MAT146 - Cálculo I - Integração por Substituição

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Muitas antiderivadas não podem ser encontradas diretamente. Assim, será necessário o uso de técnicas que podem ser usadas no cálculo de tais antiderivadas.

Para calcular a derivada da função

$$f(x) = \frac{1}{3}(1 + x^4)^3,$$

aplicamos a regra da cadeia e obtemos

$$f^{'}(x) = (1 + x^4)^2 \cdot 4x^3.$$

Suponhamos então que queiramos antidiferenciar a função

$$h(x) = (1 + x^4)^2 \cdot 4x^3.$$

Precisamos então calcular

$$\int (1 + x^4)^2 \cdot 4x^3 dx.$$

Consideremos assim $g(x) = (1 + x^4)$. Logo, $g^{'}(x)dx = 4x^3 dx$.

Portanto,

$$\int h(x)dx = \int (1 + x^4)^2 \cdot 4x^3 dx = \int [g(x)]^2 g^{'}(x) dx.$$

Como

$$\int h(x)dx = f(x) + C,$$

segue que,

$$\int [g(x)]^2 g^{'}(x) dx = \frac{1}{3}[g(x)]^3 + C.$$

Observe agora que se escrevermos $u = g(x)$, então $du = g^{'}(x)dx$ e como ja vimos anteriormente

$$\int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C.$$

Isso motiva o seguinte teorema, que é análogo à regra da cadeia para derivada, que é chamado de regra da cadeia para antidiferenciação, ou método da substituição.

Teorema

Seja g uma função derivável e seja I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então

$$\int f(g(x))[g^{'}(x)dx] = F(g(x)) + C.$$

Demonstração: Por hipótese, $F^{'}(g(x)) = f(g(x))$. Pela regra da cadeia,

$$[F(g(x))]^{'} = F^{'}(g(x))g^{'}(x).$$

Logo,

$$[F(g(x))]^{'} = f(g(x))g^{'}(x).$$

Portanto,

$$\int f(g(x))g^{'}(x) = F(g(x)) + C.$$

$\blacksquare$

Como caso particular do teorema anterior, temos o seguinte teorema, que generaliza o exemplo visto inicialmente.

Teorema

Se g for uma função derivável e se n for um número racional,

$$\int [g(x)]^n [g^{'}(x)dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$$

Exemplo

Determine a integral

$$\int (x^5 + 3x)^3 (5x^4 + 3)dx.$$

Solução: Faça $g(x) = (x^5 + 3x)$, então $g^{'}(x) = 5x^4 + 3$. Pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned} \int [g(x)]^3 [g^{'}(x)dx] &= \frac{[g(x)]^{3+1}}{3+1} + C \\ &= \frac{[x^5 + 3x]^4}{4} + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo

Determine $\int \sqrt{5x+2}dx.$

Solução: Podemos escrever a integral acima como

$$\int (5x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Observe que se $g(x) = 5x+2$, então $g^{'}(x)dx = 5dx$. Logo, precisamos que este fator apareça na integral para aplicarmos o último teorema. Podemos reescrever a integral como

$$\begin{aligned} \int (5x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx &= \int (5x+2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}\cdot 5dx \\ &= \frac{1}{5}\int (5x+2)^{\frac{1}{2}}5dx. \end{aligned}$$

■

Assim,

$$\begin{aligned}
\int (5x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx &= \frac{1}{5}\,\frac{[5x+2]^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \\
&= \frac{1}{5}\,\frac{[5x+2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{3[5x+2]^{\frac{3}{2}}}{15} + C.
\end{aligned}$$

Agora iremos usar substituições para resolver integrais e formalizaremos este método com o seguinte teorema:

Teorema

Se $u = g(x)$ *for uma função derivável cuja imagem é um intervalo* I *(*$Im(g) = I$*) e* f *for contínua em* I, *então*

$$\int f(g(x))g^{'}(x)dx = \int f(u)du.$$

Demonstração: Se $F(x)$ for uma primitive de $f(x)$, então $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)).g^{'}(x)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F(g(x)) &= F^{'}(g(x)).g^{'}(x) \\ &= f(g(x)).g^{'}(x). \end{aligned}$$

■

Se fizermos a substituição $u = g(x)$, então

$$\begin{aligned}
\int f(g(x))g^{'}(x)dx &= \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx \\
&= F(g(x)) + C \\
&= F(u) + C \\
&= \int F^{'}(u)du \\
&= \int f(u)du.
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int \sec^2(5t+1).5dt.$

Solução: Seja $u = 5t + 1$. Logo, $du = 5dt$.
Portanto,

$$\begin{aligned} \sec^2(5t+1).5dt &= \int \sec^2 u du \\ &= \operatorname{tg} u + C \\ &= \operatorname{tg}(5t+1) + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo

Determine $\int \text{sen}(3\theta + 5)d\theta$.

Solução: Seja $u = 3\theta + 5$. Logo $du = 3d\theta$. Análogo a multiplicar e dividir por 3 o fator $d\theta$ dentro da integral é fazer

$$d\theta = \frac{du}{3}.$$

■

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(3\theta+5)\,d\theta &= \int \operatorname{sen} u \frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u du \\
&= -\frac{1}{3}\cos u + C \\
&= -\frac{1}{3}\cos(3\theta+5) + C.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determine $\int x^2 e^{x^3} dx$.

Solução: Seja $u = x^3$. Assim, $du = 3x^2 dx$ e, $\frac{1}{3} du = x^2 dx$.
Portanto

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^{x^3} dx &= \int e^u \frac{1}{3} du \\
&= \frac{1}{3} \int e^u du \\
&= \frac{1}{3} e^u + C \\
&= \frac{1}{3} e^{x^3} + C.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo

Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Solução: Primeiramente, observe que

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \dfrac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}.$$

■

Solução: Agora, seja $u = e^x$. Logo $du = e^x dx$ e assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \int \frac{du}{u^2+1} \\ &= \operatorname{arctg} u + C \\ &= \operatorname{arctg}(e^x) + C.\end{aligned}$$

$\blacksquare$