MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Solução aproximada da equação de uma única variável real $x : f(x) = 0$.

UMA PREPARAÇÃO

Dada uma equação $f(x) = 0$, é sempre possível obter uma outra equação $x = \varphi(x)$, tal que as duas equações sejam equivalentes em algum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, sendo f e φ funções reais.

Seja, por exemplo, a equação $x^2 - 7x = 0$. Neste caso, temos: $f(x) = x^2 - 7x$.

I: $x^2 - 7x = 0 \Longrightarrow x^2 = 7x \overset{x \geq 0}{\Longrightarrow} x = \sqrt{7x}$. Assim: $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{7x}$, para $x \geq 0$.

$$\boxed{\text{Portanto: } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x), \text{ para } x \geq 0, \text{ onde } \varphi(x) = \sqrt{7x}}$$

II: $x^2 - 7x = 0 \Longrightarrow 7x = x^2 \Longrightarrow x = \frac{x^2}{7}$. Assim: $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{x^2}{7}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Portanto: } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ onde } \varphi(x) = \frac{x^2}{7}}$$

III: $x^2 - 7x = 0 \Longrightarrow x^2 - 7x + x = x \Longrightarrow x = x^2 - 6x$.

Assim: $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = x^2 - 6x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Portanto: } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ onde } \varphi(x) = x^2 - 6x.}$$

HÁ UMA INFINIDADE DE FUNÇÕES φ

Dada uma equação $f(x) = 0$, é sempre possível obter infinitas funções φ tais que ocorra a equivalência $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$, em algum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, sendo f e φ funções reais.

De fato:

Seja a equação $f(x) = 0$.

Considere uma função qualquer $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, tal que $h(x) \neq 0$ para todo x.

Multiplicando os dois lados da equação por $h(x)$, temos:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x)f(x) = 0$$

Somando x nos dois lados da segunda equação equivalente, temos:

$$x + h(x)f(x) = x, \text{ ou seja: } x = h(x)f(x) + x$$

$\boxed{\text{Portanto: } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x), \text{ para todo } x \in D_f, \text{ onde } \varphi(x) = h(x)f(x) + x}$

O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Suponhamos que a equação $f(x) = 0$ seja equivalente a uma equação $x = \varphi(x)$ em um intervalo I, sendo f e φ funções contínuas em I.

Vamos construir uma sequência $(x_n), n = 0,1,2 \ldots$, do seguinte modo:

O termo x_0 é um ponto qualquer do intervalo I.

Os demais termos da sequência são dados por:

$x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2)$,..., e assim por diante.

De modo geral: $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2 \ldots$

Suponhamos que esta sequência convirja para um número real x^*.

O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \xRightarrow{\varphi \text{ é } contínua} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

$$\Longrightarrow x^* = \varphi(x^*)$$

x^* é chamado de ponto fixo de φ

Mas $x^* = \varphi(x^*)$ significa que x^* é solução da equação $x = \varphi(x)$.

Como a equação $f(x) = 0$ é equivalente à equação $x = \varphi(x)$, segue que x^* é também solução da equação $f(x) = 0$.

Logo, a sequência obtida pela fórmula $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2 \ldots, x_0 \in I,$ é candidata a uma sequência de aproximações para uma solução da equação $f(x) = 0$.

Considerando que a equação $f(x) = 0$ tenha uma solução única $\bar{x}$ em I, pode-se mostrar que: se φ for derivável em I e tal que $|\varphi'(x)| < 1$, para todo $x \in I$, então a sequência dada por $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2 \ldots$, com $x_0 \in I$, é, de fato, convergente, e converge para $\bar{x}$.

O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

O Método das Aproximações Sucessivas (Método do Ponto Fixo) segue assim:

Seja a equação $f(x) = 0$, com solução única $\bar{x}$ num intervalo I onde f é contínua.

Obtemos uma equação $x = \varphi(x)$ equivalente à equação $f(x) = 0$, com φ contínua em I.

Construímos uma sequência $(x_n), n = 0{,}1{,}2 \ldots$, assim:

O termo x_0 é um ponto qualquer do intervalo I.

Os demais termos da sequência são dados por: $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0{,}1{,}2 \ldots$

- Se a função φ for derivável em I e tal que $|\varphi'(x)| < 1$, para todo $x \in I$, então podemos garantir que a sequência converge para a solução $\bar{x}$.

- Se as condições acima não forem satisfeitas, a sequência pode convergir ou não.

CRITÉRIO DE PARADA NO MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Podemos adotar, aqui, o mesmo critério de parada do Método da Bisseção, baseado no erro (absoluto ou relativo) entre dois termos consecutivos da sequência de aproximações.

Usando o erro absoluto:

Se $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro absoluto menor que ε.

Usando o erro relativo:

Se $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro relativo menor que ε.

EXEMPLO

Considere a equação $cosx - x = 0$, que tem uma solução única $\bar{x}$ em $[0,1]$.

Caso I

Como, de modo imediato, $cosx - x = 0 \Leftrightarrow x = cosx$, vamos considerar, aqui, $\varphi(x) = cosx$ para construir a sequência.

A função φ é derivável em $[\ 0,1]$, sendo $\varphi'(x) = -senx$

É fácil ver que $|\varphi'(x)| = |-senx| = |senx| = senx < 1$ para todo $x \in [0,1]$

Assim, há garantia de convergência da sequência de aproximações sucessivas a ser construída com a função φ acima.

Vamos tomar $x_0 = 0.7$, que pertence ao intervalo $[0,1]$, e obter uma aproximação tal que o erro relativo seja menor que $\varepsilon = 0.01$.

EXEMPLO

Caso I $\varphi(x) = cosx, x_0 = 0.7, \varepsilon = 0.01$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0.7) = \cos(0.7) = 0.7648 \qquad \boxed{\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 0.0847 > \varepsilon}$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(0.7648) = \cos(0.7648) = 0.7215 \qquad \boxed{\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.0600 > \varepsilon}$$

$$x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(0.7215) = \cos(0.7215) = 0.7508 \qquad \boxed{\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0390 > \varepsilon}$$

EXEMPLO

$$x_4 = \varphi(x_3) = \varphi(0.7508) = \cos(0.7508) = 0.7311 \qquad \boxed{\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.0269 > \varepsilon}$$

$$x_5 = \varphi(x_4) = \varphi(0.7311) = \cos(0.7311) = 0.7444 \qquad \boxed{\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.0179 > \varepsilon}$$

$$x_6 = \varphi(x_5) = \varphi(0.7444) = \cos(0.7444) = 0.7355 \qquad \boxed{\frac{|x_6 - x_5|}{|x_6|} = 0.0121 > \varepsilon}$$

$$x_7 = \varphi(x_6) = \varphi(0.7355) = \cos(0.7355) = 0.7415 \qquad \boxed{\frac{|x_7 - x_6|}{|x_7|} = 0.0081 < \varepsilon}$$

$\boxed{\bar{x} \cong x_7 = 0.7415, \text{ com erro relativo menor que } \varepsilon = 0.01}$

EXEMPLO

Caso II

Multiplicando os dois lados da equação por 2 e, depois, somando x de cada lado, temos:

$$cosx - x = 0 \Leftrightarrow 2cosx - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2cosx - x$$

Vamos, então, considerar, agora, o caso $\varphi(x) = 2cosx - x$.

A função φ é derivável em $[\ 0{,}1]$, sendo $\varphi'(x) = -2senx - 1$

$|\varphi'(x)| = |-2senx - 1| = |2senx + 1| = 2senx + 1 \geq 1$ para todo $x \in [0{,}1]$

Logo, não há garantia de convergência da sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ a ser construída com a função φ acima.

Vamos tomar $x_0 = 0.7$ e construir alguns termos da sequência:

EXEMPLO

Caso II $\varphi(x) = 2cosx - x,\, x_0 = 0.7$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0.7) = 2\cos(0.7) - 0.7 = 0.8297$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(0.8297) = 2\cos(0.8297) - 0.8297 = 0.5205$$

$$x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(0.5205) = 2\cos(0.5205) - 0.5205 = 1.2146$$

$$x_4 = \varphi(x_3) = \varphi(1.2146) = 2\cos(1.2146) - 1.2146 = -0.5172$$

$$x_5 = \varphi(x_4) = \varphi(-0.5172) = 2\cos(-0.5172) - (-0.5172) = 2.2556$$

Continuando os cálculos, observaremos que a sequência não converge.