

EST 105

INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA

V. A. C. Bidimensionais

Resumo

Departamento de Estatística – UFV

Av. Peter Henry Rolfs, s/n

Campus Universitário

36570.977 – Viçosa, MG

<http://www.det.ufv.br/>



(X,Y) Variável Aleatória **Contínua** Bidimensional

Definição: Uma variável (X,Y) será uma v. a. c. bidimensional se X e Y puderem assumir valores em dois conjuntos não enumeráveis.

- São exemplos de v.a.c. bidimensionais:
 - X : Temperatura e Y : Umidade relativa de uma cidade;
 - X : Altura (em metros) e Y : Peso (em kg) de uma pessoa;
 - X : Consumo de óleo (em litros) e Y : Consumo de gasolina (em litros) de um automóvel; etc.

Função Densidade de Probabilidade Conjunta ou f. d. p. conjunta

- Seja (X, Y) uma v. a. c. bidimensional. Dizemos que $f(x, y)$ é uma **função densidade de probabilidade conjunta** de (X, Y) , se satisfizer às seguintes condições:

$$(i) \quad f(x, y) \geq 0, \text{ para todo } (x, y)$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Definição:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Exemplo 1: Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional com função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(2x + y), & 2 \leq x \leq 6 \text{ e } 0 \leq y \leq 5. \\ 0, & \text{para outros valores de } x \text{ e } y. \end{cases}$$

Pede-se:

- a) **O valor de k.**
- b) **Calcule $P(X < 3, 2 < Y < 4)$.**

Funções Densidade de Probabilidade Marginais

- A partir da f. d. p. conjunta $f(x, y)$ é possível obter as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y .
- As f. d. p. marginais são utilizadas para o cálculo de probabilidades referentes apenas à X ou apenas à Y e, são dadas por:

$$\textbf{Marginal de X: } g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$\textbf{Marginal de Y: } h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Definições:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b g(x)dx$$

$$P(c \leq Y \leq d) = \int_c^d h(y)dy$$

Exemplo 2: Considerando novamente o caso apresentado no Exemplo 1, cuja f. d. p. conjunta é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{210}(2x + y), & 2 \leq x \leq 6 \text{ e } 0 \leq y \leq 5. \\ 0, & \text{para outros valores de } x \text{ e } y. \end{cases}$$

Pede-se:

- a) A f. d. p. marginal de X.
- b) A f. d. p. marginal de Y.
- c) Calcule $P(2 \leq Y < 4)$.
- d) Calcule $P(X > 4)$.

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais

- Dadas as funções densidade de probabilidade conjunta de (X,Y) , $f(x,y)$, e as marginais, $g(x)$ e $h(y)$, é possível obter as f.d.p. condicionais de $X|Y=y$ e de $Y|X=x$.
- Para um valor fixo de $Y = y$, a função densidade de probabilidade condicional de X , é:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, h(y) > 0$$

- Para um valor fixo de $X = x$, a função densidade de probabilidade condicional de Y , é:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, g(x) > 0$$

Exemplo 3: Obtenha a f.d.p. condicional de X dado Y=1, isto é, $f(x|y = 1)$.

Exemplo 4: Calcule $P(X < 3|Y = 1)$.

Exemplo 5: Calcule $P(X < 3|2 < Y < 4)$.

Independência

- Seja (X, Y) v. a. contínua bidimensional. Dizemos que X e Y são independentes se, e somente se:

$$f(x, y) = g(x)h(y), \text{ para todo } x, y.$$

ou

$$f(x|Y = y) = g(x) \text{ e } f(y|X = x) = h(y).$$

Exemplo 6: As variáveis X e Y são independentes?

Atividade Proposta

Resolver os exercícios do Roteiro de Aulas abaixo relacionados:

- Exercício 22 - pág. 129.
- Exercício 35 (itens a e c) – pág. 131/132.
- Exercício 37 (itens a e b) – pág. 132.