

# **EST 105**

# **INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA**

## **V. A. C. Bidimensionais**

## **Resumo**

Departamento de Estatística – UFV

Av. Peter Henry Rolfs, s/n

Campus Universitário

36570.977 – Viçosa, MG

<http://www.det.ufv.br/>



# $(X,Y)$ Variável Aleatória **Contínua** Bidimensional

**Definição:** Uma variável  $(X,Y)$  será uma v. a. c. bidimensional se  $X$  e  $Y$  puderem assumir valores em dois conjuntos não enumeráveis.

- São exemplos de v.a.c. bidimensionais:
  - $X$ : Temperatura e  $Y$ : Umidade relativa de uma cidade;
  - $X$ : Altura (em metros) e  $Y$ : Peso (em kg) de uma pessoa;
  - $X$ : Consumo de óleo (em litros) e  $Y$ : Consumo de gasolina (em litros) de um automóvel; etc.

## Função Densidade de Probabilidade Conjunta ou f. d. p. conjunta

- Seja  $(X,Y)$  uma v. a. c. bidimensional. Dizemos que  $f(x,y)$  é uma **função densidade de probabilidade conjunta** de  $(X,Y)$ , se satisfizer às seguintes condições:

(i)  $f(x,y) \geq 0$ , para todo  $(x,y)$

(ii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$ .

Definição:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

**Exemplo 1:** Seja  $(X,Y)$  uma variável aleatória contínua bidimensional com função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(2x + y), & 2 \leq x \leq 6 \text{ e } 0 \leq y \leq 5. \\ 0, & \text{para outros valores de } x \text{ e } y. \end{cases}$$

Pede-se:

- a) O valor de  $k$ .
- b) Calcule  $P(X < 3, 2 < Y < 4)$ .

## Funções Densidade de Probabilidade Marginais

- A partir da f. d. p. conjunta  $f(x, y)$  é possível obter as funções densidade de probabilidade marginais de  $X$  e  $Y$ .
- As f. d. p. marginais são utilizadas para o cálculo de probabilidades referentes apenas à  $X$  ou apenas à  $Y$  e, são dadas por:

**Marginal de X:**  $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

**Marginal de Y:**  $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$

**Definições:**

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b g(x) dx$$
$$P(c \leq Y \leq d) = \int_c^d h(y) dy$$

**Exemplo 2:** Considerando novamente o caso apresentado no Exemplo 1, cuja f. d. p. conjunta é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{210}(2x + y), & 2 \leq x \leq 6 \text{ e } 0 \leq y \leq 5. \\ 0, & \text{para outros valores de } x \text{ e } y. \end{cases}$$

Pede-se:

- a) A f. d. p. marginal de X.**
- b) A f. d. p. marginal de Y.**
- c) Calcule  $P(2 \leq Y < 4)$ .**
- d) Calcule  $P(X > 4)$ .**

## Funções Densidade de Probabilidade Condicionais

- Dadas as funções densidade de probabilidade conjunta de  $(X,Y)$ ,  $f(x,y)$ , e as marginais,  $g(x)$  e  $h(y)$ , é possível obter as f.d.p. condicionais de  $X|Y=y$  e de  $Y|X=x$ .
- Para um valor fixo de  $Y = y$ , a função densidade de probabilidade condicional de  $X$ , é:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, h(y) > 0$$

- Para um valor fixo de  $X = x$ , a função densidade de probabilidade condicional de  $Y$ , é:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, g(x) > 0$$

**Exemplo 3:** Obtenha a f.d.p. condicional de  $X$  dado  $Y=1$ , isto é,  $f(x|y = 1)$ .

**Exemplo 4:** Calcule  $P(X < 3|Y = 1)$ .

**Exemplo 5:** Calcule  $P(X < 3|2 < Y < 4)$ .

# Independência

- Seja  $(X,Y)$  v. a. contínua bidimensional. Dizemos que  $X$  e  $Y$  são independentes se, e somente se:

$$f(x,y) = g(x)h(y), \text{ para todo } x,y.$$

ou

$$f(x|Y = y) = g(x) \text{ e } f(y|X = x) = h(y).$$

**Exemplo 6:** As variáveis  $X$  e  $Y$  são independentes?

# Atividade Proposta

Resolver os exercícios do Roteiro de Aulas abaixo relacionados:

- Exercício 22 - pág. 129.
- Exercício 35 (itens a e c) – pág. 131/132.
- Exercício 37 (itens a e b) – pág. 132.