

MATRIZES

Prof. Dr. Walter T. Huaraca Vargas

26 de abril de 2022

MATRIZES? PARA QUE?

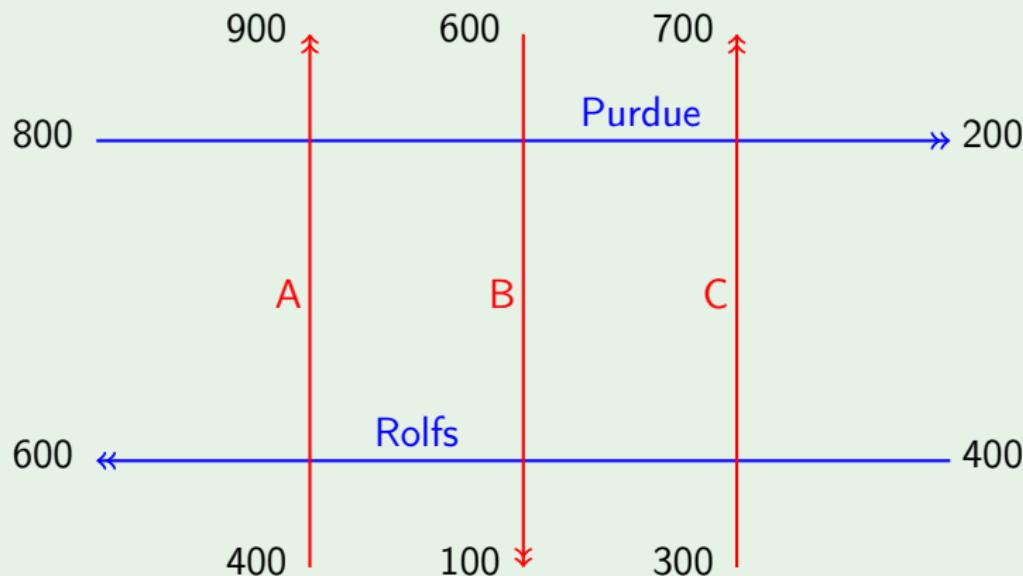
PROBLEMA 1.

Uma mãe é 21 anos maior que o filho e dentro de 6 anos sua idade será exatamente 5 vezes a idade do filho. **Onde se encontra o pai da criança?**

MATRIZES? PARA QUE?

PROBLEMA 2.

O seguinte mapa mostra algumas ruas de Viçosa em 2050. Algumas obras de reforma estão sendo feitas na Rua Rolfs entre A e B. É possível cortar completamente o tráfego nesta rua e atender a demanda de veículos na hora pico?



MATRIZES

Informalmente, uma matriz é um arreglo de números em linhas (ou colunas), este arreglo será feito de forma a permitir almacenar e trabalhar com informação numérica. Uma definição formal de matriz é a seguinte:

DEFINIÇÃO

Uma matriz de números reais A de m linhas e n colunas é uma função

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$$

EXEMPLO 1:

Consideremos a função:

$$\begin{array}{lll} A : \{(1,1)(1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (1,1) & \mapsto & 2 \\ (1,2) & \mapsto & \pi \\ (2,1) & \mapsto & 45 \\ (2,2) & \mapsto & 5.87 \\ (3,1) & \mapsto & \log(2) \\ (3,2) & \mapsto & 666 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO:

- ① Observe que a nossa notação é pouco prática e que a apresentação da matriz fica melhor se usarmos a seguinte notação:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ 45 & 5.87 \\ \log(2) & 666 \end{pmatrix}.$$

- ② São exemplos de matrizes as seguintes expressões:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & \pi & 11 \\ 10 & 11 & 20 \end{pmatrix}, \quad (1 \ 4 \ 3), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{pmatrix}$$

Observe que a primeira é uma matriz de 3 linhas e 3 colunas, a segunda é uma matriz de 1 linha e 3 colunas e a terceira é uma matriz de 3 linhas e 1 coluna.

OBSERVAÇÃO:

- As matrizes serão denotadas pelas letras maiusculas, tais como A, B, M, N , etc. O conjunto dos elementos da matriz ficam entre colchetes ou chaves e, em geral, são denotados por letras minusculas com subíndices como a_{ij} .
Isto quer dizer que

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Os subíndices dos elementos de uma matriz indicam: O primeiro, a linha onde o elemento encontra-se e o segundo a coluna onde o mesmo se encontra. Assim, o elemento a_{ij} encontra-se na interseção da i -ésima linha com a j -ésima coluna.
- Uma matriz é um array, um conjunto de números, por isso ela não tem valor numérico!

DEFINIÇÃO

A ordem de uma matriz A de m linhas e n colunas é dado pelo produto indicado por $m \times n$, (leia-se m por n) onde m denota o número de linhas e n o número de colunas da mesma.

EXEMPLO 2:

Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 2 & \pi & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & \pi & 11 \\ 10 & 11 & 20 \end{pmatrix}$$

então A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×3 .

IGUALDADE DE MATRIZES

DEFINIÇÃO

Diremos que *as matrizes* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times l}$ *são iguais*, o que denotaremos por $A = B$, se:

- ① A ordem de A é igual a ordem de B , isto é: $m = k$ e $n = l$ e
- ② As componentes correspondentes são iguais, isto é: $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, m$.

Se as matrizes A e B não são iguais denotaremos por $A \neq B$.

EXEMPLO 3:

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} x - y & 3 \\ 1 & 2x + y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Encontre os valores do números x e y de modo que $A = B$.

TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

MATRIZ LINHA: Uma matriz linha ou vetor linha é uma matriz de ordem $1 \times n$.

MATRIZ COLUNA: Uma matriz coluna ou vetor coluna é uma matriz de ordem $n \times 1$.

MATRIZ NULA: Uma matriz nula de ordem $n \times m$ é a matriz (de ordem $n \times m$) com todos seus elementos iguais a zero e denotada por Θ .

MATRIZ QUADRADA: Uma matriz é dita de quadrada de ordem n , se o número de linhas é igual ao número de colunas e igual a n .

OBSERVAÇÃO:

- Numa matriz quadrada A de ordem n , a **diagonal principal de A** é formado pelos números $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.
- A **traza de uma matriz quadrada de ordem n A** é:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

- A matriz quadrada de ordem n tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

é chamada **matriz identidade de ordem n** e será denotada por I_n ou simplesmente por I .

SOMA DE MATRIZES

DEFINIÇÃO

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A soma das matrizes A e B é a matriz $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

PROPRIEDADES DA SOMA

Consideremos as matrizes A , B e C da mesma ordem $m \times n$, então elas cumprem as seguintes propriedades:

- (A₁) $A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- (A₂) $A + B = B + A$
- (A₃) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (A₄) Para todo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Existe uma matriz $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A + \Theta = \Theta + A = A$, para todo A .
- (A₅) Para cada matriz A , existe a matriz $(-A) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A + (= A) = (-A) + A = \Theta$

EXEMPLO 4:

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2x - 1 & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 - y & 2 - x \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Achar os valores das variáveis x e y de forma que $A + B = C$.

PRODUTO DE UM NÚMERO POR UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO

Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ e k um número real. O produto de k por A é a matriz definida por:

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij}), \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

PROPRIEDADES

Consideremos as matrizes A e B da mesma ordem $m \times n$, e os números reais λ e β então:

$$(E_1) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(E_2) \quad (\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$$

$$(E_3) \quad (\lambda \pm \beta)A = \lambda A \pm \beta A$$

EXEMPLO 5:

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Resolver a equação

$$\frac{3}{2}(X + A) = (X + (3B - 2C)) + A$$

PRODUTO DE MATRIZES

DEFINIÇÃO

Se $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$. O produto das matrizes A e B , AB (nessa ordem), é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$. Os elementos c_{ij} são obtidos a partir dos elementos a_{ij} e b_{ij} seguindo a seguinte regra:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

PRODUTO DE MATRIZES

- ① Observe que o produto das matrizes A e B só faz sentido se o número de colunas de A coincide com o número de linhas de B .
- ② Por definição, o elemento c_{ij} da matriz produto entre A e B é obtido somando os produtos obtidos ao multiplicar cada elemento da i -ésima linha da matriz A pela j -ésima coluna da matriz B .

$$c_{ij} = (\begin{array}{cccc} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{array}) \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

PRODUTO DE MATRIZES

- ① Uma forma prática de lembrar a regra para multiplicar as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é representado pelo seguinte esquema:

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{array} \right)$$

PRODUTO DE MATRIZES

EXEMPLO 6:

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 11 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Achar, se for possível, AB e BA .

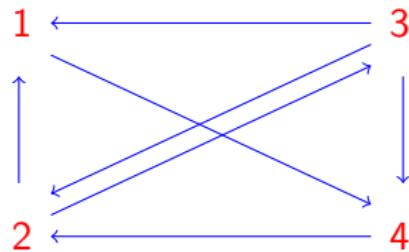
INTERPRETAÇÃO PARA O PRODUTO

Consideremos um conjunto de n pessoas entre as quais pode ou não existir relação. Definamos a matriz $A = (a_{ij})$, como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe relação de } i \text{ a } j \\ 0 & \text{se existe relação de } i \text{ a } j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Logo ela descreve as possíveis relações entre as pessoas.

Por exemplo, consideremos o seguinte diagrama para quatro pessoas.



EXEMPLO 7:

Calcular a matriz associada A e interpretar o produto A^2 .

PROPRIEDADES DO PRODUTO DE MATRIZES

Sejam A , B e C matrizes, então:

(P₁) Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times l}$, então

$$A(BC) = (AB)C$$

(P₂) Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, então

$$A(B + C) = (AB) + (AC)$$

(P₃) Se $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, então

$$(A + B)C = (AC) + (BC)$$

(P₄) Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então

$$AI = IA = A$$

PRODUTO DE MATRIZES

OBSERVAÇÃO:

- ① Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, não é verdade, em geral, que $AB = BA$, como mostra o seguinte exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Porem,

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- ② Se $AB = BA$, então diremos que as matrizes A e B são cumutativas.

OBSERVAÇÃO:

- ① Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tais que $AB = \theta$, como $\theta \in \mathbb{R}^{m \times p}$, não é verdade que $A = \theta$ ou $B = \theta$. Por exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- ② Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tais que $AB = AC$, isso não implica que $B = C$, como mostra o seguinte exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, e $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

Observemos que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC$$

não entanto $B \neq C$.

TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ

Consideremos uma matriz A de ordem $m \times n$, a matriz transposta de A , denotada por A^t , é a matriz de ordem $n \times m$ cujos elementos se obtém intercambiando as linhas com as linhas da matriz A , isto é:

$$A^t = (a_{ji})$$

Sempre que $A = (a_{ij})$.

EXEMPLO 8.

considere a matriz:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

então

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES

Consideremos A e B duas matrizes sendo A^t e B^t suas respectivas matrizes transpostas, então:

- (A) $(A^t)^t = A$.
- (B) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (C) $(A + B)^t = A^t + B^t$, sempre que $A + B$ tenha sentido.
- (D) $(AB)^t = B^t A^t$, sempre que AB tenha sentido.
- (E) $I^t = I$.

MATRIZES QUADRADAS ESPECIAIS

DEFINIÇÃO

Diremos que a matriz A é simétrica se: $A = (a_{ij}) = (a_{ji}) = A^t$

MATRIZES QUADRADAS ESPECIAIS

DEFINIÇÃO

Diremos que a **matriz A é simétrica** se: $A = (a_{ij}) = (a_{ji}) = A^t$

EXEMPLO 9.

A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica

MATRIZES QUADRADAS ESPECIAIS

DEFINIÇÃO

Diremos que a matriz A é simétrica se: $A = (a_{ij}) = (a_{ji}) = A^t$

EXEMPLO 9.

A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica

PROPOSIÇÃO

Se A é uma matriz de ordem n, então a matriz $A + A^t$ é uma matriz simétrica.

MATRIZES ANTISIMÉTRICAS

DEFINIÇÃO

Diremos que a matriz A é antisimétrica se: $A = (a_{ij}) = (a_{ji}) = A^t$

MATRIZES ANTISIMÉTRICAS

DEFINIÇÃO

Diremos que a **matriz A é antisimétrica** se: $A = (a_{ij}) = (a_{ji}) = A^t$

EXEMPLO 10.

A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz antisimétrica

MATRIZES ANTISIMÉTRICAS

DEFINIÇÃO

Diremos que a matriz A é antisimétrica se: $A = (a_{ij}) = (a_{ji}) = A^t$

EXEMPLO 10.

A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz antisimétrica

PROPOSIÇÃO

Se A é uma matriz de ordem n, então a matriz $A - A^t$ é uma matriz antisimétrica.

MATRIZ ESCALAR E MATRIZ DIAGONAL

DEFINIÇÃO

Uma matriz $D = (d_{ij})$ quadrada de ordem n é dita de **matriz diagonal** se:

$$d_{ij} = 0 \text{ sempre que } i \neq j$$

MATRIZ ESCALAR E MATRIZ DIAGONAL

DEFINIÇÃO

Uma matriz $D = (d_{ij})$ quadrada de ordem n é dita de **matriz diagonal** se:

$$d_{ij} = 0 \text{ sempre que } i \neq j$$

DEFINIÇÃO

Uma matriz $D = (d_{ij})$ quadrada de ordem n é dita de **matriz escalar** se ela for uma matriz diagonal e:

$$d_{ii} = c \text{ sempre algum } c \in \mathbb{R}$$

MATRIZ INVERSA

DEFINIÇÃO

Se A é uma matriz quadrada de ordem n , diremos que A é uma matriz inversível (ou que a matriz A possui inversa) se existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

MATRIZ INVERSA

DEFINIÇÃO

Se A é uma matriz quadrada de ordem n , diremos que A é uma matriz inversível (ou que a matriz A possui inversa) se existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

PROPOSIÇÃO

Se A é uma matriz inversível, então a matriz $B (= A^{-1})$ é única.

MATRIZ INVERSA

DEFINIÇÃO

Se A é uma matriz quadrada de ordem n , diremos que A é uma matriz inversível (ou que a matriz A possui inversa) se existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

PROPOSIÇÃO

Se A é uma matriz inversível, então a matriz $B (= A^{-1})$ é única.

PROPOSIÇÃO

Se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ duas matrizes inversíveis, então:

① $(A^{-1})^{-1} = A$

MATRIZ INVERSA

DEFINIÇÃO

Se A é uma matriz quadrada de ordem n , diremos que A é uma matriz inversível (ou que a matriz A possui inversa) se existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

PROPOSIÇÃO

Se A é uma matriz inversível, então a matriz $B (= A^{-1})$ é única.

PROPOSIÇÃO

Se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ duas matrizes inversíveis, então:

- ① $(A^{-1})^{-1} = A$
- ② $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

MATRIZ INVERSA

DEFINIÇÃO

Se A é uma matriz quadrada de ordem n , diremos que A é uma matriz inversível (ou que a matriz A possui inversa) se existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

PROPOSIÇÃO

Se A é uma matriz inversível, então a matriz $B (= A^{-1})$ é única.

PROPOSIÇÃO

Se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ duas matrizes inversíveis, então:

- ① $(A^{-1})^{-1} = A$
- ② $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ③ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

MATRIZ INVERSA

EXEMPLO 11.

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

EXEMPLO 11.

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO:

- ① A matriz A é inversível.
- ② A matriz B não é inversível.

MATRIZ TRIANGULAR

DEFINIÇÃO

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n .

- (A) Diremos que **a matriz A é uma matriz triangular superior**, se todos os elementos abaixo da diagonal inferior foram zero, isto é, se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

MATRIZ TRIANGULAR

DEFINIÇÃO

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n .

- (A) Diremos que **a matriz A é uma matriz triangular superior**, se todos os elementos abaixo da diagonal inferior foram zero, isto é, se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- (B) Diremos que **a matriz A é uma matriz triangular inferior**, se todos os elementos acima da diagonal inferior foram zero, isto é, se $a_{ij} = 0$ para todo $j > i$.

DETERMINANTES, OPERAÇÕES ELEMENTARES E MATRIZES INVERSAS

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

A função determinante, D , se define por:

$$D : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \quad \mapsto \quad D(A) = ad - cb$$

$$D(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

PROPRIEDADES

- ① D é linear em cada fila.
- ② D é alternada (se dois filas adjacentes são iguais, então D vale 0).
- ③ $D(I_2) = 1$
- ④ Estas propriedades CARACTERIZAM o Determinante.

DETERMINANTE DE MATRIZES DE ORDEM n

Seja A uma matriz de ordem n , calcularemos o $D(A)$, por indução:

DETERMINANTE DE MATRIZES DE ORDEM n

Seja A uma matriz de ordem n , calcularemos o $D(A)$, por indução:

- ① Se $n = 1$, então $A = (a)$, definamos $D(A) = a$.

DETERMINANTE DE MATRIZES DE ORDEM n

Seja A uma matriz de ordem n , calcularemos o $D(A)$, por indução:

- ① Se $n = 1$, então $A = (a)$, definamos $D(A) = a$.
- ② Se $n > 1$, e para qualquer fila i de A , então

$$D : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto D(A)$$

$D(A)$ é a soma ponderada de n determinantes de submatrizes de ordem $n - 1$ (denotadas por A_{ij}):

$$D(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}D(A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}D(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}D(A_{in})$$

Onde A_{ij} é a submatriz que se obtém eliminando a fila i e a coluna j .

EXEMPLO 12

Por exemplo se $n = 2$ e $n = 3$

OBSERVAÇÃO

- ① D satisfaz as propriedades 1, 2 e 3.
- ② Logo, a definição dada não depende da linha que tomamos.

EXEMPLO 13

Calcular $D(A)$ para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

- ① $D(A) = 0$ se alguma linha da matriz A é nula.
- ② $D(\alpha A) = \alpha^n D(A)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
- ③ D muda de sinal se dois filas são intercambiadas.
- ④ $D(A) = 0$ se dois filas de A são iguais.
- ⑤ $D(A) \neq 0$ se, e somente se, A possui inversa.
- ⑥ $D(A) = D(A^t)$ para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- ⑦ $D(AB) = D(A)D(B)$ para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

EXEMPLO 14.

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular o determinante.

OPERAÇÕES ELEMENTARES

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denotemos por L_1, L_2, \dots, L_m as linhas da matriz A . Chamaremos de operações elementares linha as seguintes três tipos de transformações:

$L_i \longleftrightarrow L_j$: Intercambio da linha i -ésima pela linha j -ésima.

$L_j \rightarrow \lambda L_j$: Fazer o produto da linha j -ésima com o número real $\lambda \neq 0$.

$L_i \rightarrow L_i + \lambda L_j$: Multiplicar a linha j -ésima pelo número real λ e somar o resultado à i -ésima linha.

EXEMPLO 15.

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & -12 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular, sequencialmente, as seguintes operações elementares: $L_1 \longleftrightarrow L_3$, $L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1$, $L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2$ e $L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2$

PROPOSIÇÃO

A operação elementar $L_i \rightarrow L_i + \lambda L_j$ não altera o valor do determinante.

MATRIZ ESCALONADA

DEFINIÇÃO (MATRIZ ESCALONADA)

Diremos que *uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ está na sua forma escalonada* se:

- ① Se existir uma ou mais linhas constituídas exclusivamente de zeros, então estas estarão agrupadas abaixo de linhas não nulas.
- ② O primeiro elemento não nulo de cada linha (chamado de **pivô**), terá de situar-se à direita do pivô da linha que se situa acima desta.
- ③ Numa coluna, quando existir um pivô nesta, todos os elementos abaixo desse pivô ao longo da coluna terão de ser nulos.

MATRIZ ESCALONADA

DEFINIÇÃO (MATRIZ ESCALONADA)

Diremos que *uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ está na sua forma escalonada* se:

- ① Se existir uma ou mais linhas constituídas exclusivamente de zeros, então estas estarão agrupadas abaixo de linhas não nulas.
- ② O primeiro elemento não nulo de cada linha (chamado de **pivô**), terá de situar-se à direita do pivô da linha que se situa acima desta.
- ③ Numa coluna, quando existir um pivô nesta, todos os elementos abaixo desse pivô ao longo da coluna terão de ser nulos.

EXEMPLO 16.

$$\left[\begin{array}{cccc} 9 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccccc} 9 & 15 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

MATRIZ ESCALONADA

DEFINIÇÃO (MATRIZ ESCALONADA REDUZIDA)

*Uma matriz escalonada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é chamada de **matriz escalonada reduzida** se:*

- ① *Os elementos pivô são iguais a um.*

MATRIZ ESCALONADA

DEFINIÇÃO (MATRIZ ESCALONADA REDUZIDA)

Uma matriz escalonada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é chamada de **matriz escalonada reduzida** se:

- ① Os elementos pivô são iguais a um.
- ② Os elementos da coluna do pivô, diferentes do pivô, são zero.

MATRIZ ESCALONADA

DEFINIÇÃO (MATRIZ ESCALONADA REDUZIDA)

Uma matriz escalonada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é chamada de **matriz escalonada reduzida** se:

- ① Os elementos pivô são iguais a um.
- ② Os elementos da coluna do pivô, diferentes do pivô, são zero.

EXEMPLO 17.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 15 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

MATRIZES EQUIVALENTES

DEFINIÇÃO

Seja $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, diremos que a matriz B é equivalente à matriz A se B é obtida por uma sequência finita de operações elementares de linha aplicadas à matriz A .

MATRIZES EQUIVALENTES

DEFINIÇÃO

Seja $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, diremos que a matriz B é equivalente à matriz A se B é obtida por uma sequência finita de operações elementares de linha aplicadas à matriz A .

OBSERVAÇÃO:

- ① Dadas as matrizes A e B da mesma ordem tal que A é equivalente a B , então B é equivalente a A .

MATRIZES EQUIVALENTES

DEFINIÇÃO

Seja $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, diremos que a matriz B é equivalente à matriz A se B é obtida por uma sequência finita de operações elementares de linha aplicadas à matriz A .

OBSERVAÇÃO:

- ① Dadas as matrizes A e B da mesma ordem tal que A é equivalente a B , então B é equivalente a A .
- ② Dadas duas matrizes da mesma ordem, en geral, é difícil decidir se elas são equivalentes.

MATRIZES EQUIVALENTES

DEFINIÇÃO

Seja $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, diremos que a matriz B é equivalente à matriz A se B é obtida por uma sequência finita de operações elementares de linha aplicadas à matriz A .

OBSERVAÇÃO:

- ① Dadas as matrizes A e B da mesma ordem tal que A é equivalente a B , então B é equivalente a A .
- ② Dadas duas matrizes da mesma ordem, en geral, é difícil decidir se elas são equivalentes.
- ③ Entre tanto podemos achar uma matriz escalonada equivalente a ambas.

MATRIZES EQUIVALENTES

DEFINIÇÃO

Seja $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, diremos que a matriz B é equivalente à matriz A se B é obtida por uma sequência finita de operações elementares de linha aplicadas à matriz A .

OBSERVAÇÃO:

- ① Dadas as matrizes A e B da mesma ordem tal que A é equivalente a B , então B é equivalente a A .
- ② Dadas duas matrizes da mesma ordem, en geral, é difícil decidir se elas são equivalentes.
- ③ Entre tanto podemos achar uma matriz escalonada equivalente a ambas.
- ④ Além disso, podemos achar uma única matriz escalonada reduzida equivalente a ambas.

DETERMINAÇÃO DA INVERSA POR OPERAÇÕES ELEMENTARES

Sejam O_1, O_2, \dots e O_t as operações elementares que reduzem A à identidade. Para determinar A^{-1} fazemos:

- ① Construir a matriz $(A|I_n) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$
- ② Aplicar as operações elementares e obter:

$$(A|I_n) \xrightarrow{O_1} (A_1|I_n^1)$$

$$\xrightarrow{O_2} (A_2|I_n^2)$$

$$\xrightarrow{O_t} (I_n|A^{-1})$$

- ③ Naturalmente, se este processo não termina em I_n , então A não tem inversa.

EXEMPLO 18.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ① Determinar se A possui inversa.
- ② Se sim, calcular ela.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

EXEMPLO 19.

Considere as seguintes equações:

$$2x + 3y = 0$$

$$4x + 6y = 12$$

$$-x + yy = 2$$

O que representam geometricamente?

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um sistema linear de m equações com n incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n é da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Onde os números a_{ij} com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$ são os dados que, em geral são conhecidos. Este números serão chamados de coeficientes do sistema.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um sistema linear de m equações com n incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n é da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Onde os números a_{ij} com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$ são os dados que, em geral são conhecidos. Este números serão chamados de coeficientes do sistema.

EXEMPLO 20.

Considere o sistema de equações lineares:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y & = & 4 \\ x + 4y & = & 2 \end{array} \right.$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

O sistema anterior pode ser escrito como:

$$AX = B$$

Onde, A será chamada de **Matriz de coeficientes do sistema**, X é chamado **vetor coluna das variáveis** e B é chamado de **vetor coluna dos termos independentes**.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

- ① Se a vetor coluna B for tal que $B = \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$. O sistema será chamado de *sistema homogêneo*. Caso contrário, diremos que o sistema é *não homogêneo*.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

- ① Se a vetor coluna B for tal que $B = \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$. O sistema será

chamado de *sistema homogêneo*. Caso contrário, diremos que o sistema é *não homogêneo*.

- ② Uma solução do sistema é uma matriz $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que:

$$A\Lambda = B$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

- ① Se a vetor coluna B for tal que $B = \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$. O sistema será

chamado de *sistema homogêneo*. Caso contrário, diremos que o sistema é *não homogêneo*.

- ② Uma solução do sistema é uma matriz $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que:

$$A\Lambda = B$$

- ③ O conjunto de todas as soluções do sistema será denotado por:

$$S = \{\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^t \in \mathbb{R}^{n \times 1}; A\Lambda = B\}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

- ① O sistema $AX = B$ é chamado *impossível* se não tiver solução. Dito de outra forma, o sistema $AX = B$ é impossível se $S = \emptyset$.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

- ① O sistema $AX = B$ é chamado *impossível* se não tiver solução. Dito de outra forma, o sistema $AX = B$ é impossível se $S = \emptyset$.
- ② O sistema $AX = B$ é chamado *possível* se tiver solução.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

- ① O sistema $AX = B$ é chamado *impossível* se não tiver solução. Dito de outra forma, o sistema $AX = B$ é impossível se $S = \emptyset$.
- ② O sistema $AX = B$ é chamado *possível* se tiver solução.
 - ① O sistema $AX = B$ é chamado *possível e determinado* se tiver uma única solução.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO

Consideremos o sistema de equações lineares dado por $AX = B$.

- ① O sistema $AX = B$ é chamado **impossível** se não tiver solução. Dito de outra forma, o sistema $AX = B$ é impossível se $S = \emptyset$.
- ② O sistema $AX = B$ é chamado **possível** se tiver solução.
 - ① O sistema $AX = B$ é chamado **possível e determinado** se tiver uma única solução.
 - ② O sistema $AX = B$ é chamado **possível e indeterminado** se tiver mais de uma solução.

EXEMPLOS 21.

Considere os sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{array} \right.$$

EXEMPLOS 21.

Considere os sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO:

- ① Consideremos o sistema de equações homogêneo: $AX = 0$, observe que $(0, 0, \dots, 0)$ é uma solução do sistema, ela será chamada de solução trivial. Qualquer outra solução deste sistema será chamada de solução não trivial.

EXEMPLOS 21.

Considere os sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{array} \right.$$

OBSERVAÇÃO:

- ① Consideremos o sistema de equações homogêneo: $AX = 0$, observe que $(0, 0, \dots, 0)$ é uma solução do sistema, ela será chamada de solução trivial. Qualquer outra solução deste sistema será chamada de solução não trivial.
- ② Qualquer sistema homogêneo é um sistema possível, restando somente decidir se ele é possível determinado ou possível indeterminado.

MÉTODO DE GAUSS

Como resolver o sistema

$$AX = B? \quad (1)$$

Usando as operações elementares. A essencia deste método, chamado de método de Gauss, radica na igualdade:

$$O(AX) = (OA)X$$

Para qualquer matriz $O \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Observe que as operações elementares linha atuam sobre A e B , mas não sobre a variável X . Depois de um número finito de operações elementares, obtemos:

$$A_0 X = B_0 \quad (2)$$

Onde A_0 é a matriz escalonada reduzida associada a A .

MÉTODO DE GAUSS

Como resolver o sistema

$$AX = B? \quad (1)$$

Usando as operações elementares. A essencia deste método, chamado de método de Gauss, radica na igualdade:

$$O(AX) = (OA)X$$

Para qualquer matriz $O \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Observe que as operações elementares linha atuam sobre A e B , mas não sobre a variável X . Depois de um número finito de operações elementares, obtemos:

$$A_0X = B_0 \quad (2)$$

Onde A_0 é a matriz escalonada reduzida associada a A . Logo, toda solução do sistema (1) é solução do sistema (2).

MÉTODO DE GAUSS

EXEMPLO 22.

Achar o conjunto solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccl} x & + & y & - & z & + & 4t & + & 3w & = & 6 \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 6t & - & 5w & = & 1 \\ 2x & & & - & z & - & 4t & + & 2w & = & -7 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & - & 10t & - & 8w & = & -5 \end{array} \right.$$

POSTO DE UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO

O posto de uma matriz A , ($p(A)$), é o número de linhas não nulas de qualquer escalonamento de A .

POSTO DE UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO

O *posto de uma matriz A, $p(A)$* , é o número de linhas não nulas de qualquer escalonamento de A.

EXEMPLO 23.

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, achar $p(A)$.

POSTO DE UMA MATRIZ

- ① Para achar o posto de uma matriz, devemos transformar a matriz na sua forma escalonada e contar o número de linhas não nulas.

POSTO DE UMA MATRIZ

- ① Para achar o posto de uma matriz, devemos transformar a matriz na sua forma escalonada e contar o número de linhas não nulas.
- ② Duas matrizes equivalentes tem o mesmo posto.

TEOREMA DO POSTO

TEOREMA

Consideremos o sistema

$$AX = B$$

Com m -linhas e n -incognitas. Sejam P_{AB} o posto da matriz ampliada $(A|B)$ e p_A o posto da matriz A . Então:

- ① O sistema acima é possível se, e somente se, $p_{AB} = p_A$.

TEOREMA DO POSTO

TEOREMA

Consideremos o sistema

$$AX = B$$

Com m -linhas e n -incognitas. Sejam P_{AB} o posto da matriz ampliada $(A|B)$ e p_A o posto da matriz A . Então:

- ① O sistema acima é possível se, e somente se, $p_{AB} = p_A$.
- ② O sistema acima é possível e determinado se, e somente se,
 $p_{AB} = p_A = n$

TEOREMA DO POSTO

TEOREMA

Consideremos o sistema

$$AX = B$$

Com m -linhas e n -incognitas. Sejam P_{AB} o posto da matriz ampliada $(A|B)$ e p_A o posto da matriz A . Então:

- ① O sistema acima é possível se, e somente se, $p_{AB} = p_A$.
- ② O sistema acima é possível e determinado se, e somente se,
 $p_{AB} = p_A = n$
- ③ O sistema acima é possível e indeterminado se, e somente se,
 $p_{AB} = p_A < n$. Neste caso, $n - p_A$ é o número de incognitas livres do sistema, isto é, incognitas que podem assumir qualquer valor real.

TEOREMA DO POSTO

TEOREMA

Consideremos o sistema

$$AX = 0$$

Com m -linhas e n -incognitas. Seja p_A o posto da matriz A . Então:

- ① O sistema acima sempre é possível.

TEOREMA DO POSTO

TEOREMA

Consideremos o sistema

$$AX = 0$$

Com m -linhas e n -incognitas. Seja p_A o posto da matriz A . Então:

- ① O sistema acima sempre é possível.
- ② O sistema acima é possível e determinado se, e somente se, $p_A = n$.

TEOREMA DO POSTO

TEOREMA

Consideremos o sistema

$$AX = 0$$

Com m -linhas e n -incognitas. Seja p_A o posto da matriz A . Então:

- ① O sistema acima sempre é possível.
- ② O sistema acima é possível e determinado se, e somente se, $p_A = n$.
- ③ O sistema acima é possível e indeterminado se, e somente se, $p_A < n$. Neste caso, $n - p_A$ é o número de incognitas livres do sistema, isto é, incognitas que podem assumir qualquer valor real.

EXEMPLO 24.

Estude o seguinte sistema:

$$2x - y = 0$$

$$6x - 5y = 0$$

$$2x + 4y = 0$$

EXEMPLO 25.

Estude o seguinte sistema:

$$x + 5y + 11z = -5$$

$$2x + 3y + 8z = 4$$

$$-x + 2y + 3z = -9$$