O MÉTODO DA BISSEÇÃO

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

MÉTODO DA BISSEÇÃO

Solução aproximada da equação:

$$f(x) = 0.$$

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- Consideremos que a equação $f(x) = 0$ tem uma solução única $\bar{x}$ em um intervalo $[a, b]$, com a função f satisfazendo as condições do TVI em $[a, b]$.

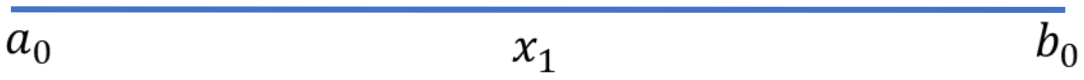
- f é contínua em $[a, b]$, com $f(a).f(b) < 0$ ($f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários).

- O Método da Bisseção é um método iterativo que consiste na construção de uma sequência de aproximações $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, para a solução $\bar{x}$ do seguinte modo:

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- Inicialmente, renomeamos o intervalo $[a, b]$, fazendo $a = a_0$ e $b = b_0$, ou seja, o intervalo inicial de busca passa a ser denotado por $[a_0, b_0]$.

- O primeiro termo da sequência de aproximações, x_1, é tomado como sendo o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$, isto é: $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.



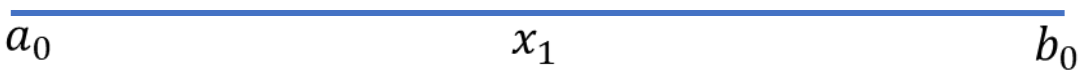
- Se $f(x_1) = 0$, então x_1 já seria a solução da equação (uma solução exata), e não teríamos mais o que fazer. Caso contrário:

  i) Se $f(x_1).f(a_0) < 0$, significa que a solução $\bar{x}$ deve estar entre a_0 e x_1. Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$ tomando: $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$.

  ii) Se $f(x_1).f(a_0) > 0$, significa que a solução $\bar{x}$ deve estar entre x_1 e b_0. Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$ tomando: $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$.

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- O primeiro termo da sequência de aproximações, x_1, é tomado como sendo o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$, isto é: $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.



- Se $f(x_1) = 0$, então x_1 já seria a solução da equação (uma solução exata), e não teríamos mais o que fazer. Caso contrário:

  i) Se $f(x_1).f(a_0) < 0$, significa que a solução $\bar{x}$ deve estar entre a_0 e x_1. Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$ tomando: $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$.

  ii) Se $f(x_1).f(a_0) > 0$, significa que a solução $\bar{x}$ deve estar entre x_1 e b_0. Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$ tomando: $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$.

- Seja qual for o caso (i ou ii), teremos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$, contendo a solução $\bar{x}$ e tal que $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ e $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$, isto é, o novo intervalo de busca tem como comprimento a metade do comprimento do intervalo de busca anterior.

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- O segundo termo da sequência de aproximações, x_2, é tomado, então, no novo intervalo $[a_1, b_1]$, de modo análogo ao primeiro termo, como ponto médio deste intervalo, isto é: $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

$a_1 \qquad x_2 \qquad b_1$

- Se $f(x_2) = 0$, então x_2 já seria a solução da equação (uma solução exata), e não teríamos mais o que fazer. Caso contrário:

  i) Se $f(x_2).f(a_1) < 0$, significa que a solução $\bar{x}$ deve estar entre a_1 e x_2. Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_2, b_2]$ tomando: $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_2$.

  $a_2 \qquad b_2$

  ii) Se $f(x_2).f(a_1) > 0$, significa que a solução $\bar{x}$ deve estar entre x_2 e b_1. Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_2, b_2]$ tomando: $a_2 = x_2$ e $b_2 = b_1$.

  $a_2 \qquad b_2$

- Seja qual for o caso (i ou ii), teremos um novo intervalo de busca $[a_2, b_2]$, contendo a solução $\bar{x}$ e tal que$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ e $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$, isto é, o novo intervalo de busca tem como comprimento a metade do comprimento do intervalo de busca anterior.

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- De modo análogo, é definido o terceiro termo da sequência de aproximações, x_3, como ponto médio do intervalo $[a_2, b_2]$, seguindo o mesmo critério dos casos anteriores para se obter o próximo intervalo de busca $[a_3, b_3]$. E, assim, o processo se repete sucessivamente, gerando uma sequência de intervalos $[a_n, b_n]$ e uma sequência de aproximações para a solução $\bar{x}$, dada por:

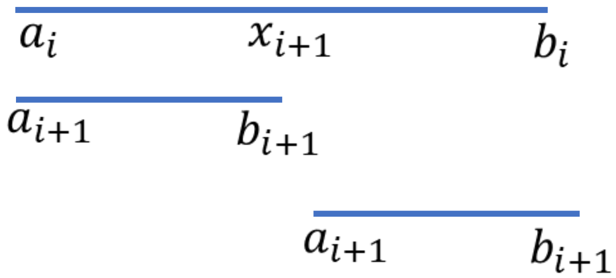
$$\boxed{x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n = 0,1,2, \ldots).}$$

$$\boxed{f(a_n).f(b_n) < 0}$$

- Cada intervalo $[a_i, b_i]$ da sequência contém uma aproximação x_{i+1}, e o intervalo seguinte $[a_{i+1}, b_{i+1}], i = 0,1,2, \ldots,$ é obtido seguindo o critério (teste):

  i) Se $f(x_{i+1}).f(a_i) < 0$, então: $a_{i+1} = a_i$ e $b_{i+1} = x_{i+1}$.

  ii) Se $f(x_{i+1}).f(a_i) > 0$, então: $a_{i+1} = x_{i+1}$ e $b_{i+1} = b_i$.



- $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots \supset [a_n, b_n] \ldots$
- $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$

$$\boxed{b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}}$$

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

- A sequência (x_n) de aproximações criada pelo Método da Bisseção converge para a solução $\bar{x}$ da equação $f(x) = 0$. Por isso, dizemos que ele é um método convergente. Vejamos porque isso ocorre:

$\boxed{\text{Mostremos que a sequência } (x_n) \text{ converge}}$

(i) Da sequência de intervalos $[a_n, b_n]$ criada pelo método, temos duas sequências $(a_n), (b_n)$.

(ii) Como $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots \supset [a_n, b_n] \ldots$, tem-se que $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$, para todo $n = 0,1,2, \ldots$, ou seja, (a_n) é monótona não-decrescente, e (b_n) é monótona não-crescente.

(iii) Além disso: $a_0 \leq a_n \leq b_0$ e $a_0 \leq b_n \leq b_0$, ou seja, (a_n) e (b_n) são sequências limitadas

(iv) De (ii) e (iii), concluímos que (a_n) e (b_n) convergem.

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

(v) De $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, tem-se que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. E, como (a_n) e (b_n) convergem, segue que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r, r \in \mathbb{R}$.

(vi) De $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, segue, então que $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{r+r}{2} = r$, ou seja: $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

(vii) Portanto, acabamos de mostrar que a sequência (x_n) converge para r. Só falta mostrar que $r = \bar{x}$.

Mostremos, agora, que $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$:

(i) Lembremos, inicialmente, que a_n e b_n são tais que $f(a_n).f(b_n) < 0$.

(ii) Como f é contínua e a_n e b_n são convergentes, tem-se que $f(a_n)$ e $f(b_n)$ também são sequências convergentes e $\lim_{n\to\infty} f(a_n).f(b_n) \leq 0$.

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

(iii) O fato de f ser contínua também garante que $f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \leq 0.$

(iv) Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r$, tem-se que $f(r).f(r) \leq 0$, ou seja: $[f(r)]^2 \leq 0.$

(v) Como $f(r) \in \mathbb{R}$, podemos garantir que $f(r) = 0$, ou seja: r é solução da equação $f(x) = 0.$

(vi) Mas $\bar{x}$ é a solução única da equação $f(x) = 0$. Logo $r = \bar{x}$. .

A sequência de aproximações de $\bar{x}$ construída pelo Método da Bisseção converge para $\bar{x}$.

CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

Como o método da bisseção estabelece uma sequência de aproximações para a solução $\bar{x}$ da equação $f(x) = 0$, é preciso estabelecer um critério de parada do método, isto é, em qual termo da sequência podemos parar e considerá-lo como uma boa aproximação de $\bar{x}$. Na verdade, isso será feito em todos os métodos iterativos que veremos no curso.

Lembremos que a cada intervalo $[a_n, b_n]$ temos uma aproximação x_{n+1}, $n = 0,1,2, ...$ Portanto, o que queremos saber é: para qual valor de n, o termo x_{n+1} é uma boa aproximação da solução $\bar{x}$.
Como "boa aproximação", o que se quer dizer é uma aproximação que, comparada ao valor exato $\bar{x}$, corresponda a um erro suficientemente pequeno (que atenda a uma dada precisão).

Consideraremos dois tipos de erros entre a solução exata $\bar{x}$ e uma aproximação x_{n+1}:

Erro absoluto: $E_{abs} = |\bar{x} - x_{n+1}|$

Erro relativo: $E_{rel} = \frac{|\bar{x} - x_{n+1}|}{|\bar{x}|}$

CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

Erro absoluto: $E_{abs} = |\bar{x} - x_{n+1}|$

Erro relativo: $E_{rel} = \frac{|\bar{x} - x_{n+1}|}{|\bar{x}|}$

Como a solução $\bar{x}$, presume-se, é desconhecida (por isso, um método numérico para obtê-la de forma aproximada), é necessário ter uma ideia do erro (absoluto ou relativo) sem usar $\bar{x}$.

Observe que $a_n \leq \bar{x} \leq b_n$. Logo $|\bar{x} - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n|$.

a_n $\qquad$ x_{n+1} $\qquad$ b_n

$\boxed{x_n = a_n \text{ ou } x_n = b_n}$

Assim, no critério de parada, ao invés de usarmos o erro entre a solução exata $\bar{x}$ e uma aproximação, usaremos o erro entre duas aproximações consecutivas x_n e x_{n+1}.

CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

O CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO FICA ASSIM: Se o erro (absoluto ou relativo) entre dois termos consecutivos, x_n e x_{n+1} for menor que um dado ε $(\varepsilon > 0)$, então para-se o método e x_{n+1} é o valor aproximado de $\bar{x}$ $(\bar{x} \approx x_{n+1})$, com erro (absoluto ou relativo) menor que ε.

Usando o erro absoluto:

Se $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro absoluto menor que ε.

Usando o erro relativo:

Se $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro relativo menor que ε.

O número ε é um indicador de precisão do método e, nos métodos aqui trabalhados, será tomado como uma potência inteira negativa de 10, ou seja: $\varepsilon = 10^{-k}, k \varepsilon \mathbb{N}$ $(\varepsilon = 0.1; \varepsilon = 0.01; \varepsilon = 0.001 \ldots)$ (tão pequeno quanto seja necessário, dependendo da natureza do problema).

EXEMPLO

Solução aproximada da equação $x^3 + cosx = 0$.

Como vimos em aula anterior, esta equação possui uma única solução $\bar{x}$ no intervalo $[-1,0]$, sendo a função $f(x) = x^3 + cosx$ contínua em $[-1,0]$, com $f(-1) = -0.4597 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$. Vamos usar o método da bisseção para encontrar uma aproximação de $\bar{x}$, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.1$.

RESOLVENDO O EXEMPLO

$$f(x) = x^3 + cosx,\ f(-1) = -0.4597 < 0 \text{ e } f(0) = 1 > 0.$$

ATENÇÃO: CALCULADORA EM RADIANOS!!

Temos: $a_0 = -1$ e $b_0 = 0$. Então $x_1 = \frac{-1+0}{2} = -0.5.$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_1) = f(-0.5) = 0.7525 > 0$, sinal contrário de $f(a_0) = f(-1) < 0$. Logo: $a_1 = a_0 = -1$ e : $b_1 = x_1 = -0.5.$

Temos: $a_1 = -1$ e $b_1 = -0.5$. Então $x_2 = \frac{-1-0.5}{2} = -0.75.$

$$|x_2 - x_1| = 0.25 > 0.1$$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_2) = f(-0.75) = 0.3098 > 0$, sinal contrário de $f(a_1) = f(-1) < 0$. Logo: $a_2 = a_1 = -1$ e : $b_2 = x_2 = -0.75.$

Temos: $a_2 = -1$ e $b_2 = -0.75$. Então $x_3 = \frac{-1-0.75}{2} = -0.875.$

$$|x_3 - x_2| = 0.125 > 0.1$$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_3) = f(-0.875) = -0.0289 < 0$, mesmo sinal de $f(a_2) = f(-1) < 0$. Logo: $a_3 = x_3 = -0.875$ e : $b_3 = b_2 = -0.75.$

RESOLVENDO O EXEMPLO

Temos: $a_3 = -0.875$ e $b_3 = -0.75$. Então $x_4 = \frac{-0.875-0.75}{2} = -0.8125$.

$\boxed{|x_4 - x_3| = 0.0625 < 0.1}$

$\boxed{\text{Portanto } \bar{x} \approx x_4 = -0.8125\text{, com erro absoluto menor que } \varepsilon = 0.1}$