MAT146 - Cálculo I - Derivadas de ordem superior

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Derivadas de Ordem Superior

Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. A derivada de f, a função f', será chamada de **derivada primeira** de f ou de **função derivada primeira** de f.

Caso a função f' seja derivável, a derivada de f' será denotada por f'' e chamada de **derivada segunda** de f. Analogamente, se f'' for derivável, a derivada de f'' será denotada por f''' e chamada de **derivada terceira** de f.

Para $n > 3$,, a **derivada n-ésima** da função f, denotada por $f^{(n)}$, é a derivada primeira da função $f^{(n-1)}$ (derivada $(n-1)$-ésima de f).

Assim,

$$f^{(0)} = f$$

$$f^{(1)} = f'$$

$$f^{(2)} = f''$$

$$f^{(3)} = f'''$$

e para $n > 3$ usamos a notação $f^{(n)}$, ou seja, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, ...

Exemplo

Considere a função polinomial

$$f(x) = 2x^5 - x^3 + 8x - 7.$$

Temos que f é derivável e segue que

$$f'(x) = 10x^4 - 3x^2 + 8.$$

Note que f' também é derivável, de onde obtemos

$$f''(x) = 40x^3 - 6x.$$

Novamente, f'' também é derivável, logo

$$f'''(x) = 120x^2 - 6.$$

Assim, f''' também é derivável e

$$f^{(4)}(x) = 240x.$$

O mesmo para $f^{(4)}$,, de onde

$$f^{(5)}(x) = 240.$$

Finalmente, $f^{(5)}$ também é derivável e

$$f^{(6)}(x) = 0.$$

Como $f^{(6)} = 0$, segue que

$$f^{(7)} = f^{(8)} = \dots f^{(n)} = 0,$$

para todo $n > 7$.

Notação de Leibniz

A notação de Leibniz para derivadas de ordem superior é dada a seguir

$$\begin{array}{ccc}
\text{derivada primeira} & \longrightarrow & \dfrac{dy}{dx} \\[2ex]
\text{derivada segunda} & \longrightarrow & \dfrac{d^2y}{dx^2} \\[2ex]
\vdots & & \\[2ex]
\text{derivada enésima} & \longrightarrow & \dfrac{d^ny}{dx^n}.
\end{array}$$

Exemplo

Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$*, sendo*

$$y = x^2\,\mathrm{sen}(x) + e^x.$$

Aplicando as regras de derivação, encontramos

$$\frac{d}{dx}(x^2\,\mathrm{sen}(x) + e^x) = 2x\,\mathrm{sen}(x) + x^2 cos(x) + e^x.$$

Derivando a primeira derivada, obtemos a segunda derivada, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\,\mathrm{sen}(x)+e^x\right) &= \frac{d}{dx}(2x\,\mathrm{sen}(x)+x^2cos(x)+e^x)\\ &= 2\,\mathrm{sen}(x)+2xcos(x)+2xcos(x)-x^2\,\mathrm{sen}(x)+e^x\\ &= (2-x^2)\,\mathrm{sen}(x)+4xcos(x)+e^x.\end{aligned}$$