MAT146 - Cálculo I - Derivadas

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Considere a seguinte função

$$f(x) = x - 1$$

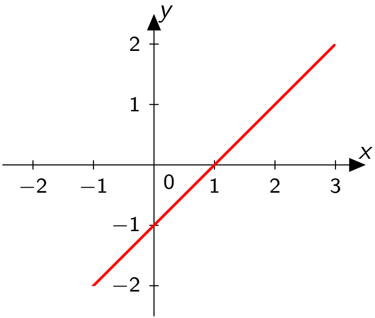


Figura : Gráfico da função $f(x) = x - 1$.

A função f é uma função afim, cujo gráfico é uma reta. Observe que compreendemos bem o comportamento desta função. De fato, $f(x)$ tem crescimento constante e proporcional ao crescimento de x.

Quando $x \to \infty$ temos que $f(x) \to \infty$ e quando $x \to -\infty$ temos que $f(x) \to -\infty$.

O mesmo não é verdade para a maioria das funções, ou seja, é muito complicado entender o comportamento da maioria das funções. Abaixo mostramos o gráfico da função

$$f(x) = x + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Observe o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de zero.

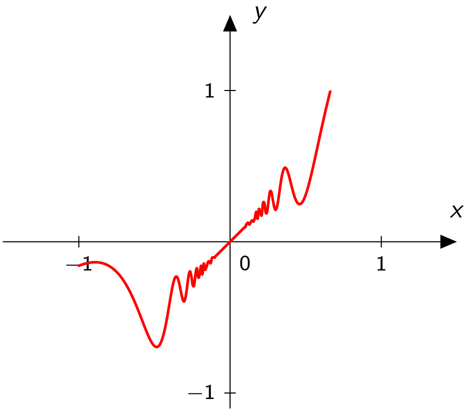


Figura : Gráfico da função $f(x) = x + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

A maioria dos fenômenos naturais (físicos, químicos, biológicos, etc) e fenômenos sócio-econômicos, são modelados por sistemas (de funções e equações) mais complicados do que funções afim. Como entender o comportamento de tais fenômenos?

Uma das principais ferramentas do cálculo é a **derivada**, cuja função é contribuir para a questão levantada acima. Começaremos a abordagem sobre derivadas definindo **reta tangente a uma curva dada**, em um determinado ponto da curva.

Reta Tangente

Considere o gráfico de uma função real contínua f, definido em algum intervalo I de $\mathbb{R}$. Cada ponto do gráfico de f é dado por

$$(x, f(x)), \quad \text{onde} \quad x \in I$$

Na figura abaixo mostramos a reta tangente ao gráfico de uma função f, passando pelo ponto $(x, f(x))$.

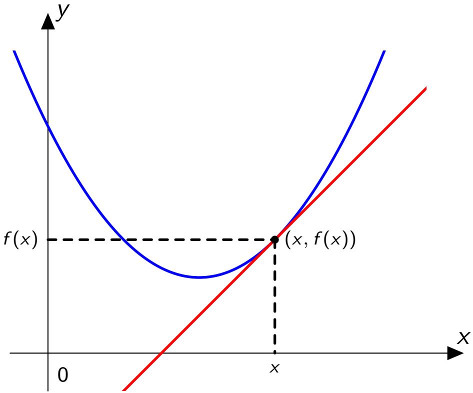


Figura : Reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Como obter a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$? Para responder esta pergunta, precisamos de alguns conceitos preliminares.

Definição

Dada uma curva C, qualquer reta que passe por pelo menos dois pontos de C é chamada **reta secante***.*

A figura abaixo mostra uma reta secante ao gráfico de uma função f, passando pelos pontos.

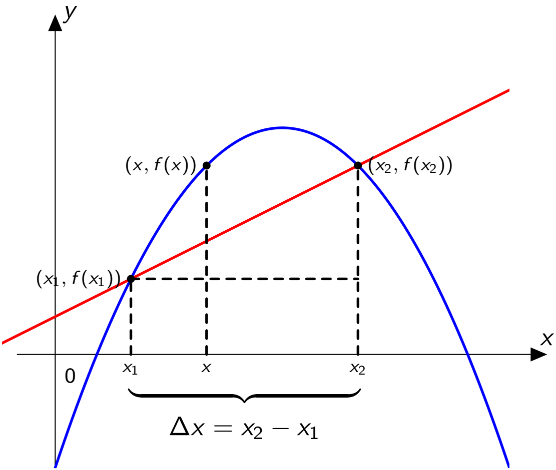


Figura : Reta secante ao gráfico de uma função f, passando pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

Definição

Definimos

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

como a diferença entre as abscissas dos pontos $Q = (x_2, f(x_2))$ *e* $P = (x_1, f(x_1))$. *Esta diferença é chamada* **incremento de x**.

Observe que a inclinação da reta secante é dada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

desde que a reta PQ não seja vertical.

Note que $\Delta x = x_2 - x_1$, daí temos que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Assim, a inclinação de PQ pode ser escrita como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Agora vamos enunciar a definição de **Reta Tangente**.

Definição (Reta Tangente)

Suponha que f seja uma função real e seja contínua em $x = x_1$. A **reta tangente** *ao gráfico de f no ponto $P = (x_1, f(x_1))$ será:*

(i) *A reta que passa por P e tem inclinação m_{x_1}, onde*

$$m_{x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se o limite existir.

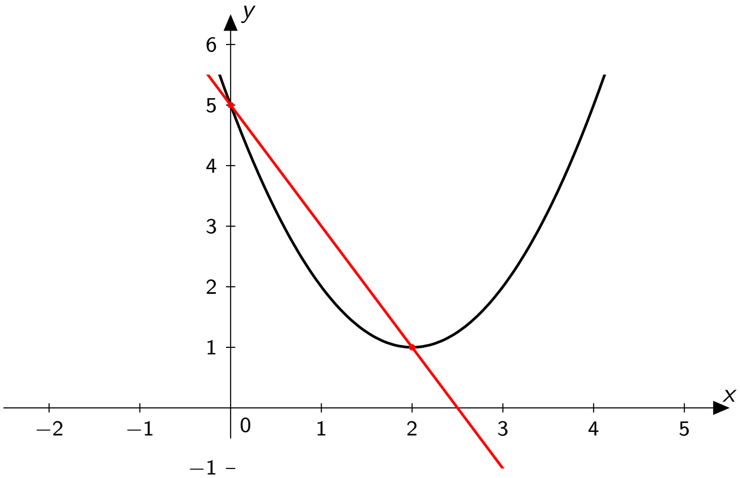
(ii) *A reta* $x = x_1$ *se*

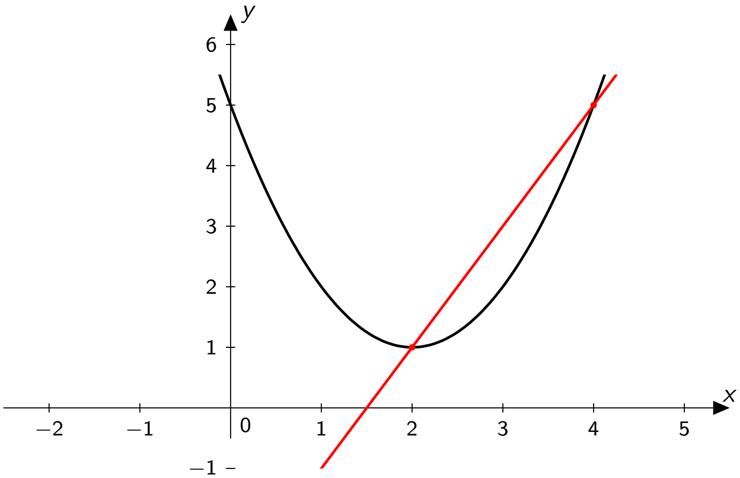
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \infty \quad ou \quad = -\infty$$

e também

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \infty \quad ou \quad = -\infty$$

Caso (i) *e* (ii) *não sejam verdadeiras, então não existe reta tangente ao gráfico de* f *no ponto* $P = (x_1, f(x_1))$.


y
x
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−1
0
1
2
3
4
5


y
6
5
4
3
2
1
0
−1
x
−2
−1
1
2
3
4
5

Exemplo

Seja $f(x) = (x-1)^{1/3}$. Abaixo mostramos a reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1,0)$. Note que

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \infty \quad e \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \infty.$$

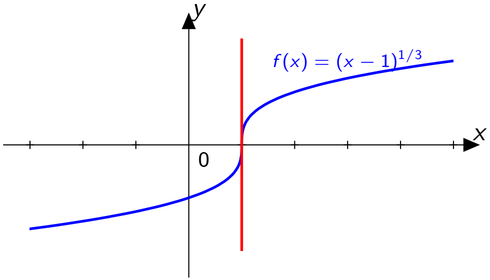


Figura : Reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0)$.

Exemplo

Seja $g(x) = \frac{x^3}{3} - x + 2$. *Encontre a equação da reta tangente, ao gráfico de* g, *no ponto*

$$P = \left(\frac{3}{2}, g\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{39}{24}\right).$$

Primeiramente devemos encontrar a inclinação da reta tangente. Então

$$\begin{aligned} m_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{3}(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x) + 2 - (\frac{x^3}{3} - x + 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{3}(\cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - (\cancel{x} + \Delta x) + \cancel{2} - (\cancel{\frac{x^3}{3}} - \cancel{x} + \cancel{2})}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{3}(3x^2\cancel{\Delta x} + 3x\cancel{\Delta x}\Delta x + \cancel{\Delta x}\Delta x\Delta x) - \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2 - 1) = x^2 - 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$m_{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Temos então a inclinação da reta, logo, aplicando ao ponto $P = (\frac{3}{2}, \frac{39}{24})$ obtemos:

$$y - \frac{39}{24} = \frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Abaixo esboçamos o gráfico da função g e também o gráfico da reta tangente.

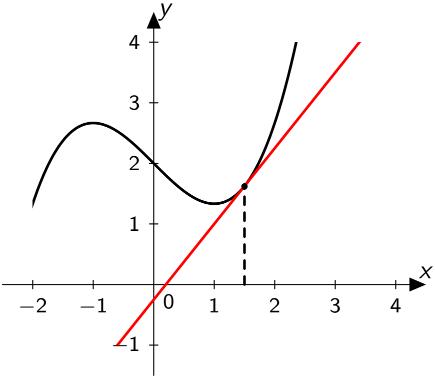


Figura : Gráfico da função g e a reta tangente ao gráfico de g em P.

Definição (Reta Normal)

A **reta normal** *ao gráfico de uma função* f *em um determinado ponto, é a reta perpendicular à reta tangente nesse ponto. No caso em que a reta tangente não é vertical e nem horizontal, temos que a inclinação da reta normal é dada por*

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

onde m_t *é a inclinação da reta tangente. Caso a reta tangente seja vertical, temos que* $m_n = 0$*. Por outro lado, se a reta tangente for horizontal, então* m_n *não está definido e a reta normal é vertical.*

No exemplo acima, a reta normal ao gráfico de g é dada por

$$y - \frac{39}{24} = \frac{-4}{5}(x - \frac{3}{2}) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{339}{120}$$

já que a inclinação da reta tangente ao gráfico de g é dado por $m_g = \frac{5}{4}$.

Veja a figura abaixo:

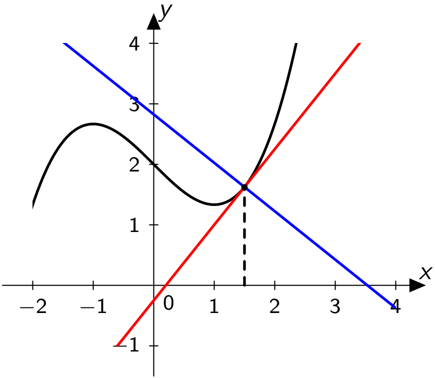


Figura : Gráfico da função g e a reta tangente ao gráfico de g em P.

Agora apresentamos a definição de **derivada**, um dos conceitos mais importantes do Cálculo.

Definição (Derivada)

A derivada de uma função f em um ponto x de seu domínio, é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

caso tal limite exista. Neste caso dizemos que f é derivável em x.

Se f possuir derivada em cada ponto de seu domínio, dizemos que f é derivável. Neste caso, a derivada de f, denotada por f', é uma função com valores dados pela fórmula (1).

A notação f' para a derivada da função f, foi introduzida pelo matemático francês Joseph Lagrange (1736-1813), em meados do século XVIII.

Exemplo

Suponha $h(x) = x^2 - 1$. Encontre, caso exista, a derivada de h no ponto $x = 3$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - x^2 + 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x
\end{aligned}$$

Portanto existe o limite para qualquer x, assim f é derivável em todo seu domínio, inclusive em $x = 3$. Neste caso $f'(3) = 2.3 = 6$.
Observe que a derivada de h neste caso é a função h', definida por

$$h'(x) = 2x$$

Além disso, observamos que o domínio de h é todo o conjunto dos números reais, que também é o domínio de h'.

Observação

Tal propriedade ($Ddm(h) = Dom(h')$) não é verdade em geral, como veremos em exemplos posteriores.

Voltando a definição de derivada,

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Coloque

$$x = x_1 + \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad x - x_1 = \Delta x$$

Neste caso observe que

$$\Delta x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \to x_1$$

Assim, podemos reescrever a definição de derivada na forma

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \tag{2}$$

caso tal limite exista. Esta é uma fórmula alternativa para calcular a derivada.

Seja f uma função real, definida em algum intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Suponha que (x, y) é um ponto do gráfico de f, neste caso

$$y = f(x)$$

é uma equação que também define a função f. A expressão

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

onde Δy é chamado o **incremento** de y, denota a variação no valor da função quando x varia de Δx. Note que, caso exista o limite, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Escrevendo $\dfrac{dy}{dx}$ no lugar de $f'(x)$ temos a seguinte fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3}$$

O símbolo $\dfrac{dy}{dx}$ não é um quociente, ou seja, não estamos dividindo dy por dx.

Esta notação, $\dfrac{dy}{dx}$, foi introduzida pelo matemático alemão Gottfried Leibniz, no final do século XVII.

Na notação de Lagrange, o valor da derivada de uma função f em um ponto $x = x_1$, caso exista, é indicado por $f'(x_1)$. Na notação de Leibniz escrevemos $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$

Exemplo

Calcule, caso exista, $\dfrac{dy}{dx}$*, onde* $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+1}\right) - \frac{x}{x+1}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x+\Delta x)(x+1) - x(x+\Delta x+1)}{(x+1)(x+\Delta x+1)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)(x+1) - x(x+\Delta x+1)}{(x+1)(x+\Delta x+1)\Delta x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + x + x\Delta x + \Delta x - x^2 - x\Delta x - x}{(x+1)(x+\Delta x+1)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(x+1)(x+\Delta x+1)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+1)(x+\Delta x+1)} \\
&= \frac{1}{(x+1)(x+1)}
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Observe que $\dfrac{dy}{dx}$ *não está definida para* $x = -1$.

De maneira análoga a limites laterais, podemos definir derivadas laterais.

Definição

Seja f uma função definida em um ponto $a \in \mathbb{R}$. Então, a derivada à direita de f no ponto a é definida por

$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

e a derivada lateral à esquerda é definida por

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x^-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Observação

Pelas definições de derivadas laterais e condição de existência do limite, temos que um função é derivável em a se as derivadas laterais existem e são iguais.

Exemplo

Verifique que a função $f(x) = |x|$ *não é derivável em* $x = 0$.

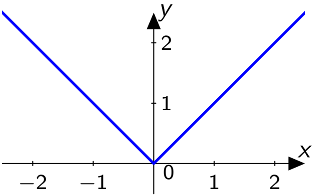


Figura : Função $f(x) = |x|$.

Exemplo

Mostre a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & se\ x \geq -1 \\ -x^2 - 2x, & se\ x < -1 \end{cases}$$

é derivável em $x = -1$.

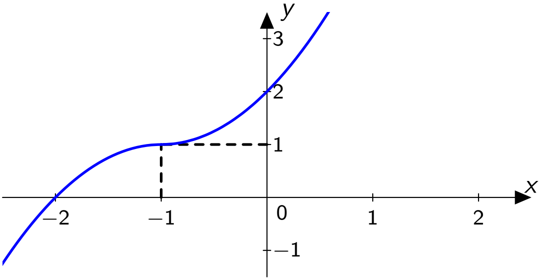


Figura : Função derivável

Antes de apresentar algumas regras de derivação para determinadas funções, apresentaremos um resultado que garante a continuidade de um função, desde que esta seja derivável.

Teorema

Seja f uma função derivável em um ponto x_0 de seu domínio. Então f é contínua em x_0.

Demonstração: Como $f(x_0)$ já está definido, é suficiente verificar que

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Como por hipótese $f'(x_0)$ existe, temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\Delta x \cdot \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}[\Delta x] \cdot f'(x_0) = 0.
\end{aligned}
$$

■

O resultado nos diz apenas que se f é derivável em um ponto x_0, então ela também é contínua no respectivo ponto. **A recíproca, em geral, não é verdadeira, ou seja, existem funções contínuas que não são deriváveis.**

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = |x|.$$

Essa função é contínua em $x = 0$. **(Verifique!)** *Porém, ela não é derivável em* $x = 0$. *De fato, como a função modular possui expressões distintas para pontos positivos e pontos negativos, precisamos calcular os limites laterais na definição de derivada.*

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Como os limites laterais são diferentes, temos que a função não é derivável em $x = 0$.