MAT146 - Cálculo I - Teoremas Fundamentais do Cálculo

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

Os próximos teoremas fazem conexão entre os conceitos de antiderivada e de integral definida.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então existe a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, que depende somente da função f e dos números a e b e não do símbolo x (chamado variável muda).

Se $a < x < b$, então f também é contínua no intervalo $[a, x]$, pois é contínua em $[a, b]$. Isto implica que a integral $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ existe para cada $x \in (a, b)$.

Nesse sentido, $\int_a^x f(t)dt$ define uma função F, definida no intervalo $[a, b]$, cujo valor funcional é dado por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Note que a variável muda na integral acima é t. A função F depende da variável x e não da variável t.

Teorema ((8) - (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo))

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja $x \in [a, b]$. Defina

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Então F é derivável e além disso,

$$F'(x) = f(x). \qquad (1)$$

(Note que $F'(a) = f'_+(a)$ e $F'(b) = f'_-(b)$.)

Observação

O Teorema (8) *estabelece que a integral definida*

$$\int_a^x f(t)dt$$

é uma antiderivada de f. A equação (1) do Teorema (8), *pode ser escrita da seguinte forma*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

onde $F'(x)$ foi substituido por $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$.

Exemplo (9)

Calcule $\frac{dy}{dx}$, *onde*

$$y(x) = \int_x^3 tcos(t)dt.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dy}\left(\int_x^3 tcos(t)dt\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(-\int_3^x tcos(t)dt\right) \\
&= -xcos(x).
\end{aligned}$$

Exemplo (10)

Calcule $\frac{dy}{dx}$, *onde*

$$y(x) = \int_1^{x^2} cos(t)dt.$$

Solução:

Note que o limite superior de integração não é x, *mas* x^2. *Neste caso* y *é uma função composta*

$$y = \int_1^{u} cos(t)dt \quad e \quad u = x^2.$$

Devemos então aplicar a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t dt\right)\frac{du}{dx} \\ &= \cos(u)\frac{du}{dx} = \cos(x^2).2x. \end{aligned}$$

Teorema ((9) - (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo))

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que

$$g'(x) = f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in [a, b].$$

Então

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a).$$

Exemplo (11)(Revisitando os exemplos (3) e (4))

Calcule

$$\int_0^3 x^2 dx.$$

Solução: Pelo TFC temos que

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^2 dx &= \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^3 \\ &= \frac{3^3}{3} - 0 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Exemplo (12)

Calcule

$$\int_1^4 (x^3 + 3x^2 - 5)dx$$

Solução:

Usando os teoremas (8) *e* (9), *temos*

$$\begin{aligned} \int_1^4 (x^3 + 3x^2 - 5)dx &= \int_1^4 x^3 dx + 3\int_1^4 x^2 dx - 5\int_1^4 dx \\ &= \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x\Big]_1^4 \\ &= (64 + 64 - 20) - (\frac{1}{4} + 1 - 5) \\ &= 112 - \frac{1}{4} = \frac{447}{4} \end{aligned}$$

Exemplo (13)

Calcule

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}dx$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}dx &= arctg(x)\Big]_0^1 \\ &= arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Exemplo (14)

Calcule

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$$

Solução:
Antes de aplicar os limites de integração, precisamos saber qual é a integral indefinida (antiderivada) de

$$\int x\sqrt{1+x}dx$$

Façamos $u = \sqrt{1+x}$, *assim* $u^2 = 1 + x$ *e* $dx = 2udu$. *Substituindo, obtemos*

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \int (u^2-1)u(2udu) = 2\int (u^4-u^2)du$$

$$= \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + c = \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + c$$

Portanto, a integral definida é

$$\begin{aligned}
\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx &= \left.\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 \\
&= \frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{116}{5}
\end{aligned}$$

Regra da Substituição

A seguinte fómula, que segue da Regra da Cadeia para antidiferenciação e do TFC, pode sr usada para calcular integrais como a do Exemplo (14).

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du} \tag{2}$$

Vejamos a aplicação da fórmula (4) no exemplo (14):

Seja $u = \sqrt{1+x}$, assim $u^2 = 1 + x$ e $dx = 2udu$. Além disso, quando $x = 0$ temos que $u = 1$ e quando $x = 3$ temos $u = 2$. Então,

$$\begin{aligned} \int_0^3 x\sqrt{1+x}dx &= 2\int_1^2 (u^4 - u^2)du \\ &= \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3\Big]_1^2 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{116}{15} \end{aligned}$$

Exemplo (15)

Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3(x)cos(x)dx$$

Solução:

Façamos $u = sen(x)$, assim $du = cos(x)dx$. Quando $x = 0$ tem-se $u = 0$ e quando $u = \frac{\pi}{2}$ então $u = 1$. Substituindo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3(x)cos(x)dx &= \int_0^1 u^3 du \\ &= \left.\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Aplicação

Definição

Suponha que f seja uma função integrável em $[a, b]$. O **valor médio** *de f em $[a, b]$ é chamado de* **Média** *e é dado por*

$$Media(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemplo (16)

Seja $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Calcule a média de f em $[-2, 2]$.

Solução:

$$Media(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = Media(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$$

Faça $x = 2sen(t)$, assim $dx = 2cos(t)dt$. Para $x = -2$ tem-se $t = \frac{-\pi}{2}$ e para $x = 2$ tem-se $t = \frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4sen^2(t)}2cos(t)dt = \frac{1}{4}4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)dt \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\Big(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(2t)dt\Big) \\
&= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}sen(2t))\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) - 0) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$Media(f) = \frac{\pi}{2}$$

Veja figura abaixo.

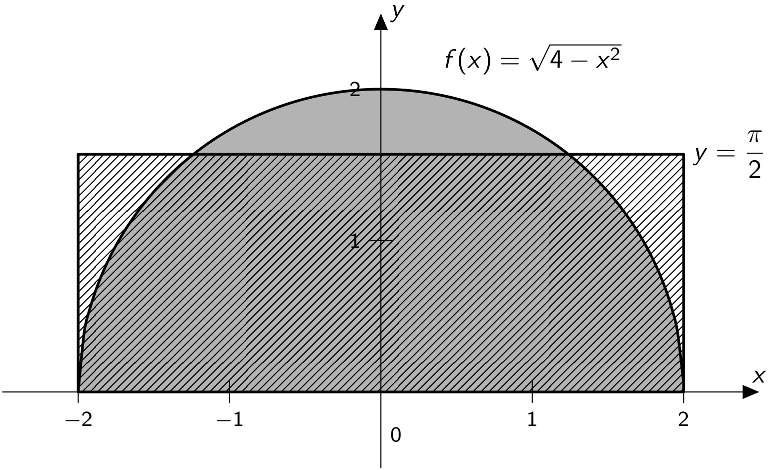

Figura : Observe que a área do semicírculo acima é 2π, que é a mesma área do retângulo com base no intervalo $[-2, 2]$ e altura igual a $Media(f) = \frac{\pi}{2}$.