DECOMPOSIÇÃO LU: OUTRAS ESTRATÉGIAS

MAT 271 – Cálculo Numérico – UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

DECOMPOSIÇÃO LU DE UMA MATRIZ (OUTRAS DUAS POSSIBILIDADES)

Vimos, em aula anterior que, dada uma matriz $n \times n$ $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, se todos os seus menores principais Δ_k, para $k = 1,2,\ldots,n-1$, forem não-nulos, então a matriz A pode ser decomposta de forma única como $A = LU$, onde:

$L = \left(l_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ é uma matriz triangular inferior tal que : $l_{ii} = 1$, para todo i e
$U = \left(u_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ é uma matriz triangular superior.

A condição $l_{ii} = 1$, par todo $i = 1,2,\ldots,n$ é uma condição simplificadora (simplifica os cálculos dos elementos das matrizes L e U), e faz com que a primeira linha da matriz U coincida com a primeira linha da matriz A.

DECOMPOSIÇÃO LU DE UMA MATRIZ

O crucial para garantir a decomposição LU de uma matriz $A_{n\times n}$ é que seus menores principais até a ordem $n-1$ sejam todos não nulos.

Assim, temos, em princípio, as matrizes

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

tais que $A = LU$, e usamos este fato para determinar tais matrizes.

DECOMPOSIÇÃO LU DE DOOLITTLE

$$LU = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A igualdade acima vai gerar equações envolvendo l_{ij} e u_{ij} (os elementos de L e de U a serem determinados), que serão equações não-lineares com incógnitas l_{ij} e u_{ij}.

Por exemplo: a multiplicação da primeira linha de L pela primeira coluna de U nos leva à equação

$$l_{11}u_{11} = a_{11}$$

Nesta equação (não-linear), a_{11} é conhecido e l_{11}e u_{11} são desconhecidos (a serem determinados), sendo infinitas as suas soluções. Uma dessas infinitas soluções é: $l_{11} = 1, u_{11} = a_{11}$.

A ideia de escolher, de maneira geral, $l_{ii} = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$, surge, então, de modo natural.

Temos, neste caso, a DECOMPOSIÇÃO LU DE DOOLITTLE.

DECOMPOSIÇÃO LU DE CROUT

$$LU = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Voltando à equação: $l_{11}u_{11} = a_{11}$:

Das suas infinitas soluções, poderíamos escolher também a solução: $l_{11} = a_{11}, u_{11} = 1$.

A ideia de escolher, de maneira geral, $u_{ii} = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$, surge, então, de modo natural.

Assim, as condições simplificadoras passam a ser sobre os elementos da diagonal da matriz U:
$u_{ii} = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Neste caso, a primeira coluna de L coincide com a primeira coluna de A.

Temos, neste caso, a DECOMPOSIÇÃO LU DE CROUT.

DECOMPOSIÇÃO LU: DE DOOLITTLE E DE CROUT

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

DECOMPOSIÇÃO LU DE DOOLITTLE $(detA = detU)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & l_{32} & l_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

DECOMPOSIÇÃO LU DE CROUT $(detA = detL)$

EXEMPLO

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (Exemplo 1 da aula anterior) .

Como já vimos, A admite a decomposição $A = LU.$

Vamos usar a decomposição LU de Crout:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 1 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 1 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(primeira linha de L)x (segunda coluna de U): $2u_{12} = 0$ $\boxed{u_{12} = 0}$

(primeira linha de L)x (terceira coluna de U): $2u_{13} = 1$ $\boxed{u_{13} = 1/2}$

(segunda linha de L)x (segunda coluna de U): $1l_{22} = 2$ $\boxed{l_{22} = 2}$

(segunda linha de L)x (terceira coluna de U): $l_{22}u_{23} = 1 \implies 2u_{23} = 1$ $\boxed{u_{23} = 1/2}$

(terceira linha de L)x (segunda coluna de U): $1u_{12} + 1l_{32} = 1$ $\boxed{l_{32} = 1}$

(terceira linha de L)x (terceira coluna de U): $1u_{13} + l_{32}u_{23} + 1l_{33} = 3 \implies 1/2 + 1/2 + 1l_{33} = 3$ $\boxed{l_{33} = 2}$

$$\boxed{L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \qquad \boxed{U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

COMPARANDO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = LU$$

DECOMPOSIÇÃO LU DE DOOLITTLE:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

DECOMPOSIÇÃO LU DE CROUT:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EM CADA UMA DAS ESTRATÉGIAS, AS MATRIZES L E U SÃO ÚNICAS.

OBS: Há também a DECOMPOSIÇÃO LU DE CHOLESKY. Nesta, tem-se $l_{ii} = u_{ii}$, ou seja, as diagonais de L e U são iguais, sendo possível se a matriz A for ***simétrica*** ($A^t = A$) e ***definida positiva***, isto é, todos os seus menores principais são positivos.