MAT146 - Cálculo I - Teste da Primeira Derivada

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Teorema (Teste da Derivada Primeira)

Sejam f uma função contínua em (a, b) e $c \in (a, b)$. Suponha que f' exista em todos os pontos do intervalo (a, b) exceto possivelmente em c.

(i) *Se $f'(x) > 0$, para $x \in (c - \delta, c)$ e $f'(x) < 0$, para $x \in (c, c + \delta)$, para algum $\delta > 0$, então f terá um valor máximo relativo em c.*

(ii) *Se $f'(x) < 0$, para $x \in (c - \delta, c)$ e $f'(x) > 0$, para $x \in (c, c + \delta)$, para algum $\delta > 0$, então f terá um valor mínimo relativo em c.*

Demonstração:[Para consulta] Seja (d, c) o intervalo para o qual $f'(x) > 0$. Pelo teorema **??**, f é crescente em $[d, c]$. Agora, seja (c, e) o intervalo para o qual $f'(x) < 0$. Pelo teorema **??**, f é decrescente em $[c, e]$. Como f é crescente em $[d, c)$, para x_1 em $[d, c]$ e $x_1 \neq c$, temos $f(x_1) < f(c)$. Analogamente, Como f é decrescente em $[c, e]$, para x_2 em $[d, c]$ e $x_2 \neq c$, temos $f(x_2) > f(c)$. Logo f tem um valor máximo relativo em c.
A demostração do item (2) é análoga. ∎

Exemplo

Dada a função

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-4),$$

vamos determinar os pontos críticos, identificar os intervalos onde a função é crescente, decrescente e determinar os extremos locais e absolutos, caso existam.

Primeiramente, observe que $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1) \\ &= \frac{4(x-1)}{3x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Exemplo (Continuação)

Logo, $f'(x) = 0$ *para* $x = 1$ *e* $f'(x)$ *não existe para* $x = 0$. *Portanto, os números críticos de* f *são* $x = 0$ *e* $x = 1$. *Como* $f(0) = 0$ *e* $f(1) = -3$, *os pontos críticos de* f *são*

$$(0, 0) \quad e \quad (1, -3).$$

Iremos agora determinar os intervalos de crescimento e decrescimento. Como

$$3x^{\frac{2}{3}} > 0 \quad \text{para todo} \quad x \neq 0$$

o sinal de f' *dependera apenas da expressão* $4(x - 1)$.

Exemplo (continuação)

Uma vez que

$$4(x-1) > 0 \quad \textit{para} \quad x > 1$$

e

$$4(x-1) < 0 \quad \textit{para} \quad x < 1,$$

temos

$$f'(x) > 0 \quad \textit{para} \quad x > 1$$

e

$$f'(x) < 0 \quad \textit{para} \quad x < 1.$$

Pelo teste da derivada primeira, f não apresenta um valor extremo em $x = 0$ (f' não muda de sinal) e f apresenta um mínimo local em $f(1) = -3$.

Observe também que f é decrescente em $(-\infty, 1]$ e crescente em $[1, \infty)$. Portanto, $f(x) > f(1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$f(1) = -3$$

também é mínimo absoluto.

Exemplo

Dada a função

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x,$$

vamos determinar os pontos críticos, identificar os intervalos onde a função é crescente, decrescente e determinar os extremos locais, caso exitam.

Podemos notar que a função é contínua e derivável.
Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 3)'e^x + (x^2 - 3)(e^x)' \\ &= 2xe^x + (x^2 - 3)(e^x) \\ &= (x^2 + 2x - 3)e^x. \end{aligned}$$

Exemplo (Continuação)

Como $e^x \neq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0$$

$$(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3 \quad ou \quad x = 1.$$

Logo, os números críticos de f *são* $x = -3$ *e* $x = 1$ *e os pontos críticos são*

$$(-3, -6e^{-3}) \quad e \quad (1, -2e).$$

Logo,

$$f'(x) > 0 \quad \text{nos intervalos} \quad (-\infty, -3) \quad \text{e} \quad (1, \infty)$$

e

$$f'(x) < 0 \quad \text{no intervalo} \quad (-3, 1).$$

Assim, f é crescente no intervalo $(-\infty, -3]$ e no intervalo $[1, \infty)$ e é decrescente no intervalo $[-3, 1]$. Pelo Teste da Derivada Primeira,

$$(-3, -6e^{-3}) \quad \text{é um mínimo local e}$$

$$(1, -2e) \quad \text{é um máximo local.}$$

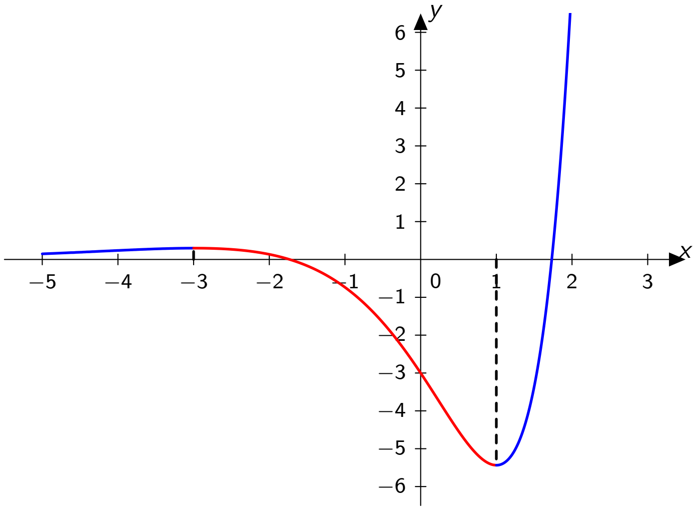

Figura : Gráfico da função f.