MAT146 - Cálculo I - Teorema do Valor Médio

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Motivação

Suponha que uma função real f, definida em um intervalo I, seja derivável em todo I. Sabemos que se f é uma função constante, então $f' \equiv 0$. Mas, se g é também uma função real definida em I, com $g' \equiv 0$, então g também é uma função constante?

De forma mais geral, se duas funções reais, definidas em I, tem derivadas iguais em todo I, existe alguma relação entre elas?

Com o intuito de responder a estas questões, apresentaremos a seguir o Teorema do Valor Médio. Porém, antes de apresentar esse Teorema, apresentaremos um caso especial, o Teorema de Rolle, que é usado para demonstrar o Teorema do Valor Médio.

Teorema (Teorema de Rolle)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a, b). *Se* $f(a) = f(b)$, *então existe* $c \in (a, b)$, *tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Na figura abaixo o gráfico de f cruza a reta horizontal $y = f(a)$ em dois pontos diferentes. O que o Teorema de Rolle diz é que existe um ponto c entre a e b, cuja derivada de f em c é zero, ou seja, a reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(c, f(c))$ é paralela a reta $y = f(a)$.

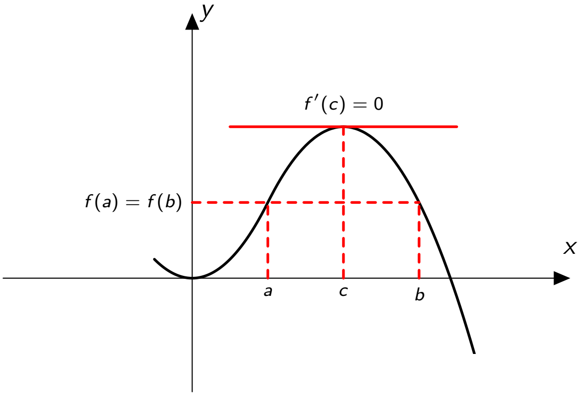

Figura : Ilustração do Teorema de Roole

Demonstração: Por hipótese, $f(a) = f(b)$ e existe a derivada de f em todo intervalo aberto (a, b). Como f é contínua em $[a, b]$, f possui máximo e mínimo em $[a, b]$.

Se f é constante, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ e o Teorema está provado.

Se f não é constante, como $f(a) = f(b)$, devemos ter ou o mínimo ou o máximo de f ocorrendo no interior de $[a, b]$. Digamos que o máximo ocorra em um ponto $c \in (a, b)$, neste caso c é um ponto de máximo local, de onde devemos ter $f'(c) = 0$. O mesmo raciocínio vale para o caso do mínimo ocorrer no interior de $[a, b]$. $\blacksquare$

Teorema (Teorema do Valor Médio)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a, b). *Então existe* $c \in (a, b)$, *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Na figura abaixo esboçamos o gráfico de f e a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Essa reta é o gráfico da função g dada por

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

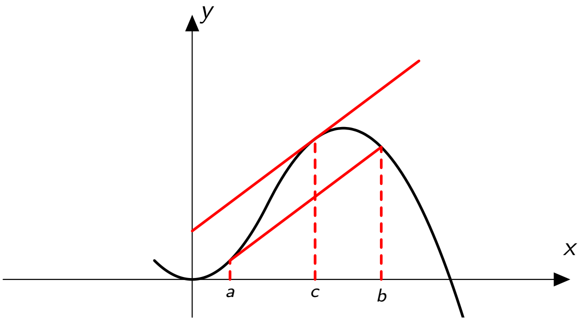

Figura : Ilustração do Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio afirma que existe $c \in (a, b)$ tal que a derivada de f em $x = c$, $f'(c)$, é a inclinação da reta g.

Demonstração: Considere a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(x) - g(x),$$

onde g é dada acima. Note que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Além disso, temos $h(a) = h(b) = 0$. Assim, pelo Teorema de Rolle, temos $h'(c) = 0$ em algum ponto $c \in (a, b)$. Então

$$\begin{aligned} h'(c) &= f'(c) - g'(c) \\ 0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Interpretação Física

O número $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pode ser interpretado fisicamente, como a variação média de f em $[a, b]$. O número $f'(c)$ é a variação instantânea. O Teorema do Valor Médio nos diz que em algum ponto interior de $[a, b]$, a variação instantânea deve ser igual a variação média de f no intervalo $[a, b]$.

Exemplo

Se um carro começa a acelera a partir de zero e leva $10\ s$ *para percorrer* $400\ m$, *sua velocidade média nesse percurso é* $40\ m/s$. *O Teorema do valor médio nos diz que em algum instante* t_0 *do intervalo de tempo* $(0, 10)$, *a velocidade deste carro deverá ser exatamente* $40\ m/s$, *ou* $144\ km/h$. *Note que, se* s *é a função deslocamento do carro então* s' *é velocidade, assim*

$$s''(t_0) = \frac{s(10)-s(0)}{10-0} = \frac{400-0}{10} = \frac{400}{10} = 40.$$

Consequências do TVM

Corolário

Se f é uma função derivável em (a, b), com $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é uma função constante.

Demonstração: Sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$ números distintos quaisquer. Suponha que $x_1 < x_2$. Note que f é contínua e derivável em (x_1, x_2). Pelo TVM existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0.$$

Segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Isto vale para qualquer par $x_1, x_2 \in (a, b)$. Portanto f é uma função constante. ∎

Corolário

Sejam f e g funções definidas e deriváveis em (a, b). Se $f'(x) = g'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe uma constante c tal que

$$f(x) = g(x) + c$$

para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração: Seja $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Então

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,$$

para todo $x \in (a, b)$. Pelo corolário anterior, temos $h(x) = c$, ou seja

$$f(x) - g(x) = c.$$

$\blacksquare$

Exemplo

Determine a função cuja derivada é $f'(x) = 2x + 1$ e que o seu gráfico contenha o ponto $(0, 1)$.

Solução: *Note que a derivada de x^2 é $2x$ e a derivada de x é 1. Assim, a função $h(x) = x^2 + x$ tem derivada $h'(x) = 2x + 1$. Mas note que $h(0) = 0$, ou seja, o gráfico de h não contém o ponto $(0, 1)$.*
Pelo primeiro corolário, a função f procurada satisfaz $f(x) = h(x) + c$. Portanto,

$$f(0) = h(0) + c = 1.$$

De onde obtemos $c = 1$. Segue que a função procurada é

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

∎

Exemplo

Seja $v = \frac{ds}{dt}$ *a velocidade de um corpo que se desloca ao longo de uma reta. Se* $v(t) = sen(\pi t)$, *determine a posição do corpo no instante* t, *sabendo que a posição inicial do corpo é dada por* $s(0) = 0$.

Solução: *Sabemos que*

$$S(t) = \frac{-cos(\pi t)}{\pi} + k$$

possui derivada igual a v, *onde* k *é uma constante. Então,*

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 = \frac{-cos(0)}{\pi} + k \\ &\Rightarrow k = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Portanto

$$S(t) = \frac{1 - cos(\pi t)}{\pi}.$$

■

Exemplo

Seja $g(x) = x^2 + 2x - 1$ *definida no intervalo* $[0, 1]$. *Determine o valor de* c *que satisfaça a seguinte equação*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Solução: *Temos* $f'(x) = 2x + 2$ *e desta forma,* $f'(c) = 2c + 2$. *Então*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - (-1)}{1} = 3.$$

Portanto,

$$f'(c) = 2c + 2 = 3$$

$$c = \frac{1}{2}.$$

■

Exemplo

Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ *possui exatamente uma solução entre* 1 *e* 2.

Exemplo

Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ *possui exatamente uma solução entre* 1 *e* 2.

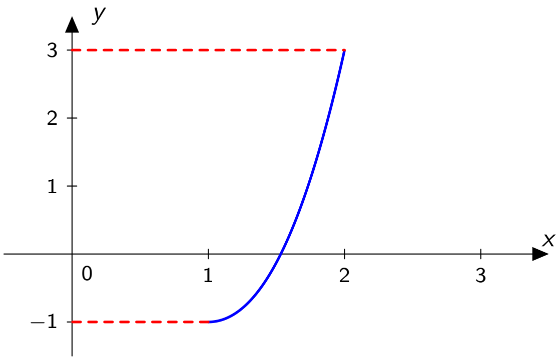

Figura : Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$