MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

MAT 271 – Cálculo Numérico – UFV/2023-I

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES REAIS

(n equações e n incógnitas)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2, \dots, n$ (coeficientes), $b_i \in \mathbb{R}, i, = 1,2, \dots, n,$

$x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n$ (incógnitas).

SISTEMA LINEAR NA FORMA MATRICIAL $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Consideremos que o sistema tem solução única. Portanto $detA \neq 0$.

MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

Suponhamos que a matriz A possa ser escrita como o produto de uma matriz triangular inferior L por uma matriz triangular superior U, nesta ordem, isto é:

$$A = LU.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{33} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U}$$

Dizemos, neste caso, que A admite uma decomposição LU, ou: $A = LU$ é uma decomposição LU da matriz A.

Mais tarde, veremos em que condições tal decomposição é possível.

MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

Como o sistema é $Ax = b$ e $A = LU$, temos o seguinte:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad (LU)x = b \quad \Leftrightarrow \quad L(Ux) = b \qquad \boxed{Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b} \quad (*)$$

Como $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$(matriz das incógnitas), Ux resultará numa matriz incógnita de mesma dimensão, que chamaremos de $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Assim, em $(*)$, teremos $Ly = b$. Isto significa que, do sistema linear inicial $Ax = b$, foram gerados dois outros sistemas

$$Ly = b \quad (1) \qquad\qquad Ux = y \quad (2)$$

MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \\ Ux = y & (2) \end{cases}$$

Resolvemos, então, o sistema linear (1), que é um sistema triangular inferior (de fácil resolução), encontrando uma solução $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

A solução y, encontrada em (1) é então, colocada no sistema (2), que passa a ter como incógnita somente x.

O sistema (2) é um sistema triangular superior (de fácil resolução), cuja solução será, então, a solução para o sistema inicial $Ax = b$.

Este é, portanto, o método da decomposição LU.

EXEMPLO 1

Seja o sistema linear: $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$.

Na forma matricial: $Ax = b$, temos: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Calculando o determinante de A, obtemos $detA = 8$. Assim, o sistema tem solução única.

Como aprenderemos mais adiante, a matriz A admite uma decomposição$A = LU$, sendo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO1

Sistema (1): $Ly = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Solução: $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Levando esta solução y no sistema (2), temos:

Sistema (2): $Ux = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Solução: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Portanto, a solução do sistema $Ax = b$ dado é: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Na forma de tripla (terno) de $\mathbb{R}^3$, a solução do sistema é: $x = (1,1,1)$.

UMA PRIMEIRA QUESTÃO: QUANDO É POSSÍVEL FAZER A DECOMPOSIÇÃO LU DE UMA MATRIZ?

Para responder a esta pergunta, apresentaremos, antes, o seguinte conceito:

Menores principais de uma matriz:

Seja $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ uma matriz $n \times n$. Para cada k, $k = 1,2,\ldots,n$, definimos o menor principal de ordem k da matriz A, denotado por Δ_k, como sendo o determinante da matriz A_k (submatriz de A), formada pelas k primeiras linhas e as k primeiras colunas da matriz A.

MENORES PRINCIPAIS DE UMA MATRIZ $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = det[a_{11}] = a_{11}$$

MENOR PRINCIPAL DE ORDEM 1

$$\Delta_2 = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

MENOR PRINCIPAL DE ORDEM 2

$$\Delta_3 = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

MENOR PRINCIPAL DE ORDEM 3

$$\vdots$$

$$\Delta_n = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix} = detA$$

MENOR PRINCIPAL DE ORDEM n

UM TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO LU
(MÉTODO DE DOOLITTLE)

Seja $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ uma matriz $n \times n$. Suponha que todos os menores principais Δ_k, para $k = 1,2,\dots,n-1$, sejam não-nulos.

Então a matriz A pode ser decomposta como $A = LU$, onde $L = \left(l_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ é uma matriz triangular inferior e $U = \left(u_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ é uma matriz triangular superior.

Além disso, L e U podem ser obtidas de forma única com a condição: $l_{ii} = 1$, para todo $i = 1,2,\dots,n$, (os elementos da diagonal de L são todos iguais a 1).

Esta é uma condição simplificadora nos cálculos das matrizes L e U e caracteriza o Método de Doolittle (a Decomposição LU de Doolittle).

ENCONTRANDO L E U A PARTIR DO TEOREMA

O teorema acima nos diz, que se os menores principais até a ordem $n-1$ da matriz A, Δ_1, Δ_2, Δ_3,..., Δ_{n-1}, são todos não nulos, então é possível obter uma decomposição $A = LU$ da matriz A.

Além disso, ele nos diz que os elementos da diagonal da matriz L são todos iguais a 1 (condições simplificadoras), o que nos ajuda na obtenção das matrizes L e U .

Vejamos: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$

Para encontrar L, precisamos encontrar seus elementos abaixo da diagonal.

Para encontrar U, precisamos encontrar seus elementos acima da diagonal e os elementos da diagonal.

Usamos, então, o fato de que $A = LU$ para determinar tais elementos e, consequentemente, encontrar L e U.

ENCONTRANDO L E U A PARTIR DO TEOREMA

Para encontrar os elementos de L e de U, usamos o fato de que $A = LU$, isto é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}$$

Observe que na multiplicação LU, ao operarmos a primeira linha de L com cada coluna de U, concluiremos que $u_{1j} = a_{1j}$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$, ou seja, a primeira linha da matriz U coincide com a primeira linda da matriz A.

Isto reduz a quantidade de elementos a serem encontrados na matriz U.

ENCONTRANDO L E U A PARTIR DO TEOREMA

Usamos, então, o fato de que $A = LU$, já sabendo que a primeira linha de U coincide com a primeira linha de A.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & 1 \end{bmatrix}}_{L}
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}
$$

OBSERVAÇÃO: $detA = detU$.

EXEMPLO 2

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ do Exemplo 1 .

Calculando os seus menores principais de ordem 1 e 2, temos:

$\Delta_1 = det[2] = 2 \neq 0$ e $\Delta_2 = det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \neq 0.$

Portanto A admite a decomposição $A = LU.$

Vamos encontrar $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$

EXEMPLO 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(Segunda linha de L)x (primeira coluna de U): $2l_{21} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{l_{21} = 0}$

(Segunda linha de L)x (segunda coluna de U): $0l_{21} + 1u_{22} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u_{22} = 2}$

(Segunda linha de L)x (terceira coluna de U): $1l_{21} + 1u_{23} + 0u_{33} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u_{23} = 1}$

(terceira linha de L)x (primeira coluna de U): $2l_{31} + 0l_{32} + 0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{l_{31} = 1/2}$

(terceira linha de L)x (segunda coluna de U): $0l_{31} + l_{32}u_{22} + 0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2l_{32} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{l_{32} = 1/2}$

(terceira linha de L)x (terceira coluna de U): $1l_{31} + l_{32}u_{23} + 1u_{33} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 1/2 + 1/2 + 1u_{33} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u_{33} = 2}$

$$\boxed{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \boxed{U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

EXEMPLO 3

Seja o sistema $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Vejamos se o sistema tem solução única e se é possível aplicar o método da decomposição LU para encontrar tal solução.

Calculando o determinante de A, obtemos $detA = 77$, o que garante que o sistema possui solução única.

Calculando os seus menores principais de ordem 1 e 2, temos:

$\Delta_1 = det[4] = 4 \neq 0$ e $\Delta_2 = det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 14 \neq 0$.

Portanto A admite a decomposição $A = LU$ e é possível aplicar o método.

EXEMPLO 3

Encontrando L e U: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(Segunda linha de L)x (primeira coluna de U): $4l_{21} = 1$ $\boxed{l_{21} = 1/4}$

(Segunda linha de L)x (segunda coluna de U): $2l_{21} + 1u_{22} = 4 \Longrightarrow 1/2 + u_{22} = 4$ $\boxed{u_{22} = 7/2}$

(Segunda linha de L)x (terceira coluna de U): $1l_{21} + 1u_{23} + 0u_{33} = 2 \Longrightarrow 1/4 + u_{23} = 2$ $\boxed{u_{23} = 7/4}$

(terceira linha de L)x (primeira coluna de U): $4l_{31} + 0l_{32} + 0 = 2$ $\boxed{l_{31} = 1/2}$

(terceira linha de L)x (segunda coluna de U): $2l_{31} + l_{32}u_{22} + 0 = 3 \Longrightarrow 1 + l_{32}(7/2) = 3$ $\boxed{l_{32} = 4/7}$

(terceira linha de L)x (terceira coluna de U): $1l_{31} + l_{32}u_{23} + 1u_{33} = 7 \Longrightarrow 1/2 + 1 + 1u_{33} = 7$ $\boxed{u_{33} = 11/2}$

$$\boxed{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4/7 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \boxed{U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7/2 & 7/4 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{bmatrix}}$$

EXEMPLO3

Aplicando o método da decomposição LU:

Resolvendo o sistema $Ly = b$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$:

$\boxed{y_1 = 2;}$

$(1/4)y_1 + y_2 = 1 \quad \Longrightarrow 1/2 + y_2 = 1 \qquad \boxed{y_2 = 1/2;}$

$(1/2)y_1 + (4/7)y_2 + y_3 = 5 \quad \Longrightarrow 1 + 2/7 + y_3 = 5 \quad \boxed{y_3 = 26/7;}$

Solução de $Ly = b$: $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 26/7 \end{bmatrix}.$

EXEMPLO3

Resolvendo o sistema $Ux = y$: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7/2 & 7/4 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 26/7 \end{bmatrix}$:

$(11/2)x_3 = 26/7$ $\quad \boxed{x_3 = 52/77;}$

$(7/2)x_2 + (7/4)x_3 = 1/2 \quad \Longrightarrow (7/2)x_2 + (7/4)(52/77) = 1/2$ $\quad \boxed{x_2 = -15/77;}$

$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \quad \Longrightarrow 4x_1 + 2(-15/77) + 52/77 = 2$ $\quad \boxed{x_1 = 33/77;}$

Portanto, a solução do sistema $Ax = b$ dado é: $x = \begin{bmatrix} 33/77 \\ -15/77 \\ 52/77 \end{bmatrix}$.

Na forma de tripla de $\mathbb{R}^3$, a solução do sistema é: $x = \left(\frac{33}{77}, -\frac{15}{77}, \frac{52}{77}\right)$.