Lista de Exercícios VI - Métodos Numéricos para PVIs

MAT 271 - Cálculo Numérico - UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo

OBS.: As respostas podem ser dadas com arredondamento de 4 casas decimais.

1) Seja o PVI, com solução única y no intervalo $[1,2]$:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

a)Use o *Método de Euler*, com $h = 0.1$, para calcular aproximação de $y(2)$.

b) Considerando que a solução analítica (exata) do PVI é $y = -\frac{1}{x}$, calcule o erro absoluto na aproximação.

2) Considere o PVI, com solução única y no intervalo $[1,1.5]$:

$$\begin{cases} y' = -xy^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Use o *Método de Euler*, com $N = 5$, para calcular uma aproximação de $y(1.5)$.

3) Seja o PVI, com solução única y no intervalo $[0,2]$:

$$\begin{cases} y' = xy^{1/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a)Use o *Método de Euler*, com $h = 0.4$, para calcular uma aproximação de y no intervalo $[0,2]$.

b)Use o *Método de Euler Aperfeiçoado*, com $h = 0.4$ para calcular uma aproximação de y no intervalo $[0,2]$.

c) Considerando que a solução analítica (exata) do PVI é $y = (\frac{x^2+3}{3})^{3/2}$, construa uma tabela para comparar os resultados aproximados obtidos pelos dois métodos com os valores exatos.

4) Considere o PVI, com solução única y no intervalo $[1,1.5]$:

$$\begin{cases} y' = -xy^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Calcule uma aproximação de $y(1.5)$ pelo *Método de Runge-Kutta de Ordem 4*, com $h = 0.25$.

5) Considere o PVI, com solução única no intervalo $[0,1]$:

$$\begin{cases} y' = ycosx \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Calcule uma aproximação de $y(0.6)$ pelo *Método de Runge-Kutta de Ordem 4*, com $h = 0.2$.

6) A massa y de uma dada substância decresce com o passar do tempo t (em anos) de acordo com a equação:

$$\frac{dy}{dt} = -0.1y$$

Considerando que a massa inicial da substância é $y(0) = y_0 = 1000$, use o *Método de Euler*, com $h = 0.5$, para estimar o tempo necessário para que a massa da substância caia pela metade.

7) Uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = r(x)y^2 + a(x)y + b(x)$$

é chamada de equação de Riccati. A seguinte tabela apresenta os valores das funções $r(x)$, $a(x)$ e $b(x)$:

	$0 \leq x < 0.05$	$0.05 \leq x < 0.1$	$0.1 \leq x \leq 1$
$r(x)$	1	0	0
$a(x)$	0	1	0
$b(x)$	0	0	1

Considerando a equação de Riccati com a condição inicial $y(0) = 3$, use o *Método Runge-Kutta de ordem 4*, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação de y em $x = 0.2$.

8) Seja o PVI de 2ª Ordem abaixo:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y - e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Use o *método de Euler*, com $h = 0.2$, para encontrar uma aproximação de $y(0.4)$.

Lista de Exercícios 6 - Respostas

1) a) $y(2) \approx -0.4431$. **b)** Valor exato: $y(2) = -0.5$. Erro absoluto: $|E| = 0.0569$

2) $y(1.5) \approx 0.8234$

3) Respostas de todos itens na tabela abaixo:

	Euler	Euler Aperfeiçoado	Exato
$y(0)$	1	1	1
$y(0.4)$	1	1.08	1.0811
$y(0.8)$	1.16	1.3342	1.3365
$y(1.2)$	1.4962	1.7960	1.8005
$y(1.6)$	2.0452	2.5149	2.5231
$y(2)$	2.8576	3.5507	3.5642

4) $y(1.5) \approx 0.8899$

5) $y(0.6) \approx 1.7588$

6) ≈ 7 anos (entre 6.5 e 7 anos)

7) $y(0.2) \approx 3.4874$

8) $y(0.4) \approx 1.52$