

Lista da Unidade I de MAT 147 - Cálculo II

2022-2

1. Determine os limites se existirem:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, (0 < a \neq 1)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 9}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{3x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{\ln x}$

(l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a \neq 0$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

(o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

2. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

(b) $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt$

(c) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$

(d) $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4 + x^2} dx$

3. Responda se é convergente ou divergente as seguintes integrais impróprias, e justifique.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5 + 3x + 1} dx$

*(e) $\int_0^{+\infty} e^{-st} dt$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^3} dx$

*(f) $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^2 dt$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} dx$

*(g) $\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(at) dt$

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$

*(h) $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(at) dt$

* Veremos, mais no final do curso, que os itens (e), (f), (g), (h) são as transformadas de Laplace das funções $1, t^2, \sin(at), \cos(at)$, respectivamente.

4. Calcule, se existir, a área das regiões abaixo, limitas pelas curvas y , e pelos intervalos indicados:

(a) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$, de $0 \leq x < 1$

(b) $y = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, de $0 \leq x < 3$

(c) $y = \sec^2 x$, de $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

(d) $y = \frac{1}{(x+1)^{2/3}}$, de $-2 \leq x \leq 7$

(e) $y = \frac{x-2}{x^2-5x+4}$, de $2 \leq x < 4$

(f) $y = \frac{1}{1-\cos x}$, de $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

(g) $y = x^{-4/3}$, de $-1 \leq x \leq 1$

5. Estude a convergência da integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, onde p é um número real qualquer.

6. Determine uma função f tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x)dx$ exista e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ seja divergente.

7. Um circuito elétrico tem uma resistência de R ohms, uma indutância de L henrys e uma força eletromotriz de E volts, onde R , L e E são positivos. Se i ampères for a corrente passando no circuito t segundos depois que foi ligado, então $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$. Se t , E e L são constantes, ache $\lim_{R \rightarrow 0^+} i$

8. Numa progressão geométrica, se a for o primeiro termo, r for a razão comum a dois termos sucessivos e S for a soma dos n primeiros termos, então se $r \neq 1$, $S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$. Ache o $\lim_{r \rightarrow 1} S$. O resultado será consistente com a soma dos n primeiros termos se $r = 1$?

9. Dê o termo de ordem n das sequências abaixo e verifique quais sequências convergem. As convergentes, dê o limite. Escreva também o termo de ordem $(n+1)$.

(a) $(1, 4, 7, 10, \dots)$

(b) $\left(1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, \dots\right)$

(c) $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$

(d) $\left(2, \frac{2^2}{1 \cdot 2}, \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{2^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \dots\right)$

10. Verifique se as sequências abaixo convergem ou divergem. Se convergir, encontre seu limite:

(a) $a_n = \frac{n \sen^2 n}{n^5 + 1};$

(b) $a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-3};$

(c) $a_n = \frac{1}{n} \sen\left(\frac{3\pi}{n^2 + 1}\right);$

(d) $a_n = \ln \sqrt{n^3 - n^2};$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1};$

(f) $a_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{a}{n}\right)$, para $a > 0$;

(g) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, para $a \in \mathbb{R}$.

11. Considere a sequência $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$.

(a) Mostre que (a_n) não é limitada se $p \leq 1$.

(b) Mostre que $a_n \rightarrow \frac{1}{p-1}$ se $p > 1$.

12. Use o teorema da convergência monótona para mostrar que a sequência $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ é convergente. Em seguida, determine o limite desta sequência.

13. Considere a sequência de termo geral dado por $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$. Faça o que se pede:

- (a) Exprima a_{n+1} em função de a_n ;
- (b) Mostre que (a_n) é estritamente decrescente;
- (c) Mostre que (a_n) é convergente.

14. Considere a sequência dada por

$$a_1 = 2 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4), \quad n \geq 1.$$

- (a) Determine os cinco primeiros termos desta sequência e o 101 termo.
- (b) A sequência é monótona? Justifique!
- (c) A sequência é convergente? Justifique!

15. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-n}{2^{n+1}}$ para resolver os itens abaixo.

- (a) Encontre os três primeiros termos da sequência das somas parciais.
- (b) Determine os números reais A, B que nos permite escrever

$$\frac{1-n}{2^{n+1}} = \frac{n+A}{2^{n+1}} + \frac{Bn}{2^n}.$$

- (c) Ache uma fórmula para a sequência das somas parciais $\{S_n\}$.
- (d) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.
- (e) A série converge? Justifique. Caso afirmativo, qual é a sua soma?

16. Justifique as seguintes igualdades:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 \quad (c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$$

17. Escreva as frações decimais $0,412412412\cdots$ e $0,021343434343\cdots$ como:

- (a) uma série infinita;
- (b) encontre a soma da série e a escreva como o quociente de dois inteiros.

18. Determine se a série dada converge ou diverge:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \operatorname{sen} 3n}{n};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n!};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n^2+n}.$$

19. Assinale V ou F, justificando suas respostas:

() Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

() Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são divergentes, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n b_n)$ é divergente.

() Seja (S_n) a sequência de somas parciais de a_n . Se (S_n) é convergente, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

() Suponha que $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

() Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios com coeficientes inteiros em x , com $q(n) \neq 0$. Se o grau de p for menor que de q , então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ converge.

20. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, sendo que:

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \left(\frac{1 + \arctan n}{n} \right) \cdot a_n.$$

Determine se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge ou diverge.

21. Verifique se são convergentes:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$(d) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\ln n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 3}}$$

$$(e) \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n} + 5^{-n}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + (-1)^n}{3^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n + 3}{6^n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^n} + n \right)$$

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

22. Se $f(n) \rightarrow L$, então prove que $\sum_{n=1}^{+\infty} [f(n) - f(n+1)] = f(1) - L$.

23. Prove que:

$$(a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k + 5^k}{15^k} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{k}{3^{k-1}} - \frac{k+1}{3^k}$$

$$(b) \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \dots = \frac{5}{8}$$

$$(e) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

$$(d) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{3^k} = 1$$

$$\text{Sugestão: } 2k-1 = 3k - (k+1) \Rightarrow \frac{2k-1}{3^k} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

24. Classifique as afirmações abaixo como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) dando uma demonstração ou um contra-exemplo.

- (a) () Toda sequência limitada é convergente;
- (b) () Toda sequência limitada é monótona;
- (c) () Toda sequência monótona é limitada;
- (d) () Toda sequência divergente é não monótona;
- (e) () Toda sequência convergente é monótona;
- (f) () Toda sequência divergente é não limitada;
- (g) () Se (a_n) e (b_n) são sequências tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, então $(a_n b_n)$ é convergente;
- (h) () A sequência (a_n) definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{n a_n}{n+1}$ é convergente;
- (i) () Se $a_n \leq b_n$, $\forall n$, tal que (b_n) é convergente, então (a_n) é convergente;
- (j) () Se $(|a_n|)$ é convergente, então (a_n) é convergente;
- (k) () Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$, $\forall n$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge;
- (l) () Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergem, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ diverge;
- (m) () Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=100}^{+\infty} a_n$ converge;
- (n) () Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergem, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n b_n)$ converge;
- (o) () Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \neq 0$;
- (p) () Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ diverge;
- (q) () Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge e $a_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ converge;
- (r) () Se (a_n) é uma sequência constante, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge;
- (s) () Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.
- (t) () Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

25. Marque a(s) alternativa(s) CORRETA(S).

- (a) O limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ é uma indeterminação e seu valor é 1.
- (b) O limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$ é uma indeterminação e seu valor é 1.

- (c) O limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$ é uma indeterminação e seu valor é e^6 .
- (d) O limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x}$ é uma indeterminação e seu valor é 0.
26. Considere a integral $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$. Marque a(s) alternativa(s) CORRETA(S).
- (a) A integral é imprópria e seu valor é maior que 1.
 - (b) A integral fornece a área delimitada por $x = 1$, o eixo- x e a função definida por $f(x) = e^{-x^2}$.
 - (c) A integral é divergente.
 - (d) A integral pode ser resolvida sem auxílio de qualquer teste.
27. O limite da sequência $\left(\frac{n^2}{3n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)$ é:
- (a) $\frac{\pi}{3}$
 - (b) $\frac{\pi}{6}$
 - (c) 3π
 - (d) $\frac{\pi}{2}$
28. Assinale a(s) alternativa(s) CORRETA(S).
- (a) Se (a_n) é uma sequência convergente e $a_n \geq b_n$, então (b_n) é convergente.
 - (b) Se (a_n) é uma sequência convergente, então (a_n) é monótona.
 - (c) Se (a_n) é uma sequência limitada, então (a_n) é convergente.
 - (d) Se (a_n) é uma sequência monótona e limitada, então (a_n) é convergente.
29. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, $a \in \mathbb{R}^*$, e assinale a alternativa INCORRETA:
- (a) A série converge se $r = 1/l$, com $l < -1$.
 - (b) A série converge se $r = 1/l$, com $l > 1$.
 - (c) A série converge se $r = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} 4^{n-1}$.
 - (d) A série converge se $r = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n 3^{1-n}$.
30. Assinale a única série divergente.
- (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.
 - (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{n \ln n}$.
 - (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{5^n}$.
 - (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos(4n)}{n^2}$.