EST 105

INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA

Variáveis Aleatórias
Aula 1

Departamento de Estatística – UFV
Av. Peter Henry Rolfs, s/n
Campus Universitário
36570.977 – Viçosa, MG
http://www.det.ufv.br/

Definição

- Seja E um experimento aleatório e S o espaço amostral a ele associado. **Uma variável aleatória (v. a.) é uma função X que associa a cada elemento a do espaço amostral S um número real $X(a)$.** Isto é,

Observações:

i) Variável aleatória é uma função com domínio em S e contradomínio $\mathbb{R}$.

ii) O uso da v. a. permite escrever os resultados de um experimento aleatório por meio de números. Ao transformar os eventos em números, temos a possibilidade de usar funções matemáticas para calcular probabilidades.

Exemplo 1

Considere um experimento aleatório (E), que consiste no lançamento de duas moedas honestas. Definindo ***X*, uma v. a., que indica o nº de caras obtidas**, tem-se:

- **O espaço amostral de *E*:** $S = \{(c_1, c_2); (c_1, k_2); (k_1, c_2); (k_1, k_2)\}$, com c_i = cara no i-ésimo lançamento e k_i = coroa no i-ésimo lançamento, para i = 1 e 2.

Classificação

- As variáveis aleatórias são classificadas de acordo com a natureza dos conjuntos formados pelo possíveis valores reais assumidos por elas.
- **v.a. discretas:** assumem valores num conjunto enumerável (finito ou infinito). Em geral, os valores são inteiros e resultantes de contagem. Por exemplo: (i) número de caras em 2 lançamentos de uma moeda; (ii) número de acidentes ocorridos em uma semana; (iii) número de defeitos de uma peça; (iv) número de interrupções de internet por dia, etc.
- **v.a. contínuas:** podem assumir **qualquer valor** em algum intervalo dos números reais (conjunto não enumerável). Em geral, os valores são obtidos por uma mensuração. Por exemplo: (i) tempo de reação a um medicamento; (ii) peso de um animal; (iii) altura de um indivíduo; (iv) renda mensal de uma família, etc.

Variável Aleatória Discreta (v. a. d.)

- Uma variável aleatória X é definida como discreta (v. a. d.) se os particulares valores x que X pode assumir formam um conjunto enumerável (finito ou infinito). Estes valores, **geralmente, estão associados a processos de contagem**.

- O objetivo de se estudar uma v. a. d. é a sua **caracterização** ou o conhecimento de informações do tipo: (i) as probabilidade associadas a particulares valores de X; (ii) a média ou valor esperado dessa variável aleatória; (iii) a variância dessa variável aleatória.

Variável Aleatória Discreta (v. a. d.)

Função de Probabilidade

- Chama-se função de probabilidade (f. p.) de uma v. a. d. (X), a função que associa a cada possível valor de X (x), sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$f(x) = P(X = x) = P(x)$$

Variável Aleatória Valor assumido pela v.a. X

- Para que a função $f(x)$ seja uma f. p. é necessário que a mesma satisfaça às seguintes condições:

  (i) $f(x) \geq 0,$ para todo x

  (ii) $\sum_x f(x) = 1.$

Variável Aleatória Discreta (v. a. d.)

- O conjunto de pares ordenados $[x, P(x)]$ é denominado de **distribuição de probabilidades** da v. a. d. X, e pode ser representada por meio de um gráfico ou de uma tabela.

Exemplo 2: Considere novamente a v.a. X definida como o número de caras em 2 lançamentos de uma moeda honesta. Como X assume apenas um conjunto enumerável de valores, tem-se que X é uma v. a. d.. Pede-se:

a) Apresente a distribuição de probabilidades de *X*.

b) Apresente a distribuição de probabilidades graficamente.

c) Calcule a probabilidade de sair mais de uma cara nos dois lançamentos.

d) Calcule a probabilidade de sair no máximo uma cara nos dois lançamentos.

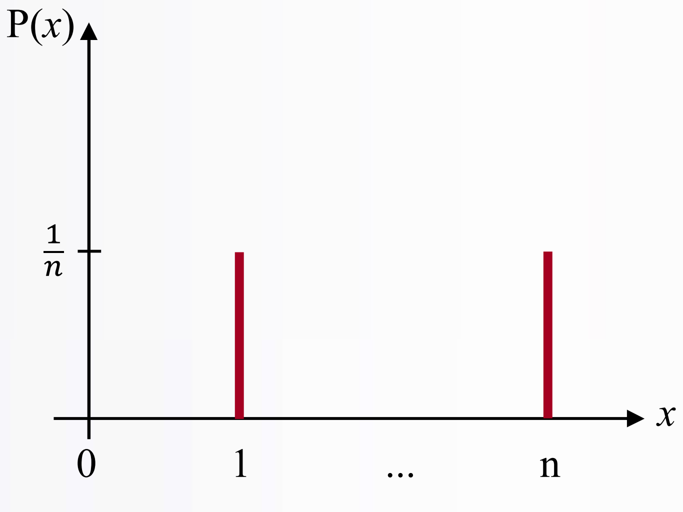
Variável aleatória discreta uniformemente distribuída

Modelo de probabilidade discreto, que como o próprio nome sugere, atribui a cada particular valor da variável aleatória a mesma probabilidade de ocorrência. Isto é:

$$f(x) = P(x) = \frac{1}{n}, \text{para } x = 1, 2, \ldots, n$$

Neste caso, a distribuição de probabilidade pode ser representada por:

i) Gráfico:



ii) Tabela:

x	1	...	n	
P(x)	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	1

Exemplo 3: Uma variável aleatória Y assume os seguintes valores: 1, 3, 5 e 6. Considere a seguinte função: $f(y) = \frac{y}{\sum_{i=1}^{4} y_i}$. Pede-se:

a) $f(y)$ é uma função de probabilidade da v. a. d. Y? Justifique.

b) Calcule a P(Y ≥2).

Exemplo 4: Seja X uma v. a. d. com a seguinte função de probabilidade:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
P(x)	k	$2k$	$3k$	$4k$	$\frac{5k}{2}$	$\frac{6k}{2}$	$\frac{7k}{2}$	$\frac{8k}{2}$

a) Encontre o valor da constante *k*.

b) Calcule a seguinte probabilidade condicional: $P(X \geq 6|X > 3)$.

Variáveis Aleatórias Contínuas (v. a. c.)

Definição:

- Seja X uma variável aleatória. Se X puder assumir todo e qualquer valor em algum intervalo contínuo $a < x < b$, onde a e b podem ser respectivamente, $-\infty$ e $+\infty$, então X é definida como uma **variável aleatória contínua**. Adicionalmente:
- Variáveis contínuas estão associadas a espaços amostrais infinitos não enumeráveis.
- Geralmente, **as v. a. c. estão, geralmente, associadas à processos de medição**.
- São exemplos:

  X: Peso (em kg) de uma pessoa;

  Y: Altura (em metros) de uma árvore;

  Z: Temperatura (em °C) de uma cidade.

Variáveis Aleatórias Contínuas (v. a. c.)

- De forma semelhante ao caso de variáveis aleatórias discretas, precisamos de funções que nos permitam caracterizar a variável aleatória contínua.

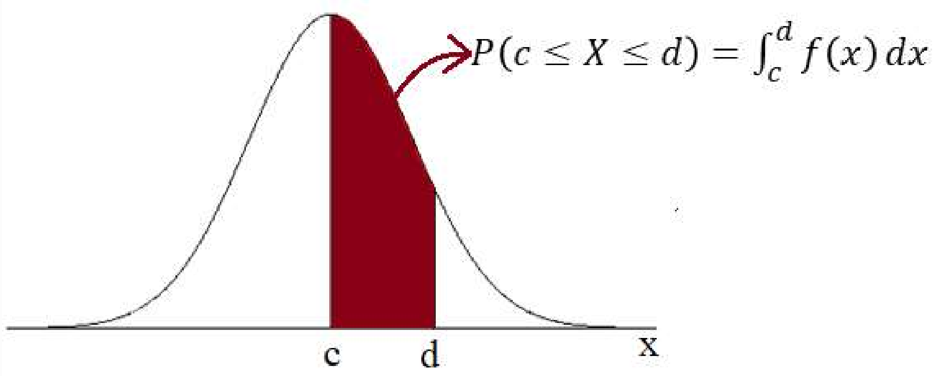
- No caso das v. a. c., fazemos uso das **funções densidade de probabilidade (f. d. p.)**.

- **ATENÇÃO**: a f. d. p. **fornece a probabilidade** da v. a. c. assumir algum valor, em um dado intervalo, após um procedimento de integração. Portanto, a f.d.p. é diferente da **função de probabilidade ou f. p.** (do caso discreto), que **fornece diretamente a probabilidade** $P(X = x)$ de cada valor x da variável aleatória discreta X.

Cálculo de Probabilidades de v. a. c.

- Seja X uma v. a. c. com domínio S_X e seja $f(x)$ a f. d. p. a ela associada.
- Definição: a probabilidade de X assumir algum valor em um intervalo $[c, d]$ contido em S_X é dada por:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\, dx$$



- **ATENÇÃO:** a **f. d. p. *f(x)* não retorna a probabilidade associada ao valor x**. Somente quando a função for integrada entre dois limites ela produzirá uma probabilidade, que será equivalente a área sob a função no intervalo considerado.

Função densidade de probabilidade (f. d. p.)

- Seja X uma v.a.c. com domínio $s_x = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Para que a função *f(x)* seja uma f. d. p. é necessário que a mesma satisfaça às seguintes condições:

  (i) $f(x) \geq 0, \ para\ todo\ x$

  (ii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. (Equivalente a dizer que área abaixo da curva é igual a 1)

Observações:

- Para $c < d \Longrightarrow \ P(c < X < d) = \int_c^d f(x)\ dx$
- Para $x = k \Longrightarrow \ P(X = k) = \int_k^k f(x)\ dx = 0$
- $P(c \leq X \leq d) = P(c < X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X < d) = \int_c^d f(x)\,dx$
- Se $x \notin (a, b) \Longrightarrow f(x) = 0$

Exemplo 5

Seja Y uma v. a. c. que representa a área (em hectares) atingida por uma determinada praga agrícola. Considere a $f(y)$, dada por:

$$f(y) = \begin{cases} k, & 0 \leq \mathrm{y} < 2 \\ k(y-1), & 2 \leq y < 4 \\ 0, & \text{outros valores de } y \end{cases}$$

Pede-se:

a) Calcule o valor de k, para que $f(y)$ seja uma f. d. p..

b) Calcule a probabilidade desta praga agrícola atingir uma área superior a 2 hectares.

c) Qual a probabilidade de uma área atingida ter entre 1 e 3 hectares?

d) Calcule a probabilidade condicional da área atingida ter entre 1 e 3 hectares, uma vez que ela tem mais de 2 hectares.

Atividade Proposta

Resolver os exercícios do Roteiro de Aulas abaixo relacionados:

- Exercício 1 – pág. 107
- Exercício 3 – pág. 108
- Exercício 15 – pág. 127
- Exercício 31 (itens b e c)– pág. 131
- Exercício 39 – pág. 132

UFV