

EDO de 2^a Ordem

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2022-2

Definição 1

Uma EDO de segunda ordem tem a forma:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

A EDO (??) é dita **linear** se a função f pode ser escrita como

$$f(x, y, y') = g(x) - p(x)y' - q(x)y.$$

Assim, a EDO (??) se torna

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x).$$

Lembremos que, no caso em que $g(x) = 0$, a EDO é homogênea.

Definição 2

Uma EDO homogênea com coeficientes constantes é dada por

$$ay'' + by' + cy = 0, \text{ com } a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Uma solução para a EDO (??) é $y(x) = e^{rx}$, onde r é raiz de

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (3)$$

A equação (??) é chamada **equação característica** da EDO (??).

1º Caso: As raízes r_1 e r_2 da equação (??) são reais e distintas.

Neste caso, $y(x) = e^{r_1 x}$ e $y(x) = e^{r_2 x}$ são soluções de (??) e portando $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, com $A, B \in \mathbb{R}$, também é solução de (??).

Exemplos: Resolva as EDO's abaixo.

- (a) $y'' + y' - 2y = 0$;
- (b) $2y'' - 6y' + 4y = 0$;
- (c) $y'' + 2y' - 3y = 0$.
- (d) $2y'' - 3y' + y = 0$;
- (e) $4y'' - 9y' = 0$;
- (f) $y'' - 2y' - 2y = 0$.

Considere a EDO homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4)$$

Teorema (Princípio da Superposição): Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de (??), então

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, também é solução de (??). Vamos chamar a solução $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ de solução geral da EDO. Posteriormente explicaremos porque essa solução é chamada assim.
Exemplo: Determine a solução geral da EDO $y'' - 2y' - 15y = 0$.

Teorema (D'Alembert): Sejam $y_1(x)$ uma solução, não nula, da EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (5)$$

então a substituição $y(x) = v(x)y_1(x)$ transforma a EDO (??) em uma EDO linear homogênea de ordem 1 para $v' = \frac{dv}{dx}$. Além disso, se $v_1(x)$ é uma solução, não nula, dessa EDO de ordem 1, então $v_1(x)y_1(x)$ é outra solução de (??). Assim, toda solução de (??) é da forma $y(x) = Ay_1(x) + Bv_1(x)y_1(x)$, com $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Verifique que $y_1(x) = x$ é solução da EDO $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ e depois determine a solução geral da EDO.

2º Caso: As raízes r_1 e r_2 da equação $ar^2 + br + c = 0$ são reais e iguais, ou seja, $r_1 = r_2 = r$.

Neste caso, $y_1(x) = e^{rx}$ e $y_2(x) = v(x)e^{rx}$ são soluções da EDO $ay'' + by' + cy = 0$ e portanto qualquer solução da EDO é da forma $y(x) = Ae^{rx} + Bv(x)e^{rx}$, com $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Determine a solução geral da EDO $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

3º Caso: As raízes r_1 e r_2 da equação $ar^2 + br + c = 0$ são complexas conjugadas, ou seja, $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i$. Neste caso, $\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x}$ e $\tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha-\beta i)x}$ são soluções da EDO $ay'' + by' + cy = 0$ (só que são complexas). Usando alguns argumentos algébricos podemos mostrar que $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \sin \beta x$ são soluções da EDO e portanto qualquer solução da EDO é da forma $y(x) = Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$, com $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Determine a solução geral da EDO $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Exercício: Determine a solução geral da EDO $y'' + b^2y = 0$, com $b \in \mathbb{R}$.

Definição 3

Um problema de valor inicial (PVI) é uma EDO com uma condição inicial, ou seja,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

Exemplo: Determine a solução do PVI's abaixo.

- (a) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$
- (b) $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0;$
- (c) $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1;$
- (d) $y'' + 8y' + 25y = 0, \quad y(\pi/3) = 1, \quad y'(\pi/3) = 0;$
- (e) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Teorema 1

O PVI

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_0) = y'_0, \quad (6)$$

para $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ contínuas em um intervalo aberto I contendo x_0 , tem única solução em I .

Considere o PVI:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (7)$$

em que y_0 e y'_0 são condições iniciais dadas no problema.

Teorema: Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da EDO (??) tais que, em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então para todo par de condições iniciais (y_0, y'_0) o PVI (??) tem uma única solução $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$.

Definição 4

(1) O determinante

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{bmatrix}$$

é chamado **Wronskiano** das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ em x_0 .

- (2) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de (??) tais que $W[y_1, y_2] \neq 0$ em $x_0 \in \mathbb{R}$, então essas soluções são chamadas **soluções fundamentais**.
- (3) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais de (??), então a família de soluções $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, com $A, B \in \mathbb{R}$, é chamada **solução geral de (??)**. Duas soluções satisfazendo (2) e (3) formam um **conjunto fundamental de soluções**.

Temos $W[e^{r_1x}, e^{r_2x}] = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$, pois $r_1 \neq r_2$
 $W[e^{rx}, xe^{rx}] = e^{2rx} \neq 0$ e $W[e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x] = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$,
pois $\beta \neq 0$ já que $b^2 - 4ac < 0$.

Exemplo: Determine se conjunto formado pelas soluções das EDO's abaixo formam um conjunto fundamental de soluções.

- (a) $y'' + 2y' + y = 0$;
- (b) $y'' - 3y' + 2y = 0$;
- (c) $y'' + 4y' + 3y = 0$;
- (d) $y'' + 8y' + 25y = 0$;
- (e) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Exercícios: (1) Determine o Wronskiano de cada par de funções abaixo.

- (a) $e^{2x}, e^{-3x/2};$
- (b) $e^{-2x}, xe^{-2x};$
- (c) $e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x;$
- (d) $\cos^2 x, 1 + \cos 2x;$

(2) Determine se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções das EDO's e se elas formam um conjunto fundamental de soluções.

- (a) $y'' + 4y = 0; y_1(x) = \cos 2x \text{ e } y_2(x) = \operatorname{sen} 2x;$
- (b) $y'' - 2y' + y = 0; y_1(x) = e^x \text{ e } y_2(x) = xe^x;$
- (c) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0; x > 0; y_1(x) = x \text{ e } y_2(x) = xe^x;$
- (d) $(1 - xcotg x)y'' - xy' + y = 0; 0 < x < \pi; y_1(x) = x \text{ e } y_2(x) = \operatorname{sen} x.$

Esse método funciona para qualquer EDO do tipo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (8)$$

para a qual se conheça duas soluções fundamentais $y_1(x), y_2(x)$ da EDO homogênea associada. Neste caso, $y_c(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ é solução complementar. Procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x), \quad (9)$$

com a condição que

$$y'_p(x) = A(x)y'_1(x) + B(x)y'_2(x),$$

ou equivalentemente

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0. \quad (10)$$

Substituindo $y_p(x)$, $y'_p(x)$ e $y''_p(x)$ na EDO (??) obtemos

$$A'(x)y'_1(x) + B'(x)y'_2(x) = f(x), \quad (11)$$

e portanto temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) &= 0 \\ A'(x)y'_1(x) + B'(x)y'_2(x) &= f(x) \end{cases}$$

cuja solução é

$$A(x) = - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx \text{ e } B(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx.$$

Assim, a solução geral da EDO (??) é

$$\begin{aligned}y(x) &= Ay_1(x) + By_2(x) - y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx \\&\quad + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx\end{aligned}$$

Observe que para aplicar este método a função que acompanha o y'' deve ser igual à 1.

Exemplo: Determine a solução geral das EDO's $y'' + y = \sec x$ e $y'' + y = \cos \sec x$.

Exercícios: Determine a solução geral das EDO's.

- (a) $y'' - 2y' + y = e^x/x$;
- (b) $y'' - 4y' + 3y = e^x/(1 + e^x)$;
- (c) $y'' - 2y' + y = e^x/x^3$;
- (d) $y'' + 4y = 4 \sec^2(2x)$.

-  LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. II*, São Paulo, Editora Harbra: 1990.
-  SANTOS, R. J. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*.
<https://www.dropbox.com/s/vcdwzj1jtx85ant/topeqdif.pdf>.