Famílias de distribuições

Bernoulli, Binomial. Geométrica, Poisson, Uniforme e Normal

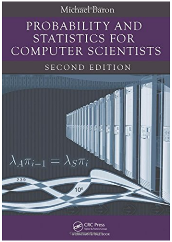
André Gustavo dos Santos

Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF222 - 2022/2

– Fonte do material

Conteúdo dos tópicos 1 e 2 são do livro complementar da disciplina (seções 3.4 e 4.2):



Baron, Michael.
Probability and statistics for computer scientists.
Chapman and Hall/CRC, 2013.

Tópicos da aula

Famílias de distribuição discreta

- Surpreendentemente, muitos fenômenos diferentes podem ser descritos adequadamente pelo mesmo modelo matemático
- No caso, famílias de distribuição: algumas poucas descrevem muitos contextos, diferindo apenas em parâmetros

Distribuição de Bernoulli

Distribuição de Bernoulli

Uma variável aleatória com dois possíveis resultados, 0 ou 1, é chamada variável de Bernoulli e sua distribuição é chamada distribuição de Bernoulli.

- O nome é homenagem ao matemático suíço Jacob Bernoulli
- São as variáveis aleatórias mais simples, apenas dois resultados: 0 ou 1
- Genericamente chamados "falha" e "sucesso" (não necessariamente ruim e bom)
- Exemplos: componentes bons ou defeituosos, que passam ou falham em testes, sinais transmitidos ou perdidos, hardware funcionando ou não, anexos benignos ou maliciosos, sites que contém ou não uma palavra-chave, cara ou coroa, etc

UFV

Distribuição de Bernoulli

- Se $P(1) = p$ é a probabilidade de sucesso, então $P(0) = q = 1 - p$ é a probabilidade de fracasso
- Podemos calcular a esperança matemática e a variância

$$\mathbf{E}(X) = \sum_x xP(x) = (0)(1-p) + (1)(p) = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_x (x-p)^2 P(x) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$$

Distribuição de Bernoulli

Distribuição de Bernoulli

$$\begin{array}{lcl} p & = & \text{probabilidade de sucesso} \\ P(x) & = & \begin{cases} q = 1 - p & \text{if } x = 0 \\ p & \text{if } x = 1 \end{cases} \\ \mathbf{E}(X) & = & p \\ \mathrm{Var}(X) & = & pq \end{array}$$

- Existe uma família de distribuições de Bernoulli, indexadas por um parâmetro p
- Todo p entre 0 e 1 define outra distribuição de Bernoulli
- A distribuição com $p = 0.5$ tem o mais alto nível de incerteza ($\mathrm{Var}(X)$ é máximo)
- Distribuições com p menor ou maior que 0.5 têm menor variância
- Nos extremos $p = 0$ e $p = 1$ temos variáveis não aleatórias 0 e 1, de variância 0

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

Uma variável descrita como o número de sucessos em uma sequência de tentativas independentes de Bernoulli tem distribuição binomial, com parâmetros n, número de eventos, e p, probabilidade de sucesso.

- Também foi estudada por Jacob Bernoulli
- Exemplos: número de componentes defeituosos numa remessa, número de arquivos atualizados numa pasta, número de e-mails com anexo, etc.

Distribuição Binomial

- A função massa de probabilidade binomial é dada por

$$f(x) = \mathbf{P}\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

  que é a probabilidade de exatamente x sucessos nas n tentativas
  - p^x é a probabilidade de x sucessos (multiplicadas porque são independentes)
  - q^{n-x} é a probabilidade das demais $n - x$ serem fracasso
  - $\binom{n}{x}$ é o número de elementos do espaço amostral que formam o evento $\{X = x\}$
- Costuma-se usar uma tabela de distribuição binomial, com valores da fda $F(x)$
- A fmp $f(x)$ pode ser calculada a a partir da fda: $f(x) = F(x) - F(x-1)$

Table A2. Binomial distribution

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \le x\} = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	x	p																		
		.050	.100	.150	.200	.250	.300	.350	.400	.450	.500	.550	.600	.650	.700	.750	.800	.850	.900	.950
1	0	.950	.900	.850	.800	.750	.700	.650	.600	.550	.500	.450	.400	.350	.300	.250	.200	.150	.100	.050
2	0	.903	.810	.723	.640	.563	.490	.423	.360	.303	.250	.203	.160	.123	.090	.063	.040	.023	.010	.003
	1	.998	.990	.978	.960	.938	.910	.878	.840	.798	.750	.698	.640	.578	.510	.438	.360	.278	.190	.098
3	0	.857	.729	.614	.512	.422	.343	.275	.216	.166	.125	.091	.064	.043	.027	.016	.008	.003	.001	.000
	1	.993	.972	.939	.896	.844	.784	.718	.648	.575	.500	.425	.352	.282	.216	.156	.104	.061	.028	.007
	2	1.0	.999	.997	.992	.984	.973	.957	.936	.909	.875	.834	.784	.725	.657	.578	.488	.386	.271	.143
4	0	.815	.656	.522	.410	.316	.240	.179	.130	.092	.063	.041	.026	.015	.008	.004	.002	.001	.000	.000

Distribuição Binomial

Exemplo

Como parte de uma estratégia de publicidade, um provedor de internet seleciona aleatoriamente 20% dos novos usuários para receber uma promoção especial.

Um grupo de 10 novos vizinhos contrata o serviço. Qual a probabilidade de pelo menos 4 serem selecionados para a promoção?

Solução:

- Queremos achar a probabilidade $P\{X \geq 4\}$, sendo X o número de selecionados
- Este é o número de sucessos em 10 tentativas de Bernoulli
- X tem uma distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.2$
- $\mathbf{P}\{X \geq 4\} = 1 - F(3) = 1 - 0.879 = 0.121$

Obs.: o valor de $F(3)$ para $n = 10$ e $p = 0.2$ pode ser obtido da tabela de distribuição binomial

n	x	p										
		.050	.100	.150	.200	.250	.300	.350	.400	.450	.500	.550
1	0	.950	.900	.850	.800	.750	.700	.650	.600	.550	.500	.450
2	0	.903	.810	.723	.640	.563	.490	.423	.360	.303	.250	.203
	1	.998	.990	.978	.960	.938	.910	.878	.840	.798	.750	.698
...		...						...				
10	0	.599	.349	.197	.107	.056	.028	.013	.006	.003	.001	.000
	1	.914	.736	.544	.376	.244	.149	.086	.046	.023	.011	.005
	2	.988	.930	.820	.678	.526	.383	.262	.167	.100	.055	.027
	3	.999	.987	.950	.879	.776	.650	.514	.382	.266	.172	.102
	4	1.0	.998	.990	.967	.922	.850	.751	.633	.504	.377	.262
	5	1.0	1.0	.999	.994	.980	.953	.905	.834	.738	.623	.496

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

$$
\begin{array}{lcl}
n & = & \text{número de tentativas} \\
p & = & \text{probabilidade de sucesso} \\
f(x) & = & \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n \\
\mathbf{E}(X) & = & np \\
\mathrm{Var}(X) & = & npq
\end{array}
$$

Distribuição Binomial

Exemplo

Um jogo emocionante de computador é lançado. Sabe-se que 60% dos jogadores completam todos os níveis e 30% deles comprarão a versão avançada.

Entre 15 jogadores, qual o número esperado que comprará a versão avançada?

Qual a probabilidade que pelo menos 2 a comprem?

Solução:

- Seja X o número de jogadores, entre os 15 (tentativas), que comprarão a versão avançada (sucesso)
- X tem uma distribuição binomial com $n = 15$ e probabilidade de sucesso
  $p = \mathbf{P}\{\text{comprar versão avançada}\}$
  $= \mathbf{P}\{\text{comprar versão avançada}|\text{completar todos níveis}\}\mathbf{P}\{\text{completar todos níveis}\}$
  $= (0.30)(0.60) = 0.18$
- $\mathbf{E}(X) = np = (15)(0.18) = 2.7$
- $\mathbf{P}\{X \geq 2\} = 1 - P(0) - P(1) = 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1} = 0.7813$

Obs.: calculado pela fórmula porque $p = 0.18$ geralmente não aparece em tabelas

Distribuição geométrica

Distribuição geométrica

O número de tentativas independentes de Bernoulli até o primeiro sucesso tem distribuição geométrica

- Exemplos: lançar moeda até sair cara, uma ferramenta de busca que analisa uma lista de sites até encontrar um que contém uma palavra chave, um gerente que entrevista candidatos um por um até encontrar um para preencher a vaga., etc
- Note que a variável aleatória é ilimitada, pode valer de 1 a infinito
- Não há garantia, por exemplo, que entre os 10 primeiros lançamentos de uma moeda saia alguma cara

Distribuição geométrica

- O único parâmetro é p, a probabilidade de sucesso
- A função massa de probabilidade da distribuição geométrica é dada por

$$f(x) = \mathbf{P}\{1^{\text{º}} \text{ sucesso na } x\text{-ésima tentativa}\} = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots$$

  que é a probabilidade de $x-1$ fracassos e um sucesso em seguida
- A variável não tem limite, mas ainda assim temos $\sum_x f(x) = 1$:

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p = \frac{(1-p)^0}{1-(1-p)}p = 1$$

- Note que temos a soma de uma série geométrica, daí o nome da distribuição

Distribuição geométrica

Distribuição geométrica

$$
\begin{aligned}
p &= \text{probabilidade de sucesso} \\
f(x) &= (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots \\
\mathbf{E}(X) &= \frac{1}{p} \\
\text{Var}(X) &= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

Distribuição de Poisson

Distribuição de Poisson

O número de eventos independentes raros que ocorrem em um período fixo de tempo tem distribuição de Poisson

- O nome é homenagem ao matemático francês Siméon-Denis Poisson
- Eventos são "raros" quando é extremamente improvável ocorrer dois simultaneamente ou em intervalo bem curto de tempo
- Exemplos: chamadas telefônicas, mensagens de email, acidentes de trânsito, apagão na rede elétrica, erros em softwares, inundações, terremotos, etc

Distribuição de Poisson

Distribuição de Poisson

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \text{frequência, número médio de eventos}\\
f(x) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots\\
\mathbf{E}(X) &= \lambda\\
\mathrm{Var}(X) &= \lambda
\end{aligned}
$$

- Tem apenas um parâmetro, λ, a frequência, o número médio de eventos
- A variável pode ter qualquer valor não negativo, pode não ocorrer evento $X = 0$ bem como ocorrer qualquer quantidade

Distribuição de Poisson

Exemplo

Certo provedor de internet tem em média 10 novos clientes por dia

(a) Qual a probabilidade que mais de 8 contas sejam abertas hoje?

(b) Qual a probabilidade que mais de 16 contas sejam abertas nos próximos 2 dias?

Solução:

- Novo cliente pode ser considerado um evento raro, não ocorrem dois simultaneamente
- O número X de novos clientes hoje segue uma distribuição de Poisson com $\lambda = 10$
- $\mathbf{P}\{X > 8\} = 1 - F_X(8) = 1 - 0.333 = 0.667$
- O número Y de novos clientes em 2 dias é uma distribuição de Poisson com $\lambda = 20$ (não podemos usar $Y = 2X$, Y é outra variável aleatória de Poisson)
- $\mathbf{P}\{Y > 16\} = 1 - F_Y(16) = 1 - 0.221 = 0.779$

Obs.: valores de $F_X(8)$ e $F_Y(16)$ obtidos em tabelas de distribuição de Poisson com $\lambda = 10$ e 20.

Famílias de distribuições contínuas

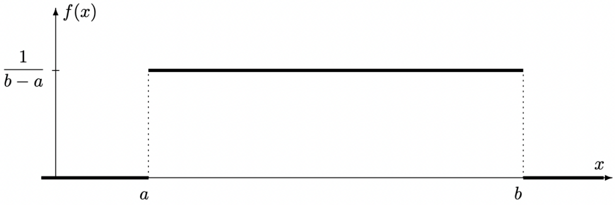
- Assim como no caso de variáveis discretas, vários contextos com variáveis contínuas podem ser descritos por poucas famílias de distribuição contínua
- As mais usadas são Uniforme, Exponencial, Gamma, Normal, *t*-Student, χ^2 de Pearson, *F* de Fisher
- Aqui veremos as distribuições Uniforme e Normal; em outra aula a *t*-Student

Distribuição Uniforme

- A distribuição uniforme tem densidade constante
- Em um intervalo (a, b) a densidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

pois a área sob a curva de densidade (o retângulo) deve ter área 1



- Exemplos: gerador de números aleatórios e vários casos onde não há preferência por valores baixos, médios ou altos, como aniversários ao longo do ano, etc

Distribuição uniforme

- Note que, que como $f(x) = \frac{1}{b-a}$, o tamanho do intervalo (a, b) deve ser finito
- Não existe distribuição uniforme numa reta real
- Ou seja, se tiver que escolher um valor aleatório no intervalo $(-\infty, \infty)$, não é possível fazer isto de forma uniforme
- Uma importância da distribuição uniforme é que qualquer variável aleatória, com qualquer distribuição, pode ser gerada a partir de variáveis aleatórias uniformes

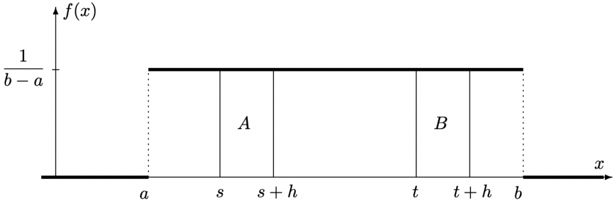
Distribuição uniforme

Propriedade:

- Para todo $h > 0$ e $t \in [a, b-h]$ a probabilidade

$$\mathbf{P}\{t < X < t+h\} = \int_t^{t+h} \frac{1}{b-a} dx = \frac{h}{b-a}$$

  é independente de t.
- A probab. é determinada unicamente pelo tamanho do intervalo, não seu local
- Na figura abaixo, note que os retângulos A e B têm a mesma área: $\mathbf{P}\{s < X < s+h\} = \mathbf{P}\{t < X < t+h\}$



Distribuição uniforme

Exemplo

Se um voo marcado para chegar às 5 da tarde na verdade chega numa distribuição uniforme entre 4:50 e 5:10, então

- é igualmente provável chegar antes ou depois das 5
- é igualmente provável chegar antes das 4:55 e depois das 5:05
- etc

Distribuição uniforme

- A distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ é chamada uniforme padrão
- Para uma variável aleatória Y uniforme padrão, $f(y) = 1$, para $0 < y < 1$
- Temos então

$$\mathbf{E}(Y) = \int yf(y)dy = \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}^2 Y = \int_0^1 y^2 dy - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Distribuição uniforme

- Todas as famílias de distribuição uniforme estão relacionadas
- Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo (a, b), então

$$Y = \frac{X - a}{b - a}$$

  é uma variável aleatória uniforme padrão
- E vice-versa, se Y é variável uniforme padrão, então

$$X = a + (b - a)Y$$

  é uniforme no intervalo (a, b)

Distribuição uniforme

Distribuição uniforme

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \text{intervalo de valores} \\
f(x) &= \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b \\
\mathbf{E}(X) &= \frac{a+b}{2} \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

UFV

Distribuição Normal

- A distribuição Normal desempenha um papel vital em Probabilidade e Estatística, principalmente por causa do Teorema Central do Limite, segundo o qual somas e médias geralmente têm distribuição aproximadamente Normal
- Devido a este fato, várias flutuações e erros de medição que consistem em número acumulado de pequenos termos possuem distribuição normal
- Além de somas, médias e erros, a distribuição Normal é um boa aproximação para modelar variáveis físicas, como peso, altura, temperatura, voltagem, nível de poluição, renda familiar, notas de provas e disciplinas, etc

Distribuição Normal

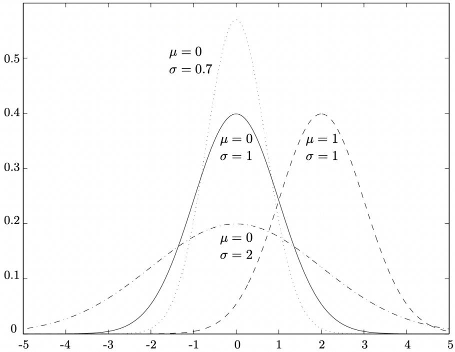
- Densidade na distribuição Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty$$

onde μ e σ são simplesmente a esperança e o desvio padrão

Distribuição Normal

- A curva de densidade tem forma de "sino"
- É simétrica, com centro em μ e espalhamento (achatamento) controlado por σ



- Mudar μ chega a curva para direita ou esquerda;
  mudar σ a torna mais concentrada ou achatada
- Por isso μ e σ são chamados também de localização e escala

Distribuição Normal

Distribuição Normal

$$
\begin{array}{lcl}
\mu & = & \text{esperança matemática, parâmetro de localização} \\
\sigma & = & \text{desvio padrão, parâmetro de escala} \\
f(x) & = & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty \\
\mathbf{E}(X) & = & \mu \\
\mathrm{Var}(X) & = & \sigma^2
\end{array}
$$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: X é variável aleatória normal com esperança μ e desvio padrão σ

UFV

Distribuição Normal

- Uma distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ é a distribuição normal padrão
- Notação
  - Z = variável aleatória normal uniforme
  - $\phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$, função densidade de probabilidade (fdp) normal padrão
  - $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/2} dz$, função de distribuição acumulada (fda) normal padrão
- Uma variável aleatória padrão Z pode ser obtida de uma $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ "padronizando" o valor:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Podemos também inverter o processo para reconstruir a variável original:

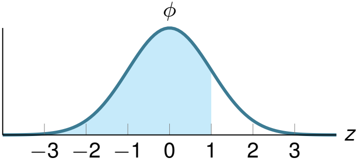
$$X = \mu + \sigma Z$$

- Uma tabela com $\Phi(z)$ (fda normal padrão) é suficiente para cálculos de qualquer distrib. normal; basta padronizar, consultar a tabela e voltar à variável original.

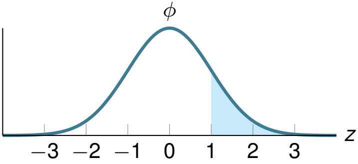
Distribuição Normal

As tabelas fornecem $\Phi(z) = \mathbf{P}\{Z < z\}$, a área sob a curva ϕ

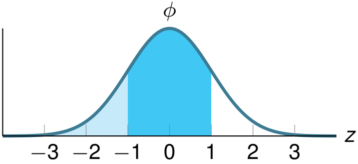
- $\mathbf{P}\{Z < 1\} = \Phi(1) = 0.8413$



- $\mathbf{P}\{Z > 1\} = 1 - \Phi(1) = 0.1587$



- $\mathbf{P}\{-1 < Z < 1\} =$
  $= \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6826$



Distribuição Normal

Exemplo - probabilidade normal padrão

Calcule $\mathbf{P}\{Z < 1.35\}$, $\mathbf{P}\{Z > 1.35\}$ e $\mathbf{P}\{-0.77 < Z < 1.35\}$

- $\mathbf{P}\{Z < 1.35\} = \Phi(1.35) = 0.9115$ *(linha 1.3 coluna 0.05)*
- $\mathbf{P}\{Z > 1.35\} = 1 - \Phi(1.35) = 0.0885$
- $\mathbf{P}\{-0.77 < Z < 1.35\} = \Phi(1.35) - \Phi(-0.77) = 0.9115 - 0.2206 = 0.6909$
  (por simetria, $\mathbf{P}\{Z < -0.77\} = \mathbf{P}\{Z > 0.77\}$; que é $1 - \Phi(0.77)$, linha 0.7 coluna 0.07)

Table A4. Standard Normal distribution

$$\Phi(z) = \boldsymbol{P}\{Z \leq z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

Distribuição Normal

Exemplo - probabilidade normal (não padrão)

Suponha que a renda familiar mensal média no estado seja de R$ 900, com desvio padrão de R$ 200. Assumindo uma distribuição normal de renda, calcule a proporção de “classe média”, cuja renda esteja entre R$ 600 e R$ 1200.

Solução:

- Padronizar e consultar a tabela

$$\mathbf{P}\{600 < X < 1200\} = \mathbf{P}\left\{\frac{600-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1200-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= \mathbf{P}\left\{\frac{600-900}{200} < Z < \frac{1200-900}{200}\right\} = \mathbf{P}\{-1.5 < Z < 1.5\}$$

$$= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.9332 - 0.0668 = 0.8664.$$

Obs.: padronizada ou não, a área sob a curva continua a mesma

Distribuição Normal

Exemplo - problema inverso (achar *x* dada a probabilidade)

O governo do estado da questão anterior decidiu dar bolsa alimentação para os 3% mais pobres em termos de renda familiar. Abaixo de que valor de renda o governo deve conceder esta bolsa?

Solução:

- Precisamos achar x tal que $\mathbf{P}\{X < x\} = 0.03$, uma equação com incógnita x
- Mais uma vez, padronizar e consultar a tabela

$$\mathbf{P}\{X < x\} = \mathbf{P}\{Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = 0.03$$

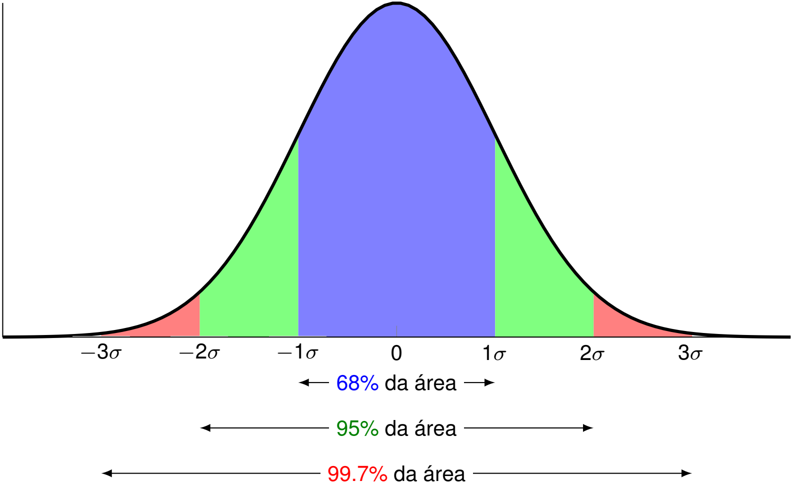
- A probabilidade com resultado 0.03 na tabela é aproximadamente -1.88, i.e., $\Phi(-1.88) \approx 0.03$. Temos então

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = -1.88 \therefore x = \mu + \sigma(-1.88) = (900) - (200)(-1.88) = 524 \text{ (R\$)}$$

Nesse caso, consultamos a tabela primeiro (encontramos $\Phi^{-1}(\alpha)$) e depois "despadronizamos".

Distribuição Normal

- Porcentagem da área a 1 desvio padrão da média, a 2 desvios e a 3 desvios.



Cálculos em Python

- Importar o pacote (e a distribuição desejada)

```
import scipy.stats as stats
from scipy.stats import norm
```

- `cdf` retorna a distribuição acumulada $\mathbf{P}\{Z < z\}$

```
alpha = norm.cdf(z)
```

- `ppf` retorna a distribuição inversa, z tal que $\mathbf{P}\{Z < z\} = \alpha$

```
z = norm.ppf(alpha)
```

- Cálculos dos exemplos dos slides:

```
norm.cdf(1.5) - norm.cdf(-1.5)
norm.ppf(0.03)
```

$\triangleright\ \Phi(1.5) - \Phi(-1.5)$

$\triangleright\ \Phi^{-1}(0.03)$

Cálculos em Python

- As outras distribuições têm funções similares

```
from scipy.stats import binom
prob = binom.cdf(x, n, p)
```

```
from scipy.stats import poisson
prob = possion.cdf(x, lambda)
```

- Cálculos dos exemplos dos slides:

`1 - binom.cdf(3, 10, .2)` ▷ $n = 10, p = 0.2, \mathbf{P}\{X \geq 4\} = 1 - F(3)$

`1 - binom.cdf(1, 15, .18)` ▷ $n = 15, p = 0.18, \mathbf{P}\{X \geq 2\} = 1 - F(1)$

`1 - poisson.cdf(8, 10)` ▷ $\lambda = 10, \mathbf{P}\{X > 8\} = 1 - F(8)$

`1 - poisson.cdf(16, 20)` ▷ $\lambda = 20, \mathbf{P}\{X > 16\} = 1 - F(16)$

Cálculos em Python

- Outras

  `pmf` - função massa de probabilidade
  `pdf` - função densidade de probabilidade

- Mais detalhes, inclusive com funções para plotar gráficos

  https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.bernoulli.html
  https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.binom.html
  https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.geom.html
  https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.poisson.html
  https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.uniform.html
  https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.norm.html