MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

- JACOBI-RICHARDSON
- GAUSS-SEIDEL
- CONVERGÊNCIA
- CRITÉRIO DE PARADA

- MAT 271 – Cálculo Numérico - UFV/2023-I
- Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

NORMA DE UM VETOR

Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, definimos uma norma em V, denotada por $\|\cdot\|$, como sendo uma aplicação$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$, que, para cada $v \in V$, leva a um $\|v\| \in \mathbb{R}$, satisfazendo à seguintes condições:

$n1)$ $\|v\| \geq 0, \forall v \in V; \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$

$n2)$ $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V;$

$n3)$ $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|, \forall v, u \in V.$

NORMAS EM $\mathbb{R}^n$

Três normas muito utilizadas em $\mathbb{R}^n$:

Dado $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \epsilon \mathbb{R}^n$:

$\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$ (Norma da Soma)

$\|v\|_2 = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 \ldots + {v_n}^2}$ (Norma Euclidiana)

$\|v\|_\infty = máx\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\}$ (Norma do Máximo)

GEOMETRICAMENTE: COMPRIMENTO DE UM VETOR DE $\mathbb{R}^n$ OU DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DE $\mathbb{R}^n$.

NORMAS EM $\mathbb{R}^n$: UM RESULTADO IMPORTANTE

i) $\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty$

ii) $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$

TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTES

iii) $\frac{1}{n}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_1$

CONVERGÊNCIA: Uma sequência $x^{(i)} = \left(x_1{}^{(i)}, x_2{}^{(i)}, \dots, x_n{}^{(i)}\right), i = 1,2,3, \dots$, de vetores $\mathbb{R}^n$ converge para um vetor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ se $\left\|x^{(i)} - \bar{x}\right\| \longrightarrow 0$ quando $i \longrightarrow \infty$, para qualquer norma em $\mathbb{R}^n$.

CRITÉRIO DE PARADA PARA OS MÉTODOS DE JACOBI-RICHARDSON E DE GAUSS-SEIDEL

Usaremos, aqui, o critério de parada para os métodos de Jacobi-Richardson e de Gauss-Seidel baseado no erro (absoluto ou relativo) entre dois termos consecutivos da sequência de aproximações obtida com as suas equações de iteratividade

Considerando que a sequência de aproximações é uma sequência de vetores de $\mathbb{R}^n$, $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\right) \in \mathbb{R}^n, i = 1,2,3, \dots$, devemos usar uma norma para calcular o erro entre dois termos consecutivos $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$, $x^{(k+1)} = \left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}\right)$.

Como a convergência independe da norma, adotaremos aqui a Norma do Máximo: $\|\cdot\|_\infty$.

CRITÉRIO DE PARADA PARA OS MÉTODOS DE JACOBI-RICHARDSON E DE GAUSS-SEIDEL

ERRO ABSOLUTO: Se $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon$, então $x^{(k+1)}$ é a aproximação da solução do sistema com erro absoluto menor que ε.

ERRO RELATIVO: Se $\dfrac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty}{\left\|x^{(k+1)}\right\|_\infty} < \varepsilon$, então $x^{(k+1)}$ é a aproximação da solução do sistema com erro relativo menor que ε.

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty = \left\|\left(x_1{}^{(k+1)} - x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k+1)} - x_2{}^{(k)}, \dots, x_n{}^{(k+1)} - x_n{}^{(k)}\right)\right\|_\infty$$

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty = max\left\{\left|x_1{}^{(k+1)} - x_1{}^{(k)}\right|, \left|x_2{}^{(k+1)} - x_2{}^{(k)}\right|, \dots, \left|x_n{}^{(k+1)} - x_n{}^{(k)}\right|\right\}$$

$$\left\|x^{(k+1)}\right\|_\infty = max\left\{\left|x_1{}^{(k+1)}\right|, \left|x_2{}^{(k+1)}\right|, \dots, \left|x_n{}^{(k+1)}\right|\right\}$$

EXEMPLO

Como vimos em aula anterior, o sistema $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$ tem solução $x = (1,2,0)$.

E, usando as equações de iteratividade do método de Gauss-Seidel, com $x^{(0)} = (0,0,0)$, para $k = 0,1,2,3$, obtivemos os seguintes termos da sequência de aproximações da solução $(1,2,0)$.

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$x^{(1)} = (1.4000, 1.9200, -0.0560)$$

$$x^{(2)} = (1.0216, 2.0069, -0.0064)$$

$$x^{(3)} = (0.9993, 2.0014, -0.0003)$$

$$x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0,0,0)$, $x^{(1)} = (1.4000, 1.9200, -0.0560)$, $x^{(2)} = (1.0216, 2.0069, -0.0064)$

$x^{(3)} = (0.9993, 2.0014, -0.0003)$, $x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$

Vamos calcular os erros absolutos entre termos consecutivos, usando a norma $\|\cdot\|_\infty$.

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = \|(1.4000, 1.9200, -0.0560)\|_\infty = 1.9200$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_\infty = \|(-0.3784, 0.0869, 0.0496)\|_\infty = 0.3784$$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty = \|(-0.0223, -0.0055, 0.0061)\|_\infty = 0.0223$$

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty = \|(-0.0006, -0.0013, 0.0004)\|_\infty = 0.0013$$

Assim, se estivéssemos interessados em uma aproximação da solução do sistema com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$, esta aproximação seria $x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$, ou seja, o processo pararia em $k = 3$.

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0,0,0), \quad x^{(1)} = (1.4000, 1.9200, -0.0560), \qquad x^{(2)} = (1.0216, 2.0069, -0.0064)$

$x^{(3)} = (0.9993, 2.0014, -0.0003), \qquad x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$

Vamos calcular os erros relativos entre termos consecutivos, usando a norma $\|\cdot\|_\infty$.

$$\frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(1)}\|_\infty} = \frac{\|(1.4000, 1.9200, -0.0560)\|_\infty}{\|(1.4000, 1.9200, -0.0560)\|_\infty} = 1. \quad \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty}{\|x^{(2)}\|_\infty} = \frac{\|(-0.3784, 0.0869, 0.0496)\|_\infty}{\|(1.0216, 2.0069, -0.0064)\|_\infty} = \frac{0.3784}{2.0069} = 0.1885.$$

$$\frac{\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty}{\|x^{(3)}\|_\infty} = \frac{\|(-0.0223, -0.0055, 0.0061)\|_\infty}{\|(0.9993, 2.0014, -0.0003)\|_\infty} = \frac{0.0223}{2.0014} = 0.0111.$$

$$\frac{\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty}{\|x^{(4)}\|_\infty} = \frac{\|(-0.0006, -0.0013, 0.0004)\|_\infty}{\|(0.9987, 2.0001, 0.0001)\|_\infty} = \frac{0.0013}{2.0001} = 0.0006.$$

Assim, se estivéssemos interessados em uma aproximação da solução do sistema com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$, esta aproximação seria $x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$, ou seja, o processo pararia em $k = 3$.

EXEMPLO

Sistema do exercício 6 da Lista de Exercícios III:

Seja o sistema linear: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20. \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$

Vamos usar o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial $x^{(0)} = (0.1, 0.2, 0.5)$, para encontrar uma aproximação do sistema com precisão $\varepsilon = 0.01$ para o erro absoluto. (Na lista, pediu-se para usar Jacobi-Richardson)

EXEMPLO

Como a matriz A dos coeficientes do sistema é tal que $detA = 253$, o sistema possui solução única. E como $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1,2,3$, as equações de iteratividade do método de Gauss-Seidel podem ser obtidas.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{12}{5} - \dfrac{2}{5}x_2 - \dfrac{1}{5}x_3 \\ x_2 = 5 + \dfrac{1}{4}x_1 - \dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{5}x_1 + \dfrac{3}{10}x_2 \end{cases}$$

O Critério de Sassenfeld é satisfeito. Logo há garantia de convergência.

Obs: É fácil ver que o Critério Norma Linha é satisfeito.

Como vimos, se o Critério Norma Linha é satisfeito, o Critério de Sassenfeld também o é.

EXEMPLO

$$\boxed{\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = -2.4 - 0.4x_2{}^{(k)} - 0.2x_3{}^{(k)} \\ x_2{}^{(k+1)} = 5 + 0.25x_1{}^{(k+1)} - 0.5x_3{}^{(k)} \\ x_3{}^{(k+1)} = 0.3 - 0.2x_1{}^{(k+1)} + 0.3x_2{}^{(k+1)} \end{cases}}$$

$$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5) \qquad \varepsilon = 0.01$$

$$k = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1{}^{(1)} = -2.4 - 0.4 \times 0.2 - 0.2 \times 0.5 = -2.5800 \\ x_2{}^{(1)} = 5 + 0.25 \times (-2.58) - 0.5 \times 0.5 = 4.1050 \\ x_3{}^{(1)} = 0.3 - 0.2 \times (-2.58) + 0.3 \times 4.105 = 2.0475 \end{cases} \Longrightarrow x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$$

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty = \|(-2.6800,3.9050,1.5475)\|_\infty = 3.9050 > 0.01$$

EXEMPLO

$$x^{(0)} = (0.1{,}0.2{,}0.5) \qquad x^{(1)} = (-2.5800{,}4.1050{,}2.0475)$$

$$k = 1 \Longrightarrow \begin{cases} {x_1}^{(2)} = -2.4 - 0.4 \times 4.105 - 0.2 \times 2.0475 = -4.4515 \\ {x_2}^{(2)} = 5 + 0.25 \times (-4.4515) - 0.5 \times 2.0475 = 2.8634 \\ {x_3}^{(2)} = 0.3 - 0.2 \times (-4.4515) + 0.3 \times 2.8634 = 2.0493 \end{cases} \Longrightarrow x^{(2)} = (-4.4515{,}2.8634{,}2.0493)$$

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_\infty = \|(-1.8715, -1.2416{,}0.0018)\|_\infty = 1.8715 > 0.01$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5) \qquad x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475) \qquad x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$

$$k = 2 \Longrightarrow \begin{cases} {x_1}^{(3)} = -2.4 - 0.4 \times 2.8634 - 0.2 \times 2.0493 = -3.9552 \\ {x_2}^{(3)} = 5 + 0.25 \times (-3.9552) - 0.5 \times 2.0493 = 2.9865 \\ {x_3}^{(3)} = 0.3 - 0.2 \times (-3.9552) + 0.3 \times 2.9865 = 1.9870 \end{cases} \Longrightarrow x^{(3)} = (-3.9552,2.9865,1.9870)$$

$$\left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty = \|(0.4963,0.1231,-0.0623)\|_\infty = 0.4963 > 0.01$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0.1, 0.2, 0.5)$ $\quad x^{(1)} = (-2.5800, 4.1050, 2.0475)$ $\quad x^{(2)} = (-4.4515, 2.8634, 2.0493)$

$x^{(3)} = (-3.9552, 2.9865, 1.9870)$

$$k = 3 \Longrightarrow \begin{cases} x_1{}^{(4)} = -2.4 - 0.4 \times 2.9865 - 0.2 \times 1.987 = -3.9920 \\ x_2{}^{(4)} = 5 + 0.25 \times (-3.992) - 0.5 \times 1.987 = 3.0085 \\ x_3{}^{(4)} = 0.3 - 0.2 \times (-3.992) + 0.3 \times 3.0085 = 2.0010 \end{cases} \Longrightarrow x^{(4)} = (-3.9920, 3.0085, 2.0010)$$

$$\left\| x^{(4)} - x^{(3)} \right\|_\infty = \|(-0.0368, 0.0220, 0.0140)\|_\infty = 0.0368 > 0.01$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5)$ $\quad x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$ $\quad x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$

$x^{(3)} = (-3.9552,2.9865,1.9870)$ $\quad x^{(4)} = (-3.9920,3.0085,2.0010)$

$$k = 4 \Longrightarrow \begin{cases} x_1{}^{(5)} = -2.4 - 0.4 \times 3.0085 - 0.2 \times 2.001 = -4.0036 \\ x_2{}^{(5)} = 5 + 0.25 \times (-4.0036) - 0.5 \times 2.001 = 2.9986 \\ x_3{}^{(5)} = 0.3 - 0.2 \times (-4.0036) + 0.3 \times 2.9986 = 2.0003 \end{cases} \Longrightarrow x^{(5)} = (-4.0036,2.9986,2.0003)$$

$$\left\| x^{(5)} - x^{(4)} \right\|_\infty = \|(-0.0116,-0.0099,0.0007)\|_\infty = 0.0116 > 0.01$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5)$ $\quad x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$ $\quad x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$

$x^{(3)} = (-3.9552,2.9865,1.9870)$ $\quad x^{(4)} = (-3.9920,3.0085,2.0010)$

$x^{(5)} = (-4.0036,2.9986,2.0003)$

$$k = 5 \Longrightarrow \begin{cases} x_1{}^{(6)} = -2.4 - 0.4 \times 2.9986 - 0.2 \times 2.0003 = -3.9995 \\ x_2{}^{(6)} = 5 + 0.25 \times (-3.9995) - 0.5 \times 2.0003 = 3.0000 \\ x_3{}^{(6)} = 0.3 - 0.2 \times (-3.9995) + 0.3 \times 3.0 = 1.9999 \end{cases} \Longrightarrow x^{(6)} = (-3.9995,3.0000,1.9999)$$

$$\left\| x^{(6)} - x^{(5)} \right\|_\infty = \|(0.0041,0.0014,-0.0004)\|_\infty = 0.0041 < 0.01$$

Portanto, a solução aproximada do sistema é $x^{(6)} = (-3.9995,3.0000,1.9999)$, com erro absoluto menor que 0.01.

AINDA NO EXEMPLO

VAMOS USAR A NORMA EUCLIDIANA PARA CALCULAR OS ERROS ENTRE OS TERMOS ENCONTRADOS

$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5)$ $x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$ $x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$

$x^{(3)} = (-3.9552,2.9865,1.9870)$ $x^{(4)} = (-3.9920,3.0085,2.0010)$

$x^{(5)} = (-4.0036,2.9986,2.0003)$ $x^{(6)} = (-3.9995,3.0000,1.9999)$

$$\|v\|_2 = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 \ldots + {v_n}^2}$$

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2 = \|(-2.6800,3.9050,1.5475)\|_2 = 4.9826$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_2 = \|(-1.8715,-1.2416,0.0018)\|_2 = 2.2459$$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_2 = \|(0.4963,0.1231,-0.0623)\|_2 = 0.5151$$

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_2 = \|(-0.0368,0.0220,0.0140)\|_2 = 0.0451$$

$$\left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_2 = \|(-0.0116,-0.0099,0.0007)\|_2 = 0.0153$$

$$\left\|x^{(6)} - x^{(5)}\right\|_2 = \|(0.0041,0.0014,-0.0004)\|_2 = 0.0044$$

AINDA NO EXEMPLO

COMPARANDO

NORMA DO MÁXIMO

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = 3.9050$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_\infty = 1.8715$$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty = 0.4963$$

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty = 0.0368$$

$$\left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_\infty = 0.0116$$

$$\left\|x^{(6)} - x^{(5)}\right\|_\infty = 0.0041$$

NORMA EUCLIDIANA

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2 = 4.9826$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_2 = 2.2459$$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_2 = 0.5151$$

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_2 = 0.0451$$

$$\left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_2 = 0.0153$$

$$\left\|x^{(6)} - x^{(5)}\right\|_2 = 0.0044$$

COMO COLOCADO ANTERIORMENTE

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$$

$$\|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$$

Assim: Se queremos que $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_2 < \varepsilon$,

basta que exigir que $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

ALGUMAS OBSERVAÇÕES E COMPARAÇÕES DOS MÉTODOS DIRETOS E INDIRETOS

De uma forma geral, os métodos diretos (Eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan, Decomposição LU, por exemplo) são métodos finitos na determinação da solução do sistema linear, e devem ser usados quando a matriz A do sistema for densa, isto é, apresenta poucos elementos nulos, e quando o sistema é de pequeno porte (dimensão pequena).

Os métodos iterativos devem ser usados na resolução de sistemas lineares de grande porte (centenas de equações e de incógnitas) e quando a matriz A do sistema for esparsa, apresenta muitos elementos nulos. Nestes métodos, quando a convergência é garantida, eles independem da aproximação inicial considerada, mostrando-se vantajosos por não alterarem a estrutura da matriz A durante a sua aplicação e por minimizarem a propagação dos erros de arredondamento.

Alguns sistemas lineares em Computação Aplicada surgem de situações envolvendo resolução de equações diferenciais, que resultam em sistemas de grande porte e esparsos. Para estes, os métodos iterativos são mais atrativos, em especial o Método de Gauss-Seidel, que, em caso de convergência assegurada, apresentam maior rapidez na obtenção da solução aproximada.