MAT146 - Cálculo I - Esboço de Gráficos

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Nas aulas anteriores, estudamos várias ferramentas (Teste da Derivada Primeira, Teste da Derivada Segunda, Existência de Pontos Críticos, etc) que permitirão esboçar com segurança, o gráfico de uma função real, que satisfaça algumas condições.

Apresentamos aqui, um roteiro para auxiliar no esboço de gráficos. Considere uma função real $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde I é um intervalo não degenerado.

(i) Determine o domínio de f.

(ii) Encontre o ponto de intersecção com o eixo-y, caso exista, e também os pontos de intersecção com o eixo-x, caso seja possível resolver a equação resultante.

(iii) Encontre as assíntotas verticais e horizontais, caso existam.

(iv) Calcule f', caso exista.

(v) Determine os números críticos de f.

(vi) Determine os intervalos nos quais a função é decrescente e onde é crescente.

(vii) Aplique o teste da derivada primeira ou teste da derivada segunda, para verificar a existência de extremos entre os números críticos.

(viii) Calcule f'', caso exista.

(ix) Verifique a concavidade do gráfico.

(xi) Esboçe o gráfico.

Agora apresentaremos alguns exemplos, onde esboçamos o gráfico de funções com o auxílio do roteiro acima.

Exemplo

Seja $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. *Faça um esboço do gráfico de* f.

Solução: Vamos fazer o esboço seguindo as intruções acima. Primeiramente notamos que

$$Dom(f) = \mathbb{R}.$$

O ponto de intersecção com o eixo-y é a origem, pois

$$f(0) = 0.$$

Com o eixo-x temos que resolver

$$\frac{x^3}{3} - x = 0.$$

$$x\left(\frac{x^2}{3}-1\right)=0$$

$$x=0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} \frac{x^2}{3}-1&=0 \\ x^2&=3 \\ x&=\pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Portanto, $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$ e $(0,0)$ são os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo-x.

Vamos agora calcular a derivada primeira de f e calcular os possíveis números críticos de f.

$$f'(x) = x^2 - 1, \quad \text{assim} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Note que

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < -1 \quad \text{e para} \quad x > 1.$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad -1 < x < 1.$$

Segue das considerações acima que f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[1, \infty)$ e é decrescente no intervalo $[-1, 1]$.

Pelo teste da derivada primeira, segue que -1 é um número de máximo relativo e 1 é um número de mínimo relativo de f.

Vamos agora calcular a derivada segunda de f e calcular os possíveis números críticos de f'.

$$f''(x) = 2x, \quad \text{de onde} \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Note que existe $f'(0)$, logo o gráfico de f possui uma reta tangente na origem $(0, 0)$. Além disso,

$$f''(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$

e

$$f''(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Portanto o ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Ainda usando a derivada segunda, como

$$f''(x) < 0 \quad \text{em} \quad (-\infty, 0),$$

o gráfico de f é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$.

Analogamente, como

$$f''(x) > 0 \quad \text{em} \quad (0, \infty),$$

o gráfico de f é côncavo para cima em $(0, \infty)$.

Finalmente observamos que não existem assíntotas verticais e nem assíntotas horizontais. De fato, como f é contínua em $\mathbb{R}$, não há assíntotas verticais.

Por outro lado, uma vez que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

concluímos que não há assíntotas horizontais.

Resumindo:

- $Dom(f) = \mathbb{R}$;
- intercepta os eixos nos pontos $(0,0)$, $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},0)$;
- o gráfico de f não possui assíntotas;
- pontos críticos: $x = \pm 1$;
- valores críticos $f(-1) = \dfrac{2}{3}$ e $f(1) = -\dfrac{2}{3}$;
- f é estritamente crescente em $(-\infty,-1]$ e em $[1,+\infty)$;
- f é estritamente decrescente em $[-1,1]$;
- $x = -1$ é um ponto de máximo local e $x = 1$ é um ponto de mínimo local;
- o gráfico de f é côncavo para cima em $(0,+\infty)$;
- o gráfico de f é côncavo para baixo em $(-\infty,0)$;
- o ponto $(0,0)$ é o único ponto de inflexão.

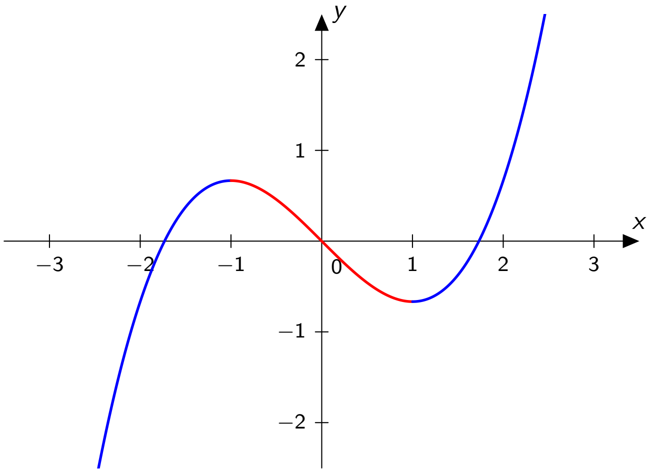


Figura : Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$.

Exemplo

Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Solução: Vamos seguir o mesmo procedimento adotado no exemplo anterior.

Domínio: Neste caso

$$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Pontos de intersecção: A origem $(0, 0)$ é o único ponto de intersecção com ambos os eixos uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) = 0$, se e somente se, $x = 0$.

Derivada Primeira: Utilizando a regra do quociente, encontramos

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

Números críticos de f: Somente $x = 0$.

Intervalos onde f é crescente: A função f é estritamente crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, 0]$, pois $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Intervalos onde f é decrescente: A função f é estritamente decrescente em $[0, 1)$ e em $(1, \infty)$, pois $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Derivada Segunda: Derivando a derivada primeira, obtemos

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}.$$

Números críticos de f': Não há, uma vez que f tem derivada segunda em todo o seu domínio e $f''(x) \neq 0$, para qualquer x.

Pontos de inflexão: Não há, já que f' não possui números críticos.

Concavidade: Note que $f''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Logo o gráfico de f é côncavo para cima nestes intervalos.
Além disso, $f''(x) < 0$ para $x \in (-1, 1)$, de onde obtemos que o gráfico de f é côncavo para baixo neste intervalo.

Assíntotas Verticais: Temos que -1 e 1 não pertencem ao domínio de f e a função é contínua nos demais pontos. Assim, calculando os limites

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty,$$

obtemos que $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico.

Assíntotas horizontais: Calculamos os seguintes limites

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1,$$

segue que $y = 1$ é a assíntota horizontal do gráfico de f.

Resumindo:

- $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;
- intercepta os eixos somente no ponto $(0, 0)$;
- as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais;
- a reta $y = 1$ é assíntota horizontal;
- ponto crítico: $x = 0$;
- valor crítico $f(0) = 0$;
- f é estritamente crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, 0]$;
- f é estritamente decrescente em $[0, 1)$ e em $(1, +\infty)$;
- o ponto $x = 0$ é um máximo local;
- o gráfico de f é côncavo para cima em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;
- o gráfico de f é côncavo para baixo em $(-1, 1)$;
- o gráfico de f não possui pontos de inflexão.

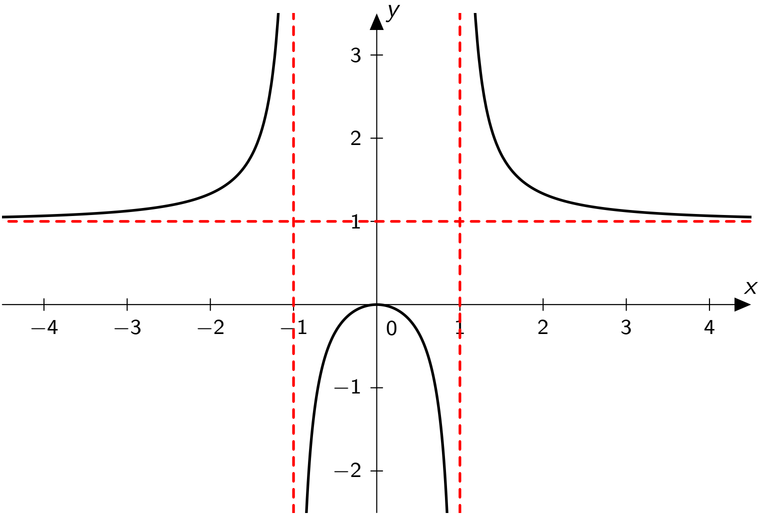
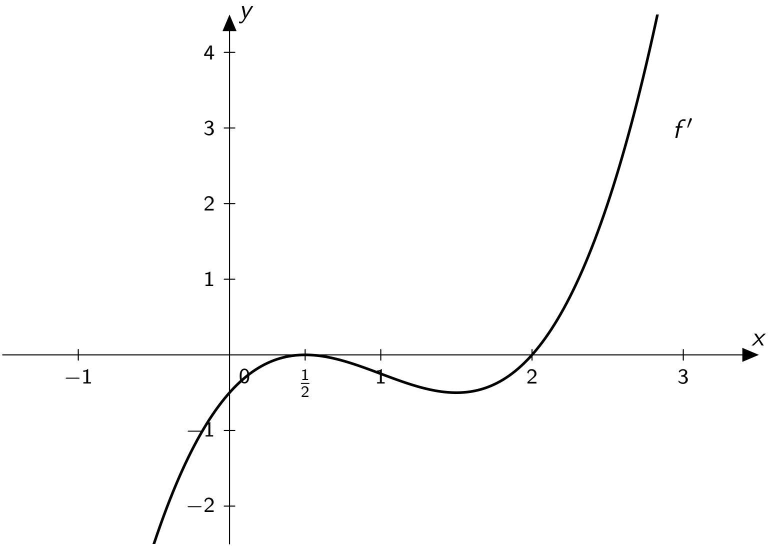
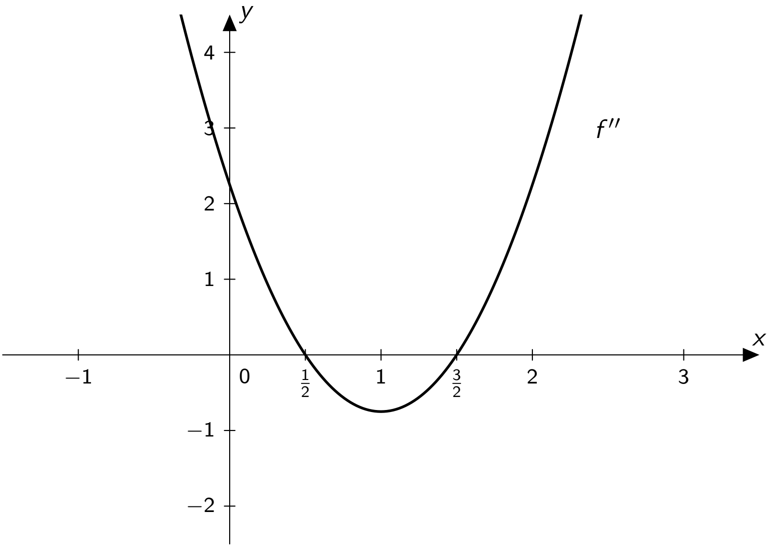


Figura : Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável. Os gráficos de* f' *e* f'' *são apresentados abaixo.*


y
4
3
2
1
−1
−2
x
−1
0
1/2
1
2
3
f′



y
4
3
2
1
−1
−2
x
−1
0
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{3}{2}$
2
3
f''

Com base nos gráficos acima, determine

(a) os pontos críticos de f;

(b) classifique os pontos críticos de f, utilizando o teste da primeira derivada;

(c) determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f;

(d) determine os pontos de inflexão do gráfico de f;

(e) determine os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e os intervalos onde o gráfico é côncavo para baixo;

(f) as assíntotas verticais ao gráfico de f.