# Universidade Federal de Viçosa
## Centro de Ciências Exatas
## Departamento de Matemática

# $1^{\underline{a}}$ Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear 2019/II

1. Considere as matrizes $A, B, C, D$ e $E$ com respectivas ordens, $4 \times 3$, $4 \times 5$, $3 \times 5$, $2 \times 5$ e $3 \times 5$. Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e determine a respectiva ordem.

   (a) $AE + B^T$; (b) $C(D^T + B)$; (c) $AC + B$; (d) $E^T(CB)$.

2. Determine a ordem das matrizes $A, B, C, D$ e $E$, sabendo-se que $AB^T$ tem ordem $5 \times 3$, $(C^T + D)B$ tem ordem $4 \times 6$ e $E^T C$ tem ordem $5 \times 4$.

3. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 11 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Determine:

   (a) A ordem de $A$;

   (b) Os elementos $a_{23}$, $a_{35}$ e $a_{43}$.

4. Sejam as matrizes $A, B, C, D$ e $E$ que verificam $ABCDE = EDCBA$. Sabendo que $C$ é uma matriz de ordem $3 \times 2$, quais são as ordens das outras quatro matrizes?

5. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = A.B$ e $D = B.A$. Determine os elementos $c_{32}$ e $d_{43}$.

6. Determine a matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem 4 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - 3j, & \text{se } i < j \\ i^2 + 2j, & \text{se } i = j \\ -3i + 4j, & \text{se } i > j \end{cases}.$$

7. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Determine:

   (a) $A^2$; (b) $A^3$; (c) $A^{31}$; (d) $A^{42}$.

8. Determine números reais $x$ e $y$ tais que

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Determine em cada um dos casos abaixo, $x$, $y$ e $z$ números reais tais que a matriz $A$ seja simétrica.

   (a) $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix}$, (c) $C = \begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix}$.

10. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quando possível, calcule o que se pede.

(a) $4E - 2D$;  (b) $2A^T + C$;  (c) $(2E^T - 3D^T)^T$;  (d) $(BA^T - 2C)^T$.

11. Diz-se que uma matriz $B$ é uma raiz quadrada de uma matriz $B$ se $B^2 = A$.

 (a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

 (b) Existem quantas raízes quadradas distintas de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$? Justifique.

 (c) Na sua opinião qualquer matriz $2 \times 2$ tem pelo menos uma raiz quadrada? Justifique.

12. Sejam $A$, $B$ matrizes em $M_n(\mathbb{R})$. Se $AB = BA$, mostre que:

 (a) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$;
 (b) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
 (c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

13. Seja $A$ matriz em $M_n(\mathbb{R})$. Mostre que:

 (a) As matrizes $A.A^T$ e $\dfrac{1}{2}(A + A^T)^2$ são simétricas,

 (b) A matriz $\dfrac{1}{2}(A - A^T)$ é anti-simétrica,

 (c) Toda matriz quadrada é a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

14. Dizemos que uma matriz $A$ é ortogonal se, e somente se, $A.A^T = I$. Determine:

 (a) Os possíveis valores para o determinante de uma matriz ortogonal.

 (b) Quais matrizes reais de ordem 2 são simultaneamente anti-simétricas e ortogonais.

15. Determine o número real $m$ de modo que a matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ seja ortogonal.

16. Verifique quais das matrizes abaixo são ortogonais.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

17. Dado um número real $\alpha$, considere a matriz $T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

 (a) Dados $\alpha$ e $\beta$ em $\mathbb{R}$, mostre que $T_\alpha . T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

 (b) Calcule $T_{-\alpha}$.

 (c) Mostre que para todo número $\alpha$ a matriz $T_\alpha$ é ortogonal.

18. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, uma matriz quadrada de ordem $n$. O traço de $A$, denotado por $\mathrm{tr}(A)$, é definido como sendo o número real

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn},$$

ou seja, o traço de $A$ é a soma dos elementos da diagonal principal de $A$. Dadas $A$ e $B$ matrizes quadradas de ordem $n$, valem as seguintes propriedades:

 (a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$;
 (b) $\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A)$, em que $k \in \mathbb{R}$;
 (c) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$;
 (d) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Usando algumas destas propriedades verifique que não existem $A$ e $B$ matrizes quadradas de ordem $n$ tais que $AB - BA = I$.

19. Verifique que se $A$ é uma matriz $m \times n$, então os traços de $AA^T$ e $A^TA$ estão definidos. Em seguida prove que $tr(AA^T) = tr(A^TA)$.

20. Mostre que se $A^TA = A$, então $A$ é simétrica e $A = A^2$.

21. Suponha que $A$ é uma matriz quadrada e que $D$ é uma matriz diagonal tal que $AD = I$. O que se pode afirmar sobre a matriz $A$? Justifique.

22. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, onde $a_{11}a_{22}...a_{nn} \neq 0$. Determine $A^{-1}$, a inversa de $A$, se existir.

23. Prove que se $A$ é inversível e $AB = AC$, então $B = C$.

24. É possível ter $AB = I$ e $B$ não ser inversa de $A$? Justifique sua resposta.

25. Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$, mostre que:
    (a) Se $A$ satisfaz a igualdade $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.
    (b) Se $A$ é tal que $A^{n+1} = 0$, então $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^n$.

26. Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.
    (a) ( )Se a primeira coluna de $A$ for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto $AB$.
    (b) ( )Se a primeira linha de $A$ for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto $AB$.
    (c) ( )Se a soma de matrizes $AB + BA$ estiver definida, então $A$ e $B$ devem ser matrizes quadradas.
    (d) ( )Se $A$ é uma matriz quadrada com duas linhas idênticas, então $A^2$ tem duas linhas idênticas.
    (e) ( )Se $A$ é uma matriz quadrada e $A^2$ tem uma coluna constituída somente de zeros, então necessariamente $A$ tem uma coluna constituída somente de zeros.
    (f) ( )Se $AA^T$ é uma matriz singular(não-inversível), então $A$ não é inversível.
    (g) ( )Se $A$ é inversível e $AB = 0$, então necessariamente $B$ é a matriz nula.
    (h) ( )A soma de duas matrizes inversíveis é sempre uma matriz inversível.
    (i) ( )Se $A$ é uma matriz quadrada tal que $A^4 = 0$, então
    $$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3.$$

27. Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a $-3$, pede-se:
    (a) O determinante da matriz $P$ dada por $P = 4A^{-1}A^T$.
    (b) Decidir se $P$ é ou não inversível.
    (c) O determinante da matriz $B$ obtida de $A$ após serem realizadas as seguintes operações: $L_3 \longleftrightarrow L_2$; $L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_5$; $L_4 \longrightarrow -3L_4$.
    (d) Decidir se a matriz $Q = AA^T$ é ou não inversível.

28. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;
    (a) Desenvolvendo-o pela segunda linha (usando cofatores).
    (b) Pelo processo de triangularização (usando operações elementares sobre as linhas da matriz).

29. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det(AB)$;
(b) $A^{-1}$;
(c) $B^{-1}$;
(d) $(AB)^{-1}$;
(e) $\det(C)$, onde $CA^T = 2BC^2$.

30. Seja $Q$ uma matriz quadrada de ordem $n$ tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$. Determine o valor de $\det Q$.

31. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det A$, utilizando as operações elementares sobre as linhas de $A$;
(b) $\det A^T$;
(c) $\det(A^2)$;
(d) $A^{-1}$;
(e) $\det(-A)$;
(f) $\det(3AA^T)$.

32. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o polinômio $p(x) = \det(xI_3 - A)$, onde $I_3$ é a matriz identidade de ordem 3 e $x \in \mathbb{R}$.
(b) Verifique que $p(A) = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem 3.
(c) Use o item anterior para calcular a inversa de $A$.

33. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(f) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

34. Resolva as seguintes equações:

(a) $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$;

(b) $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16$;

(c) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$.

35. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Generalize o resultado para uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ na qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i + j \leq n$.

36. Diz-se que uma matriz $A$ é semelhante à matriz $B$ quando existe uma matriz inversível $P$ tal que $B = PAP^{-1}$.

(a) Mostre que se $A$ é uma matriz semelhante a $B$, então $B$ é semelhante a $A$.
(b) Mostre que se $A$ é semelhante a $B$ e $B$ é semelhante a $C$, então $A$ é semelhante a $C$.
(c) Prove que matrizes semelhantes tem mesmo determinante.

37. Em cada um dos casos abaixo, verifique se $A$ é inversível, encontre a matriz dos cofatores de $A$. Além disso, em cada item encontre $A^{-1}$, caso $A$ seja inversível.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

38. Sem calcular diretamente, verifique que $\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

39. Nos casos abaixo, utilizando operações elementares sobre linhas, determine $A^{-1}$, se esta existir.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$.

40. Calcule o determinante da matriz abaixo e determine sua inversa, se esta existir;

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

41. Decida se a afirmação é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

(a) ( ) $\det(2A) = 2\det(A)$.
(b) ( ) $\det(I + A) = 1 + \det(A)$.
(c) ( ) Não existe matriz real quadrada $A$ tal que $\det(AA^T) = -1$.
(d) ( ) Se $\det(AA^T) = 4$, então $\det(A) = 2$.
(e) ( ) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
(f) ( ) Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = 0$, então $B$ é inversível.
(g) ( ) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $n$ é par, então $\det(A) = \det(-A)$.
(h) ( ) Se $A^{100}$ é inversível, então $3A$ também o é.
(i) ( ) Se $AB = 0$ e $B$ é inversível, então $A = 0$.

42. A tiragem diária na cidade de Mimosa dos jornais: **Dia a Dia**, **Nossa Hora**, **Acontece** e **Urgente**, durante o ano de 2002 está representada na seguinte tabela:

| | Dia a Dia | Nossa Hora | Acontece | Urgente |
|---|---|---|---|---|
| Dias Úteis | 400 | 600 | 450 | 650 |
| Feriados | 350 | 550 | 500 | 600 |
| Sábados | 350 | 600 | 500 | 650 |
| Domingos | 450 | 500 | 400 | 700 |

Determine:

(a) A tiragem de cada jornal em Mimosa em 2002, sabendo-se que 2002 tivemos 52 sábados, 52 domingos, 12 feriados e 249 dias úteis.

(b) A estimativa de tiragem total de cada jornal em Mimosa para o ano de 2005, sabendo-se que a previsão é que até o final deste ano(2005) a tiragem tenha um aumento de 60% em relação à 2002.

43. Uma construtora está fazendo o orçamento de 65 estabelecimentos rurais sendo estes divididos em: 20 de alvenaria, 30 mistos e 15 de madeira. A tabela abaixo descreve a quantidade de material utilizado em cada tipo de construção.

| Tipo de construção/ Material | Tábuas (unidade) | Tijolos (mil) | Telhas (mil) | Tinta (litros) | Mão-de-obra (dias) |
|---|---|---|---|---|---|
| Alvenaria | 50 | 15 | 6 | 70 | 25 |
| Madeira | 500 | 1 | 5 | 20 | 30 |
| Misto | 200 | 8 | 7 | 50 | 40 |

Pede-se:

(a) Determinar, utilizando o produto de matrizes, a matriz $A$ que descreve quantas unidades de cada componente serão necessárias para cumprir o orçamento.

(b) Dar o significado do produto de matrizes $AB$, sendo $A$ a matriz obtida no item anterior e $B$ á a matriz obtida pela tabela abaixo.

| | Valor da Compra (a unidade em reais) | Transporte (a unidade em reais) |
|---|---|---|
| Tábuas | 12 | 0,08 |
| Tijolos | 100 | 20 |
| Telhas | 300 | 10 |
| Tinta | 3 | 0,50 |
| Mão-de-obra | 40 | 1,50 |

44. Considere os adubos I,II,III e IV com características e preços descritos nas tabelas abaixo:

| Substância por kg | Fósforo | Nitrato | Potássio |
|---|---|---|---|
| Adubo I | 25g | 15g | 70g |
| Adubo II | 30kg | 25g | 40g |
| Adubo III | 60g | 10g | 55g |
| Adubo IV | 15g | 30g | 60g |

| Adubos | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Preço por Kg | R$7,50 | R$5,00 | R$4,50 | R$6,50 |

Um agricultor necessita de uma mistura com a seguinte especificação: 6 kg do adubo I, 7 kg do adubo II, 5 kg do adubo III e 8 kg do adubo IV. Usando o produto de matrizes, determine a quantidade de cada substância na mistura descrita acima e o preço desta mistura.

45. Um fabricante de farinha produz três tipos de farinha: de mandioca, de milho e de trigo. Para produzir cada um dos tipos de farinha o produto bruto passa por três processos: seleção, processamento e embalagem. O tempo necessário (em horas), em cada processo, para produzir uma saca de farinha, é dado na tabela abaixo:

| Processos/ Tipos de Farinha | Seleção | Processamento | Embalagem |
|---|---|---|---|
| Mandioca | 1 | 3 | 1 |
| Milho | 2 | 5 | 1 |
| Trigo | 1,5 | 4 | 1 |

O fabricante produz as farinhas em duas usinas uma em Cacha Pregos (BA) e outra em Cacimba de Dentro (PB), as taxas por hora para cada um dos processos são dadas (em reais) na tabela abaixo:

| | Cacha Pregos | Cacimba de Dentro |
|---|---|---|
| Seleção | 2 | 1,50 |
| Processamento | 1 | 1,80 |
| Embalagem | 0,50 | 0,60 |

Encontre $A$ e $B$ matrizes obtidas pelas primeira e segunda tabelas, respectivamente. Qual o significado do produto $AB$?

46. A secretaria de meio ambiente do município de Mil Flores constatou que as empresas que trabalham nos ramos de suinocultura, cunicultura e piscicultura são as grandes poluidoras de três regiões do município. Diariamente despejam dejetos destas culturas segundo a descrição da tabela abaixo:

| Quantidade de dejetos Por dia ( em Kg ) | $1^a$ Região | $2^a$ Região | $3^a$ Região |
|---|---|---|---|
| Cunicultura | 80 | 90 | 70 |
| Piscicultura | 200 | 40 | 30 |
| Suinocultura | 150 | 120 | 100 |

A secretaria decidiu então aplicar multas diárias sobre estas empresas afim de angariar fundos para despoluir tais regiões, as multas foram estabelecidas de acordo com a tabela abaixo:

| Multa cobrada (em reais) por kg de dejetos depositados ( em Kg ) | $1^a$ Região | $2^a$ Região | $3^a$ Região |
|---|---|---|---|
| Cunicultura | 400 | 200 | 300 |
| Piscicultura | 50 | 400 | 100 |
| Suinocultura | 600 | 300 | 500 |

Considerando $A$ e $B$ as matrizes obtidas através das primeira e segunda tabelas, respectivamente, determine os elementos da matriz $AB^T$ que fornece a arrecadação da secretaria de meio ambiente de Mil Flores ao aplicar as multas nas três regiões, por ramo de atividade.

47. Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

(a) ( ) $\det(-A) = \det(A)$.

(b) ( ) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(c) ( ) Sejam $A$, $B$ e $P$ matrizes reais de ordem $n$, tais que $B = P^T.A.P$, sendo $P$ inversível. Então $\det(A) = \det(B)$.

(d) ( ) Dada a equação matricial $X^2 + 2X = 0$, onde $X$ é uma matriz quadrada de ordem $n$, não singular. Então esta equação tem única solução.

(e) ( ) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que $A.B = 0$(matriz nula), então $B.A$ também é a matriz nula.

(f) ( ) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que $A.B = 0$(matriz nula), então $A = 0$ ou $B = 0$.

(g) ( ) A soma de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.

(h) ( ) O produto de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.

Nas afirmativas abaixo, $A$, $B$ e $C$ são matrizes de ordens apropriadas para as operações indicadas.

(i) ( ) Se $A.C = B.C$ e $C$ é inversível, então $A = B$.

(j) ( ) Se $A.B = 0$ e $B$ é inversível, então $A = 0$.

(k) ( ) Se $A.B = C$ e duas das matrizes são inversíveis, então a terceira também é.

(l) ( ) Se $A.B = C$ e duas das matrizes são singulares(não-inversíveis), então a terceira também é.