

MAT146 - Cálculo I - Limites

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Limites

Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

Aplicaremos f a pontos próximos de -1 .

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-3	1,5	0	0
-2	2	-0,5	-1
-1,5	3	-0,8	-4
-1,1	11	-0,9	-9
-1,01	101	-0,99	-99
-1,001	1001	-0,999	-999
:	:	:	:

Sabemos que não existe $f(-1)$. Na verdade, o número -1 nem faz parte do domínio de f . Mas o que acontece quando a variável x se aproxima de -1 ?

Observe o gráfico da função

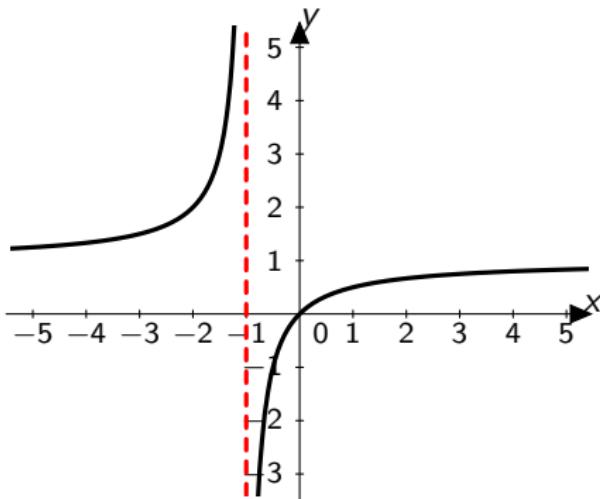


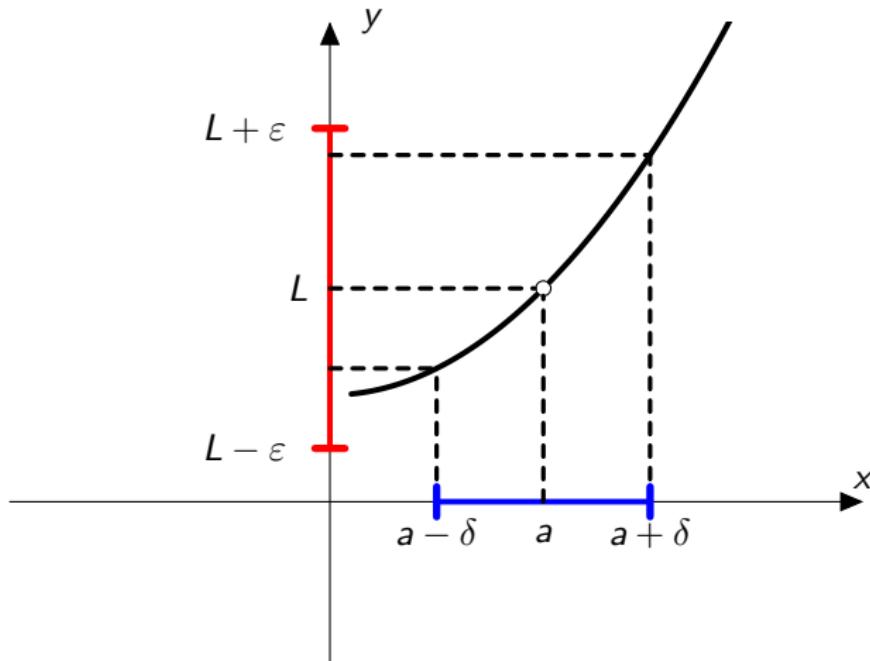
Figura : Gráfico da Função $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

Seja I um intervalo aberto em \mathbb{R} , $a \in I$ e f uma função real definida em todo ponto de I , exceto possivelmente em a (note que o domínio de f neste caso é I ou $I \setminus \{a\}$). Dizemos que o limite de $f(x)$ quando a variável x tende a a será o número L se a seguinte condição for verdadeira:

Condição: (ε, δ)

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Aqui, as letras gregas ε e δ representam respectivamente as distâncias entre $f(x)$ e L e entre x e a .



O seguinte resultado é fundamental para a teoria de limites. Ele estabelece que uma função não pode tender a dois limites diferentes ao mesmo tempo.

Teorema (Unicidade do Limite)

Seja I um intervalo aberto em \mathbb{R} , $a \in I$ e f uma função real definida em I ou em $I \setminus \{a\}$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$$

então $L_1 = L_2$.

Aplicar diretamente a definição de limite, para obter informações sobre o comportamento de uma função, na vizinhança de algum ponto a , pode ser uma tarefa árdua e até impraticável.. Vamos ver agora alguns resultados operacionais que facilitarão muito o cálculo de limites.

Teorema

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$, onde c é uma constante;
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} kx = ka$, onde k é uma constante;
- (d) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$$

Exemplo

Seja $f(x) = 2x + 3$ e $a = 5$. Pelo Teorema acima, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} (2x + 3) \\&= \lim_{x \rightarrow 5} 2x + \lim_{x \rightarrow 5} 3 \\&= 2 \cdot 5 + 3 = 13.\end{aligned}$$

Teorema

Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Então

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = L.M;$
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$, onde n é um número inteiro positivo;
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, se $M \neq 0$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, onde $L \geq 0$, caso n seja um número inteiro positivo par, ou L é um número qualquer caso n seja um número inteiro positivo ímpar.

Exemplo

Calcule o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow -2} (5x + 17)^3$$

Solução: Pelo Teorema acima,

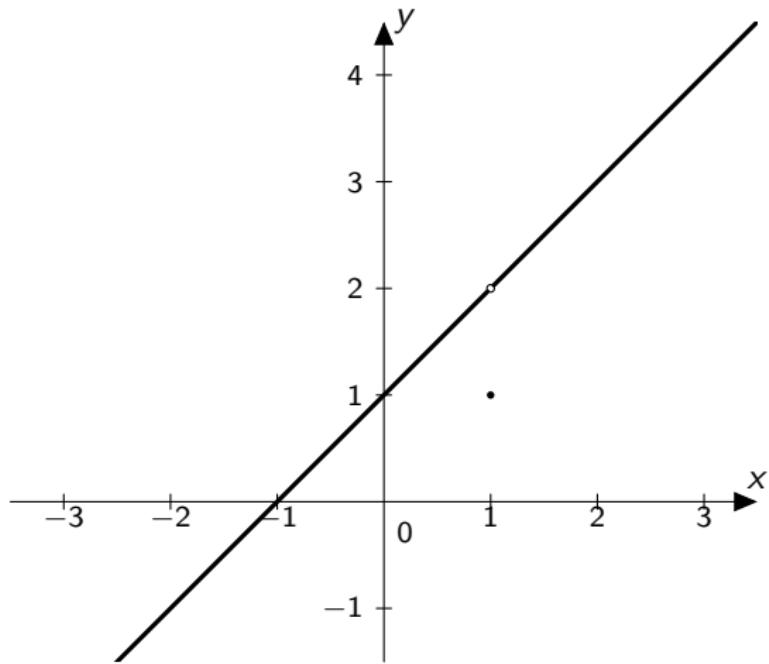
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} (5x + 17)^3 &= [\lim_{x \rightarrow -2} (5x + 17)]^3 \\&= [5(-2) + 17]^3 = 7^3 \\&= 343.\end{aligned}$$

Exemplo

Seja f uma função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Encontre o $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.



Exemplo

Calcular os limites

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 - 8}$

Quando calculamos o limite de uma função em um ponto a , estamos avaliando os valores que esta função assume quando a variável se aproxima de a . Como estamos trabalhando com funções definidas em subconjuntos de \mathbb{R} , a variável pode se aproximar do ponto a somente pela direita, ou apenas pela esquerda ou ambos os lados.

Seja f uma função real cujo domínio contém o intervalo (a, c) . O limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L se,

para todo $\varepsilon > 0$, **existir um** $\delta > 0$ **tal que se** $0 < x - a < \delta$ **então** $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Escrevemos neste caso

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

Analogamente, se o domínio de f contém o intervalo (b, a) , definimos o limite lateral à esquerda de $f(x)$, quando x tende a a pela esquerda, como sendo o número L se,

para todo $\varepsilon > 0$, **existe um** $\delta > 0$ **tal que se** $0 < a - x < \delta$ **então** $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Escrevemos neste caso

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

Exemplo

Se $f(x) = \sqrt{x - 1}$, da definição acima segue que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x - 1} = \sqrt{1 - 1} = 0.$$

Note que não faz sentido tentar calcular $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x - 1}$, pois quando x tende a 1 pela esquerda temos que $x - 1 < 0$, e a raiz quadrada não está definida para números negativos.

Note que o intervalo $(b, 1)$ não pertence ao domínio de f seja qual for o valor de b .

Teorema

O $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe e será igual a L se, e somente se, existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e além disso,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

Observação

As operações com limites permanecem válidas para limites laterais, observando-se as restrições devidas.

Exemplo

A função sinal é definida sobre o conjunto dos números reais da seguinte forma

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Faça um esboço do gráfico desta função e calcule, caso existam, os limites $\lim_{x \rightarrow 0^-} sgn(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} sgn(x)$.

Solução: Note que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} sgn(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} sgn(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1.$$

Observe que existem os limites laterais, porém são diferentes. Neste caso, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$. Segue abaixo o esboço do gráfico.

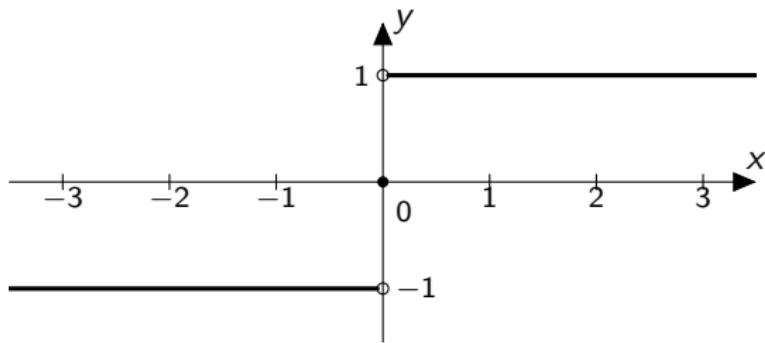


Figura : Gráfico da função sgn

Exemplo

Considere a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x > 2 \\ 0, & \text{se } x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x < 2 \end{cases}.$$

Faça um esboço do gráfico desta função e calcule, caso existam, os limites $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Solução: Note que

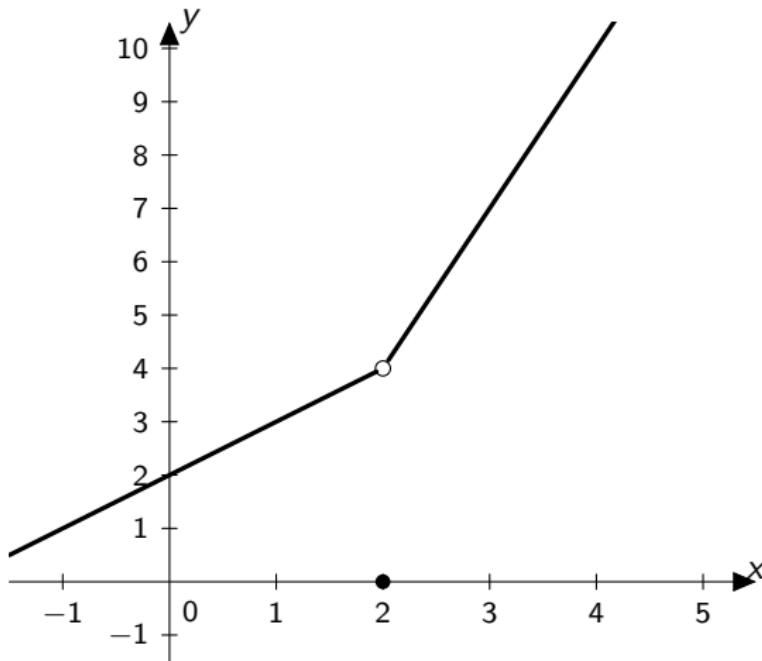
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 2) = 2.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4.$$

Neste caso, como os limites laterais existem e são iguais, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$



Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Observe que $x = 0$ não pertence ao domínio desta função. Qual é o comportamento de f quando x se aproxima de zero?

Abaixo são mostrados alguns valores de f para vários pontos do seu domínio.

x	$\frac{1}{x^2}$
1	1
0.5	4
0.2	25
0.1	100
0.01	10000
0.001	1000000
-1	1
-0.5	4
-0.1	100
-0.01	10000
-0.001	1000000

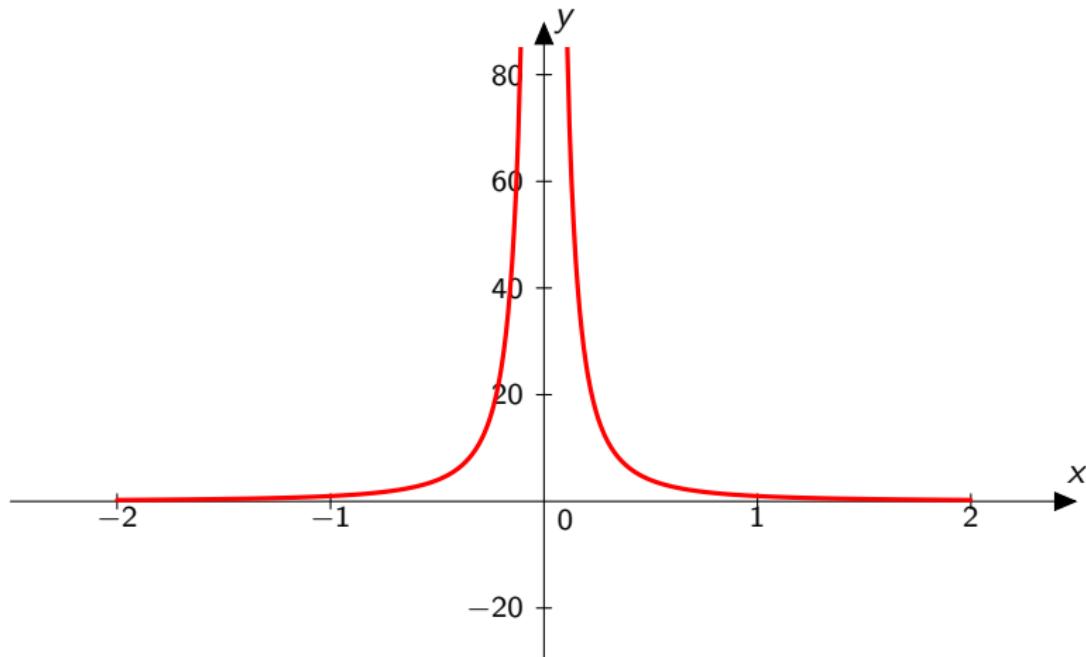


Figura : Gráfico da função f . Observe que $f(x)$ assume valores cada vez maiores quando x se aproxima de 0.

Seja I um intervalo em \mathbb{R} contendo um ponto a e f uma função real, definida em todo ponto de I , exceto possivelmente em a . Quando x tende a a , dizemos que $f(x)$ cresce indefinidamente se, para qualquer número $N > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > N$$

neste caso escrevemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Observação

A definição acima não diz que existe o limite de f quando x tende a a , diz somente que $f(x)$ cresce indefinidamente. Na verdade tal limite não existe.

Nas condições acima, quando x tende a a , dizemos que $f(x)$ decresce indefinidamente se, para qualquer número $N < 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) < N$$

neste caso escrevemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Definições análogas são feitas para os limites laterais.

Quando x tende a esquerda de a , dizemos que $f(x)$ cresce indefinidamente se, para qualquer número $N > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$ então $f(x) > N$ e neste caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

Quando x tende a direita de a , dizemos que $f(x)$ cresce indefinidamente se, para qualquer número $N > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) > N$ e neste caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

Quando x tende a esquerda de a , dizemos que $f(x)$ decresce indefinidamente se, para qualquer número $N < 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$ então $f(x) < N$ e neste caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Quando x tende a direita de a , dizemos que $f(x)$ decresce indefinidamente se, para qualquer número $N < 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) < N$ e neste caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Teorema

Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } r \text{ for ímpar} \\ +\infty, & \text{se } r \text{ for par} \end{cases}$

Exemplo

Seja $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$. Observe abaixo o gráfico de f .

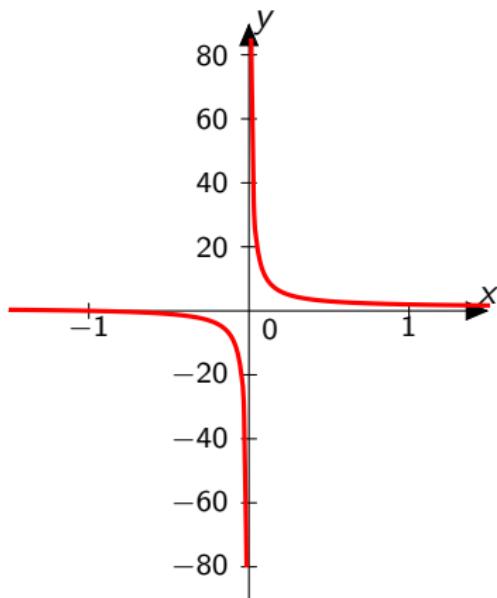


Figura : Gráfico da função f .

Note que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \\&= \infty + \infty = \infty.\end{aligned}$$

Como veremos no próximo teorema, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

Teorema

Seja $a \in \mathbb{R}$ e suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde $c \neq 0$.

Então

- (i) Se $c > 0$ e existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ quando $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

- (ii) Se $c > 0$ e existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ quando $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

- (iii) Se $c < 0$ e existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ quando $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

- (iv) Se $c < 0$ e existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ quando $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

Observação

O mesmo resultado vale para limites laterais infinitos.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$.

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6} &= \frac{\sqrt{(x + 3)(x - 3)}}{2\sqrt{(x - 3)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(x + 3)(x - 3)}}{2\sqrt{(x - 3)(x - 3)}} \\ &= \frac{\sqrt{(x + 3)}}{2\sqrt{(x - 3)}}\end{aligned}$$

Note que a terceira igualdade é válida pois $x > 3$.

Agora

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{(x + 3)(x - 3)}}{2\sqrt{(x - 3)}}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2\sqrt{(x - 3)} = 0$ e $2\sqrt{(x - 3)} > 0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6} = \infty.$$

Abaixo mostramos o gráfico da função f .

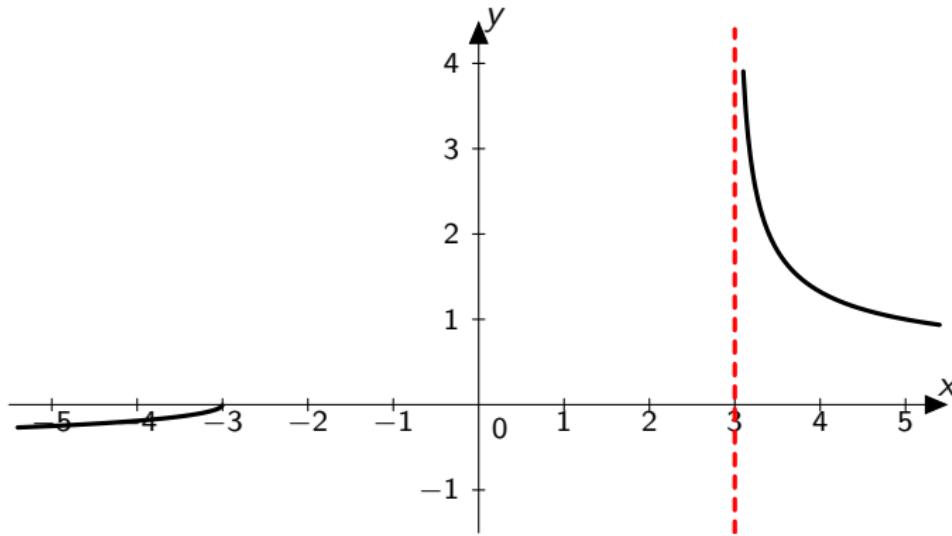


Figura : Gráfico da função f

Teorema

(i) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

(ii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

(iii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde $c > 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = +\infty.$$

(iv) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde $c < 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty.$$

(v) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde $c > 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty.$$

(vi) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde $c < 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty.$$

Observação

O mesmo resultado vale para limites laterais infinitos.

Exemplo

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x - 2)^2}.$$

Note que

$$\frac{x}{(x - 2)^2} = x \cdot \frac{1}{(x - 2)^2},$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 2} = +\infty.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x - 2)^2} = +\infty.$$

Abaixo mostramos o gráfico da função f .

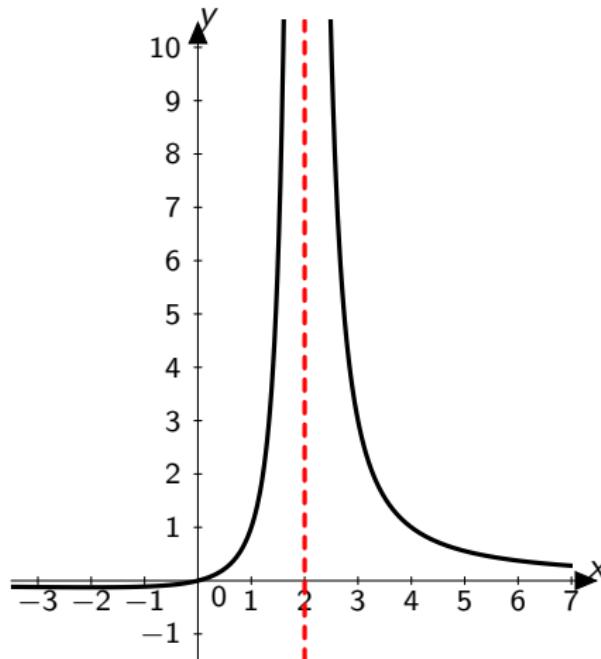


Figura : Gráfico da função f .

Em muitas situações, precisamos analisar o comportamento de uma função, quando a variável assume valores cada vez maiores (positivos ou negativos), ou seja quando $x \rightarrow \infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$.

Se $f(x) = x$, então claramente sabemos o comportamento de $f(x)$, quando x assume valores muito grandes. Veja figura abaixo:

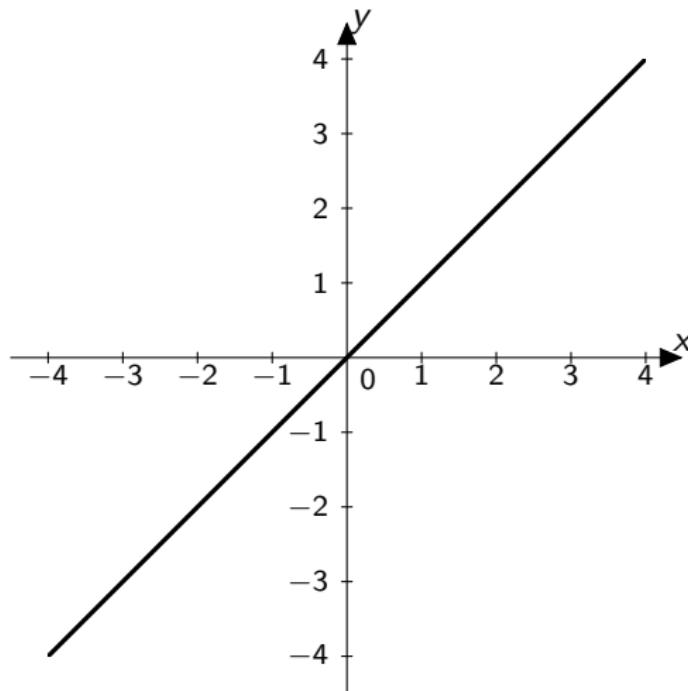


Figura : Função Identidade

Em outros casos a situação não é tão simples. Considere a função real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}.$$

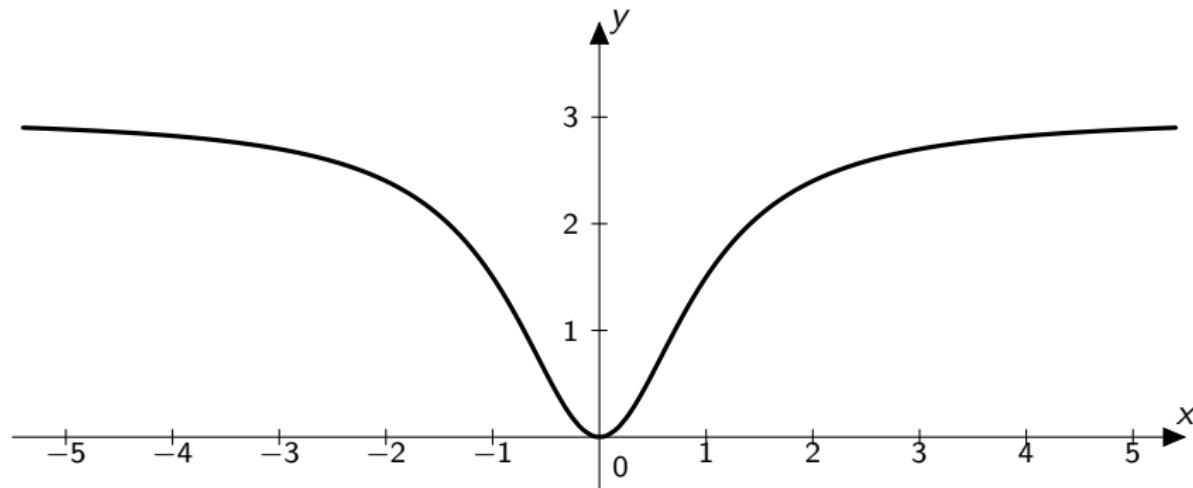


Figura : Gráfico da função f

O que podemos dizer sobre o comportamento de f quando $x \rightarrow \infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$?

Será que $f(x)$ cresce indefinidamente? Ou o comportamento de f seria imprevisível?

Seja f uma função real definida no intervalo (a, ∞) , onde a pode ser um número real ou $a = -\infty$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente é L se, para todo $\varepsilon > 0$ existir um número $N > 0$ tal que

$$\text{se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon$$

neste caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Observação

Pode ser que $L = \infty$ ou que $L = -\infty$, ou seja, podemos ter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

Em ambos os casos não existe o limite.

Analogamente, se f é uma função real definida no intervalo $(-\infty, a)$, onde a pode ser um número real ou $a = \infty$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x decresce indefinidamente é L se, para todo $\varepsilon > 0$ existir um número $N < 0$ tal que

$$\text{se } x < N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon$$

neste caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Observação

Analogamente, pode ser que $L = \infty$ ou que $L = -\infty$, ou seja, podemos ter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

Novamente, em ambos os casos não existe o limite.

Voltamos a função $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$.

x	$3 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1}$
-1	1.5
-2	2.4
-3	2.7
-5	2.8846153846
-10	2.9702970297
-100	2.99970003
-1000	2.999997

x	$3 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1}$
1	1.5
2	2.4
3	2.7
5	2.8846153846
10	2.9702970297
100	2.99970003
1000	2.999997

Nas tabelas acima são apresentados alguns valores de f . Parece que $f(x)$ tende a 3 quando x tende a ∞ e também quando x tende a $-\infty$. Veremos adiante como comprovar tais suspeitas.

Teorema

Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0.$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$

Exemplo (Revisitado)

Agora podemos voltar ao exemplo anterior e provar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1} = 3.$$

Note que

$$\frac{3x^2}{x^2 + 1} = \frac{3}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{1 + 0} = 3$$

Exemplo

Calcule o seguinte limite no infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5}{95x + 17}$$

Note que

$$\frac{x - 5}{95x + 17} = \frac{1 - \frac{5}{x}}{95 + \frac{17}{x}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5}{95x + 17} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x}}{95 + \frac{17}{x}} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 95 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{17}{x}} \\&= \frac{1 - 5.0}{95 + 17.0} = \frac{1}{95}.\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

Observe que

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)}} = \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}}$$

Como $x \rightarrow -\infty$ podemos assumir que $x < 0$,

Assim

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{-x \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}} \\ &= \frac{1 + 0}{-\sqrt{1 - 0}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1}.$$

Observe que

$$\frac{2x^3}{x^2 + 1} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}$$

Note que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^3} \right) = 0 + 0 = 0.$$

Temos que o limite do numerador é 2 e o limite do denominador tende a zero por valores positivos. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \infty.$$