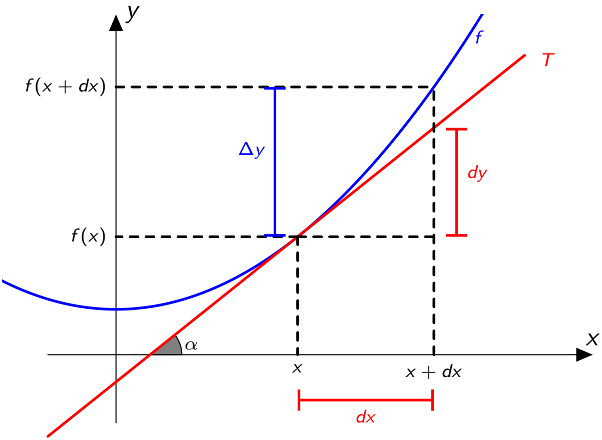
MAT146 - Cálculo I - Diferencial

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Observe que até o momento, $\dfrac{dy}{dx}$ tem sido visto apenas como uma notação para a derivada da equação $y = f(x)$. O que faremos agora é interpretar $\dfrac{dy}{dx}$ como um quociente entre dois acréscimos. Inicialmente, olharemos dx como sendo um acréscimo em x e determinaremos o significado de dy.

Como $f'(x)$ é o coeficiente angular da reta tangente T no ponto $(x, f(x))$ e $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$, se olharmos para dy como o acréscimo na ordenada da reta tangente T, correspondente ao acréscimo de dx em x, teremos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$


y
f
T
f(x + dx)
Δy
dy
f(x)
α
x
x
x + dx
dx

Observe pela figura que

$$f'(x) = \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{dy}{dx}.$$

Logo,

$$dy = f'(x)dx.$$

Assim, fixado o valor x, podemos olhar para a função linear, que a cada $dx \in \mathbb{R}$, associa $dy \in \mathbb{R}$, onde $dy = f'(x)dx$. Tal função, denomina-se diferencial de f em x, ou simplesmente, diferencial de $y = f(x)$.

Exemplo

Dado $y = x^2$. Iremos relacionar Δy com dy.

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)' = 2x.$$

Logo, $dy = 2xdx$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+dx) - f(x) \\ &= (x+dx)^2 - x^2 \\ &= 2xdx + (dx)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta y - dy = (dx)^2.$$

Observe que quanto menor for dx, mais próximo dy estará de Δy.

Exemplo

Ainda para $y = x^2$, *calcularemos um valor aproximado para o acréscimo* Δy, *quando* x *passa de* $x = 1$ *para* $x + dx = 1,001$.

A diferencial de $y = x^2$ *em* x *é dada por*

$$dy = 2xdx.$$

Em $x = 1$, *temos* $dy = 2dx$. *Como*

$$x + dx = 1,001 \quad e \quad x = 1, \quad \text{então} \quad dx = 0,001.$$

Logo, $dy = 0,002$ *e assim,*

$$(1,001)^2 \approx (1)^2 + dy = 1,002.$$

Exemplo

Através da diferencial, iremos agora calcular um valor aproximado para $\sqrt{1,01}$.

Para isso considere a função $y = \sqrt{x}$. *Calculemos* dy *para* $x = 1$ *e* $dx = 0,01$.

Sabemos que

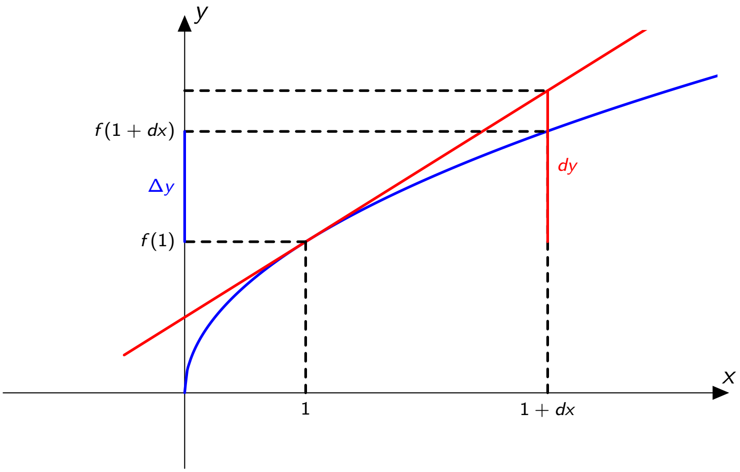
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

Para $x = 1$, *temos* $dy = \dfrac{1}{2}dx$. *Logo,*

$$dy = \frac{0,01}{2} = 0,005$$

e consequentemente

$$f(1,01) = \sqrt{1,01} \approx f(1) + dy = 1,005.$$



y
$f(1+dx)$
Δy
$f(1)$
dy
x
1
$1+dx$