MAT131 - Introdução à Álgebra

Anderson Tiago da Silva

Universidade Federal de Viçosa

Sentenças abertas

Definição

Dado um conjunto A, uma sentença aberta com uma variável em um conjunto A ou simplesmente uma sentença aberta em A é uma expressão $P(x)$ tal que $P(a)$ é uma proposição (verdadeira ou falsa) para todo elemento $a \in A$. O conjunto A é chamado de conjunto-universo ou apenas universo ou ainda domínio da variável x e um elemento qualquer $a \in A$ é chamado de valor da variável x.

Definição

Uma sentença aberta $P(x)$ em A torna-se uma proposição sempre que a variável x é substituída por um elemento $a \in A$.

Um elemento $x_0 \in A$ tal que $P(x_0)$ é uma proposição falsa (F) é chamado contra-exemplo para a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$.

Exemplo

Observe a seguinte proposição $P : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$. *Ela é falsa pois tomando* $x = \frac{1}{2}$ *temos* $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

exercicio

Para $A = \{0, 1, 2\}$ determine o valor verdade da proposição

$$\exists! x \in A | \forall y \in A : (x-1)^2 > y.$$

Definição

O Conjunto-verdade de uma sentença aberta $P(x)$ em A, denotado por V_P , é o conjunto de todos elementos $a \in A$ que satisfazem (verificam) $P(x)$, ou seja, é o conjunto de todos elementos $a \in A$ tais que $P(a)$ é uma proposição verdadeira. Simbolicamente,

$$V_P = \{a | a \in A \wedge P(a) \textbf{ é } V\} = \{a \in A | P(a)\}.$$

Lógica com Quantificadores

Definição

Uma função proposicional ou proposição aberta nas variáveis $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n \in A_1, A_2, \cdots A_n$, respectivamente, é uma afirmação simbolizada por $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemplo

1) $P(x) : x! > 20$. *Observe que $P(3)$ é falso, mas $P(4)$ é verdadeiro.*
2) $P(x, y, z) = x^2 + y^2 = z$. *Observe que $P(1, 2, 5)$ é verdadeiro.*

Definição

- *Quantificador Universal* ($\forall$): *"$P(x)$ é válido para todo x no domínio do discurso."Simbolicamente:* $\forall x : P(x)$.

- *Quantificador Existencial* ($\exists$): *Existe um elemento x no domínio do discurso tal que $P(x)$."Simbolicamente:* $\exists x : P(x)$.

- *Quantificador de Unicidade* ($\exists!$): *"Existe um único x no domínio do discurso tal que $P(x)$."Simbolicamente:* $\exists! x : P(x)$.

Negação de Proposições com Quantificadores

Proposição	Negação
$\forall x : P(x)$	$\sim [\forall x : P(x)] \equiv \exists x :\sim P(x)$
$\forall x \in A : P(x)$	$\sim [\forall x \in A : P(x)] \equiv \exists x :\sim P(x)$
$\exists x : P(x)$	$\sim [\exists x : P(x)] \equiv \forall x :\sim P(x)$
$\exists x \in A : P(x)$	$\sim [\exists x \in A : P(x)] \equiv \forall x \in A :\sim P(x)$

Exemplos

Exemplo

Obtenha a negação da proposição $\forall x \in A : [P(x) \rightarrow Q(x)]$

Exemplo

Obtenha a negação da proposição $\forall x, \exists y, \exists z : [P(x; y) \rightarrow (Q(x) \wedge R(z))]$.