

# MAT146 - Cálculo I - Extremos Locais e Globais

Alexandre Miranda Alves  
Anderson Tiago da Silva  
Edson José Teixeira

Vimos que a derivada de uma função em um ponto é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função neste ponto. Usaremos agora a derivada como ferramenta para auxiliar no esboço de gráficos. Para isso, precisaremos de algumas definições e teoremas.

## Definição

A função  $f$  terá um valor máximo relativo em  $c$  se existir um intervalo aberto contendo  $c$ , no qual  $f(x)$  esteja definida, tal que

$$f(c) \geq f(x)$$

para todo  $x$  no intervalo. Neste caso, dizemos que  $f(c)$  é valor máximo relativo de  $f$ .

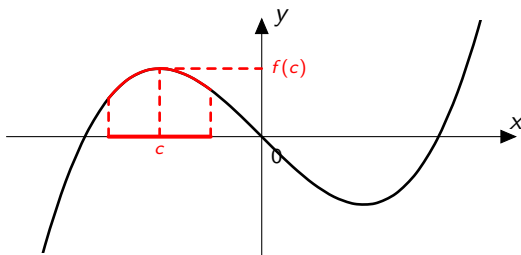


Figura : Máximo Relativo

## Exemplo

Seja  $f(x) = -x^2 + 3$ .

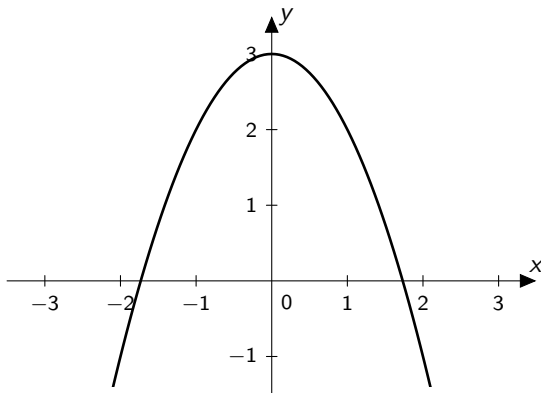


Figura : Gráfico da função  $f(x) = -x^2 + 3$ .

Pelo gráfico fica claro que  $f$  terá um máximo relativo em 0. Vejamos analiticamente isto. Como  $x^2 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então

$$-x^2 \leq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$-x^2 + 3 \leq 3, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \leq f(0), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Desta forma,  $x = 0$  é um ponto de máximo relativo e  $f(0) = 3$  é valor máximo relativo.

## Exemplo

Seja  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ . O gráfico de  $f$  é dado abaixo.

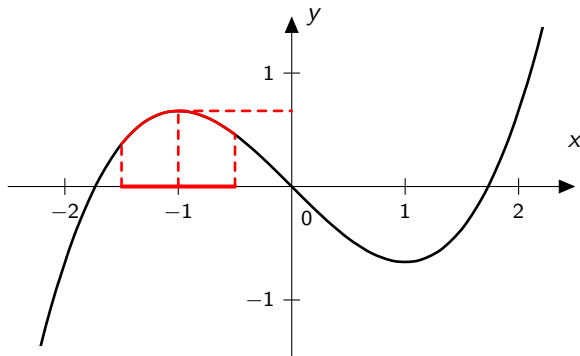


Figura : Gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ .

A função  $f$  terá um máximo relativo em  $x = -1$ , pois  $-1 \in (-1.5, -0.5)$  e

$$f(-1) \geq f(x), \quad \text{para todo } x \in (-1.5, -0.5).$$

Neste caso,  $x = -1$  é um ponto de máximo relativo e  $f(-1)$  é o valor de mínimo relativo.

## Definição

A função  $f$  terá um valor mínimo relativo em  $c$  se existir um intervalo aberto contendo  $c$ , no qual  $f(x)$  esteja definida, tal que

$$f(c) \leq f(x)$$

para todo  $x$  no intervalo. Neste caso, dizemos que  $f(c)$  é valor mínimo relativo de  $f$ .

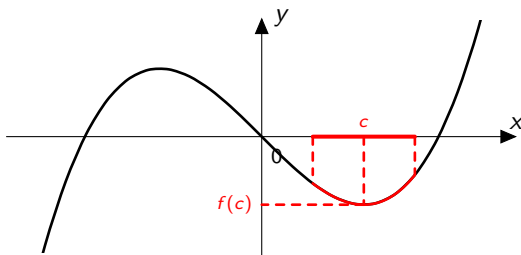


Figura : Mínimo Relativo

Seja  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ . O gráfico de  $f$  é dado abaixo.

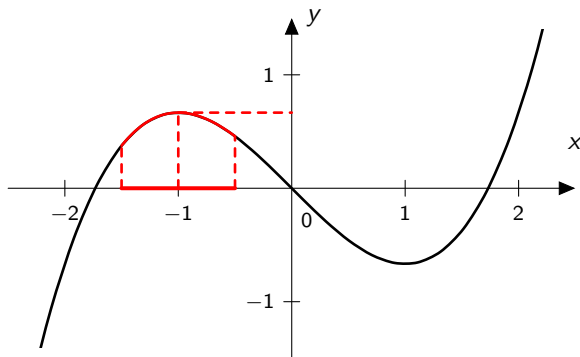


Figura : Gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ .

A função  $f$  tem um mínimo relativo em  $x = 1$ , pois  $1 \in (0.5, 1.5)$  e

$$f(1) \leq f(x), \quad \text{para todo } x \in (0.5, 1.5).$$

Neste caso,  $f(1)$  é o valor de mínimo relativo.

## Teorema

*Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Se  $f$  possui um extremo relativo em  $c \in (a, b)$  e  $f$  é derivável em  $c$ , então  $f'(c) = 0$ .*

## Observação

*A interpretação geométrica deste teorema é que se  $f$  tiver um extremo relativo em  $c$ , e se  $f'(c)$  existir, então o gráfico de  $f$  tem reta tangente horizontal no ponto onde  $x = c$ .*

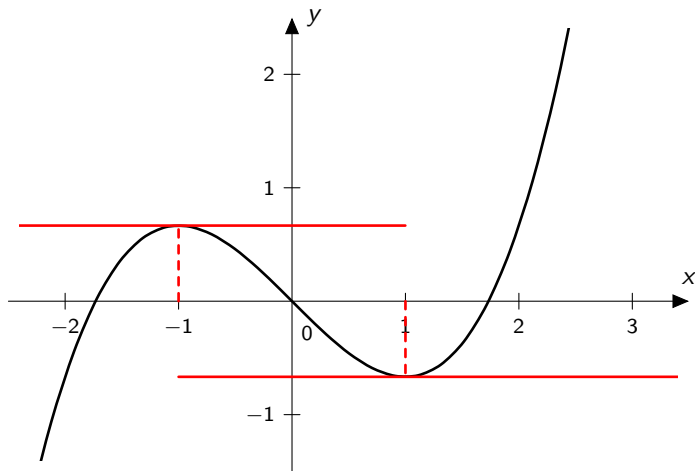


Figura : Reta tangente horizontal

Ilustraremos a seguir um exemplo onde não vale a recíproca do teorema, ou seja,  $f'(c) = 0$ , mas  $f$  não tem um extremo relativo em  $c$ .

### Exemplo

Considere a função definida por  $f(x) = (x - 3)^3$ . Observe que  $f'(x) = 3(x - 3)^2$  e assim  $f'(3) = 0$ .

Porém,

$$f(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 3$$

e

$$f(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 3.$$

Logo,  $f$  não tem um extremo relativo em  $x = 3$ .

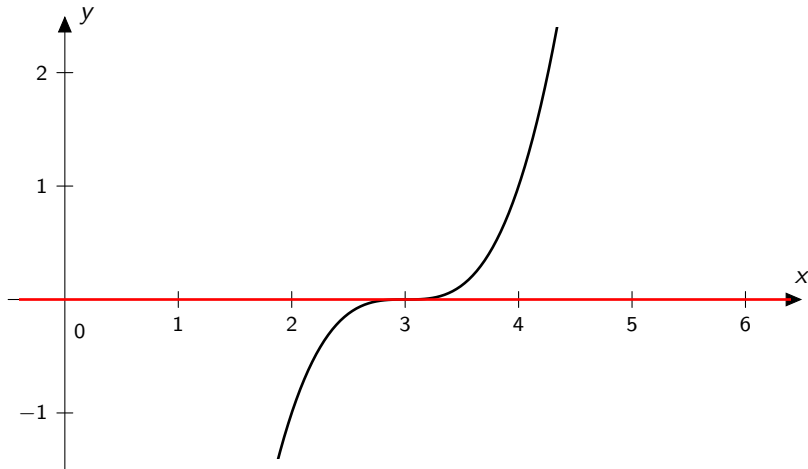


Figura : Gráfico da função  $f(x) = (x - 3)^3$ .

## Exemplo

Considere a função  $f(x) = (x - 3)^2$ . Como

$$f(x) > f(3) = 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

então  $f$  tem um mínimo relativo em  $x = 3$ . Além disso, a função  $f$  é derivável. Pelo teorema anterior devemos ter

$$f'(3) = 0.$$

Isto de fato ocorre uma vez que

$$f'(x) = 2(x - 3).$$

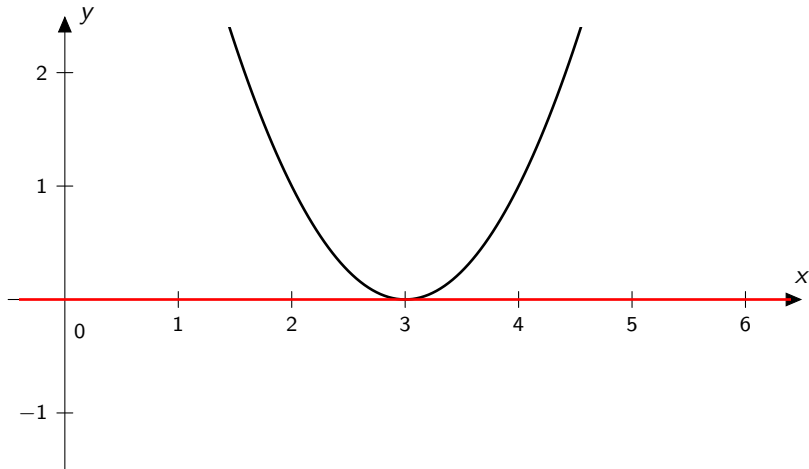


Figura : Gráfico da função  $f(x) = (x - 3)^2$ .

## Definição

Sejam  $f$  uma função real e  $c \in \text{Dom}(f)$ . Diremos que  $x=c$  é um número crítico de  $f$  se

$$f'(c) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(c) \text{ não existir.}$$

Neste caso, o ponto  $(c, f(c))$  será chamado de ponto crítico de  $f$ .

## Exemplo

Encontre os números críticos da função  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x + 1) \\ &= \frac{4(x + 1)}{3(x^{\frac{2}{3}})}. \end{aligned}$$

Observe que

$$f'(x) = 0, \quad \text{para } x = -1$$

e

$$f'(x) \quad \text{não existe para } x = 0.$$

Logo,  $x = -1$  e  $x = 0$  são os únicos números críticos da função  $f$ .

## Definição

*Uma função  $f$  terá um valor máximo absoluto em  $I \subset \mathbb{R}$ , se existir algum número  $c \in I$ , tal que*

$$f(c) \geq f(x),$$

*para todo  $x \in I$ . Neste caso,  $f(c)$  será o valor máximo absoluto de  $f$  no intervalo.*

## Definição

*Uma função  $f$  terá um valor mínimo absoluto em  $I \subset \mathbb{R}$ , se existir algum número  $c \in I$ , tal que*

$$f(c) \leq f(x),$$

*para todo  $x \in I$ . Neste caso,  $f(c)$  será o valor mínimo absoluto de  $f$  no intervalo.*

## Exemplo

Seja  $f(x) = 2x$  definida no intervalo  $[-1, 4)$ .

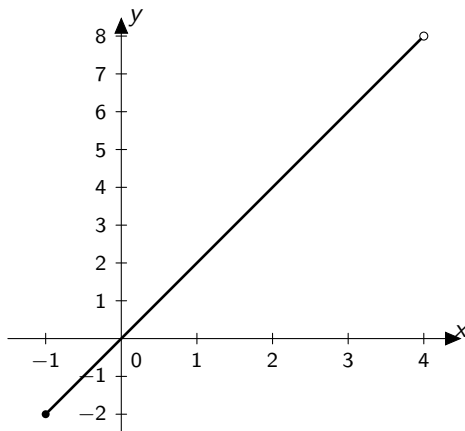


Figura : Gráfico da função  $f(x) = 2x$ , no intervalo  $[-1, 4)$ .

A função em questão não possui valor máximo absoluto em  $[-1, 4)$ . De fato, observe que como  $x < 4$ , então  $f(x) < 8$ . Mais ainda, para qualquer  $-2 \leq d < 8$ , basta tomar  $c = \frac{d+8}{4} \in [-1, 4)$  que obtemos

$$d < f(c) = \frac{d+8}{2} < 8.$$

A função  $f$  tem um valor mínimo absoluto em  $x = -1$ , pois

$$f(-1) = -2 \leq 2x,$$

para qualquer  $x \in [-1, 4)$ .

## Exemplo

A função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$  não possui valor máximo absoluto e nem valor mínimo absoluto em  $(-1, 1)$ . Observe que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

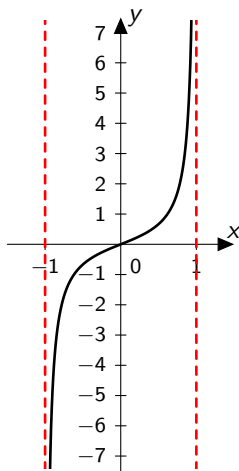


Figura : Gráfico da função  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$  no intervalo  $(-1, 1)$ .

Podemos falar de um extremo absoluto de uma função mesmo que não seja especificado um intervalo. Em tal caso, estaremos nos referindo ao extremo absoluto da função em todo o seu domínio.

## Definição

*Diremos que  $f(c)$  é o valor máximo absoluto da função  $f$*

$$f(c) \geq f(x),$$

*para todos os valores de  $x$  no domínio de  $f$ .*

## Definição

*Diremos que  $f(c)$  é o valor mínimo absoluto da função  $f$*

$$f(c) \leq f(x),$$

*para todos os valores de  $x$  no domínio de  $f$ .*

## Exemplo

Considere a função  $f(x) = -x^2 - 2x - 2$ . O gráfico de  $f(x)$  é dado por

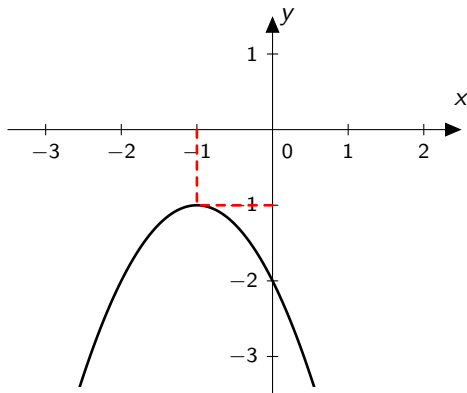


Figura : Gráfico da função  $f(x) = -x^2 - 2x - 2$ .

Uma vez que a função  $f$  pode ser escrita como

$$f(x) = -(x + 1)^2 - 1,$$

temos

$$f(x) \leq -1 = f(-1),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Daí,  $f(-1) = -1$  é o valor de mínimo absoluto de  $f$ .

Vimos que, em geral, não podemos garantir que uma função possua máximo ou mínimo. O próximo resultado nos garante condições suficientes para que uma função  $f$  assuma tanto mínimo global quanto máximo global.

## Teorema (Teorema do Valor Extremo)

*Se uma função  $f$  é contínua no intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ , então  $f$  terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em  $[a, b]$ .*

O valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo  $[a, b]$  podem ser encontrados através do seguinte procedimento:

- (i) Ache os valores da função nos números críticos de  $f$  em  $(a, b)$ .
- (ii) Ache os valores de  $f(a)$  e  $f(b)$ .
- (iii) O maior dentre os valores das etapas (i) e (ii) será o valor máximo absoluto e o menor será o mínimo absoluto.

## Exemplo

*Vamos determinar os extremos absolutos (máximos e mínimos absolutos) da função*

$$f(x) = (x - 2)^{\frac{2}{3}}$$

*no intervalo  $[1, 5]$ .*

*Como  $f$  é contínua em  $[1, 5]$ , o teorema do valor extremo pode ser aplicado e nos garante a existência de um valor de máximo absoluto e um valor de mínimo absoluto de  $f$  em  $[1, 5]$ .*

*Uma vez que*

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{\frac{1}{3}}},$$

*concluimos que  $f'(x) \neq 0$ , para todo  $x$  real (e em particular para  $x \in (1, 5)$ ), e  $f'(x)$  não existe para  $x = 2 \in (1, 5)$ .*

Assim,  $x = 2$  é o único número crítico de  $f$  em  $(1, 5)$ . Desta forma, os extremos absolutos da função ocorrem em  $x = 2$  ou nos extremos do intervalo.

Como

$$f(1) = 1,$$

$$f(2) = 0$$

e

$$f(5) = \sqrt[3]{9},$$

podemos concluir que  $f(2) = 0$  é o valor mínimo absoluto e  $f(5) = \sqrt[3]{9}$  é o valor máximo absoluto de  $f$ .