

Sequências II

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2022-2

Definição 1

Uma sequência $\{a_n\}$ é:

- (i) crescente se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$;
- (ii) decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

OBS: Se a sequência for crescente ou decrescente ela é dita ser monótona.

Exemplos:

- (i) a sequência $\{1/n\}$ é decrescente;
- (ii) a sequência $\{n\}$ é crescente;
- (iii) a sequência $\{(-1)^n/n\}$ não é crescente nem decrescente, ou seja, não é monótona.

Definição 2

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada** se:

- (i) for **limitada superiormente**, ou seja, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$, para todo $n \geq 1$ e;
- (ii) for **limitada inferiormente**, ou seja, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq N$, para todo $n \geq 1$.

Teorema da Convergência Monótona: Toda sequência **monótona** e **limitada** é convergente.

OBS: (i) No caso em que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente, temos se $a_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$.

(ii) No caso em que $\{a_n\}$ é decrescente e limitada inferiormente, temos se $a_n \geq N$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq N$.

(iii) Se (a_n) é crescente e não é limitada superiormente então a_n supera qualquer número positivo, para todo índice suficientemente grande, logo, diverge para ∞ . De modo análogo se (a_n) é decrescente e não é limitada inferiormente, ela diverge para $-\infty$. Limitação também não garante convergência, por exemplo a sequência $\{(-1)^n\}$ não é convergente, mas é limitada (inferiormente e superiormente).

Exemplos: Verifique se as sequências abaixo são convergentes.

(i) $\left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\};$

(ii) $\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\};$

(iii) $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}.$

Definição 3

Uma **subsequência** (b_k) de uma sequência (a_n) é uma sequência formada por partes da sequência (a_n), isto é, $b_k = a_{n_k}$, onde $k \mapsto n_k$ é injetiva ($n_i = n_j \Rightarrow i = j$).

Exemplos

- (a) $a_n = (-1)^n \Rightarrow b_k = a_{n_k} = 1$, se $n_k \in \{2, 4, 6, \dots\}$ e $b_l = a_{n_l} = -1$, se $n_l \in \{1, 3, 5, \dots\}$;
- (b) $a_n = 1/n \Rightarrow b_k = a_{n_k} = 1/n_k$, se $n_k \in \{2, 4, 6, \dots\}$.

Note que em (a) temos $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1$ e $\lim_{l \rightarrow \infty} b_l = -1$ e em (b) temos $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Teorema da Subsequência: Seja (a_n) uma sequência convergente ($(a_n) \rightarrow L$). Então qualquer subsequência (b_k) de (a_n) é convergente e tem mesmo limite ($(b_k) \rightarrow L$).

Teste da Subsequência: Qualquer sequência que possui duas subsequências com limites diferentes ou subsequência divergente será divergente.

Exemplo: Mostre que as sequências abaixo são divergentes.

(a) $\{\cos(n\pi)\}$;

(b) $\{(-1)^n\}$;

(c) $\left\{ \frac{(-1)^n 3n}{n+3} \right\}$;

(d) $\{a_n\}$ tal que $a_n = n$, se n é par e $a_n = \frac{1}{n}$, se n é ímpar.

Propriedade: Se (a_n) é uma sequência convergente, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k}, \text{ para qualquer } k \in \mathbb{N}.$$

Exemplos de sequência por recorrência:

- (a) Sabendo que (a_n) é convergente e que $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$ determine seu limite;
- (b) Seja (a_n) construída pelo processo de indução de modo que $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, ..., $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, Mostre que (a_n) é convergente e determine seu limite.

Teste Tipo Limite: Sejam (a_n) e (b_n) sequências tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, com $c \in \mathbb{R}$. Então ambas convergem ou ambas divergem. Além disso, quando os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existem então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Exemplo: Determine o limite da sequência $\left\{ \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{e^n + \ln n} \right\}$ e conclua se ela é convergente ou divergente.

Exemplo 1: A sequência $\{r^n\}$, com $r \in \mathbb{R}$, converge se $-1 < r \leq 1$ e diverge para todos os outros valores de r . Mas ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1, & \text{se } r = 1 \end{cases}.$$

Exemplo 2: Verifique, com cálculos, as afirmações abaixo:

- (a) $\{\sqrt[n]{n}\} \rightarrow 1$;
- (b) $\{\sqrt[n]{a}\} \rightarrow 1$, $a > 0$;
- (c) $\{\sqrt[n]{n!}\} \rightarrow \infty$.

Sugestão para resolução da letra (c): Se $a_n \leq b_n$ para $n > n_0$ e se $(a_n) \rightarrow \infty$, então $(b_n) \rightarrow \infty$.

- LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. II*, São Paulo, Editora Harbra: 1990.
- STEWART, J. *Cálculo - vol II*, São Paulo, Thomson Learning: 2002.