MAT146 - Cálculo I - Integração por Partes

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Método de Integração por Partes

Mesmo que a antiderivada de uma função exista, nem sempre é possível expressá-la em termos das funções elementares. Um exemplo é mostrado abaixo:

$$\int e^{-x^2} dx$$

Nesse tópico estudaremos um método que permite encontrar a antiderivada de algumas funções. Esse método é chamado **Integração por Partes** e é particularmente útil para integrandos que envolvem produtos de funções algébricas e transcedentes.

Integrando é a função para a qual se busca a antiderivada.

$$\int \underbrace{f(x)}_{integrando} \; dx$$

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo $\mathcal{I}$. A regra do produto estabelece que

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Se as funções f' e g' são contínuas, podemos integrar ambos os membros da equação e obter

$$\int (fg)'(x)dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Daí obtemos

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (1)$$

Teorema de Integração por Partes

Colocando

$$u = f(x) \;\text{ e }\; v = g(x)$$

obtemos

$$du = f'(x)dx \;\text{ e }\; v'(x) = g'(x)dx$$

Substituindo na equação (1), obtemos o seguinte resultado

Teorema (1)

Se u e v são funções deriváveis e suas derivadas são contínuas, então

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Observação (1)

Este método não funciona para todas as funções. As escolhas de u e de dv são fundamentais no processo de integração por partes. Os seguintes procedimentos podem facilitar o uso do método.

1. *Coloque, se possível, dv como o fator mais complicado do integrando, que se possa integrar diretamente.*
2. *Coloque u como a função mais simples, cuja derivada seja uma função mais simples do que u.*

Exemplos

Exemplo (1)

Calcule

$$\int xe^x dx$$

Solução: Seguindo as sugestões anteriores, coloque

$$u = x \quad e \quad dv = e^x dx$$

Assim

$$u = x \Rightarrow dx = du$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Aplicando o teorema (1), *obtemos*

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

O resultado acima pode ser verificado, basta derivarmos $xe^x - e^x + c$, *vejamos:*

$$(xe^x - e^x + c)' = (xe^x)' - (e^x)' + (c)' =$$

$$e^x + xe^x - e^x + 0 = xe^x$$

Exemplo (2)

Calcule

$$\int x^2 \ln(x) dx$$

Neste caso, observe que a derivada de $\ln(x)$ *é mais simples do que* $\ln(x)$. *Assim, colocamos*

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

Pela integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\int u dv &= uv - \int v du \\
\int x^2 \ln(x) dx &= \ln(x)\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + c \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + c
\end{aligned}$$

Exemplo (3) (Integrando com um único termo)

Calcule

$$\int arcsen(x)dx$$

Neste caso temos somente a seguinte escolha para aplicar o teorema (1).

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$u = arcsen(x) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Aplicando integração por partes

$$\begin{aligned} \int udv &= uv - \int vdu \\ \int arcsen(x)dx &= xarcsen(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{aligned}$$

Note que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Fazendo a substituição

$$1 - x^2 = z, \quad onde \quad -2xdx = dz$$

Obtemos

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\sqrt{z} = -\sqrt{1-x^2}$$

Assim,

$$\int arcsen(x)dx = xarcsen(x) - (-\sqrt{1-x^2}) + c$$

$$= xarcsen(x) + \sqrt{1-x^2} + c$$

Exemplo (4)

Calcule

$$\int sec^3(x)dx$$

Neste caso, o procedimento usado no exemplo 3 *não seria conveniente. (Verifique!)*
Façamos o seguinte, coloque

$$\int sec^3(x)dx = \int sec(x)sec^2(x)dx$$

Seguindo a observação 1, *coloque*

$$dv = sec^2(x)dx \Rightarrow v = \int sec^2(x)dx = tg(x)$$

$$u = sec(x) \Rightarrow du = sec(x)tg(x)dx$$

Aplicando o teorema 1 *obtemos*

$$\begin{aligned}
\int udv &= uv - \int vdu \\
\int sec^3(x)dx &= \int sec(x)sec^2(x)dx \\
&= \underbrace{sec(x)tg(x)}_{uv} - \int \underbrace{tg(x)sec(x)tg(x)dx}_{vdu} \\
&= sec(x)tg(x) - \int sec(x)tg^2(x)dx \\
&= sec(x)tg(x) - \int sec(x)(sec^2(x) - 1)dx \\
&= sec(x)tg(x) - \int sec^3(x)dx + \int sec(x)dx
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 2\int sec^3(x)dx &= sec(x)tg(x) + \int sec(x)dx \\ \int sec^3(x)dx &= \frac{1}{2}sec(x)tg(x) + \frac{1}{2}\ln|sec(x) + tg(x)| + c \end{aligned}$$

Onde usamos o fato que

$$\int sec(x)dx = \ln|sec(x) + tg(x)| + c$$

Exemplo (5) (Uso repetido de integração por partes)

Calcule

$$\int x^2 sen(x)dx$$

Usando a observação 1 *coloque*

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

$$dv = sen(x)dx \Rightarrow v = -cos(x)$$

Novamente aplicando o teorema 1 *obtemos*

$$\begin{aligned} \int udv &= uv - \int vdu \\ \int x^2 sen(x)dx &= -x^2 cos(x) - \int 2x(-cos(x))dx \\ &= -x^2 cos(x) + 2\int xcos(x)dx \end{aligned}$$

Aplicamos novamente o teorema 1 *para a integral*

$$\int xcos(x)dx$$

coloque

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = cos(x)dx \Rightarrow v = sen(x)$$

$$\begin{aligned} \int xcos(x)dx &= xsen(x) - \int sen(x)dx \\ &= xsen(x) + cos(x) \end{aligned}$$

Assim obtemos

$$\int x^2 sen(x)dx = -x^2 cos(x) + 2(xsen(x) + cos(x)) + c$$