MAT146 - Cálculo I - Derivada da Função Inversa

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Vimos anteriormente que dada uma função f, nem sempre esta é bijetora, ou seja, nem sempre podemos falar na função inversa. Porém, podemos fazer restrições no domínio e/ou no contradomínio de maneira torná-la bijetora e consequentemente inversível. Veremos que sob certas condições é possível calcular a derivada da inversa, mesmo sem explicitá-la.

Teorema (Teorema de Derivação da Função Inversa)

Seja f uma função inversível e derivável em um ponto x_0 do seu domínio, com $f'(x_0) \neq 0$. Então f^{-1} será derivável em $y_0 = f(x_0)$ e além disso

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'((f^{-1})(y_0))}.$$

A demonstração deste resultado será omitida, pois foge do escopo deste texto.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) = 2x + 1.$$

A função f *é derivável, inversível e sua inversa* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}. \quad \textbf{Verifique!!!}$$

Neste caso é desnecessário aplicar o resultado, uma vez que conseguimos explicitar a inversa de f *e sabemos derivá-la pelas regras apresentadas anteriormente.*

Como $f'(x) = 2$, pelo Teorema de Derivação da Função Inversa, obtemos

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2},$$

como já era esperado.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função definida por*

$$f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4.$$

Esta função é bijetora. Veremos posteriormente. Neste caso, não conseguimos explicitar a sua inversa, mas pelo Teorema de Derivação da Função Inversa, somos capazes de encontrar a derivada da inversa em qualquer ponto $f(x_0)$*.*

Sabemos que o ponto $(1,4)$ é um ponto sobre o gráfico de f. Desta forma, o ponto $(4,1)$ é um ponto sobre o gráfico de f^{-1}. Calcularemos $(f^{-1})'(4)$ utilizando teorema anterior. De fato,

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)}.$$

Desta forma, precisamos apenas conhecer $f'(1)$, que é facilmente calculado.

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 2.$$

Daí,

$$f'(1) = 22.$$

Portanto

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{22}.$$