

Proper Orthogonal Decomposition and Low Dimensional Models for Turbulent Flows

ISBN 90-367-0682-3

Rijksuniversiteit Groningen

Proper Orthogonal Decomposition and Low Dimensional Models for Turbulent Flows

Proefschrift

ter verkrijging van het doctoraat in de
Wiskunde en Natuurwetenschappen
aan de Rijksuniversiteit Groningen
op gezag van de
Rector Magnificus, dr F. van der Woude,
in het openbaar te verdedigen op
vrijdag 5 september 1997
des namiddags te 2.45 uur

door

Willem Cazemier

geboren op 20 april 1968
te Grijpskerk

Promotor: Prof.dr. A.E.P. Veldman
Referent: Dr.ir. R.W.C.P. Verstappen

*Het is vergeefs, dat gij vroeg opstaat,
en laat opblijft,
en uw brood met zorgen eet;
want Hij geeft het zijn vrienden in den slaap.*
(Psalm 127:2)

Contents

Preface	5
1 Introduction	7
1.1 Turbulence	7
1.1.1 Transition to turbulence	9
1.1.2 Simulation of turbulence	9
1.1.3 2D turbulence	11
1.2 Coherent structures	12
1.3 Turbulence and dynamical systems	13
2 Proper Orthogonal Decomposition	17
2.1 Introduction	17
2.2 Mathematical formulation of the POD	18
2.2.1 Continuous POD	19
2.2.2 Snapshot POD	20
2.2.3 Space-time symmetry	23
2.3 Method of Sirovich	24
2.4 Galerkin projection	25
2.5 Closure model	26
3 Direct Numerical Simulation	29
3.1 Introduction	29
3.2 2D DNS	29
3.2.1 Numerical method	29
3.2.2 Solutions for various Reynolds numbers	31
3.2.3 Simulation at Re=22,000	36
3.3 3D DNS	37
3.3.1 Numerical method	37
3.3.2 Simulation at Re=10,000	38
4 POD of 2D driven cavity	41
4.1 Introduction	41
4.2 POD eigenfunctions	41
4.2.1 POD eigenfunctions versus Fourier modes	47
4.2.2 Reconstruction with POD eigenfunctions	48

4.3	Conclusions	49
5	2D dynamical system	51
5.1	Introduction	51
5.2	Low-dimensional dynamical system	51
5.2.1	Closure models	52
5.3	Dynamical system at $Re=22,000$	52
5.3.1	Short-time integrations	52
5.3.2	Long-time integrations	53
5.4	Transition	56
5.4.1	Linear stability analysis	56
5.4.2	Floquet multipliers	61
5.4.3	Bifurcation diagram and comparison with DNS	66
5.5	Conclusions	67
6	POD of 3D driven cavity	69
6.1	Introduction	69
6.2	Symmetry considerations	69
6.3	POD eigenfunctions	70
6.4	Conclusions	84
7	3D dynamical system	85
7.1	Introduction	85
7.2	Low-dimensional dynamical system	85
7.3	Dynamical system at $Re=10,000$	86
7.3.1	Short-time integrations	86
7.3.2	Long-time integrations	87
7.4	Transition	89
7.5	Conclusions	91
	Conclusions	93
	A maximization problem	97
	Samenvatting	105
	Dankwoord	107

Dankwoord

Een proefschrift komt in het algemeen niet tot stand zonder hulp van anderen. Ook ik heb in de vier jaar dat ik aan dit proefschrift gewerkt heb op verschillende manieren hulp gehad van anderen. Deze mensen wil ik hiervoor hartelijk bedanken. In het bijzonder wil ik Arthur Veldman en Roel Verstappen bedanken voor het mogelijk maken en begeleiden van het onderzoek. Verder wil ik iedereen van de Vakgroep Wiskunde bedanken voor de leuke tijd die ik daar heb gehad. De leescommissie bestaande uit Prof. H.W. Hoogstraten, Prof. H.W. Broer en Prof. E.W.C. van Groesen wil ik bedanken voor het lezen van dit proefschrift en hun commentaar.

Ook ben ik dank verschuldigd aan de Stichting Nationale Computerfaciliteiten, het Nationaal Lucht- en Ruimtevaart Laboratorium, en het rekencentrum van de Rijksuniversiteit Groningen voor rekentijd, en aan de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek, het Burgerscentrum, SHELL en de Vakgroep Wiskunde van de Rijksuniversiteit Groningen voor financiële steun bij enkele reizen.

Niet in de laatste plaats ben ik mijn familie en vrienden dankbaar voor hun steun en interesse. Met name wil ik mijn ouders, Henriëtte en onze Jeanne bedanken, voor alles wat zij mij geven. En bovenal ben ik Hem dankbaar die mij alles gegeven heeft.

Preface

The bottleneck in most numerical simulations of fluid flow is turbulence. The broad range of length-scales in turbulent flows requires a computational grid, that in most cases, is too fine to fit in the main memory of the computers of today, also the computational time is far too long. The same will be true in the foreseeable future. Only for simple flows at moderate Reynolds numbers (up to $Re=10^5$) direct numerical simulation (DNS) is possible, see Chapter 3. Therefore, the turbulence of fluid flows has to be modelled. This is a serious problem since most models differ from flow to flow and are in general based on crude assumptions. As a consequence, a lot of research has to be done to understand turbulence and improve turbulence models. This thesis is intended as a small contribution.

The main subject of this thesis is the application of the proper orthogonal decomposition (POD) technique to a turbulent flow, in order to get a relatively low-dimensional dynamical system which describes the turbulent flow. This dynamical system can be used to cheaply simulate the turbulent flow, to vary the Reynolds numbers for transition analysis, and to apply techniques from dynamical systems theory to gain a better understanding of turbulence. POD is a technique to subtract stationary flow fields from a turbulent flow which are optimal in the sense that any other set with the same number of flow fields, i.e. Fourier modes, contain less energy on average than the POD eigenfunctions. The low-dimensional dynamical system is derived through a Galerkin projection of the Navier-Stokes equations on the POD eigenfunctions.

This thesis consists of 7 chapters. The first chapter is the introduction, in which a brief introduction to turbulence is presented, and some techniques from dynamical systems theory are described. The second chapter consists of the theory of the POD, the computational method to compute the POD, the derivation of the low-dimensional dynamical system, and the closure models which are necessary to model the influence of the non-resolved POD eigenfunctions. Chapter 3 describes the DNS of the 2D and 3D driven cavity flows, which supplies the data needed for the computation of the POD. In addition the DNS provides reference data for comparison with the low-dimensional dynamical system. The POD of the 2D driven cavity is discussed in Chapter 4. Results of the low-dimensional dynamical system are presented in Chapter 5. The POD of the 3D driven cavity is described in Chapter 6, and the low-dimensional dynamical system is discussed in Chapter 7.