MAT146 - Cálculo I - Regra da Cadeia

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Para determinar a derivada de função composta, precisaremos de um, dos importantes teoremas do cálculo chamado de regra da cadeia. Como motivação, consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo

Se $g(x) = \operatorname{sen} 2x$*, então* $g(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$*. Assim,*

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2 \operatorname{sen} x)^{'} \cdot \cos x + 2 \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)^{'} \\ &= 2 \cos x \cdot \cos x + 2 \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) \\ &= 2 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x \\ &= 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= 2 \cos 2x. \end{aligned}$$

Observe que se tomarmos $f(x) = \operatorname{sen} x$ *e* $h(x) = 2x$*, então* $g = f \circ h$ *e como* $f^{'}(x) = \cos x$*,* $h^{'}(x) = 2$*, temos*

$$g^{'}(x) = (f^{'} \circ h)(x) \cdot h^{'}(x).$$

Teorema (Regra da Cadeia)

Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$ é derivável em x e além disso,

$$(f \circ g)^{'}(x) = f^{'}(g(x)) \cdot g^{'}(x).$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

em que $\frac{dy}{du}$ é calculada em $u = g(x)$.

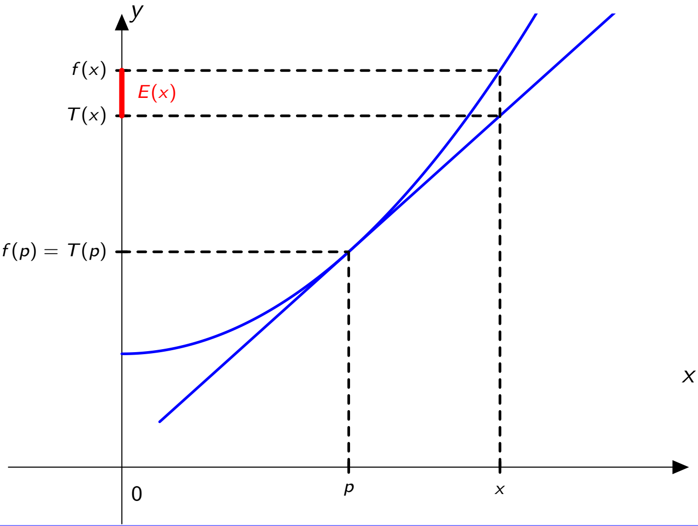
Suponhamos f derivável em p, $x = g(t)$ derivável em t_0, com $p = g(t_0)$ e $Im(g) \subset Dom(f)$. Vamos provar que

$$(f \circ g)'(t_0) = f^{'}(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$

Para isso, considere a função T dada por:

$$T(x) = f(p) + f^{'}(p)(x - p).$$

Observe no gráfico abaixo que $E(x)$ é o erro ao se aproximar $T(x)$ por $f(x)$ e o gráfico de T é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.



Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= T(x) + E(x) \\ f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + E(x) \\ f(x) - f(p) &= f'(p)(x-p) + E(x). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} E(x) &= f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) \\ &= \left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p) \right)(x-p) \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever $E(x)$ como sendo

$$E(x) = \rho(x)(x-p), \quad x \in Dom(f),$$

onde

$$\lim_{x \to p} \rho(x) = 0.$$

Fazendo $x = g(t)$ e $p = g(t_0)$ e dividindo ambos os termos da igualdade por $t - t_0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} \\ &= f'(g(t_0))\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} + \frac{E(g(t))}{t - t_0}\end{aligned}$$

Tomando o limite $t \to t_0$, obtemos

$$(f \circ g)'(t_0) = f'(g(t_0)) \cdot g'(t_0),$$

uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t \to t_0} \frac{E(g(t))}{t - t_0} &= \lim_{t \to t_0} \rho(g(t))\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \\ &= 0 \cdot g'(t_0) = 0.\end{aligned}$$

Exemplo

Considere a função $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.
Observe que se considerarmos

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad e \quad g(x) = x^2,$$

então

$$h(x) = (f \circ g)(x).$$

Como f *e* g *são deriváveis em* $\mathbb{R}$, *então a função* f *é derivável em* $g(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Assim, podemos aplicar o teorema da regra da cadeia e escrever*

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como $f'(x) = \cos x$ e $g'(x) = 2x$, temos

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f'(x^2).2x \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x. \end{aligned}$$

Exemplo

Encontre $f'(x)$, *onde* $f(x) = (x^3 + 2x - 1)^{10}$.
Se considerarmos

$$g(x) = x^3 + 2x - 1 \quad e \quad h(x) = x^{10},$$

então

$$f(x) = (h \circ g)(x).$$

Como h e h são deriváveis em $\mathbb{R}$, *então a função h é derivável em* $g(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Assim, pela regra da cadeia,*

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como $h'(x) = 10x^9$ e $g'(x) = 3x^2 + 2$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= h'((x^3 + 2x + 1)) \cdot (3x^2 + 2) \\ &= 10(x^3 + 2x + 1)^9 \cdot (3x^2 + 2). \end{aligned}$$

Exemplo

Derive cada uma das seguintes funções abaixo

(a) $f(x) = \left(\dfrac{3x+2}{2x+1}\right)^5$

(b) $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$, *com* $p, q \in \mathbb{Z}$ *e* $q \neq 0$. *Antes disso, mostre que se* $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, *então*

$$g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$