MAT146 - Cálculo I - Concavidade e Ponto de Inflexão

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Considere a ilustração abaixo

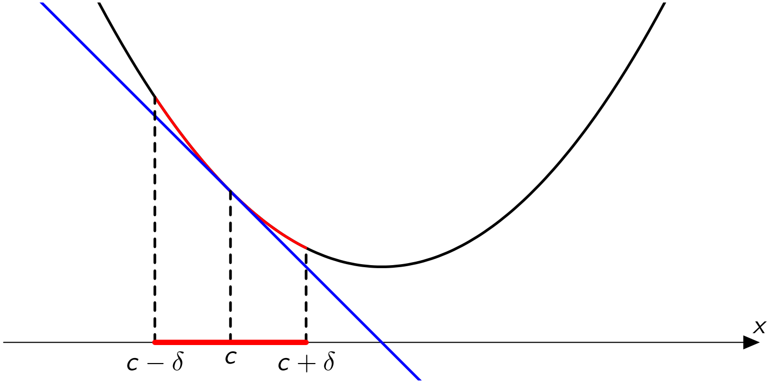

Figura : Gráfico com concavidade para cima.

Sejam f uma função derivável em $x = c$ e r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = c$. Note que a concavidade do gráfico de f está voltada para cima e a reta tangente está localizada abaixo do gráfico da função f para qualquer x pertencente a um intervalo aberto contendo c.
A equação da reta tangente é dada por

$$\begin{aligned} y &= f'(c)(x-c)+f(c) \\ &= f'(c)x+[f(c)-cf'(c)] \end{aligned}$$

Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição

Seja f uma função derivável em um ponto c de seu domínio. O gráfico de f é **côncavo para cima** *em c se existir um intervalo aberto $I \subset Dom(f)$ contendo c tal que*

$$f(x) > f'(c)(x-c) + f(c), \text{ para todo } x \in I \setminus \{c\}.$$

Geometricamente, o gráfico de uma função f é côncavo para cima em um ponto c se a reta tangente em c está localizada abaixo do gráfico da função em uma vizinhança do ponto c.

De maneira análoga, define-se concavidade para baixo

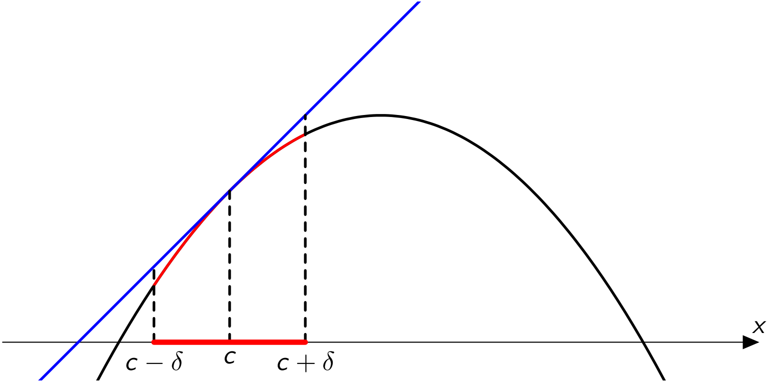

Figura : Gráfico com concavidade para baixo.

Definição

Seja f uma função derivável em um ponto c de seu domínio. O gráfico de f é **côncavo para baixo** *em c se existir um intervalo aberto $I \subset Dom(f)$ contendo c tal que*

$$f(x) < f'(c)(x - c) + f(c), \text{ para todo } x \in I \setminus \{c\}.$$

Geometricamente, o gráfico de uma função f é côncavo para baixo em um ponto c se a reta tangente em c está localizada acima do gráfico da função em uma vizinhança do ponto c.

Exemplo

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$f(x) = x^2 \quad e \quad g(x) = -x^2.$$

O gráfico de f *é côncavo para cima em* $x = 0$ *e o gráfico de* g *é côcavo para baixo em* $x = 0$*. De fato, a equação da reta tangente ao gráfico de* f *e* g *é dada por* $y = 0$*. Além disso,*

$$f(x) > y = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e

$$g(x) < y = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

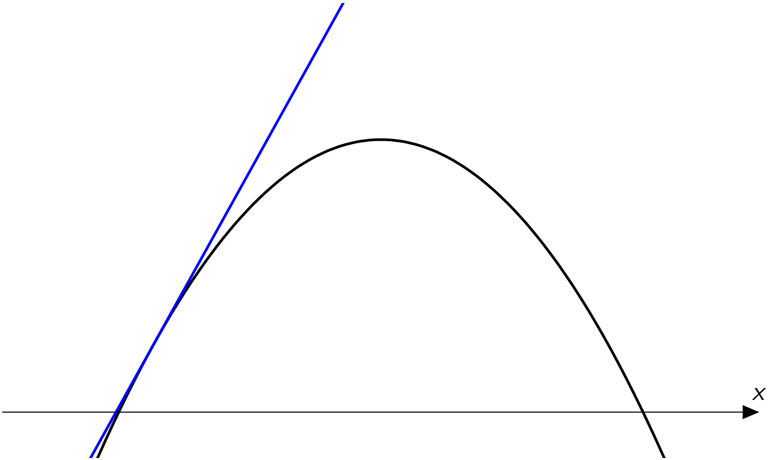

Figura : Gráfico Côncavo para Baixo

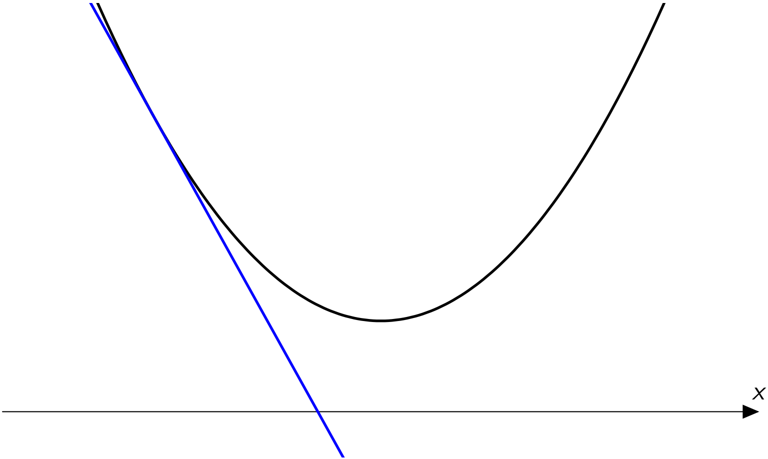

Figura : Gráfico Côncavo para Cima

Verificar que o gráfico de uma função é côncavo para baixo ou para cima em determinado ponto pode ser extremamente difícil e trabalhoso utilizando apenas a definição.
Apresentaremos um resultado que estabelece uma relação entre a côncavidade do gráfico de uma função com o sinal da segunda derivada da mesma, desde que está satisfaça certas condições.

Teorema

Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c. Então

(i) *Se $f''(c) > 0$, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$;*

(ii) *Se $f''(c) < 0$, o gráfico de f é côncavo para baixo em $(c, f(c))$.*

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. *Determinaremos os intervalos onde o gráfico de* f *é côncavo para baixo e intervalos onde é côncavo para cima.*

Como f *é derivável em todos os pontos do seu domínio, basta estudar o sinal da segunda derivada. Uma vez que*

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12,$$

segue que $f''(x) > 0$ *se, e somente se,* $6x - 12 > 0$, *ou seja,* $x > 2$ *e* $f''(x) < 0$ *se, e somente se,* $x < 2$. *Desta forma, o gráfico de* f *é côncavo para cima no intervalo* $(2, +\infty)$ *e é côncavo para baixo no intervalo* $(-\infty, 2)$.

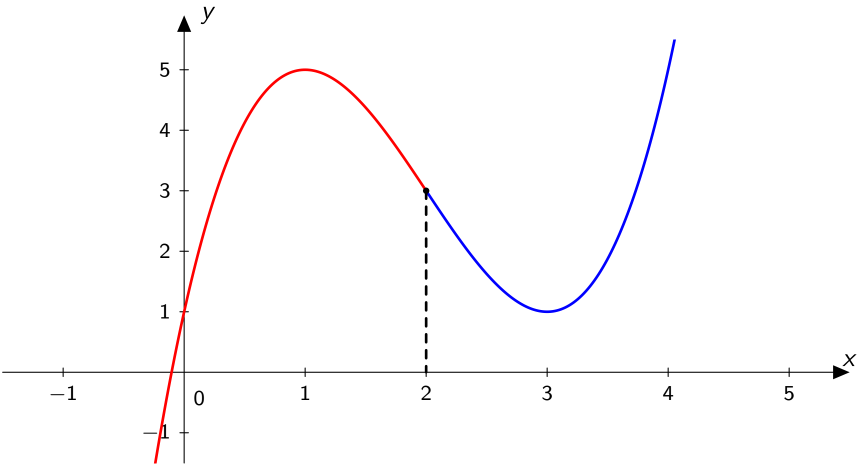

Figura : Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Esta função é a composição de duas funções deriváveis. Assim,* f *é derivável. Daí, para estudar a concavidade do gráfico de* f, *basta analisar o sinal da segunda derivada.*

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = -(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Uma vez que $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *o sinal de* $f''(x)$ *coincide com o sinal de* $g(x) = x^2 - 1$ *cujo gráfico já conhecemos e sabemos estudar o seu sinal.*

Exemplo

Assim,

$$f''(x) > 0 \ para \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

e

$$f''(x) < 0 \ para \ x \in (-1, 1).$$

Logo, o gráfico de f *é côncavo para cima em* $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ *e côncavo para baixo em* $(-1, 1)$.

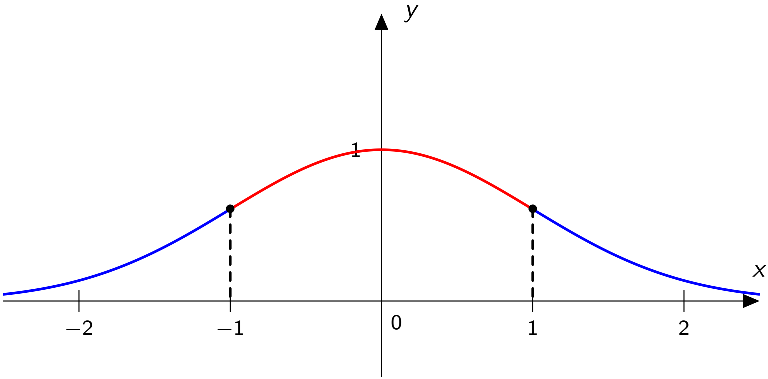

Figura : Gráfico da função $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Definição

Diremos que o ponto $(c, f(c))$ *é um* **ponto de inflexão** *do gráfico da função* f *se existir reta tangente neste ponto e existir um intervalo aberto* I *contendo* c, *tal que se* $x \in I$, *então*

(i) *Se* $f''(x) < 0$ *se* $x < c$ *e* $f''(x) > 0$ *se* $x > c$, *ou*

(ii) *Se* $f''(x) > 0$ *se* $x < c$ *e* $f''(x) < 0$ *se* $x > c$.

Desta forma, um ponto $(c, f(c))$ é ponto de inflexão se existe reta tangente neste ponto e o gráfico de f troca de concavidade neste ponto.

Exemplo

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *função definida por*

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & se\ x \leq 1 \\ 2 + x^2 & se\ x > 1 \end{cases}.$$

A função h *é contínua em* $x = 1$*, mas não é derivável em* $x = 1$*.* *(***Verifique!***) Observe que*

$$h''(x) = -2 < 0, \quad para \quad x < 1$$

e

$$h''(x) = 2 > 0, \quad para \quad x > 1.$$

Apesar do gráfico mudar de concavidade no ponto de abscissa $x = 1$*, este ponto não é de inflexão uma vez que não existe reta tangente neste ponto.*

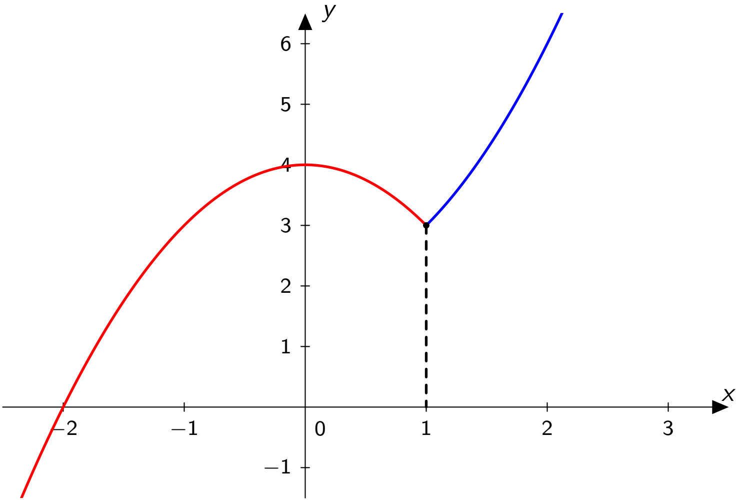

Figura : Gráfico de h.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. *Vimos anteriormente que o gráfico de* f

- *é côncavo para cima no intervalo* $(2, +\infty)$ *e*
- *é côncavo para baixo no intervalo* $(-\infty, 2)$.

Além disso, existe reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa $x = 2$, *visto que a mesma é derivável neste ponto. Logo, o ponto* $(2, 3)$ *é um ponto de inflexão.*

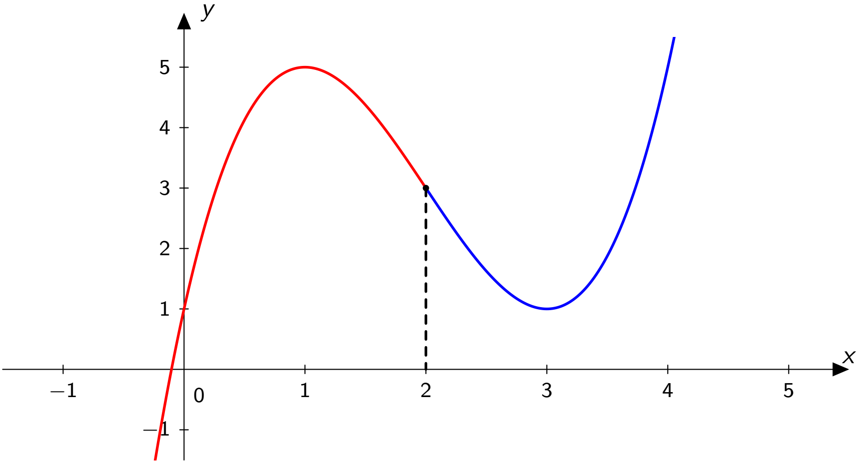

Figura : O ponto $(2, 3)$ é um ponto de inflexão.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Vimos anteriormente que o gráfico de* f

- *é côncavo para cima em* $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ *e*
- *é côncavo para baixo em* $(-1, 1)$.

Como a função é derivável nos pontos de abscissa $x = -1$ e $x = 1$ e o gráfico de f muda de concavidade nestes pontos, temos que os mesmos são pontos de inflexão.

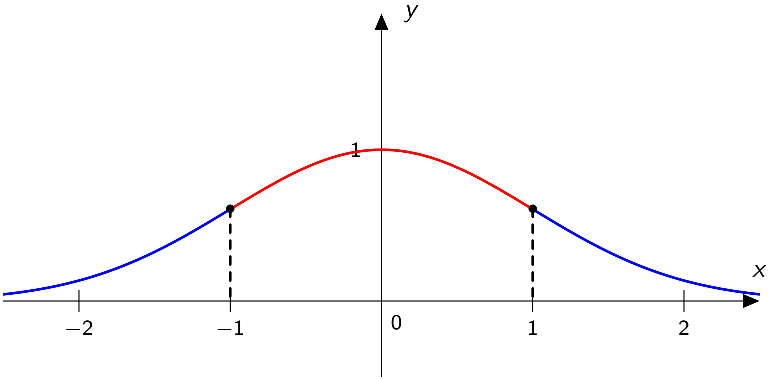

Figura : Os pontos $(-1, e^{-1/2})$ e $(1, e^{-1/2})$ são pontos de inflexão.

Teorema

Seja f uma função derivável em um intervalo contendo c. Se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e se $f''(c)$ existe, então $f''(c) = 0$.

Observação

A recíproca do teorema não é verdadeira, ou seja, se $f''(c) = 0$, **não** *temos necessariamente que $(c, f(c))$ é ponto de inflexão.*

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^4$. *Observe que* $f''(x) = 12x^2$. *Desta forma,* $f''(x) = 0$ *em* $x = 0$, *mas* $x = 0$ *não é ponto de inflexão, pois o gráfico de* f *não muda de concavidade em* $x = 0$, *uma vez que* $f''(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

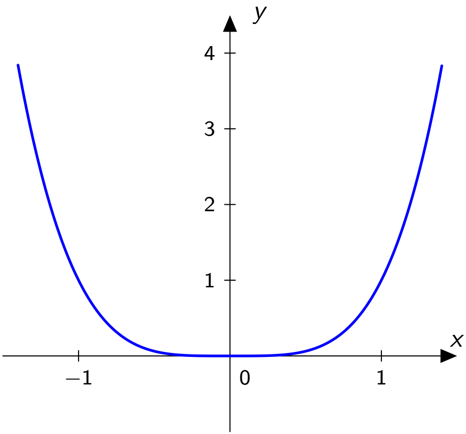

Figura : Gráfico de $f(x) = x^4$.