EST 105

INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA

Testes de Hipóteses (Resumo)

Departamento de Estatística – UFV
Av. Peter Henry Rolfs, s/n
Campus Universitário
36570.977 – Viçosa, MG
http://www.det.ufv.br/

Exemplo Introdutório

- Uma empresa deseja transferir o seu pátio de armazenagem da capital para o interior. Hoje, na capital, o percurso médio dos caminhões é igual a 214 km. Desta forma, a transferência só se justifica se o novo percurso médio dos caminhões for inferior ao realizado na capital. Em uma amostra de percursos de testes no interior, realizado por 12 caminhões de entrega, observou-se a média de 198km. Com base nesse resultado o gerente da empresa concluiu que o percurso médio diminuiu e decidiu pela transferência do pátio. Será que o gerente da empresa tomou a decisão correta?

Alguns Conceitos

•**Testes de Hipóteses:** são procedimentos estatísticos que permitem **testar afirmações** a respeito de **parâmetros populacionais** por meio de **resultados amostrais**.

• **Parâmetros:** são quantidades da população, em geral desconhecidas, e sobre as quais temos interesse. São usualmente representados por letras gregas, tais como: μ, λ, θ, entre outras.

• **Estimador e Estimativa:** denominaremos **estimador**, qualquer função da amostra construída com a finalidade de representar (estimar) um parâmetro de interesse da população. Em geral, denotamos os estimadores com acento circunflexo (estimador de μ é $\hat{\mu}$). Os valores numéricos assumidos pelos estimadores são denominados **estimativas.**

Conceitos

- **Hipótese Estatística*:*** é uma suposição quanto ao valor de um parâmetro que será verificada a partir de um teste paramétrico.

  - *Hipótese de Nulidade (H_0):* é a afirmação a ser testada; refere-se sempre à igualdade.
  - *Hipótese Alternativa (H_a ou H_1):* é a hipótese que contraria H_0. É formulada com base no conhecimento prévio do problema ou informações da pesquisa.

- Com base na definição de H_1, o teste pode ser unilateral (à direita ou à esquerda) ou bilateral. Por exemplo:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Unilateral à direita}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Unilateral à esquerda}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Bilateral}$$

Obs.: A decisão do teste será quanto à rejeição ou não de H_0.

Conceitos

- **Região Crítica (RC) ou Região de Rejeição de H_0 (RRH$_0$):** é a faixa de valores extremos que nos leva à rejeição de H_0.
  - Definida a partir de um **valor crítico ou valor tabelado**, que é obtido na tabela estatística do teste de hipótese utilizado. Essa região estará associada a uma área ou valor de probabilidade α, denominado **nível de significância**.
- **Estatística de teste:** é uma variável aleatória, cujo valor calculado utilizando-se a amostra será utilizado para a tomada de decisão. **(Cada Teste de Hipótese possui uma estatística de teste distinta). Admite-se que ela se distribui segundo algum modelo de probabilidade (Normal, t, F, Qui-quadrado, etc).**
- **Decisão do Teste:** Após calculada a estatística de teste e definida a RC, devemos:
  - **Rejeitar H_0**, se o valor calculado **pertencer** à RC.
  - **Não Rejeitar H_0**, se o valor calculado **não pertencer** à RC.

Conceitos

- **Erros de Decisão quanto às Hipóteses**

Qualquer decisão tomada em um Teste de Hipóteses implica na possibilidade **(probabilidades condicionais)** de se cometer 2 tipos de erros. São eles:

- **Erro Tipo I:** ocorre quando rejeitamos H_0 quando ela é verdadeira. A máxima probabilidade de se cometer este tipo de erro é dada por α,

$$\alpha = \text{máxima } P[\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}].$$

α é denominado **nível de significância** e o valor é definido pelo pesquisador, em geral, 0,01 (1%) ou 0,05 (5%).

Nível de confiança: é a probabilidade de não se rejeitar H_0 corretamente, isto é, quando H_0 é verdadeira. Ou seja, nível de confiança = 1- α.

Conceitos

- **Erro Tipo II:** ocorre quando não rejeitamos H_0 quando ela é falsa. A máxima probabilidade de se cometer este tipo de erro é denotada por β.

$$\beta = \text{máxima } P[\text{Não Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}].$$

Poder do Teste: é a probabilidade de se rejeitar H_0 corretamente, isto é, quando H_0 é falsa. Portanto, Poder = 1- β.

- O quadro abaixo sintetiza o que foi exposto.

Decisão	Realidade	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Rejeitar H_0	**α**	1- β
Não Rejeitar H_0	1- α	**β**

Etapas de um teste de hipóteses

i) Estabelecer as hipóteses H_0 e H_1;

ii) Fixar o nível de significância (α) e identificar a estatística do teste;

iii) Determinar a região crítica em função do nível α pelas tabelas estatísticas;

iv) Calcular o valor da estatística de teste;

v) Decidir por rejeitar ou não rejeitar H_0 e concluir à respeito do problema em estudo.

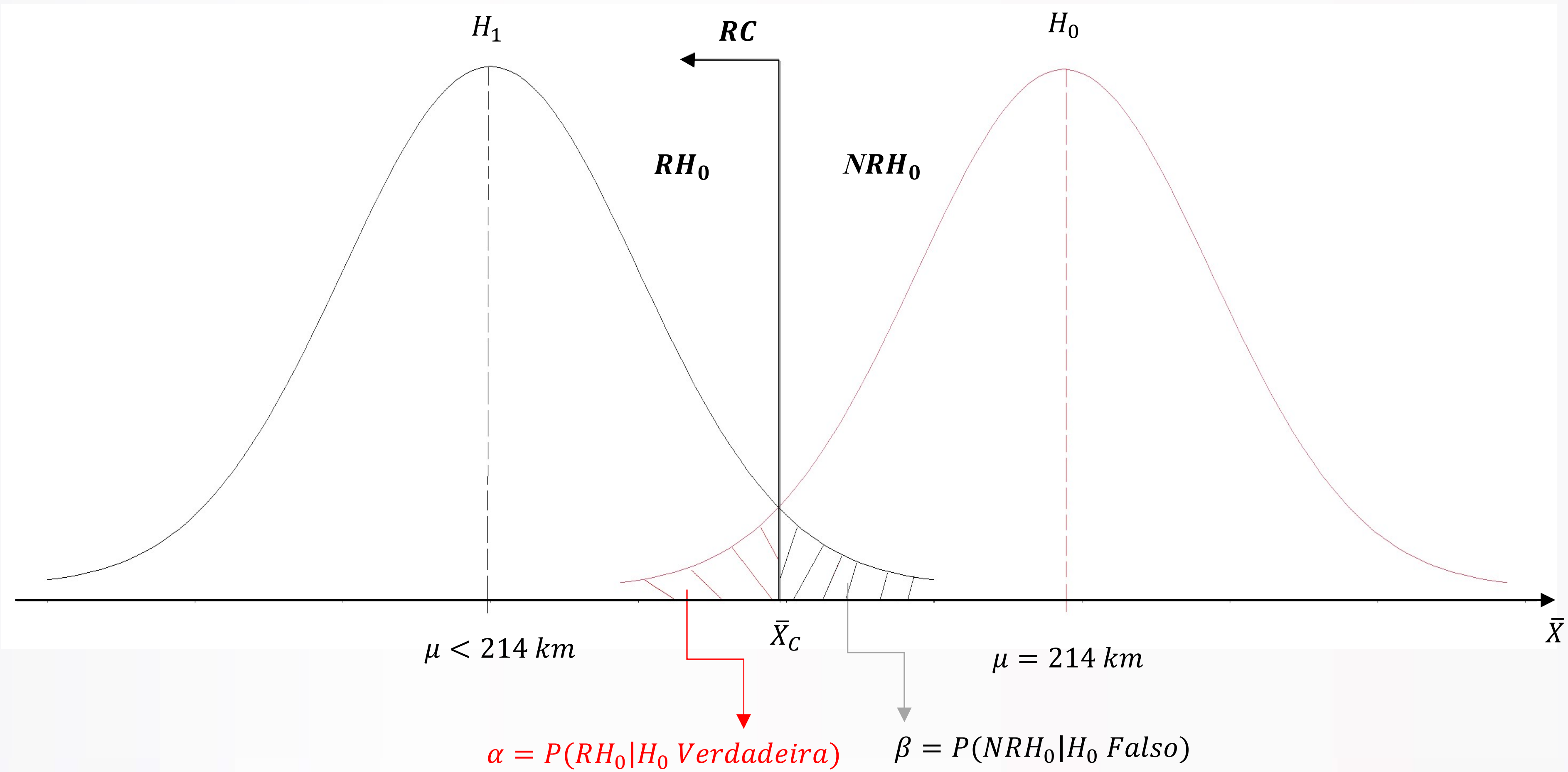
Convém salientar que a utilização de um software para a realização de um Teste de Hipóteses permite conhecer o **valor-p** associado à Estatística do Teste. O **valor-p** é a probabilidade de se obter um valor para a Estatística do Teste, tão ou mais extremo do que o valor observado, em favor da hipótese alternativa H_1.

UFV

... Voltando ao Exemplo Introdutório

- **População:** Todos os valores de distância (variável aleatória X) dos novos percursos dos caminhões da empresa.
- **Amostra:** $\{X_1, X_2, \cdots, X_{12}\}$; 12 novos percursos dos caminhões da empresa.
- **Parâmetro:** μ = novo percurso médio de todos os caminhões da empresa.
- **Estimador:** $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; **Estimativa:** $\hat{\mu} = \bar{X} = 198\ km$.
- **Hipóteses:** H_0: $\mu = 214\ km$ e H_1: $\mu < 214\ km$ (Teste unilateral à esquerda).
- **Teste de Hipóteses:** consiste em criar uma regra para decidir sobre Rejeitar ou Não Rejeitar H_0.
- **Valor-p**: $P(\bar{X} \leq 198\ km)$

- Supondo que o percurso médio dos caminhões tem distribuição Normal, temos:



Teste Z para uma média populacional

- Seja X uma variável aleatória com distribuição **Normal**, tal que $E(X) = \mu_X$ e $V(X) = \sigma_X^2$ **conhecida**, isto é, $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$.

- O **teste Z para uma média** é utilizado para testar hipóteses de que a média μ_X é igual a um valor específico (μ_0).

- **Hipóteses Estatísticas: (1)** $\begin{cases} \boldsymbol{H_0}: & \mu = \mu_0 \\ \boldsymbol{H_1}: & \mu < \mu_0 \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} \boldsymbol{H_0}: & \mu = \mu_0 \\ \boldsymbol{H_1}: & \mu > \mu_0 \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} \boldsymbol{H_0}: & \mu = \mu_0 \\ \boldsymbol{H_1}: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

- **Estatística de Teste:**

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

em que $\bar{X}$ é a média amostral, σ_X é o desvio-padrão populacional e n é o tamanho amostral.

- **Região Crítica:** Depende do nível de significância (α). Valores advindos da Tabela Z.

(1) RC:$\{\bar{x}_{\text{obs}} \in \mathbb{R} | \bar{x}_{\text{obs}} \leq \bar{X}_{\text{C}}\}$ ou $\{z_{\text{cal}} \in \mathbb{R} | z_{\text{cal}} \leq -Z_{\alpha}\}$

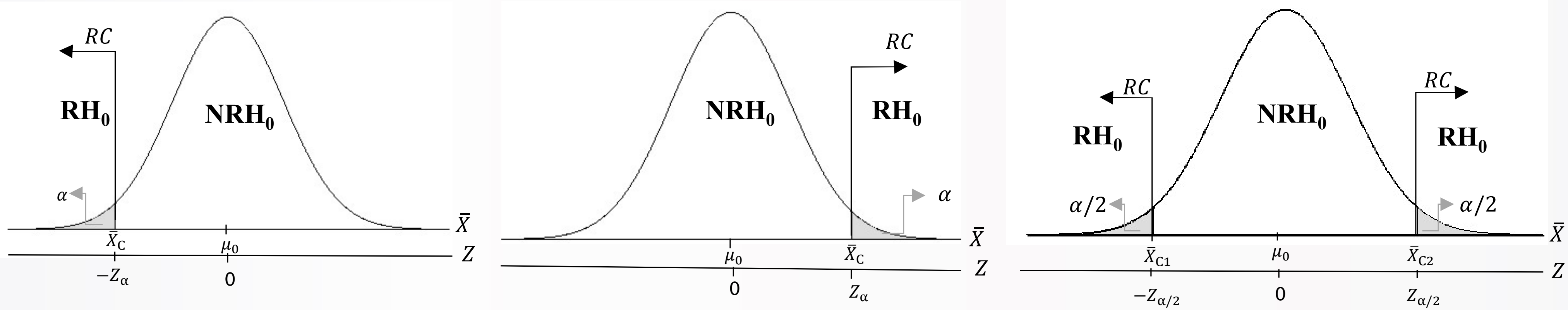
$Z_{\alpha} = Z_{tab} =$ valor tabelado

(2) RC:$\{\bar{x}_{\text{obs}} \in \mathbb{R} | \bar{x}_{\text{obs}} \geq \bar{X}_{\text{C}}\}$ ou $\{z_{\text{cal}} \in \mathbb{R} | z_{\text{cal}} \geq Z_{\alpha}\}$

(3) RC:$\{\bar{x}_{\text{obs}} \in \mathbb{R} | \bar{x}_{\text{obs}} \leq \bar{X}_{\text{C1}}\ ou\ \bar{x}_{\text{obs}} \geq \bar{X}_{\text{C2}}\}$ ou $\left\{z_{\text{cal}} \in \mathbb{R} \middle| |z_{\text{cal}}| \geq \left|Z_{\frac{\alpha}{2}}\right|\right\}$

Graficamente:

(1) **(2)** **(3)**



- **Decisão do teste:**
  - Se o valor calculado pertencer à Região Crítica: Rejeita-se H_0 (RH_0).
  - Se o valor calculado não pertencer à Região Crítica: Não Rejeita-se H_0 (NRH_0).

UFV

Tabela Z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Exemplo 1

a) Considerando um nível de significância de 1% e sabendo que o desvio-padrão populacional é igual a 42 km. Conclua a respeito da transferência do pátio (exemplo introdutório).

b) Determine o valor da média crítica $\bar{X}_C$.

c) Se a confiança do teste fosse de 90%, a decisão mudaria?

Valor-p

O valor-p (α^*) em um teste de hipótese é o menor valor de α **(nível de significância)** para o qual se rejeita H_0. **Uma definição mais geral:** O valor-p é a probabilidade de se obter um valor da estatística do teste tão ou mais extremo do que o valor observado, em favor da hipótese alternativa H_1.

O valor-p de um teste Z é dado por:

Teste unilateral: $valor - p = \boldsymbol{\alpha}^* = P(Z \geq |Z_{cal}|)$

Teste bilateral: $valor - p = \boldsymbol{\alpha}^* = 2P(Z \geq |Z_{cal}|)$

Decisão do teste de hipótese baseada no valor-p ($\boldsymbol{\alpha}^*$):

Se $\boldsymbol{\alpha}^* \leq \boldsymbol{\alpha}$: Rejeita-se H_0.

Se $\boldsymbol{\alpha}^* > \boldsymbol{\alpha}$: Não Rejeita-se H_0.

Exemplo 2

Calcule o valor-p para o exemplo da transferência do pátio.

Atividade Proposta

Resolver os exercícios do Roteiro de Aulas abaixo relacionados:

- Exercícios 1 e 2 – pág. 175
- Exercício 1 – pág. 193