MAT146 - Cálculo I - Antiderivadas

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Operações como adição e subtração, definidas no conjunto dos números reais, são operações reversíveis, ou seja, possuem inversa. Neste tópico, vamos desenvolver a operação inversa da diferenciação.

Uma função f é dita ser **diferenciável** em um ponto x_0 de seu domínio se existe a derivada $f'(x_0)$. O processo para encontrar a derivada de uma função f, é chamado **diferenciação**. Este processo

$$f \longmapsto f'$$

é uma operação no conjunto das funções.

O processo reverso é chamado **antidiferenciação** e será apresentado abaixo.

Definição

Uma função F, será chamada **antiderivada** *de uma função f num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se*

$$F'(x) = f(x),$$

para todo $x \in I$.

Exemplo

A função $F(x) = sen(x)$ *é uma antiderivada da função* $f(x) = cos(x)$, *pois*

$$F'(x) = cos(x) = f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
Note que, se $G(x) = sen(x) + 1$, *então*

$$G'(x) = cos(x) = f(x),$$

ou seja, G *é também uma antiderivada de* f. *Mais geralmente,*

$$G(x) = sen(x) + c$$

também é uma antiderivada de f *para toda constante* c.

Como foi dito acima, dado uma função f diferenciável em um intervalo I, antidiferenciação é o processo de encontrar a antiderivada de f, mais precisamente, de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de f.

Usaremos o símbolo $\displaystyle\int$ para denotar a operação de antidiferenciação de uma dada função. Escrevemos

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

onde $F'(x) = f(x)$ e $d(F(x)) = f(x)dx$.

Observação

O símbolo $d(F(x))$ denota a diferencial da função F. Note que

$$\int d(F(x)) = F(x) + c,$$

isto é, quando antidiferenciamos a diferencial de uma função, obtemos a própria função mais uma constante arbitrária.

Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, podemos obter vários resultados sobre antidiferenciação através de resultados já conhecidos de diferenciação.

Nos resultados a seguir, assumiremos que existem as antiderivadas.

Teorema

$$\int dx = x + c.$$

Demonstração: Note que $(x+c)' = 1$ e desta forma,

$$\int 1dx = \int dx = x + c.$$

$\blacksquare$

Teorema

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$$

onde a é uma constante qualquer.

Demonstração: Basta notar que $(aF(x))' = aF'(x)$, onde $F' = f$. ■

Teorema

Se f_1 e f_2 estão definidas num intervalo I, então

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Demonstração: Usamos o fato que $(F_1(x) + F_2(x))' = F_1'(x) + F_2'(x)$, onde $F_1' = f_1$ e $F_2' = f_2$. ■

Teorema

Se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ estão definidas num intervalo I, então

$$\begin{aligned}\int [c_1 f_1(x) &+ c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)]dx \\ &= c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \ldots + c_n \int f_n(x)dx.\end{aligned}$$

Demonstração: Basta usar os dois teoremas anteriores. ∎

Teorema

Se r for um número real, $n \neq -1$, então

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c.$$

Demonstração: Observe que

$$\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = \frac{(r+1)x^r}{r+1} = x^r.$$

$\blacksquare$

Exemplo

Calcule

$$\int x\sqrt[3]{x}dx.$$

Solução: *Note que* $x\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}}$. *Daí*

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt[3]{x}dx &= \int x^{\frac{4}{3}}dx \\
&= \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + c \\
&= \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c \\
&= \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + c.
\end{aligned}$$

■

Exemplo

Calcule

$$\int (2x^4 - 7x^2 + 3x - 1)dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int (2x^4 - 7x^2 + 3x - 1)dx &= 2\int x^4 dx - 7\int x^2 dx + 3\int x dx - \int dx \\
&= 2\frac{x^5}{5} - 7\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - x + c \\
&= \frac{2x^5}{5} - \frac{7x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c.
\end{aligned}$$

■

Exemplo

Calcule

$$\int \frac{x^2+1}{x}dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x}dx &= \int (x+\frac{1}{x})dx \\ &= \int xdx + \int \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c,\end{aligned}$$

pois $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, *para* $x \neq 0$. ■

Teorema

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(x)dx &= -\cos(x) + c \\
\int \cos(x)dx &= \operatorname{sen}(x) + c \\
\int \sec^2(x)dx &= \operatorname{tg}(x) + c \\
\int \operatorname{cossec}^2(x)dx &= -\operatorname{cotg}(x) + c \\
\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)dx &= \sec(x) + c \\
\int \operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)dx &= -\operatorname{cossec}(x) + c
\end{aligned}
$$

Demonstração: Imediato. ■

Exemplo

Calcule

$$\int \frac{\mathrm{sen}(x) + \sec(x)\,\mathrm{cossec}(x)}{\mathrm{tg}(x)}\,dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{sen}(x) + \sec(x)\,\mathrm{cossec}(x)}{\mathrm{tg}(x)}\,dx &= \int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{tg}(x)}\,dx + \int \frac{\sec(x)\,\mathrm{cossec}(x)}{\mathrm{tg}(x)}\,dx \\
&= \int \cos(x)dx + \int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)}\,dx \\
&= \int \cos(x)dx + \int \mathrm{cossec}^2(x)dx \\
&= \mathrm{sen}(x) - \mathrm{cotg}(x) + c
\end{aligned}$$

■

Exemplo

Calcule

$$\int \frac{3\,\mathrm{tg}(t) - 4\cos^2(t)}{\cos(t)}\,dt.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\,\mathrm{tg}(t) - 4\cos^2(t)}{\cos(t)}\,dt &= \int \frac{3\,\mathrm{tg}(t)}{\cos(t)}\,dt - 4\int \frac{\cos^2(t)}{\cos(t)}\,dt \\
&= 3\int \sec(t)\,\mathrm{tg}(t)\,dt - 4\int \cos(t)\,dt \\
&= 3\sec(t) - 4\,\mathrm{sen}(t) + c
\end{aligned}$$

■