INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE NEWTON

MAT 271 – Cálculo Numérico – UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE NEWTON

Seja a função f tal que os valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ de um intervalo $[x_0, x_n]$ são conhecidos.

Propõe-se um polinômio interpolador de $f(x)$, como um polinômio $p_n(x)$ de grau menor ou igual a n da seguinte forma:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Sendo d_k , $k = 0,1,2, \ldots , n$, constantes reais (coeficientes do polinômio interpolador de Newton) obtidas como veremos a seguir.

OBTENDO OS $d_k, k = 0,1,2, \dots, n$

- $p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$

$p_n(x_i) = f(x_i), i = 0,1,2, \dots, n \qquad \Longrightarrow$

$$d_0 = f(x_0)$$

$$d_0 + d_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$d_0 + d_1(x_2 - x_0) + d_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$\vdots$$

$$d_0 + d_1(x_n - x_0) + d_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + d_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = f(x_n)$$

OBTENDO OS $d_k, k = 0,1,2,\dots,n$

$$\boxed{d_0 = f(x_0)}$$

$$d_0 + d_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \quad \Longrightarrow \quad d_1 = \frac{f(x_1) - d_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \boxed{d_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

$$d_0 + d_1(x_2 - x_0) + d_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad d_2 = \frac{f(x_2) - d_1(x_2 - x_0) - d_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{d_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}} \qquad \dots$$

OBSERVE QUE OS COEFICIENTES d_k SÃO OBTIDOS POR DIVISÕES ENTRE AS DIFERENÇAS DAS ORDENADAS DIVIDAS PELAS DIFERENÇAS ENTRE AS ABSCISSAS DOS PONTOS DADOS. O QUE NOS LEVA AO CONCEITO DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS.

DIFERENÇAS DIVIDIDAS

NOTAÇÃO: $f[\quad]$

DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE ORDEM ZERO: $f[x_i] = f(x_i), i = 0,1,\dots,n$

$$f[x_0] = f(x_0) \qquad f[x_1] = f(x_1) \qquad f[x_2] = f(x_2) \qquad \dots \qquad f[x_n] = f(x_n)$$

DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE ORDEM UM: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}, i = 0,1,\dots,n$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\dots \qquad f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_n] - f[x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

DIFERENÇAS DIVIDIDAS

DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE ORDEM DOIS

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, i = 0,1, \dots, n$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$\dots \qquad f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}$$

$$\vdots$$

DIFERENÇA DIVIDIDA DE ORDEM n

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2 \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

VOLTANTO AOS d_k

$d_0 = f[x_0]$ PRIMEIRA DIFERENÇA DIVIDIDA DE ORDEM ZERO

$d_1 = f[x_0, x_1]$ PRIMEIRA DIFERENÇA DIVIDIDA DE ORDEM UM

$d_2 = f[x_0, x_1, x_2]$ PRIMEIRA DIFERENÇA DIVIDIDA DE ORDEM DOIS

$\vdots$

$d_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ÚNICA DIFERENÇA DIVIDIDA DE ORDEM n

ILUSTRANDO O CÁLCULO DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS COM O USO DE TABELA (CASO $n = 3$)

$$p_3(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

DIFERENÇAS DIVIDIDAS – CASO PARTICULAR $n = 3$

x	$f(x)$	ORDEM ZERO	ORDEM UM	ORDEM DOIS	ORDEM TRÊS
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0)$			
			$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
			$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_3)$			

$\boxed{d_0 = f(x_0)}$ $\boxed{d_1 = f[x_0, x_1]}$ $\boxed{d_2 = f[x_0, x_1, x_2]}$ $\boxed{d_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$

EXEMPLO 1

x	-1	0	1	3
$f(x)$	2	-1	2	32

x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
-1	2	2			
			$\frac{-1-2}{0-(-1)}=-3$		
				$\frac{3-(-3)}{1-(-1)}=3$	
0	-1	-1			
			$\frac{2-(-1)}{1-0}=3$		$\frac{4-3}{3-(-1)}=\frac{1}{4}$
1	2	2			
				$\frac{15-3}{3-0}=4$	
			$\frac{32-2}{3-1}=15$		
3	32	32			

EXEMPLO 1

x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
-1	2	2			
			-3		
0	-1	-1		3	
			3		
					1/4
1	2	2			
				4	
			15		
3	32	32			

$$p_3(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)\,(x - x_1) + d_3(x - x_0)\,(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = 2 - 3(x + 1) + 3(x + 1)x + \frac{1}{4}(x + 1)\,x(x - 1)$$

EXEMPLO 2

Da aula anterior:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Encontramos
$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS		
x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2
-1	4	4		
			-3	
0	1	1		2/3
			-1	
2	-1	-1		

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)\,(x - x_1)$$

$$p_2(x) = 4 - 3(x + 1) + \frac{2}{3}(x + 1)x$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

RESOLVENDO UM PROBLEMA DE INTERPOLAÇÃO SEM USAR TODOS OS PONTOS DISPONÍVEIS

A tabela abaixo nos mostra alguns valores da função f definida $f(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$.

x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

Vamos obter um valor aproximado do valor de f para $x = 0.0378$, com um polinômio interpolador de grau 2 e com um polinômio interpolador de grau 3, usando a interpolação de Newton.

I – POLINÔMIO DE GRAU 2

x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

Precisamos de 3 pontos da tabela. Como $x = 0.0378$ está entre 0.03 e 0.04, podemos usar $x_0 = 0.03$, $x_1 = 0.04$ e $x_2 = 0.05$ para construir o polinômio interpolador de Newton.

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS		
x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2
0.03	2.9591	2.9591		
			-27.78	
0.04	2.6813	2.6813		322
			-21.34	
0.05	2.4679	2.4679		

$$p_2(x) = 2.9591 - 27.78(x - 0.03) + 322(x - 0.03)(x - 0.04)$$

$$p_2(0.0378) = 2.7369$$

$$\boxed{f(0.0378) \cong 2.7369}$$

II – POLINÔMIO DE GRAU 3

x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

Precisamos de 4 pontos da tabela. Vamos usar agora $x_0 = 0.02$, $x_1 = 0.03$, $x_2 = 0.04$ e $x_3 = 0.05$ para construir o polinômio interpolador de Newton (o importante é que $0.03 < 0.0378 < 0.04$).

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS			
x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
0.02	3.3547	3.3547			
			-39.56		
0.03	2.9591	2.9591		589	
			-27.78		-8900
0.04	2.6813	2.6813		322	
			-21.34		
0.05	2.4679	2.4679			

II – POLINÔMIO DE GRAU 3

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS			
x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
0.02	3.3547	3.3547			
			-39.56		
0.03	2.9591	2.9591		589	
			-27.78		-8900
0.04	2.6813	2.6813		322	
			-21.34		
0.05	2.4679	2.4679			

$$p_3(x) = 3.3547 - 39.56(x - 0.02) + 589(x - 0.02)(x - 0.03) - 8900(x - 0.02)(x - 0.03)(x - 0.04)$$

$$p_3(0.0378) = 2.7350$$

$$\boxed{f(0.0378) \cong 2.7350}$$

COMPARANDO

x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

POLINÔMIO DE GRAU 2: $\boxed{f(0.0378) \cong 2.7369}$

POLINÔMIO DE GRAU 3: $\boxed{f(0.0378) \cong 2.7350}$

POLINÔMIO DE GRAU 5 (TODOS OS PONTOS): $\boxed{f(0.0378) \cong 2.7361}$

(FAÇAM!!)

UMA IMPORTANTE PROPRIEDADE DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Seja uma função f cujos valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ de um intervalo $[x_0, x_n]$ são conhecidos

Como vimos, as diferenças divididas de ordem 1 de f são dadas por:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, i = 0,1, \ldots, n.$$

Observe que: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f[x_i] - f[x_{i+1}]}{x_i - x_{i+1}} = f[x_{i+1}, x_i]$

Ou seja: permutar os elementos x_n usados na obtenção de uma diferença divida de ordem 1 não altera o seu valor: $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$, $f[x_1, x_2] = f[x_2, x_1] \ldots$

Se considerarmos as diferenças divididas de ordem 2 de f, chegaremos à mesma conclusão: permutar os elementos x_n usados na obtenção de uma diferença divida de ordem 2 não altera o seu valor:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0]$$

UMA IMPORTANTE PROPRIEDADE DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

De maneira geral, temos o seguinte resultado:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}],$$

onde $j_0, j_1, \ldots, j_n$ é uma permutação qualquer de $0, 1, \ldots, n$.