

# MAT146 - Cálculo I - Taxas de Variação

Alexandre Miranda Alves  
Anderson Tiago da Silva  
Edson José Teixeira

Observe que até o momento,  $\frac{dy}{dx}$  tem sido visto apenas como uma notação para a derivada da equação  $y = f(x)$ . O que faremos agora é interpretar  $\frac{dy}{dx}$  como um quociente entre dois acréscimos. Inicialmente, olharemos  $dx$  como sendo um acréscimo em  $x$  e determinaremos o significado de  $dy$ .

Como  $f'(x)$  é o coeficiente angular da reta tangente  $T$  no ponto  $(x, f(x))$  e  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ , se olharmos para  $dy$  como o acréscimo na ordenada da reta tangente  $T$ , correspondente ao acréscimo de  $dx$  em  $x$ , teremos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Observe pela figura que  $f'(x) = \tan(\alpha) = \frac{dy}{dx}$ . Logo,

$$dy = f'(x)dx.$$

Assim, fixado o valor  $x$ , podemos olhar para a função linear, que a cada  $dx \in R$ , associa  $dy \in R$ , onde  $dy = f'(x)dx$ . Tal função, denomina-se diferencial de  $f$  em  $x$ , ou simplesmente, diferencial de  $y = f(x)$ .

### Exemplo

Dado  $y = x^2$ . Iremos relacionar  $\Delta y$  com  $dy$ .

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)' = 2x.$$

Logo,  $dy = 2xdx$ .

Por outro lado,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + dx^2.$$

Portanto,

$$\Delta y - dy = (dx)^2.$$

Observe que quanto menor for  $dx$ , mais próximo  $dy$  estará de  $\Delta y$ .

## Exemplo

Ainda para  $y = x^2$ , calcularemos um valor aproximado para o acréscimo  $\Delta y$ , quando  $x$  passa de  $x = 1$  para  $x + dx = 1,001$ .

A diferencial de  $y = x^2$  em  $x$  é dada por

$$dy = 2xdx.$$

Em  $x = 1$ ,  $dy = 2dx$ . Como

$$x + dx = 1,001 \text{ e } x = 1, \text{ então } dx = 0,001.$$

Logo,  $dy = 0,002$ .

Pensando em  $\Delta y$ , temos

$$\Delta y = ((1,001)^2 - (0,001)^2) = 0,002001.$$

## Exemplo (Continuação)

Portanto, o erro que cometemos em aproximar  $dy$  de  $\Delta y$  é

$$\Delta y - dy = 0,000001.$$

## Exemplo

Através do diferencial, iremos agora calcular um valor aproximado para  $\sqrt{1,01}$ .

Considere a função  $y = \sqrt{x}$ . Calculemos  $dy$  para  $x = 1$  e  $dx = 0,01$ .

Sabemos que  $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ . Para  $x = 1$  temos  $dy = \frac{1}{2}dx$ . Logo,

$$dy = \frac{0,01}{2} = 0,005.$$

## Exemplo (continuação)

Logo,  $1 + dy = 1,005$  é um valor aproximado para  $\sqrt{1,01}$ , com erro em módulo inferior a 0,001.

Já vimos que se a seguinte equação

$$s = f(t),$$

representa a distância percorrida por uma partícula em um período de tempo  $t$  por exemplo em segundos e a distância em metros, então

$f'(t)$  representa a taxa de variação instantânea de  $f(t)$  em relação a  $t$ ,  
a qual chamaremos de **velocidade**, dada em  $m/s$ .

$f''(t)$  representa a taxa de variação instantânea da velocidade no instante  $t$ ,  
dada em  $(m/s)/s$ , que indicaremos  $m/s^2$ . Em Física,  $f''(t)$  é chamada de  
**aceleração instantânea**.

Suponha uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento  $s = f(t)$ , onde a velocidade instantânea é dada por  $v$  em m/s e a aceleração instantânea é dada por  $a$  em m/s<sup>2</sup>. Neste caso temos

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{2}$$

onde

$$\frac{da}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

## Exemplo

Um ponto se move ao longo do gráfico  $y = x^2 + 1$  de modo que sua abscissa  $x$  varia a uma velocidade constante de 3cm/s. Qual é, quando  $x = 4$ (cm), a velocidade da ordenada  $y$ ?

Neste caso,  $x$  e  $y$  representam funções sobre o tempo e queremos saber a velocidade de  $y$  no instante  $t_0$ , onde  $x(t_0) = 4$ , ou seja,

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_0}.$$

Através da regra da cadeia, derivando  $y = x^2 + 1$ , obtemos

$$\frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}.$$

## Exemplo (Continuação)

Como  $\frac{dx}{dt} = 3$ , temos

$$\frac{dy}{dt} = 6x.$$

No instante  $t_0$ , temos  $x(t_0) = 4$  e assim,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm/s}$$

## Exemplo

Um ponto  $P$  mové-se sobre a elipse  $4x^2 + y^2 = 1$ . Sabe-se que as coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  de  $P$  são funções definidas e deriváveis num intervalo  $I$ . Verificaremos que  $\frac{dy}{dt} = \frac{-4x}{y} \frac{dx}{dt}$  em todo  $t \in I$ , com  $y(t) \neq 0$ .

De fato,

$$\frac{d}{dt}(4x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(1)$$

$$8x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$y\frac{dy}{dt} = -4x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-4x}{y} \frac{dx}{dt}$$