

MAT146 - Cálculo I - Taxas de Variação

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Observe que até o momento, $\frac{dy}{dx}$ tem sido visto apenas como uma notação para a derivada da equação $y = f(x)$. O que faremos agora é interpretar $\frac{dy}{dx}$ como um quociente entre dois acréscimos. Inicialmente, olharemos dx como sendo um acréscimo em x e determinaremos o significado de dy .

Como $f'(x)$ é o coeficiente angular da reta tangente T no ponto $(x, f(x))$ e $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, se olharmos para dy como o acréscimo na ordenada da reta tangente T , correspondente ao acréscimo de dx em x , teremos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Observe pela figura que $f'(x) = \tan(\alpha) = \frac{dy}{dx}$. Logo,

$$dy = f'(x)dx.$$

Assim, fixado o valor x , podemos olhar para a função linear, que a cada $dx \in R$, associa $dy \in R$, onde $dy = f'(x)dx$. Tal função, denomina-se diferencial de f em x , ou simplesmente, diferencial de $y = f(x)$.

Exemplo

Dado $y = x^2$. Iremos relacionar Δy com dy .

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)' = 2x.$$

Logo, $dy = 2x dx$.

Por outro lado,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + dx^2.$$

Portanto,

$$\Delta y - dy = (dx)^2.$$

Observe que quanto menor for dx , mais próximo dy estará de Δy .

Exemplo

Ainda para $y = x^2$, calcularemos um valor aproximado para o acréscimo Δy , quando x passa de $x = 1$ para $x + dx = 1,001$.

A diferencial de $y = x^2$ em x é dada por

$$dy = 2x dx.$$

Em $x = 1$, $dy = 2dx$. Como

$$x + dx = 1,001 \text{ e } x = 1, \text{ então } dx = 0,001.$$

Logo, $dy = 0,002$.

Pensando em Δy , temos

$$\Delta y = ((1,001)^2 - (1)^2) = 0,002001.$$

Exemplo (Continuação)

Portanto, o erro que cometemos em aproximar dy de Δy é

$$\Delta y - dy = 0,000001.$$

Exemplo

Através do diferencial, iremos agora calcular um valor aproximado para $\sqrt{1,01}$.

Considere a função $y = \sqrt{x}$. Calculemos dy para $x = 1$ e $dx = 0,01$.

Sabemos que $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Para $x = 1$ temos $dy = \frac{1}{2}dx$. Logo,

$$dy = \frac{0,01}{2} = 0,005.$$

Exemplo (continuação)

Logo, $1 + dy = 1,005$ é um valor aproximado para $\sqrt{1,01}$, com erro em módulo inferior a 0,001.

Já vimos que se a seguinte equação

$$s = f(t),$$

representa a distância percorrida por uma partícula em um período de tempo t por exemplo em segundos e a distância em metros, então

$f'(t)$ representa a taxa de variação instantânea de $f(t)$ em relação a t , a qual chamaremos de **velocidade**, dada em m/s .

$f''(t)$ representa a taxa de variação instantânea da velocidade no instante t , dada em $(m/s)/s$, que indicaremos m/s^2 . Em Física, $f''(t)$ é chamada de **aceleração instantânea**.

Suponha uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = f(t)$, onde a velocidade instantânea é dada por v em m/s e a aceleração instantânea é dada por a em m/s^2 . Neste caso temos

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

onde

$$\frac{da}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Exemplo

Um ponto se move ao longo do gráfico $y = x^2 + 1$ de modo que sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 3cm/s. Qual é, quando $x = 4$ (cm), a velocidade da ordenada y ?

Neste caso, x e y representam funções sobre o tempo e queremos saber a velocidade de y no instante t_0 , onde $x(t_0) = 4$, ou seja,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0}.$$

Através da regra da cadeia, derivando $y = x^2 + 1$, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}.$$

Exemplo (Continuação)

Como $\frac{dx}{dt} = 3$, temos

$$\frac{dy}{dt} = 6x.$$

No instante t_0 , temos $x(t_0) = 4$ e assim,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = 6.4 = 24 \text{ cm/s}$$

Exemplo

Um ponto P mové-se sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 1$. Sabe-se que as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de P são funções definidas e deriváveis num intervalo I . Verificaremos que $\frac{dy}{dt} = \frac{-4x}{y} \frac{dx}{dt}$ em todo $t \in I$, com $y(t) \neq 0$.

De fato,

$$\frac{d}{dt}(4x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(1)$$

$$8x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$y \frac{dy}{dt} = -4x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-4x}{y} \frac{dx}{dt}$$