# Revisão de probabilidade

## Eventos, espaço amostral, probabilidade condicional e independência

André Gustavo dos Santos

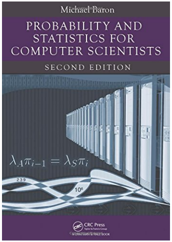
Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF222 - 2022/2

UFV

# – Fonte do material

O conteúdo e as figuras são do livro complementar da disciplina (cap. 2):




Baron, Michael.
Probability and statistics for computer scientists.
Chapman and Hall/CRC, 2013.

# Tópicos da aula

# Introdução

- No dia-a-dia, a probabilidade de um evento é vista como a chance dele ocorrer
- O conceito de probabilidade encaixa-se perfeitamente com essa visão

**Lançamento de moedas**

- Ao lançar uma moeda, dizemos que há chances iguais de sair cara ou coroa
- A probabilidade de cada uma é $1/2$
- Isso não quer dizer que lançando 10 vezes teremos sempre 5 caras e 5 coroas
- Mas, lançada 1 milhão de vezes, a quantidade de cada será bem perto de $1/2$

- Então, a longo prazo, a probabilidade de um evento pode ser vista como a proporção de vezes que ocorre (sua frequência relativa)

# Introdução

- Em previsões, a probabilidade é vista como "possibilidade"
  - Probabilidade de chuva de 80%
  - Probabilidade do time ser campeão é de 95%
  - Probabilidade do time cair para 2ª divisão é de 97,5%
- Em jogos de azar a probabilidade é comumente descrita pela razão de possibilidades (*odds ratio*)– dois valores, a chance de vitória e de perder
  - Certo aposta é 1 em 99 (1:99) - probabilidade de vencer 0,01 e perder 0,99 (se jogar durante muito tempo, vence cerca de 1% das vezes)

# Introdução

### Atendimento call center

- Há 5 atendentes em um call center e um é selecionado aleatoriamente para atender uma ligação
- Então, cada atendente tem probabilidade $1/5 = 0{,}2$ de ser selecionado (20%)

### Competição de empresas

- Duas empresas competem por um contrato, sendo que empresa A tem o dobro de chance de vencer que a empresa B.
- Então, a probabilidade de assinar o contrato é de 2/3 para A e 1/3 para B

## Resultados, eventos e espaço amostral

- Probabilidades surgem também quando consideramos e medimos os possíveis resultados de um experimento. Alguns podem ser mais prováveis que outros.
- Um experimento pode ser algo simples, como lançar uma moeda, ou algo complexo, como projetar um novo software

# Resultados, eventos e espaço amostral

**Definição – espaço amostral**

O conjunto de todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral

**Definição – evento**

Qualquer conjunto de resultados de um experimento é um evento.
Eventos são subconjuntos do espaço amostral.

**Exemplo**

- O lançamento de um dado pode produzir 6 resultados: 1 a 6
- Cada resultado é um evento
- Há outros eventos: resultado par, resultado ímpar, resultado $\leq 3$, etc

# Resultados, eventos e espaço amostral

- Um espaço amostral com $N$ resultados possíveis gera $2^N$ eventos possíveis
- Prova:
  - para contar, podemos calcular de quantas formas um evento pode ser produzido
  - cada resultado do espaço amostral pode ser incluído ou não no evento (2 possib.)
  - temos então $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^N$ eventos possíveis

## Partida de futebol

- Considere uma partida entre Brasil e Argentina
- O espaço amostral contém 3 resultados:

$$\Omega = \{\text{Vitória do Brasil, Vitória da Argentina, Empate}\}$$

- Combinando esses resultados de todas as formas possíveis, temos:
  - Brasil vence, perde, empata, pelo menos empata, no máximo empata, não empata, tem “algum“ resultado, não tem nenhum resultado (total de $2^3 = 8$ eventos)
  - Obs.: o evento “algum resultado” inclui o espaço amostral todo, deve ter probabilidade 1; já o “nenhum resultado” é vazio, sem nenhum dos resultados, deve ter probabilidade 0.

# Resultados, eventos e espaço amostral

## Notação

- $\Omega$: espaço amostral
- $\varnothing$: evento vazio
- $\mathbf{P}\{E\}$: probabilidade do evento E

## Lançamento de um dado

- $\Omega$ = {1,2,3,4,5,6}
- $\mathbf{P}\{3\}$ = 1/6
- $\mathbf{P}\{1, 2\}$ = 2/6 = 1/3
- $\mathbf{P}\{\text{número par}\} = \mathbf{P}\{2, 4, 6\}$ = 3/6 = 1/2

# Operações de conjunto

- Um evento é um conjunto de resultados, então valem as operações de conjunto

## Notação

Sejam $A$ e $B$ dois eventos:

- $A \cup B$: união, um evento que contém a união dos resultados (OU)
- $A \cap B$: interseção, um evento que contém os resultados comuns (E)
- $\overline{A}$ ou $A^{\complement}$: complemento, um evento que ocorre quando A não ocorre (NÃO)
- $A \setminus B$: diferença, um evento que contém os resultados de A excluindo os de B (MAS NÃO)

# Operações de conjunto

## Definição

- Dois eventos $A$ e $B$ são disjuntos se sua interseção é vazia, $A \cap B = \varnothing$
- Eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são mutuamente exclusivos se são disjuntos dois a dois, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para qualquer $i \neq j$
- Eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são exaustivos se sua união é o espaço amostral, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... = \Omega$

- Eventos mutuamente exclusivos nunca ocorrem simultaneamente: a ocorrência de um exclui a ocorrência dos demais
- Eventos exaustivos cobrem todo o espaço amostral, nada "fica de fora": com certeza pelo menos um ocorre

## Exemplos

- Ao escolher uma carta aleatória de um baralho, os quatro naipes são mutuamente exclusivos e exaustivos
- Receber conceito A, B ou C em uma avaliação é mutuamente exclusivo (infelizmente não exaustivo)

# Operações de conjunto

- Como será visto em exemplos adiante, geralmente é mais fácil calcular a probabilidade de uma interseção de eventos que da união de eventos
- A operação de complemento converte união em interseção e vice-versa

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

**Exemplo**

- Ter CR = 100 é a interseção de tirar 100 em cada disciplina
- O complemento, ter CR < 100, é a união de tirar < 100 em pelo menos uma

# Cálculo da probabilidade de um evento

## Casos extremos

- $\mathbf{P}\{\Omega\} = 1$
- $\mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$

## União (eventos mutuamente exclusivos)

- A probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos é a soma de suas probabilidades
$$\mathbf{P}\{E_1 \cup \cdots \cup E_n\} = \mathbf{P}\{E_1\} + \cdots + \mathbf{P}\{E_n\}$$

## Exemplo

- Se um arquivo enviado para uma impressora tem 60% de probabilidade de ser o primeiro na fila de prioridades e 30% de ser o segundo, então ele é o primeiro ou segundo com probabilidade 90%.

# Cálculo da probabilidade de um evento

## Exemplo

- Durante algumas obras ocorre apagão na rede elétrica na segunda-feira com probabilidade 0,7 e na terça com probabilidade 0,5.
- Então, ocorre na segunda ou na terça com probabilidade 0,7 + 0,5 = 1,2?
- Obviamente não, porque a probabilidade deve estar sempre entre 0 e 1.
- O erro no cálculo é que os eventos não são mutuamente exclusivos; existe chance de ocorrer apagão nos dois dias
- Então as probabilidades não podem ser simplesmente somadas, é necessário descontar a probabilidade dos resultados comuns, que foi somada duas vezes

## União

$$\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\}$$

Se $A$ e $B$ são mutuamente exclusives, $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$, então $\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\}$

# Cálculo da probabilidade de um evento

- Dois eventos são ditos independentes se a ocorrência de um não afeta a probabilidade do outro
  - Exemplo: uma carta aleatória de um baralho ser dama e ser de paus

## Interseção (eventos independentes)

- A probabilidade de eventos independentes é o produto de suas probabilidades

$$\mathbf{P}\{E_1 \cap \cdots \cap E_n\} = \mathbf{P}\{E_1\} \times \cdots \times \mathbf{P}\{E_n\}$$

## Exemplo

- No exemplo do apagão da rede, temos os eventos $S =$\{apagão na segunda\} e $T =$\{apagão na terça\}, com $\mathbf{P}\{S\} = 0{,}7$ e $\mathbf{P}\{T\} = 0{,}5$
- Se os eventos são independentes, ou seja, se a ocorrência de apagão em um dia não afeta a probabilidade no outro dia, temos $\mathbf{P}\{S \cap T\} = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35$.
- E podemos corrigir o cálculo da probabilidade de apagão na segunda ou na terça:

$$\mathbf{P}\{S \cup T\} = \mathbf{P}\{S\} + \mathbf{P}\{T\} - \mathbf{P}\{S \cap T\} = 0{,}7 + 0{,}5 - 0{,}35 = 0{,}85$$

# Cálculo da probabilidade de um evento

- Os eventos $A$ e $\overline{A}$ são disjuntos, então $\mathbf{P}\{A \cap \overline{A}\} = \mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$
- Eles também são exaustivos, então $\mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{\overline{A}\} = \mathbf{P}\{A \cup \overline{A}\} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1$
- Isolando $\mathbf{P}\{\overline{A}\}$ obtemos a regra (que faz todo sentido):

**Complemento**

$$\mathbf{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbf{P}\{A\}$$

**Exemplos**

- Um sistema com probabilidade 0,7 de proteção contra um novo vírus é vulnerável ao vírus com probabilidade 1 - 0,7 = 0,3
- Supondo que um código esteja livre de erros com probabilidade 0,45, sua probabilidade de ter pelo menos um erro é 0,55.

UFV

# Aplicações em confiabilidade

- As regras e fórmulas anteriores são muito usadas em Confiabilidade (Fiabilidade), quando se calcula a probabilidade de um sistema com vários componentes estar funcional

## Confiabilidade de backups

- Há 1% de probabilidade de falha em um HD, que tem então dois backups, cada um com 2% de probabilidade de falha, sendo as três unidades independentes.
- A informação é perdida apenas na infeliz situação de falha nas três unidades.
- Qual a probabilidade da informação estar salva?
- Solução
  - Eventos: $H = \{\text{falha no HD}\}$, $B_1 = \{\text{falha no backup 1}\}$ e $B_2 = \{\text{falha no backup 2}\}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\text{salva}\} &= 1 - \mathbf{P}\{\text{perdida}\} \\
&= 1 - \mathbf{P}\{H \cap B_1 \cap B_2\} \\
&= 1 - \mathbf{P}\{H\}\mathbf{P}\{B_1\}\mathbf{P}\{B_2\} \qquad \textit{(independentes entre si)} \\
&= 1 - 0.01 \cdot 0.02 \cdot 0.02 \\
&= 0.999996
\end{aligned}$$

*Note a importância de se fazer backup! Sem eles a probabilidade seria apenas 0.99.*

# Aplicações em confiabilidade

- No exemplo anterior, é suficiente que um componente funcione (comp. paralelos)
- Alguns sistemas têm componentes em série, falha em um já falha o sistema
- Para funcionar com probabilidade alta, todos precisam ser confiáveis

## Confiabilidade do sistema de lançamento

- Suponha que o lançamento de um ônibus espacial dependa de três dispositivos principais que operam independentemente um do outro e falham com probabilidades 0,01, 0,02 e 0,02, respectivamente.
- Se algum deles não funcionar corretamente, o lançamento será adiado.
- Qual a probabilidade do ônibus espacial ser lançado na data prevista?
- Solução

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\text{na data}\} &= \mathbf{P}\{\text{os 3 funcionam}\} \\
&= \mathbf{P}\{\overline{H} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\} \\
&= \mathbf{P}\{\overline{H}\}\mathbf{P}\{\overline{B_1}\}\mathbf{P}\{\overline{B_2}\} && \textit{(independentes entre si)} \\
&= (1 - 0.01) \cdot (1 - 0.02) \cdot (1 - 0.02) && \textit{(complemento)} \\
&= 0.9508
\end{aligned}$$

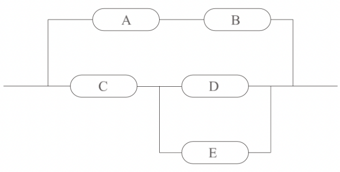
*Note como a fiabilidade caiu (comparando com exemplo anterior) por estarem em série.*

# Aplicações em confiabilidade

- Muitos sistemas modernos têm vários componentes, em paralelo e em série
- O exemplo a seguir ilustra técnicas para calcular a confiabilidade

## Técnicas para cálculo de confiabilidade

- Calcule a confiabilidade do sistema ilustrado abaixo, considerando cada componente com probabilidade de funcionamento 0.92 independente dos demais




- No link de cima (chamemos de $F$), $A$ e $B$ estão em série: $\mathbf{P}\{A \cap B\} = (0.92)(0.92) = 0.8464$
- Embaixo à direita (chamemos $G$), $D$ e $E$ estão em paralelo: $\mathbf{P}\{D \cup E\} = 1 - (1 - 0.92)(1 - 0.92) = 0.9936$
- C está em série $G$ (chamemos de $H$): $\mathbf{P}\{C \cap G\} = (0.92)(0.9936) = 0.9141$
- Por fim, este está em paralelo com o link de cima: $\mathbf{P}\{F \cup H\} = 1 - (1 - 0.8464)(1 - 0.9141) = 0.9868$

- o evento "o sistema está operável" pode ser descrito por $(A \cap B) \cup (C \cap (D \cup E))$

# Eventos igualmente prováveis

- Um caso simples para cálculo de probabilidade é o caso em que os resultados são igualmente prováveis
- Ou seja, o espaço amostral $\Omega$ contém $n$ resultados, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, todos com a mesma probabilidade de ocorrer
- Como $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\omega_k\} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1$, temos que $\mathbf{P}\{\omega_k\} = 1/n$ para todo $k$
- Assim, a probabilidade de um evento $E$ com $t$ resultados é

$$\mathbf{P}\{E\} = \frac{\text{número de resultados de } E}{\text{número de resultados de } \Omega} = \frac{t}{n}$$

- Os resultados que formam o evento $E$ são chamados "favoráveis"

$$\mathbf{P}\{E\} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados}} = \frac{\mathcal{N}_F}{\mathcal{N}_T}$$

UFV

# Eventos igualmente prováveis

## Lançamento de dado

- Lançar um dado tem 6 resultados possíveis (1 a 6), igualmente prováveis
- Assim:
  - $\mathbf{P}\{1\} = 1/6$
  - $\mathbf{P}\{\text{ímpar}\} = 3/6$
  - $\mathbf{P}\{\text{menor que 5}\} = 4/6$

- A resolução depende da forma como descrevemos o espaço amostral e os resultados
- Para usar a fórmula do slide anterior os resultados devem ser igualmente prováveis

## Cartas de baralho

- Probabilidade de uma carta selecionada de um baralho de 52 cartas ser de paus:
  - Sol.1: espaço amostral tem 52 resultados (cartas), 13 favoráveis, $\mathbf{P}\{\text{paus}\} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
  - Sol.2: espaço amostral tem 4 resultados (naipes), 1 favorável, $\mathbf{P}\{\text{paus}\} = \frac{1}{4}$

# Eventos igualmente prováveis

## Filhos do casal

- Um jovem casal pretender ter duas crianças. Qual a probabilidade de 2 meninas?
  - Sol.1: há três possibilidades: 2 meninas, 2 meninos e 1 de cada
    Então a probabilidade de 2 meninas é $\frac{1}{3}$
  - Sol.2: cada criança é igual provável menina ou menino e os gêneros são independentes
    Então a probabilidade de 2 meninas é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

- Qual está correto?
  - A solução 1 está errada porque os eventos listados não são igualmente prováveis
  - O evento “1 de cada” tem mais chances (o dobro) que os outros, porque engloba nascer 1 menina e 1 menino, nesta ordem, ou na ordem inversa

# Probabilidade condicional

## Voo atrasado

- Você vai buscar alguém no aeroporto
- O voo provavelmente chegará no horário; a probabilidade disso é 0,8
- De repente, é anunciado que o voo partiu uma hora depois do previsto; agora a probabilidade de chegar no horário é de apenas 0,05
- Novas informações afetaram a probabilidade de cumprir a previsão inicial
- A nova probabilidade é chamada de probabilidade condicional, onde a nova informação, de que o voo partiu atrasado, é uma condição

# Probabilidade condicional

**Definição**

A probabilidade condicional de um evento $A$ dado $B$, denotada por $\mathbf{P}\{A|B\}$, é a probabilidade de $A$ ocorrer sabendo que $B$ certamente ocorre(u)

- Como calcular essa probabilidade?
- Com a nova informação, ocorrência da condição $B$, os resultados que não contêm $B$ têm 0 de chance, portanto apenas os que contêm $B$ devem ser considerados
- A probabilidade incondicional de $A$

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{\text{número de resultados em } A}{\text{número de resultados em } \Omega}$$

  é substituída pela probabilidade condicional de $A$ dado $B$:

$$\mathbf{P}\{A|B\} = \frac{\text{número de resultados em } A \cap B}{\text{número de resultados em } B} = \frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}}$$

- Reescrevendo, obtemos uma fórmula para a probabilidade da interseção:

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{A|B\}$$

# Probabilidade condicional

**Exemplo**

Probabilidade de tirar um rei preto, dado que a carta retirada foi uma figura:

$$\mathbf{P}\{\text{rei preto} \mid \text{figura}\} = \frac{\mathbf{P}\{\text{rei preto} \cap \text{figura}\}}{\mathbf{P}\{\text{figura}\}} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{12}{52}} = \frac{2}{12} = 0.17$$

# Independência

- Agora podemos dar uma definição intuitiva e muito clara de independência

**Definição**

Os eventos $A$ e $B$ são independentes se a ocorrência de $B$ não afeta a probabilidade de ocorrência de $A$, isto é,

$$\mathbf{P}\{A|B\} = \mathbf{P}\{A\}$$

- Por esta definição, a probabilidade condicional é igual à probabilidade incondicional no caso de eventos independentes
- Substituindo na fórmula da probabilidade da interseção, $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{A|B\}$, chegamos a:

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}$$

que é a fórmula já vista para eventos independentes.

# Independência

## Pontualidade dos voos

Considerando que

- 90% dos voos partem no horário
- 80% dos voos chegam no horário
- 75% dos voos partem no horário e chegam no horário

Responda

1. Você está aguardando um voo que partiu no horário.
   Qual a probabilidade dele chegar no horário?
2. Você aguardava um voo, que chegou no horário.
   Qual a probabilidade dele ter partido no horário?
3. Esses eventos, partir e chegar no horário, são independentes?

Solução: seja $P$ o evento "partiu no horário" e $C$ o evento "chegou no horário"

1. $\mathbf{P}\{C|P\} = \dfrac{\mathbf{P}\{C \cap P\}}{\mathbf{P}\{P\}} = \dfrac{0.75}{0.9} = 0.8333$
2. $\mathbf{P}\{P|C\} = \dfrac{\mathbf{P}\{P \cap C\}}{\mathbf{P}\{C\}} = \dfrac{0.75}{0.8} = 0.9375$
3. Não, pois $\mathbf{P}\{C|P\} \neq \mathbf{P}\{C\}$ (ou $\mathbf{P}\{P|C\} \neq \mathbf{P}\{P\}$ ou $\mathbf{P}\{P \cap C\} \neq \mathbf{P}\{P\}\mathbf{P}\{C\}$)

# Independência

- No exemplo anterior, note que $\mathbf{P}\{C|P\} > \mathbf{P}\{C\}$ e $\mathbf{P}\{P|C\} > \mathbf{P}\{P\}$
- Em outras palavras, partir no horário aumenta a probabilidade de chegar no horário, e vice-versa
- Isso está perfeitamente de acordo com nossa intuição

## Regra de Bayes

- O exemplo anterior mostrou que as duas probabilidades condicionais $\mathbf{P}\{A|B\}$ e $\mathbf{P}\{B|A\}$ não são necessariamente iguais (de fato, geralmente não são)

**Confiabilidade de testes**

Considere certo teste para detectar infecção de SARS-CoV-2

- Ele é 95% confiável para pacientes infectados e 99% para não infectados
- Isto é, se o paciente tem o vírus (evento $V$), o teste mostra isso (evento $S$) com probabilidade $\mathbf{P}\{S|V\} = 0.95$; se não tem, mostra com $\mathbf{P}\{\overline{S}|\overline{V}\} = 0.99$

Considere um paciente cujo teste deu positivo (i.e., o teste mostra que ele tem o vírus)

- Sabendo que os testes às vezes erram, o paciente quer saber qual a probabilidade de realmente ter o vírus
- O problema é que esta probabilidade condicional, $\mathbf{P}\{V|S\}$, não foi informada...

- O exemplo é aplicável a qualquer procedimento de teste, como teste de gravidez, de paternidade, influência de álcool (trânsito), e até testes de software e hardware
- O problema é conectar a probabilidade dada, $\mathbf{P}\{S|V\}$, com a solicitada, $\mathbf{P}\{V|S\}$

# Regra de Bayes

- A conexão entre as probabilidades condicionais foi feita no século XVIII pelo ministro presbiteriano e estatístico britânico Thomas Bayes (1702–1761)

- Note que $A \cap B = B \cap A$
- Então $\mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{A|B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B|A\}$
- Resolvendo para $\mathbf{P}\{B|A\}$ temos que:

$$\mathbf{P}\{B|A\} = \frac{\mathbf{P}\{A|B\}\mathbf{P}\{B\}}{\mathbf{P}\{A\}} \qquad \textit{(regra de Bayes)}$$

UFV

# Regra de Bayes

## Nota na prova

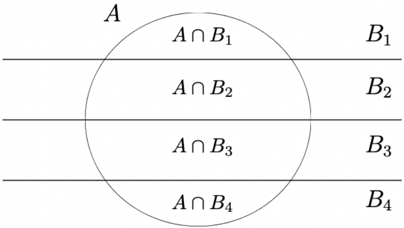
- Os estudantes $X$, $Y$ e $Z$ esqueceram de colocar seus nomes numa prova
- O professor sabe que a probabilidade deles terem ido bem na prova é 0,8, 0,7 e 0,5, respectivamente
- Depois de avaliar as provas, ele nota que duas tiveram nota boa e uma não
- Assumindo que os estudantes fizeram a prova independente dos outros, qual a probabilidade da nota ruim ser do estudante $Z$?
- Solução:
  - Notação: $B$ e $R$, nota boa e ruim; $XB$, estudante $X$ teve nota boa, etc
  - Queremos $\mathbf{P}\{ZR|BBR\}$, dado que $\mathbf{P}\{B|X\} = 0{,}8$, $\mathbf{P}\{B|Y\} = 0{,}7$ e $\mathbf{P}\{B|Z\} = 0{,}5$
  - Pela regra de Bayes, $\mathbf{P}\{ZR|BBR\} = \dfrac{\mathbf{P}\{BBR|ZR\}\mathbf{P}\{ZR\}}{\mathbf{P}\{BBR\}}$
  - Dado $ZR$, $BBR$ ocorre se $X$ e $Y$ tiveram notas boas: $\mathbf{P}\{BBR|ZR\} = (0{,}8)(0{,}7) = 0{,}56$
  - $BBR$ pode ocorrer de 3 formas, dependendo de quem teve nota ruim:
    $$\begin{aligned}\mathbf{P}\{BBR\} &= \mathbf{P}\{XB \cap YB \cap ZR\} + \mathbf{P}\{XB \cap YR \cap ZB\} + \mathbf{P}\{XR \cap YB \cap ZB\} \\ &= (0{,}8)(0{,}7)(0{,}5) + (0{,}8)(0{,}3)(0{,}5) + (0{,}2)(0{,}7)(0{,}5) = 0{,}47\end{aligned}$$
  - Portanto, $\mathbf{P}\{ZR|BBR\} = \dfrac{(0{,}56)(0{,}5)}{0{,}47} = 0{,}5957.$

# Lei da probabilidade total

- O denominador da regra de Bayes é frequentemente calculado pela lei da probabilidade total
- Esta lei relaciona a probabilidade incondicional de um evento $A$ com suas probabilidades condicionais
- É usada quando é mais fácil calcular as probabilidades condicionais de $A$ com informações adicionais

# Lei da probabilidade total

- Sejam $B_1, \ldots, B_n$ eventos mutuamente exclusivos e exaustivos de $\Omega$
- Eles formam uma partição de $\Omega$: $\Omega = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ com $B_i \cap B_j = \varnothing$ para $i \neq j$
- Também formam uma partição de $A$: $A = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$
- Então, $\mathbf{P}\{A\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{A \cap B_k\}$



# Lei da probabilidade total

- Sejam $B_1, \ldots, B_n$ eventos mutuamente exclusivos e exaustivos de $\Omega$
- Eles formam uma partição de $\Omega$: $\Omega = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ com $B_i \cap B_j = \varnothing$ para $i \neq j$
- Também formam uma partição de $A$: $A = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$
- Então, $\mathbf{P}\{A\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{A \cap B_k\}$

## Lei da probabilidade total

$$\mathbf{P}\{A\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{A|B_k\}\mathbf{P}\{B_k\}$$

No caso de $n = 2$ eventos: $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A|B\}\mathbf{P}\{B\} + \mathbf{P}\{A|\overline{B}\}\mathbf{P}\{\overline{B}\}$

Juntando com a regra de Bayes:

## Regra de Bayes para 2 eventos

$$\mathbf{P}\{B|A\} = \frac{\mathbf{P}\{A|B\}\mathbf{P}\{B\}}{\mathbf{P}\{A|B\}\mathbf{P}\{B\} + \mathbf{P}\{A|\overline{B}\}\mathbf{P}\{\overline{B}\}}$$

# Lei da probabilidade total

## Confiabilidade de testes (continuação)

Considere certo teste para detectar infecção de SARS-CoV-2

- Ele é 95% confiável para pacientes infectados e 99% para não infectados
- Isto é, se o paciente tem o vírus (evento $V$), o teste mostra isso (evento $S$) com probabilidade $\mathbf{P}\{S|V\} = 0.95$; se não tem, mostra com $\mathbf{P}\{\overline{S}|\overline{V}\} = 0.99$

Considere um paciente cujo teste deu positivo (i.e., o teste mostra que ele tem o vírus)

- Sabendo que os testes às vezes erram, o paciente quer saber qual a probabilidade de realmente ter o vírus
- O problema que esta probabilidade condicional, $\mathbf{P}\{V|S\}$, não foi informada...

Supondo que 4% de todos os pacientes tenham sido infectados com o vírus

- $$\mathbf{P}\{V|S\} = \frac{\mathbf{P}\{S|V\}\mathbf{P}\{V\}}{\mathbf{P}\{S|V\}\mathbf{P}\{V\} + \mathbf{P}\{S|\overline{V}\}\mathbf{P}\{\overline{V}\}}$$
  $$= \frac{(0.95)(0.04)}{(0.95)(0.04) + (1-0.99)(1-0.04)} = 0.7983.$$

# Lei da probabilidade total

## Diagnóstico de programas

Um novo programa de computador consiste em dois módulos

- O primeiro contém erro com probabilidade de 0,2
- O segundo, mais complexo, 0,4, independente do primeiro
- Um erro apenas no primeiro módulo causa falha no programa com probab. 0,5
- No segundo módulo essa probabilidade é 0,8
- Se houver erro nos dois módulos, a probabilidade de falha é 0,9

Houve uma falha no programa

- Qual a probabilidade de ter ocorrido erro em ambos os módulos?

# Lei da probabilidade total

## Diagnóstico de programas (solução)

Notação

- $A = \{\text{erro no módulo I}\}$, $B = \{\text{erro no módulo II}\}$, $C = \{\text{falha no programa}\}$
- $\{\text{erro apenas no módulo I}\} = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $\{\text{erro apenas no módulo II}\} = B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

Dados

- $\mathbf{P}\{A\} = 0.2$, $\mathbf{P}\{B\} = 0.4$, $\mathbf{P}\{A \cap B\} = (0.2)(0.4) = (0.08)$ *(por independência)*
- $\mathbf{P}\{C|A \setminus B\} = 0.5$, $\mathbf{P}\{C|B \setminus A\} = 0.8$, $\mathbf{P}\{C|A \cap B\} = 0.9$

Questão

- Qual o valor de $\mathbf{P}\{A \cap B|C\}$?

Note que

- $A$, $B$ e $A \cap B$ não são mutuamente exclusivos nem exaustivos
  *(não podem ser usados na Regra de Bayes)*
- $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $A \cap B$ são mutuamente exclusivos, mas não exaustivos
  *(para usar a Regra de Bayes é necessário incluir $\overline{A \cup B} = \{\text{sem erros no programa}\}$)*

# Lei da probabilidade total

## Diagnóstico de programas (continuação)

Combinando a Regra de Bayes e a Lei da Probabilidade Total temos que:

$$\mathbf{P}\{A \cap B | C\} = \frac{\mathbf{P}\{C | A \cap B\}\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{C\}}$$

onde $\mathbf{P}\{C\} = \mathbf{P}\{C|A \setminus B\}\mathbf{P}\{A \setminus B\} + \mathbf{P}\{C|B \setminus A\}\mathbf{P}\{B \setminus A\}$
$+\mathbf{P}\{C|A \cap B\}\mathbf{P}\{A \cap B\} + \mathbf{P}\{C|\overline{A \cup B}\}\mathbf{P}\{\overline{A \cup B}\}$

Temos que:

- $A$ é a união dos eventos disjuntos $A \setminus B$ e $A \cap B$
- Então, $\mathbf{P}\{A \setminus B\} = \mathbf{P}\{A\} - \mathbf{P}\{A \cap B\} = 0.2 - 0.08 = 0.12$
- De forma similar, $\mathbf{P}\{B \setminus A\} = \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\} = 0.4 - 0.08 = 0.32$
- $\overline{A \cup B}$ é o evento {sem erros no programa}, logo $\mathbf{P}\{C|\overline{A \cup B}\} = 0$

Concluindo:

$$\mathbf{P}\{A \cap B | C\} = \frac{(0.9)(0.8)}{(0.5)(0.12) + (0.8)(0.32) + (0.9)(0.08) + 0} = 0.1856.$$

# Lei da probabilidade total

- No exemplo, usamos a Lei da Probabilidade Total no cálculo do denominador
  - $\mathbf{P}\{A \cap B | C\} = \dfrac{\mathbf{P}\{C | A \cap B\}\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{C\}}$

onde

$\mathbf{P}\{C\} = \mathbf{P}\{C|A \setminus B\}\mathbf{P}\{A \setminus B\} + \mathbf{P}\{C|B \setminus A\}\mathbf{P}\{B \setminus A\} + \mathbf{P}\{C|A \cap B\}\mathbf{P}\{A \cap B\} + \mathbf{P}\{C|\overline{A \cup B}\}\mathbf{P}\{\overline{A \cup B}\}$

| Localização do erro | | | Probabilidade de falha | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}\{A \setminus B\}$ | $=$ | 0.12 | $\mathbf{P}\{C \vert A \setminus B\}$ | $=$ | 0.5 |
| $\mathbf{P}\{B \setminus A\}$ | $=$ | 0.32 | $\mathbf{P}\{C \vert B \setminus A\}$ | $=$ | 0.8 |
| $\mathbf{P}\{A \cap B\}$ | $=$ | 0.08 | $\mathbf{P}\{C \vert A \cap B\}$ | $=$ | 0.9 |
| $\mathbf{P}\{\overline{A \cup B}\}$ | $=$ | 0.48 | $\mathbf{P}\{C \vert \overline{A \cup B}\}$ | $=$ | 0 |

# Resumo

- A probabilidade de um evento é um número entre 0 e 1
- O evento vazio tem probabilidade 0 e o espaço amostral tem probabilidade 1
- Há regras para o cálculo de probabilidades de união, interseção e complementos de eventos
- Na união de eventos disjuntos, as probabilidades são somadas
- Na interseção de eventos independentes, as probabilidades são multiplicadas
- A combinação dessas regras permite avaliar a confiabilidade de um sistema, dadas as confiabilidades de seus componentes

- No caso de resultados igualmente prováveis, a probabilidade é a razão entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados

- Dada a ocorrência de um evento $B$, pode-se calcular a probabilidade condicional de $A$
- Probabilidades incondicionais de $A$ podem ser calculadas das suas probabilidades condicionais pela Lei da Probabilidade Total
- A Regra de Bayes, frequentemente usada em testes e diagnósticos, relaciona as probabilidades condicionais de $A$ dado $B$ e $B$ dado $A$