Sequências I

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2022-2

Definição 1

Uma **sequência** ou uma **sucessão** é uma função onde o domínio é $\mathbb{N}$, ou seja, $f : \mathbb{N} \to C$, onde C pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Neste curso estudaremos apenas as sequências cujo o contra-domínio é $\mathbb{R}$.

Exemplos:

$$0; 1; 2; 3; \ldots; n; \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\ln 2}; \frac{1}{\ln 3}; \ldots; \frac{1}{\ln n}; \ldots$$

Notação:

$a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots$ que pode ser representado por $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ou simplesmente por $\{a_n\}$ ou (a_n);

Uma sequência também pode ser definida por uma fórmula de recorrência. Por exemplo a **sequência de Fibonacci**: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$. Os primeiros termos são: $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \ldots$.

Definição 2

(i) Dada uma sequência (a_n), dizemos que o número $L \in \mathbb{R}$ é o limite de (a_n) e escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ou $(a_n) \to L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que se $n > N$, então $|a_n - L| < \epsilon$;

(ii) Dada uma sequência (a_n), $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $(a_n) \to \infty$ se para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$, então $a_n > M$.

(iii) Dada uma sequência (a_n), $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ou $(a_n) \to -\infty$ se para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$, então $a_n > -M$.

OBS: Se a sequência (a_n) tem limite L, dizemos que ela é **convergente** e que converge para L. Caso contrário, dizemos que ela **diverge**.

Prove usando a definição que:

(a) $\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0$;

(b) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to 1$.

Propriedades das Sequências: Sejam $(a_n), (b_n)$ duas sequências convergentes, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$;

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n = L_1/L_2, L_2 \neq 0$;

(iv) $\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = k \cdot L_1, k \in \mathbb{R}$;

(v) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p = L_1^p$, desde que L_1^p exista.

Exemplo: Prove que $\left(\dfrac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}\right)$ é convergente e determine seu limite.

Teorema da Substituição: Seja f uma função tal que $f(n) = a_n$, quando $n \in \mathbb{N}$. Então

(i) Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, com $L \in \mathbb{R}, L = \infty$ ou $L = -\infty$;

(ii) Se f é crescente, então (a_n) é crescente (lembre-se que a sequência é uma função);

(iii) Se f é decrescente, então (a_n) é decrescente.

Exemplos

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0, r > 0$, pois $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0, r > 0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln\ n}{n} = 0$, pois $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln\ x}{x} = 0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, pois $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$;

(d) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, pois $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$;

Teorema do Confronto: Se $a_n \leq b_n \leq c_n$, para $n > n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Exemplo: A sequência $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ é convergente?

Teorema: Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplo: Podemos usar esse teorema para provar que a sequência $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ é convergente.

Teorema: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e se a função f for contínua em L, então $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$.

Exemplos

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = \cos 0 = 1;$

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)} = \sqrt{1} = 1.$

- LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. II*, São Paulo, Editora Harbra: 1990.
- STEWART, J. *Cálculo - vol II*, São Paulo, Thomson Learning: 2002.