EST 105

INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA

RESUMO

Medidas de Posição e Dispersão de V.A.

Departamento de Estatística – UFV
Av. Peter Henry Rolfs, s/n
Campus Universitário
36570.977 – Viçosa, MG
http://www.det.ufv.br/

Medidas de Posição

1. Esperança Matemática

- A esperança matemática é o valor esperado ou valor médio, calculado de acordo com um modelo de probabilidade, associado à uma variável aleatória X.
- Se X é uma variável aleatória então, E(X) é a esperança matemática de X.

1.1. Definição de E(X) para X uma v. a. discreta

- Seja X uma v.a.d. com a seguinte distribuição de probabilidades:

x	x_1	x_2	...	x_r	Total
P(x)	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_r)$	**1**

- A esperança matemática ou o valor médio de X, é dada por:

$$E(X) = \mu_X = x_1\,P(x_1) + x_2\,P(x_2) + \cdots + x_r\,P(x_r) = \sum_{i=1}^{r} x_i\,P(x_i)$$

Exemplo 1. Um fabricante produz 10% de suas peças com defeito. Se uma peça produzida apresentar defeito, o fabricante perde R$1,00. Por outro lado, se a peça produzida for não defeituosa, ela lhe dá um lucro de R$5,00. Seja X uma variável aleatória definida como X = {lucro líquido por peça}. **Calcule a média do lucro líquido por peça.**

1.2. Definição de E(X) para X uma v. a. contínua

- Seja f(x) a função densidade de probabilidade da v. a. c. X.
- A esperança matemática ou o valor médio de X é dado por:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Exemplo 2. Seja X uma v.a.c. com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & para\ outros\ valores\ de\ x. \end{cases}$$

Calcule o valor médio ou a esperança matemática de X.

1.3. Propriedades da Esperança Matemática

$\boldsymbol{P1})\ Seja\ k\ uma\ constante, então\ E(k) = k.$

$\boldsymbol{P2})\ Seja\ k\ uma\ constante\ e\ X\ uma\ v.a., então\ E(kX) = kE(X).$

$\boldsymbol{P3})\ Se\ X\ e\ Y\ são\ v.a.independentes, então\ E(XY) = E(X)E(Y).$

ATENÇÃO: Se $E(XY) = E(X)E(Y)$, isto **não** implica que X e Y são independentes.

$\boldsymbol{P4})\ E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y),$ em que a e b são constantes.

$\boldsymbol{P5})\ E(X \pm k) = E(X) \pm k.$

ATENÇÃO: As propriedades P1 a P5 estão demonstradas, para v.a. contínuas, nas páginas 119 e120 do Roteiro de Aulas.

Exemplo 3. Considere, novamente, a v.a.c. X do Exemplo 2 e seja Y = 3X+8. Determine E(Y).

Obs.: Se conhecermos *f(x),* a f.d.p. da v.a.c. X ou P(x), a f.p. da v.a.d. X, é possível obter o valor esperado de qualquer função *h* da v.a. X. Para tanto, fazemos:

- $E[h(X)] = \sum_x h(x)P(x)$, se X é v.a. discreta.
- $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f(x)\, dx$, se X é v.a. contínua.

Assim, no Exemplo 3, uma solução alternativa seria:

$$E(Y) = E(3X+8) = \int_0^1 h(x)f(x)\, dx = \int_0^1 (3x+8)2x dx = \int_0^1 (6x^2+16x)\, dx$$

$$=2x^3 + 8x^2|_0^1 = (2+8)-(0+0) = 10.$$

Medidas de Dispersão

1. Variância

- A variância é uma medida que quantifica a dispersão dos valores em torno da média.

- A variância da variável aleatória X é definida como:

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Em que:

$$E(X^2) = \sum_x x^2 P(x) \quad se\ X \text{ é v. a. discreta}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx\,,\ \ se\ X \text{ é v. a. contínua}$$

Exemplo 4. Considere, novamente, a v.a.d. X do Exemplo 1. Calcule a variância de X.

X = {Lucro líquido por peça}

x	-1	5	
P(x)	0,10	0,90	**1**

Exemplo 5. Considere novamente, a v.a.c. X do Exemplo 2, cuja f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & para\ outros\ valores\ de\ x. \end{cases}$$

Calcule a variância de X.

1.1. Propriedades da Variância

$\boldsymbol{P1}$) $Seja\ k\ uma\ constante, então\ V(k) = 0.$

$\boldsymbol{P2}$) $V(X \pm k) = V(X).$

$\boldsymbol{P3}$) $Seja\ k\ uma\ constante\ e\ X\ uma\ v.a., então\ V(kX) = k^2 V(X).$

$\boldsymbol{P4}$) $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$, se X e Y forem independentes.

- **Se X e Y não forem independentes**, então,

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\,Cov(X,Y)$, sendo $Cov(X,Y)$ a covariância de X e Y (medida que abordaremos adiante).

ATENÇÃO: As propriedades P1 a P4 estão demonstradas, na página 122 do Roteiro de Aulas.

Exemplo 6. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias **independentes** com:

$$E(X) = 5\,; \quad V(X) = 2; \qquad E(Y) = 8\,; \quad V(Y) = 3$$

Utilizando as propriedades de esperança e variância, já apresentadas, pede-se:

a) $\mathbf{E(X - Y + 3)}$

b) $\mathbf{V(2X - 3Y + 1)}$

c) $\mathbf{E\left[(X - Y)^2\right]}$

2. Desvio-padrão

- O desvio-padrão de uma v.a. X, denotado por σ_X, é a raiz quadrada positiva da variância de X. Isto é, $\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$.

3. Covariância

- É uma importante medida de **dispersão conjunta** entre duas variáveis aleatórias X e Y.

$$COV(X,Y) = E\{[(X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Em que

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} x_i y_j P(x_i, y_j), \qquad \text{se } X \text{ e } Y \text{ são v.a.d.}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy, \qquad se\ X \text{ e } Y\ são\ \text{v.a.c.}$$

3.1. Propriedades da Covariância

Sejam k, a e b valores constantes e sejam X, Y, W e Z variáveis aleatórias.

$\boldsymbol{P1}$) $COV(k,k) = COV(k,X) = COV(X,k) = 0$;

$\boldsymbol{P2}$) $COV(X,Y) = COV(Y,X)$;

$\boldsymbol{P3}$) $COV(X,X) = V(X)$;

$\boldsymbol{P4}$) $COV(aX,bY) = abCOV(X,Y)$;

$\boldsymbol{P5}$) $COV(X+Z,Y-W) = COV(X,Y) - COV(X,W) + COV(Z,Y) - COV(Z,W)$;

$\boldsymbol{P6}$) $V(aX \pm bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) \pm 2abCOV(X,Y)$.

As propriedades acima são consequências diretas das definições de Variância e Covariância apresentadas anteriormente.

Exemplo 7: Considere a distribuição de probabilidade conjunta da v.a.d. bidimensional (X,Y) apresentada a seguir:

x / y	0	2	4	$P(x)$
1	0,03	0,05	0,02	0,10
2	0,27	0,45	0,18	0,90
$P(y)$	0,30	0,50	0,20	**1**

Pede-se:

a) X e Y são independentes?

b) O valor esperado e a variância de X.

c) O valor esperado e a variância de Y.

d) Calcule $V\left(2X - \frac{Y}{3} + 2\right)$**.**

Exemplo 8 (Adaptado do Ex. 35 – pág. 131/132 – Roteiro de aulas): Considere a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & 0 \leq x \leq 1 \;\; e \;\; 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & para\ outros\ valores\ de\ x\ e\ y. \end{cases}$$

Pede-se:

a) Encontre a f.d.p. marginal de X.

b) O valor esperado de X.

c) Encontre a f.d.p. marginal de Y.

d) O valor esperado de Y.

e) Calcule COV(X,Y).

Exemplo 9. Admita que $W = 3X - 5Y + 2$. E que, $V(X) = E(X^2) = 2{,}5$; $E(Y) = 1{,}5$; $E(Y^2) = 16{,}65$ e $E(XY) = -4{,}2$.

Utilizando as propriedades de esperança, variância e covariância, pede-se:

a) $\mathbf{E(W)}$.

b) $\mathbf{V(W)}$.

c) $\mathbf{COV(X, Z)}$, em que Z é uma variável aleatória definida como Z=3X – 5.

UFV

Atividade Proposta

Resolver os exercícios do Roteiro de Aulas abaixo relacionados:

- Exercício 3 - pág. 124.
- Exercício 6 - pág. 125.
- Exercício 7 (itens a e b) - pág. 125.
- Exercício 17 (itens a, b, c e d) – pág. 128.
- Exercício 28 – pág. 130.

Campus Viçosa:
Avenida Peter Henry Rolfs, s/n
CEP 36570-900
Viçosa - MG - Brasil | + 55 31 3899-2200

Campus Florestal:
Rodovia LMG 818, km 6
CEP 35690-000
Florestal - MG - Brasil | + 55 31 3536-3300

Campus Rio Paranaíba:
Rodovia MG-230, Km 8
CEP 38810-000
Rio Paranaíba- MG - Brasil | + 55 34 3855-9300

www.ufv.br

UFV
Universidade Federal de Viçosa