{Z}/x^2 - 10x - 24 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/ -3 \leq x \leq 2\}$,
   $C = \{x \in \mathbb{Z}/4 - x^2 = 0\}$ e $D = \{x \in \mathbb{N}/2 + 3x = 7 - 2x\}$. Determinar o valor de verdade de
   (a) $(D \cup A) - C = \{\frac{1}{3}, 2\}$; (b) $(A \cup B) - [D \cup \{\frac{1}{2}\}] \neq B$;

   (c) $[(A \cap B) \cup D] \cap C \subset C$; (d) $(D - A) \cap [(A \cup B) - (C \cup D)] = D$.

3. Se $A \subset B$, simplificar $\{[(B \cup A) \cap (B^c \cap C)] \cup A^c\} \cup B^c$

4. Se X é um conjunto tal que $X \in \mathcal{P}(A)$, para todo conjunto A. Determinar quais das afirmações abaixo são verdadeiras.
   (a) $X \cap X = X, \quad \forall A$;
   (b) $X - A = X, \quad \forall A$;
   (c) $(A - X) \cup (X - A) = A, \quad \forall A$.

5. Mostre que $B \subset [A \cup (B - A)]$.

6. Mostre que $B^c \cap (A \cup B) = A$ se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

7. De um grupo de 100 estudantes, 49 estão matriculados em MAT131 e 53 estão matriculados em MAT205. Se 27 desses alunos não estão matriculados em nenhuma dessas disciplinas, quantos estudantes estão matriculados em exatamente uma dessas disciplinas?

8. Uma pesquisa de opinião realizada com 154 pessoas revelou a seguinte informação: 6 pessoas têm como únicas refeições do dia o jantar e o café da manhã; para 5 pessoas o café da manhã e o almoço são as únicas refeições do dia e, para 8 pessoas a única refeição do dia é o almoço.

   O número de pessoas que tomam as três refeições do dia é igual a seis vezes daquelas que somente tomam café da manhã e igual ao triplo das que somente jantam. Nenhuma das pessoas declarou que as únicas refeições do dia seja o jantar e o almoço. Determinar:
   (a) O número de pessoas que pelo menos jantam;
   (b) O número de pessoas que tomam exatamente duas refeições por dia;
   (c) O número de pessoas que realizam unicamente uma das refeições.

9. Considerando o conjunto $A = \{2, \{3,4\}, \{5\}, 6\}$. Estabelecer o valor de verdade das seguintes afirmações, justificando sua resposta.
   (a) $\exists X \in \mathcal{P}(A)$ tal que $4 \in X$;
   (b) $\exists X \in \mathcal{P}(A)$ tal que $\{6\} \subset X$;
   (c) $\exists X \in \mathcal{P}(A)$ tal que $\{5\} \in X$;
   (d) $\exists X \in \mathcal{P}(A)$ tal que $\{3,4\} \subset X$;
   (e) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ tem-se $X \cup Y \in \mathcal{P}(A)$;
10. Se A, B, C são conjuntos não vazios tais que $A \cap C = \emptyset$ e $A \cup C = B$. Simplificar $A \triangle B \triangle A \triangle C$.
11. Mostrar ou dar um contraexemplo para as seguintes afirmações:
   (a) $F - (F - G) = F \cap G, \quad \forall F, G$;
   (b) $(A - B) - C = A - (B - C), \quad \forall A, B, C$;
   (c) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (B \cup C), \quad \forall A, B, C$.
12. Seja $U = \{-5, 6, \frac{2}{5}, \sqrt{6}, \sqrt{-2}, 1 + i, \frac{2}{10}\}$. Determinar os elementos dos seguintes conjuntos:
   (a) $A = \{x \in U / x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\}$;
   (b) $B = \{x \in U / x \in \mathbb{Q} \longrightarrow x \notin \mathbb{R}\}$;
13. Sejam $A = (-7, -1) \cup (0, 6]$, $B = (-\infty, 1] \cup [4, 8)$ e $C = [-2, 3] \cup [5, 10)$. Determinar:
   (a) $(A \cap B) \cup (A - B)^c$;
   (b) $(A \cup B)^c \cap (B - A)$;
   (c) $(A \triangle B) \cap (A \triangle C)$.
14. Seja $A_i = \{i + n / n \in \mathbb{Z}^+, n \quad \text{é ímpar e} \quad n \leq 5\}$. Pede-se:
   (a) Determinar os seis primeiros conjuntos A_i;
   (b) Encontrar $E = (A_1 \cup A_2 \cup A_5)$;
   (c) Determinar $(A_2 \cap A_4 \cap A_6)^c$;
   (d) Determinar $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c$;
   (e) Mostre que $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k} (B \cap A_i)$, se $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \{x / x \in A_i, \quad \text{para algum} \quad i\}$.
15. Defina a operação $*$ entre dois conjuntos A e B por $A * B = (A \cup B) - A^c$. Faça o que se pede:
   (a) Representar $*$ usando diagramas de Venn-Euler;
   (b) Mostrar que $A * (B \cap C) = (A * B) \cap (A * C), \quad \forall A, B, C$;
   (c) Mostrar que $A \cap (B * C) = (A \cap B) * (A \cap C), \quad \forall A, B, C$
16. Sabendo que $n(U) = 360$, $n(A) = 120$, $n(B) = 150$, $n(C) = 100$, $n(A \cap C) = 20$, $n(A \cap B) = 30$, $n(B \cap C) = 25$, $n(A \cap C) = 10$. Determinar $n(L \cup S)$, se os conjuntos L e S são dados por

   $L = \{x \in U / x \in A \longleftrightarrow x \in B\} \qquad S = \{x \in U / x \in A \longrightarrow x \in C\}$.

17. Se $A = \{x \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{3}(2k-1), k \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 1 \leq 12\}$. Determinar $(A \cap B) \times (B - A)$.

18. Se $n(A) = 3$, $n(B) = 8$, $n(C) = 9$ e $n(B \cap C) = 2$. Determinar $n[P(A \times B) \cap P(A \times C)]$

19. Sejam $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/0 \leq x \leq 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}/-1 \leq x \leq 2\}$. Estabelecer a validade ou falsidade das seguintes afirmações:
    (a) $(A \times B) \cup (B \times A)$ possui 24 elementos;
    (b) $(A \cap B)^2$ possui 4 elementos;
    (c) $A^2 \cap B^2 \cap C^2$ é um conjunto unitário.

20. Considerando conjuntos A, B, C e D quaisquer. Pede-se:
    (a) Usando intervalos, fazer uma representação geométrica de $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.
    (b) Mostrar que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$

21. Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer. Decidir quais das afirmações a seguir são verdadeiras.
    (a) Se $(A \times B) \subset (B \times D)$, então $[B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B)$.
    (b) Se $A = B \cap C$, então $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$.
    (c) Se $A \subset B \subset C$, então $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = A \times C$.

22. Mostrar ou dar um contraexemplo para as seguintes afirmações:
    (a) Se $A \subset B$ e $(B \times C) \subset (A \times C)$ então $B = A$.
    (b) Para quaisquer conjuntos A e B não vazios $n[(A \cup B) \times C] = n(A \times C) + n(B \times C)$.
    (c) $(A \triangle B) \times C \subset (A \cup B) \times C$, para para quaisquer conjuntos A, B e C.
    (d) Existem conjuntos $A \neq B \neq F \neq G$ tais que $(A \cup B) \times (F \cup G) = (A \times F) \cup (B \times G)$.

23. Mostrar que $P[A \times (B \cap C)] = P(A \times B) \cap P(A \times C)$

24. Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $A \cap C^c = \emptyset$ e $B^c \cap D = \emptyset$. Mostrar que $[A \times (B - D)] \cup (A \times D) \cup [(C - A) \times D] \subset C \times B$

25. Considerando U o conjunto universo. Mostrar ou dar um contraexemplo para $(A^c \times B^c) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B) = (U \times U - U \times B) \cup (U \times B - A \times B)$

Capítulo 5

RELAÇÕES BINÁRIAS

5.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de um subconjunto especial do produto cartesiano de dois conjuntos A e B. Este subconjunto, chamado de relação binária ou simplesmente relação, estabelece uma conexão ou correspondência entre um elemento de A e um elemento de B.

5.2 Relações de A em B

Definição 20 *Dados dois conjuntos A e B. Uma relação de A em B é um subconjunto de* $A \times B$. *Denotamos a relação por R e escrevemos* $R = \{(x, y) \in A \times B / p(x, y)\}$.

Observações:

1. Para saber se conjunto de pares ordenados R é uma relação de A em B, é necessário e suficiente verificar que $R \subset A \times B$;
2. Se $(x, y) \in A \times B$ é tal que (x, y) é elemento da relação R, a proposição $p(x, y)$ é verdadeira e escrevemos xRy, que se lê x está relacionado com y;
3. Se $(x, y) \in A \times B$ é tal que (x, y) não é elemento da relação R, a proposição $p(x, y)$ é falsa. Nesse caso escrevemos $x\not{R}y$, que se lê x não está relacionado com y;
4. Quando $A = B$ e R é uma relação de A em B, dizemos que R é uma relação em A;
5. Usamos letras maiúsculas, R, T, S para denotar as relações. Também usamos letras com subíndices para fazer diferencia uma da outra, como por exemplo $R_1, R_2, R_3, R_4, \ldots$.
6. Quando $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$ (são finitos), a representação da relação R pode ser feita:
   (a) Mediante diagrama de Venn;
   (b) Mediante grafos dirigidos (dígrafos);
   (c) Mediante uma matriz, $M_R = (m_{ij})$, de ordem $n \times m$, onde $m_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0, & se \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$

Exemplo 141 *Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Verificar qual dos seguintes conjuntos é uma relação de A em B*

1. $R_1 = \emptyset$
2. $R_2 = A \times B$
3. $R_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5)\}$
4. $R_4 = \{(1, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

Solução: *Vamos a analisar cada um desses conjuntos.*

1. *R_1 se é uma relação de A em B, pois $\emptyset \subset A \times B$;*
2. *R_2 é uma relação de A em B, uma vez que $A \times B \subset A \times B$;*
3. *Claramente $(1, 2) \in R_3$, mas $(1, 2) \notin A \times B$. Assim, $R_3 \not\subset A \times B$. Portanto, R_3 não é uma relação de A em B;*
4. *Todos os elementos de R_4 são também elementos de $A \times B$. Assim, $R_4 \subset A \times B$. Portanto, R_4 é uma relação de A em B.*

Exemplo 142 *Seja L o conjunto de todas as retas do plano. Os conjuntos $R_1 = \{(L_1, L_2)/L_1//L_2\}$ e $R_2 = \{(L_1, L_2)/L_1 \perp L_2\}$ são relações em L.*

Solução: *R_1 é uma relação em L. De fato, se $L_1, L_2 \in L$ e $L_1//L_2$, então $(L_1, L_2) \in R_1$ e também $(L_1, L_2) \in L^2$. Assim, $R_1 \subset L^2$.*

R_2 é uma relação em L. De fato, se $L_1, L_2 \in L$ e $L_1 \perp L_2$, então $(L_1, L_2) \in R_1$ e também $(L_1, L_2) \in L^2$. Assim, $R_2 \subset L^2$.

Exemplo 143 *Seja $U = \{X : X \text{ é um conjunto}\}$. A inclusão de conjuntos é uma relação definida em U.*

Solução: *De fato, definamos a relação R por $R = \{(A, B)/A \subset B\}$. Claramente, se $(A, B) \in R$ temos $(A, B) \in U^2$. Logo, $R \subset U^2$ e daqui R é uma relação em U.*

Exemplo 144 *O conjunto $\{(x, y)/ \quad x \text{ é divisor de y}, \quad x, y \in \mathbb{N}\}$ é uma relação em $\mathbb{N}$.*

Solução: *De fato, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{N}\}$. Seja $R = \{(x, y)/ \quad x \text{ é divisor de y}, \quad x, y \in \mathbb{N}\}$. Se $(x, y) \in R$ então $x, y \in \mathbb{N}$ e daqui $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim, $R \subset \mathbb{N}^2$.*

Exemplo 145 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ e $B = \mathcal{P}(A)$. Para $X, Z \in B$ quaisquer, define-se $R = \{(X, Z)/X - Z \in B\}$. Verificar se R é uma relação em B.*

Solução: *De fato, seja $(X, Z) \in R$, da forma como foi definida R, $X, Z \in B$, logo $(X, Z) \in B$. Desse modo, $R \subset B \times B$. Portanto, R é uma relação em B.*

Exemplo 146 *Sejam* $A = \{a, b, c, d\}$, $\quad b = \{x, y, z\}$. *Representar mediante uma matriz a relação* $R = \{(a, x), (a, y), (b, z), (c, y), (d, z)\}$

Solução:

$$\begin{array}{c|ccc} R & x & y & z \\ \hline a & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad ou \qquad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2.1 Domínio e Imagem de uma relação

Definição 21 *Seja* R *uma relação de* A *em* B, *definimos o domínio de* R *como o conjunto de todas as primeiras coordenadas dos pares ordenados da relação* R *e denotamos por* $Dom(R)$. *Isto é,*

$$Dom(R) = \{x \in A / \exists y \in B, \quad (x, y) \in R\} \subseteq A$$

A partir daqui, temos

$$x \in Dom(R) \Longleftrightarrow \exists y \in B \quad \text{tal que} \quad (x, y) \in R$$

$$x \notin Dom(R) \Longleftrightarrow \forall y \in B, \quad (x, y) \notin R$$

Definição 22 *Seja* R *uma relação de* A *em* B, *definimos a imagem de* R *como o conjunto de todas as segundas coordenadas dos pares ordenados da relação* R *e denotamos por* $Im(R)$. *Isto é,*

$$Im(R) = \{y \in B / \exists x \in A, \quad (x, y) \in R\} \subseteq B$$

A partir daqui, temos

$$y \in Im(R) \Longleftrightarrow \exists x \in A \quad \text{tal que} \quad (x, y) \in R$$

$$y \notin Im(R) \Longleftrightarrow \forall x \in A, \quad (x, y) \notin R$$

PROPRIEDADES Sejam R_1 e R_2 duas relações de A em B. Valem as seguintes propriedades:

Para o Domínio	**Para a Imagem**
(1) $Dom(R_1 \cup R_2) = Dom(R_1) \cup Dom(R_2)$	(1) $Im(R_1 \cup R_2) = Im(R_1) \cup Im(R_2)$
(2) $Dom(R_1 \cap R_2) \subset Dom(R_1) \cap Dom(R_2)$	(2) $Im(R_1 \cap R_2) \subset Im(R_1) \cap Im(R_2)$
(3) $Dom(R_1) - Dom(R_2) \subset Dom(R_1 - R_2)$	(3) $Im(R_1) - Im(R_2) \subset Im(R_1 - R_2)$

Prova: Exercício! ■

Exemplo 147 *Seja* $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ *e* $R = \{(x, y) \in M \times M/2x - y = 5\}$. *Determinar* $n(Dom(R)) \cdot n(Im(R))$

Solução: *Da relação* R *dada, temos* $p(x, y) : 2x - y = 5$. *Os valores de* $x, y \in M$ *que tornam verdadeira* $p(x, y)$, *são tais que* $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ *e* $y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. *Assim,* $Dom(R) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ *e* $Im(R) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. *Daqui,* $n(Dom(R)) \cdot n(Im(R)) = (5)(5) = 25$

Exemplo 148 *Seja* $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2/y = 2x^2 - 5\}$. *Determinar o valor de verdade das seguintes afirmações: (a)* $(2, 4) \in R$ *(b)* $4 \in Dom(R)$ *e* $5 \in Im(R)$ *(c)* $-5 \in Im(R)$ *ou* $5 \in Im(R)$

Solução:
(a) Note que $p(x, y) : y = 2x^2 - 5$. *Assim,* $p(2, 4)$ *é falsa, pois* $4 \neq 2(2)^2 - 5$.

(b)Note que $4 \in Dom(R)$ *é verdadeira, já que existe* $y = 27$ *tal que* $(4, 27) \in R$. *Mas* $5 \in Im(R)$ *falsa, já que* $5 = 2x^2 - 5$ *implica* $x \in \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\} \not\subset \mathbb{Z}$. *Portanto, a afirmação (b) é falsa.*

(c) Note que $-5 \in Im(R)$ *é verdadeira, pois existe* $x = 0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $(0, -5) \in R$ *e* $5 \in Im(R)$ *é falsa conforme visto no item (b). Portanto, a afirmação (c) é verdadeira.*

5.3 Relação Inversa ou Recíproca ou Dual

Definição 23 *Dada uma relação* R *de* A *em* B, $R = \{(x, y) \in A \times B/ \quad p(x, y)\}$. *A relação inversa ou recíproca de* R, *é o conjunto definido por* $R^* = R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A/ \quad (x, y) \in R\}$.

$$\boxed{(y, x) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R}$$

Note que $Dom(R^{-1}) = Im(R)$ e $Im(R^{-1}) = Dom(R)$.

PROPRIEDADES: Sejam as relações $R, S \subset A \times B$. Então vale:

$$\begin{array}{|l|}\hline (1)\ (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \\ (2)\ (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \\ (3)\ (R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1} \\ \hline \end{array}$$

Prova: Exercício! ■

Exemplo 149 *Seja* $R = \{(1, 2), (3, 4), (3, 5), (6, 5)\}$. *Determinar a relação inversa* R^{-1}.

Solução: *De acordo com a definição de relação inversa temos* $R^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (5, 3), (5, 6)\}$.

Exemplo 150 *Sejam R e T relações de A em B. Mostre que $(R-T)^{-1} = R^{-1} - T^{-1}$.*

Solução:

(a) Mostremos que $(R-T)^{-1} \subset R^{-1} - T^{-1}$.

Seja $(y,x) \in (R-T)^{-1}$, então $(x,y) \in (R-T)$ e daqui, $(x,y) \in R$ e $(x,y) \notin T$. Segue que $(y,x) \in R^{-1}$ e $(y,x) \notin T^{-1}$. Portanto, $(y,x) \in [R^{-1} - T^{-1}]$.

(b) Mostremos que $R^{-1} - T^{-1} \subset (R-T)^{-1}$.

Seja $(y,x) \in R^{-1} - T^{-1}$, então $(y,x) \in R^{-1}$ e $(y,x) \notin T^{-1}$ e, daqui $(x,y) \in R$ e $(x,y) \notin T$. Segue, $(x,y) \in (R-T)$. Portanto, $(y,x) \in (R-T)^{-1}$.

Exemplo 151 *Sejam R, T e S relações de A em B. Mostre que*

$$[(R \cup T) \cap S]^{-1} = (R \cap S)^{-1} \cup (T \cap S)^{-1}$$

Solução:

Note que $[(R \cup T) \cap S] = (R \cap S) \cup (T \cap S)$. Logo, aplicando a propriedade 1 da relação inversa, temos $[(R \cup T) \cap S]^{-1} = [(R \cap S) \cup (T \cap S)]^{-1} = (R \cap S)^{-1} \cup (T \cap S)^{-1}$.

Exemplo 152 *Se $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,5\}$ e $R = \{(x,y) \in A \times B / x \leq y\}$. Determinar o valor de verdade das seguintes afirmações:*

(a) $Dom(R) \cap Dom(R^{-1}) = \emptyset$ *(b) $n(R \cap R^{-1}) = 12$* *(c) $n(R \cup R^{-1}) = 12$*

(d) $n(Dom(R)) = 4$ *(e) $n(Im(R)) = 2$*

Solução:

$R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5),(4,5)\}$, $Dom(R) = Im(R^{-1}) = \{1,2,3,4\}$, $Im(R) = Dom(R^{-1}) = \{1,3,5\}$, $R^{-1} = \{(1,1),(3,1),(5,1),(3,2),(5,2),(3,3),(5,3),(5,4)\}$. Com isto, (a), (b), (c) e (e) são falsas e, (d) é verdadeira.

Exemplo 153 *Mostrar ou dar um contraexemplo para o seguinte enunciado: Se R^{-1} é uma relação de B em A tal que $D(B) \subset R^{-1}$, então $B \subset A$.*

Solução: *Como $D(B) \subset R^{-1}$ concluímos que $B \subset Dom(R^{-1})$ e $B \subset Im(R^{-1}) = Dom(R) \subseteq A$. Portanto, $B \subset A$.*

Exemplo 154 *Mostrar ou dar um contraexemplo para o seguinte enunciado: Se R é uma relação de A em B tal que $D(A) = R$, então $B = A$.*

Solução: *Como $D(A) = R$, temos $A = Dom(R) = Im(R) \subseteq B$. Asim $A \subseteq B$.*

Mas, não é possível concluir que $B \subset A$. Para ver isto, basta tomar $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,1),(2,2)\}$. Claramente, $D(A) = R$ e $A \neq B$.

5.4 Composta de relações

Sejam $R_1 \subset A \times B$ e $R_2 \subset B \times C$ duas relações. A composta de R_2 com R_1, nessa ordem, simbolizado por $R_2 \circ R_1$, é a relação dada por

$$R_2 \circ R_1 = \{(x,z) \in A \times C / \exists y \in B, (x,y) \in R_1 \quad e \quad (y,z) \in R_2\}$$

A partir daqui, temos:

$$(x,z) \in (R_2 \circ R_1) \Longleftrightarrow \exists y \in B, \quad (x,y) \in R_1 \quad \text{e} \quad (y,z) \in R_2$$

$$(x,z) \notin (R_2 \circ R_1) \Longleftrightarrow \forall y \in B, \quad (x,y) \notin R_1 \quad \text{ou} \quad (y,z) \notin R_2$$

Observações:

1. Para a composta existir e ser não vazia, devemos verificar que $Dom(R_2) \cap Im(R_1) \neq \emptyset$;
2. $Dom(R_2 \circ R_1) = \{x \in A / \exists y \in B, \exists \in C, (x,y) \in R_1 \quad \text{e} \quad (y,z) \in R_2\ \} \subseteq A$
3. $Im(R_2 \circ R_1) = \{z \in C / \exists x \in A, \exists y \in B, (x,y) \in R_1 \quad \text{e} \quad (y,z) \in R_2\} \subseteq C$

PROPRIEDADES: A composta de duas relação, quando ela existir, satisfaz:

(1) $(R_1 \circ R_2) \neq (R_2 \circ R_1)$

(2) $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

(3) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

Prova: Exercício! ■

5.5 Relações sobre um conjunto A

Nesta seção, consideramos relações definidas num conjunto A. Assim, se R uma relação em A, temos $R \subset A \times A$. De forma geral, vale o seguinte:

$$\boxed{R \subset A \times A \Longleftrightarrow R \in \mathcal{P}(A \times A)}$$

Lembrando que quando A é finito, $n(A) = m$, temos $n(A \times A) = m^2$ e consequentemente $n(\mathcal{P}(A \times A)) = 2^{m^2}$. Isto nos diz, que sobre um conjunto finito A podem ser definidas 2^{m^2} relações.

5.6 Tipos de relações sobre um conjunto A

5.6.1 Relação Reflexiva

Definição 24 *Uma relação R definida sobre A, é dita reflexiva se, e somente se, todo elemento de A está relacionado com ele mesmo. Isto é, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.*

Simbolicamente,

$$\boxed{R \text{ é reflexiva} \Longleftrightarrow [\forall x \in A; x \in A \longrightarrow (x, x) \in R]}$$

Dizer que uma relação não é reflexiva significa que existe, pelo menos um elemento $x \in A$ tal que $(x, x) \notin R$.

Simbolicamente,

$$\boxed{R \text{ não é reflexiva} \Longleftrightarrow [\exists x \in A; x \in A \quad e \quad (x, x) \notin R]}$$

Teorema 6 *Seja R uma relação definida sobre o conjunto A. R é reflexiva se, e somente se, $D(A) \subset R$.*

$$\boxed{R \text{ é reflexiva} \Longleftrightarrow D(A) \subset R}$$

Prova: Exercício! ∎

Exemplo 155 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$. A relação R é uma relação reflexiva.*

<u>Solução:</u> *De fato, note que $D(A) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subset R$. Portanto, R é reflexiva.*

Exemplo 156 *A relação $R = \{(L_1, L_2)/L_1//L_2\}$ definida sobre o conjunto de todas as retas do plano é uma relação reflexiva.*

Solução: *De fato, seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as retas do plano e seja $L \in \mathbb{P}$, sabemos que $L//L$, assim $(L, L) \in R$ para todo $L \in \mathbb{P}$. Portanto, R é reflexiva.*

Exemplo 157 *Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x - y \leq 0\}$. R é uma relação reflexiva.*

Solução: *De fato, sabemos que para qualquer número real x, vale $x - x = 0 \leq 0$. Logo, $(x, x) \in R$. Assim, R é reflexiva.*

Exemplo 158 *Seja R a relação sobre $\mathbb{Q}$, definida por $R = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2/x \cdot y = 1\}$. É R uma relação reflexiva?*

Solução: *Não, não é reflexiva, pois para $x = 0 \in \mathbb{Q}$ não é verdade que $0 \cdot 0 = 1$ e daqui $(0, 0) \notin R$.*

Exemplo 159 *Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/|x| = |y + 1|\}$. R é reflexiva?*

Solução: *Não, pois para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos $|x| \neq |x + 1|$, de onde $(x, x) \notin R$.*

5.6.2 Relação Simétrica

Definição 25 *Uma relação R definida sobre A, é dita simétrica se, e somente se, para cada $(x, y) \in R$ tem-se $(y, x) \in R$.*

Simbolicamente,

$$\boxed{R \text{ é simétrica} \Longleftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A; [(x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R]}$$

Dizer que R não é simétrica equivale a dizer que existe um elemento $(x, y) \in R$ tal que $(y, x) \notin R$.

Simbolicamente,

$$\boxed{R \text{ não é simétrica} \Longleftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in A; [(x, y) \in R \quad e \quad (y, x) \notin R]}$$

Teorema 7 *Seja R uma relação definida sobre o conjunto A. R é simétrica se, e somente se, $R = R^{-1}$.*

$$\boxed{R \text{ é simétrica} \Longleftrightarrow R = R^{-1}}$$

Prova: Exercício! ■

Exemplo 160 *Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$. A relação R é simétrica.*

Solução: *De fato, como pode ser visto rapidamente, para qualquer $(x, y) \in R$, tem-se também $(y, x) \in R$.*

Exemplo 161 *As relações $R_1 = \{(L_1, L_2)/L_1//L_2\}$ e $R_2 = \{(L_1, L_2)/L_1 \perp L_2\}$ definidas sobre o conjunto de todas as retas do plano são relações simétricas.*

Solução: *De fato, seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as retas do plano e $L_1, L_2 \in \mathbb{P}$. Sabemos que se $L_1//L_2$, então $L_2//L_1$. E, que se $L_1 \perp L_2$, então $L_2 \perp L_1$. Portanto, as relações dadas são simétricas.*

Exemplo 162 *É simétrica a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/(x - y) \in \mathbb{Z}\}$?*

Solução: *Sim, pois se $(x, y) \in R$, é verdade que $(x - y) \in \mathbb{Z}$ e também é verdade que $(y - x) = -(x - y) \in \mathbb{Z}$. Com isto, $(y, x) \in R$.*

Exemplo 163 *Seja A um conjunto finito com k elementos. E, seja $R = D(A)$. Afirmamos que R é simétrica.*

Solução: *De fato, sejam $a \neq b$ elementos de A. Como $R = (D(A)$, $(b, a) \notin R$ implica que $(a, b) \notin R$. Portanto, R é simétrica.*

Exemplo 164 *Mostrar ou dar um contraexemplo para a seguinte afirmação: Se $R \subset R^{-1}$, então R é simétrica.*

Solução: *Seja $(x, y) \in R$, então pela hipótese temos $(x, y) \in R^{-1}$. Agora, pela definição da relação inversa temos que $(y, x) \in R$. Portanto, R é simétrica.*

Exemplo 165 *Mostrar ou dar um contraexemplo para a seguinte afirmação: Se $R^{-1} \subset R$, então R é simétrica.*

Solução: *Seja $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R^{-1}$. Como $R^{-1} \subset R$, temos que $(y, x) \in R$. Portanto, R é simétrica.*

Exemplo 166 *É simétrica a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/y = x - 1\}$?*

Solução: *Não. Observe que $(2, 1) \in R$, pois $1 = 2 - 1$. Mas, $(1, 2) \notin R$, já que $2 \neq 1 - 1$.*

Exemplo 167 *Verificar se a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 - y^2 = 1\}$ é simétrica.*

Solução: *A relação não simétrica já que $(1, 0) \in R$, mas $(0, 1) \notin R$.*

5.6.3 Relação Transitiva

Definição 26 *Uma relação R definida sobre A, é dita transitiva se, e somente se, $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ implica que $(x, z) \in R$.*

Simbolicamente,

$$\boxed{R \text{ é transitiva} \iff \forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A; \quad \{[(x, y) \in R \quad e \quad (y, z) \in R] \longrightarrow (x, z) \in R\}}$$

Uma relação R não é transitiva quando a condicional $\{[(x, y) \in R \quad e \quad (y, z) \in R] \longrightarrow (x, z) \in R\}$ é falsa para algum x, y, z. Ou seja, quando $[(x, y) \in R \quad e \quad (y, z) \in R]$ é verdadeiro e $(x, z) \in R$ é falso.

Simbolicamente,

$$\boxed{R \text{ não é transitiva} \iff \exists x \in A, \exists y \in A, \exists z \in A; \{[(x,y) \in R \quad e \quad (y,z) \in R] \quad e \quad (x,z) \notin R\}}$$

Teorema 8 *Seja R uma relação definida sobre o conjunto A. R é transitiva se, e somente se, $(R \circ R) \subset R$.*

$$\boxed{R \text{ é transitiva} \iff R \circ R \subset R}$$

Prova: Exercício! ∎

Exemplo 168 *Seja $A = \{1,2,3\}$. A relação $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ é transitiva, como pode ser verificado sem dificuldade.*

Exemplo 169 *A relação $R = \{(L_1,L_2)/L_1//L_2\}$ definida sobre o conjunto de todas as retas do plano é transitiva.*

Solução: *De fato, denotemos por $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as retas do plano e sejam $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{P}$, tais que $(L_1,L_2),(L_2,L_3) \in R$. Sabemos que se $L_1//L_2$ e $L_2//L_3$ então $L_1//L_3$. Isto é $(L_1,L_3) \in R$.*

Exemplo 170 *A relação $R = \{(L_1,L_2)/L_1 \perp L_2\}$ definida sobre o conjunto de todas as retas do plano não é transitiva.*

Solução: *De fato, denotemos por $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as retas do plano e sejam $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{P}$, tais que $(L_1,L_2),(L_2,L_3) \in R$. Sabemos que se $L_1 \perp L_2$ e $L_2 \perp L_3$, então $L_1//L_3$. Isto é $(L_1,L_3) \notin R$.*

Exemplo 171 *Verificar se a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x < y\}$ é transitiva.*

Solução: *De fato, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, temos $x < y$ e $y < z$. Pela propriedade transitiva de desigualdades, temos que $x < z$. Isto é, $(x,z) \in R$.*

Exemplo 172 *Verificar se é transitiva a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y = x - 1\}$*

Solução: *Sejam $(x,y),(y,z) \in R$, então $y = x - 1$ e $z = y - 1$, mas $z \neq x - 1$, já que $z = (x-1) - 1 = x - 2$. Assim, $(x,z) \notin R$. Portanto, R não é transitiva.*

Exemplo 173 *Verificar se a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 - y^2 = 1\}$ é transitiva.*

Solução: *Sejam $(x,y),(y,z) \in R$, então $x^2 - y^2 = 1$ e $y^2 - z^2 = 1$, mas $x^2 - z^2 \neq 1$, já que $x^2 = y^2 + 1 = (z^2+1) + 1 = z^2 + 2 \Longrightarrow x^2 - z^2 = 2$. Portanto, R não é transitiva.*

Exemplo 174 *Mostra ou dar um contraexemplo para a seguinte afirmação: Se R é reflexiva e simétrica, então R é transitiva.*

Solução: *Considere $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$. Claramente, R é reflexiva, pois $D(A) \subset R$. Também, R é simétrica. No entanto, R não é transitiva, já que $(1,3),(3,4) \in R$, mas $(1,4) \notin R$.*

5.6.4 Relação Antissimétrica

Definição 27 *Uma relação R definida sobre A, é dita antissimétrica se, e somente se, $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$, implica $x = y$.*

Simbolicamente,

$$R \text{ é antissimétrica} \iff \forall x \in A, \forall y \in A; \quad \{[(x,y) \in R \quad e \quad (y,x) \in R] \longrightarrow x = y\}$$

Uma relação R não é antissimétrica se a condicional $\{[(x,y) \in R \quad e \quad (y,x) \in R] \longrightarrow x = y\}$ é falsa. Isto é, se $[(x,y) \in R \quad e \quad (y,x) \in R]$ é verdadeiro e $x = y$ é falso.

$$R \text{ não é antissimétrica} \iff \exists x \in A, \exists y \in A; \quad \{[(x,y) \in R \quad e \quad (y,x) \in R] \quad e \quad x \neq y\}$$

Teorema 9 *Seja R uma relação definida sobre o conjunto A. R é antissimétrica se, e somente se, $(R \cap R^{-1}) \subset D(A)$.*

$$R \text{ é antissimétrica} \iff (R \cap R^{-1}) \subset D(A)$$

Prova: Exercício! ■

Exemplo 175 *A relação $R = \{(A,B) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F} / A \subset B\}$, definida sobre o conjunto $\mathbb{F}$ de todos os conjuntos é antissimétrica.*

Solução: *De fato, se $(A,B) \in R$ e $(B,A) \in R$ temos $A \subset B$ e $B \subset A$. Por definição de igualdade de conjuntos concluímos que $A = B$.*

Exemplo 176 *Verifique que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$ é antissimétrica.*

Solução: *Sejam $(x,y),(y,x) \in R$. Pela definição de R temos $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$. Portanto, R é antissimétrica.*

Exemplo 177 *Seja $A = \{1,2,3\}$. A relação $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ é antissimétrica?*

Solução: *Observe que mostrar que $[(x,y) \in R \quad e \quad (y,x) \in R] \longrightarrow x = y$ equivale a mostrar a contrapositiva $x \neq y \longrightarrow [(x,y) \notin R \quad ou \quad (y,x) \notin R]$.*

Claramente, para $1 \neq 2$ temos $(1,2) \in R$, mas $(2,1) \notin R$. Para $1 \neq 3$ temos $(1,3) \in R$, mas $(3,1) \notin R$. Para $2 \neq 3$ temos $(2,3) \notin R$ e $(3,2) \notin R$. Portanto, R é antissimétrica.

Exemplo 178 *Seja $R = D(A)$, para $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. R é antissimétrica?*

Solução: *Note que A é um conjunto finito com k elementos. Isto implica que $a_i \neq a_j$, para todo $i \neq j$. Desse modo, para $a_i \neq a_j$, temos que nem $(a_i, a_j) \in R$ e nem $(a_j, a_i) \in R$. Portanto, R é antissimétrica.*

Exemplo 179 *A relação $R = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 / a \quad divide \quad b\}$ é antissimétrica?*

Solução: *Sim. Sejam $(a,b),(b,a) \in R$, então $b = ma$ e $a = nb$, para alguns $m,n \in \mathbb{N}$. Logo, $b = ma = m(nb) = (mn)b$. Para isto último ser verdade, devemos ter $mn = 1$, com $m,n \in \mathbb{N}$. Assim, $m = n = 1$. Portanto, $a = b$.*

Exemplo 180 *Seja A o conjunto de todas as pessoas que moram em Viçosa. Seja R a relação definida em A, tal que $(a,b) \in R$ se, e somente se a e b nasceram no mesmo dia. R é uma relação antissimétrica?*

Solução: *Não, pois se $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, temos que a e b nasceram no mesmo dia, mas não necessariamente $a = b$. O que torna falsa a implicação $[(a,b) \in R \quad e \quad (b,a) \in R] \longrightarrow a = b$.*

Exemplo 181 *Seja R a relação definida sobre $\mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in R$ se, e somente se $y = 2x$. É R antissimétrica?*

Solução: *Não, já que se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, temos $y = 2x$ e $x = 2y$. De onde, $y = 4y$ e, isto ocorre somente se $x = y = 0$. Assim, para $x = 1$ e $y = 2$, claramente temos que $(1, 2) \in R$, mas $(2, 1) \notin R$. De forma geral, se $x \neq y$, ou $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$, mas não ambas.*

5.7 Relação de Equivalência

Definição 28 *Seja R uma relação definida sobre o conjunto A. Dizemos que R é uma* relação de equivalência *se R for reflexiva, simétrica e transitiva simultaneamente.*

$$R \text{ é de equivalência} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a) & R \quad \text{é reflexiva;} \\ (b) & R \quad \text{é simétrica;} \\ (c) & R \quad \text{é transitiva.} \end{cases}$$

Assim, uma relação R deixa de ser de equivalência se, e somente se, pelo menos uma das condições (a), (b), (c) não é satisfeita.

Exemplo 182 *Seja A o conjunto de todas as pessoas que moram em Viçosa. A relação R definida em A por: $(a, b) \in R$ se, e somente se a e b nasceram no mesmo dia, é de equivalência.*

Solução: *De fato, para qualquer $a \in A$, tem-se que a e a nascem no mesmo dia, logo $(a, a) \in R, \forall a \in A$. R é reflexiva.*

Agora se a nasce no mesmo que b, b nasce no mesmo dia que a, assim $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$. R é simétrica.

Por último, se a nasce no mesmo dia que b e b nasce no mesmo dia que c, sem dúvida a nasce no mesmo dia que c. Assim, $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ implica $(a, c) \in R$. R é transitiva.

Portanto, R é uma relação de equivalência.

Exemplo 183 *Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / xy \quad \text{é par}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

(a) R é reflexiva *(b) R é simétrica* *(c) R é transitiva* *(d) R é de equivalência*

Solução: *Vejamos, para R ser reflexiva, para cada $x \in \mathbb{N}$ deve-se ter $(x, x) \in R$. Mas, para $x = 3$, $(3, 3) \notin R$, já que $3 \cdot 3 = 9$ não é par. Logo, R não reflexiva.*

Se $x \cdot y$ é par, então $y \cdot x$ também é par. Assim, $(x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R$. Segue que R é simétrica.

Agora, $(3, 2) \in R$ e $(2, 5) \in R$, mas $(3, 5) \notin R$ já que $3 \cdot 5 = 15$ não é par. Logo, R não é transitiva.

Portanto, somente a afirmação (b) é verdadeira.

Exemplo 184 *Analisar se a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x - y = 3k, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z}\}$ é de equivalência.*

Solução: *Como $x - x = 3(0)$, segue que $(x, x) \in R, \forall x \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.*

Agora, se $(x, y) \in R$, temos $x - y = 3k$ e daqui $y - x = -(x - y) = 3(-k)$. Assim, R é simétrica.

Finalmente, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, temos $x - y = 3k_1$ e $y - z = 3k_2$, de onde $x - z = 3(k_1 - k_2)$. Assim, e $(x, z) \in R$ e R é transitiva. Portanto, R é uma relação de equivalência.

Exemplo 185 *Seja R a relação definida em A. Estabelecer a validade das afirmações abaixo:*

1. *Se R é reflexiva, então $Dom(R) = Dom(R^{-1})$;*
2. *Se R é simétrica e transitiva, então R é reflexiva;*
3. *Se $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$, então R é uma relação de equivalência.*

Solução:

1. *Note que se R reflexiva temos $A = Dom(R) = Im(R)$ e como $Dom(R^{-1}) = Im(R)$, concluímos que $Dom(R) = Dom(R^{-1})$. Portanto, esta afirmação é verdadeira.*
2. *Esta afirmação é falsa. Para isto, vamos apresentar um contraexemplo. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, claramente R é simétrica e transitiva, porém R não é reflexiva, pois $(3, 3) \notin R$.*
3. *Como $D(A) \subset R$, R é reflexiva. Por outro lado, R não é simétrica, já que $(b, c) \in R$, mas $(c, b) \notin R$. Assim, R não é relação de equivalência. Portanto, a afirmação é falsa.*

Exemplo 186 *Seja R uma relação definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por*

$$((a, b), (c, d)) \in R \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

Mostre que R é uma relação de equivalência.

Solução: *De fato,*

R é reflexiva: Seja $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qualquer, então $((a, b), (a, b)) \in R$, pois $a + b = a + b$.

R é simétrica: Seja $((a, b), (c, d)) \in R$, então $a + d = b + c$, logo $c + b = d + a$. Isto é, $((c, d), (a, b)) \in R$.

R é transitiva: Sejam $((a, b), (c, d)) \in R$ e $((c, d), (e, f)) \in R$, então $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$. Assim, $a + d + c + f = b + c + d + e$ e daqui $a + f = b + e$. Logo, $((a, b), (e, f)) \in R$.

Exemplo 187 *Seja A o conjunto formado pelos alunos da disciplina $MAT131$. Defina a relação R em A por aRb se, e somente se, a veste camisa ou blusa da mesma cor que b. É R uma relação de equivalência?*

Solução:

R é reflexiva: Seja $a \in A$ qualquer, claramente a veste camisa ou blusa da mesma cor que a.

R é simétrica: Se aRb, a veste a mesma cor de camisa ou blusa que b, logo b veste a mesma cor de camisa ou blusa que a. Assim, bRa.

R é transitiva: Se aRb e bRc, a veste a mesma cor de blusa ou camisa que b e b veste a mesma cor de blusa ou camisa que c. Logo, a veste a mesma cor de blusa ou camisa que c.

Portanto, R é relação de equivalência.

Exemplo 188 *Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x - y| < 1\}$. É R uma relação de equivalência?*

Solução: *Vejamos:*

(i) Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $|x - x| = 0 < 1$, logo $(x, x) \in R$. Assim, R é reflexiva.

(ii) Note que $|x-y| = |y-x| < 1$. *Logo, se* $(x,y) \in R$, *claramente temos que* $(y,x) \in R$. *Assim,* R *é simétrica.*
(iii) Considerando $x = \sqrt{2}, y = 2, z = \sqrt{7}$, *claramente temos que* $|x-y| < 1$ *e* $|y-z| < 1$, *mas* $|x-z| > 1$. *Assim,* R *não é transitiva.*

Portanto, a relação dada não é uma relação de equivalência.

Observações:

1. Quando R é uma relação de equivalência sobre A, $(x,y) \in R$ lê-se: x é equivalente a y;

2. A notação padrão para uma relação de equivalência é o símbolo $\sim$. Assim, $(x,y) \in R$ se escreve como $x \sim y$;

3. Escrever $x \sim y$, significa que x e y são considerados como sendo a mesma coisa, não necessariamente iguais.

5.7.1 Classes de equivalência

Definição 29 *Seja* R *uma relação de equivalência sobre* A. *Para cada* $a \in A$, *a classe de equivalência de* a, $[a] = \bar{a}$, *é o conjunto* $[a] = \{x \in A/(x,a) \in R\}$.

Exemplo 189 *Determinar as classes de equivalência de* 2 *e* 7 *se* $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x = y\}$

Solução: *Claramente,* R *é uma relação de equivalência sobre* $\mathbb{R}$. *De acordo com a definição de classe de equivalência temos*

$[2] = \{x \in \mathbb{R}/(x,2) \in R\} = \{2\}$ $\qquad$ $[7] = \{x \in \mathbb{R}/(x,7) \in R\} = \{7\}$.

Exemplo 190 *Considerando a relação* $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2/x - y = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$. *Determinar as classes de equivalência de* $0, 1$ *e* 2.

Solução: *Como foi visto no exemplo 172,* R *é uma relação de equivalência. Determinemos as classes de equivalência.*

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z}/(x,0) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}/x = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$
$$[1] = \{x \in \mathbb{Z}/(x,1) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}/x - 1 = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$$
$$[2] = \{x \in \mathbb{Z}/(x,2) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}/x - 2 = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$$

Exemplo 191 *Sobre o conjunto* $A = \{a/a \text{ é um aluno matriculado na disciplina } MAT131\}$, *definimos a relação* R *sobre* A *por:* aRb *se, e somente se,* a *usa a mesma marca de celular que* b.

Solução: *A classe de equivalência de um estudante* x *que usa celular da marca Samsung, é formado por todos os estudantes de* A *que também usam celular da marca Samsung.*

Exemplo 192 *Seja* R *uma relação de equivalência sobre um conjunto* A. *Mostre que se* $[x]$ *é uma classe de equivalência e* $a, b \in [x]$, *então* $(a,b) \in R$

Solução: *De fato, por definição de classe de equivalência temos que, se* $a, b \in [x]$, *então* $(a,x) \in R$ *e* $(b,x) \in R$. *Como* R *é simétrica* $(a,x) \in R$ *e* $(x,b) \in R$. *Como* R *é transitiva* $(a,b) \in R$.

Questão: Compare a prova feita aqui com a solução do exemplo 180(2). O que torna possível fazer o argumento apresentado nesta prova?

Exemplo 193 *Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A e $[x]$ uma classe de equivalência. Mostre que se $(a, b) \in R$, então $a, b \in [x]$.*

Solução: *De fato, como $(a, b) \in R$ e sendo R uma relação transitiva, existe $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R$. Por definição de classe de equivalência, $a \in [x]$ e $b \in [x]$. Portanto, $a, b \in [x]$.*

Exemplo 194 *Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Mostre que se $[a]$ é uma classe de equivalência e $(a, b) \in R$, então $[a] = [b]$.*

Solução: *Devemos mostrar que $[a] \subset [b]$ e que $[b] \subset [a]$.*

Seja $x \in [a]$, logo $(x, a) \in R$ e como $(a, b) \in R$ temos por transitividade de R que $(x, b) \in R$ e daqui, $x \in [b]$. Isto mostra que $[a] \subset [b]$.

Seja $y \in [b]$, logo $(y, b) \in R$ e como $(a, b) \in R$, resulta pela simetria de R que $(y, b) \in R$ e $(b, a) \in R$. Agora, pela transitividade de R, segue que $(y, a) \in R$ e daqui, $y \in [a]$. Isto mostra que $[b] \subset [a]$.

Portanto, $[a] = [b]$.

Exemplo 195 *Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Mostre que se $(a, b) \notin R$, então $[a] \cap [b] = \emptyset$.*

Solução: *Faremos a prova pela contra positiva. Suponha que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Como $\emptyset \subset [a] \cap [b]$ é sempre verdadeiro. Podemos assumir que existe $x \in A$ tal que $x \in [a] \cap [b]$. Logo, $x \in [a]$ e $x \in [b]$. Daqui, $(x, a) \in R$ e $(x, b) \in R$. Como R é simétrica temos $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R$. Por R ser transitiva concluímos que $(a, b) \in R$.*

5.7.2 Família de conjuntos

Definição 30 *Seja $\mathcal{J}$ um conjunto, chamado de* conjunto de índices. *Uma família de conjuntos $\mathcal{A}$, indexada por $\mathcal{J}$, é $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathcal{J}}$*

Exemplo 196 *Para o conjunto de índices $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, , 4, \dots, 50\}$. Escrevemos a família de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathcal{J}} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{49}, A_{50}\}$.*

Exemplo 197 *Suponha que entre os habitantes de uma determinada cidade ZYX seja feita uma divisão para que um grupo de pessoas, num determinado dia útil da semana, possa comprar nos estabelecimentos comerciais da cidade. Identificar o conjunto de índices e a família de conjuntos formada.*

Solução: *O conjunto de índices para isto é $\mathcal{J} = \{segunda, terça, quarta, quinta, sexta\}$*

Assim, cada pessoa do grupo que possa comprar nos estabelecimentos comerciais da cidade pertence ao conjunto C_d, $d \in \mathcal{J}$.

A forma como os habitantes da cidade podem comprar durante os dias úteis da semana é dada pela família, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \{C_d\}_{d \in \mathcal{J}} = \{C_{segunda}, C_{terça}, C_{quarta}, C_{quinta}, C_{sexta}\}$

Exemplo 198 *Seja $\mathcal{J} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. A família de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathcal{J}}$, onde $A_i = \{$ morador da cidade XYZ cujo CPF termina em $i\}$ é $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_8, A_9\}$.*

Adicionalmente, se a Prefeitura da cidade XYZ idealizou um sistema rotativo considerando o final de CPF, para realizar compras durante os dias da semana, de tal forma que na segunda e quinta podem comprar as pessoas com final de CPF $0, 1, 2$, na terça e na sexta podem comprar as pessoas *com final de CPF* $3, 4, 5$ *e na quarta e sábado podem comprar as pessoas com final de CPF* $6, 7, 8, 9$ *podemos escrever:*

A pessoa x *pode comprar* 2^a *e* $5^a \iff x \in [A_0 \cup A_1 \cup A_2]$
A pessoa x *pode comprar* 3^a *e* $6^a \iff x \in [A_3 \cup A_4 \cup A_5]$
A pessoa x *pode comprar* 4^a *e sábado* $\iff x \in [A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9]$

5.7.3 Generalização de operações numa família $\mathcal{A}$

Considere a família $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ definimos:

UNIÃO: $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i = \{x/x \in A_i, \quad \text{para algum} \quad i \in \mathcal{J}\}$

INTERSEÇÃO: $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathcal{J}} A_i = \{x/x \in A_i \quad \text{para cada} \quad i \in \mathcal{J}\}$

Dizemos que uma família $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ tem a propriedade de ter interseção vazia dois a dois elementos ou que dois a dois elementos são disjuntos, significa que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i, j \in \mathcal{J}$, com $i \neq j$.

5.7.4 Partição de um conjunto

Definição 31 *Seja* C *um conjunto não vazio. Uma família* $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ *de subconjuntos de* C *é dita uma partição de* C *se a união da família* $\mathcal{A}$ *é* C *e a interseção dois a dois é disjunta.*

Isto é, a família $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ *de subconjuntos de* C *é uma partição de* C *se satisfaz:*

1. $A_i \subset C$, *para todo* $i \in \mathcal{J}$;
2. $C = \displaystyle\bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i$;
3. $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para* $i, j \in \mathcal{J}$, *com* $i \neq j$.

Exemplo 199 *O conjunto vazio possui exatamente uma partição, a saber, a família* $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$.

Exemplo 200 *Dado* $A \neq \emptyset$. *A família* $\mathcal{A} = \{A\}$ *é uma partição de* A, *chamada de partição trivial de* A.

Solução: *De fato, a família* $\mathcal{A} = \{A\}$ *satisfaz trivialmente as três condições da definição acima.*

Exemplo 201 *Para um conjunto qualquer* $A \neq \emptyset$, *seja* $B \subset A$, *com* $B \neq \emptyset$. *A família* $\mathcal{B} = \{B, (A - B)\}$ *é uma partição de* A.

Solução: *De fato,* $B \subset A$, $A - B$
$subsetA$, $A = B \cup (A - B)$ *e* $B \cap (A - B) = \emptyset$.

Exemplo 202 *Para o conjunto* $X = \{1, 2, 3\}$. *As famílias* $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ *e* $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ *e* $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ *constituem partições de* X.

Solução: *De fato, como pode ser visto, a união dos elementos de cada família é* X *e a interseção dois a dois de cada família é disjunta.*

Questão: *São as únicas partições para o conjunto* X*?*

Exemplo 203 *Para $X = \{a, b, c, d, e\}$. A família $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$ é uma partição de X.*

Exemplo 204 *Seja A um conjunto sobre o qual está definida uma relação de equivalência R. As classes de equivalência definidas por R formam uma partição de A.*

Solução: *De fato, para cada $a \in A$, $[a] \neq \emptyset$ uma vez que $a \in [a]$. Cada $[a] \subset A$, $A = \bigcup_{a \in A} [a]$, pois qualquer $x \in A$ pertence a alguma classe $[a]$. Além disso, dadas duas classes $[a]$ e $[b]$, pelos exemplos 182 e 183, as classes são iguais ou são disjuntas.*

5.8 Relação de Ordem ou Ordem Parcial

Definição 32 *Uma relação R é de ordem se R for reflexiva, antissimétrica e transitiva, simultaneamente. E, o conjunto sobre o qual está definida a relação de ordem é dito* parcialmente ordenado.

$$R \text{ é de ordem parcial} \iff \begin{cases} (a) & R \quad \text{é reflexiva;} \\ (b) & R \quad \text{é antissimétrica;} \\ (c) & R \quad \text{é transitiva.} \end{cases}$$

Assim, uma relação R deixa de ser de ordem se, e somente se, pelo menos uma das condições (a), (b), (c) não é satisfeita.

Exemplo 205 *A relação $R = \{(A, B)/A \subset B\}$, definida sobre o conjunto $\mathbb{F}$ de todos os conjuntos é uma relação de ordem.*

Solução: *De fato, para $A \in \mathbb{F}$, $A \subset A$, $A \subset B$ e $B \subset A$ implicam $A = B$. Finalmente, $A \subset B$ e $B \subset C$ implicam $A \subset C$. Isto é, essa relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

Exemplo 206 *Verifique que $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \leq y\}$ é uma relação de ordem.*

Solução: *De fato, R é reflexiva pois para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $x \leq x$. R é antissimétrica, pois se $x \leq y$ e $y \leq x$ temos $x = y$. R é transitiva, já que se $x \leq y$ e $y \leq z$, temos $x \leq z$.*

Exemplo 207 *A relação $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2/a \quad \text{divide} \quad b\}$ é uma relação de ordem?*

Solução: *Sim. Saber que a divide a para qualquer $a \in \mathbb{N}$, torna R reflexiva. Se a divide b e b divide a, temos que $a = b$, isto torna R antissimétrica. Finalmente, se a divide b e b divide c, temos que a divide c, isto torna R transitiva.*

Exemplo 208 *Seja A o conjunto de todas as pessoas que moram em Viçosa. Seja R a relação definida em A, tal que $(a, b) \in R$ se, e somente se a e b nasceram no mesmo dia. R é uma relação de ordem?*

Solução: *Não, já que R não é antissimétrica. Para verificar isto, note que em A, existem duas pessoas que podem ter nascido no mesmo dia e ainda assim elas serem diferentes.*

Exemplo 209 *Seja $A = \{1, 2, 3, 4, \}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (2, 4), (4, 4)\}$. É R uma relação de ordem?*

Solução: *Não, pois R não é transitiva. $(1, 2) \in R$ e $(2, 4) \in R$, mas $(1, 4) \notin R$.*

Exemplo 210 *Seja $R = D(A)$, para $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. R é uma relação de ordem?*

Solução: *Sim. Como $R = D(A)$, temos que $R = R^{-1}$, $R \circ R = R$ e $R \cap R^{-1} = R$. Assim, pelo Teorema 2, R é reflexiva. Aplicando o Teorema 4, temos que R é transitiva. Aplicando o Teorema 5, temos que R é antissimétrica.*

5.8.1 Relação de ordem total

Definição 33 (Elementos comparáveis) *Seja R uma relação de ordem definida sobre o conjunto A. Dizemos que dois elementos $x, y \in A$ são comparáveis, quando $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$.*

Definição 34 *Seja R uma relação definida sobre o conjunto A. Dizemos que R é uma relação de* **ordem total** *se R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, onde quaisquer $x, y \in A$ são comparáveis. Nesse caso, o conjunto A é dito totalmente ordenado.*

Exemplo 211 *Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, são totalmente ordenados pela relação de ordem total $R = \{(x, y) : x \leq y\}$.*

Exemplo 212 *A relação de inclusão não define uma relação de ordem total sobre o conjunto de todos os conjuntos.*

5.9 Exercícios

EXERCÍCIOS

1. Sejam R_1 e R_2 relações de A em B. Verificar ou dar um contra-exemplo para cada uma das seguintes afirmações:
   (a) $R_1 \cup R_2$ é uma relação de A em B
   (b) $R_1 \cap R_2$ é uma relação de A em B
   (c) $R_1 - R_2$ é uma relação de A em B.
   (d) $R_1 \triangle R_2$ é uma relação de A em B
   (e) $Dom(R_1 \triangle R_2) \subset B$
   (f) $Dom(R_1 \triangle R_2) \subset Dom(R_1) - Dom(R_2)$
   (g) $Dom(R_1) - Dom(R_2) \subset Dom(R_1 \triangle R_2)$

2. Para $A = \{x \in \mathbb{Z}_0^+ : x \leq 9\}$, definem-se as relações:
   $R = \{(x, y) \in A^2 : y = x^2\}$, $S = \{(x, y) \in A^2 : y = 2x\}$ e $T = \{(x, y) \in A^2 : x < 4 \,\text{e}\, y > 7\}$.
   Encontrar $n(R) + n(S) + n(T)$.

3. Sobre $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, definem-se: $R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (5, 4), (1, 2), (4, 5), (2, 3)\}$, $R_2 = \{(x, y) \in A^2 : x^2 + y^2 = 25\}$ e $R_3 = \{(x, y) \in A^2 : xy > 0\}$. Determinar quais dessas relações são simétricas.

4. Sobre $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ definem-se as relações $R_1 = \{(x, y) \in Z^2 : y - x = 0\}$, $R_2 = \{(x, y) \in Z^2 : y = 4x\}$, $R_3 = \{(x, y) \in Z^2 : |y - x| = 3\}$, $R_4 = \{(x, y) \in Z^2 : y^2 - x^2 = 0\}$, $R_5 = \{(x, y) \in Z^2 : |x| + y = 1\}$, $R_6 = \{(x, y) \in Z^2 : |x| + |y| = 1\}$. Determinar quais dessas relações são reflexivas, simétricas, transitivas e antissimétricas.

5. Sobre o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ definem-se as relações: $S = \{(a, d), (d, e), (e, a), (e, e)\}$, $R = \{(a, b), (b, c), (d, e), (e, d), (a, c), (d, d), (e, e), (c, c)\}$ e $T = \{(b, a), (a, b)\}$. Determinar quais dessas relações são transitivas. Adicionalmente, para as que não são transitivas, completar com os elementos necessários para torná-la transitiva.

6. Se $R = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x - y \leq 3, \ y - x \geq 4\}$. Determinar quais das afirmações a seguir são verdadeiras:
   (a) R não é reflexiva.
   (b) R é simétrica.
   (c) R é transitiva.
   (d) R é uma relação de equivalência.
   (e) R é antissimétrica
   (f) R não é uma relação de ordem.

7. Sobre $\mathbb{Z}$, definem-se: $R_1 = \{(x, y) : x^2 + y = y^2 + x\}$, $R_2 = \{(x, y) : x \leq |y|\}$ e $R_3 = \{(x, y) : xy = n^2, \text{ para algum}\, n \in \mathbb{Z}\}$. Estabelecer a validade das afirmações a seguir:
   (a) As três relações são reflexivas.
   (b) Somente R_1 e R_2 são simétricas.
   (c) Somente R_1 e R_3 são transitivas.
   (d) Pelo menos uma das relações é de ordem.

8. Sejam R_1 e R_2 relações definidas no conjunto A. Mostrar ou dar um contraexemplo:

   (a) Se R_1 e R_2 são reflexivas, então $(R_1 \cup R_2)$ e $(R_1 \cap R_2)$ são também reflexivas.

   (b) Se $(x, y) \in (R_1 \cup R_1^{-1})$, então $(y, x) \in (R_1^{-1} \cap R_1)$.

   (c) Se R_1 e R_2 são simétricas, então $R_1 \cap R_2$ é simétrica.

   (d) Se R_1 é reflexiva e R_2 é simétrica, então $R_1 \cup R_2$ é antissimétrica.

   (e) Se R_1 e R_2 são transitivas, então $R_1 \cup R_2$ é transitiva.

   (f) Se R_1 e R_2 são transitivas, então $R_1 - R_2$ é transitiva.

   (g) Se R_1 e R_2 são antissimétricas, então $R_1 \cap R_2$ é reflexiva.

   (h) Se R_1 é transitiva e antissimétrica, então R_1 é reflexiva.

   (i) Se $R_1 \cap R_2$ é reflexiva, então R_1 e R_2 são reflexivas.

   (j) Se $R_1 \cup R_2$ é simétrica, então R_1 e R_2 são simétricas.

   (k) Se $(R_1 \cup R_2)^{-1}$ é transitiva, então R_1 ou R_2 é transitiva.

   (l) Se $(R_1 \cup R_2)^{-1}$ é transitiva, então R_1 e R_2 são transitivas.

   (m) Se $(R_1 \cap R_2)^{-1}$ é simétrica, então R_1 e R_2 são simétricas.

9. Seja $T = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (xy)^2 \text{ é par}\}$. Verificar se T é uma relação de equivalência.

10. Sejam $A = \{x : x = 2n,\ n \in \mathbb{N},\ 5 < x < 25\}$ e R uma relação definida em A. Analisar a validade das seguintes afirmações:

    (a) Se $n(R) < 10$, então R é reflexiva.

    (b) Se $n(R) \geq 10$, então R é reflexiva.

    (c) Se R é transitiva, então $n(R) \geq 3$.

11. Sejam $A = \{a, b, c\}$, $W = \{R \subset A^2 : R \text{ é simétrica}\}$ e $V = \{R \subset A^2 : R \text{ é reflexiva}\}$. Das seguintes afirmações, quais são verdadeiras?

    (a) $\{(a, b), (b, a)\} \subset W$.

    (b) $\{(a, a)\} \in (W \cap V)$.

    (c) $\{(a, c), (c, a)\} \in W$.

12. Sejam R_1, R_2 e R_3 relações definidas em $\mathbb{Z}$ tais que "Se $(a, b) \in R_1$ e $(c, d) \in R_2$ então $(a - c, b - d) \in R_3$". Mostrar ou dar um contraexemplo de que se R_1 e R_2 são relações de equivalência, então R_3 é uma relação de equivalência.

13. Encontrar o domínio, imagem e esboçar o gráfico das relações dadas a seguir:

    (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : -2 \leq x < 5,\ -3 < y < 6\}$

    (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y > \sqrt{9 - x^2},\ -6 \leq x \leq 6\}$

    (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 > 0,\ y - x - 2 < 0\}$

(d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)(x+2y) > 0\}$

(e) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x-y)(x+5y) < 0\}$

(f) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x\}$

(g) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 6xy + 5y \geq 0\}$

(h) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ |y| \leq x^2\}$

(i) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |x| \leq |y|\}$

(j) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y^2,\ |x| \geq |y|\}$

(k) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| = |y-1|\}$

(l) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 10x \geq 24,\ x + y - 6 < 0\}$

(m) De R^{-1} sabendo que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - 5y + 11 = 0,\ -4 < x \leq 1\}$

(n) De R^{-1} sabendo que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 2\}$

(o) De R^{-1} sabendo que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y - 1,\ y \leq x + 3,\ 1 \leq x \leq 3\}$

(p) De $R_1 \cap R_2$ sabendo que $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 8\}$.Adicionalmente encontrar a área de $R_1 \cap R_2$.

(q) De $R_1^c \cap R_2$ sabendo que $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 9\}$

14. Verificar se a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \leq y\}$ é uma relação de ordem parcial.

15. Sobre a família de conjuntos $\mathfrak{F}$ define-se $R = \{(A,B) \in \mathfrak{F}^2 : A \subset B\}$. R é uma relação de ordem parcial?

16. Considerando a seguinte definição. Pede-se:

Definição 35 *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que:*
(i) limitado inferiormente se existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \leq x$, para todo $x \in A$. E, x_0 é dito cota ou limitante inferior.
(ii) limitado superiormente se existe um $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq x_1$, para todo $x \in A$. E, x_1 é dito cota ou limitante superior
(iii) limitado se é limitado superior e inferiormente.

(a) Verificar se o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

(b) Verificar se o conjunto $A = \{x : x = \dfrac{n+2}{n+3},\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

(c) Mostrar que o conjunto $A = \{x : x = \dfrac{3+2n}{3-2n},\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

(d) Mostrar que o conjunto $A = \{x : x - 4x - 12 \leq 0\}$ é limitado.

(e) Verificar o conjunto $A = \{x^2 - 4x - 12 : -5 < x \leq 3\}$ é limitado.

17. A menor das cotas superiores de um conjunto limitado superiormente é o *Supremo* de A, denotado por $\sup(A)$. E, a maior de todas as cotas inferiores é o *Ínfimo* de A, denotado por $\inf(A)$.

    Determinar, caso seja possível, o ínfimo e o supremo dos seguintes conjuntos:
    $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x : x = \dfrac{n+2}{n+3},\ n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x : x = \dfrac{3+2n}{3-2n},\ n \in \mathbb{N}\}$,
    $D = \{x : x - 4x - 12 \leq 0\}$, $E = \{x^2 - 4x - 12 : -5 < x \leq 3\}$

18. Dizemos que $x_0 \in A$ é o máximo de A se $x \leq x_0$, para todo $x \in A$. Denotamos por $\max(A) = x_0$. Dizemos que x_1 é o mínimo ou elemento mínimo de A se $x_1 \leq x$ para todo $x \in A$. Denotamos por $\min(A) = x_1$.

    (a) Determinar, caso seja possível, o $\max(A)$ e o $\min(A)$, se $A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| \leq 2\}$.

    (b) Encontrar, caso seja possível, o $\max(A)$ e o $\min(A)$, se $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 12 \leq 0\}$.

    (c) É verdade que sempre $\sup(A) = \max(A)$? E no caso do ínfimo e o mínimo?

    (d) Sejam $A \subset B$ tais que $\sup(A) = a$ e $\sup(B) = b$. Dar um argumento válido ou um contraexemplo para a seguintes desigualdades $\sup(A) \leq \sup(B)$; $\inf(A) \geq \inf(B)$.

    (e) Sejam A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ e $\sup(A) = a$, $\sup(B) = b$. Dar um argumento válido ou um contraexemplo para a seguinte igualdade $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

    (f) Sejam A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ e $\inf(A) = c$, $\inf(B) = d$. Dar um argumento válido ou um contraexemplo para a seguinte igualdade $\inf(A \cap B) \geq \sup\{\inf(A), \inf(B)\}$.

19. Mostre que se $A \subset \mathbb{N}$ é limitado inferiormente, então A possuí elemento mínimo.

20. Mostre que se $A \subset \mathbb{N}$ é limitado superiormente, então A possuí elemento máximo.

Capítulo 6

TEORIA ELEMENTAR DE FUNÇÕES

6.1 Introdução

Neste capítulo, faremos um estudo geral e elementar de funções, sem considerar a natureza especifica dos objetos envolvidos, com a finalidade de compreender os conceitos básicos relativos a este tema.

Intuitivamente, entendemos uma função de um conjunto A no conjunto B, como a regra ou propriedade que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.

Nossa abordagem aqui, será considerando a função como um subconjunto de um produto cartesiano de dois conjuntos.

6.2 Função de A em B

Definição 36 *Sejam A e B conjuntos não vazios. Dizemos que f é uma função de A em B se, e somente se, f satisfaz:*

(a) $f \subset A \times B$;

(b) Se $(x, y) \in f$ *e* $(x, z) \in f$, *então* $y = z$.

OBSERVAÇÕES:

1. Quando $(x, y) \in f$, dizemos que y é a imagem ou valor de x por f, escrevemos $y = f(x)$;
2. Chamamos x de variável independente e y de variável dependente;
3. A notação usual que usamos é $f : A \longrightarrow B|\, y = f(x)$ ou $f : \underset{x}{A} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{f(x)}{B}$ ou simplesmente f, quando fica claro os conjuntos A e B em consideração;
4. Não confundir f com $f(x)$. A primeira é a função e a segunda é a imagem x por f.

Exemplo 213 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4x$. Determinar $f(3x - 2)$.*

Solução: *Para resolver este exercício note que em $f(x) = x^2 - 4x$, o argumento da função é x. Assim, para determinar $f(3x - 2)$ deve ficar claro que o argumento agora é $3x - 2$. Desse modo, $f(3x - 2) = (3x - 2)^2 - 4(3x - 2) = 9x^2 - 24x + 12$.*

Exemplo 214 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - 4/x$. Determinar $f(x^2 + 1)$.*

Solução: *Para resolver este exercício basta substituir o argumento por $x^2 + 1$.*

Desse modo, $f(x^2 + 1) = (x + 1) - \dfrac{4}{x^2 + 1}$

Exemplo 215 *Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} |\, f(x + 1) = x^2$ e, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} |\, g(x - 1) = 2x - 1$. Determinar $f(x)$ e $g(x)$.*

Solução: *$f(x) = (x - 1)^2$ e $g(x) = 2x + 1$.*

6.2.1 Domínio e Imagem de uma função

Definição 37 (Domínio de uma função) *O domínio de uma função $f : A \longrightarrow B$ é o conjunto de todas as primeiras componentes $x \in A$ dos pares ordenados $(x, y) \in f$. Isto é,*

$$Dom(f) = \{x \in A / \exists y \in B, \quad (x, y) \in f\} \subseteq A$$

Definição 38 (Imagem de uma função) *A imagem de uma função $f : A \longrightarrow B$ é o conjunto de todas as segundas componentes $y \in B$ dos pares ordenados $(x, y) \in f$. Isto é,*

$$Im(f) = \{y \in B / \exists x \in A, \quad (x, y) \in f\} \subseteq B$$

6.2.2 Gráfico de uma função

Definição 39 *Dada uma função $f : A \longrightarrow B$. O gráfico de f, é o conjunto $Graf(f)$ dado por*

$$Graf(f) = \{(x, y) \in A \times B / x \in A, y \in B\}$$

A partir do conhecimento de um subconjunto de $A \times B$, podemos estabelecer se é uma função ou não. Já sabemos que a representação gráfica de $A \times B$ é colocando A na horizontal e B na vertical. Desse modo, um subconjunto de $A \times B$ será uma função se toda reta paralela a B encontrar dito subconjunto em no máximo um ponto.

6.2.3 Aplicações de A em B

Definição 40 *Sejam A e B conjuntos não vazios. Dizemos que f é uma aplicação de A em B se, e somente se, f satisfaz:*

(a) $f \subset A \times B$;

(b) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$;

(c) Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, então $y = z$.

Exemplo 216 *Seja $A \neq \emptyset$. Existe aplicação $f : A \longrightarrow \emptyset$?*

Solução: *Vejamos se é possível verificar as condições da definição de aplicação. A condição (b) não é satisfeita pois para cada $x \in A$, deve haver $y \in \emptyset$ tal que $f(x) = y$. Como $\emptyset$ não possui elementos, não é possível associar imagem para $x \in A$. Portanto, não é possível definir $f : A \longrightarrow \emptyset$.*

Exemplo 217 *Seja $B \neq \emptyset$. Existe aplicação $f : \emptyset \longrightarrow B$?*

Solução: *Vejamos se é possível verificar as condições da definição de aplicação. Como $B \neq \emptyset$, existe pelo menos um $b \in B$. Assim, podemos definir $f(x) = b$, para todo $x \in \emptyset$. Mesmo que $\emptyset$ não tenha elementos, essa forma de associar fica bem definida. Portanto, sim é possível definir $f : A \longrightarrow \emptyset$.*

Exemplo 218 *Existe aplicação $f : \emptyset \longrightarrow \emptyset$?*

Solução: *Sim. Como $\emptyset$ não tem elementos escrever $f(x) = y$, para $y \notin A$, qualquer que seja A, não invalida a definição de aplicação.*

6.2.4 Imagem direta de um conjunto

Definição 41 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função e $A \subset X$. A imagem de A por f é o conjunto $f(A) = \{f(x)/x \in A\} \subset Y$.*

Assim,

$$y \in f(A) \text{ se, e somente se, existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)$$

PROPRIEDADES Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma função e $A, B \subset X$, então:

1. $f(\emptyset) = \emptyset$;
2. Se $A \subset B$, então $f(A) \subset f(B)$;
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
4. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
5. $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$.

Prova: Vamos mostrar estas propriedades.

1. Já sabemos que $\emptyset \subset f(\emptyset)$. Resta mostrar que $f(\emptyset) \subset \emptyset$.

   Suponha que $f(\emptyset) \not\subset \emptyset$. Seja $y \in f(\emptyset)$, com $y \notin \emptyset$. Logo, existe $x \in \emptyset$ tal que $f(x) = y$, mas tal x não existe. Assim, y não existe. De onde, $f(\emptyset) \subset \emptyset$.

2. Queremos mostrar que $f(A) \subset f(B)$.

   Seja $y \in f(A)$, então existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Como $A \subset B$, $x \in B$ e $y = f(x)$. Logo, $y \in f(B)$.

3. $y \in f(A \cup B) \iff \exists x \in (A \cup B)$, tal que $f(x) = y$.
$\iff (\exists x \in A \quad ou \quad \exists x \in B)$, tal que $f(x) = y$
$\iff (\exists x \in A \quad \text{tal que} \quad f(x) = y) \quad ou \quad (\exists x \in B \quad \text{tal que} \quad f(x) = y)$
$\iff y \in (f(A) \cup f(B))$

4. Seja $y \in f(A \cap B)$, então existe $x \in A \cap B$ tal que $y = f(x)$. Logo, ($x \in A$ e $y = f(x)$) e ($x \in B$ e $y = f(x)$). De onde, $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$. Portanto, $y \in f(A) \cap f(B)$.

5. Seja $y \in f(A) - f(B)$, então $y \in f(A)$ e $y \notin f(B)$. Segue, daqui, que existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$ e para qualquer $x \in B$, $y \neq f(x)$. Logo, ($x \in A$ e $y = f(x)$) e ($x \notin B$ e $y = f(x)$). de onde, $x \in (A - B)$ e $y = f(x)$. Portanto, $y \in f(A - B)$.

■

Exemplo 219 *Para a função f, dada por $f(x) = x^2 - 1$. Determine a imagem de $A = (-3, 0) \cup [1, 3]$.*
Solução: *Aplicando a propriedade 3, vamos determinar $f((-3, 0))$ e $f([1, 3])$.*
Para $-3 < x < 0$ temos $0 < x^2 < 9$, logo $-1 < x^2 - 1 < 8$. Assim, $f((-3, 0)) = (-1, 8)$.
Para $1 \leq x \leq 3$ temos $1 \leq x^2 \leq 9$, logo $0 \leq x^2 - 1 \leq 8$. Assim, $f([1, 3]) = [0, 8]$.
Portanto, $f(A) = f((-3, 0)) \cup f([1, 3]) = (-1, 8) \cup [0, 8] = (-1, 8]$.

Exemplo 220 *Para f dada por $f(x) = x^2 - 1$. Determinar $f(A \cap B)$, onde $A = (-3, 0) \cup [1, 3]$ e $B = [-1, 2]$.*
Solução: *Note que $A \cap B = [-1, 0) \cup [1, 2]$. Assim,*
$f(A \cap B) = f([-1, 0)) \cup f([1, 2]) = (-1, 0] \cup [0, 3] = (-1, 3]$.

Definição 42 (Restrição de uma função) *Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$ e $A \subset X$. A restrição de f ao conjunto A é a função $f|_A : X \longrightarrow Y$ ou simplesmente $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$*

Assim, se $f : X \longrightarrow Y$ está dada por $y = f(x)$, a restrição $f|_A : X \longrightarrow Y$ é definida por $y = f(x)$, para todo $x \in A$.

6.2.5 Imagem inversa de um conjunto

Definição 43 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função e $B \subset Y$. A imagem inversa de B por f é o conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}$*

Assim,

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \text{ se, e somente se, } f(x) \in B}$$

PROPRIEDADES Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma função e $C, D \subset Y$, então:

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;

2. Se $C \cap Im(f) = \emptyset$, então $f^{-1}(C) = \emptyset$;

3. Se $C \subset D$, então $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$;

4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

6. $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$.

Prova: Vamos mostrar estas propriedades.

1. Suponha que $f^{-1}(\emptyset) \not\subset \emptyset$. Seja $x \in f^{-1}(\emptyset)$ com $x \notin \emptyset$. Então, $f(x) \in \emptyset$.Isto é absurdo, pois $\emptyset$ não possui elementos. Assim, $f^{-1}(\emptyset) \subset \emptyset$. E, portanto, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

2. Suponha que $f^{-1}(C) \not\subset \emptyset$. Então, existe $x \in f^{-1}(C)$ tal que $x \notin \emptyset$. De $x \in f^{-1}(C)$, temos $f(x) \in C$. Mas, por definição de imagem, $f(x) \in Im(f)$. Logo, $C \cap Im(f) \neq \emptyset$. Isto prova a contra positiva e portanto o enunciado.

3. Seja $x \in f(C)$, então $f(x) \in C$. Logo, como $C \subset D$, $f(x) \in D$ e, daqui $x \in f^{-1}(D)$.

4. $$x \in f^{-1}(C \cup D) \Longleftrightarrow f(x) \in C \cup D \Longleftrightarrow [f(x) \in C \quad ou \quad f(x) \in D]$$
$$\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \quad ou \quad f^{-1}(D) \Longleftrightarrow x \in [f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)]$$

5. $$x \in f^{-1}(C \cap D) \Longleftrightarrow f(x) \in C \cap D \Longleftrightarrow [f(x) \in C \quad e \quad f(x) \in D]$$
$$\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \quad e \quad x \in f^{-1}(D) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

6. $$x \in f^{-1}(C - D) \Longleftrightarrow f(x) \in (C - D) \Longleftrightarrow f(x) \in C \quad e \quad f(x) \notin D$$
$$\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \quad e \quad x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow x \in [f^{-1}(C) - f^{-1}(D)]$$

■

Exemplo 221 *Para f dada por $f(x) = x^2 - 1$. Determinar a imagem inversa de $C = [0, 4]$*

Solução: *Procuramos os $x \in Dom(f)$ tais que $f(x) \in C$.*

$$f(x) \in C \Longleftrightarrow (x^2 - 1) \in [0, 4] \Longleftrightarrow 0 \leq x^2 - 1 \leq 4 \Longleftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 5 \Longleftrightarrow 1 \leq |x| \leq \sqrt{5}$$

$$\Longleftrightarrow |x| \geq 1 \quad e \quad |x| \leq \sqrt{5} \Longleftrightarrow (x \geq 1 \quad ou \quad x \leq -1) \quad e \quad (-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5})$$

$$\Longleftrightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq -1 \quad ou \quad 1 \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$\Longleftrightarrow x \in [-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$$

Portanto, $f^{-1}(C) = [-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$.

Exemplo 222 *Para a função f dada por $f(x) = x^3$. Determinar o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 8\}$*

Solução: *Note que $D = f^{-1}(A \cap B)$, onde $A = (1, +\infty)$ e $B = (-\infty, 8)$. Logo, $A \cap B = (1, 8)$. Um elemento, $x \in D$ se, somente se, $f(x) \in A \cap B$. Isto é, $1 < x^3 < 8$. De onde, $1 < x < 2$. Assim, $D = (1, 2)$.*

6.3 Tipos de funções

6.3.1 Função Injetora

Definição 44 *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita injetiva ou injetora se cada elemento $y \in Y$ é imagem de no máximo um elemento $x \in X$.*

Teorema 10 *Seja função $f : X \longrightarrow Y$ e $x_1, x_2 \in X$ quaisquer. A função f é injetiva se, e somente se, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

$$\boxed{f \text{ é injetiva} \iff \forall x_1, x_2 \in X; x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Equivalentemente,

$$\boxed{f \text{ é injetiva} \iff \forall x_1, x_2 \in X; f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2}$$

Exemplo 223 *Estabelecer se as seguintes funções definem funções injetivas:*
(a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 4)\}$ (b) $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 4), (5, 4)\}$.

Solução:
(a) Para a função f, temos $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Observamos que cada elemento de Y é imagem de um único elemento de X. Portanto, f é injetiva.
(b) Para a função g, $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{1, 3, 4\}$. Além disso, o elemento $4 \in Y$ é imagem de mais de um elemento de X. Portanto, g não é injetora.

Exemplo 224 *As funções f e g dadas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^3 - 1$, respectivamente, são injetivas.*

Solução: *Vejamos cada função.*

Para f: Sejam x_1 e x_2 no domínio de f, de tal forma que $f(x_1) = f(x_2)$. Então, $2x_1+3 = 2x_2+3$, de onde $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetora.

Para g: Sejam x_1 e x_2 no domínio de g, tal que $g(x_1) = g(x_2)$. Então, $x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$. Logo, $x_1^3 - x_2^3 = 0$. Daqui, $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$. Segue daqui que, $x_1 = x_2$ ou $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$. Note que $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3x_2^2}{4} > 0$ sempre. Assim, $x_1 = x_2$ é a única solução acima. Portanto, g é injetiva.

Exemplo 225 *A função $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$ é injetiva?*

Solução: *Sejam $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então, $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$. Logo, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. De onde, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. Como $x_1 \leq 0$ e $x_2 \leq 0$, a segunda igualdade, $x_1 = -x_2$ só pode ocorrer se $x_1 = x_2 = 0$. Assim, $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetora.*

Exemplo 226 *Para a função f dada por $f(x) = 2+2x-x^2$, encontrar um conjunto adequado onde f seja injetiva.*

Solução: *Essencialmente este exercício nos pede para restringir a função f a um conjunto adequado onde esta restrição se torne uma função injetora.*

Note que $f(x) = 2 + 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 3$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b)$, então $-(a-1)^2+3 = -(b-1)^2+3$. Logo, $(a-1)^2 = (b-1)^2$. De onde, $|a-1| = |b-1|$. Assim, para termos $a = b$, devemos de ter $(a-1 \geq 0$ e $b-1 \geq 0)$ ou $(a-1 \leq 0$ e $b-1 \leq 0)$. Isto é, $(a \geq 1$ e $b \geq 1)$ ou $(a \leq 1$ e $b \leq 1)$.

Daqui, temos duas escolhas a fazer, $A = [1, +\infty)$ ou $B = (-\infty, 1]$.

Claramente, $f|_A$ e $f|_B$ são injetivas.

Exemplo 227 *A função f dada por $f(x) = \exp(x+1)$ é injetiva?*

Solução: *Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$. Sejam, $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $f(a) = f(b)$, então $\exp(a+1) = \exp(b+1)$. Logo, $\exp(a-b) = 1$. Para isto ocorrer, $a-b = 0$. De onde, $a = b$. Portanto, a função dada é injetora.*

6.3.2 Função Sobrejetora

Definição 45 *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita sobrejetiva ou sobrejetora se todo elemento $y \in Y$ é imagem de pelo menos um elemento $x \in X$.*

Teorema 11 *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva se, e somente se, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$.*

$$\boxed{f \text{ é sobrejetiva} \Longleftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X; y = f(x)}$$

Equivalentemente,

$$\boxed{f \text{ é sobrejetiva} \Longleftrightarrow f(X) = Y}$$

Exemplo 228 *Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5,7\}$ e as funções $f = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,5)\}$, $g = \{(1,2),(2,1),(3,5),(4,7)\}$. Determinar se essas funções são sobrejetivas.*

Solução: *Para a função f, note que para $7 \in B$ não há $x \in A$ tal que $(x, 7) \in f$. Portanto, f não é sobrejetora.*

Para a função g, para cada $y \in B$, existe um $x \in A$ tal que $(x, y) \in g$. Portanto, g é sobrejetora.

Exemplo 229 *As funções f e g dadas por $f(x) = 2x+3$ e $g(x) = x^3 - 1$, respectivamente, são sobrejetivas.*

Solução: *Vamos analisar cada função:*

Para f: Note que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Assim, para cada $y \in \mathbb{R}$, temos que existe $x = \dfrac{y-3}{2}$, tal que $f(x) = 2(\dfrac{y-3}{2}) + 3 = y$. Portanto, f é sobrejetora.

Para g: Note que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Assim, para cada* $y \in \mathbb{R}$, *temos que existe* $x = \sqrt[3]{y+1}$, *tal que* $g(x) = (\sqrt[3]{y+1})^3 - 1 = y$. *Portanto, g é sobrejetora.*

OBS.: Para descobrir o x para as funções f e g, resolvemos para x a equação $f(x) = y$.

Exemplo 230 *A função* $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2 - 1$ *é sobrejetiva?*
Solução: *Note que se* $x \leq 0$, *então* $x^2 \geq 0$ *e,* $x^2 - 1 \geq 1$. *De onde,* $f(x) \geq 1$. *Ou seja,* $Im(f) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R}$. *Portanto, f não é sobrejetora.*

Exemplo 231 *A função f dada por* $f(x) = \exp(x+1)$ *é sobrejetiva?*
Solução: *Note que neste caso* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Como para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tem-se* $\exp(x) > 0$, *tanto mais* $\exp(x+1) > 0$. *Assim,* $Im(f) = (0, +\infty) \neq \mathbb{R}$. *Portanto, f não é sobrejetora.*

No entanto, se consideramos $f : \mathbb{R} \longrightarrow f(\mathbb{R})$ *obtemos uma função sobrejetora.*

6.3.3 Função Bijetora

Definição 46 *Uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *é dita bijetiva ou bijetora se f é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.*

Exemplo 232 *Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ *e as funções de A em B,*
$f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$, $g = \{(1,4), (2,2), (3,4), (4,6), (5,8)\}$ *e*
$h = \{(1,6), (2,2), (3,4), (4,8), (8,6)\}$. *Determinar se essas funções são bijetivas.*
Solução: *Vejamos cada uma das funções:*
Para f: Note que para cada $y \in B$, *existe um único* $x \in A$, *tal que* $(x, y) \in f$. *Assim, f é injetora. Além disso, claramente* $Im(f) = B$ *e, f é sobrejetiva. Portanto, f é bijetora.*

Para g: Note para $y = 4 \in B$, *existem* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 3$ *em A, tais que* $f(x_1) = f(x_2) = 4$. *Assim, f não é injetora. Portanto, f não é bijetora.*

Para h: Note que para $y = 6$, *existem* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 8$ *em A, tais que* $f(x_1) = f(x_2) = 6$. *Assim, f não é injetora. Portanto, f não é bijetora.*

Exemplo 233 *As funções f e g dadas por* $f(x) = 2x + 3$ *e* $g(x) = x^3 - 1$, *respectivamente, são bijetivas.*
Solução: *Como já foi verificado em exemplos anteriores, ambas as funções são injetivas e sobrejetivas. Portanto, ambas são bijetoras.*

Exemplo 234 *A função* $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2 - 1$ *é bijetiva?*
Solução: *Como foi visto em exemplo anterior esta função não é sobrejetora. Portanto, f não é bijetora.*

Exemplo 235 *Para a função f dada por $f(x) = 2 + 2x - x^2$, f é bijetiva? Caso não, qual seria o domínio adequado e o contradomínio adequado para f ser bijetiva?*

Solução: *Note que de forma geral, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é injetiva nem sobrejetiva.*

Em exemplo anterior vimos que para $A = [1, +\infty)$ ou $B = (-\infty, 1]$, $f|_A$ e $f|_B$ é injetiva. Como, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$, claramente $f(x) \leq 3$, de onde $Im(f) = (-\infty, 3]$.

Assim, para ganhar que f seja bijetora, o domínio deve ser restrito a $A = [1, +\infty)$ e o contradomínio deve ser $(-\infty, 3]$.

Exemplo 236 *Mostre que a função f dada por $f(x) = \exp(x+1)$ é bijetiva.*

Solução: *Como foi visto em exemplo anterior, considerando $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, esta função é injetora e sobrejetora. Portanto, f é bijetora.*

6.4 Composta de funções

Definição 47 *Dadas as funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$, tais que $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$. A composição de f com g, denotada por $g \circ f$, é a função cujo domínio é um subconjunto do domínio de f e cujo contradomínio é o contradomínio de g. A regra de correspondência é dada por $[g \circ f](x) = g(f(x))$.*

$$\boxed{Dom(g \circ f) = \{x \in X; x \in Dom(f) \quad e \quad f(x) \in Dom(g)\} \subseteq Dom(f)}$$

$$\boxed{Im(g \circ f) = \{z \in Z; \exists x \in Dom(f) \quad \text{tal que} \quad f(x) \in Dom(g) \quad e \quad z = g(f(x))\} \subseteq Im(g)}$$

É importante observar que a composta $g \circ f$ existe, somente se, $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$.

Exemplo 237 *Determinar $f \circ g$ e $g \circ f$, caso seja possível, se $f = \{(-2, 0), (-1, 4), (3, 1), (5, 2)\}$ e $g = \{(-2, -1), (0, 3), (1, 4), (2, 0), (4, 5)\}$.*

Solução: *A partir dos elementos das funções dadas temos $Dom(f) = \{-2, -1, 3, 5\}$, $Im(f) = \{0, 1, 2, 4\}$, $Dom(g) = \{-2, 0, 1, 2, 4\}$ e $Im(g) = \{-1, 0, 3, 4, 5\}$.*

Como $Im(f) \cap Dom(g) = \{0, 1, 2, 4\}$, $g \circ f$ existe e, $g \circ f = \{(-2, 3), (-1, 5), (3, 4), (5, 0)\}$.

Como $Im(g) \cap Dom(f) = \{-1, 3, 5\}$, $f \circ g$ existe e $f \circ g = \{(-2, 4), (0, 1), (4, 2)\}$.

Exemplo 238 *Encontrar as funções f_1 e f_2 tais que $h = f_1 \circ g$ e $h = g \circ f_2$, caso seja possível, se as funções g e h são dadas por: $g = \{(3, 6), (5, 9), (8, 4), (7, 6), (10, 5)\}$ e $h = \{(3, 9), (5, 10), (7, 8), (8, 9)\}$.*

Solução: *Notamos que $Dom(h) = \{3, 5, 7, 8\}$, $Dom(g) = \{3, 5, 7, 8, 10\}$. Assim,* *Para $h = f_1 \circ g$:*

Claramente, $Dom(h) = Dom(f_1 \circ g)$ e para existir a composta $Im(g) \cap Dom(f_1) \neq \emptyset$. Logo, os únicos elementos de g a considerar são $\{(3,6),(5,9),(8,4),(7,6)\}$. Com isto,

$(3,6) \in g$ *e* $(6,9) \in f_1$, *para ter* $(3,9) \in h$.

$(5,9) \in g$ *e* $(9,10) \in f_1$, *para ter* $(5,10) \in h$.

$(7,6) \in g$ *e* $(6,8) \in f_1$, *para ter* $(7,8) \in h$.

$(8,4) \in g$ *e* $(4,9) \in f_1$, *para ter* $(8,9) \in h$.

Daqui, notamos que para $x = 6$ existem duas imagens por f_1, o que faz que f_1 não seja função. Portanto, não existe f_1 satisfazendo $h = f_1 \circ g$.

Para $h = g \circ f_2$:

Claramente, $Im(h) \subset Im(g)$ e para existir a composta $Im(f_2) \cap Dom(g) \neq \emptyset$. Mas, note $10 \in Im(h)$ e $10 \notin Im(g)$. Portanto, não é possível definir f_2 que realize a composta $h = g \circ f_2$.

Exemplo 239 *Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}|\, f(x+1) = x^2$ para $x \in (-1,7]$ e, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}|\, g(x-1) = 2x - 1$ para $x \in [1,+\infty)$. Determinar, caso seja possível, $f \circ g$ e $g \circ f$.*

Solução: *A partir do enunciado temos que $f(x) = (x-1)^2$ e $g(x) = 2x+1$.*

Além disso, como $-1 < x \leq 7$, temos $0 < (x-1)^2 \leq 36$, de onde $Im(f) = (0,36]$. De forma similar, para $x \geq 1$, temos $2x+1 \geq 3$, de onde $Im(g) = [3,+\infty)$.

Para $f \circ g$:

Como $Im(g) = [3,+\infty)$, $Dom(f) = (-1,7]$, $Dom(g) \cap Im(f) = [3,7] \neq \emptyset$, a composta fica bem definida. Logo,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x)^2 = 4x^2$.

Para $g \circ f$:

Como $Im(f) = (0,36]$, $Dom(g) = [1,+\infty)$, $Im(f) \cap Dom(g) = [1,36] \neq \emptyset$, a composta fica bem definida e $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((x-1)^2) = 2(x-1)^2 + 1$.

PROPRIEDADES: Sejam f, g, h funções para as quais a composição é definida. Valem as seguintes propriedades:

1. Em geral, $f \circ g \neq g \circ f$;
2. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
3. Se $A \subset Dom(f)$, então $(g \circ f)(A) = g(f(A))$;
4. Se $D \subset Im(g)$, então $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))$.

6.5 Função Inversa

Aqui trataremos sobre a inversa de uma função. Para esta parte, quando mencionarmos função, entenderemos como sendo uma aplicação, isto é, se $f : X \longrightarrow Y$, entendemos que $Dom(f) = X$.

Definição 48 (Função Inversa à esquerda) *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que a função $g : Y \longrightarrow X$ é inversa á esquerda de f se $(g \circ f)(x) = x$,para todo $x \in X$.*

$$\boxed{g \text{ é inversa à esquerda para } f \iff (g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in X}$$

Teorema 12 *Uma função f possui inversa à esquerda se, e somente se, f é injetiva.*

Prova: Consideremos $f : X \longrightarrow Y$. Vamos mostrar a suficiência ou que a condição é suficiente.

$(\Longrightarrow)$ Seja g, a inversa à esquerda de f, então por definição $(g \circ f)(x) = x$, para todo $x \in X$. E, sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Como g é função, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ e daqui, por definição de inversa a esquerda, $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetiva.

Agora, vamos mostrar a necessidade ou que a condição é necessária.

$(\Longleftarrow)$ Note que $Y = f(X) \cup (Y - f(X))$ com $f(X) \cap (Y - f(X)) = \emptyset$. Assim, para qualquer $y \in Y$ temos $y \in f(X)$ ou $y \in (Y - f(X))$.

Queremos definir uma função $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$.

Se f é injetiva, para cada $y \in f(X)$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Assim, para todo $x \in X$, definimos $g : f(X) \longrightarrow X$ por $g(y) = x$ e neste caso, $g(f(x)) = g(y) = x$.

Para completar a definição de g, para $y \in (Y - f(X))$, escolhemos um a fixo em X e definimos $g(y) = a$.

Desse modo, fica bem definida a função $g : Y \longrightarrow X$, dada por

$$g(y) = \begin{cases} x, & y \in f(X); \\ a, & y \in Y - f(X) \end{cases}$$

Pois, para todo $y \in Y$, $g(y)$ é único.

Finalmente, $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$. Portanto, g é inversa à esquerda para f. ■

Exemplo 240 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ e $f = \{(1, a), (2, d), (3, b), (4, c)\}$. Determinar a inversa à esquerda de f, caso seja possível.*

Solução: *Notamos que f é injetiva, então pelo Teorema 3, f possui inversa à esquerda. De acordo com a prova do Teorema 3, $g(a) = 1, g(b) = 3, g(c) = 4, g(d) = 2$ e para $g(e)$ escolhemos qualquer elemento de A como sua imagem, colocamos $g(e) = 2$. Desse modo, $g = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 2), (e, 2)\}$.* ▮

Como pode ser verificado diretamente, $g(f(x)) = x$, para todo $x \in A$. Assim, a função g é a inversa de f procurada.

Definição 49 (Função Inversa à direita) *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que a função $g : Y \longrightarrow X$ é inversa à direita para f se $(f \circ g)(y) = y$, para todo $y \in Y$.*

$$\boxed{g \text{ é inversa à direita para } f \iff (f \circ g)(y) = y, \quad \forall y \in Y}$$

Teorema 13 *Uma função f possui inversa à direita se, e somente se, f é sobrejetiva.*

Prova: Seja $f : X \longrightarrow Y$.
$(\Longrightarrow)$ Seja $g : Y \longrightarrow X$ a inversa de f à direita. Definimos g por $g(y) = x$. Esta definição é dada de forma única, já que segundo o Teorema 3, g é injetiva.

Mostremos que f é sobrejetiva. De fato, seja $y \in Y$, e como $g(y) = x$, temos $f(g(y)) = f(x)$ e daqui $f(x) = y$. Portanto, f é sobrejetiva.

$(\Longleftarrow)$ Como f é sobrejetiva, para cada $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Logo, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Assim, para cada $y \in Y$ definimos $g : Y \longrightarrow X$ pondo $g(y) = x$. Segue daqui que $f(g(y)) = f(x) = y$. Portanto, g é inversa à direita de f. ■

Definição 50 (Função Inversa) *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é inversível ou invertível se existe uma função $g : Y \longrightarrow X$ tal que :*

(a) $(f \circ g)(y) = y, \quad \forall y \in Y$ *e* *(b)* $(g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in X.$

Nesse caso, denotamos a inversa de f por f^{-1}.

Teorema 14 *Se f possui inversa, esta inversa é única.*

Prova: Sejam g e h inversas de f. Logo, para todo $y \in Y$, tem-se $h(y) = h[(f \circ g)(y)] = [h \circ f](g(y)) = g(y)$. Portanto, $f = g$. ■

Teorema 15 *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ admite inversa se, e somente se, f é uma bijeção.*

Prova:
$(\Longrightarrow)$ Se f admite inversa g. Pela definição de inversa, g é inversa à esquerda e à direita de f. Daqui, pelos Teoremas 3 e 4, f é injetiva e sobrejetiva. Portanto, f é bijetiva.

$(\Longleftarrow)$ Como f é injetiva, existe g, tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$. Também, como f é sobrejetiva, existe h, tal que $f(h(y)) = y$, para todo $y \in Y$. Assim, para todo $y \in Y$, $g[f(h(y))] = g(y)$. Logo, $h(y) = g(y)$. Portanto, g é inversa à direita e à esquerda de f. ■

PROPRIEDADES: Sejam $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ e $h : Z \longleftarrow W$ bijeções. Valem as seguintes propriedades:

(a) $f^{-1} \circ f = I_X$, onde $I_X : X \longrightarrow X$, $I_X(x) = x, \forall x \in X$;

(b) $f \circ f^{-1} = I_Y$, onde $I_Y : Y \longrightarrow Y$, $I_Y(y) = y, \forall y \in Y$;

(c) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

(d) Se $h = g \circ f$, então $f = g^{-1} \circ h$ e $g = h \circ f^{-1}$;

(e) $(h \circ g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$.

6.6 Exercícios

EXERCÍCIOS

1. Verificar se a função f dada por $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & -2 \leq x < 1 \\ 4x - x^2 - 3, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$ é injetiva.

2. Verificar se as funções f e g dadas por $f(x) = x^4 - 16$ e $g(x) = |x^3 - 1|$, respectivamente, são injetivas.

Capítulo 7

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

7.1 Introdução

Neste capítulo, centramos nossa atenção em funções $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$. Não pretendemos abordar de forma exaustiva este assunto, até porque existem excelentes livros de pré-cálculo que fazem isto. Apresentaremos uma visão panorâmica. Recomendamos ao leitor interessado procurar livros de pré-cálculo e de cálculo para aprofundar estes assuntos.

7.2 Funções em $\mathbb{R}$

Aqui, entenderemos que uma função f é constituída de:

1. Um conjunto A, chamado de domínio, onde a função é definida;
2. Um conjunto B, chamado de contradomínio, onde a função toma valores;
3. Uma regra de correspondência, que permite associar a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado de valor que a função assume em x.

A regra de correspondência de uma função pode ser definida de várias formas. O conceito de função aparece em muitos aspectos do cotidiano. Importante é que ao definir uma função, ela deve satisfazer às três condições acima. Por exemplo:

1. O número de usuários que reproduzem um video no youtube por minuto é uma função.
2. A área de qualquer círculo é uma função de seu raio. Ou seja, $A(r) = \pi r^2$.

   Aqui, $Dom(A) = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\} = (0, +\infty)$ e $Im(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = A(r)\} = (0, +\infty)$.
3. A lei de Boyle que diz *o volume de uma massa gasosa é inversamente proporcional à pressão a que ela é submetida, isto é, o produto da pressão pelo volume é constante, se a temperatura do gas é constante*, define uma função.

4. O consumo de ração dos animais de criação de uma fazenda por unidade de tempo, define uma função.

5. A expressão $f(x) = \sqrt{x}$ define uma função com $Dom(f) = Im(f) = [0, +\infty)$.

6. A expressão $f(x) = \log_a(x)$, para $a > 0$, $a \neq 1$, define uma função, para a qual:

   $Dom(f) = (0, +\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

7. A expressão $f(x) = a^x$, para $a > 0$, $a \neq 1$, define uma função para a qual: $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, +\infty)$.

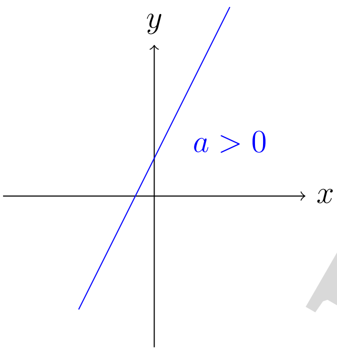
8. O crescimento da população a cada ano das cidades do Brasil define uma função do conjunto $A = \{x : x \text{ é uma cidade do Brasil}\}$ no conjunto $B = \mathbb{N}$.

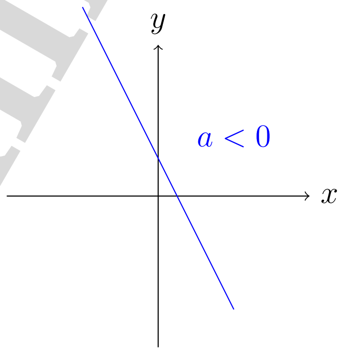
9. O rendimento de cada marca de carro por litro de combustível define uma função.

7.3 Funções especiais

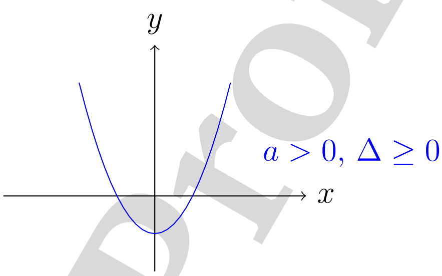
Apresentamos, nesta seção, o gráfico das funções que aparecem com mais frequência ao longo de uma formação universitária, porém não é uma lista completa.

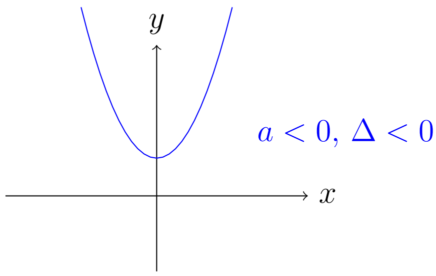
1. **Função Linear:** $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$

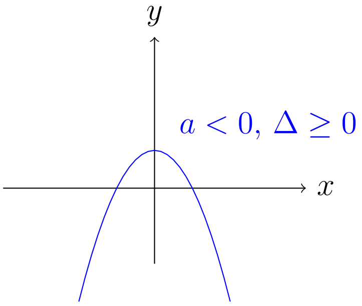


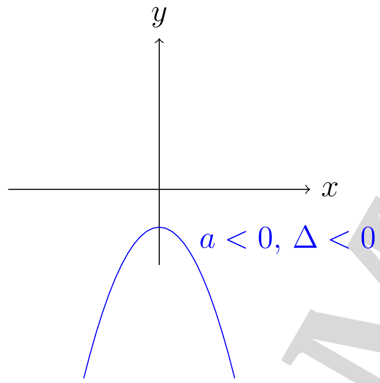


2. **Função Quadrática ou de Segundo Grau:** $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$

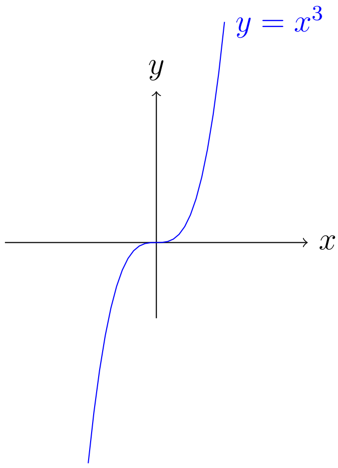


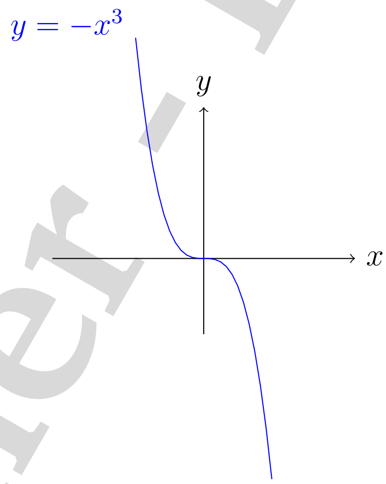




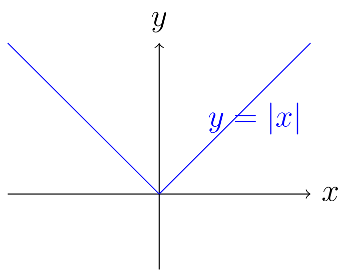


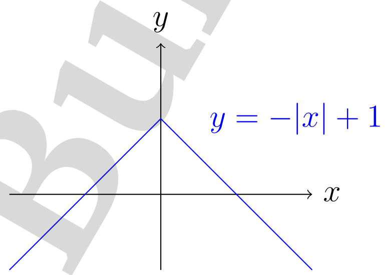
3. **Função Cúbica:**

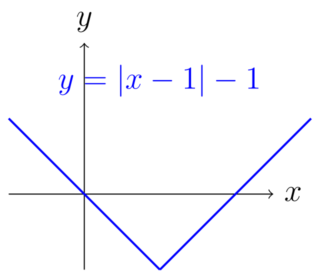




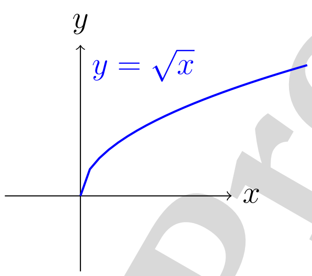
4. **Função Valor Absoluto ou Modular:**

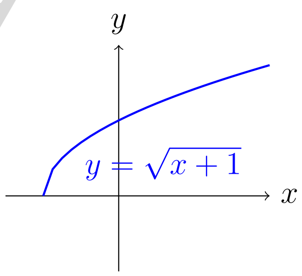


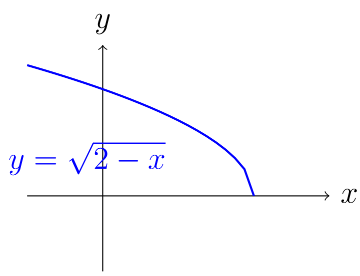




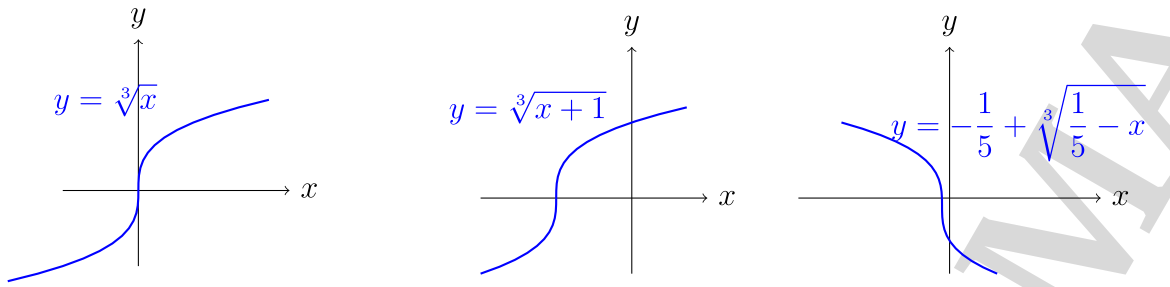
5. **Função Raiz Quadrada:** $f(x) = \sqrt{x}$



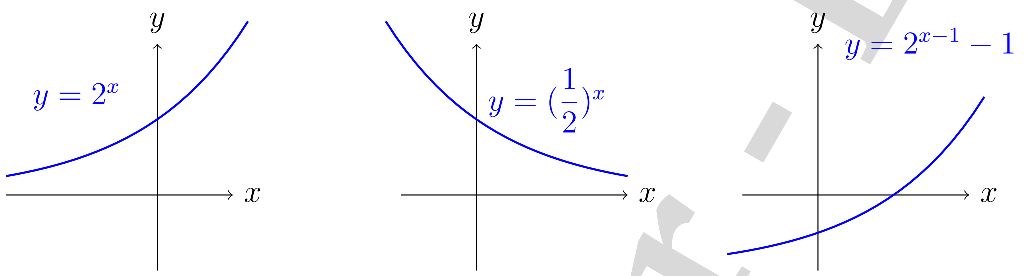




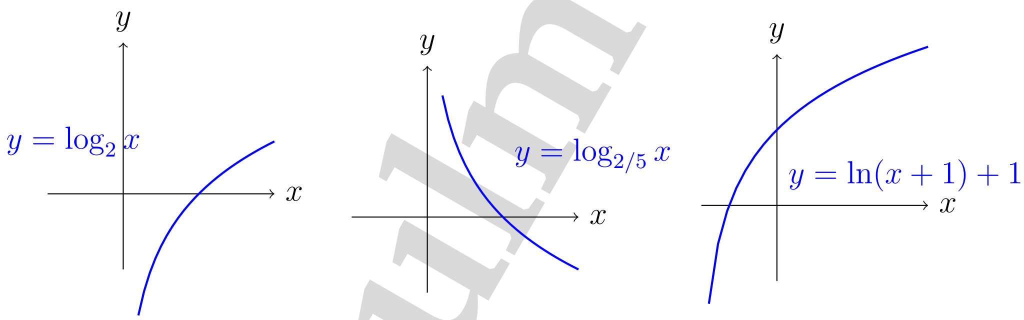
6. **Função Raiz Cúbica:** $f(x) = \sqrt[3]{x}$



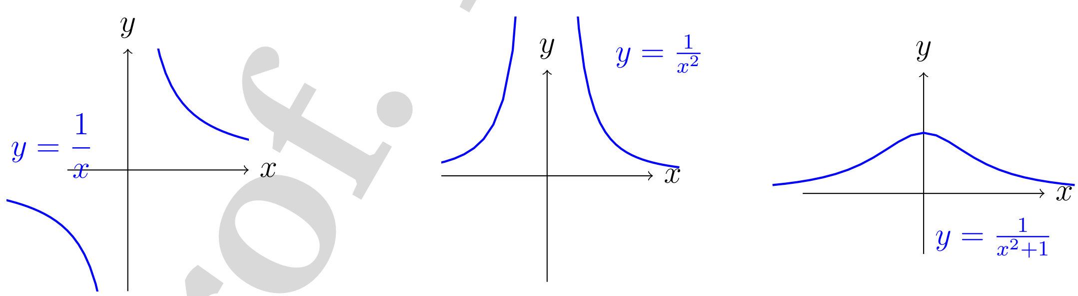
7. **Função Exponencial:** $f(x) = \exp_a(x) = a^x$, com $a > 0$, $a \neq 1$



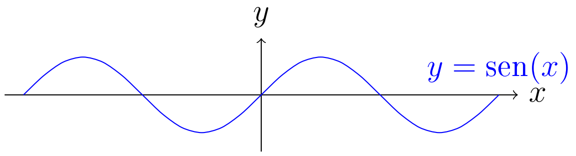
8. **Função Logaritmo:** $f(x) = \log_a(x)$, com $a > 0$, $a \neq 1$

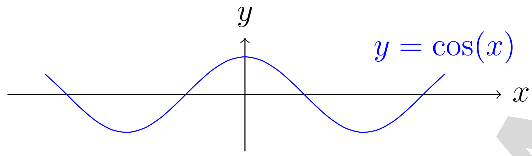


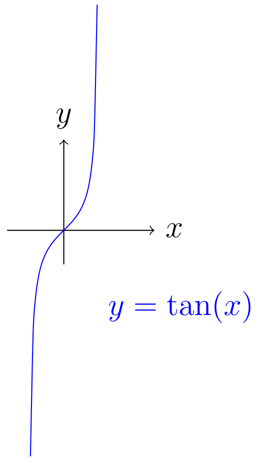
9. **Funções Racionais Especiais:** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

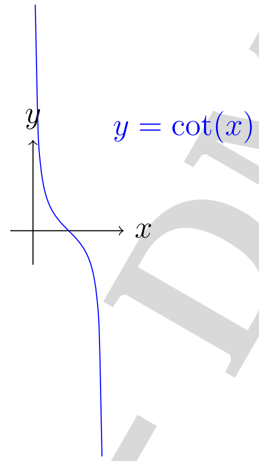


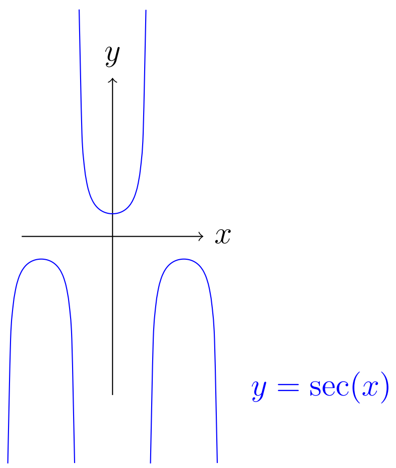
10. **Funções Trigonométricas:** $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ e $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{cossec}(x)$, para estas últimas só é mostrado uma parte do gráfico.

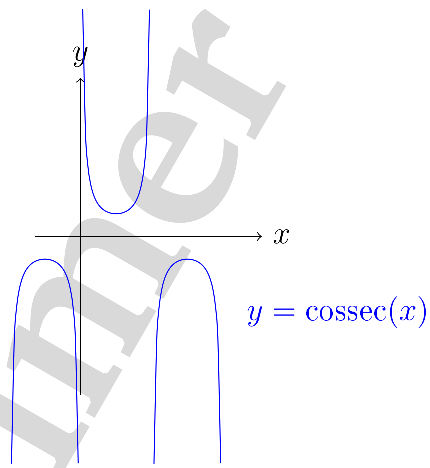

y
x
$y = \mathrm{sen}(x)$


y
x
$y = \cos(x)$


y
x
$y = \tan(x)$


y
x
$y = \cot(x)$


y
x
$y = \sec(x)$


y
x
$y = \mathrm{cossec}(x)$

7.4 Exemplos variados

Exemplo 241 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - 4x$. Determinar $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.*

Solução: *Primeiro, note que $f(x+h) = (x+h) - 4(x+h)$. Logo,*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[(x+h)^2 - 4(x+h)] - [x^2 - 4x]}{h} = \frac{[x^2 + 2xh + h - 4x - 4x] - [x^2 - 4x]}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{4x} - 4h - \cancel{x^2} + \cancel{4x}}{h} = \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \frac{\cancel{h}(2x + h - 4)}{\cancel{h}}$$

De onde, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x - 4 + h$.

Exemplo 242 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - 4/x$. Determinar $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.*

Solução:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[(x+h) - \frac{4}{x+h}] - [x - \frac{4}{x}]}{h} = \frac{\cancel{x} + h - \frac{4}{x+h} - \cancel{x} + \frac{4}{x}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h + \frac{4(x+h) - 4x}{x(x+h)}}{h} = \frac{h + \frac{\cancel{4x} + 4h - \cancel{4x}}{x(x+h)}}{h} = \frac{\cancel{h}[1 + \frac{4}{x(x+h)}]}{\cancel{h}}$$

Portanto, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1 + \dfrac{4}{x(x+h)}$

Exemplo 243 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x} + x^3$. Determinar $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.*

Solução: *Antes de proceder à solução, note que h deve ser de tal forma que $\sqrt{x+h}$ faça sentido. Já vimos em exemplos anteriores que a raiz quadrada só existe para valores maiores ou iguais a zero. Assim, $x + h \geq 0$.*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[\sqrt{x+h} + (x+h)^3] - [\sqrt{x} + x^3]}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} + \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right) + \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} + \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

Portanto, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} + (x+h)^2 + x(x+h) + x^2$.

Exemplo 244 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(3x-2) = x^2 - 4x$. Determinar $f(x)$.*

Solução: *Para resolver este exercício usamos cambio de variável. Fazemos $u = 3x - 2$, de onde $x = \dfrac{u+2}{3}$.*

Logo, $f(u) = (\dfrac{u+2}{3})^2 - 4(\dfrac{u+2}{3}) = \dfrac{u^2 - 8u - 20}{9}$.

Assim, como as variáveis são mudas, podemos escrever $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x - 20}{9}$.

Exemplo 245 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(2x+5) = 3x^2 + 2x - 7$. Determinar $f(x)$.*

Solução: *Fazendo* $u = 2x + 5$, *temos* $x = \frac{u-5}{2}$. *Logo,* $f(u) = 3(\frac{u-5}{2})^2 + 2(\frac{u-5}{2}) - 7$. *Portanto,* $f(x) = 3(\frac{x-5}{2})^2 + 2(\frac{x-5}{2}) - 7$.

Exemplo 246 *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x+5) = 3x^2 + 2x - 7$. *Determinar* $f(3x-1)$.
Solução: *Fazendo* $u = x+5$, *temos* $x = u - 5$. *Logo,* $f(u) = 3(u-5)^2 + 2(u-5) - 7$. *Portanto,* $f(3x-1) = 3(3x-1-5)^2 + 2(3x-1-5) - 7 = 27(x-2)^2 + 6(x-2) - 7$.

Exemplo 247 *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x-4) = 2x^2 - 8$. *Determinar* $f(\sqrt{x+4} - 4)$.
Solução: *Fazendo* $u = x - 4$, *temos* $x = u + 4$. *Logo,* $f(u) = 2(u+4)^2 - 8$. *Portanto,*
$f(\sqrt{x+4} - 4) = 2(\sqrt{x+4} - 4 + 4)^2 - 8 = 2x$.

Exemplo 248 *Determinar o domínio da função* f *dada por* $f(x) = \sqrt{3x-4}$.
Solução: *A raiz quadrada só existe se o argumento for maior ou igual a zero. Assim, para a expressão de* f *fazer sentido, devemos ter* $3x - 4 \geq 0$, *de onde* $x \geq 4/3$. *Portanto,* $Dom(f) = [4/3, +\infty)$.

Exemplo 249 *Determinar o domínio da função* f *dada por* $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
Solução: *Por ser uma raiz quadrada, para* f *existir devemos ter* $x^2 - 1 \geq 0$, *ou seja* $x^2 \geq 1$.
Ora, $x^2 \geq 1 \iff |x| \geq 1 \iff x \leq -1$ *ou* $x \geq 1$. *Portanto,* $Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Exemplo 250 *Determinar o domínio da função* f *dada por* $f(x) = \frac{x+5}{x^2+3x+2}$.
Solução: *A expressão de* f *só faz sentido se* $x + 3x + 2 \neq 0$. *Ora,* $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$. *Assim,* $x^2 + 3x + 2 \neq 0$ *se e somente se* $(x+2)(x+1) \neq 0$. *Ou seja, se e somente se,* $x \neq -2$ *e* $x \neq -1$. *Portanto,* $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, -2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Exemplo 251 *Determinar o domínio da função* f *dada por* $f(x) = \sqrt{\frac{2x-6}{x+3}}$.

Solução: *Por se tratar de uma raiz quadrada, devemos ter* $\frac{2x-6}{x+3} \geq 0$ *e* $x + 3 \neq 0$, *o que equivale a dois casos:*
(i) $2x - 6 \geq 0$ *e* $x + 3 > 0$ *ou* *(ii)* $2x - 6 \leq 0$ *e* $x + 3 < 0$
No caso (i): $x \geq 3$ *e* $x > -3$ *equivale a* $x \geq 3$.
No caso (ii): $x \leq 3$ *e* $x < -3$ *equivale a* $x < -3$
De (i) e (ii) resulta que $Dom(f) = (, -\infty, -3) \cup [3, +\infty)$.

Exemplo 252 *Determinar o domínio da função* f *dada por* $f(x) = \sqrt{\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x-3}{x-4}}$.

Solução: *O domínio de* f *será constituído pelos* $x \in \mathbb{R}$ *tais que* $\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x-3}{x-4} \geq 0$. *Ora,*

$$\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x-3}{x-4} = \frac{(2x-2)(x-4) - (x-3)(x+3)}{(x+3)(x-4)} = \frac{(2x^2-10x+8) - (x^2-9)}{(x+3)(x-4)}$$

$$\frac{2x-1}{x+3} - \frac{x-3}{x-4} = \frac{x^2-10x+17}{(x+3)(x-4)} = \frac{(x-5)^2-8}{(x+3)(x-4)} = \frac{(x-5-2\sqrt{2})(x-5+2\sqrt{2})}{(x+3)(x-4)}$$

Assim, $\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x-3}{x-4} \geq 0 \iff \frac{(x-5-2\sqrt{2})(x-5+2\sqrt{2})}{(x+3)(x-4)} \geq 0$. *Isto, equivale a resolver os dois seguintes casos e depois unir as soluções obtidas:*

(i) $(x-5-2\sqrt{2})(x-5+2\sqrt{2}) \geq 0$ *e* $(x+3)(x-4) > 0$
ou
(ii) $(x-5-2\sqrt{2})(x-5+2\sqrt{2}) \leq 0$ *e* $(x+3)(x-4) < 0$.

Não seguiremos este caminho. No seu lugar, faremos uso da regra dos sinais (método prático). Para isto, sejam $x_1 = 5+2\sqrt{2}$, $x_2 = 5-2\sqrt{2}$, $x_3 = -3$, $x_4 = 4$. *Localizamos estes pontos na reta numérica e analisamos o sinal de cada fator como na tabela abaixo:*

		x_3		x_2		x_4		x_1	
$x-5-2\sqrt{2}$	-		-		-		-		+
$x-5+2\sqrt{2}$	-		-		+		+		+
$x+3$	-		+		+		+		+
$x-4$	-		-		-		+		+
$\dfrac{(x-5-2\sqrt{2})(x-5+2\sqrt{2})}{(x+3)(x-4)}$	+		-		+		-		+

Os sinais + indicam que o fator é positivo. Assim, $\dfrac{(x-5-2\sqrt{2})(x-5+2\sqrt{2})}{(x+3)(x-4)} \geq 0$, *ocorre em todos os* $x \in (-\infty,-3) \cup [5-2\sqrt{2},4) \cup [5+2\sqrt{2},+\infty)$.

Observar que em x_1 *e* x_2 *o intervalo é fechado por este valor ser encontrado no numerador da expressão.*

Portanto, o domínio da função é $Dom(f) = (-\infty,-3) \cup [5-2\sqrt{2},4) \cup [5+2\sqrt{2},+\infty)$.

Exemplo 253 *Determinar o domínio da função* f *dada por* $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-2}{x-3} + \dfrac{x+1}{x-2}\right)$.

Solução: *De acordo com o exemplo 7 da página 6, para* f *existir devemos ter* $\dfrac{2x-2}{x-3} - \dfrac{x+1}{x-2} > 0$. *Ora,*

$$\frac{2x-2}{x-3} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{(2x-2)(x-2)-(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(2x^2-6x+4)-(x^2-2x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

$$\frac{2x-2}{x-3} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2-4x+7}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x-2)^2+3}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-3)(x-2)}$$

Assim, $\dfrac{2x-2}{x-3} - \dfrac{x+1}{x-2} > 0 \iff \dfrac{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-3)(x-2)} > 0$. *Como no exemplo anterior, faremos uso da regra dos sinais (método prático). Para isto, sejam* $x_1 = 2+\sqrt{3}$, $x_2 = 2-\sqrt{3}$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$. *Localizamos estes pontos na reta numérica e analisamos o sinal de cada fator como na tabela abaixo:*

		x_2		x_4		x_3		x_1	
$x-2-\sqrt{3}$	-		-		-		-		+
$x-2+\sqrt{3}$	-		+		+		+		+
$x-3$	-		-		-		+		+
$x-2$	-		-		+		+		+
$\dfrac{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-3)(x-2)}$	+		-		+		-		+

Assim, $\dfrac{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-3)(x-2)} > 0$ *ocorre para todos os*

$$x \in (-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2,3) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$$

Portanto, o domínio da função é $Dom(f) = (-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2,3) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$.

Exemplo 254 *Seja f a função dada por* $f(x) = \dfrac{x^4+x^3-36x^2-124x-112}{x^5+x^4-6x^3}$. *Determinar o(s) intervalo(s) onde* $f(x) \leq 0$.

Solução: *Usando métodos de fatoração de polinômios (Briot-Ruffini, por exemplo), podemos escrever*

$x^4+x^3-36x^2-124x-112 = (x+2)^2(x+4)(x-7)$ *e* $x^5+x^4-6x^3 = x^3(x-2)(x+3)$.

Assim, $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x+4)(x-7)}{x^3(x-2)(x+3)}$. *Para saber onde* $f(x) \leq 0$, *vamos usar a regra dos sinais (método prático), como nos exemplos anteriores. Lembrar que o sinal de x^n é + se n é par e o mesmo sinal de x se n for ímpar.*

		-4		-3		-2		0		2		7	
$x-7$	-		-		-		-		-		-		+
$x+4$	-		+		+		+		+		+		+
$(x+2)^2$	+		+		+		+		+		+		+
$x-2$	-		-		-		-		-		+		+
$x+3$	-		-		+		+		+		+		+
x^3	-		-		-		-		+		+		+
$f(x)$	-		+		-		-		+		-		+

Portanto, $f(x) \leq 0$ *se, e somente se,* $x \in (-\infty, -4] \cup (-3, 0) \cup (2, 7]$.

Isto nos diz que o gráfico da função f está abaixo do eixo X nesses intervalos e nos complementares está acima do eixo X. Além disso, o gráfico de f corta o eixo X nos pontos $A = (-4, 0)$, $B = (2, 0)$ *e* $C = (7, 0)$.

7.5 Paridade de funções

7.5.1 Função par

Definição 51 *Uma função f é dita par se para qualquer $x \in Dom(f)$ tem-se que $-x \in Dom(f)$ e $f(x) = f(-x)$.*

Simbolicamente,

$$f \text{ é par} \iff \begin{cases} (a) \quad x \in Dom(f) \longrightarrow -x \in Dom(f), & \forall x \in Dom(f) \\ (b) \quad f(-x) = f(x), & \forall x \in Dom(f) \end{cases}$$

A função deixa de ser par se pelo menos uma das condições (a), (b) não é satisfeita.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Y.

Exemplo 255 *A função f dada por $f(x) = 3x^2 - x^4$ é par.*

Solução:
De fato, notamos que $Dom(f) = \mathbb{R}$. Assim,

(a) Se $x \in \mathbb{R}$, claramente $-x \in \mathbb{R}$. Isto vale $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^4 = 3x^2 - x^4 = f(x)$.
Portanto, f é uma função par.

Exemplo 256 *A função f dada por $f(x) = |x^3 + 2x|$, para $x \in (-5, 5)$ é par.*

Solução:
Esta função tem como domínio $Dom(f) = (-5, 5)$. Vejamos se para todo $x \in Dom(f)$, f satisfaz as condições da definição:

(a) Se $x \in Dom(f)$, então $x \in (-5, 5)$. Logo, $-5 < x < 5$. Multiplicando por -1 a desigualdade, $-5 < -x < 5$. De onde, $-x \in Dom(f)$;

(b) $f(-x) = |(-x)^3 + 2(-x)| = |-x^3 - 2x| = |-1||x^3 + 2x| = |x^3 + 2x| = f(x)$.

Portanto, f é par.

Exemplo 257 *Para a função f dada por $f(x) = x^2 + 3x + 2$, mostrar ou dar um contraexemplo para a seguinte afirmação: Se h é uma função dada por $h(x) = f(x) + f(-x)$, então h é par.*

Solução:
Como h é dada por $h(x) = f(x) + f(-x)$ e $f(x) = x^2 + 3x + 2$, temos
$h(x) = [x^2 + 3x + 2] + [(-x)^2 + 3(-x) + 2] = 2x^2 + 4$. Daqui, $Dom(h) = \mathbb{R}$. Assim,

(a) *Se* $x \in \mathbb{R}$, *então claramente* $-x \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = 32(-x)^2 + 4 = 2x^2 + 4 = h(x)$.

Portanto, h é uma função par.

Exemplo 258 *Seja f qualquer função real. Mostre que a função h definida por* $h(x) = f(x) + f(-x)$ *é uma função par.*

Solução: *De fato,*
Como $h(x) = f(x) + f(-x)$, *notamos que* $-x \in Dom(f)$, *pois caso contrário não teria sentido* $f(-x)$. *Agora, note que* $h(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(x) + f(-x) = h(x)$. *A partir daqui,* $-x \in Dom(h)$ *e* $h(-x) = h(x)$. *Portanto, h é uma função par.*

7.5.2 Função ímpar

Definição 52 *Uma função f é dita ímpar se para qualquer* $x \in Dom(f)$ *tem-se que* $-x \in Dom(f)$ *e* $f(x) = -f(-x)$.

$$
f \text{ é ímpar} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a) \quad x \in Dom(f) \longrightarrow -x \in Dom(f), & \forall x \in Dom(f) \\ (b) \quad f(-x) = -f(x), & \forall x \in Dom(f) \end{cases}
$$

Exemplo 259 *Seja f qualquer função real. Mostre que a função h definida por* $h(x) = f(x) - f(-x)$ *é uma função ímpar.*

Solução: *De fato,*
Como $h(x) = f(x) - f(-x)$, *notamos que* $-x \in Dom(f)$, *pois caso contrário não teria sentido* $f(-x)$. *Agora, note que* $h(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -h(x)$. *A partir daqui,* $-x \in Dom(h)$ *e* $h(-x) = -h(x)$. *Portanto, h é uma função ímpar.*

7.6 Álgebra de funções

1. **ADIÇÃO:**

2. **SUBTRAÇÃO:**

3. **PRODUTO:**

4. **DIVISÃO:**

7.7 Funções Monótonas

Definição 53 (Função Crescente) *Uma função* $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ *é dita crescente se para todo* $x_1, x_2 \in A$*, vale:*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Definição 54 (Função Decrescente) *Uma função* $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ *é dita decrescente se para todo* $x_1, x_2 \in A$*, vale:*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

7.8 Exercícios

EXERCÍCIOS

1. Num triângulo ABC de base $AB = 10$ e altura $H = 6$ se inscreve um retângulo $PQRS$, tal que o lado RS esteja contido no lado AB. Se y representa a área desse retângulo, expressar y em função de sua base $RS = x$. Adicionalmente determinar o domínio da função resultante.

2. Uma esfera de raio R tem inscrito um cilindro cujo eixo central passa pelo diâmetro da esfera. Expressar o volume V do cilindro em função de sua altura. Adicionalmente, determinar o domínio da função resultante.

3. Encontrar o domínio e a imagem da função f, onde $f(x)$ representa a área de um triângulo de base x e cujo perímetro é igual a $2b$ $(b > 0)$.

4. No primeiro quadrante do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ é desenhado um trapézio isósceles com dois de seus vértices em $(0,0)$ e $(6,0)$. Os ângulos iguais a $\dfrac{\pi}{4}$ e lado menor igual a 3 unidades. Se os lados não paralelos e lado paralelo menor representa o gráfico de uma função f. Determinar a regra de correspondência de f.

5. Dada a função f definida por $f(x) = x^2$. Considere os pontos $A = (-2, f(-2))$, $B = (3, f(3))$ e $C = (0, p)$. Determinar o valor de p.

6. O triângulo retângulo ABC tem catetos de medidas $AB = 10$ e $AC = 10$. O ponto P sobre o lado AB está a uma distância x de A. O ponto Q sobre o lado AC é tal que PQ é paralelo a BC. Os pontos R e S sobre BC são tais que QR é paralelo a AB e PS é paralelo a AC. A união dos paralelogramos $PBRQ$ e $PSCQ$ determina uma região de área $f(x)$ no interior do triângulo ABC. Determinar $f(2)$, $f(8)$ e $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$.

7. Um quadrado $ABCD$ tem $8cm$ de lado. O ponto P, no interior do quadrado, é tal que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo ABP. Seja x a distância, em centímetros, do ponto P ao lado AB. Esboçar o gráfico da função f que representa a área do quadrilátero $BPDC$ em função de x.

8. Verificar se as funções, cujas regras de correspondência são dadas a seguir, são bijetivas e, em caso afirmativo determinar a inversa:

   (a) $f(x) = e^{x+1}$

   (b) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in [0, 2]$

   (c) $f(x) = 1 - x^3$

   (d) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

   (e) $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{4 - x^2}$, $x \geq 0$

   (f) $g(x) = 4\sqrt{x} - x$, $x \in [0, 1]$

   (g) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, \ x \in [-2, 1[\\ 4x - x^2 - 3, \ x \in [2, 4[\end{cases}$

   (h) $g(x) = \begin{cases} (x-3)^3, \ x \in [3, 9] \\ 5x - 9, \ x > 9 \end{cases}$

   (i) $f(x) = \dfrac{4x}{1 + |x|}$

   (j) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x - x^2 + 2} + 1, \ x \in [-1, 1/2] \\ 2 - \dfrac{7}{x+1}, \ x \in]2, 4[\end{cases}$

9. Verificar se a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ é sobrejetiva.

10. Seja $f : A \longrightarrow [-9, -1[$, dada por $f(x) = \dfrac{10+3x}{10-2x}$. Determinar A para que: (i) f seja injetiva e (ii) f seja sobrejetiva.

11. Seja $f :]1, 2] \longrightarrow B$, dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$. Determinar B para que f seja sobrejetiva.

12. Quantas funções injetivas de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{a, b, c\}$ podem ser definidas?

13. Se $B = \{a, b, c\}$, quantas funções bijetivas $f : B \longrightarrow B$ podem ser definidas?

14. Encontrar a e b para que a função $f : [a, b] \longrightarrow [-1, 5]$, dada por $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ seja bijetiva.

15. Encontrar a e b para que a função $f : [2, 5] \longrightarrow [2, 5]$, dada por $f(x) = \dfrac{ax+b+1}{ax+b}$ seja bijetiva.

16. Encontrar a e b para que a função $f : [b, -2] \longrightarrow [a, \dfrac{-1}{24}]$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{6x+6}$ seja bijetiva.

17. Encontrar uma função linear tal que $f = f^{-1}$.

18. Se f é dada por $f(x) = ax + b$. Determinar os valores de a e b de tal modo que $f^{-1}(2) = 4$ e $f^{-1}(1) + f^{-1}(-1) = 2$.

19. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = ax + 1$, com domínios apropriados para que ambas sejam bijetivas. Se $(f^{-1} \circ g^{-1})(3/2) = 1/2$, encontrar $(g \circ f)(2)$.

20. Determinar $(g \circ f)$, caso exista, para $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$.

21. Se $(f \circ g)(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = x - 1$. Determinar $f(x)$.

22. Se $f(x) = x^2$, determinar duas funções g tais que $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

23. Encontrar funções f e g tais que $h = f \circ g$, onde $h(x) = \sqrt{3x-1}$.

24. Encontrar funções f e g tais que $h = f \circ g$, onde $h(x) = \dfrac{1}{|x|+3}$

25. Determinar $f \circ g$ e $g \circ f$, caso seja possível, para f de (8g) e g de (8h).

26. Determinar $f \circ g$ e $g \circ f$, caso seja possível, para f de (8i) e g de (8j).

27. Esboçar o gráfico da função dada em (8i).

28. Esboçar o gráfico da função dada em (8d).

Capítulo 8

OPERAÇÕES BINÁRIAS

8.1 Introdução

Por operação binária entendemos uma certa regra que combina um par de elementos e devolve um novo elemento. Quando essa regra combina dois elementos de um mesmo conjunto e o resultado cai no mesmo conjunto, a operação binária é chamada de operação binária interna ou lei de composição interna. Quando a regra combina elementos de dois conjuntos diferentes e o resultado cai em um deles, a operação é chamada de operação binária externa.

Aqui, centraremos nossa atenção ao conceito de operação binária interna definida sobre um conjunto não vazio, as características ou propriedades que essa operação pode apresentar e a estrutura algébrica definida por esta operação. Isto permitirá introduzir o estudante a linguagem básica para futuras disciplinas de álgebra.

Este capítulo, por ser de caráter introdutório, não pretende esgotar os assuntos que serão abordados, nem ser exaustivo nos conceitos, ao ponto de tornar pesada sua leitura para um estudante que esta iniciando sua formação acadêmica.

8.2 Operação Binária Interna

Nesta seção consideramos um conjunto não vazio A finito ou infinito.

Definição 55 *Uma operação binária interna $*$, definida sobre um conjunto $A \neq \emptyset$, é uma regra que associa a qualquer par de elementos $x, y \in A$ um elemento $z \in A$, onde $z = x * y$.*

A definição anterior nos permite encarar a operação $*$ como uma função definida sobre o produto cartesiano $A \times A$. Assim, é possível dar uma definição alternativa e moderna de operação binária.

Definição 56 *Uma* **operação binária interna ou lei de composição interna** *sobre um conjunto $A \neq \emptyset$, é uma (função ou) aplicação $f : A \times A \longrightarrow A$.*

Para quaisquer $a, b \in A$, denotamos $f(a, b)$ por $a * b$.

$$* : \underset{(a,b)}{A \times A} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{a*b}{A}$$

OBSERVAÇÕES:

1. Para reconhecer que uma certa operação definida em A é uma operação binária interna, é suficiente verificar que $f(a,b)$ seja um elemento de A.

2. A regra de correspondência da operação f é de forma variada. Nos conjuntos numéricos ela se dá em termos das operações básicas conhecidas.

3. Quando o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é finito, a operação binária pode ser apresentada pela tabela de Cayley, onde os elementos que aparecem nela são elementos de A. Vejamos uma ilustração com cinco elementos.

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_2	a_4	a_5	a_1	a_3
a_2	a_4	a_5	a_1	a_3	a_2
a_3	a_5	a_1	a_3	a_2	a_4
a_4	a_1	a_3	a_2	a_4	a_5
a_5	a_3	a_2	a_4	a_5	a_1

Exemplo 260 *Sobre os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a operação de adição usual, $+$, é uma operação binária.*

Solução: *De fato, independente de qual seja o conjunto numérico considerado, para dois elementos a e b, a soma deles, $a+b$ é um elemento do conjunto numérico.*

Exemplo 261 *Sobre os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a operação de multiplicação usual, $\cdot$, é uma operação binária.*

Solução: *De fato, independente de qual seja o conjunto numérico considerado, para dois elementos a e b, o produto deles, $a \cdot b$ é um elemento do conjunto numérico.*

Exemplo 262 *Sobre os conjuntos $\mathbb{Z}$ define-se a operação $*$ dada por $a * b = a + b - 2$. Verificar se essa operação é uma operação binária interna sobre $\mathbb{Z}$.*

Solução: *Devemos verificar que para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ tem-se que $a * b \in \mathbb{Z}$.*

Para $a, b \in \mathbb{Z}$ quaisquer, claramente $a + b$ é inteiro e $a + b - 2$ é inteiro. Logo, $a * b = a + b - 2$ é um número inteiro. Portanto, a operação $*$ é uma operação binária interna em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 263 *Verificar se a operação $*$ definida sobre $\mathbb{N}$ por $a * b = a - b$ é uma operação binária interna.*

Solução: *Como a operação de subtração nem sempre fornece um número natural, como por exemplo $3 * 5 = 3 - 5 = -2$. Concluímos que $a * b \notin \mathbb{N}$. Portanto, $*$ não é uma operação binária interna em $\mathbb{N}$.*

Note que, a operação do exemplo anterior, será uma operação binária interna sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Exemplo 264 *A operação $*$ definida sobre $\mathbb{Z}$ por $a * b = a + \dfrac{ab}{3}$, é uma operação binária interna?*

Solução: *Não, pois se tomamos $a = 1 = b$, temos $a * b = 1 * 1 = 1 + \dfrac{1 \cdot 1}{3} = \dfrac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$.*

Exemplo 265 *A operação $*$ definida sobre $\mathbb{Q}$ por $a * b = a + \frac{ab}{3}$, é uma operação binária interna?*

<u>**Solução:**</u> *Sim, pois para $a, b \in \mathbb{Q}$ quaisquer, temos $\frac{ab}{3} \in \mathbb{Q}$ e como a soma de números racionais é um número racional, temos que $a * b = a + \frac{ab}{3}$ é um número racional.*

Exemplo 266 *Seja $*$ a operação definida por $a * b = a - \sqrt{|b|}$. Sobre qual dos conjuntos numéricos $*$ é uma operação binária interna?*

<u>**Solução:**</u> *Como na expressão de $*$ aparece $\sqrt{|b|}$ e este é um número real ou complexo, $a * b$ só pode ser real ou complexo. Assim, a operação é uma operação binária interna quando definida sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

8.3 Propriedades de uma operação binária

Nesta seção, apresentamos as propriedades que uma operação binária interna $*$ pode ter. Isto não significa que uma operação $*$ sempre terá essas propriedades.

8.3.1 Propriedade Comutativa

Definição 57 *Seja $*$ uma operação binária definida sobre $A \neq \emptyset$. Dizemos que a operação $*$ é comutativa se satisfaz $a * b = b * a$, para todo $a, b \in A$.*

Exemplo 267 *A operação de adição $+$ e multiplicação $\cdot$ usuais nos conjuntos numéricos goza da propriedade comutativa.*

<u>**Solução:**</u> *De fato, é conhecido que $a + b = b + a$ e $ab = ba$, para quaisquer a e b.*

Exemplo 268 *A operação $*$ definida sobre $\mathbb{Z}$ por $a * b = a + b - 1$ goza da propriedade comutativa.*

<u>**Solução:**</u> *De fato, note que $a + b - 1 = b + a - 1$. Assim, $a * b = b * a$, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$*

Exemplo 269 *A operação $*$ definida sobre $\mathbb{Q}^+$ por $a * b = \frac{a}{b}$ goza da propriedade comutativa?*

<u>**Solução:**</u> *Não, pois para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^+$, $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$*

Exemplo 270 *A operação $*$ definida sobre $\mathbb{R}^+$ por $a * b = a^b$ goza da propriedade comutativa?*

<u>**Solução:**</u> *Não, pois para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a^b \neq b^a$*

Exemplo 271 *A operação $*$ definida sobre $\mathbb{N}$ por $a * b = mdc(a, b)$ goza da propriedade comutativa?*

<u>**Solução:**</u> *Sim, pois o máximo divisor comum de a e b é igual ao máximo divisor comum entre b e a, isto é, $mdc(a, b) = mdc(b, a)$.*

Exemplo 272 *Para o conjunto $E \neq \emptyset$, considere $A = \mathcal{P}(E)$. Defina a operação $*$ sobre A por $B * C = B \cap C$, para $B, C \in A$. A operação $*$ goza da propriedade comutativa?*

<u>**Solução:**</u> *Sim, pois é conhecido da teoria de conjuntos que $B \cap C = C \cap B$, de onde $B * C = C * B$.*

Exemplo 273 *As operações $*$ e @ definidas sobre $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ pelas tabelas de Cayley abaixo, são comutativas?*

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_2	a_4	a_5	a_1	a_3
a_2	a_4	a_5	a_1	a_3	a_2
a_3	a_5	a_1	a_3	a_2	a_4
a_4	a_1	a_3	a_2	a_4	a_5
a_5	a_3	a_2	a_4	a_5	a_1

@	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_2	a_4	a_5	a_1	a_3
a_2	a_4	a_5	a_1	a_3	a_2
a_3	a_5	a_1	a_3	a_2	a_4
a_4	a_2	a_3	a_1	a_4	a_5
a_5	a_3	a_2	a_4	a_5	a_1

Solução: *Quando a operação é dada por uma tabela de Cayley, para verificar se satisfaz a propriedade comutativa, o procedimento é o seguinte. Traçar ou pintar a diagonal principal, observar os elementos diametralmente opostos, localizados a ambos lados da diagonal, se estes são iguais a operação é comutativa.*

Neste exemplo, marcamos em vermelho os elementos da diagonal de ambas operações.

Para a operação $*$, os elementos a ambos os lados da diagonal são iguais. Portanto, $*$ é comutativa.

A operação @ possui dois elementos diferentes, a saber os marcados em azul. Portanto, a operação @ não é comutativa.

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_2	a_4	a_5	a_1	a_3
a_2	a_4	a_5	a_1	a_3	a_2
a_3	a_5	a_1	a_3	a_2	a_4
a_4	a_1	a_3	a_2	a_4	a_5
a_5	a_3	a_2	a_4	a_5	a_1

@	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_2	a_4	a_5	a_1	a_3
a_2	a_4	a_5	a_1	a_3	a_2
a_3	a_5	a_1	a_3	a_2	a_4
a_4	a_2	a_3	a_1	a_4	a_5
a_5	a_3	a_2	a_4	a_5	a_1

8.3.2 Propriedade Associativa

Definição 58 *Seja $*$ uma operação binária definida sobre $A \neq \emptyset$. Dizemos que a operação $*$ é associativa se satisfaz $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo $a, b, c \in A$.*

Exemplo 274 *As operações de adição e multiplicação usuais nos conjuntos numéricos gozam da propriedade associativa.*

Solução: *De fato, para quaisquer a, b, c em algum dos conjuntos numéricos, temos que $a+(b+c) = (a+b)+c$ e $a(bc) = (ab)c$.*

Exemplo 275 *A operação $*$ definida sobre $\mathbb{Q}$ por $a * b = \dfrac{a+b}{3}$ goza da propriedade associativa?*

Solução: *Não. Note que*

$$a * (b * c) = a * (\frac{b+c}{3}) = \frac{a + \frac{b+c}{3}}{3} = \frac{3a+b+c}{9}, \text{ enquanto que}$$

$$(a * b) * c = (\frac{a+b}{3}) * c = \frac{\frac{a+b}{3} + c}{3} = \frac{a+b+3c}{9}.$$

Claramente, $a * (b * c) \neq (a * b) * c$.

Exemplo 276 *Seja F o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina sobre F a operação $*$ dada $f * g = f \circ g$. A operação $*$ goza da propriedade associativa?*

Solução: *Sim, sejam $f, g, h, \in F$. Sabemos que a composição de funções é associativa, isto é $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Portanto, $*$ é associativa.*

Exemplo 277 *Verificar se a operação $*$ definida sobre $\mathbb{Z}$ por $a * b = a - b$ é associativa.*

Solução: *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Note que:*
$a * (b * c) = a * (b - c) = a - (b - c)$ *e* $(a * b) * c = (a - b) - c$
Claramente, $a - (b - c) \neq (a - b) - c$.
Portanto a operação não é associativa.

Exemplo 278 *Sobre $\mathbb{Z}$ define-se a operação $*$ por $a*b = ab+a+b$. Mostrar a operação é associativa.*

Solução: *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Note que:*

$a * (b * c) = a * (bc + b + c) = a(bc + b + c) + a + (bc + b + c) = abc + ab + ac + bc + a + b + c$
$(a * b) * c = (ab + a + b) * c = (ab + a + b)c + (ab + a + b) + c = abc + ac + bc + ab + a + b + c$
De onde, $a * (b * c) = (a * b) * c$.
Portanto a operação é associativa.

Exemplo 279 *Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto finito e seja $*$ uma operação definida sobre A dada por uma tabela de Cayley. É possível verificar a associatividade a partir da tabela?*

Solução: *Não, não existe um mecanismo que permita verificar mediante a tabela de Cayley a propriedade associativa de uma operação binária.*

No entanto, dependendo da forma como é apresentada a tabela, é possível encontrar alguma característica que permita concluir a associatividade, mas isto não é uma regra geral. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 280 *Seja $A = \{a, b, c\}$ e $*$ a operação definida sobre A pela tabela de Cayley abaixo. Mostrar que a operação $*$ é associativa.*

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

Solução: *A partir da tabela, observamos que para quaisquer $x, y \in A$, $x * y = y$.*
Assim, para $x, y, z \in A$ quaisquer temos que

$$x * (y * z) = x * z = z \qquad e \qquad (x * y) * z = y * z = z$$

Ou seja $x * (y * z) = (x * y) * z$. Portanto a operação é associativa.

O exemplo acima é bem particular, para o qual foi possível usar a tabela, mas de forma geral como afirmado no exemplo 279 isto não ocorre assim.

Em disciplinas mais avançadas de álgebra, é possível ver outra forma de verificar a associatividade. Para isto, é necessário definir a noção de isomorfismo, ou seja, uma aplicação bijetora que preserva operações. Mas, este assunto foge ao escopo deste material.

8.3.3 Propriedade do Elemento Neutro

Definição 59 *Seja $*$ uma operação binária definida sobre $A \neq \emptyset$. Dizemos que:*

1. *$*$ possui elemento* **neutro à esquerda** *se existe $e_1 \in A$ tal que $e_1 * a = a$, para todo $a \in A$;*
2. *$*$ possui elemento* **neutro à direita** *se existe $e_2 \in A$ tal que $a * e_2 = a$, para todo $a \in A$;*
3. *$*$ possui elemento* **neutro** *se existe $e \in A$ tal que $a * e = e * a = a$, para todo $a \in A$.*

Exemplo 281 *As operações $+$ e $\cdot$ usuais, definidas sobre os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, possuem elemento neutro.*
Solução: *De fato, denotemos por A qualquer um dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.*

Para a operação $+$: O elemento neutro é zero, pois $0 + a = a + 0 = a$, para todo $a \in A$.

Para a operação $\cdot$: O elemento neutro é 1, pois $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, para todo $a \in A$.

Exemplo 282 *Verificar se a operação $*$ definida sobre $\mathbb{Q}$ por $a * b = ab + a + b$ possuí elemento neutro.*
Solução: *Note que a operação $*$ é comutativa. Assim, é suficiente determinar o neutro à esquerda.*

Vejamos se existe $e \in \mathbb{Q}$ tal que $e * a = a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$.
$e * a = a \iff ea + e + a = a \iff e(a + 1) = 0 \iff e = 0 \quad \text{ou} \quad a = -1$
Como $a \in \mathbb{Q}$ é arbitrário, temos que $e = 0$. Portanto, o elemento neutro de $*$ é zero.

Exemplo 283 *Determinar o elemento neutro, caso exista, para a operação $*$ definida sobre $\mathbb{N}$ por $a * b = a^2 + b$.*
Solução: *Observamos que a operação não é comutativa.*

Neutro à esquerda: *Vejamos se existe $e_1 \in \mathbb{N}$ tal que $e_1 * a = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.*

$e_1 * a = a \iff e_1^2 + a = a \iff e_1^2 = 0 \iff e_1 = 0$

Assim, se $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o neutro à esquerda é $e_1 = 0$. E, se $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o neutro à esquerda não existe.

Neutro à direita: *Vejamos se existe $e_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a * e_2 = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.*

$a * e_2 = a \iff a^2 + e_2 = a \iff e_2 = a - a^2$

Note que e_2 depende de a e como $e_2 \in \mathbb{N}$ só alguns valores de a permitirá concluir que $e_2 \in \mathbb{N}$. Assim, se $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $e_2 = 0$, somente para $a = 0$ ou $a = 1$. E, se $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $e_2 = 0$, somente para $a = 1$.
Daqui, o neutro à direita não existe.

Do feito acima, concluímos que a operação $*$ dada não possui elemento neutro, uma vez que não existe $e \in \mathbb{N}$ tal que $e * a = a * e$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

Exemplo 284 *Determinar o elemento neutro, caso exista, para a operação $*$ definida sobre $\mathbb{Z}$ por $a * b = a + b - 1$.*

Solução: *Como a operação é comutativa é suficiente determinar o neutro à esquerda ou à direita. Vejamos se existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $a * e = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.*

$a * e = a \Longleftrightarrow a + e - 1 = a \Longleftrightarrow e = 1$

Assim, o neutro da operação $*$ dada é $e = 1$.

Exemplo 285 *Seja $F = \{p : p$ é uma proposição$\}$. Determinar, caso exista, o elemento neutro da operação $*$ definida sobre F, dada por $p * q = p \longrightarrow q$.*

Solução: *Claramente a operação $*$ não é comutativa.*

Neutro à esquerda: *Vejamos se existe alguma proposição $e_1 \in F$ tal que $e_1 * p \equiv p$, para toda $p \in F$.*

Lembrando que $p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$, temos

$e_1 * p \equiv p \Longleftrightarrow \sim e_1 \vee p \equiv p \Longleftrightarrow e_1$ *é uma tautologia.*

Neutro à direita: *Vejamos se existe alguma proposição $e_2 \in F$ tal que $p * e_2 \equiv p$, para toda $p \in F$.*

Note que $p * e_2 \equiv p \Longleftrightarrow \sim p \vee e_2 \equiv p$ não ocorre jamais.

Do feito acima, a operação $*$ possuí neutro à esquerda $e_1 = T$, mas não possui neutro à direita. Daqui, não existe neutro.

Exemplo 286 *Seja $M = \mathcal{P}(X)$, onde $X \neq \emptyset$ e, seja $*$ a operação definida sobre M por $A * B = A \cap B$. Determinar, caso exista, o elemento neutro de $*$.*

Solução: *Note que a operação $*$ é comutativa. Assim, é suficiente determinar o neutro à esquerda ou à direita.*

Vejamos se existe algum $E \in M$ tal que $A * E = A$, para todo $A \in M$.

De $A \in M$, temos $A \subset X$. De $A \cap E = A$, concluímos que $E = X$. Portanto, o elemento neutro é o conjunto X.

Exemplo 287 *Sobre $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ definem-se as operações $*$ e @ pelas tabelas de Cayley abaixo. Determinar o elemento neutro, caso exista, para ambas as operações.*

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_2	a_4	a_5	a_1	a_3
a_2	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_3	a_5	a_1	a_3	a_2	a_4
a_4	a_1	a_3	a_2	a_4	a_5
a_5	a_3	a_2	a_4	a_5	a_1

@	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_2	a_4	a_5	a_1	a_3
a_2	a_1	a_4	a_3	a_2	a_5
a_3	a_5	a_1	a_3	a_3	a_4
a_4	a_1	a_3	a_2	a_4	a_5
a_5	a_3	a_2	a_4	a_5	a_1

Solução: *Quando uma operação é dada por tabela de Cayley. Para encontrar neutro à esquerda, procuramos alguma linha que tenha exatamente os mesmos elementos que a primeira linha da tabela, logo do lado da operação. Se esta existir, o primeiro elemento dessa linha será o neutro à esquerda.*

Para encontrar neutro à direita, procuramos uma coluna que tenha exatamente os mesmos elementos da primeira coluna da tabela, logo abaixo da operação. Se existir, o primeiro elemento dessa coluna será o neutro à direita.

Para a primeira tabela, a operação $*$, *possui elemento neutro a esquerda* a_2 *e não possui neutro à direita.*

Para a segunda tabela, a operação @ não possui neutro à esquerda e, o neutro à direita é a_4.

Obviamente, se o neutro à esquerda e à direita forem iguais, a operação possuirá elemento neutro.

Teorema 16 *Seja* $*$ *uma operação binária definida sobre* $A \neq \emptyset$. *Se* $*$ *possui elemento neutro, este é único.*

Prova: De fato, sejam e e d elementos neutros da operação $*$. Isto é, e e d satisfazem: $e*a = a*e = e$ e $d*a = a*d = a$, para todo $a \in A$.

Assim, $e = e*d$ pois d é elemento neutro e, $e*d = d$, pois e é elemento neutro. Logo, $e = e*d = d$.

Portanto, o elemento neutro é único. ■

8.3.4 Propriedade do Elemento Simétrico

Para esta propriedade consideramos uma operação definida sobre $A \neq \emptyset$ com elemento neutro e.

Definição 60 *Dizemos que:*

1. *Um elemento* $a \in A$ *possui simétrico ou inverso à esquerda pela operação* $*$ *se existe* $a_1 \in A$ *tal que* $a_1 * a = e$;

2. *Um elemento* $a \in A$ *possui simétrico ou inverso à direita pela operação* $*$ *se existe* $a_2 \in A$ *tal que* $a * a_2 = e$;

3. *Um elemento* $a \in A$ *possui simétrico ou inverso pela operação* $*$ *se existe* $b \in A$ *tal que* $b * a = a * b = e$.

Quando o simétrico de um elemento existe, dizemos que a é simetrizável seu simétrico é denotado por a^{-1}.

Exemplo 288 *Determinar o simétrico de* $a = 3$, *caso exista, para a operação* $*$ *definida sobre* $\mathbb{Z}$ *por* $a * b = a + b - 1$.

Solução: *Já vimos em exemplo anterior que esta operação possui elemento neutro* $e = 1$.

Claramente a operação é comutativa. Assim, vamos encontrar, se possível, o simétrico à esquerda de $a = 3$. *Seja* b *este simétrico, então*

$b * 3 = 1 \Longleftrightarrow b + 3 - 1 = 1 \Longleftrightarrow b = -1$

Portanto, o simétrico de $a = 3$ *pela operação* $*$ *é* $b = -1$.

Exemplo 289 *Determinar o simétrico de qualquer* $a \in \mathbb{Z}$, *caso exista, para a operação* $*$ *definida sobre* $\mathbb{Z}$ *por* $a * b = a + b - 1$.

Solução: *Vejamos se existe* $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$.

$a * a^{-1} = 1 \Longleftrightarrow a + a^{-1} - 1 = 1 \Longleftrightarrow a^{-1} = 2 - a$

Portanto, o simétrico de $a \in \mathbb{Z}$ *pela operação* $*$ *é* $a^{-1} = 2 - a$.

Exemplo 290 *Determinar, caso exista, o simétrico de $a = -1$ pela operação $*$ definida sobre $\mathbb{Q}$ por $a * b = \dfrac{a+b}{2}$.*

Solução: *Note que a operação $*$ é comutativa. Vamos determinar o elemento neutro.*

$e * a = a \iff \dfrac{e+a}{2} = a \iff e = a$ *Isto nos diz que todo elemento de $\mathbb{Q}$ é neutro.*

Agora vamos determinar o simétrico de $a \in \mathbb{Q}$. Para isso vamos descobrir a^{-1} a partir de $a * a^{-1} = e$.

$a * a^{-1} = e \iff \dfrac{a + a^{-1}}{2} = a \iff a^{-1} = a.$

Assim, o simétrico de $a = -1$ é $a^{-1} = -1$.

Exemplo 291 *Seja $*$ uma operação binária definida sobre $A \neq \emptyset$, tal que $*$ é associativa e possui elemento neutro. Mostre que se $a \in A$ é simetrizável, então o simétrico de a é único.*

Solução: *De fato, suponha que b e c sejam simétricos de a. Vamos mostrar que $b = c$.*

Seja e o elemento neutro de $*$. Assim, usando a propriedade associativa, temos

$b = e * b = (c * a) * b = c * (a * b) = c * e = c$

Portanto, o simétrico de a é único e por definição este é a^{-1}.

Exemplo 292 *Seja $*$ uma operação binária definida sobre $A \neq \emptyset$, tal que $*$ é associativa e possui elemento neutro. Mostre que se $a \in A$ é simetrizável, então a^{-1} é simetrizável e $(a^{-1})^{-1} = a$.*

Solução: *De fato, como a é simetrizável, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.*

Reescrevendo isto, temos $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$. Isto nos diz que a^{-1} é simetrizável e pela unicidade do simétrico, $(a^{-1})^{-1} = a$.

Definição 61 *Seja $*$ uma operação binária definida sobre $A \neq \emptyset$, tal que $*$ é associativa e possui elemento neutro. Definimos $U_*(A)$, como o conjunto formado por todos os elementos simetrizáveis de A.*

Simbolicamente,

$$\boxed{U_*(A) = \{x \in A : \exists y \in A, x * y = y * x = e\}}$$

Exemplo 293 *Determinar $U_*(\mathbb{Z})$, para $*$ definida por $a * b = a + b - 4$.*

Solução: *Precisamos conhecer o elemento neutro da operação $*$. Claramente a operação é comutativa. Assim,*

$e * a = a \iff e + a - 4 = a \iff e = 4$

Logo, o elemento neutro de $*$ é $e = 4$.

Seja $a \in A$ arbitrário. Vamos descobrir seu simétrico b, caso exista.

$a * b = e \iff a + b - 4 = 4 \iff b = 8 - a$, *para qualquer $a \in A$.*

Portanto, $U_*(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Exemplo 294 *Determinar $U_*(\mathbb{Z})$, para $*$ definida por $a * b = ab$.*

Solução: *Precisamos conhecer o elemento neutro da operação $*$. Claramente a operação é comutativa. Assim,*

$e * a = a \iff ea = a \iff e = 1$

Logo, o elemento neutro de $*$ é $e = 1$.

Para $a \in A$ arbitrário, vamos descobrir seu simétrico b, caso exista.

$a * b = e \iff ab = 1 \iff b = a = 1$ *ou* $b = a = -1$.

Portanto, $U_*(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$.

8.3.5 Propriedade do Elemento Regular e Singular

Definição 62 *Seja $*$ uma operação binária definida sobre $A \neq \emptyset$. Dizemos que um elemento $a \in A$ é:*

1. *Regular à esquerda se a implicação $a * x = a * y \Longrightarrow x = y$ é válida para todo $x, y \in A$.*

2. *Regular à direita se a implicação $x * a = y * a \Longrightarrow x = y$ é válida para todo $x, y \in A$.*

3. *Regular ou simplificável se a é regular à direita e à esquerda simultaneamente.*

Denotamos por $R_*(A) = \{a \in A : a \quad \text{é regular}\}$, o conjunto de todos os elementos regulares.

Definição 63 *Seja $*$ uma operação binária definida sobre $A \neq \emptyset$. Dizemos que um elemento $a \in A$ é singular se $a * x = x * a = a$ para todo $x \in A$.*

Denotamos por $Sing_*(A) = \{a \in A : a \quad \text{é singular}\}$, o conjunto de todos os elementos singulares.

Exemplo 295 *Determinar os elementos regulares, caso existam, da operação $*$ definida sobre $\mathbb{Z}$ por $a * b = ab$.*

Solução: *Vejamos quais elementos $a \in \mathbb{Z}$ tornam verdadeira a implicação $a*x = a*y \Longrightarrow x = y$.*

$a * x = a * y \Longrightarrow ax = ay$. Daqui, para termos $x = y$, exigimos que $a \neq 0$. Assim, todo elemento não nulo de $\mathbb{Z}$ é regular.

Exemplo 296 *Determinar os elementos regulares, caso existam, da operação $*$ definida sobre $\mathbb{Z}$ por $a * b = a + b - 2$.*

Solução: *Vejamos quais elementos $a \in \mathbb{Z}$ tornam verdadeira a implicação $a*x = a*y \Longrightarrow x = y$.*

$a * x = a * y \Longrightarrow a + x - 2 = a + y - 2$. Daqui, $x = y$, independente quem seja a. Portanto, todo elemento de $\mathbb{Z}$ é regular.

Exemplo 297 *Determinar os elementos singulares, caso existam, da operação $*$ definida sobre $\mathbb{Z}$ por $a * b = ab$.*

Solução: *Vejamos quais elementos $a \in \mathbb{Z}$ tornam verdadeira a igualdade $a * x = a * x = a$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.*

$a * x = a \Longrightarrow ax = a \Longrightarrow a = 0$. Assim, zero é elemento singular.

Exemplo 298 *Determinar os elementos singulares, caso existam, para a operação $*$ definida sobre $A = \mathbb{Q} - \{1\}$ por $a * b = ab - 2$.*

Solução: *Vejamos quais elementos $a \in A$ tornam verdadeira a igualdade $a * x = a * x = a$, para todo $x \in A$.*

$a * x = a \Longrightarrow ax - 2 = a \Longrightarrow a = \dfrac{2}{x-1}$.

Assim, os elementos singulares de A pela operação $*$ são todos os elementos da forma $a = \dfrac{2}{x-1}$, com $x \neq 1$.

8.3.6 Propriedade distributiva

Aqui consideramos duas operações binárias definidas sobre um conjunto $A \neq \emptyset$.

Definição 64 *Dadas as operações $*$ e $\#$ definida sobre A. Dizemos que:*

1. *$*$ é distributiva à esquerda com relação a $\#$ se: $a*(b\#c) = (a*b)\#(a*c), \quad \forall a,b,c \in A$;*
2. *$*$ é distributiva à direita com relação a $\#$ se: $(a\#b)*c = (a*c)\#(b*c), \quad \forall a,b,c \in A$.*

Exemplo 299 *Sejam $+$ e $\cdot$ as operações usuais de adição e multiplicação definidas sobre $\mathbb{Q}$. A multiplicação é distributiva em relação à adição.*

Solução: *Esta uma propriedade já conhecida de conjuntos numéricos.*

Exemplo 300 *Sejam $*$ e $@$ duas operações definidas sobre $\mathbb{Z}$ por $a*b = ab-1$ e $a@b = a+b-1$, respectivamente. Verificar se $*$ é distributiva à esquerda com relação a $@$.*

Solução: *Sejam $a,b,c \in \mathbb{Z}$ quaisquer. Então:*

$a*(b@c) = a*(b+c-1) = a(b+c-1)-1 = ab+ac-a-1$

$(a*b)@(a*c) = (ab-1)@(ac-1) = ab-1+ac-1-1 = ab+ac-3$

Claramente, $a*(b@c) \neq (a*b)@(a*c)$. Portanto, $*$ não é distributiva à esquerda com relação a $@$.

Exemplo 301 *Sejam $*$ e $@$ duas operações definidas sobre $\mathbb{R}$ por $a*b = ab$ e $a@b = a+b-1$, respectivamente. Verificar se $*$ é distributiva à direita com relação a $@$.*

Solução: *Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$. Então:*

$(b@c)*a = (b+c-1)*a = (b+c-1)a = ab+ac-a$

$(b*a)@(c*a) = (ab)@(ac) = ab+ac-1$

Claramente, $(b@c)*a =\neq (b*a)@(c*a)$. Portanto, $*$ não é distributiva à direita com relação a $@$.

8.4 Estruturas Algébricas

Nesta seção apresentamos de forma introdutória o que se entende por estrutura algébrica.

Para essa finalidade, precisamos do conceito de operação binária interna e operação externa. O primeiro abordamos na seção anterior, o segundo damos a seguir.

Definição 65 *Sejam A e E conjuntos não vazios. Uma operação externa definida sobre A é uma função $f : E \times A \longrightarrow A$.*

Assim, para quaisquer $a \in A$, $\lambda \in E$ temos

$$f : \underset{(\lambda,a)}{E \times A} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{f(\lambda,a)}{A}$$

O conjunto A é chamado conjunto base e o conjunto E é chamado domínio de operações.

Definição 66 (Estrutura Algébrica) *Sejam $A \neq \emptyset$ e $*_1, *_2, *_3, \ldots, *_n$ um número finito de operações binárias internas ou externas definidas sobre A. Uma estrutura algébrica, é uma $(n+1)$-upla, formada pelo conjunto A, chamado de suporte da estrutura e as n operações definidas nele. Denotamos a estrutura por $(A, *_1, *_2, *_3, \ldots, *_n)$.*

Nos exemplos a seguir apresentamos algumas estruturas algébricas comuns que aparecem em matemática.

Exemplo 302 *$(\mathbb{N}, +)$ é uma estrutura algébrica*

Exemplo 303 *$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é uma estrutura algébrica. Esta estrutura é conhecida como anel dos inteiros.*

Exemplo 304 *$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é uma estrutura algébrica. Esta estrutura é conhecida como corpo dos racionais.*

Exemplo 305 *Para $A \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$ é uma estrutura algébrica*

Exemplo 306 *Para $V \neq \emptyset$, $(V, +, \cdot)$ é uma estrutura algébrica, onde $\cdot$ é uma operação externa com domínio de operações $\mathbb{R}$. Esta estrutura é conhecida como espaço vetorial real.*

Para o propósito destas notas, centramos nossa atenção em estruturas algébricas definidas por operações binárias internas. Nas seções a seguir apresentamos as estruturas algébricas definidas por uma operação binária interna e, as definidas por duas operações binárias internas.

8.5 Estruturas Algébricas definidas por uma operação

Nesta seção, consideramos um conjunto $A \neq \emptyset$ e uma operação binária definida sobre A que satisfaz alguma das propriedades mencionadas na seção 7.2. Daremos nome para a estrutura $(A, *)$.

8.5.1 Semigrupo

Definição 67 *A estrutura algébrica $(A, *)$ é chamada de semigrupo se $*$ é associativa.*

Adicionalmente, se $*$ é comutativa, $(A, *)$ é um semigrupo comutativo.

Exemplo 307 *$(\mathbb{N}, +)$ é um semigrupo.*
Solução: *De fato, a operação $+$ é associativa, pois $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 308 *$(\mathbb{Q}, +)$ é um semigrupo.*
Solução: *Exercício!*

Exemplo 309 *$(\mathbb{Q}, *)$, onde $a * b = a + b + ab$ é um semigrupo.*
Solução: *De fato, sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$.*
$a * (b * c) = a * (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = abc + ab + ac + bc + a + b + c$
$(a * b) * c = (a + b + ab) * c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = abc + ab + ac + bc + a + b + c$
Claramente, $a * (b * c) = (a * b) * c$. Portanto, $(\mathbb{Q}, *)$ é um semigrupo.

Exemplo 310 *Seja $A = \{a, b, c\}$ e $*$ a operação definida pela tabela de Cayley definida no exemplo 276. Mostre que $(A, *)$ é um semigrupo.*
Solução: *De fato, como foi visto no exemplo 267, a operação é associativa.*

8.5.2 Monoide

Definição 68 *A estrutura algébrica $(A, *)$ é chamada de monoide se $*$ é associativa e possui elemento neutro.*

Adicionalmente, se $*$ é comutativa, dizemos que $(A, *)$ é um monoide comutativo.

Exemplo 311 *$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ são monoides comutativos.*

Solução: *Exercício!*

Seja $A = \{a, b, c\}$ e $*$ a operação definida pela tabela de Cayley definida no exemplo 276. É $(A, *)$ um monoide?

Solução: *Não, pois embora $*$ seja associativa, a operação $*$ não possui elemento neutro.*

Exemplo 313 *A estrutura $(\mathbb{Z}, *)$, onde $*$ é dada por $a * b = a + b - 1$ é um monoide comutativo?*

Solução: *Sim, pois já vimos em exemplos anteriores que a operação $*$ é comutativa, associativa e possui elemento neutro $e = 1$.*

Exemplo 314 *Seja $A \neq \emptyset$. A estrutura $(\mathcal{P}(A), *)$, onde $*$ é dada por $B * C = B \cup C$ é um monoide comutativo?*

Solução: *Sim, pois a operação união de conjuntos é comutativa, associativa e possui elemento neutro, o conjunto vazio.*

8.5.3 Grupo

Definição 69 *A estrutura algébrica $(A, *)$ é chamada de grupo se $*$ é associativa, possui elemento neutro e cada elemento $a \in A$ é simetrizável.*

Adicionalmente, se $*$ é comutativa, a estrutura $(A, *)$ é dita de grupo abeliano.

Exemplo 315 *$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ são grupos abelianos.*

Solução: *Exercício!*

Exemplo 316 *Seja $A = \{a, b, c\}$ e $*$ a operação definida pela tabela de Cayley definida no exemplo 276. É $(A, *)$ um grupo?*

Solução: *Não, pois embora $*$ seja associativa, a operação $*$ não possui elemento neutro.*

Exemplo 317 *A estrutura $(\mathbb{Z}, *)$, onde $*$ é dada por $a * b = a + b - 1$ é um grupo comutativo?*

Solução: *Sim, pois já vimos em exemplos anteriores que a operação $*$ é comutativa, associativa e possui elemento neutro $e = 1$. Além disso, todo $a \in \mathbb{Z}$ possui simétrico pela operação $*$.*

Exemplo 318 *Seja $A \neq \emptyset$. A estrutura $(\mathcal{P}(A), *)$, onde $*$ é dada por $B * C = B \cup C$ é um grupo?*

Solução: *Não, pois embora saibamos que a operação de união de conjuntos é comutativa, associativa e possui elemento neutro, o conjunto vazio. Nenhum elemento diferente do conjunto vazio possui simétrico.*

8.6 Estruturas Algébricas definidas por duas operações

Nesta seção, consideramos um conjunto $A \neq \emptyset$ e duas operação binárias definidas sobre A que satisfaz alguma das propriedades mencionadas na seção 7.2.

Para manter coerência com as notações que aparecem em disciplinas especificas de álgebra, as duas operações serão simbolizadas por $+$ e $\cdot$. Daremos nome para a estrutura algébrica $(A+, \cdot)$.

8.6.1 Pseudo Anel

Definição 70 *A estrutura algébrica* $(A, +, \cdot)$ *é chamada de pseudo anel se* $(A, +)$ *é um semigrupo comutativo com elemento neutro,* $(A, \cdot)$ *é um semigrupo e,* $\cdot$ *é distributivo em relação a* $+$.

Observações:

1. O elemento neutro da operação $+$ é dito elemento nulo ou zero e denotado por 0.
2. Se $\cdot$ é comutativo o pseudo anel é dito pseudo anel comutativo.
3. Se $\cdot$ possui elemento neutro, a estrutura $(A, +, \cdot)$ é um pseudo anel unitário.

Exemplo 319 *Considerando* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. *A estrutura* $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, *é um pseudo anel unitário.*
Solução: *Exercício!*

8.6.2 Anel

Definição 71 *A estrutura algébrica* $(A, +, \cdot)$ *é chamada de anel se* $(A, +)$ *é um grupo comutativo,* $(A, \cdot)$ *é um semigrupo e,* $\cdot$ *é distributivo em relação a* $+$.

Observações:

1. O elemento simétrico de $a \in A$ pela operação $+$ é chamado de elemento oposto ou inverso e denotado por $-a$.
2. Se $\cdot$ é possui elemento neutro, a estrutura $(A, +, \cdot)$ é chamada de anel unitário.
3. O elemento neutro de $\cdot$ é denotado por 1.

Exemplo 320 *A estrutura* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, *é um anel unitário.*
Solução: *Exercício!*

8.6.3 Corpo

Definição 72 *A estrutura algébrica* $(K, +, \cdot)$ *é chamada de corpo se* $(K, +, \cdot)$ *é um anel unitário, no qual todo elemento de* K *diferente de zero possui simétrico com relação à operação* $\cdot$.

Exemplo 321 *A estrutura* $(\mathbb{Q}^*, +, \cdot)$, *é um corpo.*
Solução: *Exercício!*

Exemplo 322 *A estrutura* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *é um corpo.*
Solução: *Exercício!*

8.7 Exercícios

EXERCÍCIOS

1. Sobre $\mathbb{Q}$ define-se a operação $*$ por $a * b = 2a + ab + 2b$. Determinar o valor de verdade das seguintes afirmações:

   (a) $\frac{3}{4} * \frac{4}{3} = \frac{77}{12}$ (b) $*$ é associativa (c) 1 é o elemento neutro de $*$.

2. Em que $\mathbb{Q}$ definimos a operação $*$ por $a * b = a - b + 2$. Se a^{-1} representa o inverso de a sob a operação $*$. Encontrar o conjunto solução de $x * 2^{-1} = 5^{-1} * x$.

3. Em $A = \mathbb{Q} - \{3\}$ define-se a operação $*$ por $a * b = a + b + \frac{1}{3}ab$. Estabelecer o valor de verdade das seguintes afirmações:

   (a) $\forall a, b \in A,\ a * b = b * a$ (b) $\forall a, b, c \in A,\ (a * b) * c = a * (b * c)$

   (c) $\exists! e \in A / a * e = a,\ \forall a \in A$ (d) $\forall a \in A,\ a^{-1} = \dfrac{3a}{3 + a}$

4. Entre os conjuntos, define-se a operação $*$ por $A * B = A^c \cup B^c$, para todo conjunto A e B. Da afirmações a seguir, quais são verdadeiras?

   (a) $A^c * a^c = a$, (b) $(A * A) * (B * B) = A \cup B$, (c) $(A * B) * (A * B) = A \cap B$

5. Em $Q^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, definimos a operação $*$ por $a * b = 3ab$. Avaliar o valor de verdade de:

   (a) $*$ é associativa (c) O inverso de 1/4 em relação à operação $*$ é 4/3.

   (b) $*$ é comutativa (d) $\exists! y \in Q^* : x * y = y * x,\ \forall x \in Q^*$

6. Sobre os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ definem-se as operações $*$, #, @ conforme tabelas abaixo. Encontrar o valor de verdade das afirmações dadas.

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	1	1
3	3	1	1	4
4	4	2	3	4

#	-1	0	1	2
-1	0	1	2	-1
0	1	2	-1	0
1	2	-1	0	1
2	-1	0	1	2

@	0	2	4	6	8
0	4	6	8	0	2
2	6	8	0	2	4
4	8	0	2	4	6
6	0	2	4	6	8
8	2	4	6	8	0

   (a) A equação $x * 2 = 1$ possui solução única.

   (b) $\forall x, y \in A$ é válido $x * y = y * x$

   (c) $(2 * 3) * [3 * (4 * 1)] = 4$

   (d) Todo elemento de B possui inverso pela operação #.

   (e) $e = 6$ é o elemento neutro para @.

   (f) Se $x = [(-1)^{-1} \# (2)^{-1}]^{-1}$ e $y = (3 * 4)@(2\#2) + 1/2$, então $x + y = 1/3$ em $\mathbb{Q}$.

   (g) A operação # é comutativa e associativa.

   (h) Se $[(x^{-1}@2^{-1})@(6@8)^{-1}]^{-1} = 2$, então $x = 2$.

   (i) Somente duas das operações possuem elemento neutro.

(j) Somente duas das operações é comutativa.

(k) As três operações são associativas.

(l) Se $[(x@2)^{-1}\#1] * 3 * 1 = 3$, então o inverso de $y = x/3$ por # é 1.