

1^a Lista de Exercícios - MAT 241 - Cálculo III 2023/I

- 1) Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores tais que $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{v}\| = 1$. Calcule $\|\vec{v} \times \vec{u} - \vec{v}\|$.
- 2) Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores unitários ortogonais. Determine $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.
- 3) Seja \vec{u} um vetor ortogonal a \vec{v} e \vec{w} . Sabendo-se que \vec{v} e \vec{w} formam um ângulo de 30° e que $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\|\vec{w}\| = 3$, calcule $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$.
- 4) De um vértice de um cubo traçam-se uma diagonal do cubo e uma diagonal de uma face.
- Calcular o ângulo entre as duas diagonais.
 - Calcular a área do triângulo definido por estas diagonais e uma aresta do cubo.
- 5) Em cada item abaixo, determine $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$, o cosseno do ângulo entre \vec{v} e \vec{u} , a componente escalar de \vec{u} na direção de \vec{v} (isto é, $\|\vec{u}\| \cos \theta$, com θ o ângulo entre \vec{v} e \vec{u}) e o vetor $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.
- $\vec{v} = (2, -4, \sqrt{5})$ e $\vec{u} = (-2, 4, -\sqrt{5})$.
 - $\vec{v} = (0, 5, -3)$ e $\vec{u} = (1, 1, 1)$.
- 6) Os ângulos diretores α , β e γ de um vetor não nulo $\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$ são definidos da seguinte maneira:
- α é o ângulo entre \vec{v} e o eixo x positivo ($0 \leq \alpha \leq \pi$)
 β é o ângulo entre \vec{v} e o eixo y positivo ($0 \leq \beta \leq \pi$)
 γ é o ângulo entre \vec{v} e o eixo z positivo ($0 \leq \gamma \leq \pi$)
- Mostre que
- $$\cos \alpha = \frac{a}{\|\vec{v}\|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\|\vec{v}\|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\|\vec{v}\|}$$
- e $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Esses cossenos são chamados cossenos diretores de \vec{v} .
- Mostre que, se $\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$ é um vetor unitário, então a , b e c são cossenos diretores de \vec{v} .
- 7) Suponha que AB seja o diâmetro de um círculo com centro O e que C seja um ponto sobre um dos arcos que ligam A e B . Mostre que \vec{CA} e \vec{CB} são ortogonais.
- 8) Desigualdade de Cauchy-Schwarz.
- Use o fato de que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ para mostrar a desigualdade
- $$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$
- Sob quais circunstâncias, se existirem, $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$ é igual a $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. Justifique sua resposta.

- 9) Se $\langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle$ e $\vec{u} \neq 0$, podemos concluir que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$? Justifique sua resposta.
- 10) Encontre, em cada item abaixo, o comprimento e a direção (quando definida) de $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.
- $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$
 - $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
- 11) Dados os pontos $P = (2, -2, 1)$, $Q = (3, -1, 2)$ e $R = (3, -1, 1)$,
- encontre a área do triângulo determinado pelos pontos P , Q e R ;
 - encontre um vetor unitário perpendicular ao plano que contém os pontos P , Q e R .
- 12) Sejam $\vec{u} = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} - 5\vec{k}$ e $\vec{w} = -15\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$. Quais vetores, se é que existem, são:
- perpendiculares? Justifique.
 - paralelos? Justifique.
- 13) Quais das igualdades a seguir são sempre verdadeiras? Quais nem sempre são verdadeiras? Justifique.
- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$.
 - $\vec{u} \times (-\vec{u}) = \vec{0}$.
 - $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$.
 - $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$.
- 14) Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ e $\vec{u} \neq 0$, então $\vec{v} = \vec{w}$? Justifique.
- 15) Julgue a veracidade das afirmações abaixo, assinalando (V) para verdadeiro ou (F) para falso. Justifique cada uma de suas respostas.
- () Se os vetores $\vec{u} = (x, 1, 3)$ e $\vec{v} = (x, -1, -1)$ são ortogonais, então $x = 2$ ou $x = -2$.
 - () Se \vec{u} e \vec{v} tem a mesma norma, então $\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$ são ortogonais.
 - () O triângulo determinado pelos pontos $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, -1, -3)$ e $C = (7, 0, 2)$ é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A .
 - () Se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{w}$.
 - () A área do triângulo determinado pelos vetores $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ é 4.
- 16) Sabendo que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -2$, $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 1$ e $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 7$, calcule:
- $\langle 4\vec{u}, 2\vec{v} + 3\vec{w} \rangle$.
 - $\langle 5\vec{u} - 4\vec{v}, -\vec{u} + \vec{w} \rangle$.
- 17) Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores, com ângulo entre si medindo $\theta = \frac{\pi}{6}$ e tais que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2$. Determine a área do triângulo que tem os vetores \vec{u} e \vec{v} como lados adjacentes.
- 18) Se \vec{u} e \vec{v} são vetores tais que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 10$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 8$, determine $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

- 19) Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores unitários tais que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}$. Determine $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.
- 20) Seja $\vec{v} = (1, -5, 3)$. Determine o vetor \vec{w} , tal que $\|\vec{w}\| = 10$, e que tem a mesma direção e o sentido contrário de \vec{v} .
- 21) Obtenha \vec{v} tal que $\vec{v} \times \vec{j} = \vec{k}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$.
- 22) Sejam $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Sabendo-se que o ângulo entre \vec{u} e \vec{i} é obtuso, determine o valor de a de modo que a área do paralelogramo determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} seja $\sqrt{50}$.
- 23) Determine o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (5, 4, 5)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 10, 6)$, $C = (1, 8, 7)$ e $D = (2, 6, 9)$.
- 24) Mostre que para quaisquer vetores \vec{u} e \vec{v} , tem-se:
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$.
 - $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$.
 - $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.
 - $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
 - $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$ (Identidade de Lagrange).
- 25) Sejam $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Mostre que:
- $|x - a| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
 - $|y - b| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
 - $\|\vec{u} - \vec{v}\| \leq |x - a| + |y - b|$.
- 26) Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos. Explicitar o valor de x na igualdade $x\vec{v} = \vec{u}$.
- 27) Suponha que uma força constante F move uma partícula de um ponto P até um ponto Q . O trabalho realizado pela partícula é dado por:

$$W = \langle \vec{F}, \overrightarrow{PQ} \rangle.$$
- Se a unidade de comprimento é dada em metros e a força em Newtons, o trabalho é dado em Joules (J). Calcule o trabalho considerando:
- $\vec{F} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$, $P = (1, 2, -2)$ e $Q = (3, -1, 1)$
 - $\vec{F} = -c\vec{k}$, $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$.
- 28) Determine o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, -3)$ e $\vec{w} = (3, k, 5)$ sejam coplanares.
- 29) Demonstrar que o vetor $\vec{w} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}$ é perpendicular ao vetor \vec{u} . Dê uma interpretação geométrica.
- 30) Escrever uma equação do plano tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ no ponto $P = (1, 2, -1)$.
- 31) Dados $A = (2, 3, 6)$ e $B = (4, 1, -2)$, escrever uma equação do plano mediador do segmento AB . O plano mediador de um segmento é formado por todos os pontos equidistantes aos extremos desse segmento.

32) Determinar os valores de a e b para que as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

sejam

- (a) paralelas;
- (b) concorrentes;
- (c) reversas.

33) Determinar a posição relativa entre as retas $r : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

34) (a) Mostre que a distância entre um ponto S e uma reta passando por P paralela a \vec{v} é

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PS} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

(b) Encontre a distância do ponto $S = (1, 1, 5)$ à reta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

35) Se P é um ponto no plano com normal \vec{n} , então a distância de qualquer ponto S até o plano é o comprimento da projeção ortogonal de \overrightarrow{PS} em \vec{n} . Mostre que a distância de S até o plano é

$$d = \left| \left\langle \overrightarrow{PS}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \right| = \frac{|\langle \overrightarrow{PS}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

36) Sejam os planos paralelos

$$ax + by + cz = d_1 \quad \text{e} \quad ax + by + cz = d_2.$$

(a) Mostre que a distância entre os planos é

$$d = \frac{|d_1 - d_2|}{\|ai + bj + ck\|}.$$

(b) Encontre a distância entre os planos $2x + 3y - z = 6$ e $2x + 3y - z = 12$.

37) Encontre equações paramétricas para a reta

(a) que passa pela origem e é paralela ao vetor $\vec{v} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

(b) que passa por $(0, -7, 0)$ e é perpendicular ao plano $x + 2y + 5z = 13$.

38) Encontre a equação do plano

(a) que passa por $(1, 1, -1)$, $(2, 0, 2)$ e $(0, -2, 1)$.

(b) que passa por $P_0 = (2, 4, 5)$ e é perpendicular à reta $r : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4t \end{cases}$.

- 39) Encontre o ponto de interseção das retas $r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4t + 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 2s + 4, \quad s \in \mathbb{R} \\ z = -4s - 1 \end{cases}$. Determine a equação geral do plano determinado por estas retas.
- 40) Encontre um plano que passa por $P_0 = (2, 1, -1)$ e é perpendicular à reta dada pela interseção dos planos $2x + y - z = 3$ e $x + 2y + z = 2$.
- 41) Encontre a distância do ponto $(2, 1, 3)$ à reta $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 6t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$.
- 42) Encontre a distância do ponto $(0, -1, 0)$ ao plano $2x + y + 2z = 4$.
- 43) Encontre a distância do plano $x + 2y + 6z = 1$ ao plano $x + 2y + 6z = 10$.
- 44) Encontre as equações paramétricas para as retas dadas pela interseção dos planos
- $x + y + z = 1$ e $x + y = 2$
 - $x - 2y + 4z = 2$ e $x + y - 2z = 5$.
- 45) Julgue a veracidade das afirmações abaixo assinalando (V) para verdadeiro ou (F) para falso. Justifique sua resposta.
- () Existe um plano que contém os pontos $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 3)$, $C = (-2, 1, 1)$ e $D = (4, 2, 3)$.
 - () O ponto $A = (7, 6, 5)$ pertence ao segmento de reta $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$, onde $0 \leq t \leq 1$.
- 46) Verifique se os pontos $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (0, 1, 1)$, $P_3 = (1, 0, 1)$ e $P_4 = (0, 1, 0)$ são coplanares.
- 47) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (1, 5, 4)$ e
- é paralela à reta de equações paramétricas $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 20 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$.
 - é paralela à reta determinada pelos pontos $B = (1, 1, 1)$ e $C = (0, 1, -1)$.
- 48) Determine a equação do plano α que contém os pontos $A = (2, 0, 5)$ e $B = (0, 2, -1)$ e é perpendicular ao plano $\beta : x + 3y - z = 0$.
- 49) Escreva as equações paramétricas da interseção dos planos abaixo
- $2x + y - z = 0$ e $x + y + z = 1$
 - $x + 2y = 1$ e $z = 2$
- 50) Determine a interseção da reta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ com cada um dos planos
- $x - 2y + 3z = 8$

- (b) $2x + z = 5$
(c) $x = 2$.

51) Verifique que a reta $r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$ está contida no plano $2x + y - z = 0$.

52) Verifique que a reta $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ não intercepta o plano $x + y - z = 3$.

53) Determine os valores de a , b e d para que o plano $ax + by + 3z = d$ seja:

- (a) paralelo ao plano $2x + y - 5z = 4$
(b) represente o mesmo plano que $2x + y - 5z = 4$.

54) Verifique que as retas $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5 + t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -5 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ são concorrentes e determine uma equação do plano por elas definido.

55) Determine a distância do ponto $A = (2, 1, 3)$ a cada um dos planos

- (a) $x - 2y + z = 1$
(b) $x + y - z = 0$
(c) $x - 5z = 8$

56) Determine

(a) a distância do ponto $(5, 4, 7)$ à reta $r : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

(b) a distância do ponto $(1, 2, -1)$ à reta $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

(c) a distância do ponto $(2, 3, 5)$ a cada um dos eixos do sistema de coordenadas.

57) Escreva uma equação do plano que contém o ponto $A = (1, -2, 3)$ e é perpendicular a cada um dos planos $2x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$.

58) Escreva uma equação da reta r que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e que é paralela aos planos α e β de equações

$$\alpha : x - 2y + z = 3 \quad \text{e} \quad \beta : 5x - 4y + z = 1.$$

59) Seja α o plano $2x + y - z + 1 = 0$ e r a reta que contém os pontos $A = (0, 0, 2)$ e $B = (2, 3, 6)$. Determine as equações da reta m que contém o ponto $C = (1, 2, 3)$, é perpendicular à reta r e paralela ao plano α .

60) Mostre que a distância entre as retas reversas r e s é dada por

$$d(r, s) = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \rangle|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|},$$

onde $P \in r$, $Q \in s$, \overrightarrow{u} e \overrightarrow{v} são vetores diretores de r e s , respectivamente.

61) Determine se as retas r e s são paralelas, concorrentes ou reversas e calcule a distância entre elas.

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

62) Sejam $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$. Determine equações paramétricas para a reta r que passa pelo pontos $A = (1, 2, -1)$ e é ortogonal aos vetores \overrightarrow{u} e \overrightarrow{v} .

63) Considere as retas $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}$ e $s : x = y + 1 = z - 2$.

- (a) Verifique que as retas r e s são reversas.
- (b) Prove que existem um plano α que contém r e um plano β que contém s tais que α e β são paralelos, exibindo as equações destes planos. Verifique que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.
- (c) Use o item anterior para determinar a distância entre as retas r e s .

64) Escreva uma equação do plano paralelo a $2x - y + 6z = 4$ e tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$.

65) Determine o centro e o raio da circunferência de interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $2x + y + z = 4$.

66) Seja r a interseção dos planos $x + z = 4$ e $y - 2z + 4 = 0$. Encontre uma equação da reta s definida pela projeção ortogonal de r no plano $x - y + z = 2$.

67) Escreva as equações simétricas da reta s , traçada pelo ponto $P = (1, 3, 1)$, que seja concorrente com a reta $r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = z$ e seja ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, 0, -1)$.

68) Determinar a equação geral dos planos nos seguintes casos

- (a) passa pelo ponto $D = (1, -1, 2)$ e é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 1)$
- (b) possui o ponto $A = (1, 2, 1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$
- (c) passa pelos pontos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 1, 3)$ e $C = (4, 2, 3)$
- (d) passa pelo ponto $E = (1, 2, 2)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u} = (2, -1, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (-3, 1, 2)$
- (e) possui o ponto $P = (2, 1, 3)$ e é paralelo ao plano xz
- (f) contém as retas $r : \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{1-z}{2}$ e $s : \frac{x-1}{2} = -\frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{4}$
- (g) contém as retas $r : \frac{x}{2} = y + 1 = z + 3$ e $s : \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$
- (h) contém as retas $r : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$ e $s : \frac{x+2}{2} = \frac{2-y}{2}, z = 0$.

- (i) contém a reta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z-1$ e é paralelo à reta $s : \frac{x-3}{2} = 2-y = \frac{z-2}{4}$.
- 69) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (-1, 4, 5)$ e que é perpendicular à reta $r : (-2, 1, 1) + t(1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.
- 70) Determine os pontos da reta r , definida pela interseção dos planos $\alpha : x+y=2$ e $\beta : x=y+z$, que distam 3 unidades do ponto $P = (0, 2, 1)$.
- 71) Dada a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e os pontos $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (2, 2, 3)$,
- verifique que o ponto P está no interior e Q está no exterior da esfera.
 - determine as interseções da esfera com a reta definida pelos pontos P e Q
- 72) Encontre o centro e o raio das esferas
- $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$
 - $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$
- 73) Identifique cada superfície
- $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$
 - $9y^2 + z^2 = 16$
 - $x = y^2 - z^2$
 - $x^2 + 2z^2 = 8$
 - $x = z^2 - y^2$
 - $x^2 + 4z^2 = y^2$
- 74) Julgue a veracidade das afirmações abaixo assinalando (V) para verdadeiro e (F) para falso. Justifique sua resposta.
- () A equação da esfera de centro $C = (-2, 4, 1)$ e tangente ao plano yz é

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 2z + 17 = 0$$
 - () O raio da esfera que contém os pontos $A = (3, 1, 4)$, $B = (0, 5, 3)$ e $C = (4, 4, 0)$ e tem seu centro no plano xy é igual a 3.
- 75) Faça um esboço das superfícies
- $x^2 + y^2 = 4$
 - $z = y^2 - 1$
 - $x^2 + 4z^2 = 16$
 - $z^2 - y^2 = 1$
 - $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
 - $z = 8 - x^2 - y^2$
 - $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$
 - $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

- 76) Determinar o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 0, 3)$ e $C = (0, 3, -1)$.
- 77) Forneça uma descrição geométrica do conjunto dos pontos no espaço cujas coordenadas satisfazem os pares de equações dadas
- $x = 2, y = 3$
 - $y = 0, z = 0$
 - $x^2 + y^2 = 4, z = 0$
 - $x^2 + z^2 = 4, y = 0$
 - $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0$
 - $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25, z = 0$
- 78) Descreva os conjuntos de pontos no espaço cujas coordenadas satisfazem as desigualdade ou as combinações de equações e desigualdades dadas:
- $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
 - $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
 - $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$
 - $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$
- 79) Descreva o conjunto dado com uma única equação ou com um par de equações
- O plano contendo o ponto $(3, -1, 1)$ paralelo ao plano xy .
 - O plano contendo o ponto $(3, -1, 1)$ paralelo ao plano yz .
 - O plano contendo o ponto $(3, -1, 1)$ paralelo ao plano xz .
 - O círculo de raio 2 centrado em $(0, 2, 0)$ e posicionado sobre o plano xy
 - O círculo de raio 2 centrado em $(0, 2, 0)$ e posicionado sobre o plano yz
 - O círculo de raio 2 centrado em $(2, 0, 0)$ e posicionado sobre o plano xz
 - A reta que passa pelo ponto $(1, 3, -1)$ paralela ao eixo x .
 - A reta que passa pelo ponto $(1, 3, -1)$ paralela ao eixo y .
 - A reta que passa pelo ponto $(1, 3, -1)$ paralela ao eixo z .
 - O círculo no qual o plano que passa pelo ponto $(1, 1, 3)$ perpendicular ao eixo z encontra a esfera de raio 5 centrada na origem.
- 80) Verifique que $2x - 2z - y = 10$ intercepta $2z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ em um único ponto e determine o ponto.
- 81) Determine a equação da superfície definida pelo conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao eixo dos x é o dobro da distância de P ao plano yz . Identifique a superfície.
- 82) Determine a equação da superfície definida pelo conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao eixo dos y é $\frac{3}{4}$ da distância de P ao plano xz . Identifique a superfície.