Séries II

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE

Aulas de MAT 147 - 2022-1

Definição 1

Uma série do tipo $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots (-1)^{n-1} b_n + \cdots$, onde $b_n > 0$ é chamada **série alternada**.

Exemplos:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots;$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} n}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdots.$$

Teste da Série Alternada: Se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots (-1)^{n-1}b_n + \cdots$, com $b_n > 0$ satisfizer:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(ii) $b_{n+1} \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

então a série é convergente.

Exemplos:1) Faça um estudo sobre a convergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}3n}{4n-1}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln\ n}{n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Definição 2

Uma **série** $\sum a_n$ é chamada **absolutamente convergente** se a série dos valores absolutos, isto é, $\sum |a_n|$ for **convergente**. Se $\sum a_n$ for **convergente** mas $\sum |a_n|$ for **divergente**, então a série é chamada **condicionalmente convergente**.

Exemplo: Discuta se as séries abaixo são divergentes, absolutamente convergente ou condicionalmente convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+10}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{1+n^5}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n!}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln\ n}{\sqrt{n}}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}}{\ln\ n}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Teorema 1: Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Exemplo: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\ n}{n^2}$ diverge ou converge?

Exemplo: A série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ diverge ou converge?

LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. II*, São Paulo, Editora Harbra: 1990.

STEWART, J. *Cálculo - vol II*, São Paulo, Thomson Learning: 2002.