

MAT146 - Cálculo I - Assíntotas

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Os limites infinitos podem ser aplicados para encontrar assíntotas verticais de um gráfico, se elas existirem. Neste caso, quanto mais os valores de x se aproximam do número 2, o gráfico de $f(x)$ se aproxima da reta $x = 2$.

A figura abaixo que representa o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x - 2}$.

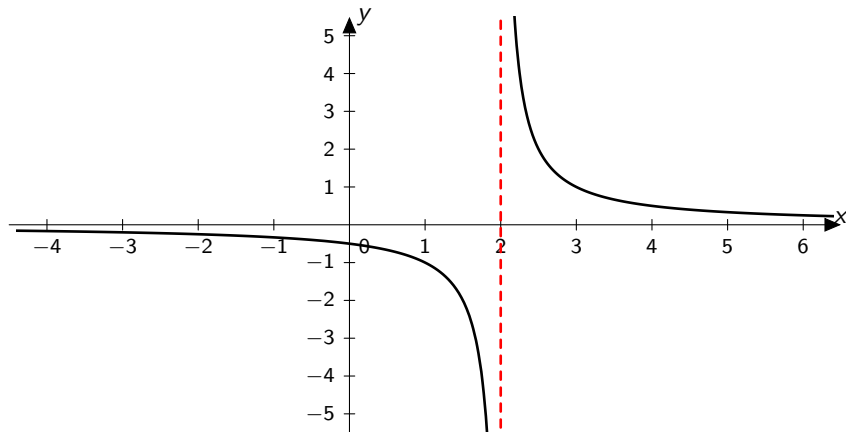


Figura : Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Definição

Diremos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f , se pelo menos uma das alternativas abaixo for verdadeira.

- (i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Observação

Dada uma função f contínua, pode existir mais de uma assíntota vertical e o gráfico nunca interceptará tais assíntotas.

Geometricamente, a assíntota vertical do gráfico de uma função f é a reta paralela ao eixo Oy que passa pelo ponto $(a, 0)$.

Exemplo

Ache a(s) assíntota(s) vertical(is) da função

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}.$$

Observe que os candidatos a assíntotas verticais são $x = 2$ e $x = -2$, pois são os valores que satisfazem a equação $x^2 - 4 = 0$. Como

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} \\ &= -\frac{1}{4},\end{aligned}$$

concluimos que $x = -2$ não é uma assíntota vertical.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

pela definição, a reta $x = 2$ é uma assíntota Vertical.

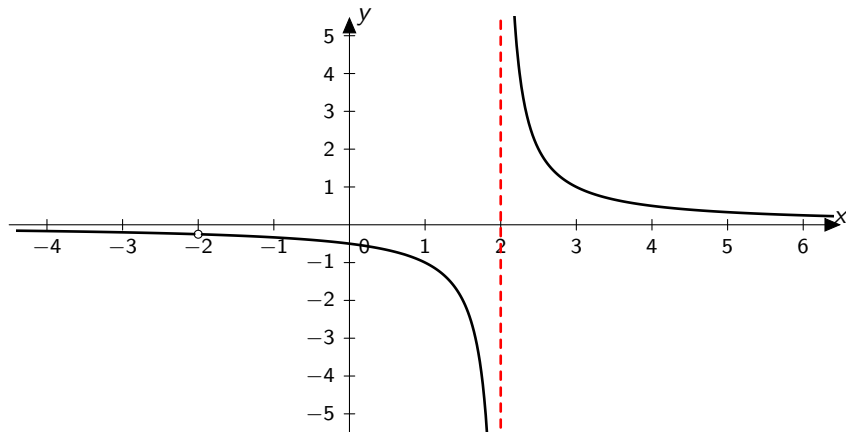


Figura : Gráfico da função $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.

Definição

Diremos que a reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de uma função f , se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira.

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ e existe um número N , tal que, se $x > N$, então $f(x) \neq b$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ e existe um número N , tal que, se $x < N$, então $f(x) \neq b$.

Observação

Uma função f pode ter no máximo duas assíntotas horizontais e o gráfico de f pode interceptar a assíntota horizontal.

Exemplo

Encontre a(s) assíntota(s) horizontal(is) da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{3x^2 - 2}.$$

Note que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 2}{3x^2 - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 - \frac{2}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{\left(3 - \frac{2}{x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{3},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 2}{3x^2 - 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 - \frac{2}{x^2}\right)} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{\left(3 - \frac{2}{x^2}\right)} \\&= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Para mostrar que existe $N > 0$ tal que $f(x) \neq \frac{1}{3}$, para $x > N$, é suficiente mostrar que o gráfico de f corta a reta $y = \frac{1}{3}$ um número finito de vezes. De fato,

$$f(x) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 2}{3x^2 - 2} = \frac{1}{3}$$

$$3(x^2 - 4x + 2) = 3x^2 - 2$$

$$-12x^2 + 8 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

Logo, para $x > \frac{2}{3}$, temos $f(x) \neq \frac{1}{3}$ e desta forma, $y = \frac{1}{3}$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f .

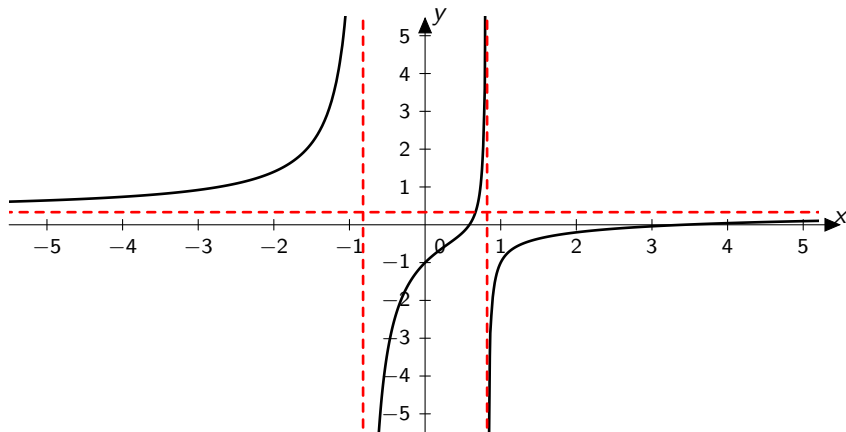


Figura : Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{3x^2 - 2}$.