

MAT146 - Cálculo I - Derivada de funções polinomiais, regras de derivação e derivada de funções trigonométricas

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Vimos que uma função f é derivável em um ponto x_0 do seu domínio se existir o seguinte limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Uma vez que tal limite existe, o denotamos por

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Com o intuito de simplificar a notação, escreveremos simplesmente h ao invés de Δx na definição de derivada.

Encontrar a derivada de uma função pela definição pode ser uma tarefa difícil e extremamente trabalhosa para a grande maioria das funções. Os próximos resultados visam simplificar nosso trabalho, garantindo que determinadas funções são deriváveis e explicitando uma fórmula para tais derivadas.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função dada por

$$f(x) = c,$$

onde c é uma constante qualquer. Então

$$f'(x) = 0.$$

Demostração: Este resultado nos diz que a derivada de uma função constante é zero. Para demonstrar bastar aplicar a definição

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

■

Continuaremos nosso trabalho deduzindo a derivada de funções da forma x^n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função dada por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Então f é derivável em todos os pontos do seu domínio e além disso,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demonstração: Se n é um número natural, podemos desenvolver $(x+h)^n$ pelo Teorema Binomial da seguinte forma

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} h^i \\&= \binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 h^{n-1} \\&\quad + \binom{n}{n} x^0 h^n,\end{aligned}$$

onde $\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}.$

Desta forma, utilizando o Teorema Binomial, obtemos

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right] - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nx\cancel{h^{n-1}} + h^{n-1} \right] \\
 &= nx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Observe que tal limite existe independente do ponto x do domínio de f , ou seja, f é derivável em todos os pontos do seu domínio e sua derivada é dada por

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$



Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^5$. Uma vez que já sabemos que tal função é derivável em todos os pontos do seu domínio e conhecemos uma fórmula para sua derivada, não precisamos recorrer à definição. Neste caso, podemos utilizar a fórmula encontrada anteriormente.

Assim, pelo teorema anterior, temos que

$$f'(x) = 5x^4.$$

Para encontrar a derivada em um ponto específico, basta substituir tal valor na expressão de $f'(x)$, ou seja,

$$f'(2) = 5(2)^4 = 80.$$

Apresentaremos agora as regras de derivação da soma, diferença, produto e quociente de duas funções. Esta regras simplificam os cálculos para encontrar derivadas e estas regras combinadas com as derivadas das funções conhecidas (e das funções que veremos posteriormente), nos permite encontrar a derivada de uma grande quantidade de funções de uma maneira rápida.

Teorema

Sejam f, g funções deriváveis em um ponto x_0 e seja k uma constante real. Então as funções

$$f \pm g, \quad kf, \quad f \cdot g$$

são deriváveis em x_0 . Se, além disso, $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ também é derivável em x_0 . Mais ainda,

- (i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- (ii) $(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$
- (iii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- (iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Observação

Tendo conhecimento destas regras de derivação, somos capazes de derivar qualquer função racional f , ou seja,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios com coeficientes reais.

Nos exemplos a seguir mostraremos como aplicar diretamente as regras de derivação acima.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x^4 + 5x + 3.$$

Vamos derivar tal função utilizando as regras apresentadas acima. Vamos utilizar a notação $\frac{df}{dx}$ para visualizar melhor a utilização de tais regras.

Exemplo

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{df}{dx}(x) \\&= \frac{d}{dx}(3x^4 + 5x + 3) \\&= \frac{d}{dx}(3x^4) + \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(3) \\&= 3 \cdot \frac{d}{dx}(x^4) + 5 \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3) \\&= 3 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 1 + 0 \\&= 12x^3 + 5.\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{x^n}$. Observe que $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $f(x) = 1$ e $g(x) = x^n$.

Utilizando a regra do quociente para derivadas, temos, para $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \left(\frac{f}{g} \right)' (x) \\
 &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\
 &= \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \\
 &= -n \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \\
 &= -nx^{-n-1}.
 \end{aligned}$$

O exemplo anterior nos fornece a regra de derivação para uma função f definida por $f(x) = x^n$, para n inteiro positivo. Se n é um inteiro negativo, $m = -n$ é um natural. Daí, podemos escrever

$$f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Utilizando o exemplo anterior,

$$f'(x) = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Daí, se f é uma função dada por $f(x) = x^n$, $n \neq 0$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0.$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 4}.$$

Aplicando a regra de derivação do quociente obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 3)' - (x^2 - 3)(x^2 - 4x + 4)'}{(x^2 - 4x + 4)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 4x + 4)2x - (x^2 - 3)(2x - 4)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{2x^3 - 8x^2 + 8x - (2x^3 - 4x^2 - 6x + 12)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{-4x^2 + 14x - 12}{(x - 2)^4} = -\frac{4x - 6}{(x - 2)^3}. \end{aligned}$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}.$$

Utilizando as regras de derivação temos

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2} = 2x + x^{-2},$$

uma vez que f pode ser escrita como sendo $f(x) = x^2 - x^{-1}$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função definida por

$$f(x) = (3x^5 - 1)(2 - x^4).$$

Temos que f é o produto de duas funções deriváveis. Aplicando a regra do produto temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^5 - 1)'(2 - x^4) + (3x^5 - 1)(2 - x^4)' \\ &= (15x^4)(2 - x^4) + (3x^5 - 1)(-4x^3) \\ &= 30x^4 - 15x^8 - 12x^8 + 4x^3 \\ &= 30x^4 - 27x^8 + 4x^3. \end{aligned}$$

Nosso próximo passo é apresentar os resultados que garantem que as funções trigonométricas são deriváveis e além disso, estes resultados nos fornecem a derivada de cada uma delas. Para garantir que as funções seno e cosseno são deriváveis necessitaremos do limite fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

que foi apresentado anteriormente. Vimos anteriormente também que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Para as demais funções trigonométricas, as derivadas das funções seno e cosseno, combinadas com as regras de derivação serão suficientes para garantir que as mesmas são deriváveis e obter a expressão para suas respectivas derivadas.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Então f é derivável e além disso,

$$f'(x) = \cos x.$$

Demonstração: Utilizando a definição, obtemos

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \left(\frac{1 - \cos h}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \right].\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$$

concluímos que

$$f'(x) = \cos x.$$



Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \cos x.$$

Então f é derivável e além disso,

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Demonstração: Pela definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\cos x \left(\frac{1 - \cos h}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \right].\end{aligned}$$

Novamente, utilizando os limites fundamentais

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0,$$

garantimos que f é derivável e

$$f'(x) = -\sin x.$$



Uma vez conhecendo as derivadas do seno e do cosseno, podemos encontrar a derivada das demais funções trigonométricas, utilizando as regras de derivação.

Teorema

- (i) Se $f(x) = \operatorname{tg} x$, então $f'(x) = \sec^2 x$.
- (ii) Se $g(x) = \operatorname{cotg} x$, então $g'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.
- (iii) Se $h(x) = \sec x$, então $h'(x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$.
- (iv) Se $I(x) = \operatorname{cossec} x$, então $I'(x) = -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x$.

Demonstração: Utilizaremos a regra do quociente para derivadas para encontrar a derivada da tangente, uma vez que

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Note que a função tangente é derivável, uma vez que é o quociente de funções deriváveis.

Assim,

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\operatorname{tg} x)' \\&= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\&= \frac{\cos x(\operatorname{sen} x)' - \operatorname{sen} x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\&= \frac{\cos x(\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.\end{aligned}$$

Para as demais funções trigonométricas procederemos de maneira análoga

$$\begin{aligned}g'(x) &= (\cotg x)' \\&= \left(\frac{\cos x}{\sen x}\right)' \\&= \frac{\sen x(\cos x)' - \cos x(\sen x)'}{\sen^2 x} \\&= \frac{\sen x(-\sen x) - \cos x(\cos x)}{\sen^2 x} \\&= \frac{-\sen^2 x - \cos^2 x}{\sen^2 x} \\&= -\frac{1}{\sen^2 x} = -\operatorname{cossec}^2 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\sec x)' \\ &= \left(\frac{1}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \sec x \cdot \tan x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I'(x) &= (\operatorname{cossec} x)' \\&= \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)' \\&= \frac{-(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} \\&= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\&= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \\&= -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cossec} x.\end{aligned}$$

■

Neste momento já somos capazes de derivar uma maior variedade de funções utilizando as regras vistas até então.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 \sen x.$$

Utilizando a regra de derivação do produto e a derivada trigonométrica obtemos

$$f'(x) = (x^2)' \sen x + x^2 (\sen x)' = 2x \sen x + x^2 \cos x.$$

Exemplo

Seja f uma função dada por

$$f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x}.$$

Vamos encontrar $f'(\pi)$.

Primeiramente, vamos aplicar as regras de derivação apresentadas até agora para derivar a função em um ponto qualquer do seu domínio.

Posteriormente, avaliaremos a derivada em $x = \pi$.

Exemplo

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(\sec x)'(1 + \tg x) - \sec x(1 + \tg x)'}{(1 + \tg x)^2} \\
 &= \frac{(\sec x \tg x)(1 + \tg x) - \sec x(\sec^2 x)}{(1 + \tg x)^2} \\
 &= \frac{(\sec x \tg x)(1 + \tg x) - \sec x(1 + \tg^2 x)}{(1 + \tg x)^2} \\
 &= \frac{\sec x \tg x + \sec x \tg^2 x - \sec x - \sec x \tg^2 x}{(1 + \tg x)^2} \\
 &= \frac{\sec x \tg x - \sec x}{(1 + \tg x)^2} \\
 &= \frac{\sec x(\tg x - 1)}{(1 + \tg x)^2}.
 \end{aligned}$$

Exemplo

Logo, fazendo $x = \pi$, encontramos

$$f'(\pi) = \frac{\sec(\pi)(\operatorname{tg}^2 \pi - 1)}{(1 + \operatorname{tg} \pi)^2} = \frac{(-1)(-1)}{(1 + 0)^2} = 1.$$