LISTA 1 – ERROS E ZEROS DE FUNÇÕES

1. Em cada item, determine o número de zeros da função dada e encontre intervalos contendo cada uma dessas raízes, mas que não contenham nenhuma outra.

   a) $f(x) = x^2 + e^{3x} - 3$;

   b) $f(x) = e^{-x} - x$;

   c)) $f(x) = 2x + ln(x)$.

2. Considere a equação $sin(x) - e^{-x} = 0$.

   a) Prove que esta equação tem uma única raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

   b) Efetue três iterações usando o método da bissecção e indique um majorante (limitante superior) para o erro absoluto cometido nessa aproximação. **Resp:** $x_3 = 0.5875$**,** $|x_3 - z| \leq 0.2/2^4 = 0.0125$

3. Use o método da bissecção para determinar uma aproximação, com um erro absoluto inferior a 5×10^{-3}, da (única) solução da equação $1 + x + e^x = 0$ que sabe-se estar no intervalo $[-2, -1]$.
   Resp: $x_7 = -1.27734375$**,** $|x_7 - z| \leq 0,00390625$ **e** $|x_7 - x_6| = 0,00390625$**.**

4. Encontre um valor aproximado para $\sqrt{3}$, com precisão de 10^{-4}, utilizando o método da bissecção.

5. Dado $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$, utilize manipulações algébricas para mostrar que cada uma das funções a seguir tem um ponto fixo em p precisamente quando $f(p) = 0$.

   a) $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$

   b) $g_2(x) = \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}$

   c) $g_3(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{1/2}$

   d) $g_4(x) = \frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1}$

6. Considere a função de variável real $g(x) = \frac{1}{4}e^{cos(x)}$.

   a) Mostre que esta função tem um único ponto fixo z em $I = [0, \pi/4]$ e que a sequência gerada pela relação $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para z, independente da aproximação inicial $x_0 \in I$.

   b) Tome $x_0 = 0,5$ e determine x_3.

7. Considere a equação $e^x - 4x^2 = 0$ que admite três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$, onde $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$. Para aproximar as raízes positivas da equação acima, considere o método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$.

   a) Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.

b) Utilizando g como função iteradora, mostre que o método do ponto fixo converge para z_2, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.

c) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação para $z_3 \in [4, 5]$.

d) Determine uma função iteradora g para a qual a sequência de iterações convirja para a raiz negativa da equação $e^x - 4x^2 = 0$.

8. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação $-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0$.

   a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo $[2.6, 3]$, estão asseguradas as condições de convergência do método.

   b) Efetue três iterações do método de Newton.

9. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação $x^3 - cos(x) = 1$ no intervalo $[1, 2]$. Escolha $x_0 = 1$ e calcule x_1 e x_2. Quantas iterações devemos computar para obter uma aproximação da solução procurada com erro inferior a 10^{-9}?

10. Considere a equação $x\tan(x) - 1 = 0$. Sabendo que em $[0.8, 0.9]$ existe uma única raiz da equação dada, obtenha a terceira iteração dada pelo método da secante.

11. Considere a equação $f(x) = \cos(x) - x = 0$.

    a) Mostre que o método de Newton converge para o único zero de f, qualquer que seja x_0 em $[0.5, 1.5]$.

    b) Calcule x_1 partindo de $x_0 = 1$ e mostre que $|x_1 - z| \leq 0,025$, onde z é o único zero de f em $[0.5, 1.5]$.

    c) Tomando x_0 e x_1 obtido em b), calcule x_2 usando o método da secante. Este método também irá convergir?