# MAT146 - Cálculo I - Integração por Substituição Trigonométrica

Alexandre Miranda Alves
Anderson Tiago da Silva
Edson José Teixeira

O objetivo neste tópico será resolver algumas integrais de funções que envolvem as expressões

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2 - a^2}, \quad a > 0.$$

Geralmente, este tipo de integral é resolvida utilizando substituições trigonométricas da forma

$$x = a \operatorname{sen}\theta (\text{ resp. } x = a\cos\theta), \quad x = a \operatorname{tg}\theta (\text{ resp. } x = a \operatorname{cotg}\theta),$$

$$\text{ou} \quad x = \sec\theta (\text{ resp. } x = a \operatorname{cossec}\theta).$$

Com estas substituições e as identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta,$$

é possível eliminar a raiz no integrando.

## Observação

*Nem sempre a substituição trigonométrica será utilizada para resolver integrais com estes radicais. Existem casos onde outra técnica de integração é mais conveniente.*

## Exemplo

*Resolver a integral*

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}dx.$$

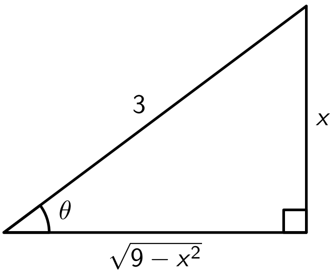
Façamos $x = 3\,\text{sen}\,\theta$, então $dx = 3\cos\theta d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-9\,\text{sen}^2\,\theta}\\ &= \sqrt{9\cos^2\theta}\\ &= 3|\cos\theta|\\ &= 3\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}dx &= \int \frac{3\cos\theta}{2\cdot 9\,\mathrm{sen}^2\,\theta} 3\cos\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{cotg}^2\,\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int (\mathrm{cossec}^2\,\theta - 1) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{cossec}^2\,\theta d\theta - \int 1 d\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\mathrm{cotg}\,\theta - \theta\right) + C
\end{aligned}$$

Para finalizar, devemos retornar para a variável original. Utilizaremos o artifício de construção de um triângulo auxiliar para simplificar nossa resolução. Como $x = 3\,\text{sen}\,\theta$, ou seja, $\text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{3}$, construímos um triângulo retângulo de hipotenusa 3, e um ângulo agudo $\theta$, de tal forma que $\text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{3}$.



Daí

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

Portanto

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + C.$$

## Exemplo

*Resolver a integral*

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}\,dx.$$

Fazendo $x = 2\operatorname{tg}\theta$, teremos $dx = 2\sec^2\theta d\theta$. Assim,

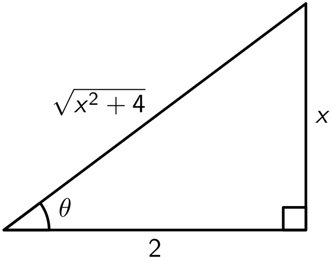
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4} &= \sqrt{4\operatorname{tg}^2\theta + 4}\\ &= 2\sqrt{\sec^2\theta}\\ &= 2|\sec\theta|\\ &= 2\sec\theta,\end{aligned}$$

para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Daí

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}dx &= \int \frac{4\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{3\cdot 2\sec\theta} 2\sec^2\theta d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int \mathrm{tg}^2\,\theta \sec\theta d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta d\theta \\
&= \frac{4}{3}\left(\int \sec^3\theta d\theta - \int \sec\theta d\theta\right) \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|}{2} - \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|\right) \\
&\quad + C \\
&= \frac{2}{3}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{2}{3}\left(\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|\right) + C
\end{aligned}
$$

Como $x = 2\operatorname{tg}\theta$, ou seja, $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{2}$, vamos construir um triângulo retângulo com catetos medindo 2 e $x$ de tal forma que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{2}$.



Assim,

$$\begin{aligned} \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}dx &= \frac{2}{3}\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right| + C \\ &= \frac{1}{6}x\sqrt{4+x^2} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + C \\ &= \frac{1}{6}x\sqrt{4+x^2} - \frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| + K.\end{aligned}$$

## Exemplo

*Resolva* $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}}$.

Fazendo a substituição $x = 4\sec\theta$, obtemos $dx = 4\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-16} &= \sqrt{16\sec^2\theta - 16}\\ &= 4\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\theta}\\ &= 4|\,\mathrm{tg}\,\theta|\\ &= 4\,\mathrm{tg}\,\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

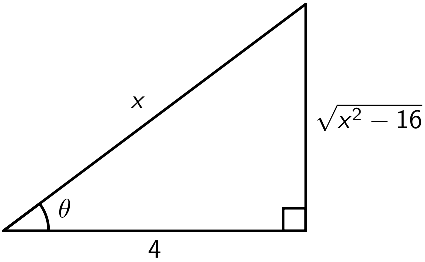
Desta forma,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}} &= \int \frac{4\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{4^3(\sec^3\theta)\cdot(4\operatorname{tg}\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{4^3}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{4^3}\int \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4^3}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= \frac{1}{2\cdot 4^3}\left(\int 1 d\theta + \int \cos 2\theta d\theta\right) \\
&= \frac{1}{128}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right) + C
\end{aligned}$$

Agora só nos resta voltar para a variável original. Como

$$\frac{x}{4} = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$

temos $\cos\theta = \dfrac{4}{x}$. Utilizando o mesmo procedimento descrito nos casos anteriores, devemos construir um triângulo retângulo com hipotenusa $x$, um ângulo $\theta$ tal que $\cos\theta = \dfrac{4}{x}$.



Usando o fato de que $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\theta) &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\right)\left(\frac{4}{x}\right) \\
&= \frac{8\sqrt{x^2-16}}{x^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}} &= \frac{1}{128}\left(-\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{8\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right) + C \\
&= \frac{1}{128}\left(-\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{4\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right) + C.
\end{aligned}$$