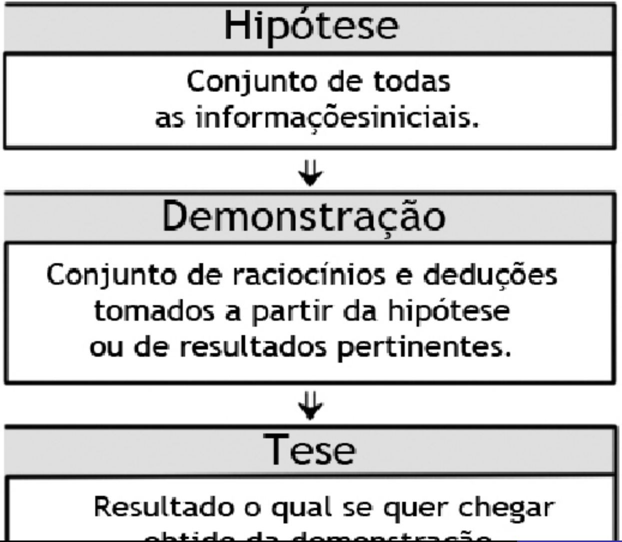
MAT131 - Introdução à Álgebra

Anderson Tiago da Silva

Universidade Federal de Viçosa

Podemos dizer que uma demonstração é uma espécie de raciocínio que permite concluir ou estabelecer uma tese, supondo compreendidas as condições dadas nas hipóteses. O esquema seguinte ilustra como se dá esse processo.


Hipótese
Conjunto de todas
as informaçõesiniciais.
Demonstração
Conjunto de raciocínios e deduções
tomados a partir da hipótese
ou de resultados pertinentes.
Tese
Resultado o qual se quer chegar

- Entendemos por demonstração uma sequência de afirmações lógicas com a finalidade de atingir uma conclusão. Uma demonstração pode ser FORMAL ou INFORMAL.
- Uma demonstração é dita formal quando se deixa de forma clara, em cada passo, as leis da lógica proposicional que foram usadas.
- Uma demostração é dita informal quando não se explicita as leis da lógica proposicional usadas, pulando alguns argumentos (obvios), subintendendo-se que fazem sentido e deixando por conta do leitor o preenchimento dessas lacunas. Essas últimas demonstrações são as que mais usamos em matemática. Nem por isso deixam de ser formais do ponto de vista científico

Importância das Proposições Condicionais

- As proposições condicionais têm um papel importante em Matemática. Os teoremas ou resultados podem sempre ser escritos na forma de uma proposição condicional, ou seja, na forma de uma implicação lógica válida.

Exercício

Escrever como uma proposição condicional o seguinte resultado ou enunciado:

a) *O quadrado de todo número real é maior ou igual do que zero;*

b) *Um número $x \in \mathbb{Z}$ é par quando $x = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$;*

Para toda proposição condicional $p \to q$, associam-se três proposições igualmente importantes:

1) Proposição Recíproca: $q \to p$.
2) Proposição Inversa: $\sim p \to \sim q$.
3) Proposição Contrapositiva: $\sim q \to \sim p$.

Exercício

Se a inversa de $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \to (q \vee \sim r)$ é falsa. Determine o valor de verdade da contrapostiva.

Método Direto

Se tivermos n hipóteses, teremos a condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$. O método direto consiste em usar as hipóteses $p_1, p_2, \cdots\ p_n$ e, a partir da validade delas, junto com definições, axiomas e leis, alcançar a validade da conclusão q.

- Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma: $\forall x \in A : (P(x) \to Q(x))$.
- Comece a demonstração supondo que x é um elemento específico do domínio A, mas escolhido arbitrariamente, para o qual a hipótese $P(x)$ é verdadeira. Normalmente abreviamos esta etapa dizendo "Assuma que $x \in A$ **e** $P(x)$ é verdadeiro" ou "Seja $x \in A$ tal que $P(x)$".
- Mostre que a conclusão $Q(x)$ é verdadeira utilizando definições, resultados anteriores e as regras de inferência lógica.

Exemplo

Mostre que se x é um inteiro par, então x^2 é par.

Provas por Casos

- Para se chegar a verdade de uma proposição através da demonstração direta, as vezes é necessário dividir a mesma em vários casos para se chegar a abrangência total da hipótese.
- Vejamos alguns exemplos.

Exemplos

Exemplo

Mostre que se $x \in \mathbb{Z}$, então $x^2 + x$ é par.

Demonstração.

Resolução no quadro $\square$

Exemplo

Mostre que se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|xy| = |x||y|$.

Demonstração.

Resolução no quadro $\square$

Método Indireto

- O método indireto usa um argumento não direto para provar um resultado. Este método distingue dois tipos: Argumentos por contrapositiva e argumentos por redução ao absurdo.

Argumento por contrapositiva

Vamos sempre objetivar a demonstração de condicionais da forma

$$p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q,$$

porém não faremos de forma direta. Para isso, faremos a demonstração da contrapositiva, ou seja,

$$\sim q \rightarrow \sim (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n).$$

Exemplo

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $3n + 2$ é ímpar, então n é impar.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

Exemplo

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Assim, se n^2 é impar, então n é impar.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

Demostração por Contradição ou Absurdo

Ainda querendo provar a condicional

$$p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q,$$

, o método de demonstração usando argumentos por redução ao absurdo consiste em assumir a negação da tese e junto com a verdade da hipótese, chegar a um absurdo ou contradição.

Em linguagem matemática, temos:

$$(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \wedge \sim q \Rightarrow \textit{ Contradição ou absurdo.}$$

Exemplo

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $a \cdot b$ é ímpar, então a é ímpar ou b é ímpar.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

Exemplo

Seja $x \in \mathbb{R}$ com $x > 0$. Mostre que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$

Indução Matemática

- Os números naturais e todas as suas propriedades decorrem dos Axiomas de Peano. Para tal, é dado um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de números naturais e, uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ o valor $s(n) = n + 1$, chamado de sucessor de n.

Axiomas de Peano

- Axioma 1: A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetora.
- Axioma 2: Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Axioma 3: (Princípio de Indução) Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $\forall x \in \mathbb{X}$, têm-se que $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

- A partir disto, entendemos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots n, \cdots\}$. No entanto, se escolhermos 0 como aquele elemento que não é sucessor de nenhum outro número, teremos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots n, \cdots\}$ e nesse caso usamos $\mathbb{N}^*$ para representar $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots n, \cdots\}$

- Uma formulação equivalente do princípio de indução, muito mais popular no ambiente matemático, é a seguinte:

Teorema

Primeiro Princípio de Indução Finita (PIF)) Seja $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, uma função proposicional, tal que:

1) *$p(1)$ é verdadeira.*
2) *Se $p(k)$ é verdadeira para $k \in \mathbb{N}$ pudermos cocluir que $p(k+1)$ também é verdadeira, então $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo

Prove que $1 + 2 + \cdots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração.

Feito no quadro. $\square$