MAT146 - Cálculo I - Cálculo de Áreas

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Anteriormente, definimos a área de uma região plana como sendo o limite de uma soma de Riemann e que tal limite é uma integral definida. Com estas informações, já dispomos de técnicas para calcular áreas de regiões planas.

Façamos apenas um exemplo para reforçar a construção das somas de Riemann.

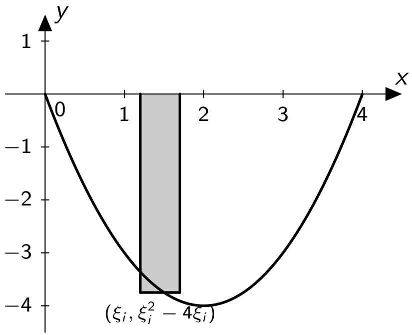
Exemplo

Ache a área da região limitada pela curva $y = x^2 - 4x$, *pelo eixo* x *e pelas retas* $x = 1$ *e* $x = 3$.

Solução: Vamos tomar uma partição P do intervalo $[1, 3]$. O comprimento do i-ésimo retângulo é $\Delta_i x$. Como $x^2 - 4x < 0$ em $[1, 3]$, a altura do i-ésimo triângulo é

$$-(\xi_i^2 - 4\xi_i) = 4\xi_i - \xi_i^2.$$

■



Logo, a soma das medidas das áreas de n retângulos é dada por

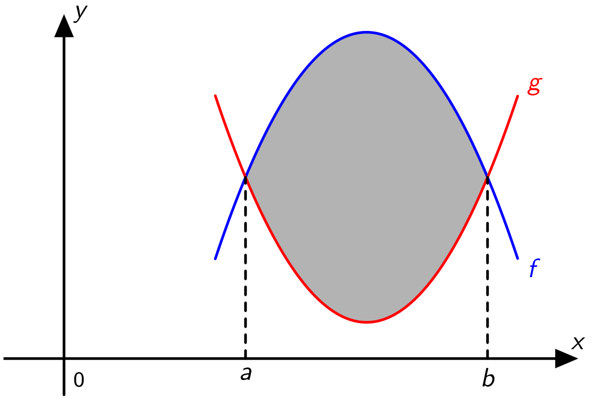
$$\sum_{i=1}^{n}(4\xi_i - \xi_i^2)\Delta_i x.$$

A medida desejada da área é a dada pelo limite dessa soma quando $\|P\| \to 0$. Assim, a área da região A é dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4\xi_i - \xi_i^2)\Delta_i x \\ &= \int_1^3 (4x - x^2)dx \\ &= 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big]_1^3 \\ &= \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

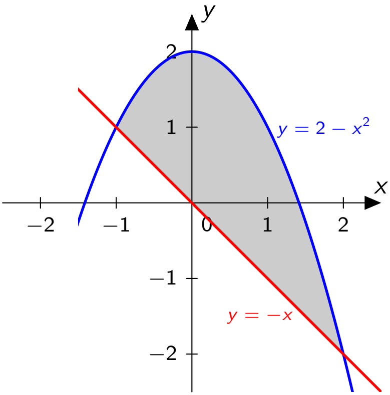
Teorema

Se f e g são contínuas com $f(x) \geq g(x)$ ao longo de $[a, b]$, então a área da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de a ate b é a integral de $(f - g)$ de a até b.



Exemplo

Determine a área da região compreendida entre a parábola $y = 2 - x^2$ e a reta $y = -x$



Primeiramente, devemos encontrar os limites de integração.

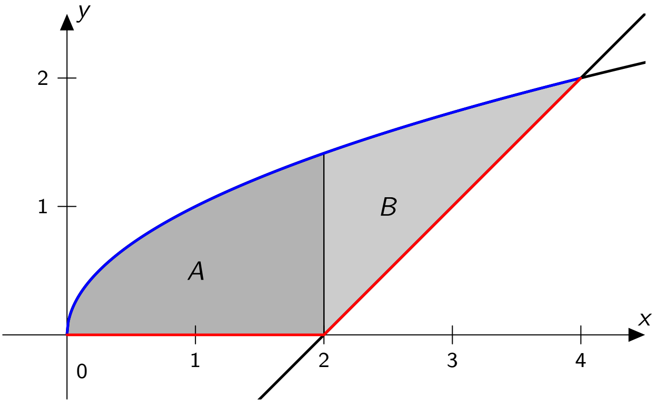
$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x = -1, \quad &\text{ou} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Assim, a região de integração com relação ao eixo x, vai de -1 até 2. Os limites de integração são $a = -1$ e $b = 2$. A área A entre as curvas é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [(2 - x^2) - (-x)]dx \\ &= \int_{-1}^2 (2 + x - x^2)dx \\ &= 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^2 \\ &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo

Determine a área da região do primeiro quadrante que é delimitada acima por $y = \sqrt{x}$ e abaixo pelo eixo x e pela reta $y = x - 2$.



Neste caso, vamos dividir a área entre as duas áreas, a saber, A e B. Iremos agora determinar os limites de integração, a curva $y = x - 2$ intercepta o eixo x no ponto $(2, 0)$. Assim, A será a área compreendida pelas curvas, onde os valores no eixo x variam de 0 até 2. Devemos agora encontrar a interseção entre as curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$ para saber os limites de integração da área B.

$$\sqrt{x} = x - 2$$

$$x = (x - 2)^2$$

$$x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1, \quad \text{ou} \quad x = 4.$$

Apenas o valor $x = 4$ nos interessa, pois $x = 1$ é uma raiz que apareceu ao elevarmos o quadrado (graficamente, se traçarmos a curva $y = -\sqrt{x}$ ela iria interceptar a curva $y = x - 2$ em $x = 1$).

Para $\quad 0 \leq x \leq 2; \quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$

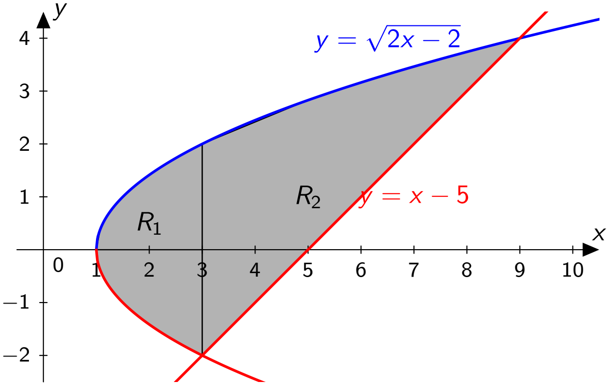
Para $\quad 2 \leq x \leq 4; \quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2.$

Agora, adicionamos as áreas das sub-regiões A e B para determinar a área total D:

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^2 \sqrt{x}dx + \int_2^4 \sqrt{x} - x + 2dx \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_2^4 \\
&= \tfrac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 0 + (\tfrac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - 8 + 8) - (\tfrac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2 + 4) \\
&= \tfrac{2}{3}(8) - 2 = \tfrac{10}{3}
\end{aligned}$$

Exemplo

Ache a área da região limitada pela parábola $y^2 = 2x - 2$ *e pela reta* $y = x - 5$.



Solução

Neste casos, precisamos encontrar a região de integração. Vamos encontrar os pontos onde as curvas se interceptam e dividir adequadamente a região em duas, a saber R_1 e R_2.

Elevando ao quadrado a curva $y = x - 5$ e igualando a curva $y^2 = 2x - 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= 2x - 2 \\ x^2 - 12x + 27 &= 0 \\ (x-9)(x-3) &= 0 \\ x = 9, \quad x &= 3 \end{aligned}$$

Assim, os pontos são $(3, -2)$ e $(9, 4)$.

A equação $y^2 = 2x - 2$ equivale as duas equações:

$$y = \sqrt{2x-2} \ \text{ e } \ y = -\sqrt{2x-2}.$$

A primeira, equivale a parte superior da parábola (acima do eixo x) e a segunda, a metade inferior (abaixo do eixo x). Vamos considerar

$$f_1(x) = \sqrt{2x-2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{2x-2}\text{e} \ \ g(x) = x - 5.$$

Agora, iremos encontrar as áreas das regiões R_1 e R_2, separadas pela reta $x = 3$, onde a região R_1 é a área delimitada pelas curvas, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ e $x = 3$, e a região R_2 é a área delimitada pelas curvas, $y = f_1(x)$, $y = x - 5$ e $x = 3$.

Sejam A_1 e A_2 as áreas das regiões R_1 e R_2 respectivamente.

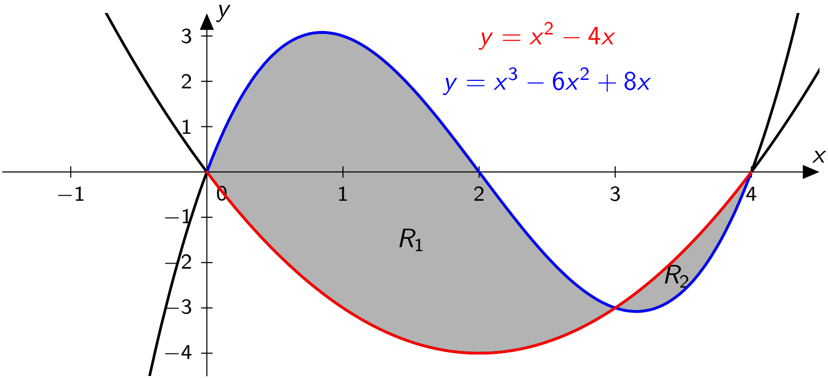
$$\begin{aligned} A_1 &= \int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)]dx \\ &= \int_1^3 [\sqrt{2x-2} + \sqrt{2x-2}]dx \\ &= 2\int_1^3 \sqrt{2x-2}dx \\ &= \frac{2}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^3 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_3^9 [f_1(x) - g(x)]dx \\
&= \int_1^3 [\sqrt{2x-2} - (x-5)]dx \\
&= \tfrac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}x^2 + 5x\Big]_3^9 \\
&= (\tfrac{64}{3} - \tfrac{81}{2} + 45) - (\tfrac{8}{3} - \tfrac{9}{2} + 15) \\
&= \tfrac{38}{3}
\end{aligned}
$$

logo, $A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18.$

Exemplo

Ache a área da região limitada pelas curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ *e* $y = x^2 - 4x$.



Solução

Neste casos, precisamos encontrar a região de integração. Vamos encontrar os pontos onde as curvas se interceptam e dividir adequadamente a região em duas, a saber R_1 e R_2.

Vamos achar os pontos de interseção das curvas:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 8x &= x^2 - 4x \\ x^3 - 7x^2 + 12x &= 0 \\ x(x^2 - 7x + 12) &= 0 \\ x(x-3)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, os pontos de interseção da curva são $(0,0)$, $(3,-3)$ e $(4,0)$.

Sejam $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ e $g(x) = x^2 - 4x$.

No intervalo $[0, 3]$, a curva $y = f(x)$ está acima da curva $y = g(x)$, já no intervalo $[3, 4]$, a curva $y = g(x)$ está acima da curva $y = f(x)$. Dessa forma, podemos dividir a região entre as curvas, em duas regiões R_1 e R_2, onde

R_1 *é a região limitada pelas curvas no intervalo* $[0, 3]$ *e*

R_2 *é a região limitada pelas curvas no intervalo* $[3, 4]$.

Sejam A_1 e A_2 a área da região R_1 e R_2 respectivamente. Logo,

$$
\begin{aligned}
A_1 + A_2 = & \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)]dx \\
& + \int_3^4 [(x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)]dx \\
= & \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)dx + \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)dx \\
= & \left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{7}{3}x^3 + 6x^2)\right]_0^3 + \left(-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{7}{3}x^3 - 6x^2)\right]_3^4 \\
= & \frac{45}{4} + \frac{7}{12} \\
= & \frac{71}{6}
\end{aligned}
$$