MAT146 - Cálculo I - Teorema do Confronto e Primeiro Limite Fundamental

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Apresentaremos agora um teorema que nos permite calcular o limite de determinada função, desde que esta se encontre limitada inferiormente e superiormente por outras duas funções que tem o mesmo limite no ponto pretendido.

Teorema (Teorema do Confronto ou Sanduíche)

Seja I um intervalo aberto contendo um ponto a. Sejam f, g e h três funções definidas em I ou em $I \setminus \{a\}$ e satisfazendo

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \text{para todo} \quad x \in I \setminus \{a\}.$$

Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

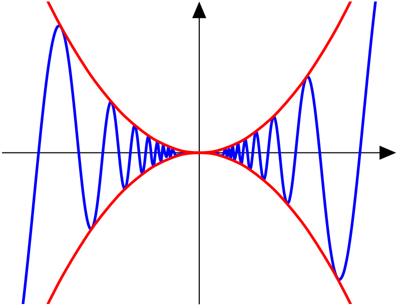
então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Exemplo

Mostre que

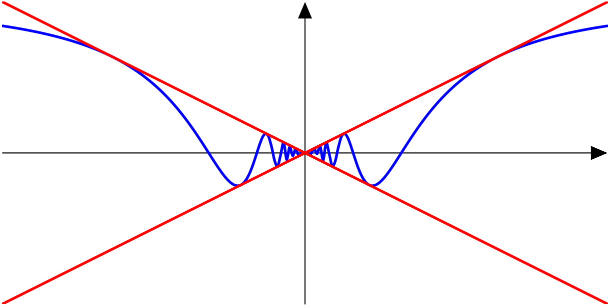
$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$



Exemplo

Prove que

$$\lim_{x \to 0} \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$



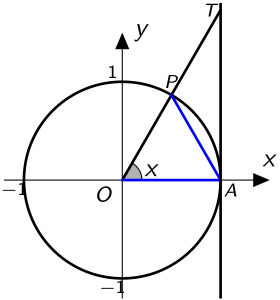
Corolário

Seja I um intervalo contendo um ponto a. Sejam f e g funções definidas em I ou em $I \setminus \{a\}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$, então

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = 0.$$

Teorema (Primeiro Limite Fundamental)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$



Se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, então

$$\text{Área } (\Delta OPA) < \text{ Área } (OPA) < \text{ Área } (\Delta OTA)$$

Assim,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Tomando o limite quando $x \to 0$, obtemos pelo Teorema do Confronto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Se $x < 0$, então $-x > 0$ e pelo mesmo procedimento anterior, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{2} < \frac{-x}{2} < \frac{\operatorname{tg}(-x)}{2}$$

$$1 < \frac{-x}{\operatorname{sen}(-x)} < \frac{1}{\cos(-x)}$$

Como a função seno é ímpar e a função cosseno é par, obtemos que

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x},$$

que nos fornece

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Exemplo

Como consequência do Primeiro Limite Fundamental, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \\
&= 1.0 = 0.
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule cada um dos seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen} 3x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$