O MÉTODO DE EULER COMO UM MÉTODO DE SÉRIE DE TAYLOR

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

MAT 271 – Cálculo Numérico – UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

MÉTODO DE EULER

Temos um PVI: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_o \end{cases}$ com solução única em um intervalo $[x_0, b]$.

O Método de Euler consiste em calcular aproximações da solução y do PVI em pontos discretos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$ do intervalo $[x_0, b]$, sendo tais pontos obtidos subdividindo o intervalo em N subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{b - x_0}{N}$, de modo que:

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots, x_N = x_{N-1} + h = b.$$

Os valores aproximados de $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \ldots, y_N = y(x_N)$, são calculados assim:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \text{ para } n = 0,1,2, \ldots, N-1}$$

$\boxed{y(b) \cong y_N = y(x_N); \quad y_0, y_1, y_2, \ldots, y_N, \text{ formam a aproximação da solução } y \text{ do PVI em } [x_0, b].}$

(h é o tamanho dos passos e N é o número de passos)

MAIS UM EXEMPLO

Seja o seguinte PVI: $y' = x + y, \quad y(0) = 1.$

Vamos aplicar o método de Euler, com $N = 10$, para calcular uma aproximação de $y(2)$.

$h = \frac{2-0}{10} = 0.2.$

$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1, x_6 = 1.2, x_7 = 1.4, x_8 = 1.6, x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, para $n = 0,1,2, \dots, 9$ $\qquad x_0 = 0, y_0 = 1, f(x_n, y_n) = x_n + y_n$

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n), \text{ para } n = 0,1,2, \dots, 9$$

EXEMPLO

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1.2$, $x_7 = 1.4$, $x_8 = 1.6$, $x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$y_0 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n), \text{ para } n = 0,1,2,\dots,9$$

$$y_1 = y_0 + 0.2(x_0 + y_0) = 1 + 0.2(0 + 1) = 1.2$$

$$y_2 = y_1 + 0.2(x_1 + y_1) = 1.2 + 0.2(0.2 + 1.2) = 1.48$$

$$y_3 = y_2 + 0.2(x_2 + y_2) = 1.48 + 0.2(0.4 + 1.48) = 1.856$$

$$y_4 = y_3 + 0.2(x_3 + y_3) = 1.856 + 0.2(0.6 + 1.856) = 2.3472$$

$$y_5 = y_4 + 0.2(x_4 + y_4) = 2.3472 + 0.2(0.8 + 2.3472) = 2.97664$$

EXEMPLO

$y_1 = 1.2$ $\quad y_2 = 1.48$ $\quad y_3 = 1.856$ $\quad y_4 = 2.3472$ $\quad y_5 = 2.97664$

$$y_6 = y_5 + 0.2(x_5 + y_5) = 2.97664 + 0.2(1 + 2.97664) = 3.771968$$

$$y_7 = y_6 + 0.2(x_6 + y_6) = 3.771968 + 0.2(1.2 + 3.771968) = 4.7663616$$

$$y_8 = y_7 + 0.2(x_7 + y_7) = 4.7663616 + 0.2(1.4 + 4.7663616) = 5.99963392$$

$$y_9 = y_8 + 0.2(x_8 + y_8) = 5.99963392 + 0.2(1.6 + 5.99963392) = 7.519560704$$

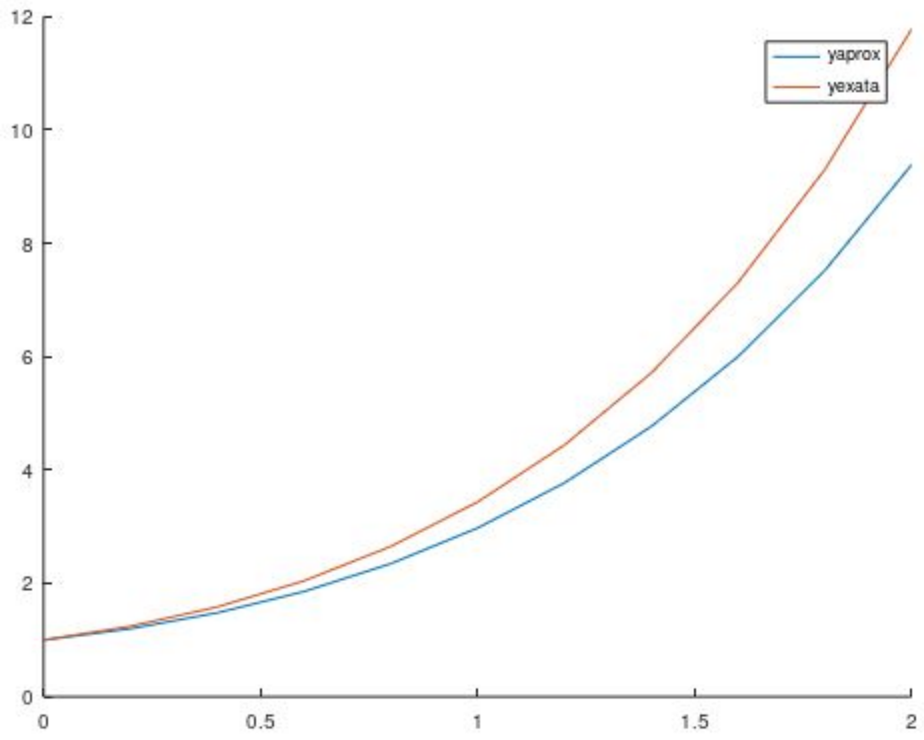
$$y_{10} = y_9 + 0.2(x_9 + y_9) = 7.519560704 + 0.2(1.8 + 7.519560704) = 9.3834728448$$

$$\boxed{y(2) \cong y_{10} = 9.3834728448}$$

COMPARANDO COM A SOLUÇÃO ANALÍTICA

A solução exata deste problema, encontrada analiticamente, é $y = 2e^{x} - (x + 1)$.

y	APROXIMADO	EXATO
$y(0)$	1	1
$y(0.2)$	1.2	1.2428
$y(0.4)$	1.48	1.5836
$y(0.6)$	1.856	2.0442
$y(0.8)$	2.3472	2.6511
$y(1)$	2.9766	3.4366
$y(1.2)$	3.7720	4.4402
$y(1.4)$	4.7664	5.7104
$y(1.6)$	5.9996	7.3061
$y(1.8)$	7.5196	9.2993
$y(2)$	9.3835	11.7781



SÉRIE DE TAYLOR-MÉTODO DE EULER

Suponhamos que a solução y do PVI seja infinitamente derivável no intervalo $[x_0, b]$, com todas as derivadas contínuas em $[x_0, b]$.

Fazendo o desenvolvimento em Série de Taylor de y em torno de cada ponto x_n, $n = 0,1,2, \dots, N$:

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + y''(x_n)\frac{(x - x_n)^2}{2!} + y'''(x_n)\frac{(x - x_n)^3}{3!} +$$

$$+ \cdots + y^{(k)}(x_n)\frac{(x - x_n)^k}{k!} + y^{(k+1)}(x_n)\frac{(x - x_n)^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots$$

Assim, para $x = x_n + h$ (h tal que $x_n + h \in [x_0, b]$), temos:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + y''(x_n)\frac{h^2}{2!} + y'''(x_n)\frac{h^3}{3!} + \cdots + y^{(k)}(x_n)\frac{h^k}{k!} + y^{(k+1)}(x_n)\frac{h^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots$$

SÉRIE DE TAYLOR-MÉTODO DE EULER

$$y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + y''(x_n)\frac{h^2}{2!} + y'''(x_n)\frac{h^3}{3!} + \cdots + y^{(k)}(x_n)\frac{h^k}{k!} + y^{(k+1)}(x_n)\frac{h^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots$$

Considerando, então, um truncamento de ordem 1 da Série acima, temos:

$$y(x_n + h) \cong y(x_n) + y'(x_n)h = y(x_n) + hy'(x_n)$$

Mas $y' = f(x, y)$ (PVI) $\quad \Longrightarrow \quad y'(x_n) = f\big(x_n, y(x_n)\big) = f(x_n, y_n)$.

$$\Longrightarrow \quad y(x_n + h) \cong y(x_n) + hf(x_n, y_n) \quad \Longrightarrow \quad y(x_{n+1}) \cong y(x_n) + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} \cong y_n + hf(x_n, y_n)$$

QUE É A FÓRMULA DO MÉTODO DE EULER

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \text{ para } n = 0,1,2, \ldots, N-1}$$

DIZEMOS, ENTÃO, QUE O MÉTODO DE EULER É UM MÉTODO DE SÉRIE DE TAYLOR

MÉTODOS DE SÉRIE DE TAYLOR
MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

$$y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + y''(x_n)\frac{h^2}{2!} + y'''(x_n)\frac{h^3}{3!} + y^{(4)}(x_n)\frac{h^4}{4!} + \cdots + y^{(k)}(x_n)\frac{h^k}{k!} + \cdots$$

Considerando o truncamento da série de Taylor Taylor até a ordem 4, chegamos aos chamados
MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 1

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), n = 0,1,2, \dots, N-1}$$

Ou seja, o Método de Runge-Kutta de ordem 1 é o Método de Euler.

UM MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 2

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[k_1 + k_2], n = 0,1,2, \dots, N-1}$$

Onde:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

TAMBÉM CHAMADO DE MÉTODO DE EULER APERFEIÇOADO

OU: MÉTODO DE EULER MELHORADO

HÁ OUTROS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 2

UM MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 3

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{9}[2k_1 + 3k_2 + 4k_3], n = 0,1,2,\dots,N-1}$$

Onde:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \qquad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), k_3 = f\left(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4}k_2\right)$$

HÁ OUTROS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 3

UM MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 4

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4], n = 0,1,2,\dots,N-1}$$

Onde:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \qquad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \qquad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

HÁ OUTROS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 4

EXEMPLO

Dado o PVI: $y' = x + y, \quad y(0) = 1$, vamos aplicar o método de Euler Aperfeiçoado (Runge-Kutta de ordem 2), com $N = 10$, para calcular uma aproximação de $y(2)$.

$h = \frac{2-0}{10} = 0.2.$

$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1, x_6 = 1.2, x_7 = 1.4, x_8 = 1.6, x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2, \dots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)\,, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1$$

EXEMPLO

$h = 0.2.$ $\quad x_0 = 0, y_0 = 1, f(x,y) = x + y$

$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1, x_6 = 1.2, x_7 = 1.4, x_8 = 1.6, x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2, \ldots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{n = 0}$

$$k_1 = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1$$

$$k_2 = (x_0 + h) + (y_0 + hk_1) = (0 + 0.2) + (1 + (0.2)1) = 1.4$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{0.2}{2}(1 + 1.4) = 1.24$$

EXEMPLO

$x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1.2,\ x_7 = 1.4,\ x_8 = 1.6,\ x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),\ n = 0,1,2,\ldots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$

$\boxed{n = 1}$

$$k_1 = x_1 + y_1 = 0.2 + 1.24 = 1.44$$

$$k_2 = (x_1 + h) + (y_1 + hk_1) = (0.2 + 0.2) + (1.24 + (0.2)1.44) = 1.928$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1.24 + \frac{0.2}{2}(1.44 + 1.928) = 1.5768$$

EXEMPLO

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1.2$, $x_7 = 1.4$, $x_8 = 1.6$, $x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2, \ldots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$ $\boxed{y_2 = 1.5768}$

$\boxed{n = 2}$

$$k_1 = x_2 + y_2 = 0.4 + 1.5768 = 1.9768$$

$$k_2 = (x_2 + h) + (y_2 + hk_1) = (0.4 + 0.2) + (1.5768 + (0.2)1.9768) = 2.57216$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1.5768 + \frac{0.2}{2}(1.9768 + 2.57216) = 2.03169$$

EXEMPLO

$x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1.2,\ x_7 = 1.4,\ x_8 = 1.6,\ x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2, \dots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$ $\boxed{y_2 = 1.5768}$ $\boxed{y_3 = 2.03169}$

$\boxed{n = 3}$

$$k_1 = x_3 + y_3 = 0.6 + 2.03169 = 2.63169$$

$$k_2 = (x_3 + h) + (y_3 + hk_1) = (0.6 + 0.2) + (2.03169 + (0.2)2.63169) = 3.35803$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2.03169 + \frac{0.2}{2}(2.63169 + 3.35803) = 2.63066$$

EXEMPLO

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1.2$, $x_7 = 1.4$, $x_8 = 1.6$, $x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2, \ldots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$ $\boxed{y_2 = 1.5768}$ $\boxed{y_3 = 2.03169}$ $\boxed{y_4 = 2.63066}$

$\boxed{n = 4}$

$$k_1 = x_4 + y_4 = 0.8 + 2.63066 = 3.43066$$

$$k_2 = (x_4 + h) + (y_4 + hk_1) = (0.8 + 0.2) + (2.63066 + (0.2)3.43066) = 4.31679$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2.63066 + \frac{0.2}{2}(3.43066 + 4.31679) = 3.40541$$

EXEMPLO

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1.2,\ x_7 = 1.4,\ x_8 = 1.6,\ x_9 = 1.8 \text{ e } x_{10} = 2$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2,\ldots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$ $\boxed{y_2 = 1.5768}$ $\boxed{y_3 = 2.03169}$ $\boxed{y_4 = 2.63066}$ $\boxed{y_5 = 3.40541}$

$\boxed{n = 5}$

$$k_1 = x_5 + y_5 = 1 + 3.40541 = 4.40541$$

$$k_2 = (x_5 + h) + (y_5 + hk_1) = (1 + 0.2) + (3.40541 + (0.2)4.40541) = 5.48649$$

$$y_6 = y_5 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 3.40541 + \frac{0.2}{2}(4.40541 + 5.48649) = 4.3946$$

EXEMPLO

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1.2$, $x_7 = 1.4$, $x_8 = 1.6$, $x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2,\ldots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$ $\boxed{y_2 = 1.5768}$ $\boxed{y_3 = 2.03169}$ $\boxed{y_4 = 2.63066}$ $\boxed{y_5 = 3.40541}$

$\boxed{y_6 = 4.3946}$

$\boxed{n = 6}$

$$\left|\begin{array}{l} k_1 = x_6 + y_6 = 1.2 + 4.3946 = 5.5946 \\ k_2 = (x_6 + h) + (y_6 + hk_1) = (1.2 + 0.2) + (4.3946 + (0.2)5.5946) = 6.91352 \end{array}\right.$$

$$y_7 = y_6 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 4.3946 + \frac{0.2}{2}(6.91352 + 5.5946) = 5.64541$$

EXEMPLO

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1.2$, $x_7 = 1.4$, $x_8 = 1.6$, $x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2, \dots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$ $\boxed{y_2 = 1.5768}$ $\boxed{y_3 = 2.03169}$ $\boxed{y_4 = 2.63066}$ $\boxed{y_5 = 3.40541}$

$\boxed{y_6 = 4.3946}$ $\boxed{y_7 = 5.64541}$

$$\boxed{n = 7} \quad \left| \begin{array}{l} k_1 = x_7 + y_7 = 1.4 + 5.64541 = 7.04541 \\ k_2 = (x_7 + h) + (y_7 + hk_1) = (1.4 + 0.2) + (5.64541 + (0.2)7.04541) = 8.65449 \end{array} \right.$$

$$y_8 = y_7 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 5.64541 + \frac{0.2}{2}(7.04541 + 8.65449) = 7.2154$$

EXEMPLO

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1.2$, $x_7 = 1.4$, $x_8 = 1.6$, $x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), n = 0,1,2,\dots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$ $\boxed{y_2 = 1.5768}$ $\boxed{y_3 = 2.03169}$ $\boxed{y_4 = 2.63066}$ $\boxed{y_5 = 3.40541}$

$\boxed{y_6 = 4.3946}$ $\boxed{y_7 = 5.64541}$ $\boxed{y_8 = 7.2154}$

$\boxed{n = 8}$

$$k_1 = x_8 + y_8 = 1.6 + 7.2154 = 8.8154$$

$$k_2 = (x_8 + h) + (y_8 + hk_1) = (1.6 + 0.2) + (7.2154 + (0.2)8.8154) = 10.77848$$

$$y_9 = y_8 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 7.2154 + \frac{0.2}{2}(8.8154 + 10.77848) = 9.17479$$

EXEMPLO

$x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1.2,\ x_7 = 1.4,\ x_8 = 1.6,\ x_9 = 1.8$ e $x_{10} = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),\ n = 0,1,2,\ldots 9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \qquad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) = (x_n + h) + (y_n + hk_1)$$

$\boxed{y_1 = 1.24}$ $\boxed{y_2 = 1.5768}$ $\boxed{y_3 = 2.03169}$ $\boxed{y_4 = 2.63066}$ $\boxed{y_5 = 3.40541}$

$\boxed{y_6 = 4.3946}$ $\boxed{y_7 = 5.64541}$ $\boxed{y_8 = 7.2154}$ $\boxed{y_9 = 9.17479}$

$\boxed{n = 9}$

$$k_1 = x_9 + y_9 = 1.8 + 9.17479 = 10.97479$$

$$k_2 = (x_9 + h) + (y_9 + hk_1) = (1.8 + 0.2) + (9.17479 + (0.2)10.97479) = 13.36975$$

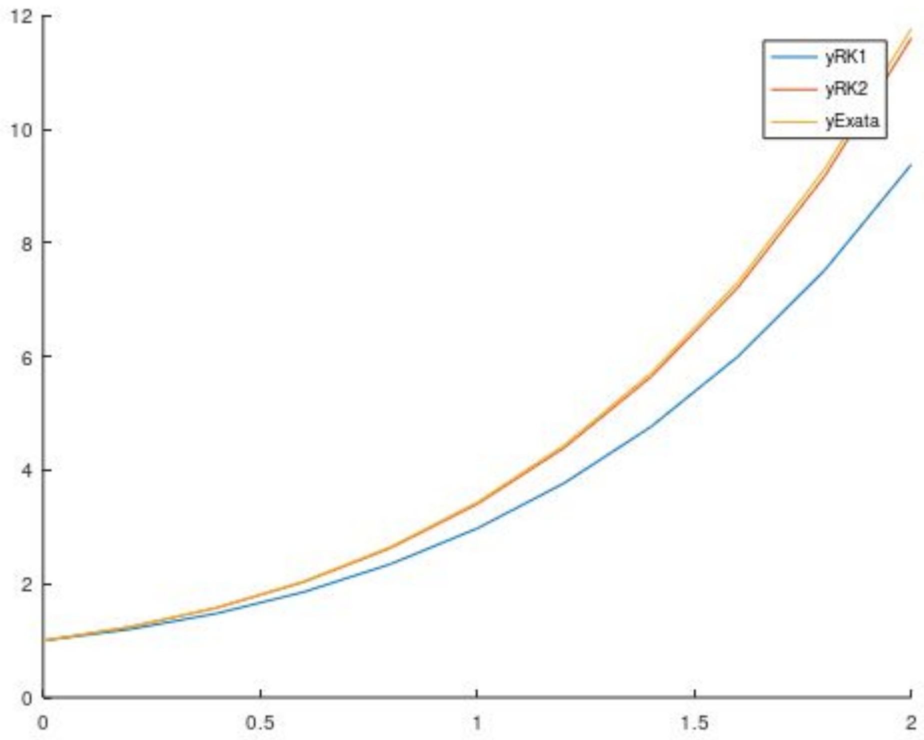
$$y_{10} = y_9 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 9.17479 + \frac{0.2}{2}(10.97479 + 13.36975) = 11.60924$$

$$\boxed{y(2) \cong y_{10} = 11.60924}$$

COMPARANDO COM A SOLUÇÃO ANALÍTICA E COM O MÉTODO DE EULER

A solução exata deste problema, encontrada analiticamente, é $y = 2e^x - (x+1)$.

y	EULER (RK1)	EULER APERF. (RK2)	EXATO
$y(0)$	1	1	1
$y(0.2)$	1.2	1.24	1.2428
$y(0.4)$	1.48	1.5768	1.5836
$y(0.6)$	1.856	2.0317	2.0442
$y(0.8)$	2.3472	2.6307	2.6511
$y(1)$	2.9766	3.4054	3.4366
$y(1.2)$	3.7720	4.3946	4.4402
$y(1.4)$	4.7664	5.6454	5.7104
$y(1.6)$	5.9996	7.2154	7.3061
$y(1.8)$	7.5196	9.1748	9.2993
$y(2)$	9.3835	11.6092	11.7781



MAIS UMA COMPARAÇÃO

Resolvendo o PVI: $y' = x + y$, $y(0) = 1$, com o método de Euler Aperfeiçoado (Runge-Kutta de ordem 2), com $N = 5$, por exemplo, para calcular uma aproximação de $y(2)$, já se obtém um resultado melhor do que com o método de Euler (Runge-Kutta de ordem 1), com $N = 10$.

$N = 5; h = \frac{2-0}{5} = 0.4.$ $\quad x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1.2, x_4 = 1.6, x_5 = 2$

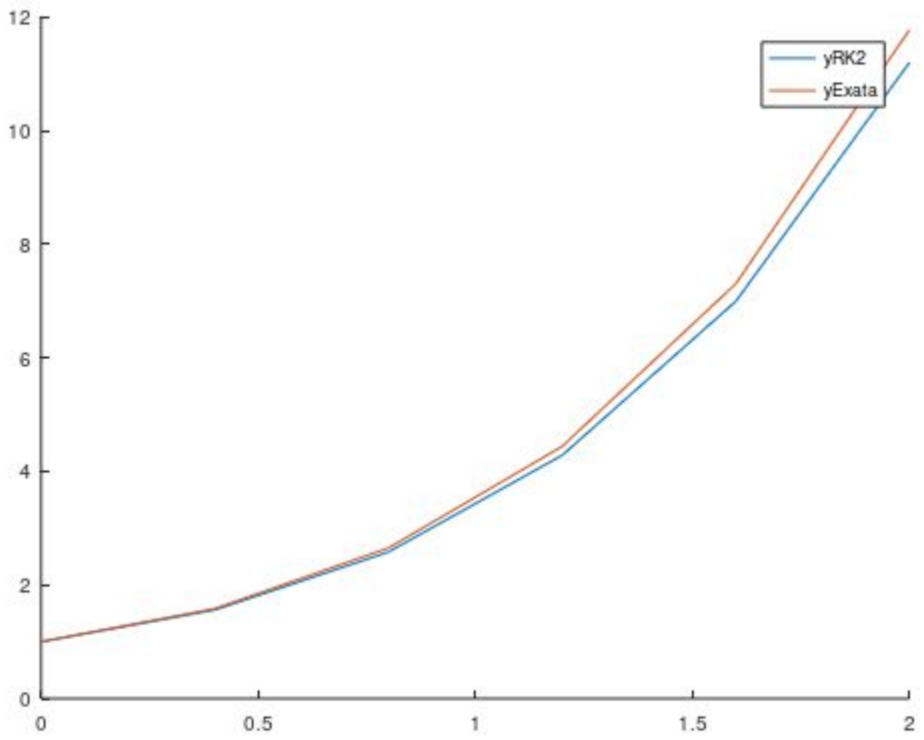
$\boxed{y_1 = 1.56000}$ $\boxed{y_2 = 2.58080}$ $\boxed{y_3 = 4.28358}$ $\boxed{y_4 = 6.00570}$ $\boxed{y_5 = 11.20164}$

EULER APERFEIÇOADO (RK2), COM $N = 5$:	$y(2) \cong y_5 = 11.20164$	FAÇAM!!!
VALOR EXATO:	$y(2) = 11.77811$	
COM EULER (RK1), COM $N = 10$:	$y(2) \cong y_{10} = 9.38347$	FEITO NO INÍCIO
EULER APERFEIÇOADO (RK2), COM $N = 10$:	$y(2) \cong y_{10} = 11.60924$	

GRAFICAMENTE

Resolvendo o PVI: $y' = x + y, \quad y(0) = 1$

EULER APERFEIÇOADO (RK2), COM $N = 5$



EULER (RK1), COM $N = 10$