EST 105
INICIAÇÃO À ESTATÍSTICA

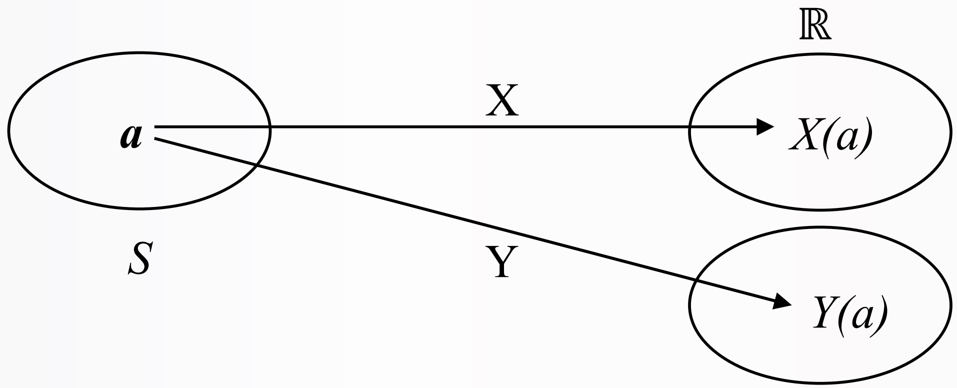
V. A. D. Bidimensionais
Resumo

Departamento de Estatística – UFV
Av. Peter Henry Rolfs, s/n
Campus Universitário
36570.977 – Viçosa, MG
http://www.det.ufv.br/

UFV

Definição

- Variáveis aleatórias bidimensionais surgem quando, para um determinado experimento aleatório, cada resultado a do espaço amostral S se associa a dois resultados $X(a) = x$ e $Y(a) = y$. Isto é,



X é uma v.a. unidimensional

Y é uma v.a. unidimensional

(X, Y) é uma v.a. bidimensional

- **Exemplos:** (i) X: Idade do indivíduo e Y: N° de redes sociais que o indivíduo utiliza; (ii) X: N° de erros de arbitragem e Y: N° de derrotas de um time; (iii) X: Consumo de ração em Kg e Y: Ganho de peso em Kg, etc.

Observação: Em determinadas situações, X e Y não estão necessariamente ligadas a um mesmo experimento, mas existe uma razão bem definida para estudar estas variáveis conjuntamente.

Classificação

- As v.a. bidimensionais são classificadas de acordo com a natureza dos possíveis valores reais assumidos por elas. Nesta disciplina consideraremos apenas os seguintes casos:

- **v.a. bidimensionais discretas:** X e Y são v.a. discretas. Isto é, assumem valores num conjunto enumerável (finito ou infinito). Por exemplo: (i) X: n° de acidentes por mês em uma rodovia e Y: n° de operações policiais em um mês; (ii) X: idade do indivíduo e Y: número de filhos, etc.

- **v.a. bidimensionais contínuas:** X e Y são v.a. contínuas. Isto é, podem assumir valores em algum intervalo dos números reais (conjunto não enumerável). Por exemplo: (i) X: dose recebida de um medicamento e Y: tempo de reação ao medicamento; (ii) X: quantidade de ração ingerida e Y: ganho de peso de um animal, etc.

(X,Y) Variável Aleatória Discreta Bidimensional

- Da mesma forma que no caso unidimensional, no caso bidimensional temos associado à variável aleatória bidimensional (X, Y) um modelo de distribuição de probabilidades. Naturalmente, esse modelo possui uma função, que sob certas circunstâncias, poderá ser utilizada para atribuir probabilidades.

Função de Probabilidade Conjunta ou f. p. c.

- Chama-se **função de probabilidade conjunta** a função que associa a cada possível realização (x_i, y_i) da v. a. d. bidimensional (X, Y) a sua probabilidade de ocorrência. Isto é,

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(x_i, y_j),\ i=1,2,\ldots,r \quad e \quad j=1,2,\ldots,s.$$

- Para que a função $P(x_i, y_j)$ seja uma f. p. conjunta é necessário que a mesma satisfaça às seguintes condições:

$$i)\ P(x_i, y_j) \geq 0, \forall\ par\ (x_i, y_j)$$

$$ii)\ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} P(x_i, y_j) = 1$$

- O conjunto de pares $[(x_i, y_j), P(x_i, y_j)]$ dispostos em uma tabela de dupla entrada é chamado de **distribuição de probabilidade conjunta**.

X\Y	y_1	y_2	...	y_s	
x_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_1, y_2)$	...	$P(x_1, y_s)$	
x_2	$P(x_2, y_1)$	$P(x_2, y_2)$	...	$P(x_2, y_s)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	
x_r	$P(x_r, y_1)$	$P(x_r, y_2)$	...	$P(x_r, y_s)$	
					1

Exemplo 1: Considere as seguintes variáveis aleatórias discretas: *X:* número de interrupções da internet observadas no período da manhã e *Y:* número de interrupções da internet observadas no período da tarde; em uma determinada semana. A **função de probabilidade conjunta** para a variável aleatória bidimensional (X, Y) é dada por:

$$P(X = x_i, y = y_j) = \begin{cases} \dfrac{2x_i + y_j}{18}, & x_i = 0 \; e \; 1; \;\; y_j = 1,2,3. \\ 0, & \text{para outros valores de } x_i \; e \; y_j. \end{cases}$$

Pede-se:

a) Apresente a distribuição de probabilidade conjunta de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

b) Qual é a probabilidade de não haver interrupção de internet pela manhã e haver duas interrupções a tarde?

c) Calcule a probabilidade de haver uma interrupção de internet pela manhã e mais de uma a tarde.

Distribuições Marginais

- Dada a distribuição de probabilidade conjunta da v. a. d. bidimensional (X, Y), é possível obter **as distribuições marginais de *X* e de *Y***.
- As marginais são distribuições de X considerando todos os possíveis resultados para Y e, de Y considerando todos os possíveis resultados de X.
- Para obter as marginais, basta somar as linhas ou colunas da distribuição conjunta, conforme abaixo:

Marginal de *X*: $P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{s} P(x_i, y_j)$

Marginal de *Y*: $P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{r} P(x_i, y_j)$

- Com as probabilidades marginais para cada valor de X e de Y, é possível construir as distribuições marginais de cada variável aleatória.

- **Distribuição Marginal de *X***

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_r	
$\boldsymbol{P(x_i)}$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_r)$	**1**

- **Distribuição Marginal de *Y***

$\boldsymbol{y_j}$	y_1	y_2	...	y_s	
$\boldsymbol{P(y_j)}$	$P(y_1)$	$P(y_2)$	...	$P(y_s)$	**1**

UFV

Exemplo 2: Considerando novamente o caso apresentado no Exemplo 1, cuja distribuição de probabilidade conjunta é dada por:

x / y	1	2	3	
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	
1	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$	
				1

Pede-se:

a) A distribuição Marginal de *X*.

b) A distribuição Marginal de *Y*.

c) Calcule a probabilidade de haver até duas interrupções de internet no período da tarde.

Distribuições Condicionais

- As distribuições condicionais para as variáveis aleatórias X e Y são obtidas diretamente da definição de probabilidade condicional da teoria de probabilidades.

Probabilidades condicionais:

Sejam A e B dois eventos quaisquer:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{P(A)>0}$$

Distribuições condicionais para as Variáveis Aleatórias:

$$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

$$P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

- Isto é, dada a distribuição conjunta de (X, Y) e as f.p. marginais, é possível obter as distribuições condicionais de $X|Y = y$ e de $Y|X = x$.

Exemplo 3:

a) Obtenha a distribuição condicional de Y dado $X = 0$.

b) Calcule $P(Y > 1|X = 0)$.

Exemplo 4: Calcule a probabilidade de haver mais de duas interrupções de internet no período da tarde, sabendo que houve uma interrupção pela manhã.

Independência

- Seja (X,Y) v. a. d. bidimensional. Dizemos que **X e Y são independentes** se, e somente se:

$$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = P(X = x_i), \text{ para todo par } (x_i, y_j)$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = P(Y = y_j), \text{ para todo par } (x_i, y_j)$$

ou, simplesmente,

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j), \text{ para todo par } (x_i, y_j)$$

Observação: Basta que a condição não se verifique para um par, para que X e Y não sejam independentes.

Exemplo 5: As variáveis X e Y são independentes?

Exemplo 6: Seja $W = X + Y$. Pede-se:

x / y	1	2	3	**P(x)**
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$
1	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{12}{18}$
P(y)	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{8}{18}$	**1**

a) Apresente a distribuição de probabilidades de W.

b) Calcule $P(W \leq 2)$**.**

Atividade Proposta

Resolver os exercícios do Roteiro de Aulas abaixo relacionados:

- Exercício 1 - pág. 117.
- Exercício 32 – pág. 131.