EST 105

INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA

Revisão: Variáveis Aleatórias

Gabriela França Oliveira

(gabriela.franca@ufv.br)

Exercício 1: Seja X uma **variável aleatória discreta** com a seguinte distribuição de probabilidades:

X	0	5	8	10	12
$P(x)$	4θ	6θ	3θ	5θ	2θ

a) Calcule o valor da constante θ

$$4\theta + 6\theta + 3\theta + 5\theta + 2\theta = 1$$

$$20\theta = 1$$

$$\theta = \frac{1}{20}$$

X	0	5	8	10	12
$P(x)$	4θ	6θ	3θ	5θ	2θ

a) $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 10|\mathrm{X} > 5)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 10|\mathrm{X} > 5) = \frac{P(5 < X \leq 10)}{P(X > 5)}$$

$$= \frac{P(X = 8) + P(X = 10)}{P(X = 8) + P(X = 10) + P(X = 12)}$$

$$= \frac{3\theta + 5\theta}{3\theta + 5\theta + 2\theta}$$

$$= \frac{8\theta}{10\theta} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Exercício 2: Considere as seguintes variáveis **aleatórias discretas** X= nº de anos decorridos desde a última visita ao dentista e Y = número de cáries encontradas, cuja **distribuição de probabilidades conjunta** é apresentada a seguir:

$X\backslash Y$	0	1	2	$P(x)$
1	$1/30$	$3/30$	$1/30$	$5/30$
2	$2/30$	$6/30$	$2/30$	$10/30$
3	$3/30$	$9/30$	$3/30$	$15/30$
$P(y)$	$6/30$	$18/30$	$6/30$	1

a) Calcule a probabilidade de haver pelo menos dois anos desde a última consulta ao dentista e ser encontrada mais de 1 cárie.

$$P(X \geq 2, Y > 1) = P(X = 2, Y = 2) + P(X = 3, Y = 2)$$

$$= \frac{2}{30} + \frac{3}{30} = \frac{5}{30} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

$X\backslash Y$	0	1	2	$P(x)$
1	$1/30$	$3/30$	$1/30$	$5/30$
2	$2/30$	$6/30$	$2/30$	$10/30$
3	$3/30$	$9/30$	$3/30$	$15/30$
$P(y)$	$6/30$	$18/30$	$6/30$	1

b) Sabendo que não foi encontrada cárie, qual a probabilidade condicional de haver menos de 3 anos que o paciente não vai ao dentista?

$$P(X<3|Y=0)=\frac{P(X<3,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)}{P(Y=0)}$$

$$=\frac{\frac{1}{30}+\frac{2}{30}}{\frac{6}{30}}$$

$$=\frac{\frac{3}{30}}{\frac{6}{30}}=\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

UFV

$X\backslash Y$	**0**	**1**	**2**	$P(x)$
1	$1/30$	$3/30$	$1/30$	$5/30$
2	$2/30$	$6/30$	$2/30$	$10/30$
3	$3/30$	$9/30$	$3/30$	$15/30$
$P(y)$	$6/30$	$18/30$	$6/30$	**1**

c) O nº de anos decorridos desde a última visita ao dentista e número de cáries encontradas são v.a. independentes? Justifique.

- x e y são independentes , pois $\forall(x, y)$ temos:

$$P(x, y) = P(x).P(y)$$

$$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1) \times P(Y = 0)$$

$$\frac{1}{30} = \frac{5}{30} \times \frac{6}{30}$$

Exercício 3: A distribuição de probabilidades conjunta das **variáveis aleatórias independentes** X e Y é parcialmente apresentada a seguir:

$X \setminus Y$	-2	0	2	$P(X = x)$
1				$0,3$
2				$0,7$
$P(Y = y)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$	1

a) Complete a tabela.

- **Sabemos que:** $\sum_y P(Y = y) = 1$. **Então,**

$$P(Y = -2) + P(Y = 0) + P(Y = 2) = 1$$

$$0{,}2 + P(Y = 0) + 0{,}3 = 1$$

$$P(Y = 0) = 1 - 0{,}5$$

$$P(Y = 0) = 0,5$$

$X \setminus Y$	-2	0	2	$P(X = x)$
1	$0,06$	$0,15$	$0,09$	$0,3$
2	$0,14$	$0,35$	$0,21$	$0,7$
$P(Y = y)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$	1

- Por hipótese X e Y são independentes , então $\forall(x_i, y_j)$ temos:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i).P(Y = y_j)$$

- $P(X = 1, Y = -2) = P(X = 1).P(Y = -2) = 0{,}3 \times 0{,}2 = \mathbf{0,06}$
- $P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1).P(Y = 0) = 0{,}3 \times 0{,}5 = \mathbf{0,15}$
- $P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1).P(Y = 2) = 0{,}3 \times 0{,}3 = \mathbf{0,09}$
- $P(X = 2, Y = -2) = P(X = 2).P(Y = -2) = 0{,}7 \times 0{,}2 = \mathbf{0,14}$
- $P(X = 2, Y = 0) = P(X = 2).P(Y = 0) = 0{,}7 \times 0{,}5 = \mathbf{0,35}$
- $P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2).P(Y = 2) = 0{,}7 \times 0{,}3 = \mathbf{0,21}$

UFV

$X \setminus Y$	-2	0	2	$P(X = x)$
1	$0,06$	$0,15$	$0,09$	$0,3$
2	$0,14$	$0,35$	$0,21$	$0,7$
$P(Y = y)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$	1

b) $P\ (X > 1)$

$$P\ (X > 1) = P\ (X = 2)$$

$$= \mathbf{0,7}$$

c) $P\ (-2 < Y \leq 2)$

$$P\ (-2 < Y \leq 2) = P\ (Y = 0) + P\ (Y = 2)$$

$$= 0,5 + 0,3$$

$$= \mathbf{0,8}$$

UFV

$X \setminus Y$	-2	0	2	$P(X = x)$
1	$0,06$	$0,15$	$0,09$	$0,3$
2	$0,14$	$0,35$	$0,21$	$0,7$
$P(Y = y)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$	1

d) $P\,(Y < 2|X = 1)$

$$P\,(Y < 2|X = 1) = \frac{P\,(Y < 2\,, X = 1)}{P(X = 1)}$$

$$= \frac{P\,(Y = -2, X = 1) + P\,(Y = 0\,, X = 1)}{P(X = 1)}$$

$$= \frac{0{,}06 + 0{,}15}{0{,}3}$$

$$= \mathbf{0,7}$$

$X \backslash Y$	-2	0	2	$P(X = x)$
1	$0,06$	$0,15$	$0,09$	$0,3$
2	$0,14$	$0,35$	$0,21$	$0,7$
$P(Y = y)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$	1

e) $\boldsymbol{P\ (X \leq 1 | -2 \leq Y < 2)}$

$$P\ (X \leq 1| -2 \leq Y < 2) = \frac{P(X \leq 1 \,, -2 \leq Y < 2)}{P(-2 \leq Y < 2)}$$

$$= \frac{P\ (X = 1; Y = -2) + P\ (X = 1; Y = 0)}{P(Y = -2) + P(Y = 0)}$$

$$= \frac{0{,}06 + 0{,}15}{0{,}2 + 0{,}5}$$

$$= \frac{0{,}21}{0{,}7} = \mathbf{0,3}$$

Exercício 4: Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{c} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & para\ outros\ valores \end{cases}$$

a) Determine o valor de c.

Função densidade de probabilidade:

- $f(x) \geq 0\,, \forall\, x\ \in \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1}$.

$$\int_1^3 \frac{3x^2}{c} dx = 1$$

$$\frac{3}{c}\int_1^3 x^2 dx = 1$$

$$\frac{3}{c}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = 1$$

$$\frac{3}{c}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = 1$$

$$\frac{3}{c}\left(\frac{26}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{26}{c} = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{c = 26}$$

UFV

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{26} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & para\ outros\ valores \end{cases}$$

b) $\boldsymbol{P(1 < X \leq 2)}$

$$\boldsymbol{P(1 < X \leq 2)} = \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \frac{3x^2}{26} dx$$

$$= \frac{3}{26} \int_1^2 x^2 dx$$

$$= \frac{3}{26} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_1^2$$

$$= \frac{3}{26} \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right)$$

$$= \frac{3}{26} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{26}$$

Exemplo 5: Suponha que o tempo, em meses, para a recuperação de pacientes submetidos a um determinado tipo de cirurgia do coração pode ser modelado por uma variável aleatória contínua X, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3},\ para\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{12}(5-x), para\ 1 \leq x \leq 5 \\ 0, para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$$

a) **Calcule** $\boldsymbol{P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 3\right)}$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 3\right) = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3}dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{12}(5-x)dx$$

$$= \frac{x}{3}\bigg|_{1/2}^{1} + \frac{1}{12}\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{1}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1/2}{3}\right) + \frac{1}{12}\left[\left(5\times 3 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(5\times 1 - \frac{1^2}{2}\right)\right]$$

$$= \mathbf{\frac{4}{6}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3},\ para\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{12}(5-x), para\ 1 \leq x \leq 5 \\ 0, para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$$

b) Sabendo que um paciente se recuperou antes dos 3 meses, qual é a probabilidade de o mesmo ter se recuperado depois de $\frac{1}{2}$ mês?

$$P(X > 1/2 |\ X < 3\ ) = \frac{P\left(X > \frac{1}{2}, X < 3\right)}{P(X < 3)} = \frac{P\left(\frac{1}{2} < X < 3\right)}{P(X < 3)} = \frac{\mathbf{2/3}}{\mathbf{5/6}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

- Pelo item **a)** temos: $\boldsymbol{P\left(\frac{1}{2} < X < 3\right) = \frac{2}{3}}$. Assim, basta calcular:

$$P(X < 3) = \int_0^1 \frac{1}{3} dx + \int_1^3 \frac{1}{12}(5-x)dx$$

$$= \frac{x}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{12}\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right) + \frac{1}{12}\left[\left(5 \times 3 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(5 \times 1 - \frac{1^2}{2}\right)\right] = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$$

UFV

Exercício 6: Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua bidimensional com a seguinte função densidade de probabilidade conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3-y}{k} & 0 \le x \le 4 \text{ e } 0 \le y \le 2 \\ 0 & para\ outros\ valores\ de\ x\ e\ y \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante .

$$\int_0^2 \int_0^4 \frac{3-y}{k}\, dx\, dy = 1$$

$$\int_0^2 \frac{1}{k}(3x - yx)\Big|_0^4 = 1$$

$$\int_0^2 \frac{1}{k}(12 - 4y) = 1$$

$$\frac{1}{k}\left(12y - \frac{4y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 1$$

$$\frac{1}{k}(24 - 8) = 1$$

$$k = 16$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3-y}{16} & 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & para\ outros\ valores\ de\ x\ e\ y \end{cases}$$

b) $\boldsymbol{P(0 < X \leq 2, 0 < Y < 1).}$

$$\boldsymbol{P(0 < X \leq 2, 0 < Y < 1)} = \int_0^1 \int_0^2 \frac{3-y}{16} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{16}(3x - yx) \Big|_0^2$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{16}(6 - 2y)$$

$$= \frac{1}{16}\left(6y - \frac{2y^2}{2}\right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{16}(6 - 1)$$

$$= \frac{5}{16}$$

UFV

c) Obtenha h(y), a f.d.p. marginal de Y.

$$h(y) = \int_0^4 \frac{3-y}{16} dx = \int_0^4 \frac{3}{16} - \frac{y}{16} dx$$

$$= \left(\frac{3}{16}x - \frac{y}{16}x\right)\Big|_0^4$$

$$= \left[\left(\frac{3}{16} \times 4 - \frac{y}{16} \times 4\right) - \left(\frac{3}{16} \times 0 - \frac{y}{32} \times 0\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{y}{4}$$

$$\boxed{h(y) = \begin{cases} \dfrac{3-y}{4} & para\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & para\ outros\ valores\ de\ \ y \end{cases}}$$

c) $\boldsymbol{P(1 < Y < 2)}$**.**

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{3-y}{4} & para\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & para\ outros\ valores\ de\ \ y \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P(1 < Y < 2)} = \int_1^2 \frac{3-y}{4} dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(6-2) - \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

d) As variáveis *X* e *Y* são independentes? Justifique.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3-y}{16} & 0 \le x \le 4 \;\; e \;\; 0 \le y \le 2 \\ 0 & para\ outros\ valores\ de\ x\ e\ y \end{cases}$$

- X e Y são independentes se: $f(x,y) = h(y).g(x)$.
- Pelo item a) temos, $h(y) = \frac{3}{4} - \frac{y}{4}$.

$$f(x|y) = g(x)$$
$$f(y|x) = h(y)$$

$$g(x) = \int_0^2 \frac{3-y}{16} dy = \int_0^2 \frac{3}{16} - \frac{y}{16} dy$$

$$= \left(\frac{3}{16} y - \frac{1}{16} \times \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \left[\left(\frac{3}{16} \times 2 - \frac{2^2}{32}\right) - \left(\frac{3}{16} \times 0 - \frac{0^2}{32} \times 0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}$$

- $f(x,y) = h(y).g(x) = \left(\frac{3}{4} - \frac{y}{4}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{3-y}{16}$

e) Obtenha $\boldsymbol{f(x|y)}$, a f.d.p. condicional de $\boldsymbol{X}$ dado $\boldsymbol{Y = y}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3-y}{16} & 0 \leq x \leq 4 \;\; e \;\; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & para\ outros\ valores\ de\ x\ e\ y \end{cases}$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{\frac{3-y}{16}}{\frac{3}{4} - \frac{y}{4}}$$

$$= \left(\frac{3-y}{16}\right) \times \left(\frac{4}{3-y}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

- Pelo item b), concluímos que X e Y são independentes, logo

$$\boxed{\begin{matrix} f(x|y) = g(x) \\ f(y|x) = h(\mathrm{y}) \end{matrix}}$$

Bons estudos e boa prova!