

MAT146 - Cálculo I - Integração de Funções Trigonométricas

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Até o momento, somos capazes de resolver algumas integrais trigonométricas relativamente simples. As integrais

$$\int \sin x dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \sec^2 x dx$$

são exemplos de integrais imediatas.

Já as integrais

$$\int \sin(2x) dx, \quad \int \tan x dx, \quad \int \sin(x) \cos(x) dx$$

são exemplos de integrais que são resolvidas utilizando o método de substituição.

Nosso intuito agora é resolver integrais envolvendo produtos e potências de algumas funções trigonométricas.

Para isso, necessitaremos das seguintes relações trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{sen}(a + b)] .$$

Primeiramente abordaremos integrais com produto de senos e cossenos com argumentos distintos. Neste caso, utilizaremos as três últimas identidades anteriores.

Exemplo

Calcule a seguinte integral $\int \sin(2x) \cos(3x) dx$.

Primeiramente, devemos transformar o produto em soma, utilizando as identidades acima. Utilizando as relações trigonométricas apresentadas acima,

$$\begin{aligned} \sin(2x) \cos(3x) dx &= \frac{1}{2} (\sin(2x + 3x) + \sin(2x - 3x)) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(5x) + \sin(-x)) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(5x) - \sin(x)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int \sin(2x) \cos(3x) dx &= \frac{1}{2} \left(\int \sin 5x dx - \int \sin x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 5x}{5} + \cos x \right) + C \\ &= -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C.\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int \sin(3x) \sin(5x) dx$.

Note que

$$\begin{aligned} \sin(3x) \sin(5x) dx &= \frac{1}{2} (\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(-2x) - \cos(8x)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2x) - \cos(8x)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int \sin(3x) \sin(5x) dx &= \frac{1}{2} \left(\int \cos(2x) dx - \int \cos(8x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin 8x}{8} \right) + C \\ &= \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(8x)}{16} + C.\end{aligned}$$

Exemplo

Resolva $\int \cos(3x) \cos(5x) dx$.

Observe que

$$\begin{aligned}\cos(3x) \cos(5x) dx &= \frac{1}{2} [\cos(3x + 5x) + \cos(3x - 5x)] \\ &= \frac{\cos(8x)}{2} + \frac{\cos(-2x)}{2} \\ &= \frac{\cos(8x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int \cos(3x) \cos(5x) dx &= \int \frac{\cos(8x)}{2} dx + \int \frac{\cos(2x)}{2} dx \\ &= \frac{\sin(8x)}{16} + \frac{\sin(2x)}{4} + C.\end{aligned}$$

Agora abordaremos integrais da forma

$$\int \sin^n x \cos^m x dx,$$

onde $n, m \in \mathbb{Z}$, $n, m \geq 0$.

Existem dois casos a serem considerados para resolver este tipo de integral:

- ▶ Pelo menos um dos expoentes é ímpar, ou seja, m é ímpar ou n é ímpar. Neste caso utilizaremos a relação

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

e a integral é resolvida facilmente por uma substituição.

- ▶ Ambos os expoente são pares, ou seja, m é par e n é par. Neste caso, deveremos utilizar as identidades

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{e} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Exemplo

Resolver a integral

$$\int \sen^3 x dx.$$

Como o expoente do seno é ímpar, o procedimento passará por uso da identidade citada no primeiro item e uma substituição. Podemos reescrever a integral da seguinte forma

$$\begin{aligned}\int \sen^3 x dx &= \int \sen^2 x \sen x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sen x dx\end{aligned}$$

Feito isso, a integral é facilmente resolvida pela substituição $u = \cos x$. Daí $du = -\sin x dx$, e

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\&= -\int (1 - u^2) du \\&= \int (u^2 - 1) du \\&= \frac{u^3}{3} - u + C \\&= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.\end{aligned}$$

Exemplo

Resolver a integral

$$\int \cos^6 x \sin^7 x dx.$$

O procedimento é o mesmo descrito anteriormente. Manipularemos o expoente ímpar. Assim,

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x \sin^7 x dx &= \int \cos^6 x \sin^6 x \sin x dx \\ &= \int \cos^6 x (1 - \cos^2 x)^3 \sin x dx \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \cos x$, temos $du = -\sin x dx$ e desta forma,

$$\begin{aligned}\int \cos^6 x \sin^7 x dx &= \int \cos^6 x (1 - \cos^2 x)^3 \sin x dx \\&= - \int u^6 (1 - u^2)^3 du \\&= - \int u^6 (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du \\&= - \int (u^6 - 3u^8 + 3u^{10} - u^{12}) du \\&= - \left(\frac{u^7}{7} - \frac{1}{3} u^9 + \frac{3}{11} u^{11} - \frac{1}{13} u^{13} + C \right) \\&= -\frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{1}{3} \cos^9 x - \frac{3}{11} \cos^{11} x + \frac{1}{13} \cos^{13} x + C.\end{aligned}$$

Exemplo

Resolver a integral

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

Neste caso, ambos os expoente são pares e o procedimento para se resolver é como descrito no segundo caso. Utilizaremos as identidades descritas no segundo caso e desta forma, podemos escrever

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

e

$$\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)(1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x - I_1 + I_2 \right),\end{aligned}$$

onde

$$I_1 = \int \cos^2 2x dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int \cos^3 2x dx.$$

Vamos resolver cada uma delas separadamente utilizando os mesmos procedimentos anteriores.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cos^2 2x dx \\ &= \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 8x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \cos^3 2x dx \\&= \int \cos^2 2x \cos 2x dx \\&= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx\end{aligned}$$

Utilizando a mudança $u = \sin 2x$, temos $du = 2 \cos 2x$ e desta forma,

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2} \int (1 - u^2) du \\&= \frac{1}{2} u - \frac{1}{6} u^3 + C \\&= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64} \sin 8x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$$