MAT146 - Cálculo I - Funções Crescentes e Decrescentes

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função. Diremos que*

(i) f *é estritamente crescente em* I *se, e somente se,*

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2,$$

onde $x_1, x_2 \in I$.

(ii) f *é estritamente decrescente em* I *se, e somente se,*

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2,$$

onde $x_1, x_2 \in I$.

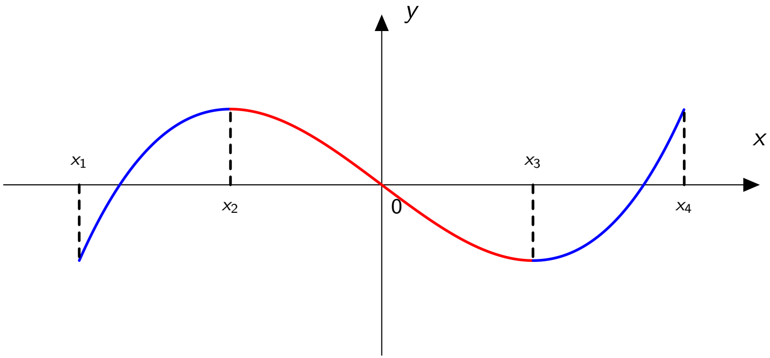

Figura : Crescimento e decrescimento de uma função f.

Analisando o gráfico acima no intervalo $[x_1, x_4]$, podemos concluir que função é estritamente crescente nos intervalos $[x_1, x_2]$ e $[x_3, x_4]$ e estritamente decrescente no intervalo $[x_2, x_3]$.

Teorema

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b).

(i) *Se $f^{'}(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será estritamente crescente em $[a, b]$.*

(ii) *Se $f^{'}(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será estritamente decrescente em $[a, b]$.*

Exemplo

Determine os intervalos onde $f(x) = x^3 - 12x - 5$ *é crescente e onde* f *é decrescente.*
A função f *é contínua e derivável em qualquer ponto. A primeira derivada é dada por*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Assim, $f'(x) > 0$ nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$ e $f'(x) < 0$ no intervalo $(-2, 2)$.
Pelo teorema acima, f é estritamente crescente no intervalo $(-\infty, -2]$ e no intervalo $[2, \infty)$ e é estritamente decrescente no intervalo $[-2, 2]$.

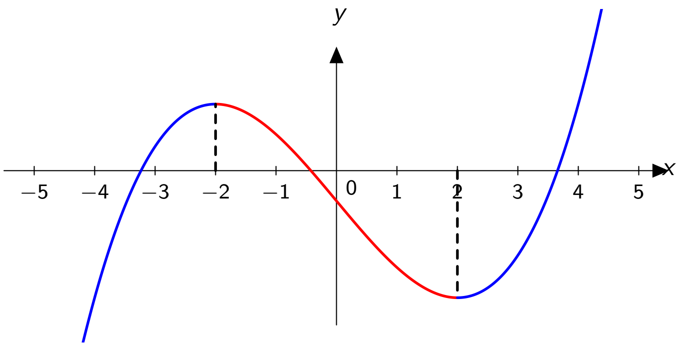

Figura : Gráfico da função $f(x) = x^3 - 12x - 5$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, cujo gráfico de sua derivada é dado abaixo.

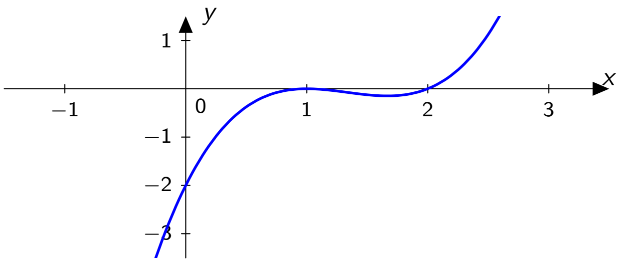

Figura : Gráfico de f'.

Tendo em vista o gráfico de f', determine o(s) pontos críticos de f, o(s) intervalo(s) intervalo(s) de crescimento e decrescimento de f.