MAT131 - Introdução à Álgebra

Anderson Tiago da Silva

Universidade Federal de Viçosa

Equivalências e Implicações

1) Neste tópico, teremos a oportunidade de conhecer duas importantes relações entre proposições: a implicação lógica e a equivalência lógica.
2) Veremos que esses dois conceitos desempenham um papel fundamental nas afirmações matemáticas.

Definição

- *Duas proposições são ditas independentes quando, em suas tabelas-verdade,comparando suas respectivas linhas, ocorrem todas as quatro alternativas VV, VF, FV e FF.*
- *Do contrário, ou seja, quando nas tabelas verdade de duas proposições não ocorre pelo menos uma das quatro alternativas VV, VF,FV e FF, dizemos que elas são dependentes. Quando duas proposições são dependentes,dizemos ainda que existe uma relação entre elas.*

Exemplo

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Neste caso, as proposições $\sim q$ e $p \leftrightarrow q$ são ditas independentes.

Quando as proposições são dependentes, existe uma relação entre elas e iremos aborda-las a seguir:

Definição

Dizemos que a proposição p implica a proposição q, simbolizado por $p \Rightarrow q$, quando a proposição condicional $p \rightarrow q$ é uma tautologia.

- Muitas vezes, por abuso de linguagem, quando não houver perigo de confusão e ficar claro no contexto, no lugar de $p \Rightarrow q$, escreveremos $p \rightarrow q$, porém, deve ficar claro que enquanto o símbolo $\rightarrow$ é um conectivo e representa uma operação entre proposições, o símbolo $\Rightarrow$ indica uma relação entre as proposições. Quando p não implica q, escrevemos $p \nRightarrow q$.

Exemplo

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

Neste caso, a proposição $p \leftrightarrow q$ implica a proposção $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$, ou seja $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$.

Definição

- *Dizemos que uma proposição p é equivalente à proposição q, simbolizado por $p \Leftrightarrow q$, quando a proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.*
- *Muitas vezes, por abuso de linguagem, quando não houver perigo de confusão e ficar claro no contexto, no lugar de $p \Leftrightarrow q$, escrevemos $p \leftrightarrow q$. Quando p não é equivalente a q, escrevemos $p \not\Leftrightarrow q$.*
- *Podemos ainda usar a notação $p \equiv q$ para denotar que p e q são equivalentes.*

Exemplo de Equivalência

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

- Neste caso, a proposição $p \rightarrow q$ é equivalente a proposição $\sim p \vee q$, ou seja $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

Exemplo de Equivalência

p	q	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Neste caso, a proposição $p \to q$ é equivalente a proposção $\sim q \to \sim p$, ou seja $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$.

Leis Lógicas

1) Lei da Identidade: Uma afirmação (ou proposição) sempre implica ou equivale a ela mesma. Em notação temos: $p \to p$ e $p \leftrightarrow p$.
2) Lei da não contradição: duas afirmações contraditórias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. Em notação temos: $\sim (p \wedge \sim p)$.
3) Lei do Terceiro Excluido: Para qualquer proposição, ou esta proposição é verdadeira, ou sua negação é verdadeira. Em notação temos: $p \vee \sim p$.

Exemplo de Algumas Implicações Notáveis

IMPLICAÇÕES NOTÁVEIS

Modus Ponens	$[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$
Modus Tollens	$[(p \longrightarrow q) \wedge \sim q] \longrightarrow \sim p$
Silogismo Disjuntivo	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \longrightarrow q$ ou $[(p \vee q) \wedge \sim q] \longrightarrow p$
Inferenia equivalente	$[(p \longleftrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$
Silogismo Hipotetico	$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$
Transitividade Simetrica	$[(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r)] \longrightarrow (p \longleftrightarrow r)$
Simplificação	$(p \wedge q) \longrightarrow p$ ou $(p \wedge q) \longrightarrow q$
Adição	$p \longrightarrow (p \vee q)$ ou $q \longrightarrow (p \vee q)$
Absurdo	$[p \longrightarrow (q \wedge \sim q)] \longrightarrow \sim p$ ou $[\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)] \longrightarrow p$

EQUIVALÊNCIAS NOTÁVEIS

Involução ou dupla negação	$\sim(\sim p) \equiv p$
Negação	$p\wedge \sim p \equiv F \qquad p\vee \sim p \equiv V$
Idempotência	$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p$
Comutativa	$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \longleftrightarrow q \equiv q \longleftrightarrow p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r \equiv p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r)$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r) \qquad p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r)$
Leis de Morgan	$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p\vee \sim q) \qquad \sim(p \vee q) \equiv (\sim p\wedge \sim q)$
Condicional	$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q \qquad \sim(p \longrightarrow q) \equiv p\wedge \sim q$
Bicondicional	$p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ $p \longleftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p\wedge \sim q)$
Absorção	$p \wedge (p \vee q) \equiv p \qquad p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$
Transposição	$p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p \qquad p \longleftrightarrow q \equiv \sim q \longleftrightarrow \sim p$
Exportação	$(p \wedge q) \longrightarrow r \equiv p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$ $[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow r] \equiv [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \longrightarrow (p_n \longrightarrow r)]$
Elemento Neutro	$V \wedge p \equiv p \qquad F \vee p \equiv p$
Dominação	$V \vee p \equiv V \qquad F \wedge p \equiv F$

Exemplo

Simplifique a expressão: $[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$ até verificar a verdade da mesma.