



MAT146 - Cálculo I - Derivada das Inversas Trigonométricas

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira



Vimos anteriormente que as funções trigonométricas não são inversíveis, mas podemos fazer restrições no domínio e/ou contradomínio de maneira a transformá-las em bijeções, ou seja, inversíveis.



Considere a função

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

dada por

$$f(x) = \text{sen } x.$$

Esta função é inversível e sua inversa

$$g : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

que denotaremos por

$$g(x) = \arcsen x.$$



Fazendo $y = g(x)$, devemos encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$. Observe que

$$y = \arcsen x \text{ se, e somente se, } \sen y = x.$$

Utilizando derivação implícita, obtemos

$$\cos y \cdot y' = 1.$$

Devemos observar primeiramente que, pela a igualdade acima, $\cos y \neq 0$.
Daí $y \neq \pm \frac{\pi}{2}$ e consequentemente $x \neq \pm 1$. Voltando à igualdade

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsen x)}.$$



Nosso objetivo agora é efetuar a composição $\cos(\arcsen x)$. Fazendo

$$\alpha = \arcsen x,$$

devemos encontrar $\cos \alpha$. Observe que

$$\alpha = \arcsen x \text{ se, e somente se, } x = \sen \alpha.$$

Daí,

$$x^2 = \sen^2 \alpha$$

$$1 - x^2 = 1 - \sen^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - x^2}$$



Como

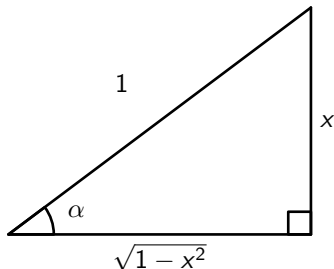
$$\alpha = \arcsen x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),$$

temos $\cos \alpha > 0$ e concluímos que

$$y' = \frac{1}{\cos(\arcsen x)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$



Uma maneira prática de se efetuar a composição apresentada acima é construir um triângulo retângulo com hipotenusa 1 e um ângulo α tal que $\sin \alpha = x$. Pelo Teorema de Pitágoras, encontramos o outro cateto. Agora, basta encontrar $\cos \alpha$ utilizando tal triângulo construído.



$$\begin{aligned}\sin \alpha &= x \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

Note que este procedimento prático se restringe a $\alpha \in (0, \pi/2)$.



Exemplo

Seja $f(x) = \arcsen(x^2)$. Determine $f'(x)$.

Usando a regra da cadeia e sabendo a derivada da função arco seno, obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}.$$



Analogamente ao caso anterior, temos que

$$f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

dada por

$$f(x) = \cos x$$

é inversível e sua inversa

$$g : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

será denotada por

$$g(x) = \arccos x.$$



Fazendo $y = g(x)$, devemos encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$. Note que

$$y = \arccos x \text{ se, e somente se, } \cos y = x.$$

Derivando implicitamente, obtemos

$$-\sin y \cdot y' = 1.$$

Devemos observar primeiramente que, pela a igualdade acima, $\sin y \neq 0$. Daí $y \neq \pm\pi$ e desta forma, $x \neq \pm 1$. Voltando à igualdade

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$



Devemos efetuar a composição $\text{sen}(\arccos x)$. Fazendo $\alpha = \arccos x$, vamos encontrar $\text{sen } \alpha$. Observe que

$$\alpha = \arccos x \text{ se, e somente se, } x = \cos \alpha.$$

Daí,

$$x^2 = \cos^2 \alpha$$

$$1 - x^2 = 1 - \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \alpha$$

$$\text{sen } \alpha = \pm \sqrt{1 - x^2}$$



Como

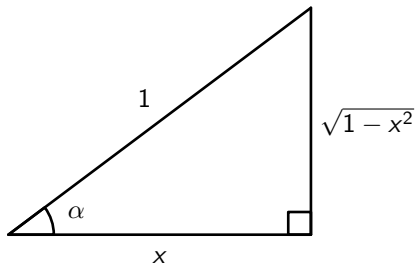
$$\alpha = \arccos x \in (0, \pi),$$

temos $\sin \alpha > 0$ e podemos garantir que

$$y' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$



De maneira análoga ao caso anterior, podemos utilizar novamente um procedimento prático para efetuar a composição apresentada acima. Para isso, devemos construir um triângulo retângulo com hipotenusa 1 e um ângulo α tal que $\cos \alpha = x$. Pelo Teorema de Pitágoras, encontramos o outro cateto. Agora, basta encontrar $\sin \alpha$ utilizando tal triângulo construído.



$$\cos \alpha = x$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - x^2}$$



Exemplo

Derive $f(x) = \arccos(x^2 - 5)$. Pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 - 5)^2}} \cdot 2x \\ &= -\frac{2x}{\sqrt{-x^4 + 10x^2 - 24}} \end{aligned}$$



Agora vamos considerar a função inversível

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Seja

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

a sua inversa e a denotaremos por

$$g(x) = \operatorname{arctg} x.$$



Fazendo $y = g(x)$, devemos encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$. Temos que

$$y = \operatorname{arctg} x \text{ se, e somente se, } \operatorname{tg} y = x.$$

Derivando implicitamente, obtemos

$$\sec^2 y \cdot y' = 1.$$

Assim,

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)}.$$



Devemos efetuar a composição $\sec(\operatorname{arctg} x)$. Fazendo $\alpha = \operatorname{arctg} x$, devemos encontrar $\sec \alpha$. Observe que

$$\alpha = \operatorname{arctg} x \text{ se, e somente se, } x = \operatorname{tg} \alpha.$$

Daí,

$$x^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$\sec^2 \alpha = x^2 + 1$$

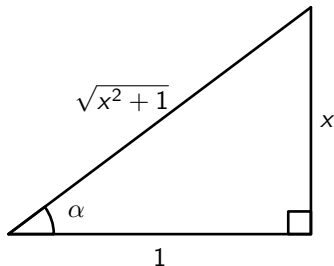


Assim,

$$y' = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\sec^2 \alpha} = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Neste caso, o método prático consiste em construir um triângulo retângulo com um cateto medindo 1 e um ângulo α tal que $\operatorname{tg} \alpha = x$. Pelo Teorema de Pitágoras, encontramos o outro cateto. Agora, basta encontrar $\sec \alpha$ utilizando tal triângulo construído.



$$\operatorname{tg} \alpha = x$$

$$\sec \alpha = \sqrt{x^2 + 1}$$



Exemplo

Derive $f(x) = \arctg\left(\frac{1}{x+1}\right)$. Para derivar esta função utilizamos a regra da cadeia e a regra de derivação do quociente. Desta maneira,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x+1}\right)' \\
 &= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + 1} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} \\
 &= -\frac{1}{x^2 + 2x + 2}
 \end{aligned}$$



A função

$$f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = \cotg x$$

é inversível e sua inversa

$$g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

é denotada por

$$g(x) = \operatorname{arccot} x.$$



Fazendo $y = g(x)$, devemos encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$. Temos

$$y = \operatorname{arccot} x \text{ se, e somente se, } \cotg y = x.$$

Derivando implicitamente,

$$-\operatorname{cosec}^2 y \cdot y' = 1.$$

Assim,

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arccot} x)}.$$



Devemos efetuar a composição $\operatorname{cosec}(\operatorname{arccot} x)$. Fazendo $\alpha = \operatorname{arccot} x$, devemos encontrar $\operatorname{cosec} \alpha$. Observe que

$$\alpha = \operatorname{arccot} x \text{ se, e somente se, } x = \cotg \alpha.$$

Daí,

$$x^2 = \cotg^2 \alpha$$

$$1 + x^2 = 1 + \cotg^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = x^2 + 1$$



Assim,

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arccot} x)} \\&= -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} \\&= -\frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$



Exemplo

Determine $f'(x)$ para $f(x) = x^3 \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{3}x \right)$. Pela regra da cadeia e regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) + x^3 \frac{-1}{1 + \left(\frac{x}{3} \right)^2} \cdot \frac{1}{3} \\
 &= 3x^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) - \frac{x^3}{3 \left(1 + \frac{x^2}{9} \right)} \\
 &= 3x^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) - \frac{3x^3}{9 + x^2}.
 \end{aligned}$$



A função

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

dada por

$$f(x) = \sec x$$

é inversível e sua inversa

$$g : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

é denotada por

$$g(x) = \operatorname{arcsec} x.$$



Se $y = g(x)$, devemos encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$. Assim,

$$y = \operatorname{arcsec} x \text{ se, e somente se, } \sec y = x.$$

Derivando implicitamente,

$$\sec y \cdot \operatorname{tg} y \cdot y' = 1.$$

Daí, $\operatorname{tg} y \neq 0$, ou seja, $y \neq 0$ e $y \neq \pi$. Logo,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sec y \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{1}{\sec(\operatorname{arcsec} x) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)} \\ &= \frac{1}{x \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)}. \end{aligned}$$



Devemos efetuar a composição $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)$. Fazendo $\alpha = \operatorname{arcsec} x$, devemos encontrar $\operatorname{tg} \alpha$. Observe que

$$\alpha = \operatorname{arcsec} x \text{ se, e somente se, } x = \sec \alpha.$$

Daí,

$$x^2 = \sec^2 \alpha$$

$$x^2 - 1 = \sec^2 \alpha - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$



Assim,

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{x \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)} \\
 &= \frac{1}{x \cdot \operatorname{tg} \alpha} \\
 &= \frac{1}{\pm x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1.
 \end{aligned}$$



Exemplo

Encontre $f'(x)$, onde $f(x) = \operatorname{arcsec}(3e^x)$. Utilizaremos a regra da cadeia. Assim,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{|3e^x| \sqrt{(3e^x)^2 - 1}} 3e^x \\
 &= \frac{e^x}{e^x \sqrt{9e^{2x} - 1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{9e^{2x} - 1}}
 \end{aligned}$$



A função

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

dada por

$$f(x) = \operatorname{cossec} x$$

é inversível e sua inversa

$$g : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

é denotada por

$$g(x) = \operatorname{arccossec} x.$$



Se $y = g(x)$, devemos encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$. Daí,

$$y = \operatorname{arccossec} x \text{ se, e somente se, } \operatorname{cossec} y = x.$$

Derivando implicitamente,

$$-\operatorname{cossec} y \cdot \cotg y \cdot y' = 1.$$

Assim, $\cotg y \neq 0$, ou seja, $y \neq \pm \frac{\pi}{2}$.



Daí,

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{1}{\operatorname{cosec} y \cdot \cotg y} \\
 &= -\frac{1}{\operatorname{cosec}(\operatorname{arccosec} x) \cdot \cotg(\operatorname{arccosec} x)} \\
 &= \frac{1}{x \cdot \cotg(\operatorname{arccosec} x)}.
 \end{aligned}$$



Devemos efetuar a composição $\cotg(\operatorname{arccossec} x)$. Fazendo $\alpha = \operatorname{arccossec} x$, devemos encontrar $\cotg \alpha$. Observe que

$$\alpha = \operatorname{arccossec} x \text{ se, e somente se, } x = \operatorname{cossec} \alpha.$$

Daí,

$$x^2 = \operatorname{cossec}^2 \alpha$$

$$x^2 - 1 = \operatorname{cossec}^2 \alpha - 1 = \cotg^2 \alpha$$

$$\cotg \alpha = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$



Assim,

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{1}{x \cdot \operatorname{cotg}(\operatorname{arccossec} x)} \\
 &= -\frac{1}{x \cdot \operatorname{cotg} \alpha} \\
 &= -\frac{1}{\pm x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= -\frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1.
 \end{aligned}$$



Exemplo

Determine $f'(x)$, onde $f(x) = x \operatorname{arccossec} \frac{1}{x}$. Utilizaremos a regra do produto e a regra da cadeia.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \operatorname{arccossec} \frac{1}{x} + x \left(-\frac{1}{\left| \frac{1}{x} \right| \sqrt{\left(\frac{1}{x} \right)^2 - 1}} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\
 &= \operatorname{arccossec} \frac{1}{x} + \frac{x}{\left| \frac{1}{x} \right| \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^2} \\
 &= \operatorname{arccossec} \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}
 \end{aligned}$$