MAT 241 - Cálculo III

Autor

Lílian Neves Santa Rosa Valentim

Universidade Federal de Viçosa

2023 - I

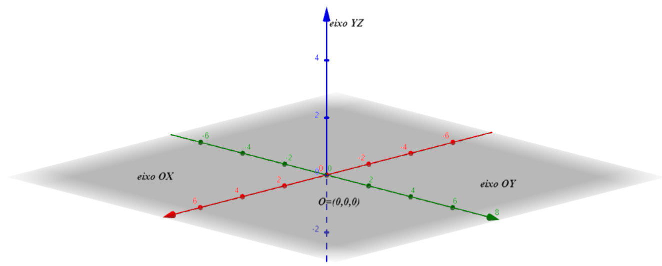
Sumário

1 Espaço Tridimensional

Neste capítulo introduziremos os conceitos de sistema de coordenadas no espaço tridimensional, vetores, retas e planos no espaço, superfícies cilíndricas e superfícies quádricas.

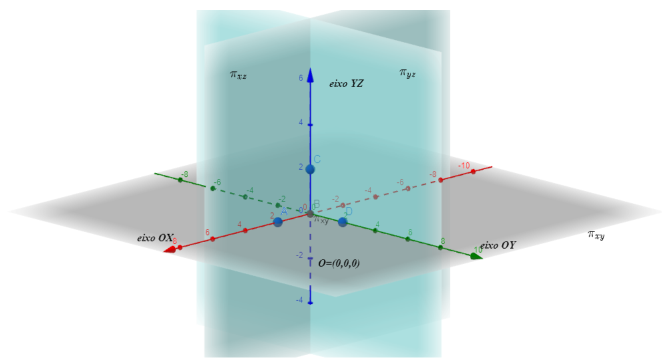
1.1 Coordenadas no Espaço

Seja E o espaço euclidiano tridimensional. Um sistema de coordenadas ortogonais $OXYZ$ em E consiste de três eixos ortogonais entre si, OX, OY e OZ, com a mesma origem O.



Escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço E, os planos cartesianos serão:

- π_{xy}, o plano que contém os eixos OX e OY,
- π_{xz}, o plano que contém os eixos OX e OZ,
- π_{yz}, o plano que contém os eixos OY e OZ.



Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço E permite estabelecer uma correspondência entre pontos $P \in E$ e ternos ordenados de números reais (x, y, z), de modo que a cada ponto corresponde exatamente um terno ordenado de números reais, e a cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente um ponto de E.

Assim, se P está em correspondência com o terno (x, y, z), dizemos que x, y e z são as coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Estas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

- Coordenada x : coordenada no eixo OX associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano π' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{yz}.

- Coordenada y : coordenada no eixo OY associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano π'' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{xz}.

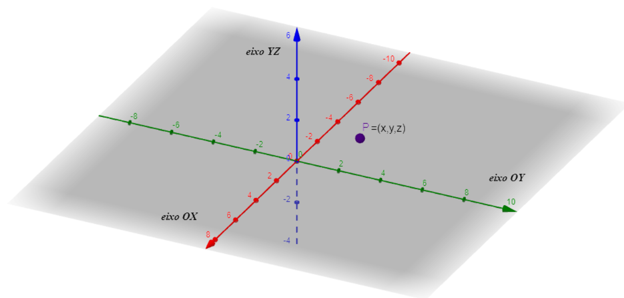
- Coordenada z : coordenada no eixo OZ associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano π''' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{xy}.

Usa-se a notação $\mathbb{R}^3$ para representar o conjunto cujos elementos são os ternos ordenados (x, y, z) de números reais :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço E, todo ponto $P \in E$ é identificado pelas suas coordenadas (x, y, z) em relação a este sistema de eixos e escrevemos:

$$P = (x, y, z)$$



Com esta identificação, observamos que:

- a origem do sistema de eixos ortogonais é o ponto $O = (0, 0, 0)$;

- os eixos do sistema são os conjuntos:

$$eixo\ OX = \{(x, 0, 0) \,/\, x \in \mathbb{R}\};$$

$$eixo\ OY = \{(0, y, 0) \,/\, y \in \mathbb{R}\};$$

$$eixo\ OZ = \{(0, 0, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\};$$

- os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\pi_{xy} = \{(x, y, 0) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{xy} : z = 0;$$

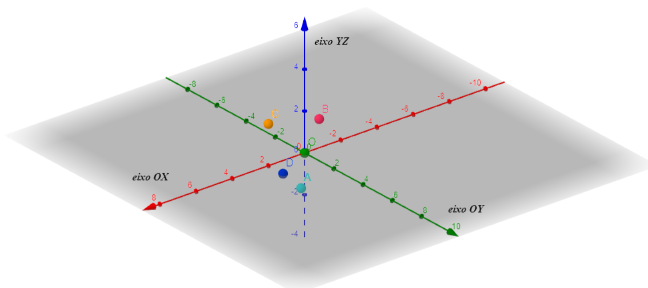
$$\pi_{xz} = \{(x, 0, z) \,/\, x, z \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{xz} : y = 0;$$

$$\pi_{yz} = \{(0, y, z) \,/\, y, z \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{yz} : x = 0.$$

Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço E permite descrever todos os subconjuntos do espaço por meio das coordenadas de seus pontos. Veremos, por exemplo, como caracterizar retas, planos e algumas superfícies com equações que envolvem as coordenadas dos pontos neles contidos.

Exemplo 1. Represente, em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, os pontos $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, -1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (2, 0, 2)$ e $D = (2, 1, 0)$.

Solução:



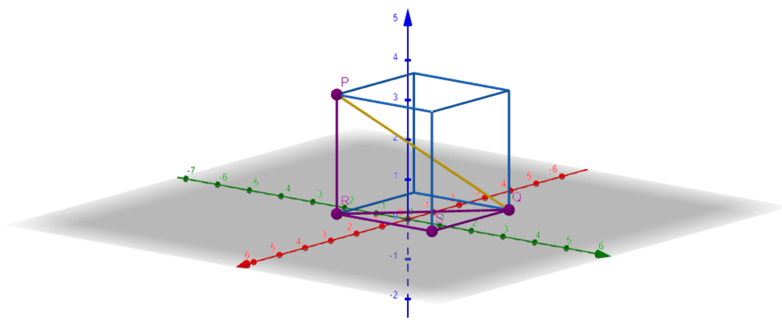
1.2 Distância entre dois Pontos no Espaço

Sejam $P = (a, b, c)$ e $Q = (a', b', c')$ pontos no espaço E.

Começamos observando que se P e Q estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, então eles têm duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o módulo da diferença das coordenadas diferentes.

Suponhamos que P e Q não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Para o cálculo da distância de P a Q vamos considerar os pontos auxiliares

$$R = (a, b, c') \text{ e } S = (a, b', c').$$



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\Delta\, PRQ$, obtemos:

$$d(P,Q)^2 \;=\; d(P,R)^2 \;+\; d(R,Q)^2$$

e ao triângulo $\Delta\, RSQ$, obtemos:

$$d(R,Q)^2 \;=\; d(R,S)^2 \;+\; d(S,Q)^2.$$

Assim,

$$d(P,Q)^2 \;=\; d(P,R)^2 \;+\; d(R,S)^2 \;+\; d(S,Q)^2.$$

Pela observação feita anteriormente, como (P,R), (R,S) e (S,Q) são pares de pontos sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados,

$$d(P,R) = |c' - c|,\;\; d(R,S) = |b' - b| \;\text{ e }\; d(S,Q) = |a' - a|.$$

Logo,

$$d(P,Q)^2 \;=\; |c' - c|^2 \;+\; |b' - b|^2 \;+\; |a' - a|^2,$$

ou seja,

$$d(P,Q) \;=\; \sqrt{(a' - a)^2 \;+\; (b' - b)^2 \;+\; (c' - c)^2}.$$

Exemplo 2. Determine a distância entre os pontos $P = (2,3,-1)$ e $Q = (4,-1,3)$.

Solução:

A distância de P a Q é

$$d(P,Q) = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2 + (3-(-1))^2}$$

$$d(P,Q) = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$d(P,Q) = \sqrt{4 + 16 + 16}$$

$$d(P,Q) = 6$$

Exemplo 3. Obter o ponto P no eixo das ordenadas, equidistantes dos pontos $A = (1,1,4)$ e $B = (-6,6,4)$.

Solução:

Como P pertence ao eixo das ordenadas, P deve ter coordenadas $(0,y,0)$, para $y \in \mathbb{R}$ que vamos determinar. E, como P é equidistante de A e B temos:

$$d(P,A) = d(P,B),$$

ou seja,

$$\sqrt{(0-1)^2+(y-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(0+6)^2+(y-6)^2+(0-4)^2}$$

Daí, elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, temos

$$1+y^2-2y+1+16=36+y^2-12y+36-16$$

$$-2y+12y=72-2$$

$$10y=70$$

$$y=7.$$

Assim, o ponto do eixo das ordenadas, equidistante de A e B é $P=(0,7,0)$.

Definição 1.1

A esfera é o conjunto de pontos do espaço que estão equidistantes de um ponto específico, ao qual denominamos centro da esfera.

Se $C=(x_0,y_0,z_0)$ é o centro da esfera e $P=(x,y,z)$ é um ponto qualquer cuja distância do centro é o número r $(r>0)$, denominado raio da esfera, então:

$$d(P,C)=r$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2 \tag{1.1}$$

A equação em (1.1) é chamada equação da esfera de centro $C=(x_0,y_0,z_0)$ e raio r.

Exemplo 4. Mostre que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 1 = 0$$

representa uma esfera S e encontre seu centro e raio.

Solução:

Completando quadrados, podemos escrever a equação dada na forma

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) = 1$$
$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 2) - 4 + (z^2 - 6z + 3) - 9 = 1$$
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 15$$

Assim, S é a esfera de centro $C = (1, -2, 3)$ e raio $r = \sqrt{15}$.

Exemplo 5. Que região de $\mathbb{R}^3$ é representada pelas seguintes inequações

$$1 < x^2 + y^2 + z^2 < 9 \ \text{ e } \ z > 0\,?$$

Solução:

Temos:

$$1 < x^2 + y^2 + z^2 < 9 \ \Rightarrow \ 1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 3$$

Estas inequações representam os pontos $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ cuja distância à origem é maior que 1 e menor que 3. Como $z > 0$, estes pontos estão acima do plano xy.

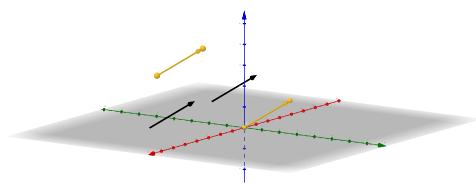
Assim, temos a região que está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e acima do plano xy.

1.3 Vetores no Espaço

Definição 1.2

Vetor determinado por um segmento orientado $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados, equipolentes a $\overline{AB}$, isto é, que têm a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento de $\overline{AB}$.

O vetor determinado pelo segmento $\overline{AB}$ é indicado por $\overrightarrow{AB}$, tem como ponto inicial A e ponto final B, e seu comprimento é denotado por $\|\overrightarrow{AB}\|$.



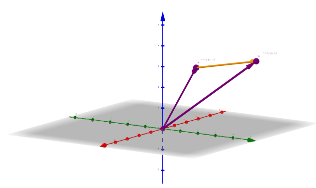
Definição 1.3

Quando um vetor $\overrightarrow{v}$ está representado por um segmento orientado com ponto inicial na origem $O = (0,0,0)$ e ponto final em $P = (x_0, y_0, z_0)$, então suas componentes são dadas por

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0).$$

Se o vetor $\overrightarrow{v}$ está representado por um segmento orientado com ponto inicial $P = (x_1, y_1, z_1)$ e ponto final $Q = (x_2, y_2, z_2)$, então suas componentes são dadas por

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$



Notemos que

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Definição 1.4

Dois vetores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ são ditos iguais se, e somente se,as suas componentes correspondentes são iguais, isto é, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ e $u_3 = v_3$.

Exemplo 6. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é tal que $A = (2x+1, 3y-2, 2z)$ e $B = (x, y, 12)$. Se o vetor equivalente, localizado na origem, é $\overrightarrow{v} = (-4, 12, 0)$, determine os valores de x, y e z.

Solução:

Temos:

$$\overrightarrow{AB} = (x - (2x+1), y - (3y-2), 12 - 2z) = (-x-1, -2y+2, 12-2z).$$

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$, temos:

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x-1 & = & -4 \\ -2y+2 & = & 12 \\ 12-2z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3 \\ y & = & -5 \\ z & = & 6 \end{array}\right.$$

Exemplo 7. Considere os pontos $A = (1, 4, 0)$, $B = (-1, 1, -1)$ e $C = (3, 5, -10)$. Encontre as componentes do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas dos pontos D e P tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$.

Solução:

Temos:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (-1-1, 1-4, -1-0) = (-2, -3, -1).$$

Seja $D = (x, y, z)$ o ponto de $\mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Então, como $\overrightarrow{CD} = (x-3, y-5, z+10)$, temos:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-3 & = & -2 \\ y-5 & = & -3 \\ z+10 & = & -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & -11 \end{array}\right.$$

Logo, $D = (1, 2, -11)$.

Como o ponto inicial de $\overrightarrow{OP}$ é a origem e $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{v}$, então $P = (-2, -3, -1)$.

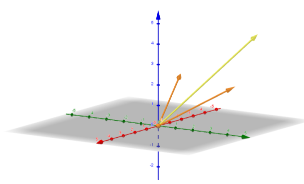
1.3.1 Operações com Vetores

Adição

Definição 1.5

Sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Definimos a adição (ou soma) de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ por

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$



Exemplo 8. Sejam $A = (3, 2, 0)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (4, 3, 2)$ pontos do espaço. Determine o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Solução:

Temos

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 3, 3 - 2, -2 - 0) = (-3, 1, -2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - 3, 3 - 2, 2 - 0) = (1, 1, 2).$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) = (-2, 2, 0).$$

Além disso, se $D = (x, y, z)$ é a extremidade do representante $\overrightarrow{AD}$ do vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ com origem no ponto A, então:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-3 & = & -2 \\ y-2 & = & 2 \\ z-0 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Portanto, $D = (1, 4, 0)$.

Propriedades da Adição de Vetores no Espaço

A operação de adição de vetores no espaço possui as mesmas propriedades da operação de adição de vetores no plano, que são herdadas das correspondentes propriedades da adição de números reais.

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço.

(1) Comutatividade: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

(2) Existência de elemento neutro: O vetor nulo, $\overrightarrow{O} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ é o único vetor tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O} + \overrightarrow{u}$.

(3) Existência de inverso aditivo: Dado um vetor $\overrightarrow{u}$, existe um único vetor, que é designado $-\overrightarrow{u}$ e chamado inverso aditivo (ou simétrico) de $\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O} = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}$. Note que se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, então $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$.

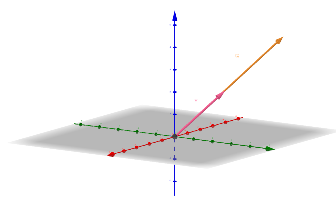
(4) Associatividade: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

Multiplicação por escalar

Definição 1.6

Sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ um vetor em $\mathbb{R}^3$ e λ um escalar. Definimos a multiplicação por escalar por

$$\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda\, u_1, \lambda\, u_2, \lambda\, u_3).$$



Exemplo 9. Sejam $A = (1,2,1)$ e $B = (2,3,3)$. Determinemos as extremidades D, D' e D'' dos representantes CD, CD' e CD'' dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $-2\,\overrightarrow{AB}$ e $2\,\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $C = (1,1,0)$.

Solução:

Em termos de coordenadas, $\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2, 3-1) = (1,1,2)$.

Logo,

$$-2\,\overrightarrow{AB} = (-2\cdot 1, -2\cdot 1, -2\cdot 2) = (-2,-2,-4),$$

$$2\,\overrightarrow{AB} = (2\cdot 1, 2\cdot 1, 2\cdot 2) = (2,2,4).$$

Como $C = (1,1,0)$, as coordenadas dos pontos $D = (d_1, d_2, d_3)$, $D' = (d'_1, d'_2, d'_3)$ e $D'' = (d''_1, d''_2, d''_3)$ satisfazem:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} d_1 - 1 &= 1 \\ d_2 - 1 &= 1 \\ d_3 - 0 &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 &= 2 \\ d_2 &= 2 \\ d_3 &= 2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CD'} = -2\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} d'_1 - 1 &= -2 \\ d'_2 - 1 &= -2 \\ d'_3 - 0 &= -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'_1 &= -1 \\ d'_2 &= -1 \\ d'_3 &= -4 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CD''} = 2\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} d''_1 - 1 &= 2 \\ d''_2 - 1 &= 2 \\ d''_3 - 0 &= 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d''_1 &= 3 \\ d''_2 &= 3 \\ d''_3 &= 4 \end{cases}$$

Portanto,

$$D = (2,2,2),\ D' = (-1,-1,-4) \text{ e } D'' = (3,3,4).$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço e λ, μ escalares reais. A multiplicação de um vetor por um escalar satisfaz às seguintes propriedades:

1. Associatividade: $\lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{u}$.

2. Distributividade: $\lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ e $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$.

3. Elemento neutro multiplicativo: O número $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Observação 1.1

(i) Se $\overrightarrow{u}$ é um vetor do espaço, então o seu inverso aditivo $-\overrightarrow{u}$ é obtido multiplicando $\overrightarrow{u}$ por -1. De fato, $\overrightarrow{u} + (-1)\cdot\overrightarrow{u} = (1 + (-1))\cdot\overrightarrow{u} = 0\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(ii) O vetor $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do (ou paralelo ao) vetor $\overrightarrow{u}$ quando existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\cdot\overrightarrow{u}$.

1.4 Produto Interno

Definição 1.7

A norma ou comprimento de um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número real não negativo

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(A, B).$$

Este número não depende do segmento $\overline{AB}$ escolhido para representar o vetor $\overrightarrow{v}$.

Em particular, tomando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e representando o vetor $\overrightarrow{v}$ pelo segmento $\overline{OP}$, as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ coincidem com as coordenadas do ponto P em relação ao sistema $OXYZ$. Assim, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ então $P = (x, y, z)$ e

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Exemplo 10.

(a) Se $\overrightarrow{v} = (1,0,0)$, então

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

(b) Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$, com $P = (2,0,1)$ e $Q = (-3,4,2)$, então

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = (-3-2, 4-0, 2-1) = (-5,4,1)$$

e

$$\|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q) = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 1} = \sqrt{42}.$$

Observação 1.2

Um vetor $\overrightarrow{v}$ de norma igual a 1 é chamado unitário.

Definição 1.8

Chama-se produto interno ou produto escalar usual de dois vetores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, e representa-se por $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ ou $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$, ao número real

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3.$$

Exemplo 11. Se $\overrightarrow{u} = (1,0,-2)$ e $\overrightarrow{v} = (3,1,-1)$, então

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 3 + 0 + 2 = 5.$$

Proposição 1.1: Propriedades do Produto Interno

Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço e λ um escalar real. São válidas as seguintes propriedades:

(i) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$.

(ii) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$;

(iii) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$;

(iv) $\lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{v} \rangle$;

(v) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geqslant 0$, para todo $\overrightarrow{u}$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vetores no espaço e λ um escalar real. Temos:

(i) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3 = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$.

(ii)
$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle &= \langle (u_1, u_2, u_3), (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \rangle \\
&= u_1 \cdot (v_1 + w_1) + u_2 \cdot (v_2 + w_2) + u_3 \cdot (v_3 + w_3) \\
&= u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot v_2 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot v_3 + u_3 \cdot w_3
\end{aligned}$$

$$= (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3) + (u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3)$$

$$= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle.$$

(iii) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle$

$$= (u_1 + v_1) \cdot w_1 + (u_2 + v_2) \cdot w_2$$

$$= u_1 \cdot w_1 + v_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3 + v_3 \cdot w_3$$

$$= (u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3) + (v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3)$$

$$= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle.$$

(iv) $\lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3)$

$$= \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1) + \lambda \cdot (u_2 \cdot v_2) + \lambda \cdot (u_3 \cdot v_3)$$

$$= (\lambda \cdot u_1) \cdot v_1 + (\lambda \cdot u_2) \cdot v_2 + (\lambda \cdot u_3) \cdot v_3$$

$$= \langle (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \lambda \cdot u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle$$

$$= \langle \lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle.$$

$$\lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3)$$

$$= \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1) + \lambda \cdot (u_2 \cdot v_2) + \lambda \cdot (u_3 \cdot v_3)$$

$$= u_1 \cdot (\lambda \cdot v_1) + u_2 \cdot (\lambda \cdot v_2) + u_3 \cdot (\lambda \cdot v_3)$$

$$= \langle (u_1, u_2, u_3), (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \lambda \cdot v_3)) \rangle$$

$$= \langle \overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{v} \rangle.$$

(v) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 \geqslant 0$, para todo $\overrightarrow{u}$;

$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ se, e somente se, cada uma das parcelas da soma $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ é igual a zero, o que resulta em $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, ou seja, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

□

Exemplo 12.

(a) Mostre que $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2$.

(b) Mostre que $\langle\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$.

Solução:

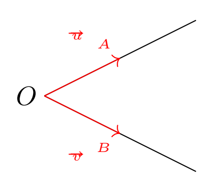
(a)
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= \langle\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\rangle\\ &= \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\rangle + \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\rangle\\ &= \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\rangle + \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle + \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\rangle + \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle\\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2.\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\rangle &= \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\rangle + \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\rangle\\ &= \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\rangle - \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle + \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\rangle - \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle\\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2.\end{aligned}$$

Ângulo entre Dois Vetores

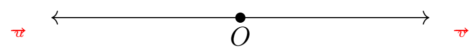
Definição 1.9

O ângulo entre dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não nulos é o ângulo θ formado pelas semirretas OA e OB e tal que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

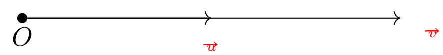


Observação 1.3

(i) Se $\theta = \pi$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm a mesma direção e sentido contrários.



(ii) Se $\theta = 0$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm a mesma direção e mesmo sentido.



(iii) Se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais e indica-se por $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

(iv) O vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor.

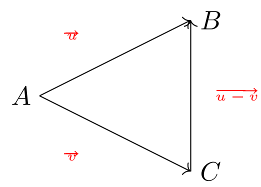
Teorema 1.1

Se θ é o ângulo entre os vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, então

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, cos\, \theta.$$

Demonstração.

$1^{\underline{0}}$ caso: Suponhamos que $\overrightarrow{v}$ não seja um múltiplo escalar de $\overrightarrow{u}$, como na figura a seguir:



Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo ΔABC, temos:

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,cos\,\theta. \quad (I)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 &= \langle \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \rangle - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2. \quad (II)\end{aligned}$$

Comparando as igualdades (II) e (II) , obtemos:

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,cos\,\theta = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2.$$

Logo,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,cos\,\theta.$$

$2^{\underline{0}}$ caso: Se $\overrightarrow{v}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{u}$, então $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. Daí,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \lambda\,\overrightarrow{u} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \lambda\,\|\overrightarrow{u}\|^2.$$

Por outro lado,

$$\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,cos\,\theta = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\lambda\,\overrightarrow{u}\|\,cos\,\theta = |\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|^2\,cos\,\theta.$$

Se $\lambda > 0$, então $|\lambda| = \lambda$ e $cos\,\theta = cos\,0 = 1$. Logo,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,cos\,\theta.$$

Se $\lambda < 0$, então $|\lambda| = -\lambda$ e $cos\,\theta = cos\,\pi = -1$. Logo,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \| \overrightarrow{u} \| \, \| \overrightarrow{v} \| \, cos\,\theta.$$

$\square$

Exemplo 13.

(a) Sejam $\overrightarrow{u} = (1, 0, -2)$ e $\overrightarrow{v} = (4, -3, 2)$. Então

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 = 4 + 0 - 4 = 0.$$

Logo, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais.

(b) Sejam $\overrightarrow{u} = (-1, -1, -4)$ e $\overrightarrow{v} = (1, -2, -2)$. Seja θ o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Então

$$cos\,\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\| \overrightarrow{u} \| \, \| \overrightarrow{v} \|} = \frac{(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-4) \cdot (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}$$

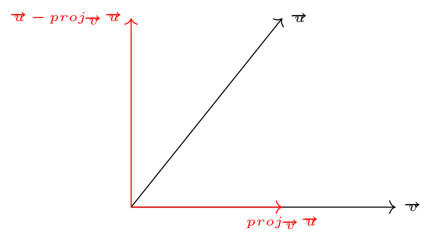
$$= \frac{-1 + 2 + 8}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{9 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto,

$$\theta = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Definição 1.10

Dados dois vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, chamamos projeção ortogonal de $\overrightarrow{u}$ sobre $\overrightarrow{v}$, e denotamos por $proj_{\overrightarrow{v}}\, \overrightarrow{u}$, o vetor paralelo a $\overrightarrow{v}$ tal que $\overrightarrow{u} - proj_{\overrightarrow{v}}\, \overrightarrow{u}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{v}$.



Teorema 1.2

A projeção ortogonal de um vetor $\vec{u}$ sobre um vetor não nulo $\vec{v}$ é dada por

$$proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}.$$

Demonstração. Sejam $\vec{u_1} = proj_{\vec{v}}\,\vec{u}$ e $\vec{u_2} = \vec{u} - proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \vec{u} - \vec{u_1}$.

Como $\vec{u_1}$ é paralelo a $\vec{v}$, existe um escalar λ tal que $\vec{u_1} = \lambda\,\vec{v}$. Logo, $\vec{u_2} = \vec{u} - \lambda\,\vec{v}$.

Assim,

$$\langle \vec{u_2}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} - \lambda\,\vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \lambda\,\|\vec{v}\|^2.$$

Como $\vec{u_2}$ é ortogonal a $\vec{v}$, temos que $\langle \vec{u_2}, \vec{v} \rangle = 0$ e, portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda\,\|\vec{v}\|^2.$$

Daí,

$$\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}.$$

Portanto,

$$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v}.$$

□

Exemplo 14. Sejam $\overrightarrow{u} = (2,-1,3)$ e $\overrightarrow{v} = (4,-1,2)$. Vamos determinar $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$, onde $\overrightarrow{u_1}$ é paralelo a $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u_2}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$.

Solução:

Temos

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 8 + 1 + 6 = 15$$

e

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}.$$

Façamos

$$\overrightarrow{u_1} = proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v} = \frac{15}{21}(4,-1,2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

e

$$\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_1} = (2,-1,3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right).$$

Teorema 1.3: Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, temos

$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|.$$

Demonstração.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são nulos, o resultado é trivial.

Suponhamos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não nulos e seja θ o ângulo entre eles. Então, como $|cos\,\theta| \leqslant 1$, temos:

$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = |\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,cos\,\theta| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\||cos\,\theta| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|.$$

$\square$

Teorema 1.4: Desigualdade Triangular

Para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, temos

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|.$$

Demonstração.

Temos:

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \leqslant |\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\||cos\,\theta| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2 &\leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\,\|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ &= \left(\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|\right)^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

$\square$

1.5 Produto Vetorial

Definição 1.11

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, chama-se produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e denota-se por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Exemplo 15. Sejam $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 1, -2)$. Então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-7, -2, -1).$$

Propriedades do Produto Vetorial

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço e λ um escalar real. São válidas as seguintes propriedades:

(i) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$.

(ii) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.

(iii) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.

(iv) $\lambda \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \lambda (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$.

(v) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos.

(vi) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

(vii) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2$ (Identidade de Lagrange).

(viii) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos e se θ é o ângulo entre eles, então $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, sen\, \theta$.

Demonstração.

Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ vetores no espaço e λ um escalar real. Temos:

(i) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = (y_1\, z_1 - z_1\, y_1)\, \overrightarrow{i} - (x_1\, z_1 - z_1\, x_1)\, \overrightarrow{j} + (x_1\, y_1 - y_1\, x_1\, \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$.

(ii) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_1\, z_2 - z_1\, y_2)\, \overrightarrow{i} - (x_1\, z_2 - z_1\, x_2)\, \overrightarrow{j} + (x_1\, y_2 - y_1\, x_2)\, \overrightarrow{k}$

$$= -(z_1\, y_2 - y_1\, z_2)\, \overrightarrow{i} + (z_1\, x_2 - x_1\, z_2)\, \overrightarrow{j} - (y_1\, x_2 - x_1\, y_2)\, \overrightarrow{k}$$

$$= -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}.$$

(iii) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3)$

$= (y_1\, (z_2 + z_3) - z_1\, (y_2 + y_3))\, \overrightarrow{i} - (x_1\, (z_2 + z_3) - z_1\, (x_2 + x + 3))\, \overrightarrow{j} + (x_1\, (y_2 + y_3) - y_1\, (x_2 + x_3))\, \overrightarrow{k}$

$= (y_1\, z_2 - z_1\, y_2)\, \overrightarrow{i} - (x_1\, z_2 - z_1\, x_2)\, \overrightarrow{j} + (x_1\, y_2 - y_1\, x_2)\, \overrightarrow{k} + (y_1\, z_3 - z_1\, y_3)\, \overrightarrow{i} - (x_1\, z_3 - z_1\, x_3)\, \overrightarrow{j} + (x_1\, y_3 - y_1\, x_3)\, \overrightarrow{k}$

$= \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}.$

(iv) $\lambda\, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \lambda\, (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$.

(v) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos.

(vi) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

(vii) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\, \|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2$ (Identidade de Lagrange).

(viii) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos e se θ é o ângulo entre eles, então $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\, \|\overrightarrow{v}\|\, sen\, \theta$.

□

1.5.1 Interpretação Geométrica do Produto Vetorial

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores não nulos e θ o ângulo entre eles.

A área do paralelogramo $ABCD$ é dada por

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|.$$

De fato, sejam $\|\overrightarrow{u}\|$ e $\|\overrightarrow{v}\|$ as medidas dos lados do paralelogramo $ABCD$, θ o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e h a altura do paralelogramo relativo ao lado $\overline{AB}$. Então $h = \|\overrightarrow{v}\|\, sen\, \theta$.

Portanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é

$$A = \|\overrightarrow{u}\|\, \|\overrightarrow{v}\|\, sen\, \theta = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|.$$

1.6 Produto Misto

Definição 1.12

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ chama-se produto misto de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, e denota-se por $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, ao número

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \rangle.$$

Exemplo 16.

Sejam $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1), \overrightarrow{v} = (0, 1, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (1, 1, 1)$. Então

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = (-1, 2, -1),$$

e assim,

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \rangle &= \langle (1, 0, -1), (-1, 2, -1) \rangle \\ &= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = -1 + 0 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Observação 1.4

Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$, então:

$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \rangle$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle (x_1, y_1, z_1), \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) \right\rangle \\
&= x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Propriedades do Produto Misto

(i) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se um dos vetores é nulo, se dois deles são múltiplos ou se três são coplanares.

(ii) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$.

(iii) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}]$.

(iv) $[\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}] = [\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}] = [\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

1.6.1 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto

O módulo do produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}]$ é igual ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

De fato, o volume do paralelepípedo é

$$V = \underbrace{\text{área da base}}_{A_b} \times \underbrace{\text{altura}}_{h}$$

Notemos que $A_b = \|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\|$ e, sendo θ o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$, a altura h é dada por:

$$h = \|\overrightarrow{u}\| \cdot |cos\,\theta|.$$

Assim,

$$V = \|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot |cos\,\theta|$$

$$V = \Big|\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot cos\,\theta\Big|$$

$$V = \Big|\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\rangle\Big|$$

$$V = \Big|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\Big|.$$

Exemplo 17.

Sejam $\overrightarrow{u} = (a, 2, 1),\ \overrightarrow{v} = (1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{w} = (2b, -1, b)$.

(a) Sabendo-se que o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{i}$ é agudo, determine a de modo que a área do paralelogramo deteminado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ seja $\sqrt{50}$.

(b) Sabendo-se que o ângulo entre $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{k}$ é obtuso, determine b de modo que o volume do paralelepípedo deteminado pelos vetores $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ seja 5. (Use o valor de a encontrado no item (a)).

Solução:

(a) Temos $cos\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}) = \dfrac{\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{i}\|}$ e $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}\rangle = a \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = a$.

Como $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i})$ é agudo, $cos\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i})$ é positivo. Logo, $a > 0$.

Como $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-5, 2a + 1, a - 2)$ e como a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$, teremos:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{50} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25 + (2a+1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{50}$$

$$\Rightarrow \quad 25+4a^2+4a+1+a^2-4a-4 = 50 \quad \Rightarrow \quad 5a^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

(b) Como $\sphericalangle(\vec{w}, \vec{k})$ é obtuso, $cos \sphericalangle(\vec{w}, \vec{k})$ é negativo. Logo, $\langle \vec{w}, \vec{k} \rangle = b < 0$.

O volume V do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ á dado por $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$. Temos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2b & -1 & b \end{vmatrix} = 2b - 8b - 1 - 2b - 4 - 2b = -10b - 5.$$

Logo,

$V = 5 \quad \Rightarrow \quad |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 5 \quad \Rightarrow \quad |-10b - 5| = 5 \quad \Rightarrow \quad -10b - 5 = 5$ ou $10b + 5 = 5$

$$\Rightarrow \quad b = -1 \text{ ou } b = 0.$$

Portanto, devemos ter $b = -1$.

1.7 Retas no Espaço

Definição 1.13

Seja r uma reta paralela a um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ não nulo e que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{v}$, isto é, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$\overrightarrow{P_0P} = t\,\overrightarrow{v},\ \ t \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Em termos das componentes, podemos escrever:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc). \ (**)$$

As equações dadas em $(*)$ e $(**)$ são chamadas equação vetorial da reta r.

De $(**)$, segue

$$(***) \quad r : \begin{cases} x &= x_0 + t\,a \\ y &= y_0 + t\,b \\ z &= z_0 + t\,c \end{cases}, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

As equações dadas em $(***)$ são chamadas equações paramétricas da reta r e o vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ é chamado vetor diretor da reta r.

Se a, b e c são não nulos, eliminando o parâmetro do sistema $(***)$, obtemos

$$(****) \quad r : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

As equações dadas em $(****)$ são chamadas equações simétricas da reta r.

Exemplo 18.

(a) A reta que passa por $P_0 = (1,0,-1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (3,-1,2)$ tem equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -t \\ z = -1+2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

As equações simétricas de r são:

$$r : \frac{x-1}{3} = -y = \frac{z+1}{2}.$$

(b) Encontre as equações paramétricas da reta r que passa por $P_0 = (2,4,-1)$ e $P_1 = (3,-2,7)$.

Notemos que o vetor $\overrightarrow{P_0\,P_1} = (1,-6,8)$ é paralelo a r. Como $P_0 \in r$, as equações paramétricas de r são

$$r : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 4-6t \\ z = -1+8t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

1.7.1 Posições Relativas entre Retas no Espaço

Quando consideramos duas retas no espaço, elas podem estar ou não num mesmo plano.Caso elas estejam contidas em um mesmo plano, serão ditas retas coplanares. Caso contrário, serão ditas não coplanares ou reversas.

Retas coplanares podem ser classificadas como:

(i) Paralelas: Se os vetores diretores são múltiplos um do outro. Neste caso, elas podem ser:

(a) Coincidentes: possuem um ponto em comum.

(b) Não coincidentes: não possuem pontos comuns.

(ii) Concorrentes: se interceptam em um único ponto. Neste caso, os vetores diretores não são paralelos.

Exemplo 19.

(a) Sejam

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Sejam $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$ vetores diretores de r e s, respectivamente. Notemos que $\vec{v_r} = \vec{v_r} = (1, 1, 1)$. Assim, as retas r e s são coplanares e paralelas. Como o ponto $P_0 = (1, 0, 0)$ pertence a r mas não pertence a s, as retas são paralelas e não coincidentes.

(b) Sejam

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Como no item anterior, as retas são coplanares e paralelas. Como o ponto $P_0 = (1, 0, 0)$ pertence a ambas as retas, r e s são paralelas e coincidentes.

(c) Consideremos as retas

$$r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Vamos mostrar que r e s são concorrentes.

Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in r \cap s$. Então existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} x_0 &= 1 + 2t_1 &= 2 + t_2 \\ y_0 &= 2t_1 &= 3 - t_2 \\ z_0 &= 2t_1 &= 2t_2 \end{cases}$$

Logo, temos o sistema linear

$$\begin{cases} 2t_1 - t_2 &= 1 \\ 2t_1 + t_2 &= 3 \\ 2t_1 - 2t_2 &= 0 \end{cases},$$

que admite única solução, a saber $t_1 = t_2 = 1$.

Logo, $P_0 = (3, 2, 2)$ e as retas r e s são concorrentes.

(d) Consideremos as retas

$$r : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 3 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Sejam $\overrightarrow{v_r} = (2, 2, 2)$ e $\overrightarrow{v_s} = (2, 2, 3)$ vetores diretores de r e s, respectivamente. Como $\overrightarrow{v_r}$ e $\overrightarrow{v_s}$ não são múltiplos um do outro, r e s não são paralelas.

Suponhamos $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in r \cap s$. Então existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} x_0 &= 1 + 2t_1 &= 1 + 2t_2 \\ y_0 &= 2 + 2t_1 &= 3 + 2t_2 \\ z_0 &= 2t_1 &= 3 + 3t_2 \end{cases}$$

Logo, temos o sistema linear

$$\begin{cases} 2t_1 - 2t_2 &= 0 \\ 2t_1 - 2t_2 &= 1 \\ 2t_1 - 3t_2 &= 3 \end{cases},$$

que é impossível.

Logo, r e s não são concorrentes.

Portanto, r e s são reversas.

Observação 1.5

(i) Podemos verificar que as retas r e s são concorrentes através do produto misto e verificando que os vetores diretores $\overrightarrow{v_r}$ e $\overrightarrow{v_s}$ não são paralelos. Notemos que, se $[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}] = 0$, com $A \in r$ e $B \in s$, r e s são coplanares.

(ii) Podemos verificar que as retas r e s são reversas através do produto misto $[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}]$, com $A \in r$ e $B \in s$. Se $[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}] \neq 0$, r e s são reversas.

1.8 Equação do Plano

Definição 1.14

Suponhamos que queremos determinar a equação de um plano π que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$.

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n}$, ou seja,

$$\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0.$$

Como $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, podemos escrever a equação acima como

$$\pi: \ \langle (a, b, c), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

$$\pi: \ a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$$

$$\pi: \ ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

Assim,

$$(*) \quad \pi: \ ax + by + cz + d = 0,$$

onde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

A equação $(*)$ é chamada forma geral da equação do plano π e o vetor $\overrightarrow{n}$ é chamado vetor normal ao plano π.

Exemplo 20.

(a) Encontre a equação do plano π que passa por $P_0 = (2, 1, -4)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n} = (1, 2, -1)$.

Solução:

Seja $P = (x, y, z)$ pertencente ao plano π. Então $\overrightarrow{P_0P} = (x - 2, y - 1, z + 4)$ éperpendicular a $\overrightarrow{n}$, isto é,

$$\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0.$$

Daí,

$$\pi:\ \langle (1,2,-1),(x-2,y-1,z+4)\rangle = 0$$

$$\pi:\ 1\,(x-2)+2\,(y-1)-1\,(z+4)=0$$

$$\pi:\ x-2+2y-2-z-4=0$$

$$\pi:\ x+2y-z-8=0.$$

(b) Encontre a equação geral do plano π que contém os pontos $A = (2,1,-1)$, $B=(0,1,2)$ e $C=(-1,-1,3)$.

Solução:

Uma vez que os pontos A, B e C pertencem ao planp π, os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (-2,0,3)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (-3,-2,4)$ são paralelos a π.

O vetor normal ao plano π deve ser ortogonal aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Assim, escolhemos

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = (6,-1,4).$$

Sabendo que $A \in \pi$, obtemos

$$\pi:\ 6\,(x-2)-1\,(y-1)+4\,(z+1)=0$$

$$\pi:\ 6x-y+4z-7=0.$$

1.9 Distâncias

1. Distância de um ponto a uma reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e r uma reta cujo vetor diretor é $\overrightarrow{v}$. A distância de P_0 a r, $d(P_0, r)$, é definida como a distância de P_0 ao ponto de r mais próximo de P_0.

Seja $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto sobre a reta r e posicione o vetor $\overrightarrow{v}$ de modo que P_1 seja seu posto inicial. Assim, os vetores $\overrightarrow{P_1P_0}$ e $\overrightarrow{v}$ formam um paralelogramo cujos lados medem $\|\overrightarrow{P_1P_0}\|$ e $\|\overrightarrow{v}\|$. Como a área deste paralelogramo é dada por $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\|$ seque que a distância de P_0 a r é

$$d(P_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Exemplo 21.

Sejam $P_0 = (1, 1, 5)$ e $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ Determine a distância de P_0 a r.

Solução:

Notemos que $\overrightarrow{v} = (1, -1, 2)$ é um vetor diretor de r e que $P = (1, 3, 0) \in r$.

Então $\overrightarrow{P_0P} = (0, 2, -5)$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_0P} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = (1, 5, 2)$.

Assim,

$$d(P_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}.$$

2. Distância de um ponto a um plano

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π, $d(P_0, \pi)$, é definida como a distância de P_0 ao ponto de π mais próximo de P_0.

Seja $P = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto qualquer do plano π e posicione o vetor normal $\overrightarrow{n}$ de modo que P seja seu posto inicial. Assim, a distância procurada é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{PP_0}$ sobre $\overrightarrow{n}$, isto é,

$$d(P_0, \pi) = \|proj_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{PP_0}\| = \left\| \frac{\langle \overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{n} \rangle}{\|\overrightarrow{n}\|^2} \overrightarrow{n} \right\| = \frac{|\langle \overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{n} \rangle|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

Como $\overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ e $n = (a, b, c)$, temos

$$\begin{aligned} d(P_0, \pi) &= \frac{|\langle (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1), (a, b, c) \rangle|}{\|(a, b, c)\|} \\ &= \frac{|a\,(x_0 - x_1) + b\,(y_0 - y_1) + c\,(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Uma vez que $P \in \pi$, suas coordenadas satisfazem

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0,$$

o que implica $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$.

Portanto,

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplo 22.

Determine a distância do ponto $P_0 = (0, -1, 0)$ ao plano $\pi : 2x + y + 2z - 4 = 0$.

Solução:

Temos:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}.$$

3. Distância entre dois planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos quaisquer. A distância entre π_1 e π_2, $d(\pi_1, \pi_2)$, é definida como a menor distância entre dois pontos, um de π_1 e outro de π_2.

(i) Se os vetores normais não são paralelos, então os planos são concorrentes e, neste caso, a distância entre eles é zero.

(ii) Se os vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (coincidentes ou não coincidentes) e a distância entre π_1 e π_2 é igual à distância entre um ponto de um deles ao outro plano.

Exemplo 23.

Determinar a distância entre os planos $\pi_1 : x + 2y + 6z - 1 = 0$ e $\pi_2 : x + 2y + 6z - 10 = 0$.

Solução:

Sejam $n_1 = (1, 2, 6)$ e $n_2 = (1, 2, 6)$ os vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Notemos que $n_1 = n_2$ e, portanto, π_1 e π_2 são paralelos.

Seja $P_1 = (1, 0, 0) \in \pi_1$. Então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{41}} = \frac{9}{\sqrt{41}}.$$

4. Distância entre duas retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer. A distância entre r_1 e r_2, $d(r_1, r_2)$, é definida como a menor distância entre dois pontos, um de r_1 e outro de r_2.

(i) Se os vetores diretores são paralelos, então as retas r_1 e r_2 são paralelas (coincidentes ou não coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de uma reta e a outra reta. Assim, se $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$ e $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente, temos:

$$d(r_1, r_2) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v_2}\|}{\|\overrightarrow{v_2}\|}.$$

(ii) Se os vetores diretores não são paralelos, então as retas são reversas ou concorrentes. Estas retas definem dois planos paralelos , π_1 que contém r_1, e é paralelo a r_2, e π_2 que contém r_2, e é paralelo a r_1. Se $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são os vetores diretores de r_1 e r_2,, respectivamente, o vetor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ é normal a ambos os planos. A distância entre as retas é igual à distância entre os dois planos, isto é,

$$d(r_1, r_2) = d(\pi_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1) = \frac{|\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \rangle|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|},$$

com $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$.

Exemplo 24.

(a) Vamos calcular a distância entre as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Sejam $v_r = (2, 2, 2)$ e $v_s = (2, 2, 3)$ vetores diretores de r e s, respectivamente. Como v_r e v_s não são múltiplos um do outro, r e s não são paralelas (vimos que r e s são reversas).

Um vetor perpendicular a ambas as retas é

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = (2, -2, 0).$$

Este vetor é normal aos planos π_1,, que contém r e é paralelo a s e π_2 que contém s e é paralelo a r.

Sejam $P_1 = (1, 2, 0) \in r$ e $P_2 = (1, 3, 3) \in s$. Então $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 3)$ e

$$d(r, s) = d(\pi_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1) = \frac{|\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{n} \rangle|}{\| \overrightarrow{n} \|} = \frac{|0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Vamos determinar a distância entre as retas

$$r : \frac{x-1}{4} = -\frac{y+1}{2} = \frac{2-z}{6} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

As retas r e s são paralelas, pois seus vetores diretores $v_r = (4, -2, -6)$ e $v_s = (2, -1, -3)$ são paralelos.

Logo,

$$d(r, s) = d(P_1, s) = \frac{\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v_2} \|}{\| \overrightarrow{v_2} \|},$$

onde $P_1 \in r$ e $P_2 \in s$.

Sejam $P_1 = (1, -1, 2) \in r$ e $P_2 = (1, 0, 2) \in s$. Então $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 0)$ e

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = (-3, 0, -2).$$

Logo,

$$d(r, s) = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

1.10 Superfícies Quádricas

Definição 1.15

Uma equação geral do $2^{\underline{0}}$ grau em três variáveis

$$(I) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

com pelo menos uma das constantes A, B, C, D, E ou F diferentes de zero, representa uma superfície quádrica ou simplesmente uma quádrica.

Através de uma mudança de coordenadas (rotação e/ou translação), a equação (I) pode assumir uma das formas

$$(II) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M \quad \text{(quádrica centrada)}$$

ou

$$(III) \quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 = Nz \\ Ax^2 + Bz^2 = Ny \\ Ay^2 + Bz^2 = Nx \end{cases} \quad \text{(quádricas não centradas)}$$

1.10.1 Quádricas Centradas

Se nenhum dos coeficientes da equação

$$(II) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M$$

for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1. Elipsóide: Representado pela equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ a,b,c>0.$$

Características:

- É simétrica em relação a todos os eixos coordenados, aos planos coordenados e a origem.
- Se duas das constantes a, b e c são iguais, temos um elipsóide de revolução.
- Interseções com os eixos coordenados:

eixo OX: $A=(\pm\, a,0,0)$;

eixo OY: $B=(0,\pm\, b,0)$;

eixo OZ: $C=(0,0,\pm\, c)$.

- Traços sobre os planos coordenados: elipses.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ \\ y=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ \\ x=0\end{cases}$$

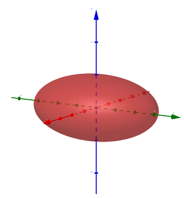
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2}\\ \\ z=k\end{cases}\text{, elipses para } -c<k<c.$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2}\\ \\ y=k\end{cases}\text{, elipses para } -b<k<b.$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ \\ x = k \end{cases}, \text{ elipses para } -a < k < a.$$

- Esboço da superfície:



2. Hiperbolóide de uma folha: Representado pelas equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ou } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

   Características:

   - É simétrica em relação a todos os eixos coordenados, aos planos coordenados e a origem.

   - A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é negativo na sua equação.

     Vamos analisar a superfície de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

     – Interseções com os eixos coordenados:

eixo OX: $A = (\pm\, a, 0, 0)$;

eixo OY: $B = (0, \pm\, b, 0)$;

eixo OZ: não existe.

– Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ \\ z=0 \end{cases} \quad \text{(elipse)},$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ \\ y=0 \end{cases} \quad \text{(hipérbole)},$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ \\ x=0 \end{cases} \quad \text{(hipérbole)}$$

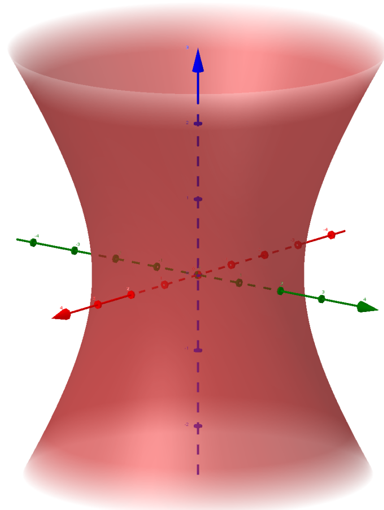
– Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{k^2}{c^2} \\ \\ z=k \end{cases} \quad \text{, elipses para qualquer } k\in\mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2} \\ \\ y=k \end{cases} \quad \text{, hipérboles.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2} \\ \\ x=k \end{cases} \quad \text{, hipérboles.}$$

– Esboço da superfície:



3. Hiperbolóide de duas folhas: Representado pelas equações

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ou } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Características:

- É simétrica em relação a todos os eixos coordenados, aos planos coordenados e a origem.

- A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é positivo na sua equação.

Vamos analisar a superfície de equação

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

– Interseções com os eixos coordenados:

eixo OX: não existe;

eixo OY: não existe;

eixo OZ: $C = (0, 0, \pm c)$.

– Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{(conjunto vazio)},$$

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{(hipérbole)},$$

$$\begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{(hipérbole)}$$

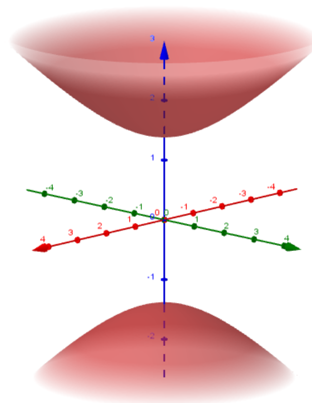
– Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} - 1 \\ \\ z = k \end{cases} \text{, elipses para } k < -c \text{ ou } k > c.$$

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \\ \\ y = k \end{cases} \text{, hipérboles para todo } k \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{a^2} \\ \\ x = k \end{cases} \text{, hipérboles para todo } k \in \mathbb{R}.$$

– Esboço da superfície:



1.10.2 Quádricas Não Centradas

Consideremos as equações

$$(III)\quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 = Nz \\ Ax^2 + Bz^2 = Ny \\ Ay^2 + Bz^2 = Nx \end{cases}$$

Se as constantes A, B e N são não nulas, podemos reescrever as equações (III) nas formas canônicas

$$(IV)\quad \begin{cases} \pm\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = cz \\ \\ \pm\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{z^2}{b^2} = cy \\ \\ \pm\dfrac{y^2}{a^2} \pm \dfrac{z^2}{b^2} = cx \end{cases},$$

com a, e b reais positivos e c não nulo.

Temos duas possibilidades:

1. Os coeficientes dos termos de $2^{\underline{0}}$ grau têm sinais iguais: Parabolóide Elíptico.

   Representado por uma das equações
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx.$$

   Características:

   - Se $a = b$, temos um parabolóide de revolução.

   - A interseção com os eixos coordenados é a origem $O = (0, 0, 0)$.

   - A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica.

     Analisaremos a superfície de equação
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \; c > 0.$$

     - Para $c > 0$, temos $z \geqslant 0$. Logo, a superfície se encontra acima do plano xy.

     - É simétrica em relação ao eixo OZ e aos planos xz e yz.

     - Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ \\ z = 0 \end{cases}, \quad (\text{ponto } \; O = (0,0,0)\,)$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = cz \\ \\ y = 0 \end{cases}, \quad (\text{parábola})$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = cz \\ \\ x = 0 \end{cases}, \quad \text{(parábola)}$$

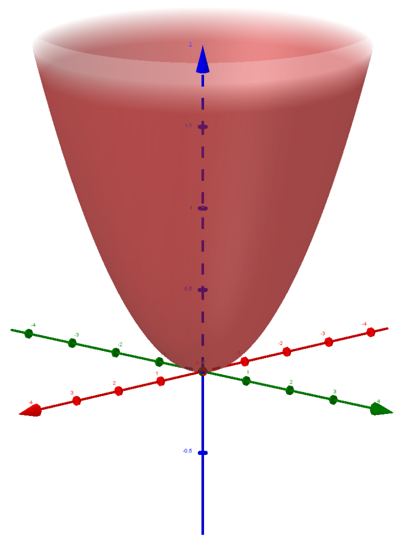
– Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = ck \\ \\ z = k \end{cases}, \quad \text{(elipses para } k > 0.\text{)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} = cz \\ \\ y = k \end{cases}, \quad \text{(parábolas)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cz \\ \\ x = k \end{cases}, \quad \text{(parábolas)}$$

– Esboço da superfície:



2. Os coeficientes dos termos de $2^{\underline{0}}$ grau têm sinais contrários: Parabolóide Hiperbólico.

   Representado por uma das equações

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad \text{ou} \quad -\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx.$$

   Características:

   - A interseção com os eixos coordenados é a origem $O=(0,0,0)$.
   - A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica.

Analisaremos a superfície de equação

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz,\ c>0.$$

- A superfície é simétrica em relação ao eixo OZ e aos planos xz e yz.

- Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ \\ z=0 \end{cases},\quad \left(\text{par de retas concorrentes } y=\pm\frac{b}{a}x\right)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}=cz \\ \\ y=0 \end{cases},\quad \text{(parábola)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=cz \\ \\ x=0 \end{cases},\quad \text{(parábola)}$$

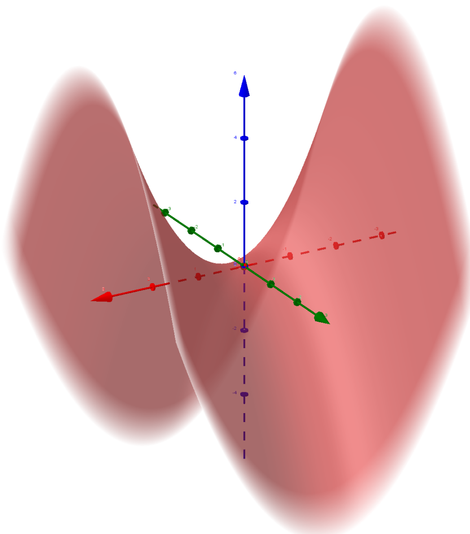
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=ck \\ \\ z=k \end{cases},\quad \text{(hipérboles para } k\neq 0.\text{)}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}=cz \\ \\ y=k \end{cases},\quad \text{(parábolas)}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{k^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz \\ \\ x=k \end{cases},\quad \text{(parábolas)}$$

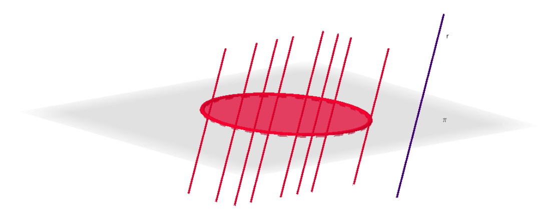
- Esboço da superfície:



1.11 Superfície Cilíndrica

Definição 1.16

Sejam C uma curva plana e f uma reta fixa não contida nesse plano. Superfície Cilíndrica é a superfície gerada por uma reta r que se move paralelamente à reta fixa f em contato permanente com a curva plana C. A reta r que se move é denominada geratriz e a curva C é a diretriz da superfície cilíndrica.



Estamos interessados em superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva em um dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo coordenado não contido no plano. Neste caso, a equação da superfície cilíndrica é a mesma da sua diretriz.

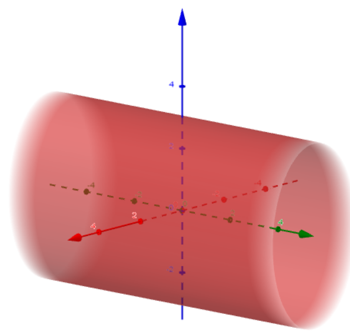
Conforme a diretriz seja uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada circular, elíptica, hiperbólica ou parabólica.

Exemplo 25.

A equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

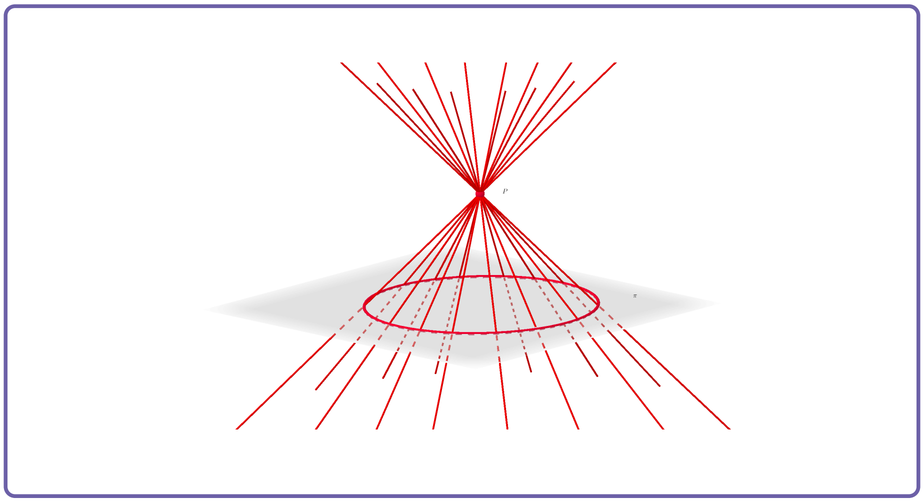
representa uma superfície cilíndrica com geratrizes paralelas ao eixo OY e com diretriz sendo uma elipse no plano xy.



1.12 Superfície Cônica

Definição 1.17

Superfície Cônica é a superfície gerada por uma reta que se move apoiada em uma curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva. A reta é denominada geratriz, a curva plana é a diretriz e o ponto fixo é o vértice da superfície cônica.



Consideraremos o caso particular da superfície cônica cuja diretriz é uma elipse (ou circunferência) com o vértice na origem e seu eixo sendo um dos eixos coordenados.

A superfície cônica cujo eixo é o eixo OZ tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Características:

- Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ \\ z = 0 \end{cases}, \quad \left(\text{ponto } \ O = (0,0,0)\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases}, \quad \left(\text{par de retas concorrentes } \ z = \pm\,\frac{c}{a}\,x\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ \\ x = 0 \end{cases}, \quad \left(\text{par de retas concorrentes } \ z = \pm\frac{c}{b}\,y\right)$$

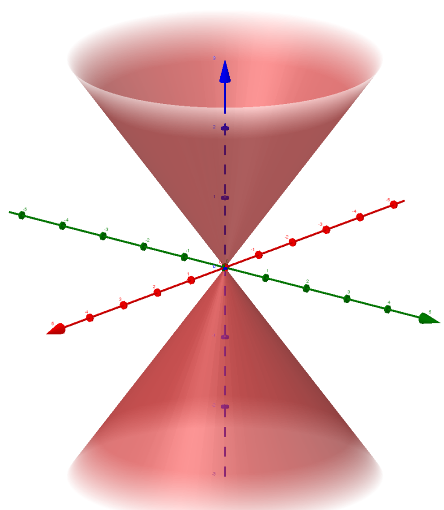
- Seções por planos paralelos ao planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} \\ \\ z = k \end{cases}, \quad \text{(elipses)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{k^2}{b^2} \\ \\ y = k \end{cases}, \quad \text{(hipérboles)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{k^2}{a^2} \\ \\ x = k \end{cases}, \quad \text{(hipérboles)}$$

- Esboço da superfície:



2 Funções de Várias Variáveis

Neste capítulo introduzimos os conceitos de limite, continuidade e diferenciabilidade de funções de várias variáveis, dando maior ênfase às funções de duas e três variáveis.

2.1 Domínio, Imagem e Gráfico de Funções

O objetivo desta seção é introduzir os conceitos de funções de várias variáveis. Ao final da mesma, vocês deverão ser capazes de determinar o domínio de uma função de várias variáveis e fazer o esboço de seu gráfico.

Definição 2.1

Uma função real f de n variáveis reais é uma regra que associa a cada $n-$upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ um único número real $w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

O subconjunto $D(f)$ de $\mathbb{R}^n$ é chamado domínio da função f.

A imagem de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto

$$Im(f) = \{ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R} \,/\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D(f) \}.$$

Podemos denotar a função f por

$$\begin{array}{rlcl} f: & D(f) \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}$$

Exemplo 26.

(a) Seja $f(x, y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$. Então f é uma função de duas variáreis cujo domínio são os postos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y \geqslant 0$. Assim, o dominio de f consiste dos pontos no plano xy que estão sobre ou acima do eixo x.

(b) A função $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$ é uma função de duas variáveis reais, cujo domínio são os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \neq y$, isto é, são todos os pontos do plano xy que não estão sobre a reta $y = x$.

(c) A função $f(x, y) = ln(x^2 - y)$ é uma função de duas variáveis cujo domínio são os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 - y > 0$, ou seja, $y < x^2$.

Para esboçar esta região, usamos o fato de que a curva $y = x^2$ separa a região onde $y < x^2$ da região onde $y > x^2$.

Testamos, por exemplo, o ponto $(x, y) = (0, 1)$. Então $x^2 = 0$ e $y = 1$. Logo, o ponto $(0, 1)$ está na região onde $y > x^2$. Assim, a região onde $y < x^2$ é aquela que não contém o ponto teste.

(d) A função $f(x, y) = \dfrac{5\,ln\,(x - y)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ é uma função de duas variáveis reais, cujo domínio são os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y < x$ e $x^2 + y^2 < 4$.

Testamos, por exemplo, o ponto $(x, y) = (0, -1)$. Então $-1 = y < x = 0$ e $x^2 + y^2 = 1 < 4$. Logo, $(0, -1)$ pertence ao domínio de f, que é a região abaixo da reta $y = x$ e interior ao círculo de centro na origem e raio 2.

(e) A função $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ é uma função de três variáveis cujo domínio são os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais $1 - x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 0$, ou seja, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Logo, o domínio de f consiste dos pontos sobre ou dentro da esfera de centro na origem e raio 1.

Definição 2.2

Seja $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Definimos o gráfico de f, denotado por $G(f)$, como sendo o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por todos os pontos da forma $(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, onde $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D(f)$, ou seja,

$$G(f) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D(f)\}.$$

Exemplo 27.

(a) Determine o domínio e esboce o gráfico de $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Solução:

O domínio de f são todos os pares de (x, y) de $\mathbb{R}^2$ para os quais $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, ou seja, o domínio de f é o disco circular $x^2 + y^2 \leqslant 1$ de raio 1 e centro na origem

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Um ponto (x, y, z) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $(x, y) \in D(f)$, e $z = f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, que é equivalente às condições $z \leqslant 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Deste modo, o gráfico de f consiste na porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ abaixo ou sobre o plano xy (semiesfera).

(b) Determine o domínio e esboce o gráfico de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Solução:

O domínio de f são todos os pares de (x, y) de $\mathbb{R}^2$ para os quais $x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0$, ou seja, os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e fora dela

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \geqslant 1\}.$$

Um ponto (x, y, z) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $(x, y) \in D(f)$, e $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, que é equivalente às condições $z \geqslant 0$ e $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Deste modo, o gráfico de f consiste na porção do hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ acima do plano xy.

(c) Esboce o gráfico de $f(x,y) = ln\left(\dfrac{x^2}{9} + y^2\right)$.

Solução:

O domínio de f são todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ para os exceto a origem

$$D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Para auxiliar nosso esboço, vamos considerar os traços de f nos planos coordenados e as seções nos planos $z = k$.

Cosideremos a equação

$$ln\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right) = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9} + y^2 = e^k.$$

Como $e^k > 0$ para todo $k \in \mathbb{R}$, as seções sobre os planos $z = k$ são elipses de equação

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(3\,e^{\frac{k}{2}})^2} + \dfrac{y^2}{(e^{\frac{k}{2}})^2} = 1 \\ \\ z = k \end{cases}.$$

Os traços nos planos coordenados são:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \text{(elipse)}, \quad \begin{cases} z = 2\,ln|x| - ln\,9 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = 2\,ln\,|y| \\ x = 0 \end{cases}.$$

Com base nos dados obtidos, podemos esboçar o gráfico de f.

2.2 Curva e Superfície de Nível

Definição 2.3

Uma curva ao longo da qual $z = f(x, y)$ tem valor constante é denominada curva de nível ou curva de contorno da função f. A equação da curva de nível ao longo da qual a função assume o valor constante k é $f(x, y) = k$.

Suponhamos que uma superfície S seja o gráfico de uma função $z = f(x, y)$. Se a interseção de S com o plano, paralelo ao plano xy, de equação $z = k$ é não vazia, então ela é uma curva cuja projeção no plano xy é a curva de nível $f(x, y) = k$. A cada ponto desta curva de nível corresponde um único ponto na superfície S que está k unidades acima do plano xy, se k for positivo, ou k unidades abaixo dele, se k for negativo. Ao considerarmos diferentes valores para a constante k, obtemos um conjunto de curvas de nível. Este conjunto de curvas é chamado mapa de contorno da superfície S.

Exemplo 28.

Faça um mapa de contorno de f, mostrando as curvas de nível de f para os valores de k determinados e esboce o gráfico de f.

(a) $f(x, y) = 2 - x - y$, com $k = -4, -2, 0, 2, 4$.

Solução:

O gráfico da superfície $z = 2 - x - y$ é um plano.

Uma curva do nível de f de altura k tem equação

$$2 - x - y = k$$

$$y = -x + (2 - k),$$

a qual representa uma reta de inclinação -1.

O mapa de contorno de f é uma família de retas paralelas com inclinação -1 :

$$k = -4 \ \Rightarrow \ y = -x + 6,$$

$$k = -2 \ \Rightarrow \ y = -x + 4,$$

$$k = 0 \ \Rightarrow \ y = -x + 2,$$

$$k = 2 \ \Rightarrow \ y = -x,$$

$$k = 4 \ \Rightarrow \ y = -x - 2.$$

O gráfico de f é o plano de equação $x+y+z-2 = 0$. Notemos que os traços nos planos coordenados xy, yz e xz são, respectivamente, as retas $y = -x+2$, $z = -y + 2$ e $z = -x + 2$.

(b) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$, com $k = -1, 0, 4, 9$.

O gráfico da superfície $z = 4x^2 + y^2$ é um parabolóide elíptico. Uma curva de nível de altura k tem equação

$$4x^2 + y^2 = k.$$

Se $k = -1$, a equação $4x^2 + y^2 = -1$ não tem solução.

Se $k = 0$, então a curva de nível é o único ponto $(0, 0)$.

Se $k > 0$, podemos reescrever a equação como

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{\sqrt{k}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{k}\right)^2} = 1,$$

a qual representa uma família de elipses com interceptos x iguais a $\pm\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ e interceptos y iguais a $\pm\sqrt{k}$.

O gráfico de f é um parabolóide elíptico, cujos traços nos planos xy, xz e yz são, respectivamente, a origem, a parábola $z = 4x^2$ a parábola $z = y^2$.

Quanto às funções de três variáveis $w = f(x, y, z)$, não podemos visualizar seu gráfico. No entanto, podemos considerar as superfícies de equação $f(x, y, z) = k$, quando k varia no conjunto imagem de f. Estas superfícies são chamadas superfícies de nível para f.

Exemplo 29.

Descreva as superfícies de nível de:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solução:

As superfícies de nível de f têm equações da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = k.$$

Se $k > 0$, o gráfico desta superfície é uma esfera de centro na origem e raio $\sqrt{k}$.

Se $k = 0$, o gráfico é o ponto $(0, 0, 0)$.

Se $k < 0$, não há superfície de nível.

(b) $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$.

Solução:

As superfícies de nível de f têm equações da forma

$$z^2 - x^2 - y^2 = k.$$

Se $k > 0$, a superfície de nível é o hiperbolóide de duas folhas de equação

$$-\frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{k})^2} = 1.$$

Se $k = 0$, a superfície de nível é o cone circular de equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Se $k < 0$, a superfície de nível é o hiperbolóide de uma folha de equação

$$\frac{x^2}{(\sqrt{-k})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{-k})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1.$$

2.3 Noções de Topologia

Definição 2.4

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Definimos a bola aberta de centro x_0 e raio r como sendo o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto x_0 é menor que r, ou seja,

$$B(x_0, r) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - x_0\| < r \,\}.$$

Exemplo 30.

(a) Se $n = 1$ e $x_0 = a$, então

$$B(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x - a| < r \} = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a - r < x < a + r \}.$$

(b) Se $n = 2$ e $x_0 = (a, b)$, então

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x - x_0\| < r \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2 \}. \end{aligned}$$

(c) Se $n = 3$ e $x_0 = (a, b, c)$, então

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \|x - x_0\| < r \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2 \}. \end{aligned}$$

Definição 2.5

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Definimos a bola fechada de centro x_0 e raio r como sendo o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto x_0 é menor ou igual a r, ou seja,

$$B[x_0, r] = \{ x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - x_0\| \leqslant r \}.$$

Definição 2.6

Seja X um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^n$. Um ponto $x_0 \in X$ é chamado ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset X$. Um ponto $x_0 \in X$ é chamado ponto de fronteira de X se toda bola aberta com raio $r > 0$ e centro em x_0 contém pontos de X e pontos que estão fora de X.

Definição 2.7

O conjunto de todos os pontos interiores de X é chamado interior de X e denotado por $int(X)$ ou $\overset{\circ}{X}$. O conjunto de todos os pontos de fronteira de X é chamado fronteira de X e denotado por ∂X ou $front(X)$.

Definição 2.8

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto em $\mathbb{R}^n$ se para todo $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset X$. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado em $\mathbb{R}^n$ se $\partial X \subset X$.

Definição 2.9

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se existe uma constante $M > 0$ tal que $X \subset B[0;M]$ ($\|x\| \leqslant M$, para todo $x \in X$).

Definição 2.10

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito compacto se é fechado e limitado.

Exemplo 31.

Seja X o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão dentro ou sobre o círculo de raio 1 e centro na origem.

O conjunto X, seu interior e sua fronteira podem ser expressos na notação de conjuntos como

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

$$int(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < 1\},$$

$$\partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Notemos que X é fechado e limitado e $int(X)$ é aberto.

Exemplo 32.

O intervalo aberto $A = (a, b)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Solução:

De fato, para cada $x \in A = (a, b)$, podemos tomar $r = min\{x - a, b - x\}$. Assim, se $y \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$, temos:

$|y - x| < \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{r}{2} < y - x < \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad x - \frac{r}{2} < y < x + \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad a < y < b.$

Portanto, $B\left(x, \frac{r}{2}\right) \subset A = (a, b)$.

2.4 Limites de Funções de Duas ou Três Variáveis

Definição 2.11

Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio $D(f)$ contém pontos arbitrariamente próximos de (x_0, y_0). Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) é L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

se para todo número $\epsilon > 0$ podemos encontrar um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - L| < \epsilon$ sempre que $(x, y) \in D(f)$ e $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Definição 2.12

Seja f uma função de três variáveis cujo domínio $D(f)$ contém pontos arbitrariamente próximos de (x_0, y_0, z_0). Dizemos que o limite de $f(x, y, z)$ quando (x, y, z) tende a (x_0, y_0, z_0) é L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L,$$

se para todo número $\epsilon > 0$ podemos encontrar um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x, y, z) - L| < \epsilon$ sempre que $(x, y, z) \in D(f)$ e $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$.

Exemplo 33.

Mostre que:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x_0 = x_0$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} (x+2y) = 1.$

Solução:

(a) Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ qualquer.

Então, se $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, temos:

$$|f(x,y) - L| = |c - c| = 0 < \epsilon.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c.$$

(b) Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon > 0$.

Então, se $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, temos:

$$|f(x,y) - L| = |x - x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2} \leqslant \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta = \epsilon.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0.$$

(c) Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$, $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$, de modo que, se $0 < \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} < \delta$, temos:

$$|f(x,y) - L| = |x + 2y - 1| = |x + 2y + 1 - 2| = |(x+1) + 2(y-1)|$$

$$\overset{\text{(DT)}}{\leqslant} |x+1| + 2\,|y-1| \overset{(*)}{<} \delta + 2\,\delta = 3\,\delta = 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} (x+2y) = 1.$$

Para obtermos $(*)$, notamos que

$$0 \leqslant (y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 \leqslant (x+1)^2 + (y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \sqrt{(x+1)^2} \leqslant \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant |x+1| \leqslant \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} < \delta$$

e que

$$0 \leqslant (x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 \leqslant (x+1)^2 + (y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \sqrt{(y-1)^2} \leqslant \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant |y-1| \leqslant \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} < \delta.$$

Propriedades de Limites

Sejam $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$. Então

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L + M$;

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M$;

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$, se $M \neq 0$;

(iv) Se $h(z)$ é uma função de uma variável contínua em $z = L$, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(f(x,y)) = h(L)$.

Exemplo 34.

Calcule, se possível, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{2xy+3x^2}{x^3+2}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt{x^2+2xy}$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Solução:

(a) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2xy+3x^2}{x^3+2} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} 2xy+3x^2}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x^3+2}$$

$$= \frac{2\cdot \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} y + 3\cdot\left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x\right)^2}{\left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x\right)^3 + \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} 2} = \frac{2\cdot 1\cdot 0+3\cdot 1^2}{1^3+2}$$

$$= \frac{3}{3} = 1.$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt{x^2+2xy} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+2xy)}$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} x\right)^2 + 2\cdot \lim_{(x,y)\to(1,1)} x\cdot \lim_{(x,y)\to(1,1)} y)} = \sqrt{1^2+2\cdot 1\cdot 1}$$

$$= \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

Notemos que o numerador e o denominador de $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ tendem a zero quando $(x,y)\to(0,0)$, mas $\dfrac{x^2-y^2}{x+y} = \dfrac{(x+y)(x-y)}{x+y} = x-y$. Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x - \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$= 0-0 = 0.$$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Notemos que o numerador e o denominador de $\dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ tendem a zero quando $(x, y) \to (1, 1)$.

Racionalizando, obtemos:

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = x(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} [x(\sqrt{x} + \sqrt{y})] = 1\,(1 + 1) = 2.$$

Observação 2.1

Se $f(x, y)$ está definida numa vizinhança de (x_0, y_0), então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x, y)| = 0.$$

Teorema 2.1: Teorema do Confronto

Sejam f, g e h funções definidas numa vizinhança do ponto (x_0, y_0), exceto possivelmente em (x_0, y_0), na qual temos $g(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant h(x, y)$. Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y)$, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Exemplo 35.

Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$.

Solução:

Notemos que

$0 \leqslant x^2 \;\Rightarrow\; y^2 \leqslant x^2+y^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; 0 \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow\; 0 \leqslant |y|^3 \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; 0 \leqslant \dfrac{|y|^3}{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2},\;$ se $(x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow\; 0 \leqslant \left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2},\;$ se $(x,y) \neq (0,0)$.

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$, segue do Teorema do Confronto que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$. Portanto, pela observação anterior,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Definição 2.13

Dizemos que uma função f é limitada num dado conjunto D se existir uma constante $M > 0$ tal que $|f(x,y)| \leqslant M$, para todo $(x,y) \in D$.

Corolário 2.1: Teorema do Anulamento

Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções definidas em uma vizinhança de (x_0, y_0), exceto possivelmente em (x_0, y_0), na qual $g(x, y)$ é uma função limitada e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0$. Então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = 0.$$

Exemplo 36.

(a) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2 + y^2}$.

Solução:

Notemos que $\dfrac{y^3}{x^2 + y^2} = y \cdot \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$ e

$0 \leqslant x^2 \;\Rightarrow\; y^2 \leqslant x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \leqslant 1$ para $(x, y) \neq (0, 0)$

$\Rightarrow\; -1 \leqslant \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \leqslant 1$ para $(x, y) \neq (0, 0)$

$\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$ é limitada para $(x, y) \neq (0, 0)$.

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, segue do Teorema do Anulamento que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

(b) Mostre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[y \cdot cos\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)\right] = 0$.

Solução:

Sabemos que, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$-1 \leqslant cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \leqslant 1,$$

ou seja, $cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ é uma função limitada para $(x, y) \neq (0, 0)$.

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, segue do Teorema do Anulamento que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[y \cdot cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)\right] = 0.$$

Teorema 2.2: Unicidade do Limite

O limite quando existe é único e independente do caminho.

Teorema 2.3: Regra dos Dois Caminhos

Para se estimar o limite de uma função f no ponto (x_0, y_0) é necessário calcular esse valor por todas as trajetórias que passam por (x_0, y_0). Caso o limite não exista em alguma trajetória ou dê um valor diferente para caminhos diferentes, então o limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ não existe.

Exemplo 37.

(a) Consideremos a função

$$f(x,y) = \frac{-xy}{x^2+y^2}.$$

Determine o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo de:

(i) do eixo x;

(ii) do eixo y;

(iii) da reta $y = x$;

(iv) da reta $y = -x$;

(v) da parábola $y = x^2$;

(vi) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Solução:

(i) O eixo x pode ser parametrizado por $\gamma(t) = (t, 0),\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ao longo do eixo x}}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

(ii) O eixo y pode ser parametrizado por $\gamma(t) = (0, t),\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ao longo do eixo y}}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

(iii) A reta $y = x$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (t, t),\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ao longo da reta } y = x}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{2t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(iv) A reta $y = -x$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (t, -t),\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo da reta } y=-x}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,-t)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(v) A parábola $y = x^2$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (t, t^2),\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo da parábola } y=x^2}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t^3}{t^2+t^4} = \lim_{t\to 0} -\frac{t}{1+t^2} = 0.$$

(vi) Visto que alguns dos limites anteriores não coincidem, segue da Regra dos Dois Caminhos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

(b) Seja f a função definida por

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Determine o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo de:

(i) do eixo x;

(ii) da reta $y = x$;

(iii) da parábola $y = x^2$;

(iv) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

Solução:

(i) O eixo x pode ser parametrizado por $\gamma(t) = (t, 0),\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ao longo do eixo x}}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

(ii) A reta $y = x$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (t, t),\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ao longo da reta } y = x}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{2t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{2} = 0.$$

(iii) A parábola $y = x^2$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (t, t^2),\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ao longo da parábola } y = x^2}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{t^2 + t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{1 + t^2} = 0.$$

(iv) Ao longo dos caminhos (i), (ii) e (iii), o limite é o mesmo. Isto nos leva a suspeitar que o limite existe e vale zero.

De fato, notemos que

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = x \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Além disso,

$$0 \leqslant x^2 \ \Rightarrow\ y^2 \leqslant x^2 + y^2 \ \Rightarrow\ \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leqslant 1 \text{ para } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Rightarrow\ -1 \leqslant \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leqslant 1 \text{ para } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Rightarrow\ \frac{y^2}{x^2 + y^2} \text{ é limitada para } (x,y) \neq (0,0).$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$, segue do Teorema do Anulamento que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(c) Calcule, se possível, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, com $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^4+y^2}$.

Solução:

Consideremos o limite de $f(x,y)$ ao longo do eixo dos x, $\gamma(t) = (t,0), t \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ao longo do eixo x}}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}$$

$= +\infty$.

Logo, o limite não existe.

2.5 Continuidade

Definição 2.14

Uma função f de duas variáveis é dita contínua em $(x_0,y_0) \in D(f)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Uma função f de três variáveis é dita contínua em $(x_0, y_0, z_0) \in D(f)$ se

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0).$$

Dizemos que f é contínua (em $D(f)$) se f é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 38.

(a) Consideremos a função

$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textit{se}\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se}\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua na origem.

De fato, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

(b) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \textit{se}\,(x,y) \neq (0,0) \\ k & \textit{se}\,(x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine o valor de k para que f seja contínua na origem.

Vimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Como $(0,0) \in D(f)$, e $f(0,0) = k$, f será contínua na origem se $k = 0$.

Teorema 2.4

(a) Se $g(x)$ é uma função contínua em x_0 e $h(y)$ é uma função contínua em y_0, então $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ é uma função contínua em (x_0, y_0).

(b) Se f e g são funções contínuas em (x_0, y_0), então $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ são funções contínuas em (x_0, y_0), onde no último caso, supomos $g(x_0, y_0) \neq 0$.

(c) Se $h(x,y)$ é continua em (x_0, y_0) e $g(u)$ é contínua em $u = h(x_0, y_0)$, então a composição $f(x,y) = g(h(x,y))$ é contínua em (x_0, y_0).

Exemplo 39.

(a) Seja $f(x,y) = 3x^3y^4$. Então f é uma função contínua, pois é o produto das funções contínuas $g(x) = 3x^3$ e $h(y) = y^4$.

(b) Seja $f(x,y) = cos\,(3x^3y^4)$. Então f é uma função contínua, pois é a composição das funções contínuas $g(x) = cos\,x$ e $h(x,y) = 3x^3y^4$.

(c) Verifique se f é contínua, onde

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & se\,(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se\,(x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solução:

Vamos dividir em dois casos:

- $1^{\underline{o}}$ Caso: $(x, y) \neq (0, 0)$.

  Consideremos $p(x, y) = x^2 + y^2$ e $h(x) = sen\, x$. Então p e h são funções contínuas (polinomial e trigonométrica). Logo, a composta $g(x, y) = sen\,(x^2 + y^2)$ também é uma função contínua. Assim, $f(x, y) = \dfrac{sen\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ é contínua, pois é um quociente de funções contínuas.

- $2^{\underline{o}}$ Caso: $(x, y) = (0, 0)$.

  Façamos a mudança de variável $t = x^2 + y^2$ e notemos que $t \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Logo,

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{sen\,(t)}{t} = 1$$
  $$= f(0, 0).$$

  Portanto, f é contínuam em $(0, 0)$.

Assim, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

2.6 Derivadas Parciais

Definição 2.15

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis. A derivada parcial de f em relação a x, denotada por $f_x(x, y)$, é definida por

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

se este limite existir.

Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y, denotada por $f_y(x,y)$, é definida por

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta\, y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta\, y) - f(x,y)}{\Delta\, y},$$

se este limite existir.

Definição 2.16

Sejam $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in D(f)$. As derivadas parciais de f, em relação a x e a y, no ponto (x_0, y_0) são definidas, respectivamente, por

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta\, x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta\, x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta\, x},$$

e

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta\, y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta\, y) - f(x_0,y_0)}{\Delta\, y},$$

se estes limites existirem.

Observação 2.2

(i) Notação: Se $z = f(x,y)$, usamos as notações para suas derivadas parciais:

- $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = z_x = D_1 f = D_x f.$
- $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = z_y = D_2 f = D_y f.$

(ii) Para achar $f_x(x, y)$ podemos considerar a variável y como constante e derivamos f em relação a x. Do mesmo modo, para achar $f_y(x, y)$, cosideramos a variável x como constante e derivamos f em relação a y.

Exemplo 40.

(a) Seja $f(x, y) = 2x^2y - 4x$. Então:

- $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2y - 4(x+h) - 2x^2y + 4x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2y + 4xhy + 2h^2y - 4x - 4h - 2x^2y + 4x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(4xy + 2hy - 4)}{h} = \lim_{h\to 0} (4xy + 2hy - 4) = 4xy - 4. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{2x^2(y+h) - 4x - 2x^2y + 4x}{h} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{2x^2y + 2x^2k - 2x^2y}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{2x^2k}{k} = \lim_{h\to 0} (2x^2) = 2x^2. \end{aligned}$$

(b) Seja $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2-z^2}$. Então:

- $f_x(x,y,z) = 2x\, e^{\,x^2+y^2-z^2}$;
- $f_y(x,y,z) = 2y\, e^{\,x^2+y^2-z^2}$;
- $f_z(x,y,z) = -2z\, e^{\,x^2+y^2-z^2}$.

(c) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textit{se}\,(x,y) \neq (0,0) \\ o & \textit{se}\,(x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

As derivadas parciais de f, nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, são dadas por

- $f_x(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)\cdot(-y) + (xy)\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2}$;
- $f_y(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)\cdot(-x) + (xy)\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^3 + xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

No ponto $(x,y) = (0,0)$, temos:

- $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$
  $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$;
- $f_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$
  $= \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0-0}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0$.

Portanto,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2} & \textit{se}\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se}\,(x,y) = (0,0) \end{cases} ;$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^3 + xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \textit{se}\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se}\,(x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

2.6.1 Interpretação Geométrica

Seja f uma função das variáves x e y e $(x_0, y_0) \in D(f)$. Quando derivamos f em relação a x no ponto (x_0, y_0), mantemos a variável y fixa. Com isto, temos uma função de uma variável x, $z = f(x, y_0)$. O gráfico desta função é a curva C_1, obtida pela interseção do gráfico de f com o plano $y = y_0$. A curva C_1 tem uma reta tangente l_1 no ponto P do gráfico de f no plano $y = y_0$. A derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico da curva C_1 no ponto P.

Quando derivamos em relação a y, mantemos a variável x fixa, obtendo uma função da variável y, $z = f(x_0, y)$. O plano $x = x_0$ intercepta o gráfico de f na curva C_2, que é o gráfico de $z = f(x_0, y)$. A curva C_2 tem uma reta tangente l_2 no ponto P do gráfico de f no plano $x = x_0$, cuja inclinação é a derivada parcial $f_y(x_0, y_0)$.

2.7 Derivadas de Ordem Superior

As derivadas parciais f_x e f_y de uma função $z = f(x, y)$ são, também, funções de duas variáveis.

Assim, podemos considerar suas derivadas parciais, chamadas derivadas parciais de segunda ordem, assim definidas:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Exemplo 41.

Determine as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de $f(x, y) = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$.

Solução:

Temos:

- $f_x(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$;
- $f_y(x, y) = 6y^2 + 6x^2y$;
- $f_{xx}(x, y) = 6x + 6y^2$;
- $f_{xy}(x, y) = 12xy$;
- $f_{yx}(x, y) = 12xy$;
- $f_{yy}(x, y) = 12y + 6x^2$.

Observação 2.3

No exemplo acima, notamos que as derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} coincidem. As condições que garantem esta igualdade são dados no teorema a seguir.

Teorema 2.5: Teorema de Schwarz

Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais mistas contínuas, então

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

Definição 2.17

Uma função $z = f(x, y)$, definida em um conjunto aberto A, é de classe C^n em A, se existem todas as derivadas parciais de ordem n em A e se tais derivadas parciais são contínuas.

2.8 Diferenciabilidade

Definição 2.18

Seja $w = f(x, y)$ e sejam Δx e Δy incrementos das variáveis x e y, respectivamente. O incremento Δw de $w = f(x, y)$ é definido por

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Definição 2.19

Seja $w = f(x,y)$ e sejam Δx e Δy incrementos das variáveis x e y, respectivamente.

(i) Definimos as diferenciais dx e dy, de x e y, por

$$dx = \Delta x \quad \text{e} \quad dy = \Delta y.$$

(ii) A diferencial dw de $w = f(x,y)$ é dada por

$$dw = f_x\,(x,y)\,\Delta x + f_y\,(x,y)\,\Delta y.$$

Definição 2.20

Seja $w = f(x,y)$. Dizemos que f é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$ se Δw puder ser escrita na forma

$$\Delta w = f_x\,(x_0,y_0)\,\Delta x + f_y\,(x_0,y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y,$$

onde $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\Delta x, \Delta y)$, $i = 1, 2$, e $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_i(\Delta x, \Delta y) = 0$, para $i = 1, 2$.

Dizemos que f é diferenciável em $A \subset \mathbb{R}^2$ se o for em cada ponto de A. Dizemos que f é diferenciável se o for em seu domínio.

Exemplo 42.

Mostre que $f(x,y) = x^2 + 2xy$ é diferenciável.

Solução:

Sabemos que

$$f_x(x,y) = 2x + 2y \ \text{ e } \ f_y(x,y) = 2x$$

e que

$$\begin{aligned}
\Delta w &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\
&= (x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 - 2xy \\
&= x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2xy + 2x\,\Delta y + 2y\,\Delta x + 2\,\Delta x\,\Delta y - x^2 - 2xy \\
&= 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x\,\Delta y + 2y\,\Delta x + 2\,\Delta x\,\Delta y.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta w &= (2x+2y)\Delta x + 2x\,\Delta y + \Delta\, xcdot\Delta x + 2\,\Delta x\,\Delta y \\
&= f_x(x,y)\,\Delta x + f_y(x,y)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\Delta y
\end{aligned}$$

com $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$, $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 2\,\Delta x$ tais que $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Portanto, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.6

Seja $f(x,y)$ definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$. Então:

$$f \text{ é diferenciável em } (x_0, y_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & f_x \text{ e } f_y \text{ existem} \\ (ii) & \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \end{cases},$$

onde $\varepsilon(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\, h - f_y(x_0, y_0)\, k$.

Exemplo 43.

Prove que $f(x,y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Solução:

As derivadas parciais f_x e f_y existem em todo ponto de $D(f) = \mathbb{R}^2$ e valem

$$f_x(x,y) = 2x \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = 2y.$$

Logo, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(x+h)^2 + (y+k)^2 - x^2 - y^2 - 2xh - 2yk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 - x^2 - y^2 - 2xh - 2yk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(h \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(k \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} 0 + 0 = 0.$$

Para concluírmos $(*)$, notemos que, para $(h,k) \neq (0,0)$, temos:

$$0 \leqslant k^2 \;\Rightarrow\; h^2 \leqslant h^2 + k^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{h^2} \leqslant \sqrt{h^2+k^2} \;\Rightarrow\; 0 \leqslant |h| \leqslant \sqrt{h^2+k^2}$$

$$\Rightarrow\; -1 \leqslant \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant 1, \text{ se } (h,k) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow \dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ é limitada para todo $(h,k) \neq (0,0)$.

Analogamente, $\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ é limitada para todo $(h,k) \neq (0,0)$.

Portanto, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.7

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2$, A um aberto $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem em A e forem contínuas em (x_0, y_0), então f será diferenciável neste ponto.

Corolário 2.2

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2$, A um aberto. Se f for de classe C^1 em A, então f será diferenciável em A.

Exemplo 44.

A função $f(x,y) = cos(x^2+y^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois é uma função contínua (composta de funções contínuas) e suas derivadas parciais

$$f_x(x,y) = -2x\, sen\,(x^2+y^2) \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = -2y\, sen\,(x^2+y^2)$$

são contínuas (produto de contínua por composta de funções contínuas).

Observação 2.4

Cuidado! Existem funções diferenciáveis em um ponto cujas derivadas parciais não são contínuas neste ponto.

Exercício 2.1

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\, sen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Determine $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$.

(b) Mostre que $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ não são contínuas em $(0,0)$.

(c) Prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

(d) Prove que f é diferenciável.

Teorema 2.8

Se f é diferenciável em (x_0,y_0), então f é contínua em (x_0,y_0).

Demonstração.

Queremos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

o que, fazendo $x = x_0 + \Delta\, x$, $y = y_0 + \Delta\, y$, pode ser reescrito como

$$\lim_{(\Delta\, x,\Delta\, y)\to(0,0)} \left[f(x_0 + \Delta\, x, y_0 + \Delta\, y) - f(x_0,y_0) \right],$$

ou seja,

$$\lim_{(\Delta\, x,\Delta\, y)\to(0,0)} \Delta\, f = 0.$$

Como, por hipótese, f é diferenciável em (x_0, y_0), temos

$$\Delta\, f = f_x\,(x_0,y_0)\,\Delta\, x + f_y\,(x_0,y_0)\,\Delta\, y + \varepsilon_1\,\Delta\, x + \varepsilon_2\,\Delta\, y,$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$, quando $(\Delta\, x, \Delta\, y) \to (0,0)$.

Assim,

$$\lim_{(\Delta\, x,\Delta\, y)\to(0,0)} \Delta\, f = \lim_{(\Delta\, x,\Delta\, y)\to(0,0)} \left[f_x\,(x_0,y_0)\,\Delta\, x + f_y\,(x_0,y_0)\,\Delta\, y + \varepsilon_1\,\Delta\, x + \varepsilon_2\,\Delta\, y \right] = 0,$$

como queríamos mostrar.

$\square$

2.9 Regras da Cadeia

Teorema 2.9

Se as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em t e se $z = f(x,y)$ for diferenciável no ponto $(x(t), y(t))$, então $z = f(x(t), y(t))$ é diferenciável em t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Exemplo 45.

Dada $f(x,y) = (x+y) \cdot e^{xy}$ determine $F'(1)$, sabendo que

$$F(t) = f(x(t), y(t)),\ x(1) = 1,\ y(1) = 1,\ x'(1) = 5 \ \text{ e } \ y'(1) = -2.$$

Solução:

Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + (x+y)\, y\, e^{xy} = (1 + xy + y^2)\, e^{xy},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} + (x+y)\, x\, e^{xy} = (1 + x^2 + xy)\, e^{xy},$$

temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x(1), y(1)) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(1,1) = 3\,e$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x(1), y(1)) = \frac{\partial f}{\partial y}\,(1,1) = 3\,e.$$

Portanto,

$$F'(1) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x(1), y(1)) \cdot x'(1) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x(1), y(1)) \cdot y'(1) = 3e \cdot 5 + 3e \cdot (-2) = 9e.$$

Teorema 2.10

Se $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem em (u,v) e se $z = f(x,y)$ for diferenciável em $(x(u,v), y(u,v))$, então $z = f(x(u,v), y(u,v))$ tem derivadas de primeira ordem em (u,v) dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Exemplo 46.

Dado que $z = e^{xy}$, $x = 2u + v$ e $y = \dfrac{u}{v}$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.

Solução:

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = y\,e^{xy} \cdot 2 + x\,e^{xy} \cdot \frac{1}{v} = \left(2y + \frac{x}{v}\right) e^{xy} \\ &= \left(2\,\frac{u}{v} + \frac{2u+v}{v}\right) e^{(2u+v)\,\frac{u}{v}} = \left(\frac{4u}{v} + 1\right) e^{(2u+v)\,\frac{u}{v}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = y\,e^{xy} \cdot 1 + x\,e^{xy} \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = \left(y - \frac{xu}{v^2}\right) e^{xy} \\ &= \left(\frac{u}{v} - \frac{(2u+v)\cdot u}{v^2}\right) e^{(2u+v)\,\frac{u}{v}} = -\frac{2u}{v^2}\, e^{(2u+v)\,\frac{u}{v}}.\end{aligned}$$

2.10 Plano Tangente e Vetor Gradiente

Definição 2.21

Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0). O plano

$$(*) \quad z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é chamado plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observação 2.5

(i) Só definimos plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se f for diferenciável em (x_0, y_0). Se f não for diferenciável em (x_0, y_0), mas admitir derivadas parciais neste ponto, então o plano $(*)$ existirá, mas não será o plano tangente.

(ii) Se f for diferenciável em (x_0, y_0), o plano $(*)$ conterá todas as retas tangentes ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(iii) Em notação de produto interno, o plano tangente se escreve como

$$\left\langle \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \right), \left(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0) \right) \right\rangle = 0.$$

Logo, o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular a $\left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \right)$.

A reta que passa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ paralela ao vetor $\Big(f_x\,(x_0, y_0), f_y\,(x_0, y_0), -1\Big)$ é chamada reta normal ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e tem equação

$$r_n : \begin{cases} x &= \quad x_0 &+ \quad f_x(x_0, y_0)\,t \\ y &= \quad y_0 &+ \quad f_y(x_0, y_0)\,t \\ z &= f(x_0, y_0) &- \quad t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 47.

Seja $f(x, y) = x^2\,y$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2, 1))$.

Solução:

Temos:

- $f(2, 1) = 2^2 \cdot 1 = 4$;
- $f_x(x, y) = 2xy \;\; \Rightarrow \;\; f_x(2, 1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$;
- $f_y(x, y) = x^2 \;\; \Rightarrow \;\; f_y(2, 1) = 2^2 = 4$.

Notemos que f e suas derivadas parciais são funções polinomiais e, portanto, contínuas. Assim, f é de classe C^1 e, portanto, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Logo, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, 4)$ é

$$z - f(2, 1) = f_x(2, 1)\,(x - 2) + f_y(2, 1)\,(y - 1)$$

$$z - 4 = 4\,(x - 2) + 4\,(y - 1)$$

$$4x + 4y - z - 8 = 0.$$

A reta normal ao gráfico de f em $(2, 1, 4)$ é

$$r_n : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.22

Seja f uma função de n váriáveis, $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$, que possui derivadas parciais em $P_0 \in \mathbb{R}^n$. O vetor gradiente de f em P_0 é o vetor

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right).$$

Notação: $\nabla f(P_0)$ ou $grad\, f(P_0)$.

Observação 2.6

(i) $\nabla f(P)$ é uma função vetorial para todo $P \in D(f)$.

(ii) Quando representamos graficamente o vetor gradiente $\nabla f(P_0)$, tomamos sempre o ponto inicial em P_0.

Teorema 2.11

Sejam $w = f(x, y, z)$ uma função de classe C^1 no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$. Se S é a superfície de nivel de equação $f(x, y, z) = k$ (constante) que contém P_0, então $\nabla f(P_0)$ é normal a S em P_0, ou seja, $\nabla f(P_0)$ é perpendicular a qualquer vetor tangente a S em P_0.

Observação 2.7

Nas condições do Teorema, podemos definir o plano tangente a S em P_0 pela equação

$$\left\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), \left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right) \right\rangle = 0$$

e a reta normal a S em P_0 por

$$r_n : \begin{cases} x = x_0 + f_x(P_0)\, t \\ y = y_0 + f_y(P_0)\, t \\ z = z_0 + f_z(P_0)\, t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 48.

Encontre a equação do plano tangente à superfície S de equação $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.

Solução:

A superfície S é uma superfície de nível da função de classe C^1 $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 8$. Temos $\nabla f(x,y,z) = (2x, 6y, 8z)$ e, daí, $\nabla f(1,-1,1) = (2,-6,8)$. Logo, a equação do plano tangente a S em $(1,-1,1)$ é

$$\big\langle (2,-6,8), (x-1, y+1, z-1) \big\rangle = 0$$

$$2(x-1) - 6(y+1) + 8(z-1) = 0$$

$$2x - 6y + 8z - 16 = 0$$

$$x - 3y + 4z - 8 = 0.$$

2.11 Derivada Direcional

Definição 2.23

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ um vetor. A derivada direcional de f em P_0, na direção de $\overrightarrow{u}$, denotada por $D_{\overrightarrow{u}} f(P_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}$, é definida por

$$D_{\overrightarrow{u}} f(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\,\overrightarrow{u}) - f(P_0)}{t\,\|\overrightarrow{u}\|},$$

desde que este limite exista.

Observação 2.8

Se o vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário,

$$D_{\overrightarrow{u}} f(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\overrightarrow{u}) - f(P_0)}{t},$$

desde que este limite exista.

Exemplo 49.

Calcule a derivada direcional da função $f(x, y) = xy$ no ponto $(1, 2)$ e na direção do vetor $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solução:

Notemos, inicialmente, que $\overrightarrow{u}$ é um vetor unitário, pois

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}} &= \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\overrightarrow{u}) - f(P_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{1}{2}t, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}t\right) - f(1, 2)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}t\right) \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 1 \cdot 2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t + t + \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 - 2}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}t\right)}{t} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.
\end{aligned}$$

Exercício 2.2

Sejam $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis, $\overrightarrow{u} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{v} = (0, 1)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Teorema 2.12

Se f é uma função diferenciável em P_0, então

$$D_{\overrightarrow{u}} f(P_0) = \left\langle \nabla f(P_0), \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right\rangle.$$

Exemplo 50.

Consideremos a função $f(x, y) = xy$, $P_0 = (1, 2)$ e $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ como no exemplo anterior.

Notemos que $f_x(x, y) = y$ e $f_y(x, y) = x$. Logo, f, f_x e f_y são funções contínuas (polinomiais). Assim, f é de classe C^1 e, portamto, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Como $\nabla f(x, y) = (y, x)$, temos

$$D_{\overrightarrow{u}} f(1, 2) = \left\langle \nabla f(1, 2), \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right\rangle = \left\langle (2, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Teorema 2.13

Se f é uma função diferenciável em P_0 tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$, então o valor máximo (mínimo) de $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(P_0)$ ocorre quando $\overrightarrow{u}$ tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$ $(-\nabla f(P_0))$, sendo $\|\nabla f(P_0)\| \left(-\|\nabla f(P_0)\|\right)$ o valor máximo (mínimo).

Demonstração. Como f é diferenciável em P_o, temos

$$D_{\overrightarrow{u}} f(P_0) = \left\langle \nabla f(P_0), \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right\rangle = \|\nabla f(P_0)\| \left\| \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right\| cos\,\theta = \|\nabla f(P_0)\|\, cos\,\theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(P_0)$ e $\overrightarrow{u}$.

$D_{\overrightarrow{u}} f(P_0)$ terá valor máximo (mínimo) quando $\theta = 0$ $(\theta = \pi)$, ou seja, quando $\overrightarrow{u}$ tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$ $(-\nabla f(P_0))$ e seu valor máximo (mínimo) é $\|\nabla f(P_0)\|$ $(-\|\nabla f(P_0)\|)$.

□

Exemplo 51.

O potencial elétrico de uma região do espaço é dado por

$$V(x, y, z) = ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

sendo V em volts, x, y e z em centímetros.

(a) Determine a derivada direcional de V na direção do vetor $\overrightarrow{v} = (2, 2, 1)$ no ponto $P = (-3, 6, 0)$.

(b) Determine a direção unitária, a partir de P, em que a taxa de variação do potencial é mínima e o valor dessa taxa.

(c) Determine a direção unitária normal da superfície equipotencial que passa pelo ponto P.

Solução:

(a) Notemos que $D(V) = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, $V_x(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $V_y(x,y,z) = \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$ e $V_z(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$.

Como V e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em $D(V)$, f é de classe C^1 e, portanto, diferenciável.

Além disso,

$$\nabla V(-3,6,0) = \left(-\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0\right).$$

Assim,

$$D_{\overrightarrow{u}} V(-3,6,0) = \left\langle \nabla V(-3,6,0), \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(-\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \right\rangle = -\frac{2}{45} + \frac{4}{45} + 0 = \frac{2}{45}.$$

(b) A taxa de variação do potencial é mínima na direção e sentido oposto ao gradiente de V em P. Como queremos a direção unitária, isso ocorrerá na direção de $-\dfrac{\nabla V(-3,6,0)}{\|\nabla V(-3,6,0)\|} = \dfrac{\left(\frac{1}{15}, -\frac{2}{15}, 0\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + 0^2}}$

$$= \frac{15}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{15}, -\frac{2}{15}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

O valor dessa taxa mínima é $-\|\nabla V(-3,6,0)\| = -\dfrac{\sqrt{5}}{15}$.

(c) Notemos que $V(P) = ln\sqrt{45} = ln\,(3\sqrt{5})$.

O ponto P pertence à superfície de nível $ln\,(3\sqrt{5})$ de V, isto é, à superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, ln\sqrt{x^2+y^2+z^2} = ln\,(3\sqrt{5})\}.$$

Como a superfície S é uma superfície de nível da função de classe C^1 V, a direção unitária normal desta superfície em P é

$$\frac{\nabla V(-3,6,0)}{\|\nabla V(-3,6,0)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

Exercício 2.3

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u} = (1,1).$$

(a) Calcule, por defnição, a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(0,0)$.

(b) Calcule $\left\langle \nabla f(0,0), \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right\rangle$.

(c) Por que estes resultados são diferentes?

2.12 Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis

Definição 2.24

Consideremos a função real $z = f(x, y)$ definida num conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um valor máximo relativo de f (respectivamente, valor mínimo relativo de f) se existe uma bola aberta $B = B_r(x_0, y_0) \subset D$ tal que

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \quad \text{(respectivamente } f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)\text{)},$$

para todo $(x, y) \in B$.

Um valor máximo ou mínimo relativo de f é chamado valor extremo relativo. O ponto (x_0, y_0) onde f assume um valor extremo relativo é dito ponto extremo relativo.

Observação 2.9

Lembremos que um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior a um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se existe $r > 0$ tal que $B_r(P) \subset A$. Além disso, o subconjunto de A formado por todos os pontos interiores de A é chamado interior de A.

Teorema 2.14: Condição necessária para a existência de extremos relativos

Sejam $z = f(x, y)$ uma função definida num conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ cujo interior é não vazio, e (x_0, y_0) um ponto interior a A. Se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existem e f tem um extremo relativo em (x_0, y_0), então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Definição 2.25

Um ponto (x_0, y_0) interior ao domínio de uma função $z = f(x, y)$ é chamado ponto crítico de f se $\nabla f(x_0, y_0)$ não existe ou $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

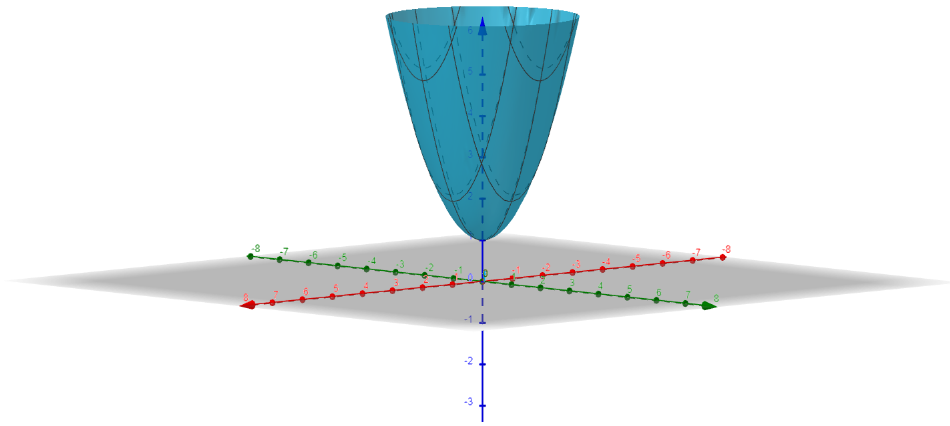
Exemplo 52.

(a) Seja $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Então, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$. Assim, o único ponto crítico de f é $P_0 = (0, 0)$, uma vez que satisfaz

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad (2x, 2y) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad x = y = 0.$$

E $f(0, 0) = 1$. Observando que $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 \geqslant 1 = f(0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, concluímos que f atinge o valor mínimo 1 em $(0, 0)$.

Notemos que o gráfico de f é um parabolóide circular



(b) Seja $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Se $(x,y) \neq (0,0)$, $f_x(x,y) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $f_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Logo, $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Por outro lado, $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ não existem.

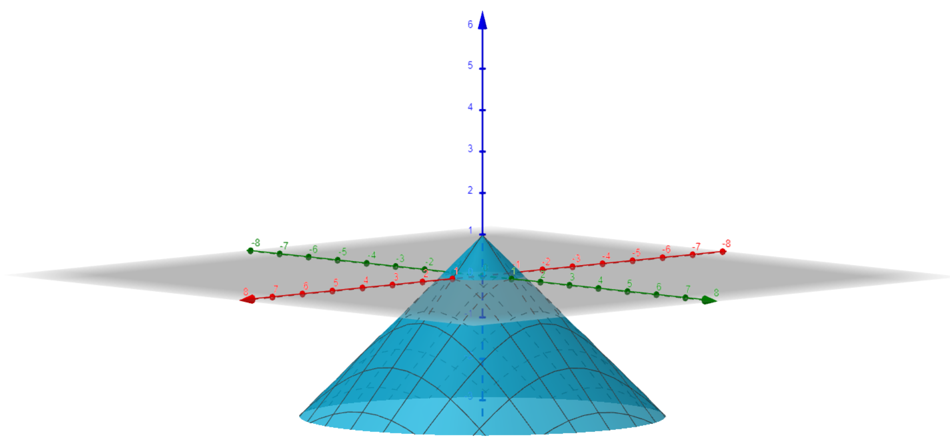
De fato,

- $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-|h|-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-|h|}{h} = \nexists;$$

- $$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1-|k|-1}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-|k|}{k} = \nexists.$$

Portanto, o único ponto crítico de f é $(0,0)$. Como $f(0,0) = 1$ e $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1 = f(0,0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, f atinge o valor máximo 1 em $(0,0)$.

Observemos que o gráfico de f é a parte inferior do cone $(z-1)^2 = x^2 + y^2$



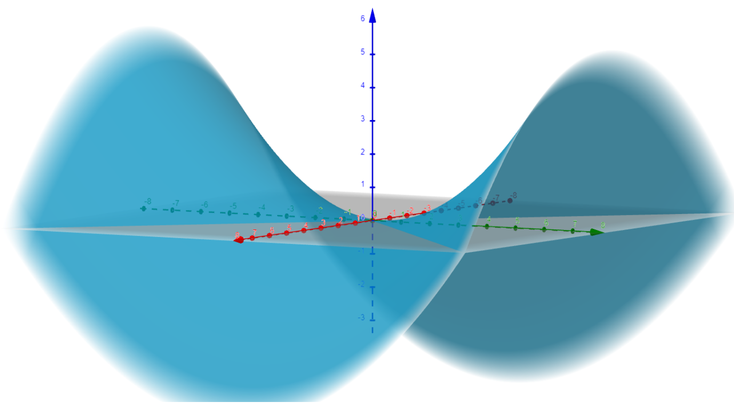
(c) Seja $f(x,y) = y^2 - x^2$. Então $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. E $\nabla f(x,y) = (0,0)$ quando $x = y = 0$.

Logo, o único ponto crítico de f é $(0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

No entanto, f não possui extremo relativo em $(0,0)$. De fato, se $r > 0$, $f(r,0) = -r^2 < 0 = f(0,0)$ e $f(0,r) = r^2 > 0 = f(0,0)$.

Neste caso, dizemos que a função f tem um ponto de sela no ponto crítico $(0,0)$.

Notemos que o gráfico de f é o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$



Teorema 2.15: Teste da Segunda Derivada

Seja $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 definida numa bola aberta $B_r(x_0, y_0)$. Suponhamos que (x_0, y_0) é um ponto crítido de f tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Denotemos por

$$A = f_{xx}(x_0, y_0),\ B = f_{xy}(x_0, y_0) \text{ e } C = f_{yy}(x_0, y_0).$$

(i) Se $B^2 - AC < 0$ e $A < 0$, então f tem um valor máximo relativo em (x_0, y_0).

(ii) Se $B^2 - AC < 0$ e $A > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em (x_0, y_0).

(iii) Se $B^2 - AC > 0$, então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0).

Observação 2.10

Consideremos a função H dada por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix},$$

denominada hessiana de f.

Notemos que $H(x_0, y_0) = AC - B^2$. Assim, o teorema anterior pode ser reescrito como:

(i) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de mínimo relativo em f.

(ii) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo relativo em f.

(iii) Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) será ponto de sela de f.

Observação 2.11

No caso em que $B^2 - AC = 0$ (ou $H(x_0, y_0) = 0$), nada se pode afirmar sobre o ponto crítico (x_0, y_0).

Exemplo 53.

Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4}.$$

Solução:

Inicialmente, notemos que $D(f) = \mathbb{R}^2$ e

$$f_x(x, y) = y - x \quad e \quad f_y(x, y) = x - y^3.$$

Assim, $\nabla f(x, y)$ existe para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, os pontos críticos de f são os pontos (x, y) que satisfazem

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y - x = 0 \ \ (1) \\ x - y^3 = 0 \ \ (2) \end{cases}$$

De (1), obtemos $y = x$. Substituindo em (2), segue que

$$x - x^3 = 0 \ \Rightarrow \ x(1 - x^2) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \ \textit{ou} \ x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \ x = 0 \ \textit{ou} \ x = 1 \ \textit{ou} \ x = -1.$$

Logo, os pontos críticos de f são $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ e $P_3 = (-1, -1)$.

As derivadas parciais de segunda ordem de f são $f_{xx}(x, y) = -1$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1$ e $f_{yy}(x, y) = -3y^2$.

Portanto, f é uma função de classe C^2, uma vez que suas derivadas parciais até segunda ordem são contínuas. Logo, podemos aplicar o Teste d Segunda Derivada aos pontos críticos P_1, P_2 e P_3.

Consideremos a Hessiana de f :

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3y^2 \end{vmatrix}.$$

Notemos que

- $H(P_1) = H(0, 0) = -1 < 0$. Logo, P_1 é um ponto de sela de f;

- $H(P_2) = H(1, 1) = 3 - 1 = 2 > 0$ e $f_{xx}(P_3) = -1 < 0$. Logo, P_2 é um ponto de máximo relativo de f;

- $H(P_3) = H(-1,-1) = 3 - 1 = 2 > 0$ e $f_{xx}(P_3) = -1 < 0$. Logo, P_3 é um ponto de máximo relativo de f.

2.13 Extremos Absolutos

Definição 2.26

Sejam $z = f(x,y)$ uma função real de duas variáveis definida num conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um valor máximo absoluto de f (respectivamente, valor mínimo absoluto de f) se

$$f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0) \ \ (\text{respectivamente } f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)),$$

para todo $(x,y) \in D$.

Observação 2.12

Recordemos que:

(i) Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se existem $r > 0$ e $P \in \mathbb{R}^n$ tais que $D \subset B_r(P)$.

(ii) Sejam $P \in \mathbb{R}^n$ e $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que P é um ponto da fronteira de D, ∂D, se para qualquer bola aberta com centro em P tem-se $B \cap D \neq \varnothing$ e $B \cap (\mathbb{R}^n - D) \neq \varnothing$.

(iii) D é dito fechado se $D = int(D) \cup \partial D$.

Teorema 2.16: Teste de Weierstrass ou Teorema do Valor Extremo

Seja $z = f(x, y)$ uma função contínua num conjunto fechado e limitado (compacto) $D \subset \mathbb{R}^2$, então f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em D.

Observação 2.13

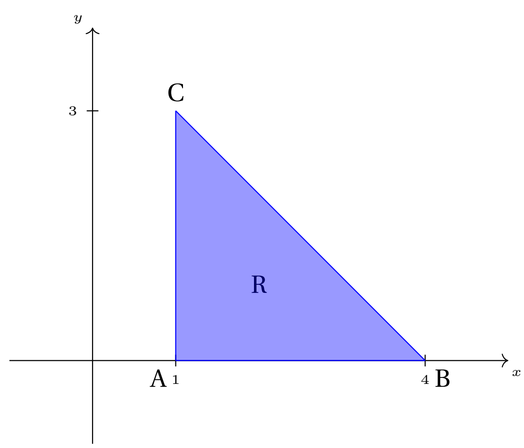
Se (x_0, y_0) é um extremo absoluto de f em D (compacto), então (x_0, y_0) é um ponto interiora D ou pertence à fronteira de D. Portanto, para determinar os extremos absolutos de f em D, encontramos os pontos críticos de f e comparamos os valores de f nestes pontos com os valores máximo e mínimo de f na fronteira D.

Exemplo 54.

(a) Encontre o máximo e o mínimo da função $f(x, y) = 2x + 4y - 2xy$ sobre a região triangular R com vértices $(1, 0)$, $(4, 0)$ e $(1, 3)$.

Solução:

Notemos que a região R é a seguinte região do plano xy :



R é um conjunto compacto, pois:

- R é limitado, uma vez que $R \subset B[(0, 0); 5]$;
- R é fechado, pois $\partial R \subset R$.

Além disso, f é uma função contínua em R, pois é uma função polinomial.

Portanto, o Teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo absolutos para f em R.

Para encontar os pontos críticos de f, verificamos que $\nabla f(x, y) = (2 - 2y, 4 - 2x)$ está definido para todo $(x, y) \in D(f)$, e

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2 - 2y = 0 \\ 4 - 2x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Logo, $(2,1)$ é o único ponto crítico de f no interior de R e $f(2,1) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 + 4 - 4 = 4$.

Agora, analisamos a função sobre a fronteira de R.

O segmento $\overline{AB}$ pode ser parametrizado como o comjunto dos prontos (x,y) tais que $1 \leqslant x \leqslant 4$ e $y = 0$. Sobre este segmento, f pode ser representada por $g(x) = f(x,0) = 2x,\ x \in [1,4]$. Como $g'(x) = 2 > 0$, g é crescente em $[1,4]$. Logo, tem mínimo em $x = 1$ e máximo em $x = 4$, sendo $g(1) = f(1,0) = 2$ e $g(4) = f(4,0) = 8$.

O segmento $\overline{AC}$ pode ser parametrizado como o comjunto dos prontos (x,y) tais que $x = 1$ e $0 \leqslant y \leqslant 3$. Sobre este segmento, f pode ser representada por $h(x) = f(1,y) = 2 + 4y - 2y = 2 + 2y,\ y \in [0,3]$. Como $h'(y) = 2 > 0$, h é crescente em $[0,3]$. Logo, tem mínimo em $y = 0$ e máximo em $y = 3$, sendo $h(0) = f(1,0) = 2$ e $h(3) = f(1,3) = 2 + 6 = 8$.

O segmento $\overline{BC}$ pode ser parametrizado como o comjunto dos prontos (x,y) tais que $y = -x + 4,\ 1 \leqslant x \leqslant 4$. Sobre este segmento, f pode ser representada por $q(x) = f(x,-x+4) = 2x+4(4-x)-2x(4-x) = 2x^2-10x+16,\ x \in [1,4]$. Como $q'(x) = 4x - 10$, $x = \dfrac{5}{2}$ é um ponto crítico de q. Comparando os valores $q(1) = f(1,3) = 8$, $q\left(\dfrac{5}{2}\right) = f\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right) = 5 + 6 - 2 \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = 11 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{7}{2}$ e $q(4) = f(4,0) = 8$, temos que o máximo de f sobre este segmento é 8, ocorrendo em $(1,3)$ e $(4,0)$ e o mmínimo é $\dfrac{7}{2}$, ocorrendo em $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

Comparando os valores obtidos, concluímos que a função $f$assume o valor máximo 8 em $(1,3)$ e $(4,0)$ e o valor mmínimo é 2 em $(2,0)$.

(b) A temperatura T em qualquer ponto (x,y) do plano é dada por $T(x,y) = 16x^2+24x+40y^2$. Qual a temperatura máxima e mínima em um disco fechado de raio 1 centrado na origem?

Solução:

Notemos que T está defnida em

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Notemos também que:

- D é um conjunto limitado, pois $D \subset B[(0,0);2]$;
- D é um conjunto fechado, pois $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\} \subset D$.

Logo, D é um conjunto compacto.

Como T é uma função polinomial, T é contínua em D.

Assim, pelo Teorema de Weierstrass, T possui máximo e mínimo absolutos em D.

Para encontrar os pontos críticos de T no interior de D, observamos que $\nabla T(x, y) = (32x + 24, 80y)$ está definido para todo $(x, y) \in D$, e

$$\nabla T(x,y) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 32x + 24 = 0 \\ 80y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = 0 \end{cases}$$

Logo, $\left(-\dfrac{3}{4}, 0\right)$ é o único ponto crítico de T no interior de D e $f\left(-\dfrac{3}{4}, 0\right) = 16 \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 + 24 \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right) + 40 \cdot 0^2 = 9 - 18 = -9$.

Sobre a fronteira, temos:

$$y^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Logo,

$$g(x) = T(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) = -24x^2 + 24x + 40, \; -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Como $g'(x) = -48x + 24$, $x = \dfrac{1}{2}$ é o único ponto crítico de g em $(-1, 1)$. Notems que g é contínua e

- $g(-1) = T(-1,0) = 16 - 24 = -8$;
- $g(1) = T(1,0) = 16 + 24 = 40$;
- $g\left(\frac{1}{2}\right) = T\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 \cdot \frac{1}{4} + \frac{24}{2} + 40 \cdot \frac{3}{4} = 4 + 12 + 30 = 46.$

Comparando os valores otidos, vemos que a menor temperatura da placa é $-9^\circ C$, obtida no interior da placa, e a maior temperatura é $46^\circ C$, otida na fronteira da placa.

Observação 2.14

Diferente do que se pode afirmar para funções de uma única variável, se uma função de várias variáveis tem um único extremo relativo, este extremo não é necessariamente um extremo absoluto. Veja, por exemplo, o que ocorre com a função $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$.

2.14 Multiplicadores de Lagrange

2.14.1 Problemas envolvendo funções de duas variáveis e uma restrição

Consideremos o seguinte problema

$$\max \quad f(x,y)$$

$$\text{s.a.} \quad g(x, y) = 0$$

Usando as propriedades do vetor gradiente, vamos obter uma visualização geométrica do método de Lagrange, que nos permite determinar os candidatos a pontos de máximo e/ou mínimo condicionados de f.

Para isso, esboçamos o gráfico de $g(x, y) = 0$ e diversas curvas de nível $f(x, y) = k$ da função objetivo, observando os valores crescentes de k. O valor máximo de $f(x, y)$ sobre a curva $g(x, y) = 0$ coincide com o maior valor de k tal que a curva $f(x, y) = k$ intercepta a curva $g(x, y) = 0$. Isso ocorre em um ponto P_0. Nesse ponto, as duas curvas têm a mesma reta tangente l.

Como ∇f e ∇g são perpendiculares à reta l, eles têm a mesma direção no ponto P_0, ou seja,

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

para algum número real λ.

Claramente, nesse argumento geométrico, fizemos a suposição de que $\nabla g(x, y) \neq 0$ em P_0. Além disso, o mesmo argumento pode ser facilmente adaptado para problemas de minimização.

Proposição 2.1

Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável em um conjunto aberto U. Seja $g(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas em U tal que $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in B$, onde $B = \{(x, y) \in U \,/\, g(x, y) = 0\}$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in B$ seja um extremo local de f em B é que exista um número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Exemplo 55.

Determine os extremos de

$$f(x,y) = 16x^2 + 24x + 40y^2,$$

com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Solução:

Notemos que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (f, $f_x(x,y) = 32x + 24$ e $f_y(x,y) = 80y$ são contínuas).

Seja $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Queremos encontrar os extremos de f em $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = 0\}$. Como $g_x(x,y) = 2x$ e $g_y(x,y) = 2y$, g é de classe C^1 e $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ em B. Logo, os candidatos a extremos de f são os pontos (x,y) que satisfazem

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} (32x + 24, 80y) = \lambda (2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} 32x + 24 = 2\lambda x \ \ (1) \\ 80y = 2\lambda y \ \ (2) \\ x^2 + y^2 = 1 \ \ (3) \end{cases}.$$

De (2), obtemos

$$2y(40 - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ \ \textit{ou} \ \ \lambda = 40.$$

Se $y = 0$, segue de (3) que $x = \pm 1$.

Se $\lambda = 40$, segue de (1), que

$$32x + 24 = 80x \quad \Rightarrow \quad 48x = 24 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Substituindo este valor em (3), resulta

$$\frac{1}{4} + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, os candidatos a extremo de f são $(-1,0), (1,0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Notemos que $f(-1,0) = 16 - 24 = -8$, $f(1,0) = 16 + 24 = 40$ e $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 \cdot \frac{1}{4} + \frac{24}{2} + 40 \cdot \frac{3}{4} = 4 + 12 + 30 = 46.$

Como f é uma função contínua no conjunto compacto B, o Teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo absolutos para f em B. Comparando os valores obtidos, concluímos que $(-1,0)$ é ponto de mínimo de f e $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ são pontos de máximo de f.

2.14.2 Problemas envolvendo funções de três variáveis e uma restrição

Nesse caso, podemos visualizar o método fazendo um esboço do gráfico de $g(x,y,z) = 0$ e de diversas superfícies de nível $f(x,y,z) = k$ da função objetivo, observando os valores crescentes de k.

No ponto extremante P_0, os vetores ∇f e ∇g são paralelos. Portanto, nesse ponto, devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

para algum número real λ.

Proposição 2.2

Seja $f(x, y, z)$ uma função diferenciável em um conjunto aberto U. Seja $g(x, y, z)$ uma função com derivadas parciais contínuas em U tal que $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in B$, onde $B = \{(x, y, z) \in U \,/\, g(x, y, z) = 0\}$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja um extremo local de f em B é que exista um número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Exemplo 56.

Determine os pontos sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto $(1, 2, 2)$.

2.14.3 Problemas envolvendo funções de três variáveis e duas restrições

Consideremos o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x, y, z) \\ \text{s.a.} \quad & g(x, y, z) = 0 \\ & h(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Para visualizarmos o método, nesse caso, vamos supor que a intersecção das superfícies $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$ seja uma curva C. Queremos determinar, então, um ponto de máximo, P_0, de f sobre C. Como nos casos anteriores, traçamos diversas curvas de nível $f(x, y, z) = k$ de f, observando os valores crescentes de k.

Vemos que, no ponto P_0, a curva C tangencia a superficie de nível $f(x, y, z) = k$ de f. Assim, $\nabla f(P_0)$ deve ser normal à curva C.

Temos também que $\nabla g(P_0)$ e $\nabla h(P_0)$ são normais à curva C. Portanto, no ponto P_0, os três vetores ∇f, ∇g e ∇h são coplanares e, então, existem números reais λ e μ tais que

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h.$$

Observamos que, nessa argumentação geométrica, estamos supondo que os vetores ∇g e ∇h são linearmente independentes.

Proposição 2.3

Seja $f(x, y, z)$ uma função diferenciável em um conjunto aberto U. Sejam $g(x, y, z)$ e $h(x, y, z)$ funções com derivadas parciais contínuas em U tais que $\nabla g(x, y, z)$ e $\nabla h(x, y, z)$ sejam linearmente independentes em B, onde $B = \{(x, y, z) \in U \,/\, g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja um extremo local de f em B é que existam números reais λ e μ tais que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

Exemplo 57.

Determine o ponto da reta de interseção dos planos $x+y+z = 2$ e $x+3y+2z = 12$ que esteja mais próximo da origem.