Séries I

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2022-2

A soma dos termos de uma **sequência** $\{a_n\}$ é denominado **série** e é denotado por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum a_n$.
Podemos nos equivocar ao tentar calcular a soma de forma usual. Veja o exemplo abaixo.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = \begin{cases} -1 + (1-1) + (1-1) + \cdots & = -1 \\ (-1+1) + (-1+1) + \cdots & = 0 \end{cases}$$

Somas Parciais:
$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \ldots$.
Essas somas formam um sequência (s_n) que pode ou não possuir um limite. Cada s_n é chamado **soma parcial de ordem** n e os termos a_n são chamados os **termos da série**.

Definição 1

A **série** $\sum a_n$ é dita **convergente** se a sequência (s_n) for **convergente**. Caso contrário a série é dita **divergente**.

Se a sequência $(s_n) \to L$ dizemos que a série $\sum a_n$ converge e sua soma é L.

Notação: $\sum a_n = L$.

Note que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)$.

Exemplos:1) Faça um estudo sobre a convergência das séries abaixo. Para as convergentes determine sua soma.

(a) **Série Geométrica**: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, $a \neq 0$, r é chamado **razão** da série;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 5(-2/3)^{n-1}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n}8^{1-n}$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

(f) **Série Telescópica**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

(g) **Série Harmônica**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2) Escreva o número $2,3\overline{17} = 2,3171717\ldots$ como uma razão de números inteiros.

Teorema: Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teste da Divergência ou Teste do Termo Geral: Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo: Mostre que as séries abaixo divergem.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1/n}$.

Teorema 1: Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes, ou seja, $\sum a_n = L$ e $\sum b_n = R$ e $c \in \mathbb{R}$. Então:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = cL$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = L \pm R$.

Exemplo: Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$.

Teorema 2: Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries que diferem apenas pelo seus m primeiros termos (isto é, $a_k = b_k$ se $k > m$), então ambas convergem ou ambas divergem.

Exemplo: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ diverge ou converge?

Teorema 3: Se $\sum a_n$ diverge e $\sum b_n$ converge, então $\sum ca_n, c \in \mathbb{R}^*$ e $\sum (a_n + b_n)$ divergem.

Exemplo: A série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{10n} + \frac{2}{3^n} \right)$ diverge ou converge?

OBS: Se ambas $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem, então não se pode afirmar nada sobre $\sum (a_n + b_n)$. Por exemplo tome $a_n = -b_n$ fazendo $b_n = n$.

Teste da Integral: Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, suponhamos que exista uma função $f(x) > 0$, contínua e decrescente em $[1, \infty)$ tal que $f(n) = a_n$. Então

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e só se, $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente.

Exemplos: 1) Verifique se as séries abaixo são convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\ n}{n}$.

2) **Série Hiper-Harmônica ou Série-**p: Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}$.

Teste da Comparação: Considere as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tais que $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Então

(i) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente e $a_n \leq b_n, \forall n$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente;

(ii) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente e $b_n \leq a_n, \forall n$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplos: Verifique se as séries abaixo são convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5^n + 2}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{3n^3 + 5n + 3}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\ n}{n}$.

Teste da Comparação por Limite: Considere as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tais que $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Então

(i) se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, então ambas convergem ou ambas divergem;

(ii) se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge;

(iii) se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

Exemplos: Verifique se as séries abaixo são convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{n^5+5}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

- LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. II*, São Paulo, Editora Harbra: 1990.
- STEWART, J. *Cálculo - vol II*, São Paulo, Thomson Learning: 2002.