Transformações Lineares

Prof. Dr. Walter T. Huaraca Vargas

26 de abril de 2022

Definição

Definição

Consideremos dois espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, uma função $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é dita de transformação linear (T.L.) se dados $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumpre:

(T_1) *A imagem da soma de dois vetores de $\mathbb{V}$ é igual a soma das respetivas imagens, em símbolos:*

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

Definição

Definição

Consideremos dois espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, uma função $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é dita de transformação linear (T.L.) se dados $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumpre:

(T_1) *A imagem da soma de dois vetores de $\mathbb{V}$ é igual a soma das respetivas imagens, em símbolos:*

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

(T_2) *A imagem do produto de um número real com um vetor de $\mathbb{V}$ é igual ao produto do número pela imagem do vetor, em símbolos:*

$$T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1)$$

Observação:

1. Dados os dois espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, uma função $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ é uma transformação linear se, e somente se, dados $v, v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ se cumpre:

$$T(\lambda_1 v_1 + v_2) = \lambda_1 T(v_1) + T(v_2)$$

OBSERVAÇÃO:

1. Dados os dois espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, uma função $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é uma transformação linear se, e somente se, dados $v, v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ se cumpre:

$$T(\lambda_1 v_1 + v_2) = \lambda_1 T(v_1) + T(v_2)$$

2. Podemos provar que se $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é uma transformação linear, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2, \cdots v_k \in \mathbb{V}$ então:

$$T(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(v_i).$$

Exemplo 1.

1. Considere $Id : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definida por $Id(v) = v$, então Id é uma transformação linear, chamada de transformação linear identidade do espaço vetorial $\mathbb{V}$.

Exemplo 1.

1. Considere $Id : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definida por $Id(v) = v$, então Id é uma transformação linear, chamada de transformação linear identidade do espaço vetorial $\mathbb{V}$.
2. Considere $\Theta : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ definida por $\Theta(v) = \theta_{\mathbb{W}}$ para todo $v \in \mathbb{V}$, então Θ é uma transformação linear, chamada de transformação linear nula.

Exemplo 1.

1. Considere $Id : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definida por $Id(v) = v$, então Id é uma transformação linear, chamada de transformação linear identidade do espaço vetorial $\mathbb{V}$.
2. Considere $\Theta : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ definida por $\Theta(v) = \theta_{\mathbb{W}}$ para todo $v \in \mathbb{V}$, então Θ é uma transformação linear, chamada de transformação linear nula.
3. Determinar se a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ é uma tranformação linear.

Primeiras Propriedades

Proposição

Se $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *é uma transformação linear entre os espaços vetoriais* $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$, *então:*

1. $T(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}}$

Primeiras Propriedades

Proposição

Se $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *é uma transformação linear entre os espaços vetoriais* $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$*, então:*

1. $T(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}}$
2. $T(-v) = -T(v)$

Transformações Lineares

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear entre os espaços vetoriais* $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$, *diremos que:*

1. *T é um monomorfismo se* T *for uma função injetiva, isto é: Se* $T(v_1) = T(v_2)$, *então* $v_1 = v_2$.

Transformações Lineares

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, diremos que:

1. *T é um monomorfismo se T for uma função injetiva, isto é: Se $T(v_1) = T(v_2)$, então $v_1 = v_2$.*
2. *T é um epimorfismo se T for uma função sobrejetiva, isto é: Se dado $w \in \mathbb{W}$, existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $T(v) = w$.*

Transformações Lineares

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, diremos que:

1. *T é um monomorfismo se T for uma função injetiva, isto é: Se $T(v_1) = T(v_2)$, então $v_1 = v_2$.*
2. *T é um epimorfismo se T for uma função sobrejetiva, isto é: Se dado $w \in \mathbb{W}$, existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $T(v) = w$.*
3. *T é um isomorfismo se T for uma função injetiva e sobrejetiva, isto é, bijetiva.*

Exemplo 2.

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. T é um monomorfismo? É um isomorfismo?

Exemplo 2.

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. T é um monomorfismo? É um isomorfismo?

Exemplo 3.

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, 0, x + y)$. T é um epimorfismo? É um isomorfismo?

Proposição

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais e $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear, então:

1. *O conjunto $T(\mathbb{V}_1) = \{T(v) \in \mathbb{W}; v \in \mathbb{V}_1\} \subset \mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{W}$, para qualquer subespaço vetorial $\mathbb{V}_1$ do espaço $\mathbb{V}$.*

Proposição

Sejam $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *espaços vetoriais e* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear, então:*

1. *O conjunto* $T(\mathbb{V}_1) = \{T(v) \in \mathbb{W}; v \in \mathbb{V}_1\} \subset \mathbb{W}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{W}$*, para qualquer subespaço vetorial* $\mathbb{V}_1$ *do espaço* $\mathbb{V}$*.*
2. *O conjunto* $T^{-1}(\mathbb{W}_1) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) \in \mathbb{W}_1\} \subset \mathbb{V}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{V}$*, para qualquer subespaço vetorial* $\mathbb{W}_1$ *do espaço* $\mathbb{W}$*.*

Proposição

Sejam $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *espaços vetoriais e* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear, então:*

1. *O conjunto* $T(\mathbb{V}_1) = \{T(v) \in \mathbb{W}; v \in \mathbb{V}_1\} \subset \mathbb{W}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{W}$*, para qualquer subespaço vetorial* $\mathbb{V}_1$ *do espaço* $\mathbb{V}$*.*
2. *O conjunto* $T^{-1}(\mathbb{W}_1) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) \in \mathbb{W}_1\} \subset \mathbb{V}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{V}$*, para qualquer subespaço vetorial* $\mathbb{W}_1$ *do espaço* $\mathbb{W}$*.*
3. T *é um monomorfismo (injetiva) se, e somente se,* $T(v) = \theta_{\mathbb{W}} \Rightarrow v = \theta_{\mathbb{V}}$*.*

Proposição

Sejam $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *espaços vetoriais e* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear, então:*

1. *O conjunto* $T(\mathbb{V}_1) = \{T(v) \in \mathbb{W}; v \in \mathbb{V}_1\} \subset \mathbb{W}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{W}$*, para qualquer subespaço vetorial* $\mathbb{V}_1$ *do espaço* $\mathbb{V}$*.*
2. *O conjunto* $T^{-1}(\mathbb{W}_1) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) \in \mathbb{W}_1\} \subset \mathbb{V}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{V}$*, para qualquer subespaço vetorial* $\mathbb{W}_1$ *do espaço* $\mathbb{W}$*.*
3. T *é um monomorfismo (injetiva) se, e somente se,* $T(v) = \theta_{\mathbb{W}} \Rightarrow v = \theta_{\mathbb{V}}$*.*
4. *Se* $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ *é um conjunto LI* $\mathbb{V}$ *e* T *é um monomorfismo então,* $\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_k)\}$ *é um conjunto de vetores de* $\mathbb{W}$ *LI.*

Núcleo de uma Transformação Linear

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear, o núcleo da transformação* T *é o conjunto denotado por* $N(T)$ *e definido por:*

$$N(T) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) = \theta_{\mathbb{W}}\} \subset \mathbb{V}$$

Núcleo de uma Transformação Linear

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear, o núcleo da transformação* T *é o conjunto denotado por* $N(T)$ *e definido por:*

$$N(T) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) = \theta_{\mathbb{W}}\} \subset \mathbb{V}$$

Exemplo 4.

Achar o núcleo da transformação linear $T\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - z, y - z)$

Núcleo de uma Transformação Linear

Observação:

1. O núcleo de uma transformação linear esta formado pelos vetores de $\mathbb{V}$ de modo que sua imagem seja $\theta_{\mathbb{W}}$.

Núcleo de uma Transformação Linear

Observação:

1. O núcleo de uma transformação linear esta formado pelos vetores de $\mathbb{V}$ de modo que sua imagem seja $\theta_{\mathbb{W}}$.
2. Uma outra forma de olhar o núcleo de uma transformação linear é como sendo o conjunto pre-image do vetor $\theta_{\mathbb{W}} \in \mathbb{W}$:

$$N(T) = T^{-1}(\theta_{\mathbb{W}}),$$

assim:

$$v \in N(T) \Leftrightarrow T(v) = \theta_{\mathbb{W}}$$

Núcleo de uma Transformação Linear

Observação:

1. O núcleo de uma transformação linear esta formado pelos vetores de $\mathbb{V}$ de modo que sua imagem seja $\theta_{\mathbb{W}}$.
2. Uma outra forma de olhar o núcleo de uma transformação linear é como sendo o conjunto pre-image do vetor $\theta_{\mathbb{W}} \in \mathbb{W}$:

$$N(T) = T^{-1}(\theta_{\mathbb{W}}),$$

   assim:

$$v \in N(T) \Leftrightarrow T(v) = \theta_{\mathbb{W}}$$

3. Como $T(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}}$, então $\theta_{\mathbb{V}} \in N(T)$. Isso prova que para qualquer transformação linear T, temos que $N(T) \neq \emptyset$.

Núcleo de uma Transformação Linear

Proposição

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais e $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear, então $N(T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Imagem de uma Transformação Linear

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear, a imagem da transformação T é o conjunto denotado por $Im(T)$ e definido por:

$$Im(T) = \{w \in \mathbb{W};\ \text{existe } v \in \mathbb{V} \text{ com } T(v) = w\} \subset \mathbb{W}$$

Imagem de uma Transformação Linear

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear, a imagem da transformação* T *é o conjunto denotado por* $Im(T)$ *e definido por:*

$$Im(T) = \{w \in \mathbb{W};\ \textit{existe } v \in \mathbb{V} \textit{ com } T(v) = w\} \subset \mathbb{W}$$

Observação:

1. A imagem de uma transformação linear esta formado pelos vetores de $\mathbb{W}$ que são imagem de alguns vetores $v \in \mathbb{V}$.

Imagem de uma Transformação Linear

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear, a imagem da transformação T é o conjunto denotado por $Im(T)$ e definido por:

$$Im(T) = \{w \in \mathbb{W};\ existe\ v \in \mathbb{V}\ com\ T(v) = w\} \subset \mathbb{W}$$

Observação:

1. A imagem de uma transformação linear esta formado pelos vetores de $\mathbb{W}$ que são imagem de alguns vetores $v \in \mathbb{V}$.
2. Como $T(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}}$, então $\theta_{\mathbb{W}} \in Im(T)$.

Imagem de uma Transformação Linear

Exemplo 5.

Achar a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$definida por

$$T(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$$

Imagem de uma Transformação Linear

Exemplo 5.

Achar a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$definida por

$$T(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$$

Proposição

Sejam $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *espaços vetoriais e* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear, então* $Im(T)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{W}$*.*

Teorema

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais e $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear, então:

1. *T é um monomorfismo se, e somente se, $N(T) = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$*

Teorema

Sejam $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *espaços vetoriais e* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear, então:*

1. T *é um monomorfismo se, e somente se,* $N(T) = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$
2. *Seja* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ *um conjunto Linearmente dependente, então*
$$\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\} \subset \mathbb{W}$$
é um conjunto Linearmente dependente.

Teorema

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais e $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear, então:

1. *T é um monomorfismo se, e somente se, $N(T) = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$*
2. *Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ um conjunto Linearmente dependente, então*
$$\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\} \subset \mathbb{W}$$
é um conjunto Linearmente dependente.
3. *Se $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ é um conjunto tal que $\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\} \subset \mathbb{W}$ seja um conjunto linearmente independente então $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente.*

Teorema da Dimensão

Teorema

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais de dimensão finita e $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear então:

$$dim(\mathbb{V}) = dim(N(T)) + dim(Im(T))$$

Teorema da Dimensão

Teorema

Sejam $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *espaços vetoriais de dimensão finita e* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *uma transformação linear então:*

$$dim(\mathbb{V}) = dim(N(T)) + dim(Im(T))$$

Exemplo

Considere a TL $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, w) = (x - 2y + 2z, x + w, x + y - 3z + 2w)$. Provar que T é TL, achar $N(T), Im(T)$, achar $dim(N(T))$ e $dim(IM(T))$.

Teorema Fundamental das Transformações Lineares

Teorema

Sejam $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *espaços vetoriais,* $\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ *uma base de* $\mathbb{V}$ *e* $\{w_1, w_2, \cdots w_n\}$ *um conjunto qualquer de elementos de* $\mathbb{W}$*, então existe uma única transformação linear* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *de modo que*

$$T(v_i) = w_i \text{ para } i = 1, 2, \cdots n.$$

Teorema Fundamental das Transformações Lineares

Teorema

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais, $\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ uma base de $\mathbb{V}$ e $\{w_1, w_2, \cdots w_n\}$ um conjunto qualquer de elementos de $\mathbb{W}$, então existe uma única transformação linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ de modo que

$$T(v_i) = w_i \text{ para } i = 1, 2, \cdots n.$$

Exemplo 6.

Considere os E.V. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{W} = \mathbb{R}^4$ de forma que $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\{(1, 2, 3, 4), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Existe uma única transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de forma que:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T(1,0,0) & = & (1,2,3,4) \\ T(1,1,0) & = & (1,1,0,0) \\ T(1,1,1) & = & (1,1,1,1) \end{array} \right. ?$$

Matriz de uma Transformação Linear

Consideremos uma $B = B_{\mathbb{V}} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base do espaço vetorial $\mathbb{V}$.

Definição

Se $v \in V$, então existem únicos escalares $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \delta_i v_i$$

Os números $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ são chamados de coordenadas do vetor v na base B_V e denotaremos isso como $[v]_B = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)_B$

Matriz de uma Transformação Linear

Consideremos uma $B = B_{\mathbb{V}} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base do espaço vetorial $\mathbb{V}$.

Definição

Se $v \in V$, então existem únicos escalares $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \delta_i v_i$$

Os números $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ são chamados de coordenadas do vetor v na base B_V e denotaremos isso como $[v]_B = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)_B$

Exemplo 7.

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e duas bases
$B = \{(1, 0, 0,), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ e $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Se
$v = (1, 2, 3)$ Achar $[v]_B$ e $[v]_C$

Matriz de uma Transformação Linear

Consideremos uma transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, entre os espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, tal que $dim(\mathbb{V}) = n$ e $dim(\mathbb{W}) = m$. Se
$C = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$.
e $C = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ base de $\mathbb{W}$.
Pelo Teorema Fundamental das Transformações Lineares, a transformação T ficará determinada se conhecer-mos os elementos
$\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\} \subset W$

Matriz de uma Transformação Linear

Como B_W é uma base do espaço W, então, coneceremos a tranformação linear se conhecermos os coeficientes do seguinte sistema:

$$\begin{cases} T(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_1) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \dots & \dots & \dots \\ T(v_n) & = & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{cases}$$

Os nm escalares a_{ij} do sistema anterior definem uma matriz, com transposta dada por:

$$[A]_C^B = [a_{ij}]_C^B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de uma Transformação Linear

Como B_W é uma base do espaço W, então, coneceremos a tranformação linear se conhecermos os coeficientes do seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} T(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_1) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ T(v_n) & = & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{array}\right.$$

Os nm escalares a_{ij} do sistema anterior definem uma matriz, com transposta dada por:

$$[A]_C^B = [a_{ij}]_C^B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz recebe o nome de matriz associada à transformação linear T em relação as bases B e C e é denotada por $[A]_C^B$.

Exemplo 8.

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - 2z, y + z)$

1. Achar a matriz A da transformação T associada as bases $B = \{(1,1,1), (2,2,0), (3,0,0)\}$ e $C = \{(2,0), (0,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente.

Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 8.

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - 2z, y + z)$

1. Achar a matriz A da transformação T associada as bases $B = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$ e $C = \{(2, 0), (0, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente.
2. Calcular a as coordenadas de $(-2, 2, -2)$ na base B.
3. Calcular a as coordenadas da imagem de $(-2, 2, -2)$ na base C.

Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 8.

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - 2z, y + z)$

1. Achar a matriz A da transformação T associada as bases $B = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$ e $C = \{(2, 0), (0, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente.
2. Calcular a as coordenadas de $(-2, 2, -2)$ na base B.
3. Calcular a as coordenadas da imagem de $(-2, 2, -2)$ na base C.
4. existe alguma relação entre suas contas?

Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 9.

Considere as bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por $B = \{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$ e $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e a transformação linear identidade $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1. Achar a matriz $[A]^{B}_{B_1}$ da transformação Id associada as bases B e B_1.

Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 9.

Considere as bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por $B = \{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$ e $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e a transformação linear identidade $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1. Achar a matriz $[A]^{B}_{B_1}$ da transformação Id associada as bases B e B_1.
2. Achar a matriz $[A]^{B_1}_{B}$ da transformação Id associada as bases B_1 e B.

Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 9.

Considere as bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por $B = \{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$ e $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e a transformação linear identidade $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1. Achar a matriz $[A]^{B}_{B_1}$ da transformação Id associada as bases B e B_1.
2. Achar a matriz $[A]^{B_1}_{B}$ da transformação Id associada as bases B_1 e B.
3. Se $V = (x,y,z)$, achar $[v]_B$ e $[v]_{B_1}$.

Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 9.

Considere as bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por $B = \{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$ e $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e a transformação linear identidade $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1. Achar a matriz $[A]_{B_1}^{B}$ da transformação Id associada as bases B e B_1.
2. Achar a matriz $[A]_{B}^{B_1}$ da transformação Id associada as bases B_1 e B.
3. Se $V = (x, y, z)$, achar $[v]_B$ e $[v]_{B_1}$.
4. existe alguma relação entre os dados obtidos acima?

Composição de TL e Produto Matricial

Definição

Dados os EV $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *e as TL* $S : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *e* $T : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ *definamos a função:*

$$T \circ S : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$$

definido por

$$(T \circ S)(x) = T(S(x)) \text{ para todo } x \in \mathbb{V}$$

Observação:

1. É fácil ver que $T \circ S$ é uma TL.
2. A composição de TL, satisfaz:

$$(t_3 \circ T_2) \circ T_1 = T_3 \circ (t_2 \circ T_1)$$

Autovalores e autovetores

Definição

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito autovalor de A se existe vetor x de $\mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tal que $Ax^t = \lambda x^t$. O vetor x será chamado de autovetor de A associado à λ.

Exemplo 10.

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $x = (1, -1, 1)$ é um autovetor de A?
$y = (0, 0, 0)$ é um autovetor de A? $x = (t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um autovetor de A?

Definição

Seja λ um autovalor de A, o subespaço vetorial $V_\lambda = \{x; Ax^t = \lambda x^t\}$ é chamado de autoespaço de A associado a λ ou espaço caraterístico de A associado a λ. A dimensão de V_λ é denominada multiplicidade geométrica.

Cálculo de autovalores e autovetores

Teorema

São equivalentes:

1. λ *é um autovalore de* A
2. $det(A - \lambda I) = 0$

Definição

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *o polinômio característico de* A, *é o polinômio de grau* n*:*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

Lembre que

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_r)^{n_r}Q(\lambda)$$

Onde $Q(\lambda)$ *é o produto de polinômios irreducíveis de grau 2. O número* n_i *é a multiplicidade algébrica do autovalor* λ_i.

Exemplo 11.

Calcular os autovalores, os autoespaços associados e suas multiplicidade geométrica e a multiplicidade algébrica para $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.