

# MAT146 - Cálculo I - Derivação Implícita

Alexandre Miranda Alves  
Anderson Tiago da Silva  
Edson José Teixeira

Considere o seguinte conjunto

$$R = \{(x, y); y = 2x + 1\}.$$

O conjunto  $R$  representa a reta definida pela equação  $y = 2x + 1$ . Note que esta equação define uma função explicitamente. De fato, define a função  $f(x) = 2x + 1$ .

Mas, nem todas as funções podem ser definidas explicitamente, como pode ser visto no exemplo abaixo.

## Exemplo

Seja

$$A = \{(x, y); xy + y^2 + 2x^3 = 0\}.$$

*Note que não podemos resolver  $y$  em função de  $x$  e nem  $x$  em função de  $y$ . Além disso, podem existir ou não, funções  $f$  que satisfaçam a equação*

$$xy + y^2 + 2x^3 = 0. \quad (1)$$

## Exemplo

*Note que*

$$x^2 + y^2 = -1$$

*não define nenhuma função a valores reais que satisfaça a equação, pois  $x^2 + y^2 > 0$ .*

Uma equação pode definir mais de uma função  $f$  que satisfaça a mesma.

### Exemplo

Considere a equação

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Note que esta equação define duas funções, a saber

$$f_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

onde ambas,  $f_1$  e  $f_2$ , satisfazem a equação acima.

Assim, podemos ter equações que não definam nenhuma função, definam exatamente uma ou definam mais de uma função.

Voltamos agora a atenção novamente para a equação (1). Como vimos, (1) não pode ser resolvida explicitamente em função de  $x$ . Mas pode existir uma função (ou mais de uma)  $f$  que satisfaça (1), isto é, que a equação

$$xf(x) + f(x)^2 + 2x^3 = 0$$

seja satisfeita, no sentido que a igualdade seja válida para todo  $x$  no domínio de  $f$ . Neste caso, a função  $f$  está definida **implicitamente** pela equação (1).

Se  $f$  é derivável e definida implicitamente por uma equação dada, mesmo sem explicitar  $f$ , é possível (caso exista) encontrar sua derivada. O método que usaremos para este fim é chamado **derivação implícita**.

## Exemplo

Suponha que  $f$  é derivável e definida pela equação (1), isto é,  $y = f(x)$  satisfaça a equação (1), ou seja,

$$xf(x) + f(x)^2 + 2x^3 = 0.$$

Aplicando as regras de derivação para a equação

$$xy + y^2 + 2x^3 = 0$$

obtemos

$$\frac{d}{dx}(xy + y^2 + 2x^3) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) + 2\frac{d}{dx}(x^3) = 0.$$

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 6x^2 = 0$$

$$y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 6x^2 = 0.$$

Daí,

$$(x + 2y) \frac{dy}{dx} = -y - 6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - 6x^2}{x + 2y},$$

para todo ponto  $(x, y)$ , tal que  $x \neq -2y$



## Exemplo

*Considere novamente a equação*

$$x^2 + y^2 = 4. \quad (2)$$

*Neste caso temos que*

$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}.$$

*Assim, a equação (2) define exatamente duas funções*

$$f_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}.$$

Derivando implicitamente a equação (2) obtemos

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Agora vamos derivar cada uma das funções  $f_1$  e  $f_2$

$$f_1(x) = (4 - x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_1'(x) = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f_2(x) = -(4 - x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_2'(x) = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Note que, para  $y = f_1(x)$ , onde  $f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$ , temos que

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

e para  $y = f_2(x)$ , onde  $f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ , temos que

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

ou seja, as derivadas encontradas das funções  $f_1$  e  $f_2$  estão de acordo com a derivada encontrada da equação (2) por derivação implícita.

## Exemplo

Considere a equação

$$2xy^2 - x^2 = 1.$$

Supondo que esta defina uma função  $f$  derivável de  $x$ . Encontre uma equação da reta tangente à curva  $y = f(x)$ , no ponto  $(1, 1)$ .

Derivando implicitamente, obtemos

$$2y^2 + 4xy \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{2xy}.$$

No ponto  $(1, 1)$  temos que

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1)} = \frac{1-1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Usando o ponto  $(1, 1)$  e a derivada, obtemos

$$y - 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 1.$$

Veja abaixo o esboço da curva e da reta tangente.

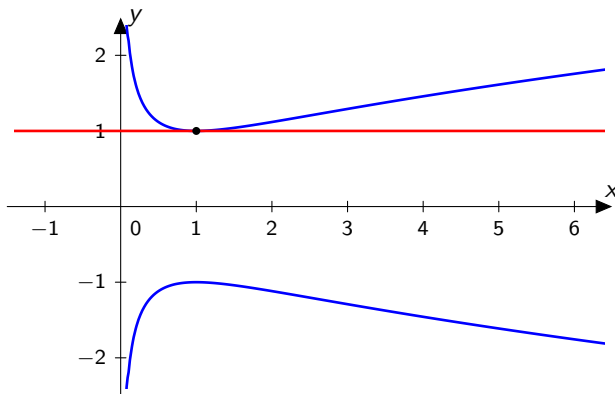


Figura : Gráfico da curva  $y = f(x)$  e da reta tangente à curva no ponto  $(1, 1)$ .

## Exemplo

Considerando a equação

$$x \cos(y) + 3xy = 0.$$

Suponha que esta define uma função derivável de  $x$ . Calcule  $\frac{dy}{dx}$ .

Derivando implicitamente

$$\frac{d}{dx}(x \cos(y) + 3xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\cos(y) + x(-\sin(y))\frac{dy}{dx} + 3y + 3x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y - \cos(y)}{3x - x \sin(y)}.$$

## Exemplo

Considere a seguinte equação

$$3x^2y + y^2 = 2.$$

Calcule  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

Neste caso devemos usar derivação implícita em relação a  $x$ .

$$\frac{d}{dx}(3x^2y + y^2) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$6xy + 3x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6xy}{2y + 3x^2}$$

Para encontrar  $\frac{d^2y}{dx^2}$  devemos calcular a derivada do quociente  $\frac{-6xy}{2y + 3x^2}$ , lembrando que  $y$  é uma função de  $x$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(-6y - 6x \frac{dy}{dx})(2y + 3x^2) - (2 \frac{dy}{dx} + 6x)(-6xy)}{(2y + 3x^2)^2} \\ &= \frac{-12y - 12xy \frac{dy}{dx} - 18x^2y - 18x^3 \frac{dy}{dx} + 12xy \frac{dy}{dx} + 36x^2y}{(2y + 3x^2)^2} \\ &= \frac{-12y + 18x^2y - 18x^3 \frac{dy}{dx}}{(2y + 3x^2)^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-12y + 18x^2y - 18x^3 \frac{dy}{dx}}{(2y + 3x^2)^2}.$$

Substituindo o valor de  $\frac{dy}{dx}$  nesta última equação obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-12y + 18x^2y - 18x^3 \frac{-6xy}{2y + 3x^2}}{(2y + 3x^2)^2} \\ &= \frac{-12y + 18x^2y + \frac{108x^4y}{2y + 3x^2}}{(2y + 3x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-24y^2 + 36x^2y^2 - 36x^2y + 54x^4y + 108x^4y}{(2y + 3x^2)(2y + 3x^2)^2} \\ &= \frac{-24y^2 + 36x^2y^2 - 36x^2y + 162x^4y}{(2y + 3x^2)^3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-24y^2 + 36x^2y^2 - 36x^2y + 162x^4y}{(2y + 3x^2)^3}.$$

Note que  $(2y + 3x^2)y = 2$ , então para  $y \neq 0$ , temos que  $2y + 3x^2 = \frac{2}{y}$ , substituindo na equação acima,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-12(2y^2 + 3x^2y^2) - 36x^2y + 162x^4y}{\left(\frac{2}{y}\right)^3} \\
 &= \frac{-12(2) - 36x^2y + 162x^4y}{\frac{8}{y^3}} \\
 &= \frac{-12y^3 - 18x^2y^4 + 81x^4y^4}{4}.
 \end{aligned}$$