Vetores no Plano e no Espaço. Espaços Vetoriais

Prof. Dr. Walter T. Huaraca Vargas

7 de junho de 2022

Espaço $\mathbb{R}^n$

Definição

O espaço euclidiano de dimensão n é o conjunto:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); x_1, x_2, \cdots x_n \in \mathbb{R}\}$$

Os elementos $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *são chamados de vetores.*

Espaço $\mathbb{R}^n$

Definição

O espaço euclidiano de dimensão n é o conjunto:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); x_1, x_2, \cdots x_n \in \mathbb{R}\}$$

Os elementos $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ são chamados de vetores.

Exemplo 1.

$\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Propriedades

Existe uma operação

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Tais que se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Propriedade Comutativa)
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Propriedade Associativa)
3. Existe um único vetor $\theta = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{u} + \theta = \theta$, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$
4. Para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, existe um único vetor chamado de oposto do $-\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \theta$

Propriedades

Existe uma operação

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Tais que se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

Propriedades

Existe uma operação

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Tais que se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

1. $r \cdot (s \cdot (\mathbf{u})) = (rs) \cdot \mathbf{u}$
2. $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$
3. $r \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}$
4. $(r + s) \cdot \mathbf{u} = (r \cdot \mathbf{u}) + (s \cdot \mathbf{u})$

Produto Interno. Módulo, Ângulos e Vetores Ortogonais

Definição (Produto Interno)

Se $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n), v = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *o produto interno de u e v é:*

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Produto Interno. Módulo, Ângulos e Vetores Ortogonais

Definição (Produto Interno)

Se $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n), v = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *o produto interno de u e v é:*

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Exemplo 2.

Calcular o produto interno dos vetores $u = (1, 2)$ e $v = (-2, 1)$, interprete geometricamente.

Produto Interno. Módulo, Ângulos e Vetores Ortogonais

Definição (Módulo de um Vetor)

Se $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, o módulo do vetor u é o número:*

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0$$

Produto Interno. Módulo, Ângulos e Vetores Ortogonais

Definição (Módulo de um Vetor)

Se $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *o módulo do vetor* u *é o número:*

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0$$

Exemplo 3.

Calcular o módulo do vetor $u = (1, 2, 3)$ e interpretar geometricamente.

Produto Interno. Módulo, Ângulos e Vetores Ortogonais

Definição (Ângulo Entre Vetores)

Se $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n), v = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *o ângulo entre os vetores* u *e* v *é:*

$$0 \leq \cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \leq \pi$$

Produto Interno. Módulo, Ângulos e Vetores Ortogonais

Definição (Vetores Ortogonais)

Os vetores u e v são ortogonais se, e somente se, $u \cdot v = 0$.

Retas no Plano

Definição

A reta $\mathcal{L}$ que passa pelo ponto P e tem como vetor diretor o vetor v é o conjuto de pontos:

$$P + tv$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Se $P = (p_1, p_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ qualquer ponto (x, y) da reta $\mathcal{L}$ se escreve da forma:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$$

de onde obtemos a chamada a equação paramétrica da reta:

$$\begin{cases} x &= p_1 + tv_1 \\ y &= p_2 + tv_2 \end{cases}$$

Exemplo

Achar as equações paramétricas da reta que pasa pelos pontos $P = (2, 1)$ e $Q = (-1, 3)$.

Nas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x &= p_1 + tv_1 \\ y &= p_2 + tv_2 \end{cases}$$

Podemos isolar t e obtemos

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{x - p_2}{v_2}$$

Sempre que v_1 e v_2 sejam não nulos. De onde obtemos:

$$ax + by + c = 0$$

Chamada equação general da reta em coordenadas cartesianas.
O que acontece se $v_1 = 0$? $v_2 = 0$?

Exemplo

Achar a equação geral da reta que pasa pelos pontos $P = (2, 1)$ e $Q = (-1, 3)$.

Posição de 2 retas

Dadas duas retas num plano, podem acontecer os seguintes casos:

1. As retas se cortam num único ponto.
2. As retas são paralelas.
3. As retas coincidem.

Considere as equações das retas:

$$\begin{cases} r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \\ r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Para decidir sobre a posição destas duas retas, basta aplicar o Teorema de posto para a matriz extendida:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}$$

1. Estude a posição das retas com equações $3x + 2y - 7 = 0$ e $6x + 4y + 1 = 0$.
2. Estude a posição das retas com equações $r_1 : (x, y) = (1, 0) + t(-1, 2)$ e $r_2 : (x, y) = (-2, 1) + s(-1, -3)$.

Retas e Planos no espaço

Definição

A reta $\mathcal{L}$ que passa pelo ponto P e tem como vetor diretor o vetor v é o conjuto de pontos:

$$P + tv$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Se $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ qualquer ponto (x, y, z) da reta $\mathcal{L}$ se escreve da forma:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

de onde obtemos a chamada a equação paramétrica da reta:

$$\begin{cases} x &= p_1 + tv_1 \\ y &= p_2 + tv_2 \\ z &= p_3 + tv_3 \end{cases}$$

Exemplo

Achar as equações paramétricas da reta que pasa pelos pontos $P = (2, 1, 3)$ e $Q = (-1, 3, -2)$.

Nas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x & = & p_1 + tv_1 \\ y & = & p_2 + tv_2 \\ z & = & p_3 + tv_3 \end{cases}$$

Podemos isolar t e obtemos

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{x - p_2}{v_2} = \frac{x - p_3}{v_3}$$

Sempre que v_1, v_2 e v_3 sejam não nulos.

De onde obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_2x - v_1y & = & v_2p_1 - v_1p_2 \\ \\ v_3y - v_2z & = & v_3p_2 - v_2p_3 \\ \\ v_3x - v_1z & = & v_3p_1 - v_1p_3 \end{array}\right.$$

Porem, a terceira pode ser deduzida das outras dois:

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_2x - v_1y & = & v_2p_1 - v_1p_2 \\ \\ v_3y - v_2z & = & v_3p_2 - v_2p_3 \end{array}\right.$$

Chamada equação general da reta em coordenadas cartesianas.
O que acontece se $v_1 = 0$?, $v_2 = 0$?, $v_3 = 0$?.

Exemplo

Achar a equação geral da reta que pasa pelos pontos $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (-2, 1, 2)$.

Posição de 2 retas

Dadas duas retas no espaço, podem acontecer os seguintes casos:

1. As retas se cortam num único ponto.
2. As retas são paralelas.
3. As retas se cruzam.
4. As retas coincidem.

Considere as equações das retas:

$$\begin{cases} r_1 : (x, y, z) = p_1 + tv_1 \\ \\ r_2 : (x, y, z) = p_2 + sv_2 \end{cases}$$

Igualamos estas equações:

$$p_1 + tv_1 = p_2 + tv_2$$

Para decidir sobre a posição destas duas retas, basta aplicar o Teorema de posto o sistema obtido.

Estude a posição das retas com equações

$$\begin{cases} r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 0) \\ \\ r_2 : (x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 0, 1) \end{cases}$$

Planos no espaço

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ não colineares e $P \in \mathbb{R}^3$, o plano que passa pelo ponto P e com vetores diretores u e v é:

$$\mathcal{P} : P + tu + sv$$

Se $P = (p_1, p_2, p_3)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, logo se $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ então:

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$

A chamada equação paramétrica da reta

Resolvendo este sistema temos:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Chamada equação cartesiana do plano

Posição entre dois planos

1. Os planos se cortam numa reta.
2. Os planos são paralelos.
3. Os planos coincide

Dterminaremos cada um destes casos estudando o sistema definido pelas equações do plano e usando o Teorema do posto.

Exemplo.

Estude a posição das retas $2x + 3y - z = 1$ e $-x - 2y + z = 0$.

Espaços Vetoriais

Definição

Consideremos um conjunto $\mathbb{V} \neq \emptyset$, diremos que $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial real se existem duas operações, chamada de soma de vetores e produto de um escalar por um vetor, denotados por $\oplus$ e $\odot$ de modo que sejam satisfeitos os seguintes axiomas:

Espaços Vetoriais

Definição

Consideremos um conjunto $\mathbb{V} \neq \emptyset$, diremos que $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial real se existem duas operações, chamada de soma de vetores e produto de um escalar por um vetor, denotados por $\oplus$ e $\odot$ de modo que sejam satisfeitos os seguintes axiomas:

Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

1. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$ (Propriedade Comutativa)
2. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$ (Propriedade Associativa)
3. Existe um único vetor $\theta \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{u} \oplus \theta = \theta$, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$
4. Para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, existe um único vetor chamado de oposto do $-\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \theta$

Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

1. $r \bullet (s \bullet (\mathbf{u})) = (rs) \bullet \mathbf{u}$
2. $1 \bullet \mathbf{u} = \mathbf{u}$
3. $r \bullet (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = r \bullet \mathbf{u} + r \bullet \mathbf{v}$
4. $(r + s) \bullet \mathbf{u} = r \bullet \mathbf{u} + s \bullet \mathbf{u}$

Exemplo 4.

O conjunto $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$, com a soma definida por $(x, y, z) + (x_1, y_1, z_1) = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ e o produto escalar definido por $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ é um espaço vetorial.

Exemplo 4.

O conjunto $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$, com a soma definida por $(x, y, z) + (x_1, y_1, z_1) = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ e o produto escalar definido por $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ é um espaço vetorial.

Exemplo 5.

O conjunto $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x] =$ conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$.

Exemplo 4.

O conjunto $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$, com a soma definida por $(x, y, z) + (x_1, y_1, z_1) = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ e o produto escalar definido por $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ é um espaço vetorial.

Exemplo 5.

O conjunto $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x] =$ conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$.

Exemplo 6.

O espaço das funções $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ é função}\}$

Exemplo 7.

O espaço das matrizes $\mathbb{R}^{m \times n}$

Propriedades Iniciais

Consideremos um espaço vetorial $(\mathbb{V}, +, \cdot)$, então:

1. O elemento θ da propriedade é único.

Propriedades Iniciais

Consideremos um espaço vetorial $(\mathbb{V}, +, \cdot)$, então:

1. O elemento θ da propriedade é único.
2. O produto de zero por qualquer vetor é igual a θ.

Propriedades Iniciais

Consideremos um espaço vetorial $(\mathbb{V}, +, \cdot)$, então:

1. O elemento θ da propriedade é único.
2. O produto de zero por qualquer vetor é igual a θ.
3. Se o produto de um número por un vetor é zero, então ou o número é zero ou o vetor é o vetor nulo θ.

Subespaços Vetoriais

Definição

Se $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial e* $\emptyset \neq \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$*. Diremos que* $\mathbb{W}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{V}$ *se* $(\mathbb{W}, +, \cdot)$ *for um espaço vetorial.*

Subespaços Vetoriais

Definição

Se $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial e* $\emptyset \neq \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. *Diremos que* $\mathbb{W}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{V}$ *se* $(\mathbb{W}, +, \cdot)$ *for um espaço vetorial.*

Exemplo 8.

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são as operações padrão. Quais dos seguintes subconjuntos $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^3$ são espaços vetoriais? Justifique.

1. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$

Subespaços Vetoriais

Definição

Se $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial e* $\emptyset \neq \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. *Diremos que* $\mathbb{W}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{V}$ *se* $(\mathbb{W}, +, \cdot)$ *for um espaço vetorial.*

Exemplo 8.

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são as operações padrão. Quais dos seguintes subconjuntos $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^3$ são espaços vetoriais? Justifique.

1. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$
2. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z\}$

Subespaços Vetoriais

Definição

Se $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial e $\emptyset \neq \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. Diremos que $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ se $(\mathbb{W}, +, \cdot)$ for um espaço vetorial.

Exemplo 8.

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são as operações padrão. Quais dos seguintes subconjuntos $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^3$ são espaços vetoriais? Justifique.

1. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$
2. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z\}$
3. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2 = y\}$

Subespaços Vetoriais

Definição

Se $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial e* $\emptyset \neq \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. *Diremos que* $\mathbb{W}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{V}$ *se* $(\mathbb{W}, +, \cdot)$ *for um espaço vetorial.*

Exemplo 8.

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são as operações padrão. Quais dos seguintes subconjuntos $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^3$ são espaços vetoriais? Justifique.

1. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$
2. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z\}$
3. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2 = y\}$
4. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |x| = |y|\}$

Subespaços Vetoriais

Se $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial e $\emptyset \neq \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ se, e somente se, se cumprem as seguintes condições:

1. Se $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$, então $w_1 + w_2 \in \mathbb{W}$, e
2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{W}$, então $\lambda \cdot w \in \mathbb{W}$.

Observação:

$\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ se, e somente se, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$, então $\lambda w_1 + w_2 \in \mathbb{W}$.

Exemplo 9.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Z}\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 9.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Z}\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 10.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 9.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Z}\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 10.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 11.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 666\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 9.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Z}\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 10.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 11.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 666\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Exemplo 12.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = ky,\text{ onde } k \text{ é uma constante}\}$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?. Justifique.

Operações com Subspaços Vetoriais

Teorema

Se $\mathbb{S}_1$ *e* $\mathbb{S}_2$ *são SEV do espaço* $\mathbb{V}$*, então* $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ *é um SEV de* $\mathbb{V}$*.*

Operações com Subspaços Vetoriais

Teorema

Se $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ são SEV do espaço $\mathbb{V}$, então $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ é um SEV de $\mathbb{V}$.

Observação:

A União de dois SEV de $\mathbb{V}$ não necessariamente é um um espaço vetorial, apresente um contraexemplo!

Operações com Subspaços Vetoriais

Teorema

Se $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ são SEV do espaço $\mathbb{V}$, então $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ é um SEV de $\mathbb{V}$.

Observação:

A União de dois SEV de $\mathbb{V}$ não necessariamente é um um espaço vetorial, apresente um contraexemplo!

Definição

Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ dois SEV de $\mathbb{V}$, a soma dos subespaços $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ é o conjunto

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2; w_1 \in \mathbb{W}_1 \text{ e } w_2 \in \mathbb{W}_2\}$$

Operações com Subspaços Vetoriais

Teorema

Se $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ são SEV do espaço $\mathbb{V}$, então $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ é um SEV de $\mathbb{V}$.

Observação:

A União de dois SEV de $\mathbb{V}$ não necessariamente é um um espaço vetorial, apresente um contraexemplo!

Definição

Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ dois SEV de $\mathbb{V}$, a soma dos subespaços $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ é o conjunto

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2; w_1 \in \mathbb{W}_1 \text{ e } w_2 \in \mathbb{W}_2\}$$

Teorema

A soma de dois SEV de $\mathbb{V}$ é um SEV de $\mathbb{V}$.

Exemplo 13.

Considere os SEV de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por:

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } \mathbb{V} = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Calcular os subespaços $U \cap V$ e $U + V$.

Combinação Linear

Definição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Diremos que o vetor $v \in \mathbb{V}$ é uma combinação linear de elementos de $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$, se existem números $a_1, a_2, \cdots a_n$ de forma que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 + v_2 + \cdots a_n v_n$$

Combinação Linear

Definição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Diremos que o vetor $v \in \mathbb{V}$ é uma combinação linear de elementos de $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$, se existem números $a_1, a_2, \cdots a_n$ de forma que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 + v_2 + \cdots a_n v_n$$

Exemplo 14.

O vetor $v = (3, 9, -4, -2)$ é CL dos vetores $u_1 = (1, -2, 0, 3)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$ e $u_3 = (2, -1, 2, 1)$?

Combinação Linear

Definição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Diremos que o vetor $v \in \mathbb{V}$ é uma combinação linear de elementos de $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$, se existem números $a_1, a_2, \cdots a_n$ de forma que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 + v_2 + \cdots a_n v_n$$

Exemplo 14.

O vetor $v = (3, 9, -4, -2)$ é CL dos vetores $u_1 = (1, -2, 0, 3)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$ e $u_3 = (2, -1, 2, 1)$?

Exemplo 15.

Para qual valor de k o vetor $u = (1, -2, k)$ é uma combinação linear de $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

Combinação Linear

Definição

Considere $\mathbb{V}$ *um espaço vetorial e* $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ *um conjunto de vetores de* $\mathbb{V}$*, o conjunto de combinações lineares dos vetores de* A *é o conjunto* $CL(A)$ *definido como:*

$$CL(A) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 + v_2 + \cdots a_n v_n; a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}\}$$

Combinação Linear

Definição

Considere $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ um conjunto de vetores de $\mathbb{V}$, o conjunto de combinações lineares dos vetores de A é o conjunto $CL(A)$ definido como:

$$CL(A) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 + v_2 + \cdots a_n v_n; a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo 16.

Considere os vetores $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ e $u_3 = (1, 0, 0)$, calcular o conjunto $CL(A)$, onde $A = \{u_1, u_2, u_3\}$

Teorema

Se $\mathbb{V}$ é um EV e $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\} \subset V$, o conjunto de combinações lineares de A, CL(A), é um SEV.

Teorema

Se $\mathbb{V}$ é um EV e $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\} \subset V$, o conjunto de combinações lineares de A, $CL(A)$, é um SEV.

O SEV $CL(A)$ é chamado de subespaço vetorial gerado pelo conjunto A.

Exemplo 17.

Achar condições em a, b, c de modo que $(a, b, c \in \mathbb{R}^3)$ pertença ao espaço gerado por $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -1, 2)$ e $w = (0, 3, -4)$.

Dependencia e Independencia Linear

Consideremos $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $C = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ um conjunto finito de vetores de $\mathbb{V}$.

Definição

Diremos que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ são linearmente independentes (L.I.)(ou que o conjunto C é um conjunto linearmente independentes) se temos:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Dependencia e Independencia Linear

Consideremos $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $C = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ um conjunto finito de vetores de $\mathbb{V}$.

Definição

Diremos que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ são linearmente independentes (L.I.)(ou que o conjunto C é um conjunto linearmente independentes) se temos:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Caso contrario, diremos que $v_1, v_2, \cdots, v_k$ são linearmente dependentes (L.D.)(ou que o conjunto C é um conjunto linearmente dependentes)

Exemplo 18.

Prove que os vetores $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$ e $w = (5, 3, -2)$ são LD.

EXEMPLO 18.

Prove que os vetores $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$ e $w = (5, 3, -2)$ são LD.

EXEMPLO 19.

Prove que os vetores $u = (6, 2, 3, 4)$, $v = (0, 5, -3, 1)$ e $w = (0, 0, 7, -2)$ são LI.

Dependencia e Independencia Linear

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ um EV, S e S_1 subconjunto finitos de vetores de V tal que $S_1 \subset S$, então:

- *Um vetor $v \in V$ é LI se, e somente se, $v \neq \theta$*

Dependencia e Independencia Linear

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ *um EV,* S *e* S_1 *subconjunto finitos de vetores de* V *tal que* $S_1 \subset S$*, então:*

- *Um vetor* $v \in V$ *é LI se, e somente se,* $v \neq \theta$
- *Se* $v_1, v_2, \cdots v_n$ *são vetores LI, então os vetores* $v_1, v_2, \cdots v_m$ *são LI para todo* $1 \leq m \leq n$

Dependencia e Independencia Linear

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ um EV, S e S_1 subconjunto finitos de vetores de V tal que $S_1 \subset S$, então:

- *Um vetor $v \in V$ é LI se, e somente se, $v \neq \theta$*
- *Se $v_1, v_2, \cdots v_n$ são vetores LI, então os vetores $v_1, v_2, \cdots v_m$ são LI para todo $1 \leq m \leq n$*
- *Se S é um conjunto LI, então S_1 é um conjunto LI*

Dependencia e Independencia Linear

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ um EV, S e S_1 subconjunto finitos de vetores de V tal que $S_1 \subset S$, então:

- *Um vetor $v \in V$ é LI se, e somente se, $v \neq \theta$*
- *Se $v_1, v_2, \cdots v_n$ são vetores LI, então os vetores $v_1, v_2, \cdots v_m$ são LI para todo $1 \leq m \leq n$*
- *Se S é um conjunto LI, então S_1 é um conjunto LI*
- *Se S_1 é um conjunto LD, então S é um conjunto LD*

Sistema de Geradores

Definição

Consideremos um espaço vetorial $\mathbb{V}$ *e um subconjunto não vazio finito de* $\mathbb{V}$ $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$, *diremos que A é um sistema de geradores (SG) de* $\mathbb{V}$ *se todo vetor* v *de* $\mathbb{V}$, *pode escreverse como uma combinação linear de elementos de* A, *em simbolos:*

$$A \text{ é um } SG \text{ de } V \Leftrightarrow [v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n}]\beta_i v_i \text{ com } i = 1, 2, \cdots n$$

Sistema de Geradores

Definição

Consideremos um espaço vetorial $\mathbb{V}$ *e um subconjunto não vazio finito de* $\mathbb{V}$ $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$, *diremos que A é um sistema de geradores (SG) de* $\mathbb{V}$ *se todo vetor* v *de* $\mathbb{V}$, *pode escreverse como uma combinação linear de elementos de* A, *em simbolos:*

$$A \text{ é um } SG \text{ de } V \Leftrightarrow [v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n}]\beta_i v_i \text{ com } i = 1, 2, \cdots n$$

Exemplo 20.

Verificar se o conjunto $A = \{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$ é um SG de $\mathbb{R}^3$

Sistema de Geradores

Proposição

Se A um SG de $\mathbb{V}$, tal que A é LD, então existe $v \in A$ tal que $A \setminus \{v\}$ é um SG.

Base e Dimensão

Definição

Uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$ *é um conjunto* $A \subset \mathbb{V}$ *não vazio tal que:*

- *A é um SG de* $\mathbb{V}$.
- *A é um conjunto LI*

Base e Dimensão

Definição

Uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um conjunto $A \subset \mathbb{V}$ não vazio tal que:

- *A é um SG de $\mathbb{V}$.*
- *A é um conjunto LI*

Exemplo 21.

Seja $\mathbb{V}$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2\times 3}$, probe que o conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\right.$$

é uma base de $\mathbb{V}$.

Base e Dimensão

Definição

Uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um conjunto $A \subset \mathbb{V}$ não vazio tal que:

- *A é um SG de $\mathbb{V}$.*
- *A é um conjunto LI*

Exemplo 21.

Seja $\mathbb{V}$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2\times 3}$, probe que o conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\right.$$

é uma base de $\mathbb{V}$.

Proposição

Um subconjunto $A = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ do espaço vetorial $\mathbb{V}$ é uma base se, e somente se, todo vetor $v \in \mathbb{V}$ se expressa de forma única na forma $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$.

Base e Dimensão

Teorema

Sejam $\mathbb{V}$ *um espaço vetorial,* $S = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ *e* $S_1 = \{v_1, v_2, \cdots v_m\}$ *duas bases de* $\mathbb{V}$*, então* $m = n = dimV$.

Base e Dimensão

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ *um espaço vetorial tal que* $dim(V) = n$*, temos:*

1. *Se* $S = \{v_1, v_2, \cdots v_m\} \subset \mathbb{V}$*, com* $m > n$*, então* S *é LD.*

Base e Dimensão

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ *um espaço vetorial tal que* $dim(V) = n$*, temos:*

1. *Se* $S = \{v_1, v_2, \cdots v_m\} \subset \mathbb{V}$*, com* $m > n$*, então* S *é LD.*
2. *Se* $S = \{v_1, v_2, \cdots v_m\} \subset \mathbb{V}$*, com* $m < n$*, então* $CL(S) \subsetneq \mathbb{V}$*.*

Base e Dimensão

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial tal que $dim(V) = n$, temos:

1. *Se $S = \{v_1, v_2, \cdots v_m\} \subset \mathbb{V}$, com $m > n$, então S é LD.*
2. *Se $S = \{v_1, v_2, \cdots v_m\} \subset \mathbb{V}$, com $m < n$, então $CL(S) \subsetneq \mathbb{V}$.*
3. *Se $S = \{v_1, v_2, \cdots v_n\} \subset \mathbb{V}$ é um conjunto LI então S é uma base de $\mathbb{V}$.*

Base e Dimensão

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial tal que $dim(V) = n$, temos:

1. *Se $S = \{v_1, v_2, \cdots v_m\} \subset \mathbb{V}$, com $m > n$, então S é LD.*
2. *Se $S = \{v_1, v_2, \cdots v_m\} \subset \mathbb{V}$, com $m < n$, então $CL(S) \subsetneq \mathbb{V}$.*
3. *Se $S = \{v_1, v_2, \cdots v_n\} \subset \mathbb{V}$ é um conjunto LI então S é uma base de $\mathbb{V}$.*
4. *Se $S = \{v_1, v_2, \cdots v_n\} \subset \mathbb{V}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{V}$, então S é uma base de $\mathbb{V}$.*

Teorema da Dimensão sa Soma

Teorema

Seja $\mathbb{U}$ e $\mathbb{W}$ subespaços do espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{V}$, então:

$$dim(\mathbb{U} + \mathbb{W}) = dim(\mathbb{U}) + dim(\mathbb{W}) - dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{W})$$

Teorema da Dimensão sa Soma

Teorema

Seja $\mathbb{U}$ *e* $\mathbb{W}$ *subespaços do espaço vetorial de dimensão finita* $\mathbb{V}$*, então:*

$$dim(\mathbb{U}+\mathbb{W}) = dim(\mathbb{U}) + dim(\mathbb{W}) - dim(\mathbb{U}\cap\mathbb{W})$$

Exemplo 22.

Se $\mathbb{U}$ é o plano *xy* e $\mathbb{V}$ é o plano *yz* de $\mathbb{R}^3$, calcular $\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$ e $dim(\mathbb{U}\cap\mathbb{V})$.