

MAT146 - Cálculo I - Extremos Locais e Globais

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Vimos que a derivada de uma função em um ponto é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função neste ponto. Usaremos agora a derivada como ferramenta para auxiliar no esboço de gráficos. Para isso, precisaremos de algumas definições e teoremas.

Definição

A função f terá um valor máximo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c , no qual $f(x)$ esteja definida, tal que

$$f(c) \geq f(x)$$

para todo x no intervalo. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo relativo de f .

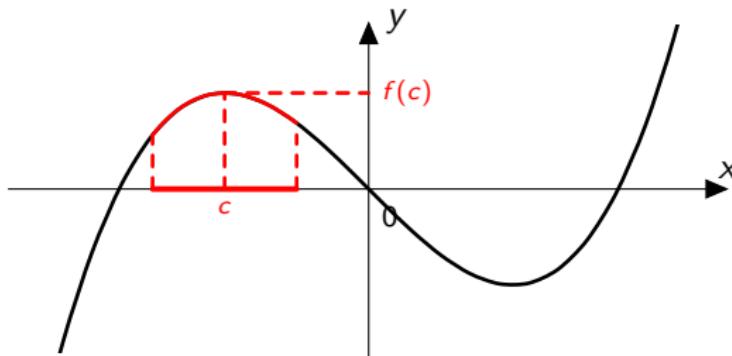


Figura : Máximo Relativo

Exemplo

Seja $f(x) = -x^2 + 3$.

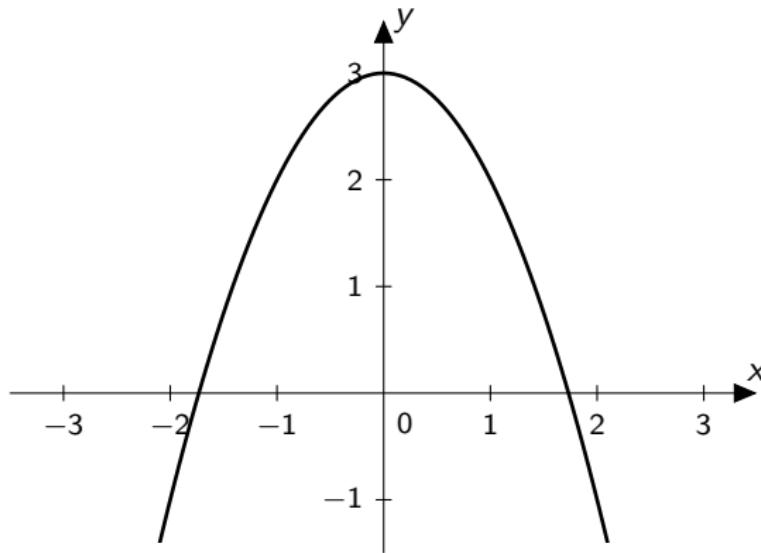


Figura : Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 3$.

Pelo gráfico fica claro que f terá um máximo relativo em 0. Vejamos analiticamente isto. Como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$-x^2 \leq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$-x^2 + 3 \leq 3, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \leq f(0), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Desta forma, $x = 0$ é um ponto de máximo relativo e $f(0) = 3$ é valor máximo relativo.

Exemplo

Seja $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. O gráfico de f é dado abaixo.

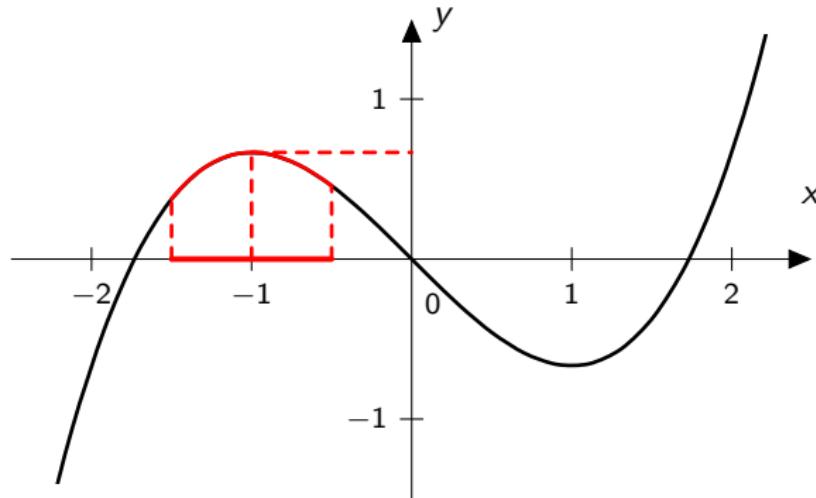


Figura : Gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

A função f terá um máximo relativo em $x = -1$, pois $-1 \in (-1.5, -0.5)$ e

$$f(-1) \geq f(x), \quad \text{para todo } x \in (-1.5, -0.5).$$

Neste caso, $x = -1$ é um ponto de máximo relativo e $f(-1)$ é o valor de mínimo relativo.

Definição

A função f terá um valor mínimo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c , no qual $f(x)$ esteja definida, tal que

$$f(c) \leq f(x)$$

para todo x no intervalo. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo relativo de f .

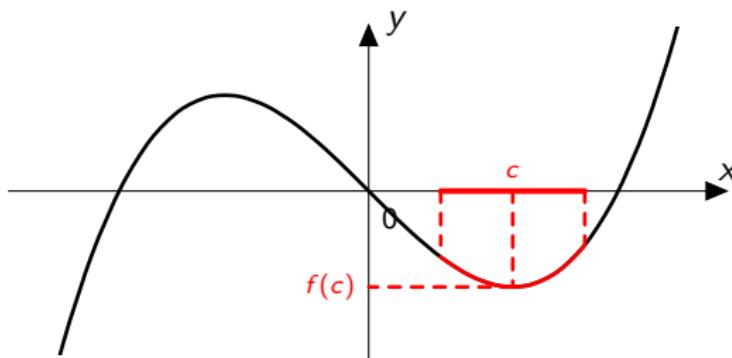


Figura : Mínimo Relativo

Seja $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. O gráfico de f é dado abaixo.

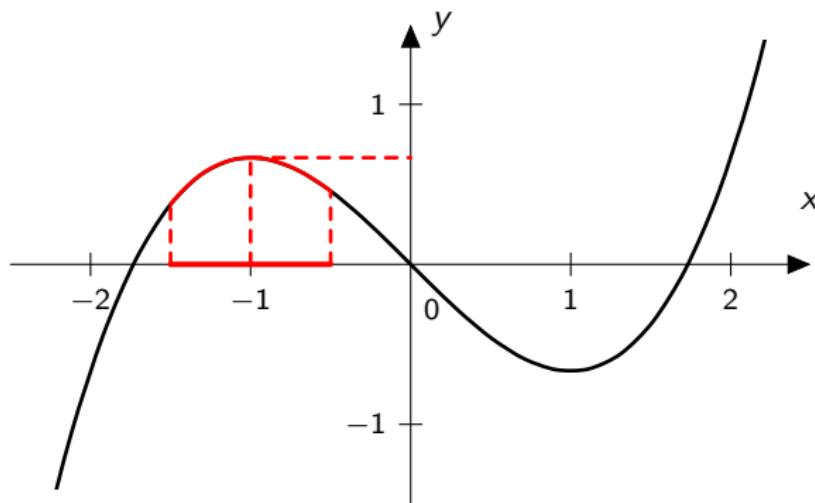


Figura : Gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

A função f tem um mínimo relativo em $x = 1$, pois $1 \in (0.5, 1.5)$ e

$$f(1) \leq f(x), \quad \text{para todo } x \in (0.5, 1.5).$$

Neste caso, $f(1)$ é o valor de mínimo relativo.

Teorema

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f possui um extremo relativo em $c \in (a, b)$ e f é derivável em c , então $f'(c) = 0$.

Observação

A interpretação geométrica deste teorema é que se f tiver um extremo relativo em c , e se $f'(c)$ existir, então o gráfico de f tem reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

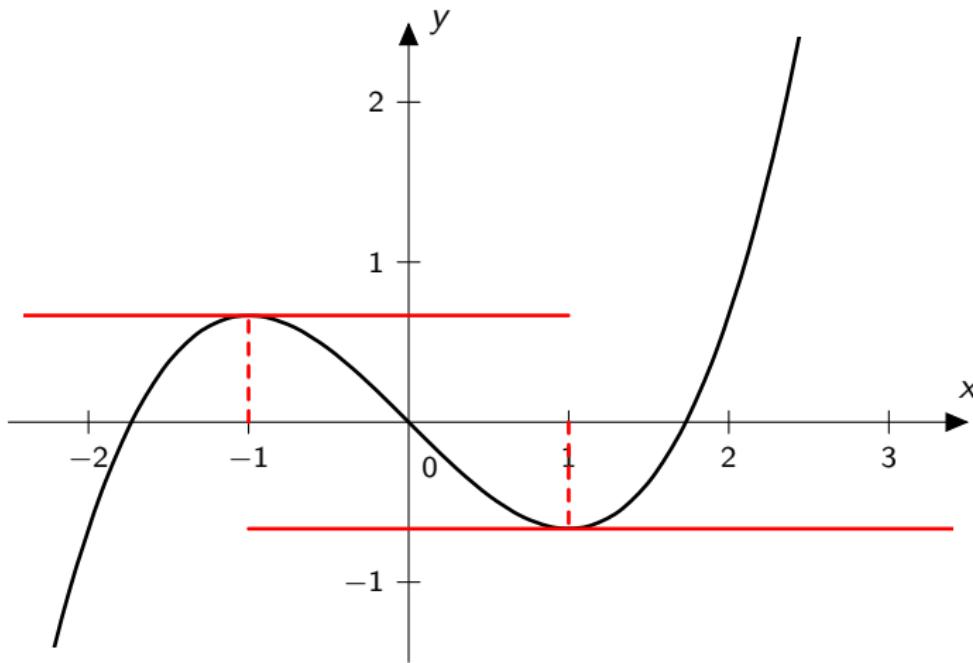


Figura : Reta tangente horizontal

Ilustraremos a seguir um exemplo onde não vale a recíproca do teorema, ou seja, $f'(c) = 0$, mas f não tem um extremo relativo em c .

Exemplo

Considere a função definida por $f(x) = (x - 3)^3$. Observe que $f'(x) = 3(x - 3)^2$ e assim $f'(3) = 0$.

Porém,

$$f(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 3$$

e

$$f(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 3.$$

Logo, f não tem um extremo relativo em $x = 3$.

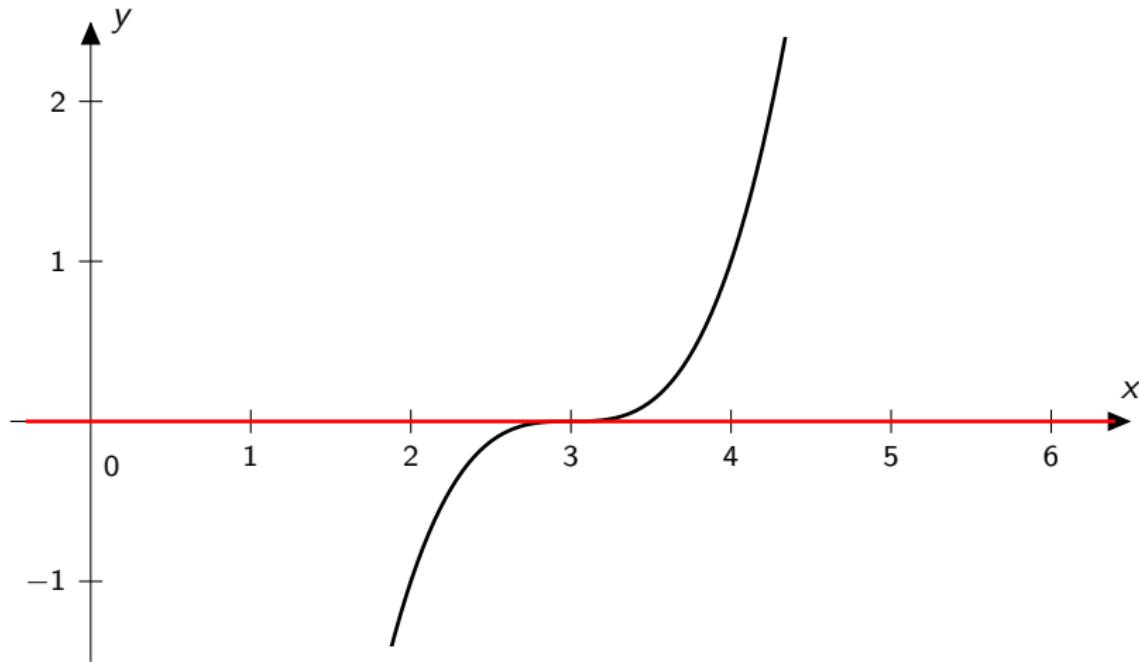


Figura : Gráfico da função $f(x) = (x - 3)^3$.

Exemplo

Considere a função $f(x) = (x - 3)^2$. Como

$$f(x) > f(3) = 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

então f tem um mínimo relativo em $x = 3$. Além disso, a função f é derivável. Pelo teorema anterior devemos ter

$$f'(3) = 0.$$

Isto de fato ocorre uma vez que

$$f'(x) = 2(x - 3).$$

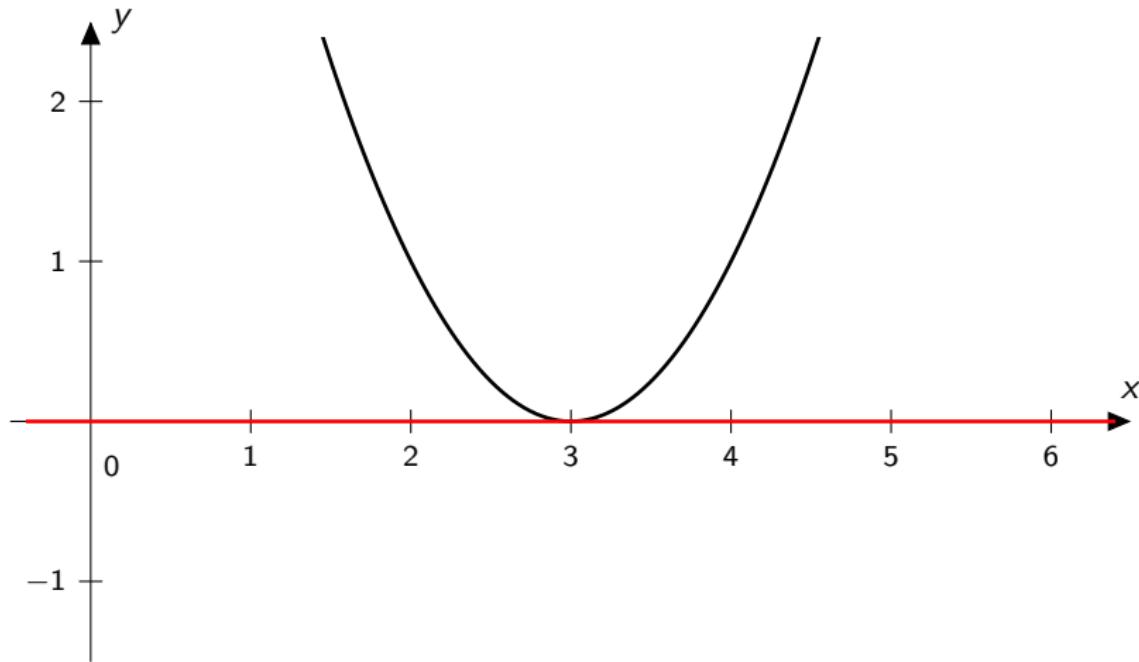


Figura : Gráfico da função $f(x) = (x - 3)^2$.

Definição

Sejam f uma função real e $c \in \text{Dom}(f)$. Diremos que $x=c$ é um número crítico de f se

$$f'(c) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(c) \text{ não existir.}$$

Neste caso, o ponto $(c, f(c))$ será chamado de ponto crítico de f .

Exemplo

Encontre os números críticos da função $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1) \\ &= \frac{4(x+1)}{3(x^{\frac{2}{3}})}. \end{aligned}$$

Observe que

$$f'(x) = 0, \quad \text{para} \quad x = -1$$

e

$$f'(x) \quad \text{não existe para} \quad x = 0.$$

Logo, $x = -1$ e $x = 0$ são os únicos números críticos da função f .

Definição

Uma função f terá um valor máximo absoluto em $I \subset \mathbb{R}$, se existir algum número $c \in I$, tal que

$$f(c) \geq f(x),$$

para todo $x \in I$. Neste caso, $f(c)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

Definição

Uma função f terá um valor mínimo absoluto em $I \subset \mathbb{R}$, se existir algum número $c \in I$, tal que

$$f(c) \leq f(x),$$

para todo $x \in I$. Neste caso, $f(c)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.

Exemplo

Seja $f(x) = 2x$ definida no intervalo $[-1, 4)$.

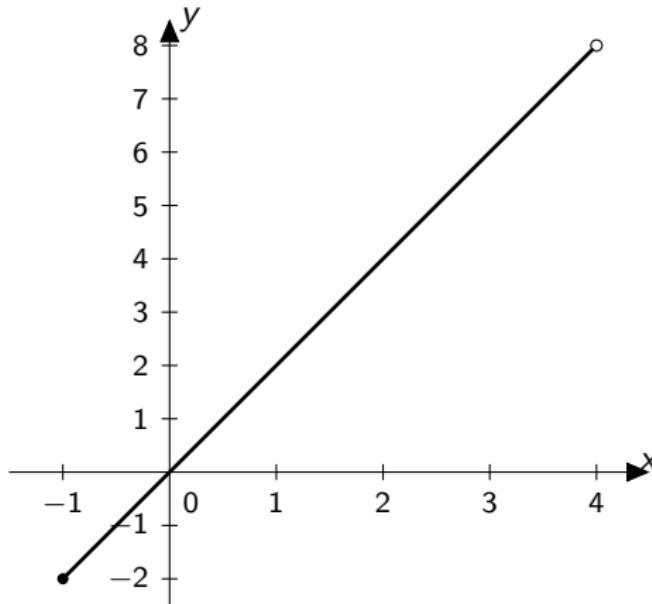


Figura : Gráfico da função $f(x) = 2x$, no intervalo $[-1, 4)$.

A função em questão não possui valor máximo absoluto em $[-1, 4]$. De fato, observe que como $x < 4$, então $f(x) < 8$. Mais ainda, para qualquer $-2 \leq d < 8$, basta tomar $c = \frac{d+8}{4} \in [-1, 4)$ que obtemos

$$d < f(c) = \frac{d+8}{2} < 8.$$

A função f tem um valor mínimo absoluto em $x = -1$, pois

$$f(-1) = -2 \leq 2x,$$

para qualquer $x \in [-1, 4)$.

Exemplo

A função f definida por $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ não possui valor máximo absoluto e nem valor mínimo absoluto em $(-1, 1)$. Observe que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

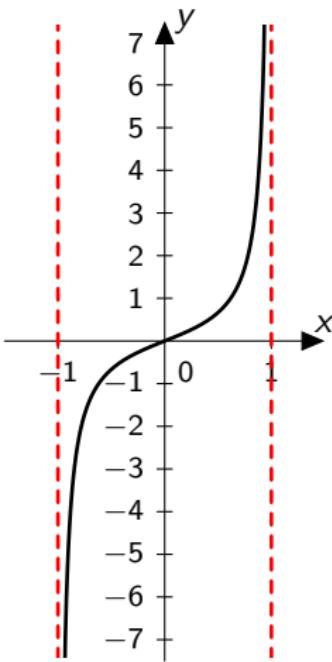


Figura : Gráfico da função $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ no intervalo $(-1, 1)$.

Podemos falar de um extremo absoluto de uma função mesmo que não seja especificado um intervalo. Em tal caso, estaremos nos referindo ao extremo absoluto da função em todo o seu domínio.

Definição

Diremos que $f(c)$ é o valor máximo absoluto da função f

$$f(c) \geq f(x),$$

para todos os valores de x no domínio de f .

Definição

Diremos que $f(c)$ é o valor mínimo absoluto da função f

$$f(c) \leq f(x),$$

para todos os valores de x no domínio de f .

Exemplo

Considere a função $f(x) = -x^2 - 2x - 2$. O gráfico de $f(x)$ é dado por

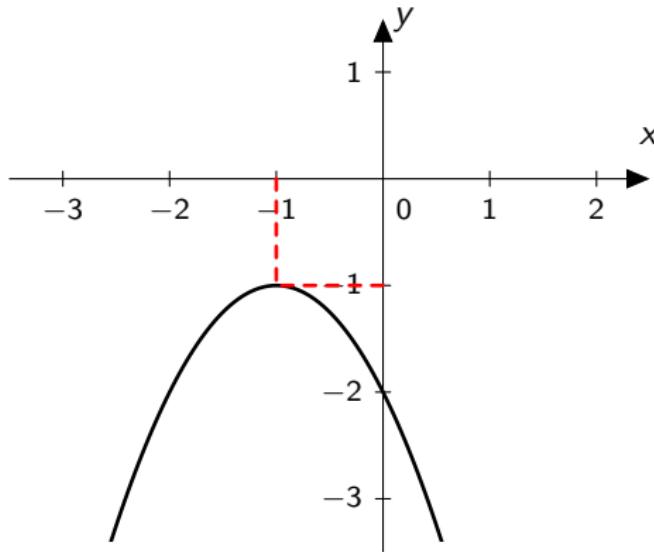


Figura : Gráfico da função $f(x) = -x^2 - 2x - 2$.

Uma vez que a função f pode ser escrita como

$$f(x) = -(x + 1)^2 - 1,$$

temos

$$f(x) \leq -1 = f(-1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí, $f(-1) = -1$ é o valor de mínimo absoluto de f .

Vimos que, em geral, não podemos garantir que uma função possua máximo ou mínimo. O próximo resultado nos garante condições suficientes para que uma função f assuma tanto mínimo global quanto máximo global.

Teorema (Teorema do Valor Extremo)

Se uma função f é contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

O valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ podem ser encontrados através do seguinte procedimento:

- (i) Ache os valores da função nos números críticos de f em (a, b) .
- (ii) Ache os valores de $f(a)$ e $f(b)$.
- (iii) O maior dentre os valores das etapas (i) e (ii) será o valor máximo absoluto e o menor será o mínimo absoluto.

Exemplo

Vamos determinar os extremos absolutos (máximos e mínimos absolutos) da função

$$f(x) = (x - 2)^{\frac{2}{3}}$$

no intervalo $[1, 5]$.

Como f é contínua em $[1, 5]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado e nos garante a existência de um valor de máximo absoluto e um valor de mínimo absoluto de f em $[1, 5]$.

Uma vez que

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{\frac{1}{3}}},$$

concluímos que $f'(x) \neq 0$, para todo x real (e em particular para $x \in (1, 5)$), e $f'(x)$ não existe para $x = 2 \in (1, 5)$.

Assim, $x = 2$ é o único número crítico de f em $(1, 5)$. Desta forma, os extremos absolutos da função ocorrem em $x = 2$ ou nos extremos do intervalo.

Como

$$f(1) = 1,$$

$$f(2) = 0$$

e

$$f(5) = \sqrt[3]{9},$$

podemos concluir que $f(2) = 0$ é o valor mínimo absoluto e $f(5) = \sqrt[3]{9}$ é o valor máximo absoluto de f .