# INTEGRAÇÃO NUMÉRICA:

# REGRA 3/8 DE SIMPSON

MAT 271 – Cálculo Numérico – UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo  DMA/UFV

# RESOLVER DE FORMA APROXIMADA UMA INTEGRAL DEFINIDADA

Consideremos que $f$ seja uma função integrável no intervalo $[a, b]$.

Vamos aprender, aqui, mais uma técnica para calcular, de forma aproximada, a integral definida

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

Trata-se da Regra 3/8 de Simpson, baseada na aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador $p_3(x)$, de grau $\leq 3$ , no intervalo $[a, b]$, de modo que:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_3(x)dx\,.$$

# REGRA 3/8 DE SIMPSON

Para obter um polinômio interpolador de grau $\leq 3$ de $f(x)$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em três subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{3}$, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$, sendo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h \text{ e } x_3 = x_2 + h = b.$$

Usando, por exemplo, a interpolação de Newton, obtemos:

$$p_3(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

onde $d_0$, $d_1$, $d_2$ e $d_3$ são as primeiras diferenças divididas de ordens zero, um, dois e três respectivamente.

# REGRA 3/8 DE SIMPSON

Resolvendo a integral $\int_a^b p_3(x)dx$, obtemos:

$$\int_a^b p_3(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)].$$

Temos, então, a aproximação, chamada de Regra 3/8 de Simpson (Caso Simples):

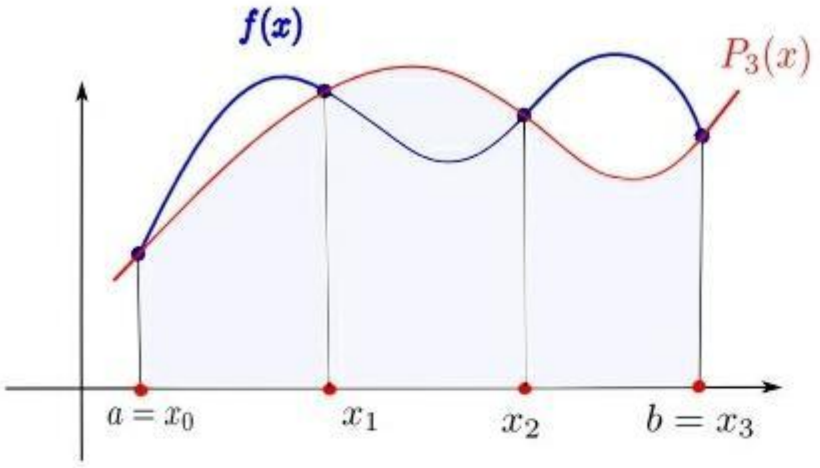
$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)],$$

onde: $h = \frac{b-a}{3}$; $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$ e $x_3 = b$.

# REGRA 3/8 DE SIMPSON (CASO SIMPLES)

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\boxed{f(x) > 0}$$




A ÁREA SOB O GRÁFICO DE $f$ NO INTERVALO $[a, b]$ É APROXIMADA

PELA ÁREA SOB O GRÁFICO DO POLINÔMIO INTERPOLADOR $p_3(x)$.

# EXEMPLO 1

Aplicar a Regra 3/8 de Simpson no cálculo aproximado da integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$.

Temos: $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$, $b = 4$; $h = \frac{4-1}{3} = 1$, e temos: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{3}{8}[f(1) + 3f(2) + 3f(3) + f(4)] = 0.375\left[1 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2\right] = 4.6645474$$

$$\boxed{\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6645474}$$

EXATO

$$\boxed{\int_1^4 \sqrt{x}dx = 4.6666666}$$

# REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \ldots n$, ($n$ múltiplo de 3) de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$ .

Daí, obtemos $n + 1$ pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ do intervalo $[a, b]$, sendo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots, x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Assim, como $f$ é integrável em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx \, .$$

# REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx \,.$$

Aplicamos, então, a Regra 3/8 de Simpson (Caso Simples) a cada integral do lado direito, que é uma integral de $f(x)$ num intervalo $[x_{i-3}, x_i], i = 3,6, \dots, n$:

$$\int_{x_{i-3}}^{x_i} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-2}) + 3f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

A Regra 3/8 de Simpson (Caso Simples) é aplicada a cada trio de intervalos consecutivos:

$$[x_{i-3}, x_{i-2}], [x_{i-2}, x_{i-1}], [x_{i-1}, x_i], \; i = 3,6, \dots, n.$$

Por isto o número de subintervalos deve ser múltiplo de 3.

# REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \int_{x_6}^{x_9} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-6}}^{x_{n-3}} f(x)dx + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_{x_{i-3}}^{x_i} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-2}) + 3f(x_{i-1}) + f(x_i)],, i = 3, \dots, n.$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \cong \sum_{\substack{i=3 \\ i=3k \\ k\epsilon\mathbb{N}^*}}^{n} \frac{3h}{8}[f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-2}) + 3f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

# REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\int_{x_3}^{x_6} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)]$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}\Bigg[f(x_0) + 3\sum_{\substack{i \neq 3k \\ k \epsilon \mathbb{N}}} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=3k \\ k \epsilon \mathbb{N} \\ i \neq 0,n}} f(x_i) + f(x_n)\Bigg]}$$

# REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2) + \cdots . + f(x_{n-1})) + 2(f(x_3) + f(x_6) + \cdots . + f(x_{n-3})) + f(x_n)]}$$

$n \geq 6, n$ múltiplo de 3

# REGRA 3/8 DE SIMPSON

Regra 3/8 de Simpson Generalizada: $n \geq 6, n$ múltiplo de 3

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0)\ + 3(f(x_1) + f(x_2) + \cdots . + f(x_{n-1})) + 2(f(x_3) + f(x_6) + \cdots . + f(x_{n-3})) + f(x_n)]$$

Regra 3/8 de Simpson Simples: $n = 3$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0)\ + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

# EXEMPLO 2

Aplicar a Regra 3/8 de Simpson, com $n = 6$, para calcular a integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$.

Temos: $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$, $b = 4$;

$h = \frac{4-1}{6} = 0.5$, e temos: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2.5$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3.5$ e $x_6 = 4$.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)) + 2f(x_3) + f(x_6)]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{3 \times 0.5}{8}[f(1) + 3(f(1.5) + f(2) + f(3) + f(3.5)) + 2f(2.5) + f(4)]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 0.1875\left[1 + 3\left(\sqrt{1.5} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3.5}\right) + 2\sqrt{2.5} + 2\right] = 4.6664609$$

# COMPARANDO

VALOR EXATO DA INTEGRAL: $\boxed{\int_1^4 \sqrt{x}dx = 4.6666666}$

VALORES APROXIMADOS DA INTEGRAL COM A REGRA 3/8 DE SIMPSON:

$\boxed{(n = 3): \int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6645474}$

$\boxed{(n = 6): \int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6664609}$

VALOR APROXIMADO DA INTEGRAL COM A REGRA 1/3 DE SIMPSON:

$\boxed{(n = 4): \int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6662207}$

FAÇAM!!

$\boxed{(n = 6): \int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6665631}$

FAÇAM!!

# SOBRE O ERRO ABSOLUTO NAS TRÊS REGRAS

A partir de hipóteses adequadas sobre a função $f$, é possível obter limitantes superiores para o erro absoluto $|E|$ nas três regras numéricas de integração vistas:

TRAPÉZIO ($n \in \mathbb{N}$)

$$|E| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f^{(2)}(x)|, x \in [a,b]\}$$

1/3 DE SIMPSON ($n \in \mathbb{N}$, $n$ par )

$$|E| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}$$

3/8 DE SIMPSON ($n \in \mathbb{N}$, $n$ múltiplo de 3 )

$$|E| \leq \frac{h^4}{80}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}$$

# SOBRE O ERRO ABSOLUTO NAS TRÊS REGRAS

TRAPÉZIO ($n \in \mathbb{N}$) $$|E| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f^{(2)}(x)|, x \in [a,b]\}$$

1/3 DE SIMPSON ($n \in \mathbb{N}$, $n$ par ) $$|E| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}$$

3/8 DE SIMPSON ($n \in \mathbb{N}$, $n$ múltiplo de 3 ) $$|E| \leq \frac{h^4}{80}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}$$

A partir de cada uma das desigualdades acima, é possível estabelecer um número mínimo $n$ de subintervalos que nos garanta que, ao aplicar uma dada Regra para resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, o erro absoluto cometido na aproximação seja menor que um dado $\varepsilon > 0$.

Por exemplo, ao se calcular de forma aproximada a integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ por cada uma das regras, podemos chegar aos seguintes números mínimos de subintervalos que garantem que o erro absoluto seja menor que $\varepsilon = 0.001$:

Trapézio: $n = 24$.

1/3 de Simpson: $n = 6$.

3/8 de Simpson: $n = 9$.