

MAT146 - Cálculo I - Problemas de Otimização

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

Um problema de otimização é aquele onde se procura determinar os valores extremos de uma função, isto é, o maior ou o menor valor que uma função pode assumir em um dado intervalo.

Os métodos estudados para encontrar máximos e mínimos de funções podem ser aplicados para resolver problemas práticos. O primeiro passo consiste em compreender o problema e converter-lo num problema matemático estabelecendo a função que dever ser maximizada ou minimizada.

Vamos aplicar o que aprendemos até o momento para resolver alguns problemas práticos.

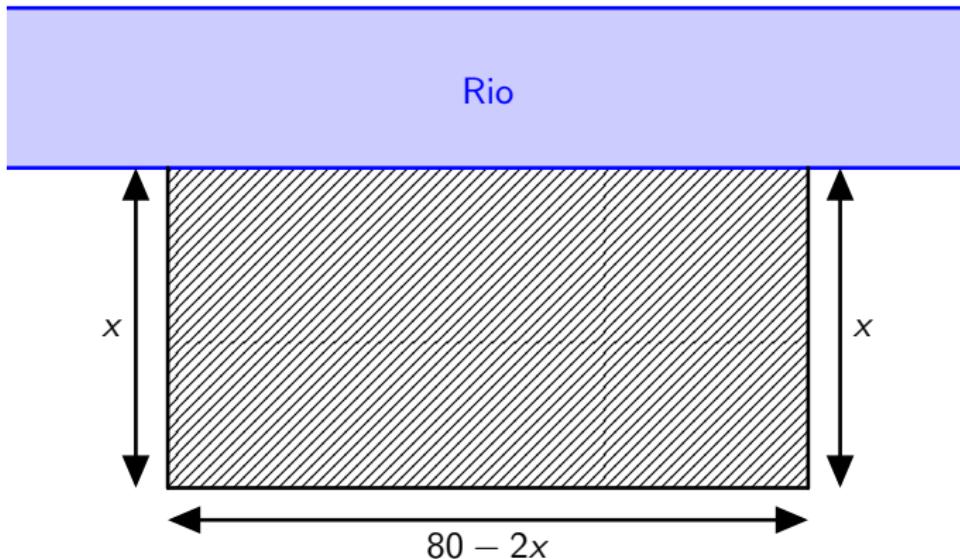
Podemos adotar um roteiro ou procedimento para resolver um problema de otimização.

- ▶ Compreendendo o problema: ler algumas vezes até compreender o que está sendo pedido, identificando o que deve ser minimizado ou maximizado.
- ▶ Se possível, faça uma ilustração para auxiliar seu raciocínio.
- ▶ Extrair todos os dados do problema.
- ▶ Deduzir uma função que descreva matematicamente o que deve ser minimizado ou maximizado, identificando as variáveis envolvidas.
- ▶ Identificar o domínio de aplicação da função.
- ▶ Aplicar as ferramentas do cálculo para minimizar ou maximizar a função deduzida anteriormente, no domínio da aplicação.

Exemplo

Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma região retangular junto a um rio para confinar alguns animais. O lado da região retangular junto à margem do rio não é cercado. Quais devem ser as medidas, em metros, da região para que a área cercada seja a maior possível?

Primeiramente, fazemos uma ilustração do que deve ser feito.



Chamaremos de x a largura da região retangular. Como a quantidade de arame utilizada deve ser de 80 metros, devemos ter o outro lado do retângulo igual a $80 - 2x$, uma vez que a margem do rio não deve ser cercada.

O objetivo é ter área máxima, ou seja, devemos maximizar a função que representa a área do cercado que é dada por

$$\begin{aligned}A(x) &= x(80 - 2x) \\&= 80x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 40.\end{aligned}$$

O domínio em questão são os valores da variável x que fazem sentido a modelagem do problema. Vamos utilizar as técnicas estudadas até aqui para resolver tal problema.

Primeiramente devemos encontrar os pontos críticos de A . Como A é derivável, os pontos críticos correspondem aos pontos que resolvem $A'(x) = 0$, no intervalo $(0, 40)$.

$$A'(x) = 0$$

$$80 - 4x = 0$$

$$x = 20.$$

Para encontrar a área máxima, basta comparar o valor da função A no ponto crítico encontrado e nos extremos do intervalo $[0, 40]$. Assim,

$$A(0) = 0$$

$$A(40) = 0$$

$$A(20) = 800.$$

Desta forma, a largura do cercado deve ser de 20 m e o comprimento deve ser de 40 m. Neste caso, a área obtida é máxima e tem valendo 800 m^2 .

O gráfico abaixo ilustra a área da região em função da largura do terreno. Observa-se que a função área A atinge seu máximo em $x = 20$, como havíamos encontrado anteriormente.

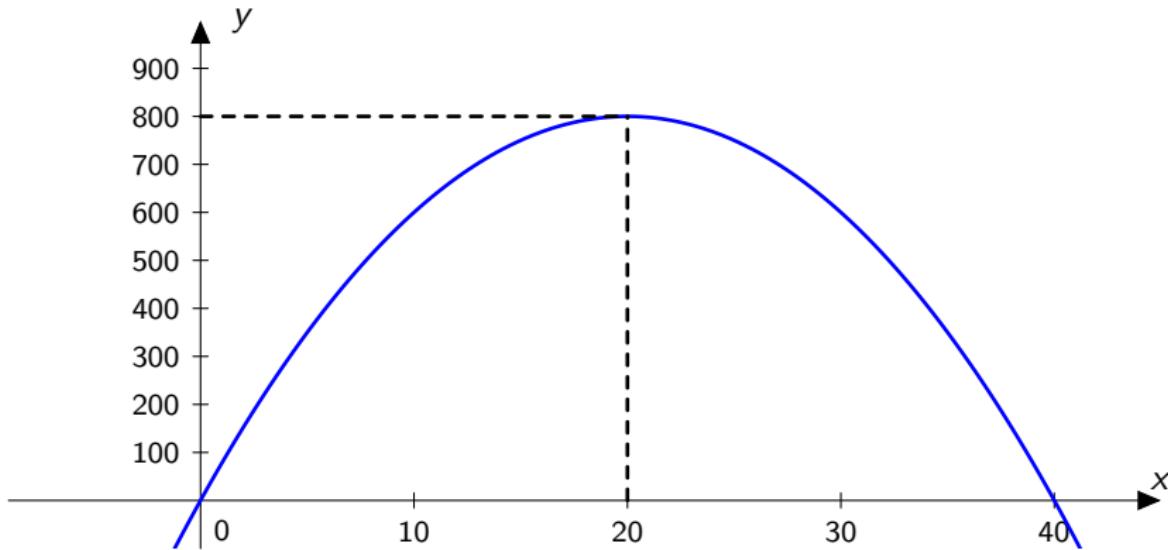
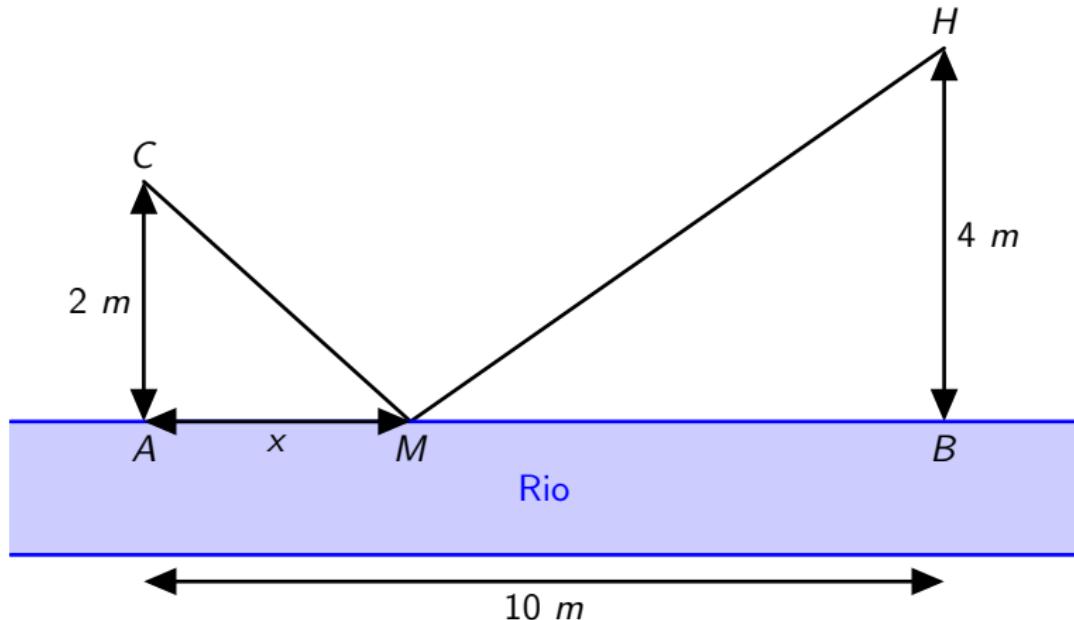


Figura : Gráfico de $A(x) = 80x - 2x^2$.

Exemplo

Um agricultor está em sua casa C situada a 2 metros da margem retilínea de um rio. Ele quer encher o seu regador de água em um ponto M na margem deste rio e, depois, se dirigir para sua horta H , situada a 4 metros da margem do rio. A distância entre os pés A e B das perpendiculares traçadas de C e H sobre a margem do rio é igual a 10 metros. Qual deve ser a posição do ponto M , para que o trajeto casa-rio-horta seja o menor possível?

Devemos encontrar a distância de A a M , que chamaremos de x , de tal maneira que a soma da distância da casa ao rio com a distância do rio até a horta seja mínima.



A distância da casa ao ponto M é dada por $d_1(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ e a distância do ponto M até a horta é $d_2(x) = \sqrt{(10 - x)^2 + 16}$.

Desta forma, devemos minimizar a função distância d dada por

$$\begin{aligned}d(x) &= \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(10 - x)^2 + 16} \\&= \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 20x + 116}, \quad 0 \leq x \leq 10.\end{aligned}$$

Primeiramente, vamos encontrar os pontos críticos da função d no intervalo $(0, 10)$. Como a função é derivável em $(0, 10)$, os pontos críticos são tais que $d'(x) = 0$.

A derivada de d é dada por

$$\begin{aligned}d'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 20x + 116}} \cdot (2x - 20) \\&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{x - 10}{\sqrt{x^2 - 20x + 116}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$d'(x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{x - 10}{\sqrt{x^2 - 20x + 116}}$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 4} = \frac{(x - 10)^2}{x^2 - 20x + 116}$$

Assim, manipulando esta equação, encontramos

$$3x^2 + 20x - 100 = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}x &= \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{6} \\&= \frac{-20 \pm 40}{6}.\end{aligned}$$

Assim,

$$x = \frac{10}{3} \quad \text{ou} \quad x = -10.$$

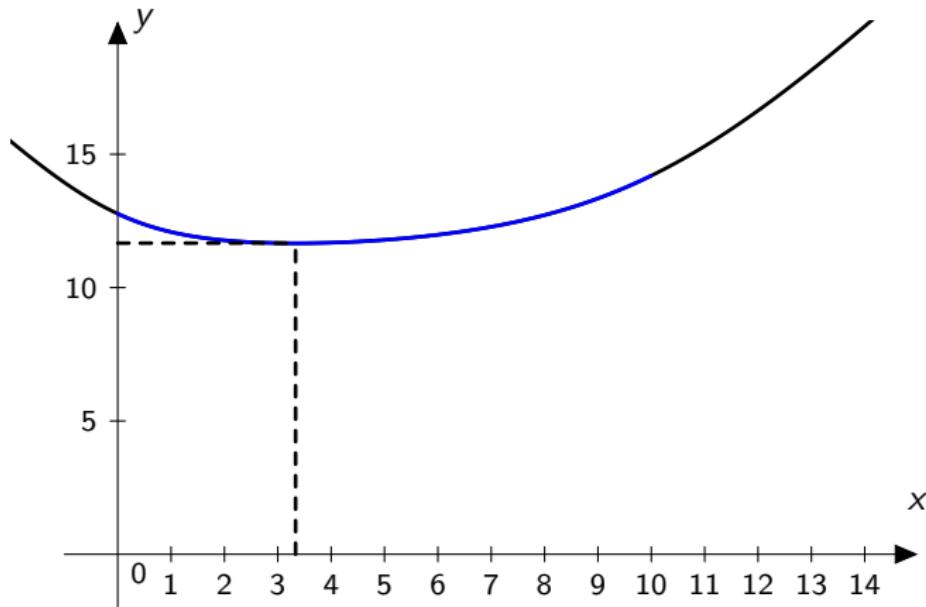
Devemos descartar $x = -10$, pois não faz parte do domínio de aplicação. Para encontrar a menor distância, devemos comparar o valor da função d em $x = 0$, $x = \frac{10}{3}$ e $x = 10$. Desta forma,

$$d(0) = 2 + \sqrt{116}, \quad d(10) = 4 + \sqrt{114}$$

$$\text{e} \quad d\left(\frac{10}{3}\right) = \sqrt{\frac{136}{9}} + \sqrt{\frac{544}{9}} < 12.$$

Logo, o ponto M deve estar localizado a uma distância $x = \frac{10}{3}$ metros do ponto A .

Abaixo, segue o gráfico do comprimento do trajeto percorrido em função da localização do ponto M .



Exemplo

Quadrados iguais são cortados dos cantos de uma folha de papelão retangular medindo 30 cm de largura e 50 cm de comprimento. As abas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma caixa sem tampa. Quanto deve ser a medida x , em cm, dos lados dos quadrados retirados, para que o volume da caixa seja o maior possível?

A figura abaixo ilustra a situação.

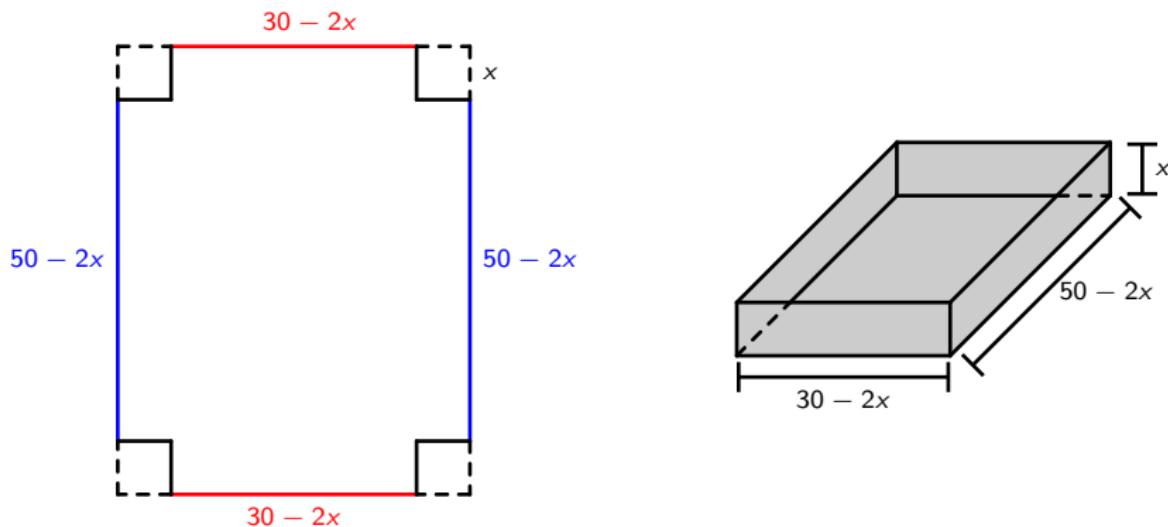


Figura : Problema da Caixa

A modelagem do problema acima é dada pela fórmula

$$\begin{aligned}V(x) &= (50 - 2x)(30 - 2x)x \\&= 4x^3 - 160x^2 + 1500x, \quad 0 \leq x \leq 15.\end{aligned}$$

Os extremos do intervalo de definição da função V não fazem sentido prático, mas serão considerados para garantir que a função V possua um máximo global neste intervalo, uma vez que a função é contínua em $[0, 15]$.

Os pontos crítico de V no intervalo aberto $(0, 15)$ são pontos tais que $V'(x) = 0$, uma vez que a função é derivável. Assim,

$$V'(x) = 0$$

$$12x^2 - 320x + 1500 = 0$$

$$3x^2 - 80x + 375 = 0$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{80 \pm \sqrt{80^2 - 12 \cdot 375}}{6} \\&= \frac{80 \pm \sqrt{1900}}{6} \\&= \frac{40 \pm 5\sqrt{19}}{3}.\end{aligned}$$

Consideraremos somente $x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3}$, pois é o único ponto crítico no intervalo que estamos interessados em otimizar a função V . Para encontrar o maior volume possível, devemos comparar o valor de V neste ponto crítico e nos extremos do intervalo. Daí, como

$$V(0) = 0, \quad V(15) = 0, \quad \text{e}$$

$$V\left(\frac{40 - 5\sqrt{19}}{3}\right) > 0,$$

o maior volume é atingido quando retiramos, nos cantos, um quadrado de lado medindo $x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3}$ e o volume máximo será $V\left(\frac{40 - 5\sqrt{19}}{3}\right)$.

Abaixo é apresentado o gráfico do volume da caixa em função da altura x da caixa.

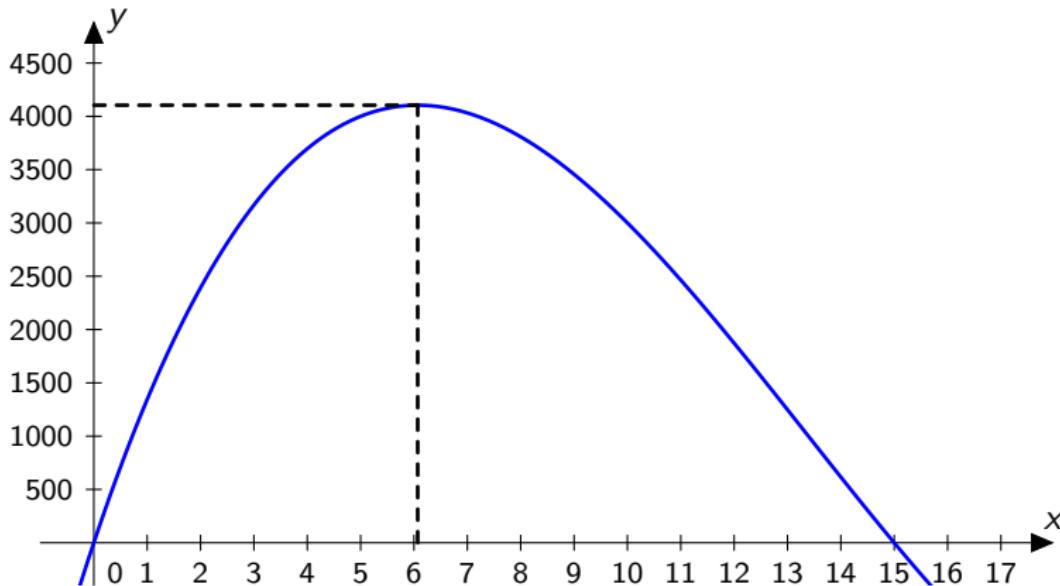


Figura : Gráfico da função $V(x) = 4x^3 - 160x^2 + 1500x$

Exemplo

Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de rio de 9 m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 30 m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R\$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R\$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico possível?

A figura abaixo ilustra a situação.

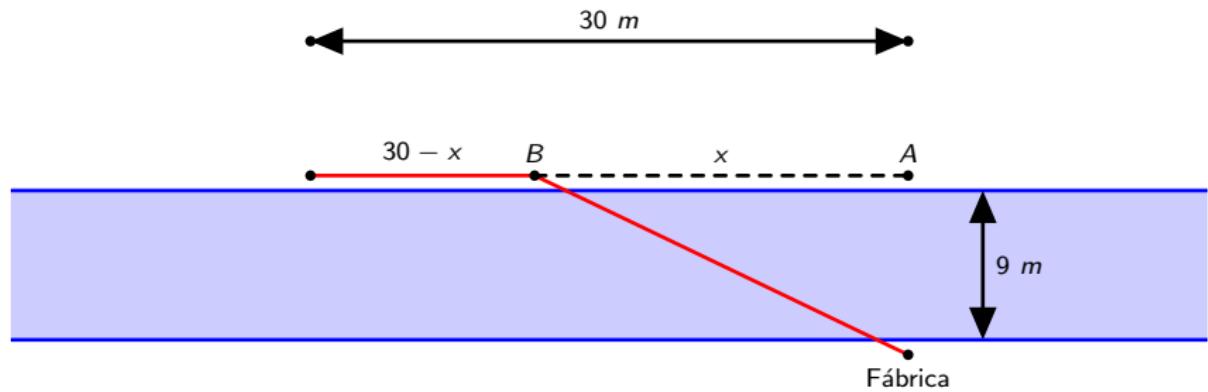


Figura : Ligação Usina e Fábrica

Devemos minimizar o custo total da obra. Considere o ponto A como sendo o ponto mais próximo da fabrica localizado na margem oposta do rio. Seja B o ponto localizado na margem do rio do mesmo lado da usina, onde será feita a transição entre o cabo por terra e o cabo por água. Seja x a distância entre A e B . Assim, estenderemos $30 - x$ metros de cabo por terra e $\sqrt{x^2 + 81}$ metros de cabo sobre o rio. Assim, o custo total é dado por

$$c(x) = 4 \cdot (30 - x) + 5\sqrt{x^2 + 81}, \quad 0 \leq x \leq 30.$$

Queremos minimizar o custo de instalação da rede, ou seja, queremos minimizar a função c .

Como a função c é derivável em $(0, 30)$, para encontrar os pontos em críticos neste intervalo, devemos resolver $c'(x) = 0$. Para isso, observe que

$$\begin{aligned}c'(x) &= -4 + \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 81}} \cdot 2x \\&= -4 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 81}}.\end{aligned}$$

Daí,

$$c'(x) = 0.$$

$$\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 81}} = 4$$

$$\frac{25x^2}{x^2 + 81} = 16$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12.$$

O valor $x = -12$ é descartado uma vez que não faz parte do domínio da função c e não faz sentido prático.

Agora basta comparar os valores de c em $x = 0$, $x = 12$ e $x = 30$. Desta forma,

$$c(0) = 165, \quad c(12) = 147 \quad \text{e} \quad c(30) = 15\sqrt{109} > 150.$$

Logo, o menor custo é obtido quando estendemos o cabo por terra por uma distância de 18 metros e o restante pelo rio e o custo mínimo é de $c(12) = 147$ reais.

O gráfico abaixo ilustra o custo da obra em função da distância x descrita no problema.

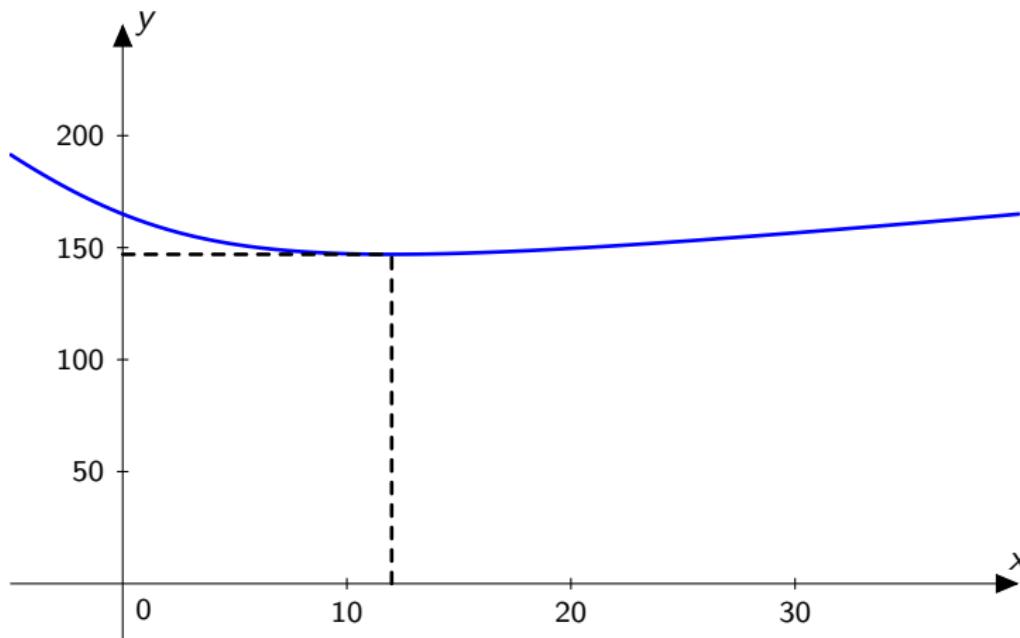
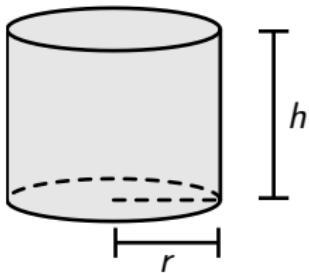


Figura : Gráfico da função c

Exemplo

Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter a capacidade de $375\pi \text{ cm}^3$. O custo do material usado para a base do recipiente é de R\$ 0,15 por cm^2 e o custo do material usado na lateral é de R\$ 0,05 por cm^2 . Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizam o custo do material para construí-lo.



Devemos encontrar dimensões para este cilindro de maneira que o custo de fariação deste recipiente seja o menor possível. Para isso devemos saber a área da base e a área lateral deste cilindro. Se o raio da base é r e o cilindro tem altura h , então a área da base e a área lateral são dadas respectivamente por

$$A_b = \pi r^2 \quad \text{e} \quad A_l = 2\pi rh.$$

Desta forma, o custo total de produção de tal recipiente, em centavos, é dado por

$$\begin{aligned} C &= 15 \cdot A_b + 5 \cdot A_l \\ &= 15\pi r^2 + 10\pi rh. \end{aligned}$$

Observe que o custo está dependendo do raio da base e da altura do cilindro. Temos ferramentas apenas para trabalhar com funções de uma variável. Mas observe que foi imposta mais uma restrição ao problema, a saber, o volume do cilindro é $375\pi \text{ cm}^3$. Assim, podemos isolar uma das dimensões em função da outra

$$V = 375\pi$$

$$\pi r^2 h = 375\pi$$

$$h = \frac{375}{r^2}.$$

Substituindo esta relação na função custo teremos

$$\begin{aligned}C(r) &= \pi \left(15r^2 + 10r \frac{375}{r^2} \right) \\&= \pi \left(15r^2 + \frac{3750}{r} \right), \quad r > 0.\end{aligned}$$

Como C é derivável em todo o seu domínio, os pontos críticos são pontos tais que $C'(x) = 0$. Observe que

$$C'(r) = \pi \left(30r - \frac{3750}{r^2} \right).$$

Assim,

$$C'(r) = 0$$

$$30r = \frac{3750}{r^2}$$

$$r^3 = 125$$

$$r = 5.$$

Desta forma, o único ponto crítico é $r = 5$. Devemos verificar se tal ponto é realmente um ponto de mínimo. Para isso, vamos utilizar o teste da derivada segunda. Como

$$C''(r) = \pi \left(30 + \frac{7500}{r^3} \right),$$

obtemos que

$$C''(5) = \pi \left(30 + \frac{7500}{125} \right) > 0,$$

caracterizando um ponto de mínimo, como desejado. Logo, as dimensões que minimizam o custo de produção são $r = 5 \text{ cm}$ e $h = \frac{375}{25} = 15 \text{ cm}$ e o menor custo é de $C(5) = 1125\pi$ centavos.

Segue abaixo o gráfico que descreve o volume do cilindro em função do raio da sua base.

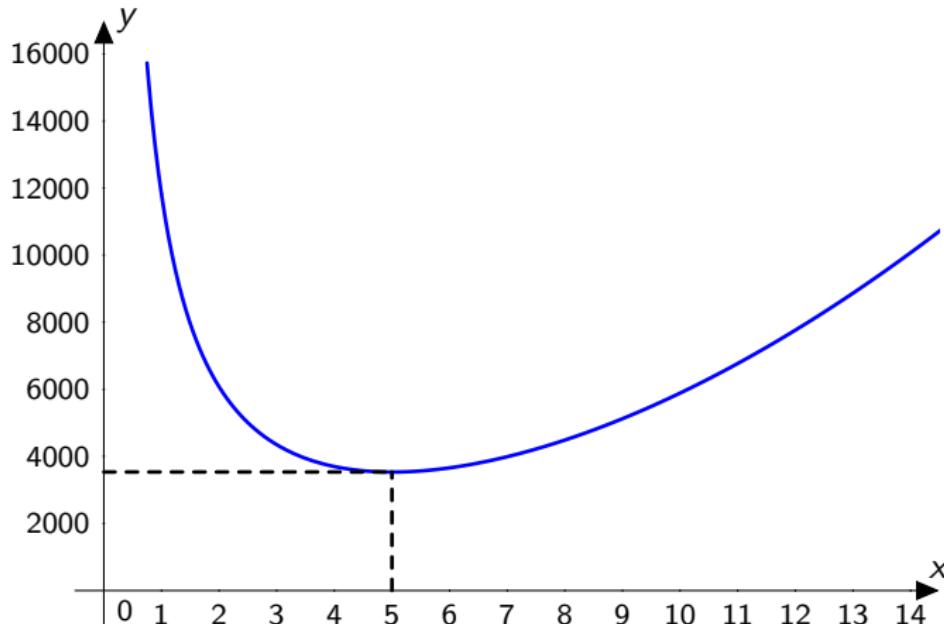


Figura : Gráfico da função C .

Exemplo

A rapidez com que um boato se espalha em uma comunidade é proporcional ao produto do número de pessoas que já ouviram o boato pelo número de pessoas que ainda não o ouviram. Mostre que a rapidez é máxima no instante em que metade das pessoas ainda não ouviu o boato.

Façamos algumas considerações antes de modelar o problema. Suponhamos que a comunidade seja constituída por um número N de habitantes. Seja x o número de pessoas que sabem de determinado boato. Assim, $N - x$ pessoas não sabem do boato. Desta forma, considerando como no enunciado, temos que a velocidade de propagação de um boato é dada pela função

$$v(x) = Kx(N - x) = K(Nx - x^2), \quad 0 \leq x \leq N,$$

onde K é uma constante positiva (constante de proporcionalidade). Devemos ter claro que, na prática, a variável x pode assumir apenas valores inteiros positivos, mas para utilizar as ferramentas do cálculo, trabalharemos assumindo x como um número real em $[0, N]$.

Para encontrar o maior valor desta aplicação procederemos como visto anteriormente. Primeiramente procuraremos os pontos críticos de v no intervalo aberto $(0, N)$. Com v é uma função derivável em $(0, N)$, os pontos críticos são pontos tais que $v'(x) = 0$. Assim,

$$v'(x) = 0$$

$$K(N - 2x) = 0$$

$$x = \frac{N}{2}.$$

Como estamos em um intervalo fechado, devemos apenas comparar o valor da função v no ponto crítico e nos extremos do intervalo. Assim,

$$v(0) = 0, \quad v(N) = 0 \quad \text{e} \quad v\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{KN^2}{4} > 0,$$

concluímos que a propagação do boato é maior quando $x = \frac{N}{2}$.

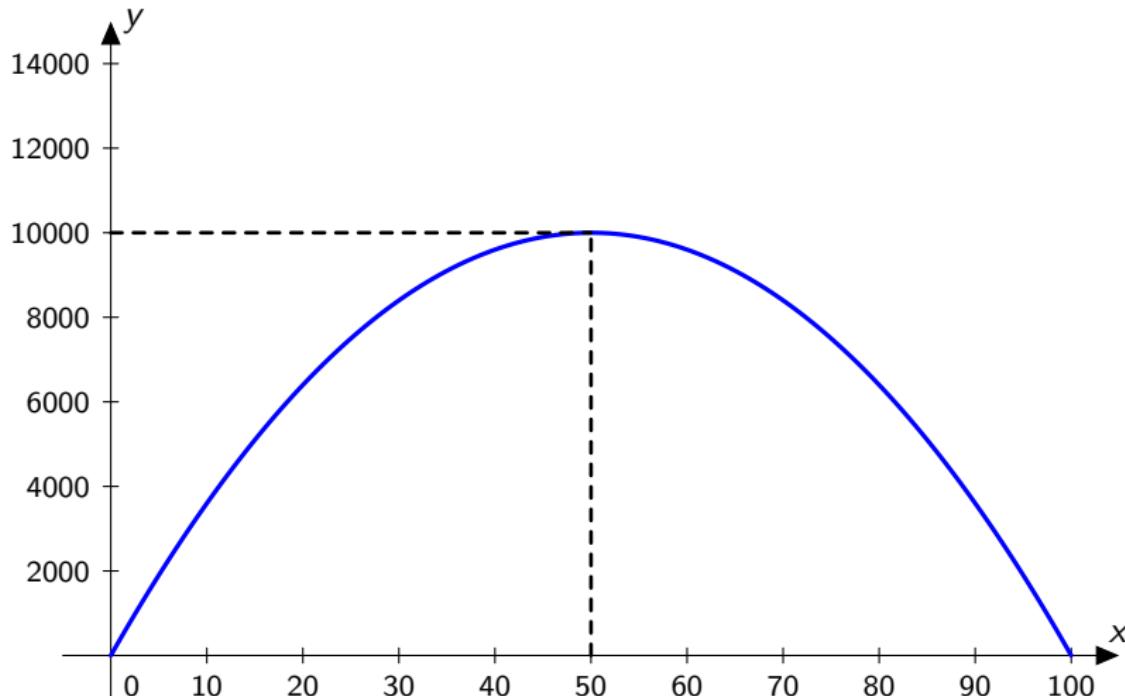


Figura : Gráfico da função v para $N = 100$ e $K = 4$.

Exemplo

Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito num cone circular reto com raio de 5 cm e de altura 12 cm.

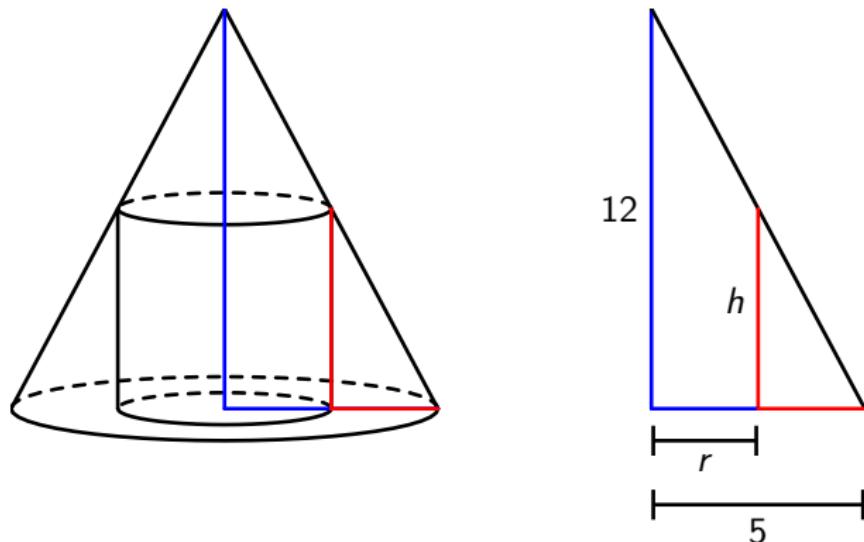


Figura : Cilindro Inscrito em um Cone

Devemos achar as dimensões r e h para que o cilindro tenha volume máximo. Desta forma, devemos expressar o volume do cilindro em função de uma destas duas dimensões e maximizar a função volume.
O volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h.$$

Por semelhança de triângulos expressamos a altura h em função do raio r como sendo

$$\frac{12}{5} = \frac{h}{5 - r}$$
$$h = \frac{12(5 - r)}{5}.$$

Substituindo esta relação na fórmula do volume do cilindro encontramos

$$\begin{aligned}V(r) &= \frac{12\pi}{5}r^2(5 - r) \\&= \frac{12\pi}{5}(5r^2 - r^3), \quad 0 \leq r \leq 5.\end{aligned}$$

Os pontos críticos de V no intervalo $(0, 5)$ são facilmente encontrados resolvendo a equação

$$V'(r) = 0,$$

no intervalo $(0, 5)$.

Desta forma,

$$V'(r) = 0$$

$$\frac{12\pi}{5}(10r - 3r^2) = 0$$

$$10r - 3r^2 = 0$$

$$r(10 - 3r) = 0.$$

Daí $r = 0$ ou $r = \frac{10}{3}$. Como estamos procurando pontos críticos em $(0, 5)$,

consideraremos apenas $r = \frac{10}{3}$.

Para encontrar o maior volume, basta comparar o valor da função V em $r = 0$, $r = \frac{10}{3}$ e $r = 5$. Desta forma,

$$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{12\pi}{5} \cdot \frac{100}{9} \left(5 - \frac{10}{3}\right) > 0 \quad \text{e} \quad V(5) = 0.$$

Assim, o volume máximo obtido quando $r = \frac{10}{3}$ e $h = 4$.

O gráfico do volume do cilindro inscrito no cone, em função do raio da base r , é ilustrado abaixo.

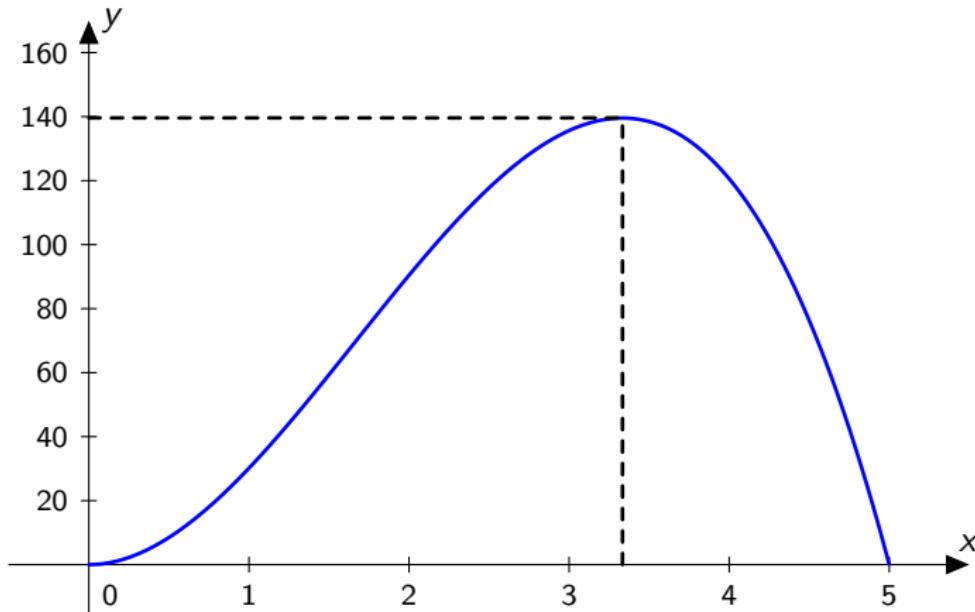


Figura : Gráfico da função V .