Séries de Potências

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2022-2

Definição 1

Uma **série de potências em $x - a$ ou centrada em a** é uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + \cdots$$

onde x é a variável e os c_n's são constantes chamadas **coeficientes da série**. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

cujo domínio são todos os valores de x para os quais a série converge.

Exemplos: Séries centradas em 0.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, com $|x| < 1$;

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, com $|x| < 1$.

Exercícios:

(1) Encontre um representação em séries de potências para $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ centrada em 0;

Resposta: $(1)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$, com $|x| < 2$.

(2) Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ converge?

(3) Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

Resposta:

(2) Converge somente para $x = 0$.

(3) Converge para todo x no intervalo $[2, 4)$.

Definição 2

Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ só existem três possibilidades:

(a) A série converge apenas em $x = a$;

(b) A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$;

(c) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$

R é chamado **raio de convergência da série de potências**.

Por convenção, em (a) $R = 0$ e em (b) $R = \infty$.

Definição 3

O **intervalo de convergência** de uma série de potências é o intervalo que consiste de todos os valores de x para os quais a série converge. Assim, de acordo com a Definição **??**:

(a) O intervalo de convergência é $\{a\}$;

(b) O intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$;

(c) Temos 4 possibilidades para o intervalo de convergência: $(a-R, a+R)$,$(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$ e $[a-R, a+R]$.

Exemplos: Vamos voltar aos exemplos anteriores.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R = 1$ e o intervalo de convergência é $(-1, 1)$;

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $R = 1$ e o intervalo de convergência é $(-1, 1)$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$, $R = 2$ e o intervalo de convergência é $(-2, 2)$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n}$, $R = 1$ e o intervalo de convergência é $[2, 4)$.

Exercícios: Determine o raio e o intervalo de convergência das séries de potências abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{3^n}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Se a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$;

(ii) $\int f(x)\,dx =$

$$K + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots = K + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

onde $\int c_0\,dx = c_0x + K_1$ é reescrito como $c_0(x-a) + K$, ou seja, $K = K_1 + ac_0$.

Observações:

(1) Os raios de convergência das séries de potências em (i) e (ii) são iguais a R;

(2) Os intervalos de convergência em (i) e (ii) podem ser diferentes do intervalo de convergência de $\sum c_n(x-a)^n$.

Notação:

(i) $$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n(x-a)^n\right);$$

(ii) $$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\, dx.$$

Exemplo: Encontre uma representação em séries de potência para as funções abaixo e determine os respectivos raios de convergência.

(a) $f(x) = arctg\, x$;

(b) $f(x) = \ln(1-x)$;

(c) $f(x) = \ln(1+x)$;

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$;

Exemplo: Quanto vale a soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$?

Suponhamos que f é uma função que pode ser representado por uma série de potências, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, |x-a| < R.$$

Note que $f(a) = c_0$ e $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$, ou seja, $f'(a) = c_1$. Prosseguindo temos $f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + \cdots$, ou seja, $c_2 = f''(a)/2$. Em geral,temos $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Esta fórmula vale para $n = 0$ se adotarmos $f^{(0)} = f$.

Teorema: Se f tiver uma representação em série de potências em $x-a$, isto é, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, $|x-a|<R$, então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = f^{(n)}(a)/n!, \text{ou seja}, f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Esta série é chamada **série de Taylor da função f centrada em a**. Para $a=0$ esta série é chamada **série de Maclaurin**.

Exemplo: Encontre a série de Maclaurin das funções abaixo e os respectivos raios de convergência.

(a) $f(x)=e^x$;

(b) $f(x)=sen\,x$;

(c) $f(x)=\cos x$.

Exemplo: Quanto vale a soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$?

Exemplo: Encontre a série de Taylor para $f(x) = e^x$ em $a = 2$.

- LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. II*, São Paulo, Editora Harbra: 1990.
- STEWART, J. *Cálculo - vol II*, São Paulo, Thomson Learning: 2002.