EDO de Bernoulli

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2022-2

Definição 1

Uma EDO da forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

é chamada **equação de Bernoulli**. Se $n \neq 0$ e $n \neq 1$ esse é um exemplo de EDO não linear.

Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ tem-se

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Isso sugere a mudança de variável

$$v = y^{1-n}.$$

Como

$$v' = (1-n)y^{-n}y' \Leftrightarrow y^{-n}y' = \frac{v'}{1-n}$$

decorre que

$$\begin{aligned}
\frac{v'}{1-n} + p(x)v &= q(x) \\
v' + (1-n)p(x)v &= (1-n)q(x) \\
v' + \phi(x)v &= g(x)
\end{aligned}$$

onde $\phi(x) = (1-n)p(x)$ e $g(x) = (1-n)q(x)$. Assim foi possível transformar uma equação não linear em uma linear e então usamos os métodos aprendidos anteriormente para resolvê-la.

Exemplo: Resolva as EDO's abaixo.

(a) $2x\frac{dy}{dx} + 2y = xy^3$;

(b) $y' = \epsilon y - \sigma y^2$, com $\epsilon > 0$ e $\sigma > 0$;

(c) $y' = \epsilon y - \sigma y^3$, com $\epsilon > 0$ e $\sigma > 0$.

Resposta dos Exemplos:

(a) $y(x) = \pm\left(x + cx^2\right)^{-\frac{1}{2}}, c \in \mathbb{R}$;

(b) $y(x) = \dfrac{\epsilon e^{\epsilon x}}{\epsilon k + \sigma e^{\epsilon x}}, k \in \mathbb{R}$;

(c) $y(x) = \left(\dfrac{\sigma}{\epsilon} + ke^{-2\epsilon x}\right)^{-1/2}, k \in \mathbb{R}$.