MAT146 - Cálculo I - Equações Diferenciais

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Equações Diferenciais

Uma equação contendo derivadas é chamada de **Equação Diferencial**. Existem muitos tipos de equações diferenciais.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = -3x$$

Exemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{y} + 5$$

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. No primeiro exemplo acima, a equação diferencial tem ordem 1 e no segundo exemplo tem ordem 2. Neste texto, nosso objetivo é tratar de equações diferenciais de 1^a ordem com variáveis separáveis.

No exemplo (3) abaixo, a equação tem ordem 4.

Exemplo

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{dy}{dx} = xsen(yx) + 2$$

Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Uma solução de (1) é uma função $y = y(x)$, definida em algum intervalo I tal que

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x)), \quad \text{para todo} \quad x \in I. \tag{2}$$

Exemplo (4)

Dada a equação

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

a função $F(x) = x^2$ *é uma solução da equação acima. De fato, note que*

$$F'(x) = 2x.$$

Observe que

$$G(x) = x^2 + k,$$

onde k *é uma constante qualquer, também é uma solução da equação acima, pois*

$$G'(x) = 2x.$$

Solução Geral

A **solução geral** de (1) é uma solução $y(x)$ que contém todas as soluções possíveis de (1) e que apresenta uma constante arbitrária.

No exemplo anterior,

$$G(x) = x^2 + k$$

é a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

A equação $G(x) = x^2 + k$ é uma família de funções dependendo de uma constante arbitrária k, chamada de **família dependente de um parâmetro**.

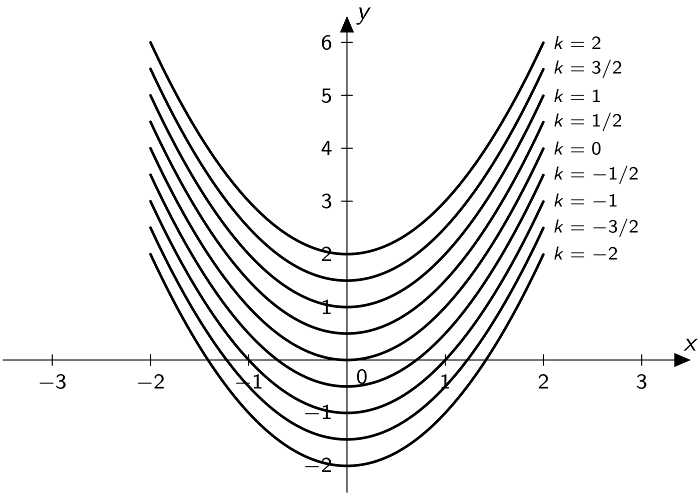

Figura : Cada curva acima é o gráfico de uma solução da equação diferencial $dy/dx = 2x$

Problema de Valor Inicial

Para encontrar uma solução específica da equação diferencial (1), devemos especificar uma **condição inicial**, isto é, indicar o valor de $y(x)$ quando $x = x_0$, onde x_0 é um valor qualquer no domínio da solução. A combinação de uma equação diferencial e uma condição inicial é chamada de **Problema de Valor Inicial** e indicado por

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} . \tag{3}$$

A solução de (6) é também chamada de **solução particular** da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$, que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$.

Exemplo (5)

Encontre a solução do PVI dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4x + 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}.$$

Note que

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 1.$$

Escrevendo a equação acima em termos das diferenciais temos

$$dy = (4x + 1)dx$$

Integrando ambos os lados da equação obtemos

$$\int dy = \int (4x+1)dx,$$

de onde tem-se

$$y + c_1 = 4\frac{x^2}{2} + x + c_2$$

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + x + (c_1 + c_2) \\ &= 2x^2 + x + c, \end{aligned}$$

onde $c = c_1 + c_2$. Como $y(0) = 3$, temos

$$y(0) = 2(0)^2 + 0 + c$$

$$c = 3.$$

Portanto a solução do PVI acima é

$$y = 2x^2 + x + 3.$$

Variáveis Separáveis

Na equação diferenciável (1), se $f(x, y)$ puder ser escrita como o produto de uma função de x e de uma função de y

$$\frac{dy}{dx} = g(x)l(y),$$

onde $l(y) \neq 0$, dizemos que a equação (4) é uma **equação diferencial com variáveis separáveis**.

Colocando $h(y) = \dfrac{1}{l(y)}$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}. \tag{4}$$

Assim, reescrevendo (4) em termos de suas diferenciais

$$h(y)dy = g(x)dx. \tag{5}$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx.$$

Observe que podemos justificar a integração em ambos os lados da equação (5), através da regra da substituição vista anteriormente

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

De fato, considerando $y = y(x)$ e usando (4) temos

$$\begin{aligned} \int h(y)dy &= \int h(y(x))\frac{dy}{dx}dx \\ &= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}dx \\ &= \int g(x)dx. \end{aligned}$$

Exemplo

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (1+y)e^x, \quad y > -1, \quad y(0) = 0.$$

Como $y > -1$ *temos*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (1+y)e^x \\
\frac{dy}{1+y} &= e^x dx \\
\int \frac{dy}{1+y} &= \int e^x dx \\
\ln(1+y) &= e^x + c.
\end{aligned}$$

Como $y(0) = 0$, devemos ter

$$\ln(1+0) = e^0 + c$$

$$c = -1.$$

Portanto

$$\ln(1+y) = e^x - 1.$$

O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

envolve uma equação diferenciável separável, com solução $y = y_0 e^{kt}$.

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ky \\ \frac{dy}{y} &= kdt \\ \int \frac{dy}{y} &= \int kdt \\ \ln|y| &= kt + c \\ |y| &= e^{kt+c} \\ y &= \pm e^c e^{kt} \\ y &= Ae^{kt}, \end{aligned}$$

onde $A = \pm e^c$.

Essa solução expressa a **variação exponencial**. Há muitas situações naturais que são modeladas por funções exponenciais. Elas descrevem o crescimento ou decaimento de uma determinada quantidade y.

Na solução $y = y_0 e^{kt}$ permitimos que A assuma o valor 0, assim a solução $y = 0$ fica incluída na solução geral.

Quando $k > 0$ dizemos que as quantidades envolvidas estão em processo de crescimento exponencial. Por outro lado, quando $k < 0$, dizemos que as quantidades envolvidas estão em processo de decaimento exponencial. O número k é dito **taxa constante de variação.**

Crescimento Populacional

Considere uma população (pessoas, animais, plantas, bactérias, etc). População é medido em números inteiros, ou seja, por funções descontínuas. Mas quando uma população é grande, esta pode ser aproximada por uma função contínua.

Supomos que a taxa de fertilidade da população é constante, que a proporção de indivíduos em idade de se reproduzir também é constante. Assim, em qualquer instante t, a taxa de nascimento será proporcional ao número $y(t)$ de indivíduos. Supomos também que a taxa de mortalidade é estável e proporcional a $y(t)$.

Não considerando migrações, a taxa de crescimento da população é modelada por

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

e a solução é dada por

$$y = y_0 e^{kt}$$

onde y_0 é o tamanho da população no instante $t = 0$.

Exemplo

Uma determinada doença desaparece quando tratada devidamente. A taxa de decaimento do número de casos, a qual o número de pessoas infectadas varia, é proporcional ao número y de pessoas infectadas. Se o número de casos, num ano qualquer, é reduzido em 10%, sendo existentes hoje 3000 casos, quantos anos serão necessários para que o número seja reduzido a 500 casos?

Solução:
Temos que $y = y_0 e^{kt}$. Precisamos inicialmente determinar y_0 e k. Consideremos que $y = 3000$ quando $t = 0$. Assim, obtemos

$$y(0) = y_0 e^{k.0} = y_0 = 3000.$$

Desta forma,

$$y = 3000e^{kt}.$$

Quando $t = 1$ ano, o número de casos será 90% dos casos de hoje, ou seja, 2700 casos. Então

$$\begin{aligned} 2700 &= 3000e^{k.1} \\ e^k &= 0,9 \\ \ln(e^k) &= \ln(0,9) \\ k &= \ln(0,9) \cong -0,11. \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer instante t

$$y = 3000e^{-0,11t}.$$

Agora precisamos calcular o valor de t tal que $y = 500$.

Então

$$\begin{aligned} 500 &= 3000e^{-0,11t} \\ e^{-0,11t} &= \frac{1}{6} \\ \ln(e^{-0,11t}) &= \ln(\frac{1}{6}) \\ -0,11t &= \cong -1,8 \\ t &= \cong 16,3anos. \end{aligned}$$

Assim, levará cerca de 16, 3 anos para que o número seja reduzido a 500 casos.