

---

---

## MAT 241 - CÁLCULO III

---

---

AUTOR

LÍLIAN NEVES SANTA ROSA VALENTIM

*Universidade Federal de Viçosa*

2023 - I

# SUMÁRIO

## CAPÍTULO 1

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

### PÁGINA 1

1.1	Coordenadas no Espaço.....	1
1.2	Distância entre dois Pontos no Espaço .....	5
1.3	Vetores no Espaço .....	10
1.3.1	Operações com Vetores .....	13
1.4	Produto Interno .....	17
1.5	Produto Vetorial .....	28
1.5.1	Interpretação Geométrica do Produto Vetorial.....	30
1.6	Produto Misto .....	31
1.6.1	Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto .....	32
1.7	Retas no Espaço .....	34
1.7.1	Posições Relativas entre Retas no Espaço.....	36
1.8	Equação do Plano .....	39
1.9	Distâncias.....	42
1.10	Superfícies Quádricas.....	47
1.10.1	Quádricas Centradas.....	47

1.10.2	Quádricas Não Centradas .....	53
1.11	Superfície Cilíndrica .....	58
1.12	Superfície Cônica .....	60

## CAPÍTULO 2

## FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS \_\_\_\_\_ PÁGINA 63

2.1	Domínio, Imagem e Gráfico de Funções .....	63
2.2	Curva e Superfície de Nível .....	68
2.3	Noções de Topologia .....	71
2.4	Limites de Funções de Duas ou Três Variáveis .....	75

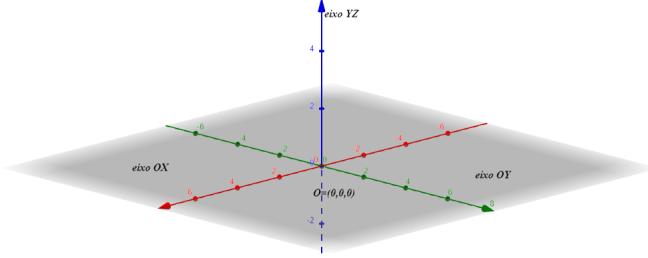
# 1

# ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Neste capítulo introduziremos os conceitos de sistema de coordenadas no espaço tridimensional, vetores, retas e planos no espaço, superfícies cilíndricas e superfícies quádricas.

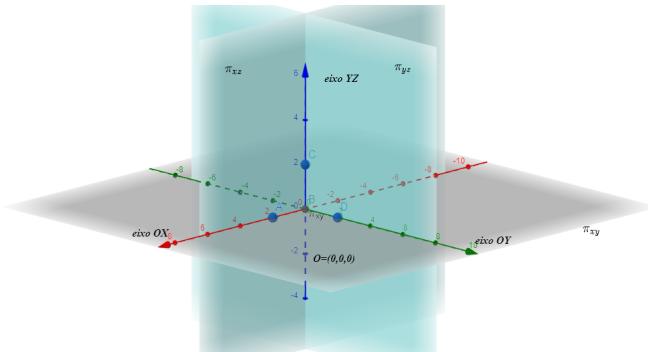
## 1.1 Coordenadas no Espaço

Seja  $E$  o espaço euclidiano tridimensional. Um sistema de coordenadas ortogonais  $OXYZ$  em  $E$  consiste de três eixos ortogonais entre si,  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ , com a mesma origem  $O$ .



Escolhido um sistema de eixos ortogonais  $OXYZ$  no espaço  $E$ , os planos cartesianos serão:

- $\pi_{xy}$ , o plano que contém os eixos  $OX$  e  $OY$ ,
- $\pi_{xz}$ , o plano que contém os eixos  $OX$  e  $OZ$ ,
- $\pi_{yz}$ , o plano que contém os eixos  $OY$  e  $OZ$ .



Um sistema de eixos ortogonais  $OXYZ$  no espaço  $E$  permite estabelecer uma correspondência entre pontos  $P \in E$  e ternos ordenados de números reais  $(x, y, z)$ , de modo que a cada ponto corresponde exatamente um terno ordenado

de números reais, e a cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente um ponto de  $E$ .

Assim, se  $P$  está em correspondência com o terno  $(x, y, z)$ , dizemos que  $x, y$  e  $z$  são as coordenadas de  $P$  em relação ao sistema de eixos ortogonais  $OXYZ$ . Estas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

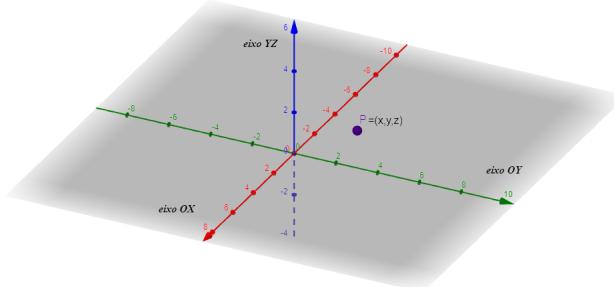
- Coordenada  $x$  : coordenada no eixo  $OX$  associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano  $\pi'$  que passa pelo ponto  $P$  e é paralelo ao plano  $\pi_{yz}$ .
- Coordenada  $y$  : coordenada no eixo  $OY$  associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano  $\pi''$  que passa pelo ponto  $P$  e é paralelo ao plano  $\pi_{xz}$ .
- Coordenada  $z$  : coordenada no eixo  $OZ$  associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano  $\pi'''$  que passa pelo ponto  $P$  e é paralelo ao plano  $\pi_{xy}$ .

Usa-se a notação  $\mathbb{R}^3$  para representar o conjunto cujos elementos são os ternos ordenados  $(x, y, z)$  de números reais :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais  $OXYZ$  no espaço  $E$ , todo ponto  $P \in E$  é identificado pelas suas coordenadas  $(x, y, z)$  em relação a este sistema de eixos e escrevemos:

$$P = (x, y, z)$$



Com esta identificação, observamos que:

- a origem do sistema de eixos ortogonais é o ponto  $O = (0, 0, 0)$ ;
- os eixos do sistema são os conjuntos:

$$eixo OX = \{(x, 0, 0) / x \in \mathbb{R}\};$$

$$eixo OY = \{(0, y, 0) / y \in \mathbb{R}\};$$

$$eixo OZ = \{(0, 0, z) / z \in \mathbb{R}\};$$

- os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\pi_{xy} = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{xy} : z = 0;$$

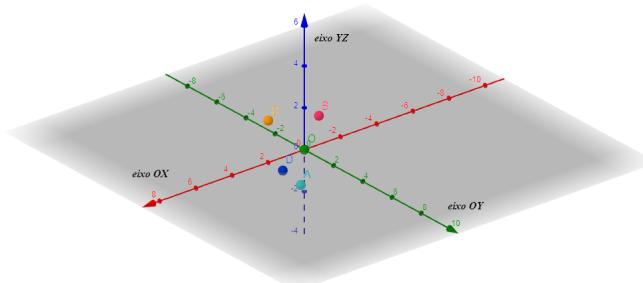
$$\pi_{xz} = \{(x, 0, z) / x, z \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{xz} : y = 0;$$

$$\pi_{yz} = \{(0, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{yz} : x = 0.$$

Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço  $E$  permite descrever todos os subconjuntos do espaço por meio das coordenadas de seus pontos. Veremos, por exemplo, como caracterizar retas, planos e algumas superfícies com equações que envolvem as coordenadas dos pontos neles contidos.

**Exemplo 1.** Represente, em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, os pontos  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (1, 1, -1)$ ,  $B = (0, 1, 2)$ ,  $C = (2, 0, 2)$  e  $D = (2, 1, 0)$ .

**Solução:**



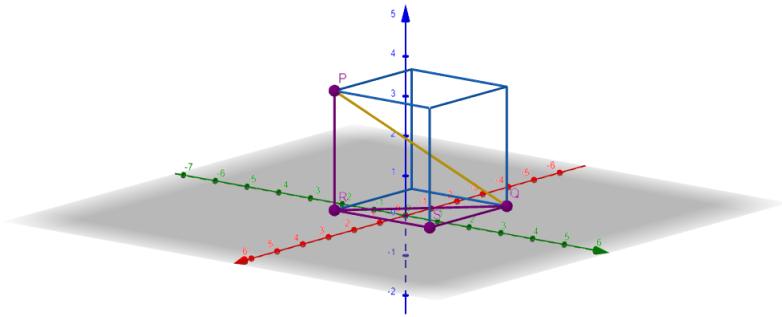
## 1.2 Distância entre dois Pontos no Espaço

Sejam  $P = (a, b, c)$  e  $Q = (a', b', c')$  pontos no espaço  $E$ .

Começamos observando que se  $P$  e  $Q$  estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, então eles têm duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o módulo da diferença das coordenadas diferentes.

Suponhamos que  $P$  e  $Q$  não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Para o cálculo da distância de  $P$  a  $Q$  vamos considerar os pontos auxiliares

$$R = (a, b, c') \text{ e } S = (a', b', c').$$



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo  $\Delta PRQ$ , obtemos:

$$d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(R, Q)^2$$

e ao triângulo  $\Delta RSQ$ , obtemos:

$$d(R, Q)^2 = d(R, S)^2 + d(S, Q)^2.$$

Assim,

$$d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(R, S)^2 + d(S, Q)^2.$$

Pela observação feita anteriormente, como  $(P, R)$ ,  $(R, S)$  e  $(S, Q)$  são pares de pontos sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados,

$$d(P, R) = |c' - c|, \quad d(R, S) = |b' - b| \quad \text{e} \quad d(S, Q) = |a' - a|.$$

Logo,

$$d(P, Q)^2 = |c' - c|^2 + |b' - b|^2 + |a' - a|^2,$$

ou seja,

$$d(P, Q) = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}.$$

**Exemplo 2.** Determine a distância entre os pontos  $P = (2, 3, -1)$  e  $Q = (4, -1, 3)$ .

**Solução:**

A distância de  $P$  a  $Q$  é

$$d(P, Q) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-1 - 3)^2 + (3 - (-1))^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{4 + 16 + 16}$$

$$d(P, Q) = 6$$

**Exemplo 3.** Obter o ponto  $P$  no eixo das ordenadas, equidistantes dos pontos  $A = (1, 1, 4)$  e  $B = (-6, 6, 4)$ .

**Solução:**

Como  $P$  pertence ao eixo das ordenadas,  $P$  deve ter coordenadas  $(0, y, 0)$ , para  $y \in \mathbb{R}$  que vamos determinar. E, como  $P$  é equidistante de  $A$  e  $B$  temos:

$$d(P, A) = d(P, B),$$

ou seja,

$$\sqrt{(0-1)^2 + (y-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(0+6)^2 + (y-6)^2 + (0-4)^2}$$

Daí, elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, temos

$$1 + y^2 - 2y + 1 + 16 = 36 + y^2 - 12y + 36 - 16$$

$$-2y + 12y = 72 - 2$$

$$10y = 70$$

$$y = 7.$$

Assim, o ponto do eixo das ordenadas, equidistante de  $A$  e  $B$  é  $P = (0, 7, 0)$ .

### Definição 1.1

A **esfera** é o conjunto de pontos do espaço que estão equidistantes de um ponto específico, ao qual denominamos **centro** da esfera.

Se  $C = (x_0, y_0, z_0)$  é o centro da esfera e  $P = (x, y, z)$  é um ponto qualquer cuja distância do centro é o número  $r$  ( $r > 0$ ), denominado **raio** da esfera, então:

$$\begin{aligned} d(P, C) &= r \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} &= r \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= r^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

A equação em (1.1) é chamada **equação da esfera** de centro  $C = (x_0, y_0, z_0)$  e raio  $r$ .

**Exemplo 4.** Mostre que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 1 = 0$$

representa uma esfera  $S$  e encontre seu centro e raio.

**Solução:**

Completando quadrados, podemos escrever a equação dada na forma

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) = 1$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + (z^2 - 6z + 9) - 9 = 1$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 15$$

Assim,  $S$  é a esfera de centro  $C = (1, -2, 3)$  e raio  $r = \sqrt{15}$ .

**Exemplo 5.** Que região de  $\mathbb{R}^3$  é representada pelas seguintes inequações

$$1 < x^2 + y^2 + z^2 < 9 \text{ e } z > 0 ?$$

**Solução:**

Temos:

$$1 < x^2 + y^2 + z^2 < 9 \Rightarrow 1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 3$$

Estas inequações representam os pontos  $P = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  cuja distância à origem é maior que 1 e menor que 3. Como  $z > 0$ , estes pontos estão acima do plano  $xy$ .

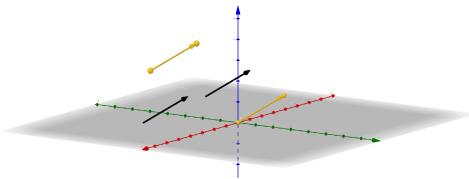
Assim, temos a região que está entre as esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  e acima do plano  $xy$ .

### 1.3 Vetores no Espaço

#### Definição 1.2

Vetor determinado por um segmento orientado  $\overline{AB}$  é o conjunto de todos os segmentos orientados, equipolentes a  $\overline{AB}$ , isto é, que têm a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento de  $\overline{AB}$ .

O vetor determinado pelo segmento  $\overline{AB}$  é indicado por  $\vec{AB}$ , tem como ponto inicial *A* e ponto final *B*, e seu comprimento é denotado por  $\|\vec{AB}\|$ .



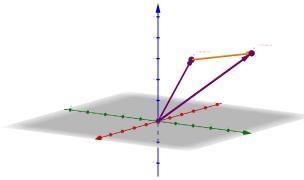
#### Definição 1.3

Quando um vetor  $\vec{v}$  está representado por um segmento orientado com ponto inicial na origem  $O = (0, 0, 0)$  e ponto final em  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , então suas componentes são dadas por

$$\vec{v} = \vec{OP} = (x_0, y_0, z_0).$$

Se o vetor  $\vec{v}$  está representado por um segmento orientado com ponto inicial  $P = (x_1, y_1, z_1)$  e ponto final  $Q = (x_2, y_2, z_2)$ , então suas componentes são dadas por

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$



Notemos que

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

#### Definição 1.4

Dois vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  são ditos **iguais** se, e somente se, as suas componentes correspondentes são iguais, isto é,  $u_1 = v_1$ ,  $u_2 = v_2$  e  $u_3 = v_3$ .

**Exemplo 6.** O vetor  $\overrightarrow{AB}$  é tal que  $A = (2x + 1, 3y - 2, 2z)$  e  $B = (x, y, 12)$ . Se o vetor equivalente, localizado na origem, é  $\vec{v} = (-4, 12, 0)$ , determine os valores de  $x, y$  e  $z$ .

**Solução:**

Temos:

$$\overrightarrow{AB} = (x - (2x + 1), y - (3y - 2), 12 - 2z) = (-x - 1, -2y + 2, 12 - 2z).$$

Como  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ , temos:

$$\begin{cases} -x - 1 = -4 \\ -2y + 2 = 12 \\ 12 - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = 6 \end{cases}$$

**Exemplo 7.** Considere os pontos  $A = (1, 4, 0)$ ,  $B = (-1, 1, -1)$  e  $C = (3, 5, -10)$ . Encontre as componentes do vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  e as coordenadas dos pontos  $D$  e  $P$  tais que  $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$ .

**Solução:**

Temos:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1 - 1, 1 - 4, -1 - 0) = (-2, -3, -1).$$

Seja  $D = (x, y, z)$  o ponto de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ . Então, como  $\overrightarrow{CD} = (x - 3, y - 5, z + 10)$ , temos:

$$\begin{cases} x - 3 = -2 \\ y - 5 = -3 \\ z + 10 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -11 \end{cases}$$

Logo,  $D = (1, 2, -11)$ .

Como o ponto inicial de  $\overrightarrow{OP}$  é a origem e  $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$ , então  $P = (-2, -3, -1)$ .

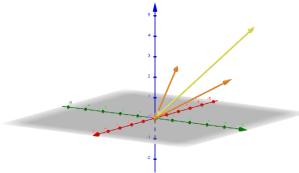
### 1.3.1 Operações com Vetores

#### Adição

Definição 1.5

Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vetores em  $\mathbb{R}^3$ . Definimos a adição (ou soma) de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  por

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$



**Exemplo 8.** Sejam  $A = (3, 2, 0)$ ,  $B = (0, 3, -2)$  e  $C = (4, 3, 2)$  pontos do espaço. Determine o ponto  $D$  tal que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

**Solução:**

Temos

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 3, 3 - 2, -2 - 0) = (-3, 1, -2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - 3, 3 - 2, 2 - 0) = (1, 1, 2).$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) = (-2, 2, 0).$$

Além disso, se  $D = (x, y, z)$  é a extremidade do representante  $\overrightarrow{AD}$  do vetor soma  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  com origem no ponto  $A$ , então:

$$\begin{cases} x - 3 = -2 \\ y - 2 = 2 \\ z - 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Portanto,  $D = (1, 4, 0)$ .

### Propriedades da Adição de Vetores no Espaço

A operação de adição de vetores no espaço possui as mesmas propriedades da operação de adição de vetores no plano, que são herdadas das correspondentes propriedades da adição de números reais.

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores no espaço.

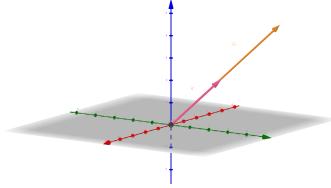
- (1) **Comutatividade:**  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
- (2) **Existência de elemento neutro:** O vetor nulo,  $\vec{O} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  é o único vetor tal que  $\vec{u} + \vec{O} = \vec{u} = \vec{O} + \vec{u}$ .
- (3) **Existência de inverso aditivo:** Dado um vetor  $\vec{u}$ , existe um único vetor, que é designado  $-\vec{u}$  e chamado inverso aditivo (ou simétrico) de  $\vec{u}$ , tal que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{O} = (-\vec{u}) + \vec{u}$ . Note que se  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ , então  $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ .
- (4) **Associatividade:**  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .

## Multiplicação por escalar

### Definição 1.6

Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  um vetor em  $\mathbb{R}^3$  e  $\lambda$  um escalar. Definimos a multiplicação por escalar por

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3).$$



**Exemplo 9.** Sejam  $A = (1, 2, 1)$  e  $B = (2, 3, 3)$ . Determinemos as extremidades  $D, D'$  e  $D''$  dos representantes  $CD, CD'$  e  $CD''$  dos vetores  $\vec{AB}$ ,  $-2\vec{AB}$  e  $2\vec{AB}$  com origem no ponto  $C = (1, 1, 0)$ .

### Solução:

Em termos de coordenadas,  $\vec{AB} = (2 - 1, 3 - 2, 3 - 1) = (1, 1, 2)$ .

Logo,

$$-2\vec{AB} = (-2 \cdot 1, -2 \cdot 1, -2 \cdot 2) = (-2, -2, -4),$$

$$2\vec{AB} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2, 2, 4).$$

Como  $C = (1, 1, 0)$ , as coordenadas dos pontos  $D = (d_1, d_2, d_3)$ ,  $D' = (d'_1, d'_2, d'_3)$  e  $D'' = (d''_1, d''_2, d''_3)$  satisfazem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} &\Rightarrow \begin{cases} d_1 - 1 = 1 \\ d_2 - 1 = 1 \\ d_3 - 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = 2 \\ d_3 = 2 \end{cases} \\ \overrightarrow{CD'} = -2\overrightarrow{AB} &\Rightarrow \begin{cases} d'_1 - 1 = -2 \\ d'_2 - 1 = -2 \\ d'_3 - 0 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'_1 = -1 \\ d'_2 = -1 \\ d'_3 = -4 \end{cases} \\ \overrightarrow{CD''} = 2\overrightarrow{AB} &\Rightarrow \begin{cases} d''_1 - 1 = 2 \\ d''_2 - 1 = 2 \\ d''_3 - 0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d''_1 = 3 \\ d''_2 = 3 \\ d''_3 = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

Portanto,

$$D = (2, 2, 2), D' = (-1, -1, -4) \text{ e } D'' = (3, 3, 4).$$

### Propriedades da Multiplicação por Escalar

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores no espaço e  $\lambda, \mu$  escalares reais. A multiplicação de um vetor por um escalar satisfaz às seguintes propriedades:

1. **Associatividade:**  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u}$ .
2. **Distributividade:**  $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$  e  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ .
3. **Elemento neutro multiplicativo:** O número  $1 \in \mathbb{R}$  satisfaz  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ .

### Observação 1.1

- (i) Se  $\vec{u}$  é um vetor do espaço, então o seu inverso aditivo  $-\vec{u}$  é obtido multiplicando  $\vec{u}$  por  $-1$ . De fato,  $\vec{u} + (-1) \cdot \vec{u} = (1 + (-1)) \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ .
- (ii) O vetor  $\vec{v}$  é **múltiplo do (ou paralelo ao)** vetor  $\vec{u}$  quando existe um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$ .

## 1.4 Produto Interno

### Definição 1.7

A **norma** ou **comprimento de um vetor**  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  no espaço é o número real não negativo

$$\|\vec{v}\| = d(A, B).$$

Este número não depende do segmento  $\overrightarrow{AB}$  escolhido para representar o vetor  $\vec{v}$ .

Em particular, tomando um sistema de eixos ortogonais  $OXYZ$  e representando o vetor  $\vec{v}$  pelo segmento  $\overrightarrow{OP}$ , as coordenadas de  $\vec{v}$  coincidem com as coordenadas do ponto  $P$  em relação ao sistema  $OXYZ$ .

Assim, se  $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$  então  $P = (x, y, z)$  e

$$\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**Exemplo 10.**

(a) Se  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ , então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

(b) Se  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ , com  $P = (2, 0, 1)$  e  $Q = (-3, 4, 2)$ , então

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-3 - 2, 4 - 0, 2 - 1) = (-5, 4, 1)$$

e

$$\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q) = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 1} = \sqrt{42}.$$

**Observação 1.2**

Um vetor  $\vec{v}$  de norma igual a 1 é chamado **unitário**.

**Definição 1.8**

Chama-se **produto interno** ou **produto escalar** usual de dois vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , e representa-se por  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  ou  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , ao número real

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3.$$

**Exemplo 11.** Se  $\vec{u} = (1, 0, -2)$  e  $\vec{v} = (3, 1, -1)$ , então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 3 + 0 + 2 = 5.$$

Proposição 1.1: Propriedades do Produto Interno

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores no espaço e  $\lambda$  um escalar real. São válidas as seguintes propriedades:

$$(i) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$

$$(ii) \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle;$$

$$(iii) \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle;$$

$$(iv) \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle;$$

$$(v) \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \geq 0, \text{ para todo } \vec{u} \text{ e } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } \vec{u} = \vec{0}.$$

*Demonstração.* Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  vetores no espaço e  $\lambda$  um escalar real. Temos:

$$(i) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$

$$\begin{aligned} (ii) \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle &= \langle (u_1, u_2, u_3), (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \rangle \\ &= u_1 \cdot (v_1 + w_1) + u_2 \cdot (v_2 + w_2) + u_3 \cdot (v_3 + w_3) \\ &= u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot v_2 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot v_3 + u_3 \cdot w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3) + (u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3) \\
&= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{iii}) \quad &\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle \\
&= (u_1 + v_1) \cdot w_1 + (u_2 + v_2) \cdot w_2 \\
&= u_1 \cdot w_1 + v_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3 + v_3 \cdot w_3 \\
&= (u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3) + (v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3) \\
&= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{iv}) \quad &\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3) \\
&= \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1) + \lambda \cdot (u_2 \cdot v_2) + \lambda \cdot (u_3 \cdot v_3) \\
&= (\lambda \cdot u_1) \cdot v_1 + (\lambda \cdot u_2) \cdot v_2 + (\lambda \cdot u_3) \cdot v_3 \\
&= \langle (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \lambda \cdot u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle \\
&= \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3) \\
&= \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1) + \lambda \cdot (u_2 \cdot v_2) + \lambda \cdot (u_3 \cdot v_3) \\
&= u_1 \cdot (\lambda \cdot v_1) + u_2 \cdot (\lambda \cdot v_2) + u_3 \cdot (\lambda \cdot v_3) \\
&= \langle (u_1, u_2, u_3), (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \lambda \cdot v_3) \rangle \\
&= \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{v}) \quad &\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0, \text{ para todo } \vec{u};
\end{aligned}$$

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$  se, e somente se, cada uma das parcelas da soma  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$  é igual a zero, o que resulta em  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ , ou seja,  $\vec{u} = \vec{0}$ .

□

**Exemplo 12.**

(a) Mostre que  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$ .

(b) Mostre que  $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ .

**Solução:**

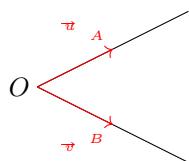
$$\begin{aligned}(a) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\&= \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\&= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\&= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle &= \langle \vec{u}, \vec{u} - \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle \\&= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\&= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

### Ângulo entre Dois Vetores

**Definição 1.9**

O ângulo entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos é o ângulo  $\theta$  formado pelas semirretas  $OA$  e  $OB$  e tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

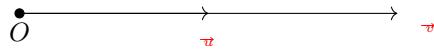


### Observação 1.3

(i) Se  $\theta = \pi$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma direção e sentido contrários.



(ii) Se  $\theta = 0$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma direção e mesmo sentido.



(iii) Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais e indica-se por  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

(iv) O vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor.

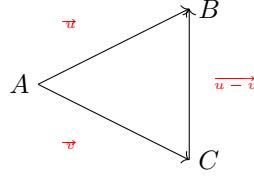
### Teorema 1.1

Se  $\theta$  é o ângulo entre os vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos \theta.$$

*Demonstração.*

**1º caso:** Suponhamos que  $\vec{v}$  não seja um múltiplo escalar de  $\vec{u}$ , como na figura a seguir:



Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo  $\Delta ABC$ , temos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta. \quad (I)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} - \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2. \quad (II) \end{aligned}$$

Comparando as igualdades (I) e (II), obtemos:

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2.$$

Logo,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta.$$

<sup>2º</sup> caso: Se  $\vec{v}$  é um múltiplo escalar de  $\vec{u}$ , então  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ . Daí,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \lambda \|\vec{u}\|^2.$$

Por outro lado,

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta = \|\vec{u}\|\|\lambda \vec{u}\| \cos \theta = |\lambda| \|\vec{u}\|^2 \cos \theta.$$

Se  $\lambda > 0$ , então  $|\lambda| = \lambda$  e  $\cos \theta = \cos 0 = 1$ . Logo,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Se  $\lambda < 0$ , então  $|\lambda| = -\lambda$  e  $\cos \theta = \cos \pi = -1$ . Logo,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

□

### Exemplo 13.

(a) Sejam  $\vec{u} = (1, 0, -2)$  e  $\vec{v} = (4, -3, 2)$ . Então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 = 4 + 0 - 4 = 0.$$

Logo,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais.

(b) Sejam  $\vec{u} = (-1, -1, -4)$  e  $\vec{v} = (1, -2, -2)$ . Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Então

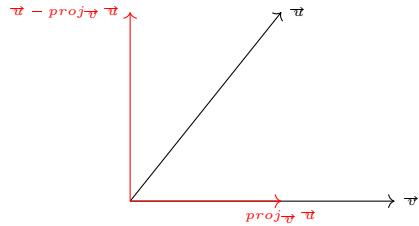
$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-4) \cdot (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{-1 + 2 + 8}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{9 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\theta = \arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

### Definição 1.10

Dados dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , chamamos **projeção ortogonal de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$** , e denotamos por  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ , o vetor paralelo a  $\vec{v}$  tal que  $\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$  seja ortogonal a  $\vec{v}$ .



### Teorema 1.2

A projeção ortogonal de um vetor  $\vec{u}$  sobre um vetor não nulo  $\vec{v}$  é dada por

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

*Demonstração.* Sejam  $\vec{u}_1 = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$  e  $\vec{u}_2 = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u} - \vec{u}_1$ .

Como  $\vec{u}_1$  é paralelo a  $\vec{v}$ , existe um escalar  $\lambda$  tal que  $\vec{u}_1 = \lambda \vec{v}$ . Logo,  $\vec{u}_2 = \vec{u} - \lambda \vec{v}$ .

Assim,

$$\langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} - \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \lambda \|\vec{v}\|^2.$$

Como  $\vec{u}_2$  é ortogonal a  $\vec{v}$ , temos que  $\langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = 0$  e, portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \|\vec{v}\|^2.$$

Daí,

$$\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}.$$

Portanto,

$$proj_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

□

**Exemplo 14.** Sejam  $\vec{u} = (2, -1, 3)$  e  $\vec{v} = (4, -1, 2)$ . Vamos determinar  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  tais que  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ , onde  $\vec{u}_1$  é paralelo a  $\vec{v}$  e  $\vec{u}_2$  é perpendicular a  $\vec{v}$ .

**Solução:**

Temos

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 8 + 1 + 6 = 15$$

e

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}.$$

Façamos

$$\vec{u}_1 = proj_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{15}{21} (4, -1, 2) = \left( \frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

e

$$\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1 = (2, -1, 3) - \left( \frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7} \right) = \left( -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7} \right).$$

Teorema 1.3: Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para quaisquer vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , temos

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

*Demonstração.*

Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são nulos, o resultado é trivial.

Suponhamos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos e seja  $\theta$  o ângulo entre eles. Então, como  $|\cos \theta| \leq 1$ , temos:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\cos \theta| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

□

Teorema 1.4: Desigualdade Triangular

Para quaisquer vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , temos

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

*Demonstração.*

Temos:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\cos \theta| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

□

## 1.5 Produto Vetorial

### Definição 1.11

Dados os vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , chama-se **produto vetorial** dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e denota-se por  $\vec{u} \times \vec{v}$ , ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

**Exemplo 15.** Sejam  $\vec{u} = (-1, 2, 3)$  e  $\vec{v} = (0, 1, -2)$ . Então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-7, -2, -1).$$

### Propriedades do Produto Vetorial

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores no espaço e  $\lambda$  um escalar real. São válidas as seguintes propriedades:

- (i)  $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ , qualquer que seja  $\vec{u}$ .

- (ii)  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ .
- (iii)  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ .
- (iv)  $\lambda \vec{u} \times \vec{v} = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$ .
- (v)  $\vec{u} \times \vec{v} = 0$  se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos.
- (vi)  $\vec{u} \times \vec{v}$  é ortogonal simultaneamente aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- (vii)  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$  (Identidade de Lagrange).
- (viii) Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores não nulos e se  $\theta$  é o ângulo entre eles, então  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ .

*Demonstração.*

Sejam  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$  vetores no espaço e  $\lambda$  um escalar real. Temos:

- (i)  $\vec{u} \times \vec{u} = (y_1 z_1 - z_1 y_1) \vec{i} - (x_1 z_1 - z_1 x_1) \vec{j} + (x_1 y_1 - y_1 x_1) \vec{k} = \vec{0}$ .
- (ii)  $\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} \\ &= -(z_1 y_2 - y_1 z_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} - (y_1 x_2 - x_1 y_2) \vec{k} \\ &= -\vec{v} \times \vec{u}. \end{aligned}$
- (iii)  $\begin{aligned} \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= (x_1, y_1, z_1) \times (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \\ &= (y_1(z_2 + z_3) - z_1(y_2 + y_3)) \vec{i} - (x_1(z_2 + z_3) - z_1(x_2 + x_3)) \vec{j} + \\ &\quad (x_1(y_2 + y_3) - y_1(x_2 + x_3)) \vec{k} \end{aligned}$

$$\begin{aligned}
&= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} + (y_1 z_3 - z_1 y_3) \vec{i} - \\
&\quad (x_1 z_3 - z_1 x_3) \vec{j} + (x_1 y_3 - y_1 x_3) \vec{k} \\
&= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.
\end{aligned}$$

(iv)  $\lambda \vec{u} \times \vec{v} = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$ .

(v)  $\vec{u} \times \vec{v} = 0$  se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos.

(vi)  $\vec{u} \times \vec{v}$  é ortogonal simultaneamente aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

(vii)  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$  (Identidade de Lagrange).

(viii) Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores não nulos e se  $\theta$  é o ângulo entre eles, então  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ .

□

### 1.5.1 Interpretação Geométrica do Produto Vetorial

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores não nulos e  $\theta$  o ângulo entre eles.

A área do paralelogramo  $ABCD$  é dada por

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

De fato, sejam  $\|\vec{u}\|$  e  $\|\vec{v}\|$  as medidas dos lados do paralelogramo  $ABCD$ ,  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e  $h$  a altura do paralelogramo relativo ao lado  $\overline{AB}$ . Então  $h = \|\vec{v}\| \sin \theta$ .

Portanto, a área do paralelogramo  $ABCD$  é

$$A = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

## 1.6 Produto Misto

Definição 1.12

Dados os vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$  chama-se **produto misto** de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , e denota-se por  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , ao número

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle.$$

**Exemplo 16.**

Sejam  $\vec{u} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 2)$  e  $\vec{w} = (1, 1, 1)$ . Então

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-1, 2, -1),$$

e assim,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle (1, 0, -1), (-1, 2, -1) \rangle$$

$$= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Observação 1.4

Se  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ , então:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle (x_1, y_1, z_1), \left( \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) \right\rangle \\
&= x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

### Propriedades do Produto Misto

- (i)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  se um dos vetores é nulo, se dois deles são múltiplos ou se três são coplanares.
- (ii)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$ .
- (iii)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}]$ .
- (iv)  $[\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .

#### 1.6.1 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto

O módulo do produto misto  $[\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}]$  é igual ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores  $\vec{u} = \vec{AD}$ ,  $\vec{v} = \vec{AB}$  e  $\vec{w} = \vec{AC}$ .

De fato, o volume do paralelepípedo é

$$V = \underbrace{\text{área da base}}_{A_b} \times \underbrace{\text{altura}}_h$$

Notemos que  $A_b = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$  e, sendo  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v} \times \vec{w}$ , a altura  $h$  é dada por:

$$h = \|\vec{u}\| \cdot |\cos \theta|.$$

Assim,

$$V = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot |\cos \theta|$$

$$V = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta$$

$$V = |\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle|$$

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.$$

### **Exemplo 17.**

Sejam  $\vec{u} = (a, 2, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, -2)$  e  $\vec{w} = (2b, -1, b)$ .

- (a) Sabendo-se que o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{i}$  é agudo, determine  $a$  de modo que a área do paralelogramo determinado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  seja  $\sqrt{50}$ .
- (b) Sabendo-se que o ângulo entre  $\vec{w}$  e  $\vec{k}$  é obtuso, determine  $b$  de modo que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  seja 5. (Use o valor de  $a$  encontrado no item (a)).

### **Solução:**

$$(a) \text{ Temos } \cos \alpha(\vec{u}, \vec{i}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{i} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{i}\|} \text{ e } \langle \vec{u}, \vec{i} \rangle = a \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = a.$$

Como  $\alpha(\vec{u}, \vec{i})$  é agudo,  $\cos \alpha(\vec{u}, \vec{i})$  é positivo. Logo,  $a > 0$ .

Como  $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-5, 2a+1, a-2)$  e como a área do paralelogramo determinado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é dada por  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ , teremos:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \sqrt{50} \Rightarrow \sqrt{25 + (2a+1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{50} \\ \Rightarrow 25 + 4a^2 + 4a + 1 + a^2 - 4a - 4 &= 50 \Rightarrow 5a^2 = 20 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2. \end{aligned}$$

(b) Como  $\measuredangle(\vec{w}, \vec{k})$  é obtuso,  $\cos \measuredangle(\vec{w}, \vec{k})$  é negativo. Logo,  $\langle \vec{w}, \vec{k} \rangle = b < 0$ .

O volume  $V$  do paralelepípedo formado pelos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  é dado por  $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ . Temos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2b & -1 & b \end{vmatrix} = 2b - 8b - 1 - 2b - 4 - 2b = -10b - 5.$$

Logo,

$$V = 5 \Rightarrow |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 5 \Rightarrow |-10b - 5| = 5 \Rightarrow -10b - 5 = 5 \text{ ou } 10b + 5 = 5$$

$$\Rightarrow b = -1 \text{ ou } b = 0.$$

Portanto, devemos ter  $b = -1$ .

## 1.7 Retas no Espaço

Definição 1.13

Seja  $r$  uma reta paralela a um vetor  $\vec{v} = (a, b, c)$  não nulo e que passa por

um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence à reta  $r$  se, e somente se, o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  é paralelo ao vetor  $\vec{v}$ , isto é, o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  é um múltiplo escalar de  $\vec{v}$ , ou seja,

$$\overrightarrow{P_0P} = t \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Em termos das componentes, podemos escrever:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc). \quad (**)$$

As equações dadas em  $(*)$  e  $(**)$  são chamadas **equação vetorial da reta  $r$** .

De  $(**)$ , segue

$$(***) \quad r : \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

As equações dadas em  $(***)$  são chamadas **equações paramétricas da reta  $r$**  e o vetor  $\vec{v} = (a, b, c)$  é chamado **vetor diretor da reta  $r$** .

Se  $a, b$  e  $c$  são não nulos, eliminando o parâmetro do sistema  $(***)$ , obtemos

$$**** \quad r : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

As equações dadas em  $****$  são chamadas **equações simétricas da reta  $r$** .

### **Exemplo 18.**

- (a) A reta que passa por  $P_0 = (1, 0, -1)$  e é paralela ao vetor  $\vec{v} = (3, -1, 2)$  tem equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

As equações simétricas de  $r$  são:

$$r : \frac{x-1}{3} = -y = \frac{z+1}{2}.$$

- (b) Encontre as equações paramétricas da reta  $r$  que passa por  $P_0 = (2, 4, -1)$  e  $P_1 = (3, -2, 7)$ .

Notemos que o vetor  $\overrightarrow{P_0 P_1} = (1, -6, 8)$  é paralelo a  $r$ . Como  $P_0 \in r$ , as equações paramétricas de  $r$  são

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 6t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

### 1.7.1 Posições Relativas entre Retas no Espaço

Quando consideramos duas retas no espaço, elas podem estar ou não num mesmo plano. Caso elas estejam contidas em um mesmo plano, serão ditas **retas coplanares**. Caso contrário, serão ditas **não coplanares** ou **reversas**.

Retas coplanares podem ser classificadas como:

- (i) **Paralelas:** Se os vetores diretores são múltiplos um do outro. Neste caso, elas podem ser:

- (a) **Coincidentes:** possuem um ponto em comum.
- (b) **Não coincidentes:** não possuem pontos comuns.
- (ii) **Concorrentes:** se interceptam em um único ponto. Neste caso, os vetores diretores não são paralelos.

**Exemplo 19.**

- (a) Sejam

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Sejam  $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_s$  vetores diretores de  $r$  e  $s$ , respectivamente. Notemos que  $\vec{v}_r = \vec{v}_s = (1, 1, 1)$ . Assim, as retas  $r$  e  $s$  são coplanares e paralelas. Como o ponto  $P_0 = (1, 0, 0)$  pertence a  $r$  mas não pertence a  $s$ , as retas são paralelas e não coincidentes.

- (b) Sejam

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Como no item anterior, as retas são coplanares e paralelas. Como o ponto  $P_0 = (1, 0, 0)$  pertence a ambas as retas,  $r$  e  $s$  são paralelas e coincidentes.

- (c) Consideremos as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Vamos mostrar que  $r$  e  $s$  são concorrentes.

Seja  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in r \cap s$ . Então existem  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{cases} x_0 = 1 + 2t_1 = 2 + t_2 \\ y_0 = 2t_1 = 3 - t_2 \\ z_0 = 2t_1 = 2t_2 \end{cases}$$

Logo, temos o sistema linear

$$\begin{cases} 2t_1 - t_2 = 1 \\ 2t_1 + t_2 = 3 \\ 2t_1 - 2t_2 = 0 \end{cases},$$

que admite única solução, a saber  $t_1 = t_2 = 1$ .

Logo,  $P_0 = (3, 2, 2)$  e as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes.

(d) Consideremos as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Sejam  $\vec{v}_r = (2, 2, 2)$  e  $\vec{v}_s = (2, 2, 3)$  vetores diretores de  $r$  e  $s$ , respectivamente.

Como  $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_s$  não são múltiplos um do outro,  $r$  e  $s$  não são paralelas.

Suponhamos  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in r \cap s$ . Então existem  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{cases} x_0 = 1 + 2t_1 = 1 + 2t_2 \\ y_0 = 2 + 2t_1 = 3 + 2t_2 \\ z_0 = 2t_1 = 3 + 3t_2 \end{cases}$$

Logo, temos o sistema linear

$$\begin{cases} 2t_1 - 2t_2 = 0 \\ 2t_1 - 2t_2 = 1 \\ 2t_1 - 3t_2 = 3 \end{cases},$$

que é impossível.

Logo,  $r$  e  $s$  não são concorrentes.

Portanto,  $r$  e  $s$  são reversas.

#### Observação 1.5

- (i) Podemos verificar que as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes através do produto misto e verificando que os vetores diretores  $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_s$  não são paralelos. Notemos que, se  $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}] = 0$ , com  $A \in r$  e  $B \in s$ ,  $r$  e  $s$  são coplanares.
- (ii) Podemos verificar que as retas  $r$  e  $s$  são reversas através do produto misto  $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}]$ , com  $A \in r$  e  $B \in s$ . Se  $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}] \neq 0$ ,  $r$  e  $s$  são reversas.

## 1.8 Equação do Plano

#### Definição 1.14

Suponhamos que queremos determinar a equação de um plano  $\pi$  que passa por  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e é perpendicular ao vetor  $\vec{n} = (a, b, c)$ .

Um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence a plano  $\pi$  se, e somente se, o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  for perpendicular ao vetor  $\vec{n}$ , ou seja,

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0.$$

Como  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , podemos escrever a equação acima como

$$\pi : \langle (a, b, c), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\pi : ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

Assim,

$$(*) \quad \pi : ax + by + cz + d = 0,$$

onde  $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ .

A equação  $(*)$  é chamada **forma geral da equação do plano  $\pi$**  e o vetor  $\vec{n}$  é chamado **vetor normal ao plano  $\pi$** .

### Exemplo 20.

- (a) Encontre a equação do plano  $\pi$  que passa por  $P_0 = (2, 1, -4)$  e é perpendicular ao vetor  $\vec{n} = (1, 2, -1)$ .

**Solução:**

Seja  $P = (x, y, z)$  pertencente ao plano  $\pi$ . Então  $\overrightarrow{P_0P} = (x - 2, y - 1, z + 4)$  é perpendicular a  $\vec{n}$ , isto é,

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0.$$

Daí,

$$\pi : \langle (1, 2, -1), (x - 2, y - 1, z + 4) \rangle = 0$$

$$\pi : 1(x - 2) + 2(y - 1) - 1(z + 4) = 0$$

$$\pi : x - 2 + 2y - 2 - z - 4 = 0$$

$$\pi : x + 2y - z - 8 = 0.$$

- (b) Encontre a equação geral do plano  $\pi$  que contém os pontos  $A = (2, 1, -1)$ ,  $B = (0, 1, 2)$  e  $C = (-1, -1, 3)$ .

**Solução:**

Uma vez que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem ao planp  $\pi$ , os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, 0, 3)$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-3, -2, 4)$  são paralelos a  $\pi$ .

O vetor normal ao plano  $\pi$  deve ser ortogonal aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Assim, escolhemos

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = (6, -1, 4).$$

Sabendo que  $A \in \pi$ , obtemos

$$\pi : 6(x - 2) - 1(y - 1) + 4(z + 1) = 0$$

$$\pi : 6x - y + 4z - 7 = 0.$$

## 1.9 Distâncias

### 1. Distância de um ponto a uma reta

Sejam  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer e  $r$  uma reta cujo vetor diretor é  $\vec{v}$ . A distância de  $P_0$  a  $r$ ,  $d(P_0, r)$ , é definida como a distância de  $P_0$  ao ponto de  $r$  mais próximo de  $P_0$ .

Seja  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  um ponto sobre a reta  $r$  e posicione o vetor  $\vec{v}$  de modo que  $P_1$  seja seu ponto inicial. Assim, os vetores  $\overrightarrow{P_1P_0}$  e  $\vec{v}$  formam um paralelogramo cujos lados medem  $\|\overrightarrow{P_1P_0}\|$  e  $\|\vec{v}\|$ . Como a área deste paralelogramo é dada por  $\|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\|$  segue que a distância de  $P_0$  a  $r$  é

$$d(P_0, r) = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

**Exemplo 21.**

Sejam  $P_0 = (1, 1, 5)$  e  $r$  :  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  Determine a distância de  $P_0$  a  $r$ .

**Solução:**

Notemos que  $\vec{v} = (1, -1, 2)$  é um vetor diretor de  $r$  e que  $P = (1, 3, 0) \in r$ .

$$\text{Então } \overrightarrow{P_0P} = (0, 2, -5) \text{ e } \vec{v} \times \overrightarrow{P_0P} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = (1, 5, 2).$$

Assim,

$$d(P_0, r) = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}.$$

## 2. Distância de um ponto a um plano

Sejam  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer e  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  um plano. A distância de  $P_0$  a  $\pi$ ,  $d(P_0, \pi)$ , é definida como a distância de  $P_0$  ao ponto de  $\pi$  mais próximo de  $P_0$ .

Seja  $P = (x_1, y_1, z_1)$  um ponto qualquer do plano  $\pi$  e posicione o vetor normal  $\vec{n}$  de modo que  $P$  seja seu ponto inicial. Assim, a distância procurada é igual ao comprimento da projeção ortogonal de  $\overrightarrow{PP_0}$  sobre  $\vec{n}$ , isto é,

$$d(P_0, \pi) = \|\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_0}\| = \left\| \frac{\langle \overrightarrow{PP_0}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{|\langle \overrightarrow{PP_0}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

Como  $\overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$  e  $n = (a, b, c)$ , temos

$$\begin{aligned} d(P_0, \pi) &= \frac{|\langle (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1), (a, b, c) \rangle|}{\|(a, b, c)\|} \\ &= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Uma vez que  $P \in \pi$ , suas coordenadas satisfazem

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0,$$

o que implica  $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$ .

Portanto,

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

### Exemplo 22.

Determine a distância do ponto  $P_0 = (0, -1, 0)$  ao plano  $\pi : 2x + y + 2z - 4 = 0$ .

### Solução:

Temos:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}.$$

### 3. Distância entre dois planos

Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  dois planos quaisquer. A distância entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$ ,  $d(\pi_1, \pi_2)$ , é definida como a menor distância entre dois pontos, um de  $\pi_1$  e outro de  $\pi_2$ .

- (i) Se os vetores normais não são paralelos, então os planos são concorrentes e, neste caso, a distância entre eles é zero.
- (ii) Se os vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (coincidentes ou não coincidentes) e a distância entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é igual à distância entre um ponto de um deles ao outro plano.

#### Exemplo 23.

Determinar a distância entre os planos  $\pi_1 : x + 2y + 6z - 1 = 0$  e  $\pi_2 : x + 2y + 6z - 10 = 0$ .

#### Solução:

Sejam  $n_1 = (1, 2, 6)$  e  $n_2 = (1, 2, 6)$  os vetores normais a  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente. Notemos que  $n_1 = n_2$  e, portanto,  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos.

Seja  $P_1 = (1, 0, 0) \in \pi_1$ . Então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{41}} = \frac{9}{\sqrt{41}}.$$

#### 4. Distância entre duas retas

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas retas quaisquer. A distância entre  $r_1$  e  $r_2$ ,  $d(r_1, r_2)$ , é definida como a menor distância entre dois pontos, um de  $r_1$  e outro de  $r_2$ .

(i) Se os vetores diretores são paralelos, então as retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas (coincidentes ou não coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de uma reta e a outra reta. Assim, se  $P_1 \in r_1$ ,  $P_2 \in r_2$  e  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são vetores diretores de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, temos:

$$d(r_1, r_2) = \frac{\|\overrightarrow{P_1 P_2} \times \vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_2\|}.$$

(ii) Se os vetores diretores não são paralelos, então as retas são reversas ou concorrentes. Estas retas definem dois planos paralelos,  $\pi_1$  que contém  $r_1$ , e é paralelo a  $r_2$ , e  $\pi_2$  que contém  $r_2$ , e é paralelo a  $r_1$ . Se  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são os vetores diretores de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, o vetor  $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  é normal a ambos os planos. A distância entre as retas é igual à distância entre os dois planos, isto é,

$$d(r_1, r_2) = d(\pi_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1) = \frac{|\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|},$$

com  $P_1 \in \pi_1$  e  $P_2 \in \pi_2$ .

#### Exemplo 24.

(a) Vamos calcular a distância entre as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Sejam  $v_r = (2, 2, 2)$  e  $v_s = (2, 2, 3)$  vetores diretores de  $r$  e  $s$ , respectivamente. Como  $v_r$  e  $v_s$  não são múltiplos um do outro,  $r$  e  $s$  não são paralelas (vimos que  $r$  e  $s$  são reversas).

Um vetor perpendicular a ambas as retas é

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = (2, -2, 0).$$

Este vetor é normal aos planos  $\pi_1$ , que contém  $r$  e é paralelo a  $s$  e  $\pi_2$  que contém  $s$  e é paralelo a  $r$ .

Sejam  $P_1 = (1, 2, 0) \in r$  e  $P_2 = (1, 3, 3) \in s$ . Então  $\overrightarrow{P_1 P_2} = (0, 1, 3)$  e

$$d(r, s) = d(\pi_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1) = \frac{|\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Vamos determinar a distância entre as retas

$$r : \frac{x-1}{4} = -\frac{y+1}{2} = \frac{z}{6} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

As retas  $r$  e  $s$  são paralelas, pois seus vetores diretores  $v_r = (4, -2, -6)$  e  $v_s = (2, -1, -3)$  são paralelos.

Logo,

$$d(r, s) = d(P_1, s) = \frac{\|\overrightarrow{P_1 P_2} \times \vec{v}_s\|}{\|\vec{v}_s\|},$$

onde  $P_1 \in r$  e  $P_2 \in s$ .

Sejam  $P_1 = (1, -1, 2) \in r$  e  $P_2 = (1, 0, 2) \in s$ . Então  $\overrightarrow{P_1 P_2} = (0, 1, 0)$  e

$$\overrightarrow{P_1 P_2} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-3, 0, -2).$$

Logo,

$$d(r, s) = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

## 1.10 Superfícies Quádricas

Definição 1.15

Uma equação geral do 2º grau em três variáveis

$$(I) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

com pelo menos uma das constantes  $A, B, C, D, E$  ou  $F$  diferentes de zero, representa uma **superfície quádrica** ou simplesmente uma **quádrica**.

Através de uma mudança de coordenadas (rotação e/ou translação), a equação (I) pode assumir uma das formas

$$(II) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M \quad (\text{quádrica centrada})$$

ou

$$(III) \quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 = Nz \\ Ax^2 + Bz^2 = Ny \\ Ay^2 + Bz^2 = Nx \end{cases} \quad (\text{quádrulas não centradas})$$

### 1.10.1 Quádrulas Centradas

Se nenhum dos coeficientes da equação

$$(II) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M$$

for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1. **Elipsóide:** Representado pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

Características:

- É simétrica em relação a todos os eixos coordenados, aos planos coordenados e a origem.
- Se duas das constantes  $a, b$  e  $c$  são iguais, temos um elipsóide de revolução.
- Interseções com os eixos coordenados:

eixo OX:  $A = (\pm a, 0, 0)$ ;

eixo OY:  $B = (0, \pm b, 0)$ ;

eixo OZ:  $C = (0, 0, \pm c)$ .

- Traços sobre os planos coordenados: elipses.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

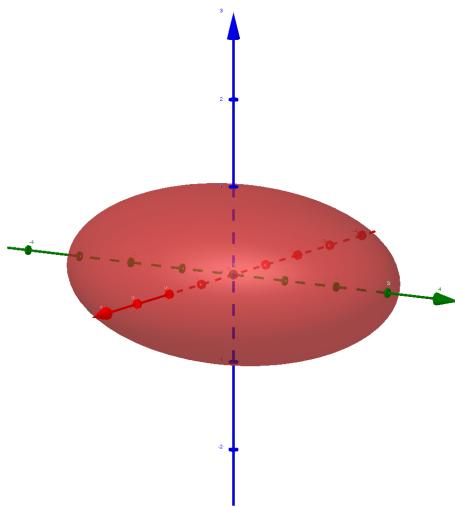
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}, \text{ elipses para } -c < k < c.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}, \text{ elipses para } -b < k < b.$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}, \text{ elipses para } -a < k < a.$$

- Esboço da superfície:



## 2. Hiperbolóide de uma folha: Representado pelas equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ou } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Características:

- É simétrica em relação a todos os eixos coordenados, aos planos coordenados e a origem.

- A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é negativo na sua equação.

Vamos analisar a superfície de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Interseções com os eixos coordenados:

eixo OX:  $A = (\pm a, 0, 0)$ ;

eixo OY:  $B = (0, \pm b, 0)$ ;

eixo OZ: não existe.

- Traços sobre os planos coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{elipse}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad (\text{hipérbole}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{array} \right. \quad (\text{hipérbole})$$

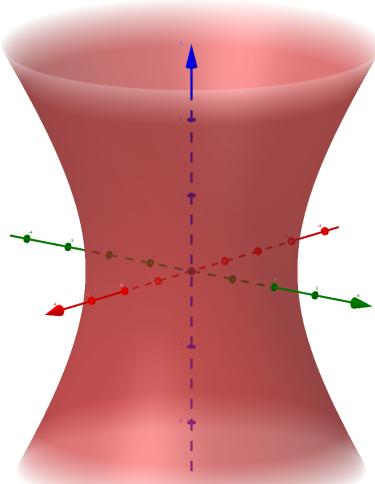
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{array} \right. , \text{ elipses para qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{array} \right. , \text{ hipérboles.}$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}, \text{ hipérboles.}$$

– Esboço da superfície:



3. Hiperbolóide de duas folhas: Representado pelas equações

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ou } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Características:

- É simétrica em relação a todos os eixos coordenados, aos planos coordenados e a origem.
- A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é positivo na sua equação.

Vamos analisar a superfície de equação

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Interseções com os eixos coordenados:

eixo OX: não existe;

eixo OY: não existe;

eixo OZ:  $C = (0, 0, \pm c)$ .

- Traços sobre os planos coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{conjunto vazio}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad (\text{hipérbole}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{array} \right. \quad (\text{hipérbole})$$

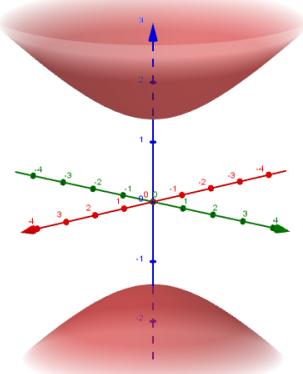
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1 \\ z = k \end{array} \right. , \text{ elipses para } k < -c \text{ ou } k > c.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{array} \right. , \text{ hipérboles para todo } k \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}, \text{ hipérboles para todo } k \in \mathbb{R}.$$

- Esboço da superfície:



### 1.10.2 Quádricas Não Centradas

Consideremos as equações

$$(III) \quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 = Nz \\ Ax^2 + Bz^2 = Ny \\ Ay^2 + Bz^2 = Nx \end{cases}$$

Se as constantes  $A, B$  e  $N$  são não nulas, podemos reescrever as equações (III) nas formas canônicas

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \\ \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = cy \\ \pm \frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = cx \end{array} \right.$$

com  $a$ ,  $b$  reais positivos e  $c$  não nulo.

Temos duas possibilidades:

1. Os coeficientes dos termos de 2º grau têm sinais iguais: **Parabolóide Elíptico**.

Representado por uma das equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx.$$

**Características:**

- Se  $a = b$ , temos um parabolóide de revolução.
- A interseção com os eixos coordenados é a origem  $O = (0, 0, 0)$ .
- A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica.

Analisaremos a superfície de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad c > 0.$$

- Para  $c > 0$ , temos  $z \geq 0$ . Logo, a superfície se encontra acima do plano  $xy$ .
- É simétrica em relação ao eixo  $OZ$  e aos planos  $xz$  e  $yz$ .

- Traços sobre os planos coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. , \quad (\text{ponto } O = (0, 0, 0))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} = cz \\ y = 0 \end{array} \right. , \quad (\text{parábola})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} = cz \\ x = 0 \end{array} \right. , \quad (\text{parábola})$$

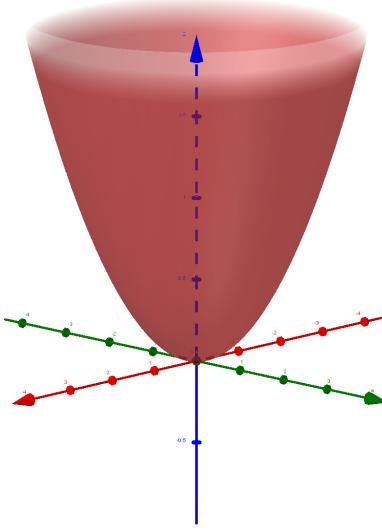
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{array} \right. , \quad (\text{elipses para } k > 0.)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = cz \\ y = k \end{array} \right. , \quad (\text{parábolas})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \\ x = k \end{array} \right. , \quad (\text{parábolas})$$

- Esboço da superfície:



2. Os coeficientes dos termos de 2º grau têm sinais contrários: Parabolóide Hiperbólico.

Representado por uma das equações

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{ou} \quad -\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx.$$

Características:

- A interseção com os eixos coordenados é a origem  $O = (0, 0, 0)$ .
- A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica.

Analisaremos a superfície de equação

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad c > 0.$$

- A superfície é simétrica em relação ao eixo  $OZ$  e aos planos  $xz$  e  $yz$ .

- Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \left( \text{par de retas concorrentes } y = \pm \frac{b}{a} x \right)$$

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} = cz \\ y = 0 \end{cases}, \quad (\text{parábola})$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = cz \\ x = 0 \end{cases}, \quad (\text{parábola})$$

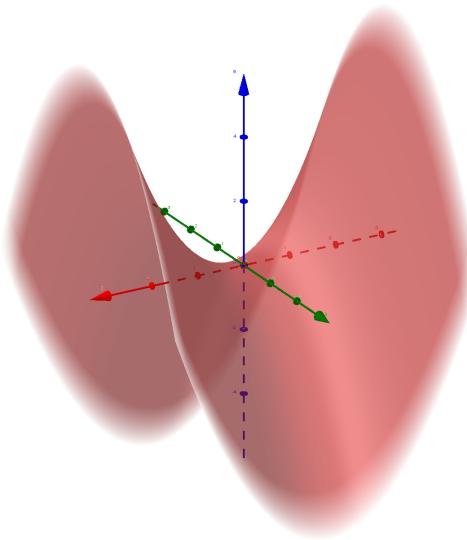
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{cases}, \quad (\text{hipérboles para } k \neq 0.)$$

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = cz \\ y = k \end{cases}, \quad (\text{parábolas})$$

$$\begin{cases} -\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \\ x = k \end{cases}, \quad (\text{parábolas})$$

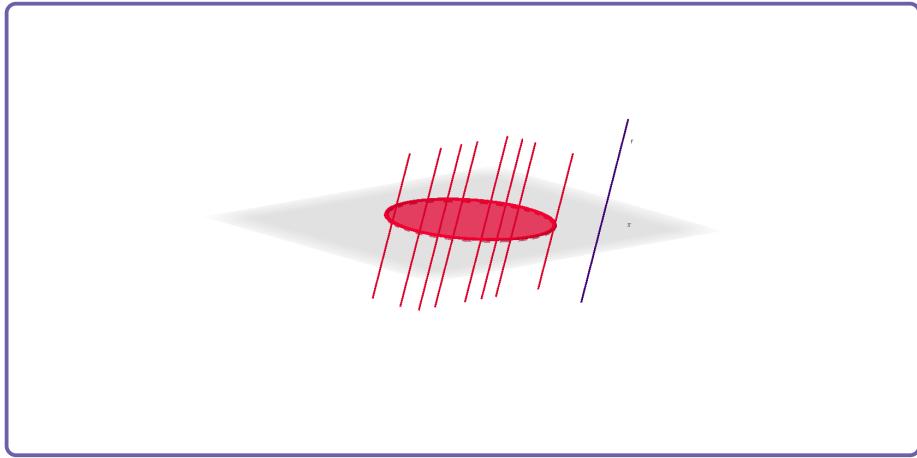
- Esboço da superfície:



## 1.11 Superfície Cilíndrica

### Definição 1.16

Sejam  $C$  uma curva plana e  $f$  uma reta fixa não contida nesse plano. **Superfície Cilíndrica** é a superfície gerada por uma reta  $r$  que se move paralelamente à reta fixa  $f$  em contato permanente com a curva plana  $C$ . A reta  $r$  que se move é denominada **geratriz** e a curva  $C$  é a **diretriz** da superfície cilíndrica.



Estamos interessados em superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva em um dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo coordenado não contido no plano. Neste caso, a equação da superfície cilíndrica é a mesma da sua diretriz.

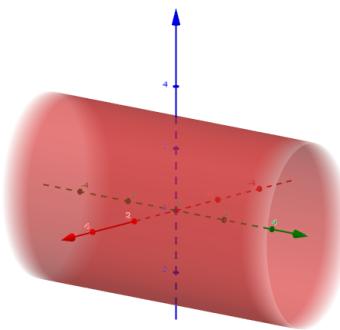
Conforme a diretriz seja uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada **circular**, **elíptica**, **hiperbólica** ou **parabólica**.

**Exemplo 25.**

A equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

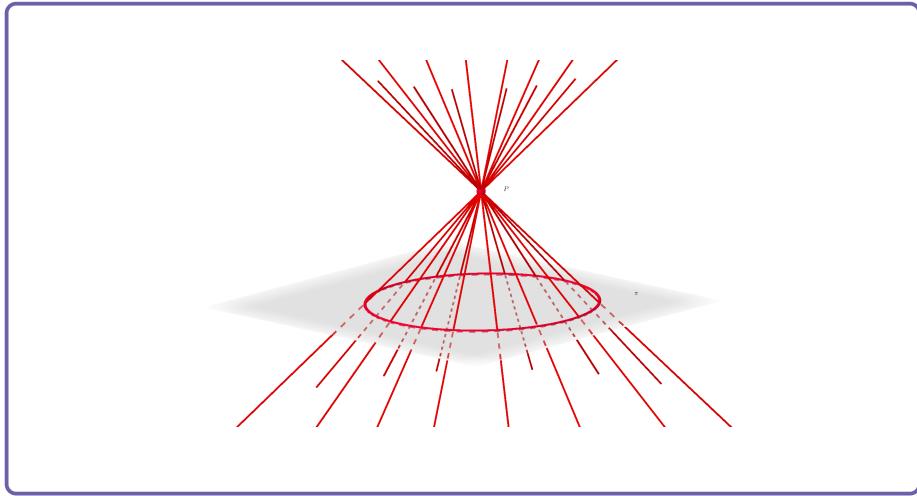
representa uma superfície cilíndrica com geratrizes paralelas ao eixo  $OY$  e com diretriz sendo uma elipse no plano  $xy$ .



## 1.12 Superfície Cônica

### Definição 1.17

Superfície Cônica é a superfície gerada por uma reta que se move apoiada em uma curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva. A reta é denominada **geratriz**, a curva plana é a **diretriz** e o ponto fixo é o **vértice** da superfície cônica.



Consideraremos o caso particular da superfície cônica cuja diretriz é uma elipse (ou circunferência) com o vértice na origem e seu eixo sendo um dos eixos coordenados.

A superfície cônica cujo eixo é o eixo  $OZ$  tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Características:

- Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \left( \text{ponto } O = (0, 0, 0) \right)$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \left( \text{par de retas concorrentes } z = \pm \frac{c}{a} x \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. , \quad \left( \text{par de retas concorrentes } z = \pm \frac{c}{b} y \right)$$

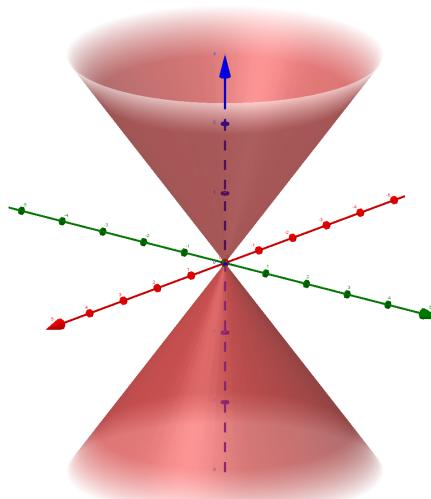
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

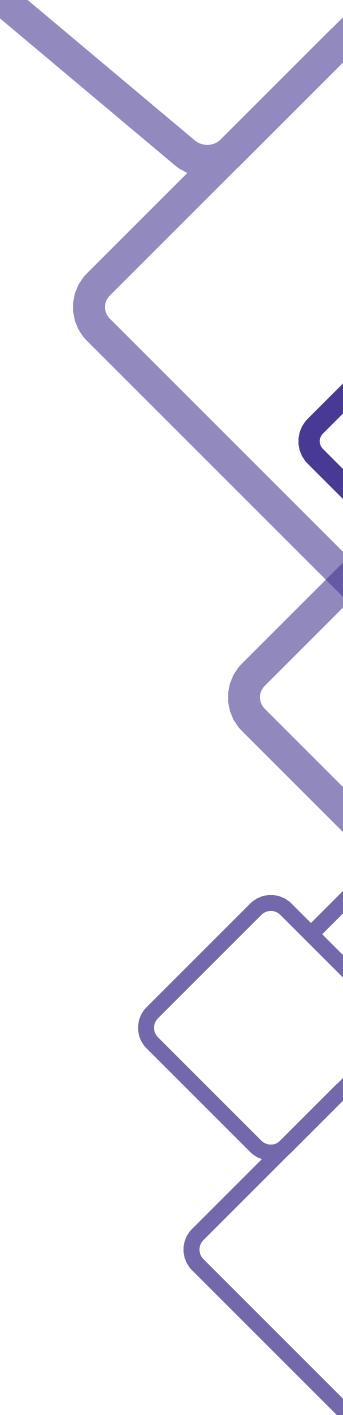
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{array} \right. , \quad (\text{elipses})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{array} \right. , \quad (\text{hipérboles})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{array} \right. , \quad (\text{hipérboles})$$

- Esboço da superfície:





# 2 FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Neste capítulo introduzimos os conceitos de limite, continuidade e diferenciabilidade de funções de várias variáveis, dando maior ênfase às funções de duas e três variáveis.

## 2.1 Domínio, Imagem e Gráfico de Funções

O objetivo desta seção é introduzir os conceitos de funções de várias variáveis. Ao final da mesma, vocês deverão ser capazes de determinar o domínio de uma função de várias variáveis e fazer o esboço de seu gráfico.

### Definição 2.1

Uma função real  $f$  de  $n$  variáveis reais é uma regra que associa a cada  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$  um único número real  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

O subconjunto  $D(f)$  de  $\mathbb{R}^n$  é chamado **domínio** da função  $f$ .

A **imagem** de  $f$ , denotada por  $Im(f)$ , é o conjunto

$$Im(f) = \{ f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} / (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f) \}.$$

Podemos denotar a função  $f$  por

$$\begin{aligned} f : D(f) \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

### Exemplo 26.

- (a) Seja  $f(x, y) = 3x^2 \sqrt{y} - 1$ . Então  $f$  é uma função de duas variáveis cujo domínio são os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $y \geq 0$ . Assim, o domínio de  $f$  consiste dos pontos no plano  $xy$  que estão sobre ou acima do eixo  $x$ .
- (b) A função  $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$  é uma função de duas variáveis reais, cujo domínio são os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $x \neq y$ , isto é, são todos os pontos do plano  $xy$  que não estão sobre a reta  $y = x$ .
- (c) A função  $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$  é uma função de duas variáveis cujo domínio são os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $x^2 - y > 0$ , ou seja,  $y < x^2$ .

Para esboçar esta região, usamos o fato de que a curva  $y = x^2$  separa a região onde  $y < x^2$  da região onde  $y > x^2$ .

Testamos, por exemplo, o ponto  $(x, y) = (0, 1)$ . Então  $x^2 = 0$  e  $y = 1$ . Logo, o ponto  $(0, 1)$  está na região onde  $y > x^2$ . Assim, a região onde  $y < x^2$  é aquela que não contém o ponto teste.

- (d) A função  $f(x, y) = \frac{5 \ln(x - y)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$  é uma função de duas variáveis reais, cujo domínio são os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $y < x$  e  $x^2 + y^2 < 4$ .

Testamos, por exemplo, o ponto  $(x, y) = (0, -1)$ . Então  $-1 = y < x = 0$  e  $x^2 + y^2 = 1 < 4$ . Logo,  $(0, -1)$  pertence ao domínio de  $f$ , que é a região abaixo da reta  $y = x$  e interior ao círculo de centro na origem e raio 2.

- (e) A função  $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$  é uma função de três variáveis cujo domínio são os pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  para os quais  $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ , ou seja,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Logo, o domínio de  $f$  consiste dos pontos sobre ou dentro da esfera de centro na origem e raio 1.

### Definição 2.2

Seja  $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $n$  variáveis. Definimos o **gráfico** de  $f$ , denotado por  $G(f)$ , como sendo o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formado por todos os pontos da forma  $(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$ , ou seja,

$$G(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)\}.$$

**Exemplo 27.**

- (a) Determine o domínio e esboce o gráfico de  $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

**Solução:**

O domínio de  $f$  são todos os pares de  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  para os quais  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ , ou seja, o domínio de  $f$  é o disco circular  $x^2 + y^2 \leq 1$  de raio 1 e centro na origem

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Um ponto  $(x, y, z)$  pertence ao gráfico de  $f$  se, e somente se,  $(x, y) \in D(f)$ , e  $z = f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , que é equivalente às condições  $z \leq 0$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Deste modo, o gráfico de  $f$  consiste na porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  abaixo ou sobre o plano  $xy$  (semiesfera).

- (b) Determine o domínio e esboce o gráfico de  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ .

**Solução:**

O domínio de  $f$  são todos os pares de  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  para os quais  $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ , ou seja, os pontos sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  e fora dela

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Um ponto  $(x, y, z)$  pertence ao gráfico de  $f$  se, e somente se,  $(x, y) \in D(f)$ , e  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ , que é equivalente às condições  $z \geq 0$  e  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Deste modo, o gráfico de  $f$  consiste na porção do hiperbolóide de uma folha  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  acima do plano  $xy$ .

(c) Esboce o gráfico de  $f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right)$ .

**Solução:**

O domínio de  $f$  são todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$  para os exceto a origem

$$D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Para auxiliar nosso esboço, vamos considerar os traços de  $f$  nos planos coordenados e as seções nos planos  $z = k$ .

Consideremos a equação

$$\ln\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right) = k \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = e^k.$$

Como  $e^k > 0$  para todo  $k \in \mathbb{R}$ , as seções sobre os planos  $z = k$  são elipses de equação

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(3e^{\frac{k}{2}})^2} + \frac{y^2}{(e^{\frac{k}{2}})^2} = 1 \\ z = k \end{cases}.$$

Os traços nos planos coordenados são:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}, (\text{elipse}), \quad \begin{cases} z = 2\ln|x| - \ln 9 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = 2\ln|y| \\ x = 0 \end{cases}.$$

Com base nos dados obtidos, podemos esboçar o gráfico de  $f$ .

## 2.2 Curva e Superfície de Nível

### Definição 2.3

Uma curva ao longo da qual  $z = f(x, y)$  tem valor constante é denominada **curva de nível** ou **curva de contorno** da função  $f$ . A equação da curva de nível ao longo da qual a função assume o valor constante  $k$  é  $f(x, y) = k$ .

Suponhamos que uma superfície  $S$  seja o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$ . Se a interseção de  $S$  com o plano, paralelo ao plano  $xy$ , de equação  $z = k$  é não vazia, então ela é uma curva cuja projeção no plano  $xy$  é a curva de nível  $f(x, y) = k$ . A cada ponto desta curva de nível corresponde um único ponto na superfície  $S$  que está  $k$  unidades acima do plano  $xy$ , se  $k$  for positivo, ou  $k$  unidades abaixo dele, se  $k$  for negativo. Ao considerarmos diferentes valores para a constante  $k$ , obtemos um conjunto de curvas de nível. Este conjunto de curvas é chamado **mapa de contorno da superfície**  $S$ .

### Exemplo 28.

Faça um mapa de contorno de  $f$ , mostrando as curvas de nível de  $f$  para os valores de  $k$  determinados e esboce o gráfico de  $f$ .

- (a)  $f(x, y) = 2 - x - y$ , com  $k = -4, -2, 0, 2, 4$ .

#### Solução:

O gráfico da superfície  $z = 2 - x - y$  é um plano.

Uma curva do nível de  $f$  de altura  $k$  tem equação

$$2 - x - y = k$$

$$y = -x + (2 - k),$$

a qual representa uma reta de inclinação  $-1$ .

O mapa de contorno de  $f$  é uma família de retas paralelas com inclinação  $-1$ :

$$k = -4 \Rightarrow y = -x + 6,$$

$$k = -2 \Rightarrow y = -x + 4,$$

$$k = 0 \Rightarrow y = -x + 2,$$

$$k = 2 \Rightarrow y = -x,$$

$$k = 4 \Rightarrow y = -x - 2.$$

O gráfico de  $f$  é o plano de equação  $x + y + z - 2 = 0$ . Notemos que os traços nos planos coordenados  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$  são, respectivamente, as retas  $y = -x + 2$ ,  $z = -y + 2$  e  $z = -x + 2$ .

(b)  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ , com  $k = -1, 0, 4, 9$ .

O gráfico da superfície  $z = 4x^2 + y^2$  é um parabolóide elíptico. Uma curva de nível de altura  $k$  tem equação

$$4x^2 + y^2 = k.$$

Se  $k = -1$ , a equação  $4x^2 + y^2 = -1$  não tem solução.

Se  $k = 0$ , então a curva de nível é o único ponto  $(0, 0)$ .

Se  $k > 0$ , podemos reescrever a equação como

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2} = 1,$$

a qual representa uma família de elipses com interceptos  $x$  iguais a  $\pm \frac{\sqrt{k}}{2}$  e interceptos  $y$  iguais a  $\pm \sqrt{k}$ .

O gráfico de  $f$  é um parabolóide elíptico, cujos traços nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  são, respectivamente, a origem, a parábola  $z = 4x^2$  a parábola  $z = y^2$ .

Quanto às funções de três variáveis  $w = f(x, y, z)$ , não podemos visualizar seu gráfico. No entanto, podemos considerar as superfícies de equação  $f(x, y, z) = k$ , quando  $k$  varia no conjunto imagem de  $f$ . Estas superfícies são chamadas **superfícies de nível para  $f$** .

**Exemplo 29.**

Descreva as superfícies de nível de:

(a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

**Solução:**

As superfícies de nível de  $f$  têm equações da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = k.$$

Se  $k > 0$ , o gráfico desta superfície é uma esfera de centro na origem e raio  $\sqrt{k}$ .

Se  $k = 0$ , o gráfico é o ponto  $(0, 0, 0)$ .

Se  $k < 0$ , não há superfície de nível.

(b)  $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$ .

**Solução:**

As superfícies de nível de  $f$  têm equações da forma

$$z^2 - x^2 - y^2 = k.$$

Se  $k > 0$ , a superfície de nível é o hiperbolóide de duas folhas de equação

$$-\frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{k})^2} = 1.$$

Se  $k = 0$ , a superfície de nível é o cone circular de equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Se  $k < 0$ , a superfície de nível é o hiperbolóide de uma folha de equação

$$\frac{x^2}{(\sqrt{-k})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{-k})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1.$$

## 2.3 Noções de Topologia

### Definição 2.4

Sejam  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ . Definimos a **bola aberta de centro  $x_0$  e raio  $r$**  como sendo o conjunto de todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  cuja distância ao ponto  $x_0$  é menor que  $r$ , ou seja,

$$B(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r \}.$$

### Exemplo 30.

(a) Se  $n = 1$  e  $x_0 = a$ , então

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} / |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} / a - r < x < a + r\}.$$

(b) Se  $n = 2$  e  $x_0 = (a, b)$ , então

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|x - x_0\| < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}. \end{aligned}$$

(c) Se  $n = 3$  e  $x_0 = (a, b, c)$ , então

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \|x - x_0\| < r\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2\}. \end{aligned}$$

#### Definição 2.5

Sejam  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ . Definimos a **bola fechada de centro  $x_0$  e raio  $r$**  como sendo o conjunto de todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  cuja distância ao ponto  $x_0$  é menor ou igual a  $r$ , ou seja,

$$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq r\}.$$

#### Definição 2.6

Seja  $X$  um conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^n$ . Um ponto  $x_0 \in X$  é chamado **ponto interior** de  $X$  se existe  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subset X$ . Um ponto  $x_0 \in X$  é chamado **ponto de fronteira** de  $X$  se toda bola aberta com raio  $r > 0$  e centro em  $x_0$  contém pontos de  $X$  e pontos que estão fora de  $X$ .

#### Definição 2.7

O conjunto de todos os pontos interiores de  $X$  é chamado **interior de  $X$**  e denotado por  $\text{int}(X)$  ou  $\overset{\circ}{X}$ . O conjunto de todos os pontos de fronteira de  $X$  é chamado **fronteira de  $X$**  e denotado por  $\partial X$  ou  $\text{front}(X)$ .

#### Definição 2.8

Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito **aberto em  $\mathbb{R}^n$**  se para todo  $x \in X$  existe  $r > 0$  tal que  $B(x; r) \subset X$ . Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito **fechado em  $\mathbb{R}^n$**  se  $\partial X \subset X$ .

#### Definição 2.9

Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito **limitado** se existe uma constante  $M > 0$  tal que  $X \subset B[0; M]$  ( $\|x\| \leq M$ , para todo  $x \in X$ ).

#### Definição 2.10

Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito **compacto** se é fechado e limitado.

**Exemplo 31.**

Seja  $X$  o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$  que estão dentro ou sobre o círculo de raio 1 e centro na origem.

O conjunto  $X$ , seu interior e sua fronteira podem ser expressos na notação de conjuntos como

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$\text{int}(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\},$$

$$\partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}.$$

Notemos que  $X$  é fechado e limitado e  $\text{int}(X)$  é aberto.

**Exemplo 32.**

O intervalo aberto  $A = (a, b)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}$ .

**Solução:**

De fato, para cada  $x \in A = (a, b)$ , podemos tomar  $r = \min\{x - a, b - x\}$ . Assim, se  $y \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ , temos:

$$|y - x| < \frac{r}{2} \Rightarrow -\frac{r}{2} < y - x < \frac{r}{2} \Rightarrow x - \frac{r}{2} < y < x + \frac{r}{2} \Rightarrow a < y < b.$$

Portanto,  $B\left(x, \frac{r}{2}\right) \subset A = (a, b)$ .

## 2.4 Limites de Funções de Duas ou Três Variáveis

### Definição 2.11

Seja  $f$  uma função de duas variáveis cujo domínio  $D(f)$  contém pontos arbitrariamente próximos de  $(x_0, y_0)$ . Dizemos que o limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  tende a  $(x_0, y_0)$  é  $L$ , e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

se para todo número  $\epsilon > 0$  podemos encontrar um número correspondente  $\delta > 0$  tal que  $|f(x, y) - L| < \epsilon$  sempre que  $(x, y) \in D(f)$  e  $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ .

### Definição 2.12

Seja  $f$  uma função de três variáveis cujo domínio  $D(f)$  contém pontos arbitrariamente próximos de  $(x_0, y_0, z_0)$ . Dizemos que o limite de  $f(x, y, z)$  quando  $(x, y, z)$  tende a  $(x_0, y_0, z_0)$  é  $L$ , e escrevemos

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L,$$

se para todo número  $\epsilon > 0$  podemos encontrar um número correspondente  $\delta > 0$  tal que  $|f(x, y, z) - L| < \epsilon$  sempre que  $(x, y, z) \in D(f)$  e  $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$ .

**Exemplo 33.**

Mostre que:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} c = c;$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} x_0 = x_0;$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} (x + 2y) = 1.$$

**Solução:**

(a) Dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\delta > 0$  qualquer.

Então, se  $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ , temos:

$$|f(x, y) - L| = |c - c| = 0 < \epsilon.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} c = c.$$

(b) Dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \epsilon > 0$ .

Então, se  $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ , temos:

$$|f(x, y) - L| = |x - x_0| = \sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \epsilon.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0.$$

(c) Dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\delta > 0$ ,  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ , de modo que, se  $0 < \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} < \delta$ , temos:

$$|f(x, y) - L| = |x + 2y - 1| = |x + 2y + 1 - 2| = |(x + 1) + 2(y - 1)|$$

$$\stackrel{(DT)}{\leq} |x + 1| + 2|y - 1| \stackrel{(*)}{<} \delta + 2\delta = 3\delta = 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} (x + 2y) = 1.$$

Para obtermos (\*), notamos que

$$0 \leq (y - 1)^2 \Rightarrow (x + 1)^2 \leq (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{(x + 1)^2} \leq \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \Rightarrow 0 \leq |x + 1| \leq \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} < \delta$$

e que

$$0 \leq (x + 1)^2 \Rightarrow (y - 1)^2 \leq (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{(y - 1)^2} \leq \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \Rightarrow 0 \leq |y - 1| \leq \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} < \delta.$$

## Propriedades de Limites

Sejam  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M$ . Então

(i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M;$

(ii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M;$

(iii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ , se  $M \neq 0$ ;

(iv) Se  $h(z)$  é uma função de uma variável contínua em  $z = L$ , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(f(x,y)) = h(L).$$

### Exemplo 34.

Calcule, se possível, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2xy + 3x^2}{x^3 + 2}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt{x^2 + 2xy}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

**Solução:**

$$\begin{aligned} (a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2xy + 3x^2}{x^3 + 2} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} 2xy + 3x^2}{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x^3 + 2} \\ &= \frac{2 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} y + 3 \cdot \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x \right)^2}{\left( \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x \right)^3 + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} 2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1^2}{1^3 + 2} \\ &= \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt{x^2 + 2xy} &= \sqrt{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + 2xy)} \\ &= \sqrt{\left( \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x \right)^2 + 2 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} y} = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$$

Notemos que o numerador e o denominador de  $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$  tendem a zero quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , mas  $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x + y)(x - y)}{x + y} = x - y$ . Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x - y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Notemos que o numerador e o denominador de  $\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$  tendem a zero quando  $(x, y) \rightarrow (1, 1)$ .

Racionalizando, obtemos:

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = x(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} [x(\sqrt{x} + \sqrt{y})] = 1(1 + 1) = 2.$$

### Observação 2.1

Se  $f(x, y)$  está definida numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x, y)| = 0.$$

### Teorema 2.1: Teorema do Confronto

Sejam  $f, g$  e  $h$  funções definidas numa vizinhança do ponto  $(x_0, y_0)$ , exceto possivelmente em  $(x_0, y_0)$ , na qual temos  $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ . Se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y), \text{ então}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

**Exemplo 35.**

Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ .

**Solução:**

Notemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq x^2 &\Rightarrow y^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 0 \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Rightarrow 0 \leq |y|^3 \leq (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 0 \leq \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ &\Rightarrow 0 \leq \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2}$ , segue do Teorema do Confronto que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = 0$ . Portanto, pela observação anterior,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

**Definição 2.13**

Dizemos que uma função  $f$  é **limitada** num dado conjunto  $D$  se existir uma constante  $M > 0$  tal que  $|f(x, y)| \leq M$ , para todo  $(x, y) \in D$ .

Corolário 2.1: Teorema do Anulamento

Sejam  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  funções definidas em uma vizinhança de  $(x_0, y_0)$ , exceto possivelmente em  $(x_0, y_0)$ , na qual  $g(x, y)$  é uma função limitada e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = 0. \text{ Então}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = 0.$$

**Exemplo 36.**

(a) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ .

**Solução:**

Notemos que  $\frac{y^3}{x^2 + y^2} = y \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}$  e

$$0 \leq x^2 \Rightarrow y^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \text{ para } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \text{ para } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^2 + y^2} \text{ é limitada para } (x, y) \neq (0, 0).$$

Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$ , segue do Teorema do Anulamento que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

(b) Mostre  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[ y \cdot \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \right] = 0$ .

**Solução:**

Sabemos que, para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \leq 1,$$

ou seja,  $\cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$  é uma função limitada para  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$ , segue do Teorema do Anulamento que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[ y \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right] = 0.$$