MAT146 - Cálculo I - Integral Definida

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Somas Finitas

Neste ponto introduzimos a noção de **somatória**. Quando queremos expressar uma soma com muitos termos, de forma compacta, usamos a seguinte notação

$$\sum_{i=n}^{m} a_i = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{m-1} + a_m,$$

onde

m é chamado limite superior da somatória

n é chamado limite inferior da somatória

i é chamado índice da somatória (pode-se usar qualquer letra)

$\mathbf{a}_i$ é chamado fórmula para o $i-$ésimo termo.

Exemplos

Exemplo (1)

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Exemplo (2)

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{k}{k^2+1} = \frac{-2}{5} + \frac{-1}{2} + \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

Propriedades Algébricas

Teorema (1)

Seja k uma constante. Então

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} k = m.k$

(b) $\displaystyle\sum_{i=n}^{m}(ka_i + b_i) = k\sum_{i=n}^{m} a_i + \sum_{i=n}^{m} b_i$

(c) $\displaystyle\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n+j}^{m+j} a_{i-j}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(a_i - a_{i-1}) = a_m - a_0.$

Demonstração: Faremos somente a prova do item 4.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}(a_i - a_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1}(a_i + a_m) - \sum_{i=1-1}^{m-1}\left(a_{[(i+1)-1]}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} a_i + a_m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} a_i + a_m - \left(a_0 + \sum_{i=1}^{m-1} a_i\right) \\
&= a_m - a_0.
\end{aligned}$$

■

Teorema (2)

Seja n um inteiro positivo, então

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$.

Demonstração: Faremos somente a prova do item (a).
Note que

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1.$$

Somando os primeiros termos de cada igualdade obtemos

$$2\sum_{i=1}^{n} i.$$

Somando os segundos termos de cada igualdade obtemos

$$(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \quad \text{soma de } n \text{ parcelas.}$$

Daí

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1).$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\square$

Medida de Área

O nosso objetivo agora é definir a medida da área de uma região plana, como a figura R dada abaixo. A palavra medida refere-se a um número associado a área, sem unidades. Deixamos a palavra medição para expressar um número associado a área usando unidades (cm^2, m^2, etc). Considere uma região planar R limitada pelo eixo-x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e por uma função contínua f, onde $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$ (veja figura abaixo).

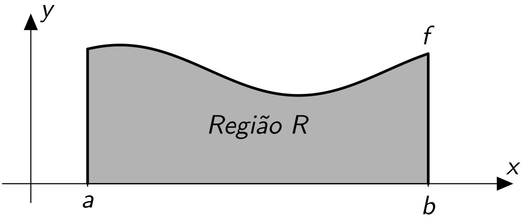


Figura :

Para atribuir um número a área da região R fazemos o seguinte:

Primeiramente particionamos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. Em termos mais precisos, uma **partição** do intervalo $[a, b]$, em n subintervalos, é um conjunto

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}.$$

onde

$$x_0 = a, \quad x_n = b$$

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n.$$

Os pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ não são necessariamente equidistantes. Obtemos assim n subintervalos, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$.

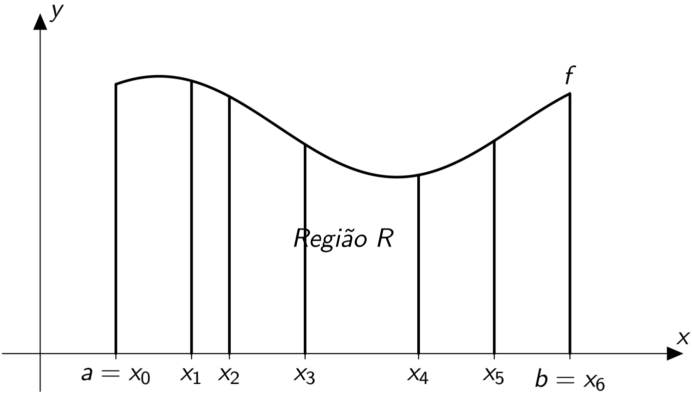


Figura : Partição do intervalo $[a, b]$ em seis subintervalos.

Denotamos por

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

o comprimento do i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A **norma** da partição P é definida como o maior de todos os comprimentos dos subintervalo, ou seja,

$$||P|| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta_i x\}.$$

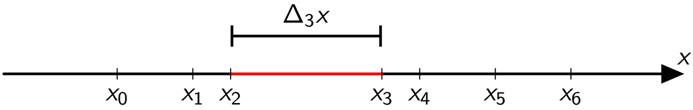


Figura : Note que, na partição da figura acima, $||P|| = \Delta_3 x$.

Voltando a definição da área da região R, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais, ou seja, a norma da partição será

$$||P|| = \frac{b-a}{n},$$

que denotamos no momento por Δx. Como f é contínua em $[a, b]$, o Teorema do Valor Extremo (de Weirstrass) nos diz que f possui um mínimo absoluto em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Denotamos o ponto de mínimo por c_i, assim $f(c_i)$ será o valor mínimo em $[x_{i-1}, x_i]$. Consideremos agora n retângulos sob o gráfico de f, cada um com comprimento Δx e altura $f(c_i)$ (veja na figura abaixo).

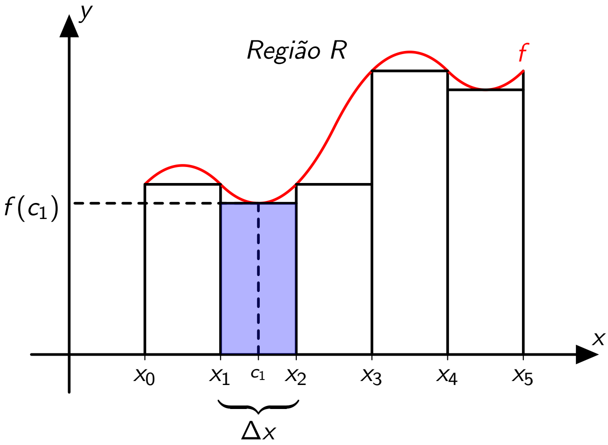


Figura :

Coloque

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.$$

Note que S_n é a soma das áreas dos n retângulos sob o gráfico de f. Note que a área da região R é menor (ou no máximo igual) que S_n, ou seja,

$$A(R) \geq S_n.$$

Quando aumentamos o número de retângulos, a diferença $A(R) - S_n$ diminui. Observe as figuras abaixo.

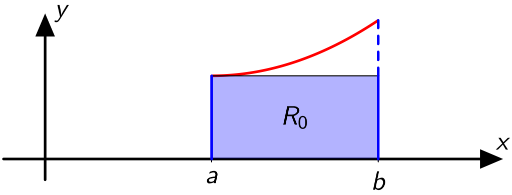


Figura : Observe a diferença da área da região R menos a área do retângulo R_0.

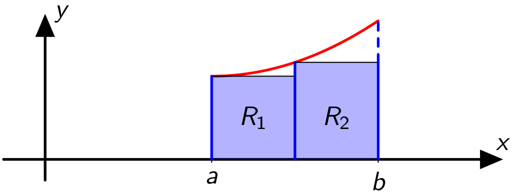


Figura : Observe a área da região R menos a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2.

Definição de área

Definição (1)

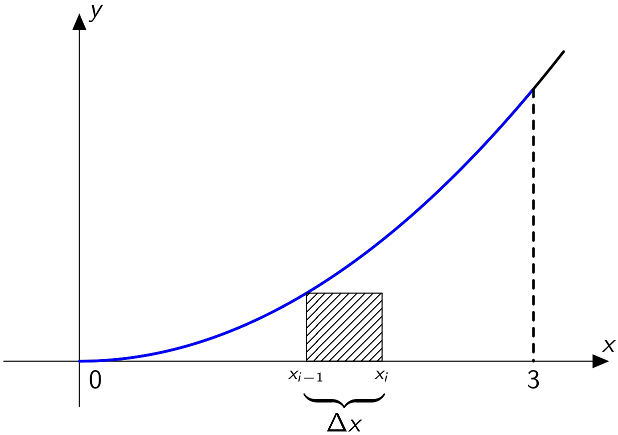
Suponha que a função f seja contínua no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja R a região limitada pelo eixo-x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pela curva $y = f(x)$. Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, usando a notação acima, a medida da área da região R será dada por

$$A(R) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x.$$

A definição acima diz que, quanto maior for a quantidade de retângulos inscritos na região R, menor será a diferença entre a área da região R e a soma das áreas dos retângulos.

Exemplo (3)

Encontre a área da região delimitada pela curva $y = x^2$, *pelas retas* $x = 0$, $x = 3$ *e pelo eixo-*x. *Veja a figura abaixo.*



Solução: Note que

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}.$$

A função f é crescente em $[0,3]$, portanto, o valor mínimo absoluto de f em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, é $f(x_{i-1})$. Note que $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$, logo $f(x_{i-1}) = ((i-1)\Delta x)^2$, então

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ((i-1)\Delta x)^2 \Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 (\Delta x)^3. \end{aligned}$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2(\Delta x)^3 &= \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2(\frac{3}{n})^3 \\
&= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \\
&= \frac{27}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right) \\
&= \frac{27}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6}\right) \\
&= \frac{9}{2}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right).
\end{aligned}
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right) \\
&= \frac{9}{2}(2-0+0) = 9.
\end{aligned}
$$

Portanto, a área da região R é 9 unidades quadradas.

A Integral definida

Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição desse intervalo. Note que não exigimos que os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, associados a partição P, tenham o mesmo comprimento. Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escolhemos um ponto ξ_i, ou seja, $\xi_1 \in [x_0, x_1], \cdots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Assim, obtemos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x.$$

Esta soma é chamada **Soma de Riemann**, devido ao matemático Georg F. B. Riemann (1826-1866).

A interpretação geométrica da soma de Riemann é a soma das medidas das áreas dos retângulos que estão acima do eixo-x com os negativos das medidas das áreas dos retângulos que estão baixo do eixo-x. Veja figura abaixo.

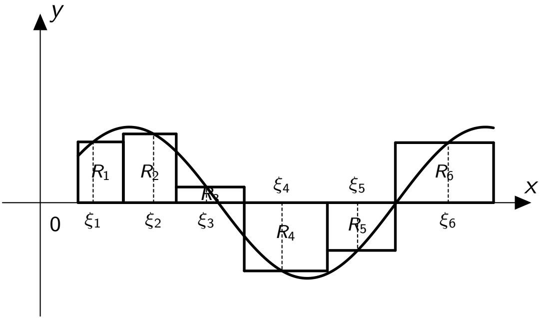


Figura : A soma de Riemann aqui seria $R_1 + R_2 + R_3 - R_4 - R_5 + R_6$.

Definição (2)

Seja f uma função real tal que o intervalo $[a, b]$ está contido no domínio de f. A função f é **integrável** *em $[a, b]$ se satisfazer a condição: existe um número L tal que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que, para toda partição P para a qual $||P|| < \delta$, com $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$ tem-se*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L \right| < \varepsilon.$$

Neste caso escrevemos

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = L. \quad (1)$$

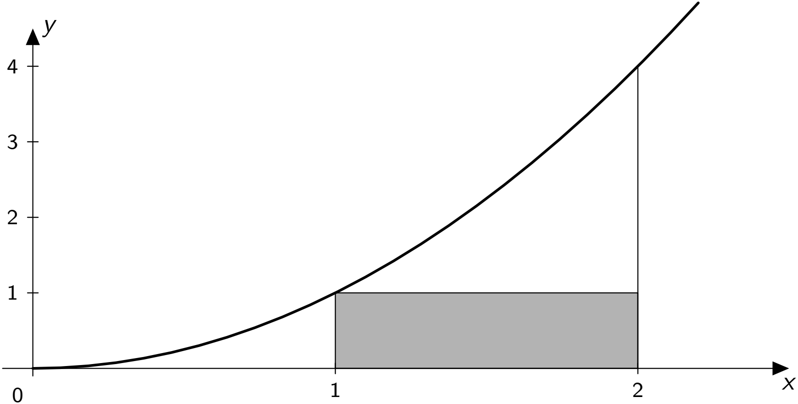


Figura : Soma Inferior

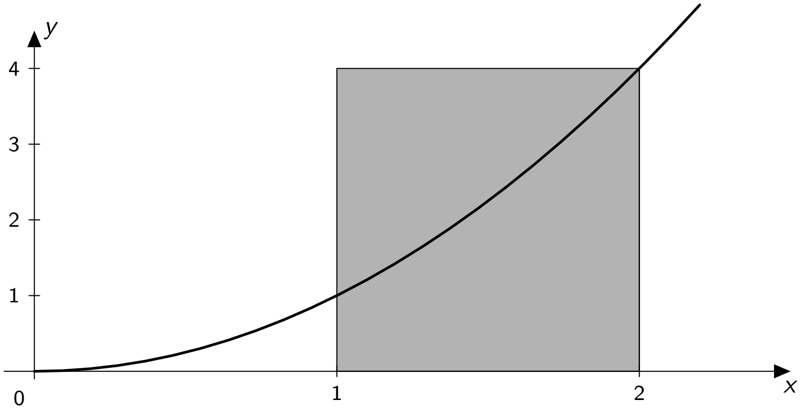


Figura : Soma Superior

Observação

Na definição acima, existe uma infinidade de escolhas para os números ξ_i. Este aspecto torna diferente o processo de limite em (1). De qualquer forma, o limite é único, o que pode ser mostrado de maneira similar ao que foi feito no caso de limites da forma $\lim_{x \to a} f(x)$.

Definição (3)

Seja f uma função real tal que o intervalo $[a, b]$ está contido no domínio de f. A **integral definida** *de f de a até b, denotada por* $\int_a^b f(x)dx$ *é dada por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x,$$

se o limite existir.

Notação

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\textit{integrando}} \; dx$$

a limite inferior de integração

b limite superior de integração

Funções integráveis e não integráveis

Nem todas as funções reais definidas em um intervalo fechado $[a, b]$ são integráveis. Como um exemplo podemos citar a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Observe que a função f é descontínua em $x = 0$, além disso, note que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty.$$

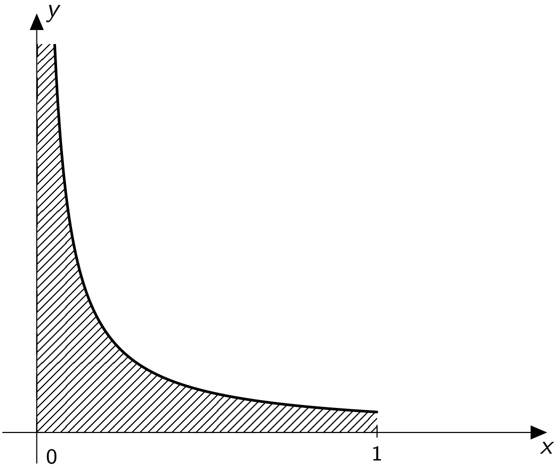


Figura : Pode-se mostrar que a área sob o gráfico da função f é infinita, logo não existe a integral.

O seguinte teorema estabelece uma condição suficiente de integrabilidade.

Teorema (3)

Se uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for contínua, então ela é integrável.*

Demonstração: A demonstração do teorema acima foge ao escopo dessas notas.

Voltando ao cálculo de áreas

Seja f uma função real e contínua em $[a, b]$. A definição (1), que define a área de uma região plana, estabelece que

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.$$

Note que o limite acima é um caso particular do limite na definição de integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x.$$

De fato, basta notar que os c_i são os pontos onde f atinge o mínimo absoluto no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Já os ξ_i são números quaisquer nesse mesmo intervalo.

No caso da definição (1), temos que todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tem o mesmo tamanho, ou seja, $\Delta_i x = ||P||$, para todo $i = 1, \cdots, n$, onde $||P||$ é norma da partição P associada ao intervalo $[a, b]$. Coloque

$$\Delta x = ||P||.$$

Temos que,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}.$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} n = \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x. \end{aligned} \tag{2}$$

Como f é contínua, o limite (2), dado acima, vale para qualquer $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, portanto, vale em particular quando $\xi_i = c_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Isto nos leva a seguinte definição

Definição (4)

Suponha que a função f seja contínua no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja R a região limitada pelo eixo-x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pela curva $y = f(x)$. Então, a medida da área da região R será dada por

$$A(R) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx.$$

Observação

Quando $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$, *a integral definida* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *pode ser interpretada geometricamente como a medida da área da região* R.

Exemplo (4)

Encontre o valor da integral definida $\int_1^3 x^2 dx$.

Solução:
Note que f *é contínua, logo a integral existe. Consideremos uma partição regular do intervalo* $[1,3]$ *em* n *partes, ou seja,* $\Delta x = \frac{2}{n}$. *Escolhamos os* ξ_i*'s como os extremos superiores dos subintervalos, isto é,*

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{n}, \quad \xi_2 = 1 + 2.\frac{2}{n}, \quad \cdots, \quad \xi_n = 1 + n. - \frac{2}{n}.$$

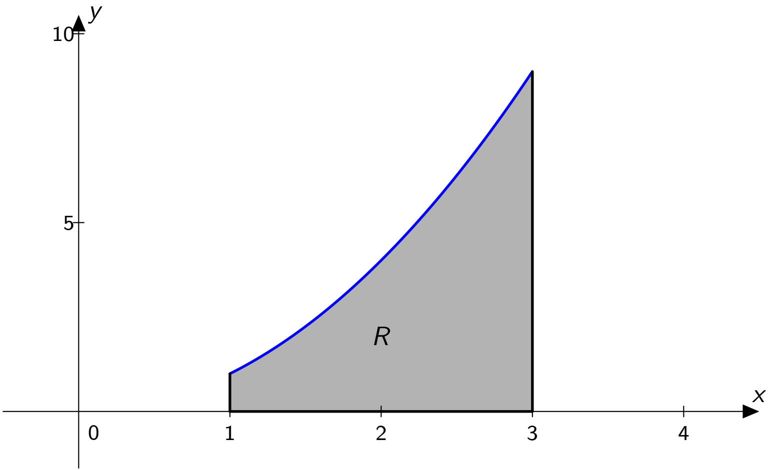
Assim

$$f(\xi_i) = \left(1 + i.\frac{2}{n}\right)^2 = \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2.$$

Então

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n^2 + 4ni + 4i^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 n + 4n\frac{n(n+1)}{2} + 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left[3n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2+12n+4}{3n^2} \right] = 6 + 0 + \frac{8}{3} + 0 + 0 = \frac{26}{3}.
\end{aligned}
$$

Geometricamente, como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1,3]$, o resultado acima diz que a região R, mostrada na figura abaixo, tem $\dfrac{26}{3}$ unidades quadradas de área.



Propriedades da integral definida

Apresentaremos a seguir, algumas propriedades da integral definida, que facilitam o uso da mesma.

Teorema (4)

Sejam f e g funções integráveis no intervalo $[a, b]$ e k uma constante qualquer. Então

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(b) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_a^b (kf(x) \pm g(x))dx = k\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

Teorema (5)

Sejam f e g funções integráveis no intervalo $[a, b]$. Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema (6)

Seja f integrável no intervalo $[a, b]$. Se $c, d, e \in [a, b]$ então

$$\int_c^e f(x)dx = \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx,$$

não importando a ordem dos números c, d e e.

Teorema (6)

Seja f contínua no intervalo $[a, b]$. Se m e M forem, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, isto é,

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b].$$

Então,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Teorema (7)

Seja k uma constante qualquer. Então

$$\int_a^b k dx = k(b-a).$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b k dx &= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \overbrace{f(\xi_i)}^{k} \Delta_i x = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} k \Delta_i x \\
&= k \left(\lim_{||P||\to 0} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x}^{b-a} \right) = k \left(\lim_{||P||\to 0} (b-a) \right) = k(b-a).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplos

Exemplo (5)

Calcule

$$\int_{-1}^{2} 5dx.$$

Solução:
Pelo Teorema (7) *temos*

$$\int_{-1}^{2} 5dx = 5(2-(-1)) = 5.3 = 15$$

Exemplo (6)

Suponha que $\int_4^{-3} x dx = \frac{7}{2}$. *Calcule*

$$\int_{-3}^{4} (2x - 7) dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{4} (2x + 7) dx &= \int_{-3}^{4} 2x dx + \int_{-3}^{4} 7 dx \\ &= 2 \int_{-3}^{4} x dx + 7 \int_{-3}^{4} dx \\ &= 2.\frac{-7}{2} + 7(4 - (-3)) = -7 + 49 = 42. \end{aligned}$$

Exemplo (7)

Encontre um intervalo fechado que contenha o valor de

$$\int_{-2}^{2}(x^3 - 3x + 7)dx.$$

Solução:
O integrando é $f(x) = x^3 - 3x + 7$. *Note que os pontos críticos de* $f'(x) = 3x^2 - 3$, *são* $x = -1$ *e* $x = 1$. *A função* f *tem um valor máximo relativo em* $x = -1$ *e um valor mínimo relativo em* $x = 1$ *(verifique!). Calculamos agora os valore de* f *nos extremos do intervalo* $[-2, 2]$ *e nos números críticos.*

$$f(-2) = 5, \quad f(2) = 9, \quad f(-1) = 9, \quad f(1) = 5.$$

Segue que f possui valor máximo absoluto em $x = -1$ e valor mínimo absoluto em $x = 1$, em relação ao intervalo $[-2, 2]$. Pelo Teorema (6), *tem-se*

$$5(2-(-2)) \leq \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x + 7)dx \leq 9(2-(-2))$$

$$\Downarrow$$

$$20 \leq \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x + 7)dx \leq 36.$$

Portanto, o valor da integral definida acima, está contida no intervalo fechado $[20, 36]$.

Exemplo (8)

Mostre que o valor de $\int_0^1 \sqrt{1+cos(x)}dx$ *é menor que* $\sqrt{2}$.

Solução:

Note que $cos(x) \leq 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *portanto,* $\sqrt{1+cos(x)} \leq \sqrt{2}$. *Mais ainda, o valor máximo de* $\sqrt{1+cos(x)}$ *em* $[0,1]$ *é* $\sqrt{2}$. *Pelo Teorema* (6), *temos que*

$$\int_0^1 \sqrt{1+cos(x)}dx \leq \sqrt{2}(1-0) = \sqrt{2}.$$