Universidade Federal de Viçosa

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Departamento de Matemática

$3^{\underline{a}}$ Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear 2017/II

---

1. Sejam $u = (-4, 3)$, $v = (2, -5)$ e $w = (a, b)$. Encontre a e b tais que
   $(a) w = 2u + 3v$, $(b) w = \frac{2}{5}v$, $(c) u + w = 2u - v$.
   Represente os vetores acima no plano cartesiano.

2. Sejam $u = (4, -1, 2)$, $v = (3, -2, -4)$ e $w = (a, b, c)$. Encontre a, b, c tais que:
   $(a) w - u = v$, $(b) w = 3v$, $(c) u + w = 2u - v$.

3. Sejam $u = (-3, 1, 2)$, $v = (4, 0, -8)$ e $w = (6, -1, -4)$. Encontre escalares c_1, c_2 e c_3 tais que $c_1u + c_2v + c_3w = (2, 0, 4)$.

4. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que $c_1u + c_2v + c_3w = (0, 0, 0)$, onde $u = (-3, 1, 2)$, $v = (4, 0, -8)$ e $w = (6, -1, -4)$.

5. Abaixo, são apresentados um conjunto V com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verifique se eles são espaços vetoriais. Para aquele que não for, citar os axiomas que não se verificam. Para quaisquer $(a, b), (c, d)$ em V e α escalar real, sejam:

   (a) $V = \mathbb{R}^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, 0)$ e a multiplicação escalar usual.

   (b) $V = \mathbb{R}^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ e $\alpha(a, b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$.

6. Verifique detalhadamente que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais (com a soma e produto por escalar usuais):

   (a) Matrizes quaisquer de ordem 3×2.

   (b) Polinômios de grau menor ou igual a 4.

   (c) Conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

7. Em cada ítem deste exercício são dados um espaço vetorial V e um subconjunto W de V. Verifique se W é subespaço vetorial V.

   (a) $V = (\mathbb{R}^3, +, ., \mathbb{R})$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$.

   (b) $V = (\mathbb{R}^3, +, ., \mathbb{R})$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \leq 1\}$.

   (c) $V = (P_3(\mathbb{R}), +, ., \mathbb{R})$, $W = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}); p(1) = 0\}$.

   (d) $V = (P_3(\mathbb{R}), +, ., \mathbb{R})$, $W = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}); p(1).p(2) = 0\}$.

   (e) $V = (M_3(\mathbb{R}), +, ., \mathbb{R})$, $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A = A^T\}$.

   (f) $V = (M_2(\mathbb{R}), +, ., \mathbb{R})$, $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}); \det A = 0\}$.

   (g) $V = (M_n(\mathbb{R}), +, ., \mathbb{R})$, $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \operatorname{tr} A = 0\}$.

8. Considere $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3; ax+by+cz=d, \text{ onde } a,b,c,d \in I\!R\}$. Para que valores de a,b,c e d, W é um subespaço vetorial de $I\!R^3$?

9. Mostre que os seguintes subconjuntos de $I\!R^4$ são subespaços de $I\!R^4$.

   (a) $W = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; x-y-3z=0\}$;

   (b) $W = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; x-y+2z=0 \text{ e } t=0\}$.

   (c) $W = \left\{(x,y,z,t) \in I\!R^4; \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{t}{5}\right\}$.

10. Sejam os vetores $u = (2,-3,2)$ e $v = (-1,2,4)$ em $I\!R^3$.

    (a) Escreva $w = (7,-11,2)$ como combinação linear de u e v.

    (b) O vetor $(2,-5,4)$ pode ser escrito como combinação linear de u e v? Justifique.

    (c) Para que valores de k o vetor $w = (-8,14,k)$ é combinação linear de u e v?

    (d) Encontre condições sobre a, b e c de modo que o vetor $w = (a,b,c)$ seja combinação linear de u e v.

11. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de $M_3(I\!R)$?

    $(a)\ W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}; d = a+b+c \right\}$; $\qquad (b)\ W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}; d < a+b+c \right\}$.

12. Sejam $u = (-1,2,1)$, $v = (1,2,0)$ e $w = (-2,-1,0)$. Expressar cada um dos vetores $v_1 = (-8,4,1)$, $v_2 = (0,2,3)$ e $v_3 = (0,0,0)$ como combinação linear de u, v e w.

13. Escreva E como combinação linear, se possível de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, onde

    $(i)\ E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad (ii)\ E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

    Quais vetores de $M_2(I\!R)$ podem ser escrito como combinação linear de A, B e C?

14. Mostre que $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ geram o $I\!R^3$. O que isto significa?

15. Determine condições sobre a, b e c de modo que $(a,b,c) \in I\!R^3$ pertença ao espaço gerado pelos vetores $u = (2,1,0)$, $v = (1,-1,2)$ e $w = (0,3,-4)$.

16. Para qual valor de k, o vetor $u = (1,-2,k)$ em $I\!R^3$ será uma combinação linear dos vetores $v = (3,0,-2)$ e $w = (2,-1,-5)$?

17. Determine condições sobre a, b e c devem satisfazer para que o vetor $v = (a,b,c)$ seja combinação linear dos vetores $u = (1,-3,2)$ e $w = (2,-1,1)$.

18. Mostre que o plano yz em $I\!R^3$, isto é, o subespaço $W = \{(0,b,c); b,c \in I\!R\}$ é gerado por:

    (a) $(0,1,1)$ e $(0,2,-1)$;

(b) $(0,1,2)$, $(0,2,3)$ e $(0,3,1)$;

(c) Por que um plano pode ser gerado por dois ou três vetores? Este mesmo plano pode ser gerado por um vetor? Exiba um conjunto de quatro vetores que geram W e um conjunto de dois vetores que geram W.

19. Verifique se o vetor $u = (1,2,3)$ pertence ao subespaço de $I\!R^3$ gerado pelos vetores $v = (0,1,2)$ e $w = (1,0,1)$.

20. Verifique se o conjunto $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ gera o espaço vetorial $M_2(I\!R)$.

21. Mostre que os conjuntos $\{(1,-1,2),(3,0,1)\}$ e $\{(-1,-2,3),(3,3,-4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $I\!R^3$.

22. Determine um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços de $I\!R^3$.

(a) $U = \{(x,y,z); x - 2y = 0\}$;

(b) $V = \{(x,y,z); x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$;

(c) $U \cap V$.

23. Encontre um vetor em $I\!R^3$ que gere a interseção de V e W, onde V é o plano xy e W é o espaço gerado pelos vetores $(1,2,3)$ e $(1,-1,1)$.

24. Mostre que a interseção de subespaços é também um subespaço e verifique, com um exemplo, que a união de subespaços nem sempre é um subespaço.

25. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Mostre que $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

26. Seja S subespaço vetorial de $I\!R^4$ dado por $S = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$. Pergunta-se:

(a) $(-1,2,3,0) \in S$?

(b) $(3,1,4,0) \in S$?

(c) Determine dois vetores de geram S. Eles são únicos? Se não, apresente outros.

27. Determine $[S]$, onde $S = \{(1,-2,5,4),(2,3,1,-4),(3,8,-3,-5)\}$.

28. Verifique se o vetor $p(t) = t^3 - 2t$ pertence ao subespaço de $\mathbb{P}_3$ gerado por $\{t^3 - 1, t^2 + 1, t\}$.

29. Determine para que valores de k os vetores de $I\!R^3$ abaixo são L.I. ou L.D.

(a) $u = (1,1,2)$, $v = (-1,2,3)$ e $w = (k,-1,1)$

(b) $u = (-1,0,7)$, $v = (-4,5,-3k)$, $w = (0,4,-2)$ e $z = (2k,3,1)$

30. Suponha que $\{u,v,w\}$ é L.I. Então $\{u+v, u-v, u-2v+w\}$ é L.I. ou L.D.? Justifique.

31. Os conjuntos abaixo são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Justifique (Faça contas somente quando for realmente necessário!)

    (a) $\{x^3 - 3x, 2x^2 + 4, 5x^3 - 7x^2 + 3, 4x^3 - 8, 6x\} \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$;

    (b) $\{(-1, 0, 2, 0, 1), (0, 1, 0, -2, 1), (-2, 3, 4, -6, 5)\} \subset \mathbb{R}^5$;

    (c) $\{(2, -1, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$;

    (d) $\{(2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

    (e) $\{(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

32. Suponha que $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ seja L.I., mas $\{v_1, v_2, ..., v_n, w\}$ seja L.D. Mostre que w é combinação linear dos vetores de S.

33. Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores L.I. de um espaço vetorial V e suponha que u é uma combinação linear desses vetores, digamos $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$. Mostre que a representação de u acima é única. Dê um exemplo, em $\mathbb{R}^3$, mostrando que se o conjunto de vetores for L.D., então a representação não será única.

34. Prove que o subconjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é L.D. se, e somente se, existe k inteiro, $1 \leq k \leq n$, tal que v_k é combinação linear dos demais vetores do subconjunto S.

35. Se V é um espaço vetorial real, mostre que:

    (a) Se $\{u, v, w\} \subset V$ é L.I. então $\{u + v, u + w, v + w\}$ é L.I.

    (b) Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é L.D.

    (c) Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é L.D. então A é L.D.

    (d) Se um conjunto $A \subset V$ é L.I., qualquer subconjunto de A é L.I.

36. Mostre que os vetores $u = (1 - a, 1 + a)$ e $v = (1 + a, 1 - a)$, com $a \neq 0$, são L.I. em $\mathbb{R}^2$.

37. Mostre que $\{(1, 0, a), (1, 1, a), (1, 1, a^2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I. se $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

38. Se u, v e w são vetores de um espaço vetorial V tais que $u \in [w]$ e $v \in [w]$, mostrar que $\{u, v\}$ é L.D.

39. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$ tenha dimensão 1.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{para algum vetor} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

40. Determine uma base e a dimensão do subespaço vetorial de $M_4(\mathbb{R})$ formado por: (a) todas as matrizes diagonais de ordem 4; (b) todas as matrizes triangulares superiores; (c) todas as matrizes simétricas.

41. Determine uma base e dimensão dos subespaços vetoriais:

(a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in M_{2\times3}(\mathbb{R}); a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

(b) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - 2y = 0\}$;

(c) $W_3 = [(1, 2, 3), (0, 0, 2), (-2, -4, -2)]$;

(d) $W_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x - 2y = 0 \text{ e } t + x = z\}$.

42. Sendo $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, determinar $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{v_1, v_2\}$ seja base de $\mathbb{R}^2$.

43. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base de $\mathbb{R}^3$? Nos que formarem, escrever um vetor genérico de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos elementos desse conjunto.

(a) $\{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (-2, 1, -4)\}$;

(b) $\{(2, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$;

(c) $\{(2, 3, -1), (-2, 1, 1), (2, 0, 1)\}$

44. Mostre que $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

45. Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (3, 0, 2)$ e $v_4 = (2, -1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$ e encontrar uma base dentre esses vetores.

46. Determinar as coordenadas do vetor $v = (6, 2)$ em relação às bases:

(a) $\{(3, 0), (0, 2)\}$;

(b) $\{(1, 2), (2, 1)\}$;

(c) $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

47. Considere $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Determinar as coordenadas do vetor v em relação à B, se:

(a) $v = (2, -3, 4)$;

(b) $v = (3, 5, 6)$;

(c) $v = (1, -2, 1)$.

48. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os seguintes vetores $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 2, 1)$.

49. Determine a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $M_2(\mathbb{R})$:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; c = a - 3b \text{ e } d = 0 \right\}$;

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + d = b + c \right\}$.

50. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$, $(3, 8, -3, -5)$.

(i) Encontre uma base e a dimensão de W;

(ii) Estenda a base de W a uma base do espaço $I\!R^4$;

(iii) Faça agora o caminho inverso, encontre, se possível, os vetores da base canônica de $I\!R^4$ que geram W.

51. Encontrar uma base e a dimensão do espaço solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 4x + 3y - z + 5t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 6x + 2y + 4t = 0 \end{cases}.$$

52. Sejam U, V subespaços vetoriais de $I\!R^3$. Determine uma base e a dimensão dos subespaços U, V, $U + V$ e $U \cap V$.

(a) $U = \{(x, y, x); x = 0\}$, $\quad V = \{(x, y, z); y - 2z = 0\}$.

(b) $U = \{(x, y, z); x + y = 0 \text{ e } 4x - z = 0\}$, $\quad V = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)]$.

53. Sejam U e W subespaços vetoriais de $I\!R^4$ gerados por $R = \{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)\}$ e $S = \{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)\}$, respectivamente.

(a) Determine uma base para os espaços U e W.

(b) Determine $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.

54. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{P}_3(I\!R)$ dados por $U = \{at^3 + bt^2 + ct + d; a = b - c\}$ e $W = \{at^3 + bt^2 + ct + d; d = a + b + c\}$

(a) Determine uma base para os espaços U e W.

(b) Determine $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.

55. Nos itens (a) até (f) abaixos, são dados subespaços U e W do espaço vetorial V. Em cada item, determinar:

(i) uma base e a dimensão de U.

(ii) uma base e a dimensão de W.

(iii) uma base e a dimensão de $U + W$.

(iv) uma base e a dimensão de $U \cap W$.

(a) $U = \{\, (x, y, z) \in I\!R^3;\ x + y + z = 0 \,\}$, $W = \{\, (x, y, 0);\ x, y \in I\!R \,\}$, $V = I\!R^3$.

(b) $U = \{\, (x, y, z, t) \in I\!R^4;\ x + y = t - z = 0 \,\}$, $W = \{\, (x, y, z, t) \in I\!R^4;\ z = t = 0 \,\}$, $V = I\!R^4$.

(c) $U = \{\, (x, y, z) \in I\!R^3;\ x = 0 \,\}$, $W = [(2, 2, 0), (1, 2, 3), (7, 12, 21), (-1, -2, -3)]$, $V = I\!R^3$.

(d) $U = \{\, (x, y, z, t) \in I\!R^4;\ x - y + t + z = 0 \,\}$, $W = \{\, (x, y, z, t) \in I\!R^4;\ x + y - t + z = 0 \,\}$, $V = I\!R^4$.

(e) $U = \{\, p(t) \in P_3(I\!R); p(1) = 0 \,\}$, $W = \{\, p(t) \in P_3(I\!R);\ p(2) = 0 \,\}$, $V = P_3(I\!R)$.

(f) $U = \{\, A \in M_3(I\!R); \operatorname{tr} A = 0 \,\}$, $W = \{\, A \in M_3(I\!R);\ A^T = A \,\}$, $V = M_3(I\!R)$.

56. Seja U o subespaço de $I\!R^5$ gerado por

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}$$

e seja W o subespaço gerado por $\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}$.
(a) Encontre dois sistemas homogêneos cujos espaços das soluções são U e W, respectivamente.
(b) Encontre uma base e a dimensão de $U \cap W$.
(c) Encontre a dimensão de $U + W$.

57. No espaço vetorial $P_2(I\!R)$ dos polinômios em t de grau menor ou igual a 2, considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{B} = \{1,\ 1-t,\ (1-t)^2\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de $P_2(I\!R)$.
(b) Encontre as coordenadas dos seguintes vetores com relação à base ordenada $\mathcal{B}$:
(i) $v = 2 - 3t + t^2$;   (ii) $w = 3 - 2t$.

58. Seja $V = \{p : [-1,1] \to I\!R;\ p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\}$ e

$$S = \{p \in V;\ p(-1) = 0 \ \text{ e } \ p'(1) = 0\}.$$

Mostre que S é um subespaço vetorial de V. Encontre uma base e a dimensão do subespaço S.

59. Sejam $W_1 = \{A \in M_3(I\!R);\ A^\intercal = A\}$ e $W_2 = \{A \in M_{3\times3}(I\!R); A^\intercal = -A\}$. Mostre que

$$M_3(I\!R) = W_1 \oplus W_2.$$