MAT146 - Cálculo I - Continuidade

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Definição

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$*, onde* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo não degenerado é* **contínua à direita em** a *se*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$*, onde* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo não degenerado é* **contínua á esquerda em** a *se*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Assim, definiremos a continuidade em um ponto interior a do domínio de uma função f, se, e somente se, ela for contínua tanto à direita em a quanto à esquerda em a.

Em outras palavras, temos a seguinte definição

Definição

Dizemos que uma função é **contínua** *em um ponto interior a de seu domínio se, e somente se,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definições mais específicas podem ser extraídas a partir da última definição, como a seguinte:

Definição

Dizemos que uma função é **contínua em um intervalo aberto** *se, e somente se, ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.*

Agora, podemos definir continuidade em um intervalo fechado.

Definição

Uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$ será **contínua em** $[a, b]$ *se, e somente, ela for contínua no intervalo aberto (a, b), contínua à direita em a e contínua à esquerda em b.*

Observação

Usando a condição (ε, δ), podemos expressar a definição de limite da seguinte forma.

Definição

A função f será **contínua** *em um ponto interior a de seu domínio se f estiver definida em um aberto contendo a e se para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que*

$$\text{se } \mid x - a \mid < \delta, \text{ então } \mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon.$$

Exemplo

Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & se\ x \neq 2 \\ 1 & se\ x = 2 \end{cases}$$

Neste exemplo, a função f esta definida em todos os números reais, ou seja, $Dom(f) = \mathbb{R}$. Observe que existe uma "quebra" no gráfico onde $x = 2$. Assim, devemos verificar se

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2).$$

Por definição da função, $f(2) = 1$. Como

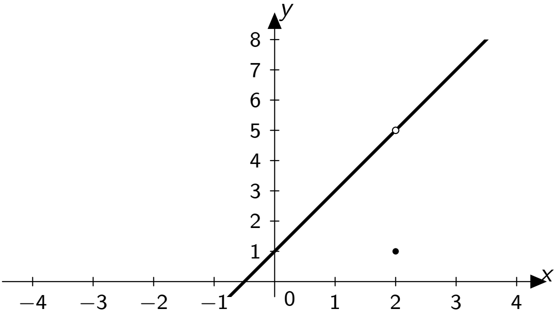
$$\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5 \neq 1 = f(2),$$

f é descontínua em $x = 2$.

Seja $a \neq 2 \in \mathbb{R}$. Como $f(a) = 2a + 1$ e

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = 2(a) + 1 = f(a),$$

então f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 2$.



Intuitivamente, qualquer função $y = f(x)$ cujo gráfico possa ser esboçado sobre seu domínio em um movimento contínuo, sem levantar o lápis, é um exemplo de função contínua.

Definição

Uma **função contínua** *é aquela contínua em cada ponto de seu domínio.*

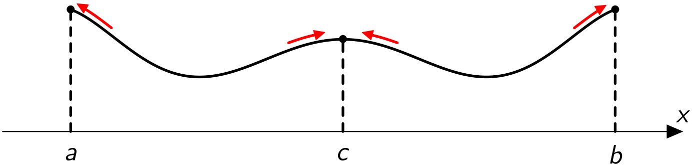
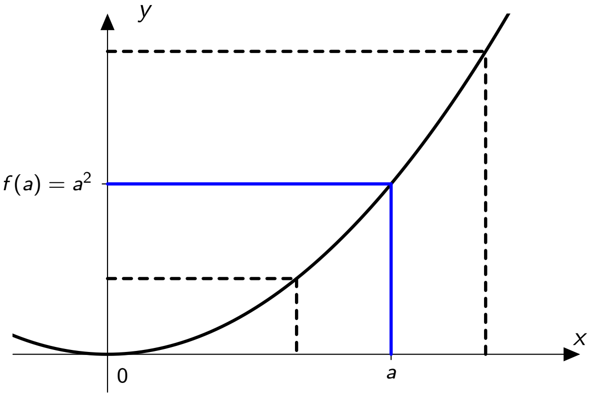


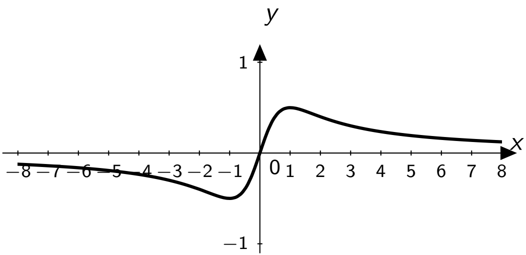
Figura : Continuidade e continuidade Lateral


y
x
$f(a) = a^2$
0
a

Exemplo

Seja f definida por

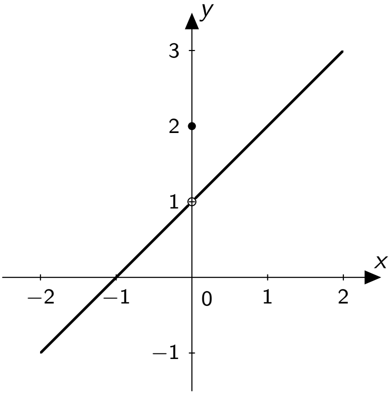
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$



Observe que o gráfico acima de f pode ser esboçado em um movimento contínuo, sem levantar o lápis. Isto nos diz intuitivamente que f é contínua em todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Considere a seguinte figura que representa o gráfico de uma função descontínua.



Nela, os limites laterais existem e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Desta forma,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0).$$

Esta descontinuidade é removível e será definida formalmente a seguir.

Definição

Seja f uma função descontínua em um número a, mas para o qual $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Assim,

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(a).$$

Tal descontinuidade é chamada de **descontinuidade removível**, *pois se f for redefinida em a de tal forma que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(a)$, a função tornar se-á contínua em a.*

Se a continuidade não for removível, ela será chamada de **descontinuidade essencial**.

No exemplo anterior, abordamos uma função com uma descontinuidade removível.
Vejamos agora um exemplo de função com uma descontinuidade essencial.

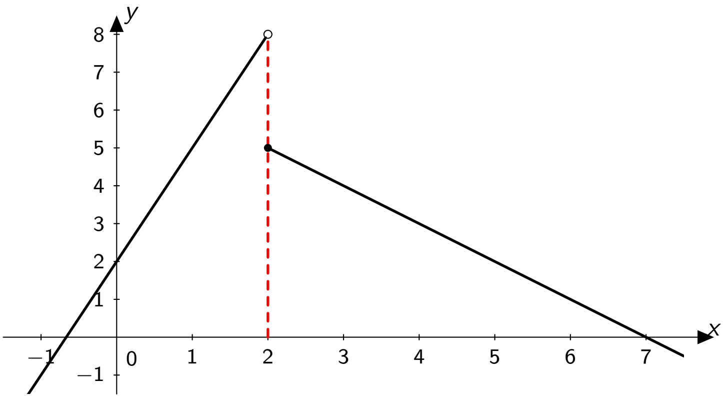
Exemplo

Seja $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & se\ x < 2 \\ -x+7, & se\ x \geq 2 \end{cases}$

Como

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x + 2 = 8 \ e \ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} -x + 7 = 5,$$

não existe limite de $f(x)$ *quando* $x \to 2$.



y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

No próximo teorema, veremos quando podemos realizar operações com funções contínuas em um ponto e ainda obter uma função contínua.

Teorema

Se as funções f e g são contínuas em a, então as seguintes funções são contínuas em a ::

(a) $f+g$;

(b) $f-g$;

(c) $k \cdot f$;

(d) $f \cdot g$;

(e) $\dfrac{f}{g}$, *desde que* $g(a) \neq 0$;

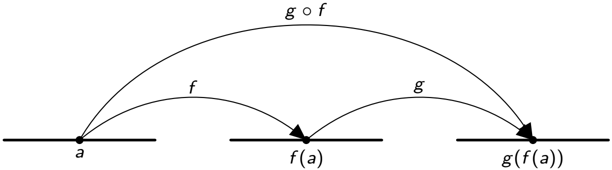
(f) f^n *sendo n um inteiro positivo;*

(g) $\sqrt[n]{f}$ *desde que seja definida em um intervalo aberto contendo a, e n seja um inteiro positivo.*

No próximo teorema, veremos sobre a continuidade da composta de funções.

Teorema

Se f é uma função contínua em a e g é uma função contínua em $f(a)$, então a composta $g \circ f$ é continua em a.



Neste caso,

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a)).$$

A seguir, enunciaremos alguns teoremas sobre a continuidade de algumas funções.

Teorema

Uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.

Teorema

Uma função racional é contínua em todo o seu domínio.

Teorema

Se n *for um inteiro positivo e* $f(x) = \sqrt[n]{x}$, *então*

(i) *Se* n *for ímpar,* f *será contínua em todo número real.*

(ii) *Se* n *for par,* f *será contínua em todo número positivo* a.

Teorema

As funções trigonométricas seno e cosseno são contínuas em $\mathbb{R}$.

Teorema

A função exponencial $f(x) = a^x$, *com* $a > 0$, $a \neq 1$ *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Teorema

A função logarítmica $f(x) = \log_a(x)$, *com* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *é contínua em* $(0, +\infty)$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + k, & se \ x \geq 1 \\ -x + 2k, & se \ x < 1 \end{cases}.$$

Determine o valor da constante k *para que* f *seja contínua em* $x = 1$.