Projeto com fatorial 2^k

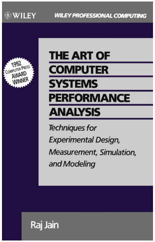
André Gustavo dos Santos

Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF222 - 2022/2

– Fonte do material

O conteúdo é baseado no livro texto da disciplina (cap. 17):



Jain, Raj.
The art of computer systems performance analysis: techniques for experimental design, measurement, simulation, and modeling.
John Wiley & Sons, 1990

UFV

Tópicos da aula

Projeto fatorial 2^k

- Teste para k fatores, cada um com 2 níveis
- Em geral usado em estudo preliminar, antes de estudos mais detalhados
- Cada fator é representado por seu nível mínimo e máximo
- Ajuda a classificar os fatores em ordem de importância
- Pode fornecer um “insight” da interação entre eles

- Muito usado quando os fatores têm efeitos unidirecionais
- Isto é, o efeito aumenta à medida que o nível do fator aumenta (ou vice-versa)
- Ex.: o desempenho aumenta à medida que se aumenta a memória disponível
- Um teste com nível mínimo e máximo ajuda a identificar se a diferença de desempenho é significativa o suficiente para um exame mais detalhado

Projeto fatorial 2^2

- Um projeto de experimentos 2^2 é um caso especial do fatorial 2^k com $k = 2$
- Nesse caso, há apenas 2 fatores com 2 níveis cada
- Pode ser analisado facilmente com um modelo de regressão não-linear
- Os conceitos desenvolvidos ajudarão a entender o 2^k para $k > 2$

UFV

Projeto fatorial 2^2

Exemplo fatorial 2^2

A tabela ao lado mostra o desempenho de um sistema em MIPS em diferentes configurações. Vamos estudar o efeito dos fatores.

	Memória (GB)	
Cache(KB)	4	16
2	15	45
8	25	75

- Sejam as variáveis x_A e x_B definidas a seguir:

$$x_A = \begin{cases} -1 & \text{se 4GB de memória} \\ +1 & \text{se 16GB de memória} \end{cases} \qquad x_B = \begin{cases} -1 & \text{se 2KB de cache} \\ +1 & \text{se 8KB de cache} \end{cases}$$

- O desempenho pode ser descrito por um modelo de regressão não-linear:

$$y = q_0 + q_A x_A + q_B x_B + q_{AB} x_A x_B$$

- Substituindo as 4 observações:

$$15 = q_0 - q_A - q_B + q_{AB}$$
$$45 = q_0 + q_A - q_B - q_{AB}$$
$$25 = q_0 - q_A + q_B - q_{AB}$$
$$75 = q_0 + q_A + q_B + q_{AB}$$

- O sistema tem solução única: $y = 40 + 20x_A + 10x_B + 5x_A x_B$
- O desempenho médio é 40 MIPS, o efeito da memória é de 20 MIPS, da cache é de 10 MIPS e da interação entre memória e cache é de 5 MIPS

Projeto fatorial 2^2 – computação de efeitos

- De forma geral, todo projeto fatorial 2^2 pode ser analisado como no exemplo
- Sejam y_1, y_2, y_3, y_4 as 4 respostas observadas, conforme tabela a seguir

Experimento	A	B	y
1	-1	-1	y_1
2	$+1$	-1	y_2
3	-1	$+1$	y_3
4	$+1$	$+1$	y_4

- O modelo para o projeto fatorial 2^2 é $y = q_0 + q_A x_A + q_B x_B + q_{AB} x_A x_B$
- Substituindo as quatro observações temos:
  $y_1 = q_0 - q_A - q_B + q_{AB}$
  $y_2 = q_0 + q_A - q_B - q_{AB}$
  $y_3 = q_0 - q_A + q_B - q_{AB}$
  $y_4 = q_0 + q_A + q_B + q_{AB}$
- Resolvendo o sistema para os q's encontramos:
  $q_0 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/4$
  $q_A = (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4)/4$
  $q_B = (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)/4$
  $q_{AB} = (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)/4$
- As expressões para q_A, q_B e q_{AB} são chamadas **contrastes** e são combinações lineares das observações de tal forma que a soma dos coeficientes é zero
- Note que os coeficientes dos y's na expressão do q_A têm os mesmos sinais da tabela, então q_A é multiplicação das colunas A e y. Também vale para q_B e q_{AB}

Projeto fatorial 2^2 – computação de efeitos

Método da tabela de sinais para computação dos efeitos

1. Preparar uma matriz 4×4
   - A primeira coluna, I, é preenchida com $+1$
   - As duas seguintes, A e B, têm todas as combinações de -1 e $+1$
   - A quarta, AB, é a multiplicação das colunas A e B
2. Acrescentar uma coluna y com os resultados das observações correspondentes
3. Acrescentar uma linha com a soma da multiplicação das colunas I, A, B, AB por y
4. Acrescentar uma linha com o valor do total dividido por 4 (são os coeficientes q)

I	A	B	AB	y
$+1$	-1	-1	$+1$	15
$+1$	$+1$	-1	-1	45
$+1$	-1	$+1$	-1	25
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	75
160	80	40	20	Total
40	20	10	5	Total/4
q_0	q_A	q_B	q_{AB}	

** geralmente o valor 1 não é escrito explicitamente na matriz, basta colocar os sinais $+$ e $-$*

UFV

Projeto fatorial 2^2 – alocação de variação

- A importância de um fator pode ser medida pela proporção da variação no resultado da observação explicada pelo fator
- Ex.: se dois fatores explicam 90 e 5% do resultado, o segundo pode ser considerado como sem importância em muitas situações práticas
- Determinar a importância de cada fator é útil para decidir que fatores precisam ser estudados em mais detalhes, principalmente quando há muito fatores

Projeto fatorial 2^2 – alocação de variação

- A variância amostral de y é dada por

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2^2} (y_i - \bar{y})^2}{2^2 - 1}$$

sendo $\bar{y}$ a média amostral de y (média das observações dos 4 experimentos)

- o numerador é chamado variação total, SST (*sum of squares total*)

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^{2^2} (y_i - \bar{y})^2$$

- Em um projeto 2^2 a variação pode ser dividida em 3 partes[1]:

$$\text{SST} = 2^2 q_A^2 + 2^2 q_B^2 + 2^2 q_{AB}^2$$

que representam a porção da variação explicada pelos fatores A, B e sua interação AB. São chamados de soma dos quadrados devido a A, B e AB.

$$\text{SST} = \text{SSA} + \text{SSB} + \text{SSAB}$$

onde SSA = $2^2 q_A^2$, etc.

[1] se estiver interessado, o livro texto mostra o desenvolvimento da expressão anterior até esta

Projeto fatorial 2^2 – alocação de variação

- As partes SSA, SSB e SSAB podem ser expressas como uma fração do total:

$$\text{Fração da variação total explicada pelo fator A} = \frac{\text{SSA}}{\text{SST}}$$

e, de forma similar, $\frac{\text{SSB}}{\text{SST}}$ e $\frac{\text{SSAB}}{\text{SST}}$.

- Fatores que explicam alta porcentagem da variação são fatores importantes
- Note que **variação não é o mesmo que variância**!
- Um fator que explica 60% da variação não necessariamente explica 60% da variância total de y
- É bastante difícil calcular a porcentagem de variância, mas a porcentagem de variação é fácil de se calcular e de explicar para tomadores de decisão

Projeto fatorial 2^2 – alocação de variação

Exemplo fatorial 2^2 (cont...)

- No exemplo dos fatores memória e cache no desempenho do sistema temos:

$$\bar{y} = \frac{15 + 45 + 25 + 75}{4} = 40$$

$$\text{variação total SST} = \sum_{i=1}^{4} (y_i - \bar{y})^2 = (-25)^2 + (5)^2 + (-15)^2 + (35)^2 =$$

$$= 2100 = 4 \times 20^2 + 4 \times 10^2 + 4 \times 5^2$$

- O total de variação é SST=2100, sendo SSA=1600 (76%) explicado pelo fator *A*, SSB=400 (19%) pelo fator *B* e apenas SSAB=100 (5%) pela interação entre eles

- Essas porcentagens de variação ajudam o experimentador a decidir se é importante prosseguir uma investigação detalhada de algum fator ou interação
- Nesse exemplo, a interação memória-cache (5%) parece ser insignificante
- O fator tamanho da memória merece mais investigação, já que explica 76% da variação; já o tamanho da cache é menos importante, explica 19%

Projeto fatorial 2^2 – exemplo

Escolha de tipo de interconexão e padrão de acesso de memória

- Interconexão: Omega ou Crossbar?
- Acesso: aleatório ou matriz?
- Outros fatores (número de processadores, controle de fila, ...) mantidos fixos

Símbolo	Fator	Nível -1	Nível $+1$
A	Tipo de conexão	Crossbar	Omega
B	Padrão de acesso	Aleatório	Matriz

- Métricas de desempenho: *throughput* (T), banda passante (P) e latência (L)
- A seguir os resultados observados de cada métrica nos 4 experimentos:

Fatores		Resposta		
A	B	T	P	L
-1	-1	0.6041	3	1.655
$+1$	-1	0.7922	2	1.262
-1	$+1$	0.4220	5	2.378
$+1$	$+1$	0.4717	4	2.190

Projeto fatorial 2^2 - exemplo

Escolha de tipo de interconexão e padrão de acesso de memória (cont...)

- Computação de efeitos e alocação da variação

	T	P	L
q_0	0.5725	3.5	1.871
q_A	0.0595	-0.5	-0.145
q_B	-0.1257	1.0	0.413
q_{AB}	-0.0346	0.0	0.051

Fração da variação (%)

T	P	L
17.2	20	10.9
77.0	80	87.8
5.8	0	1.3

  - O *throughput* médio é 0.5725 e é mais afetado pelo padrão de acesso, que causa uma diferença de ∓ 0.1257, que explica 77% da variação
  - O tipo de interconexão contribui 0.0595 no *throughput* (tipo Omega aumenta esse valor e tipo Crossbar diminui esse valor, então a diferença total entre os tipos é 0.1190)
  - A escolha do tipo de interconexão é afetada pelo padrão de acesso, pois há pequena interação (dependendo da combinação, o *throughput* aumenta ou diminui 0.0346)
  - A banda passante também é mais afetada pelo padrão de acesso usado
  - Como q_A é negativo para P, a banda passante é maior para A = -1 (Crossbar). Isso se aplica a qualquer padrão de acesso, pois não há interação entre os fatores ($q_{AB} = 0$).
  - A latência é afetada principalmente pelo padrão de acesso usado e há uma ligeira interação entre o padrão de acesso e o tipo de interconexão.

Projeto com fatorial 2^k

- Os conceitos mostrados para fatorial 2^2 podem ser estendidos para 2^k
- Dados k fatores, com dois níveis cada, temos um total de 2^k experimentos
- Dos 2^k efeitos, k são dos fatores, $\binom{k}{2}$ das interações de 2 fatores, $\binom{k}{3}$ das interações de 3 fatores, ...
- O método da tabela de sinais para computação de efeitos continua válido
- O método para alocação de variação também pode ser estendido

Projeto com fatorial 2^k

Desempenho por tamanho de memória, cache e número de processadores

No projeto de um computador para operar um sistema, três fatores são considerados: tamanho da memória, da cache e número de processadores. Os fatores e níveis são:

Fator	Nível -1	Nível $+1$
A - tamanho da memória	4 GB	32 GB
B - tamanho da cache	2 KB	8 KB
C - número de processadores	1	2

O projeto de experimentos 2^3 e as medidas de desempenho observadas foram:

	4 GB		32 GB	
Cache (KB)	1 proc.	2 proc.	1 proc.	2 proc.
2	14	46	22	58
8	10	50	34	86

Projeto com fatorial 2^k

Desempenho por tamanho de memória, cache e número de processadores (cont...)

- Computação de efeitos

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	y
1	–1	–1	–1	1	1	1	–1	14
1	1	–1	–1	–1	–1	1	1	22
1	–1	1	–1	–1	1	–1	1	10
1	1	1	–1	1	–1	–1	–1	34
1	–1	–1	1	1	–1	–1	1	46
1	1	–1	1	–1	1	–1	–1	58
1	–1	1	1	–1	–1	1	–1	50
1	1	1	1	1	1	1	1	86
320	80	40	160	40	16	24	9	Total
40	10	5	20	5	2	3	1	Total/8

Projeto com fatorial 2^k

Desempenho por tamanho de memória, cache e número de processadores (cont...)

- Alocação da variação

$$
\begin{aligned}
\text{SST} &= 2^3(q_A^2 + q_B^2 + q_C^2 + q_{AB}^2 + q_{AC}^2 + q_{BC}^2 + q_{ABC}^2) \\
&= 8(10^2 + 5^2 + 20^2 + 5^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2) \\
&= 800 + 200 + 3200 + 200 + 32 + 72 + 8 \quad = 4512
\end{aligned}
$$

- A porção de variação explicada pelos 7 efeitos é
  - A, tamanho da memória: 800/4512 (18%)
  - B, tamanho da cache: 200/4512 (4%)
  - C, número de processadores: 3200/4512 (71%)
  - AB, memória-cache: 200/4512 (4%)
  - AC, memória-processador: 32/4512 (1%)
  - BC, cache-processador: 72/4512 (2%)
  - ABC, memória-cache-processador: 8/4512 (0%) – pode até ser ignorada

Projeto com fatorial $2^k r$

- Um problema com o fatorial 2^k é que não é possível estimar erros experimentais
- Isso ocorre porque os experimentos não são repetidos
- Então também não é possível calcular intervalos de confiança
- Erros experimentais podem ser estimados repetindo-se as medições para uma mesma combinação de níveis de fatores
- Se cada um dos 2^k experimentos é replicado r vezes, teremos $2^k r$ observações
- Esse é o projeto $2^k r$, fatorial com replicações *(próxima aula...)*