Integrais Impróprias

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2022-2

Na definição de integral definida, consideramos a função no integrando contínua em um intervalo fechado e limitado. Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:
(i) Funções definidas em intervalos do tipo: $[a, \infty), (-\infty, b]$ ou $(-\infty, \infty)$, ou seja, para todo $x \geq a$ ou $x \leq b$ ou para todo $x \in \mathbb{R}$, respectivamente.
(ii) A função no integrando não está definida ou é descontínua em um ou mais pontos.

As integrais destas funções são chamadas **integrais impróprias**. As integrais impróprias são de grande utilidade em diversos ramos da Matemática como por exemplo, na solução de equações diferenciais ordinárias via transformadas de Laplace e no estudo das probabilidades, em Estatística.

Exemplos de Integrais Impróprias:

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$;

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$;

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$;

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$;

(v) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$.

Definição 1

(i) Se f é contínua em $[a, \infty)$, então:
$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, desde que o limite exista;

(ii) Se f é contínua em $(-\infty, b]$, então:
$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, desde que o limite exista;

(iii) Se f é contínua em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, então: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx$, $c \in \mathbb{R}$, desde que os limites existam. Geralmente toma-se $c = 0$ para facilitar nas contas.

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas **convergentes**; caso contrário são ditas **divergentes**.

Teste da Comparação I: Sejam f e g contínuas em $[a, \infty)$ tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$.

(i) Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge, então $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge;

(ii) Se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

A prova, segue diretamente das definições. Seja $f(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$. Para mostrar a convergência da integral de f, é preciso que f seja menor que uma função cuja integral converge. Para mostrar a divergência da integral de f, é preciso que f seja maior que uma função cuja integral diverge.

Analise a convergência das integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x + 2}{\sqrt{x}}\, dx;$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx;$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^5 + 3x + 1}\, dx;$

(d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\ln\, x}\, dx;$

Definição 2

(i) Se f é continua em $(a, b]$, então:
$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$, desde que o limite exista;

(ii) Se f é continua em $[a, b)$, então:
$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$, desde que o limite exista;

(iii) Se f é continua em $[a, b]$, exceto em c tal que $a < c < b$, então: $\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)\,dx$, desde que os limites existam.

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas **convergentes**; caso contrário são ditas **divergentes**.

Analise a convergência das integrais abaixo. Se convergir, determine seu valor.

(a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\ln\, x\,dx$;

Teste da Comparação II: Sejam f e g funções contínuas em $[a, b)$ tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$.

(i) Se $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, então $\int_a^b g(x)\,dx$ converge;

(ii) Se $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, então $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Para o caso f e g funções contínuas em $(a, b]$, também se aplica o teste.

A prova, segue diretamente das definições. Seja $f(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$. Para mostrar a convergência da integral de f, é preciso que f seja menor que uma função cuja integral converge. Para mostrar a divergência da integral de f, é preciso que f seja maior que uma função cuja integral diverge.

Analise a convergência das integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec\, x}{x^3}\, dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{x^{2/3}}\, dx;$

Definição 3

Uma **integral imprópria** $\int_a^b f(x)dx$, ($a, b \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ e $b = \infty$ ou $a = -\infty$ e $b \in \mathbb{R}$ ou $a \in \mathbb{R}$ e $b = \infty$) é chamada **absolutamente convergente** se $\int_a^b |f(x)|\, dx$ for **convergente**.

Teorema 1: Sejam a e b como na definição acima. Se $\int_a^b |f(x)|\, dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x)\, dx$ é convergente.

Analise a convergência das integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{sen\, x}{5x^2}\, dx$;

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^3}\, dx$.

Teste da Comparação III: Sejam $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$ funções contínuas. Se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L,\ \ 0 < L < \infty,$$

então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ serão ambas convergentes ou ambas divergentes.

Analise a convergência da integral abaixo.

$$\int_1^\infty \frac{3}{e^x - 2}\,dx.$$

- LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. I e II*, São Paulo, Editora Harbra: 1990.
- STEWART, J. *Cálculo - vol I e II*, São Paulo, Thomson Learning: 2002.