

Samenvatting

Turbulente stromingen komen we veelvuldig tegen in ons dagelijks leven. Denk maar aan de rook van een sigaret, of het roeren in een kopje koffie. In deze turbulente stromingen zijn vaak structuren herkenbaar, meestal wervelachtige structuren. Het is moeilijk om deze structuren wiskundig te definiëren. Een methode hiervoor is de zogenaamde *Proper Orthogonal Decomposition* (POD). Deze methode bepaalt tijdsonafhankelijke stromingspatronen (POD eigenfuncties) die veel energie bezitten. Dat betekent dat ze structuren bezitten die vaak voorkomen in de (tijdsafhankelijke) turbulente stroming waarvan ze bepaald zijn.

Van deze POD eigenfuncties kunnen er een hele serie bepaald worden die geordend worden op energie-inhoud. Ze hebben een aantal eigenschappen die ze geschikt maken voor een beschrijving van de turbulente stroming op basis van alleen POD eigenfuncties. De belangrijkste eigenschap is dat ze veel energie bezitten. Er is geen andere verzameling van evenveel eigenfuncties te verzinnen die bijelkaar net zoveel energie bezit als de POD eigenfuncties. Verder vormen ze ook een volledige basis voor de turbulente stroming. Dat betekent dat elk mogelijk stromingspatroon te vormen is met een lineaire combinatie van (in het algemeen oneindig veel) POD eigenfuncties. Bovendien zijn de (tijdsafhankelijke) coëfficiënten in de net genoemde lineaire combinatie in de werkelijke turbulente stroming ongecorreleerd.

De stroming waarop deze POD is toegepast is de twee- en drie dimensionale (2D en 3D) driven cavity flow. Dit is een vierkant (of kubus) waar aan de bovenkant (bovenvlak) een constante snelheid in langsrichting is voorgeschreven door een constante. De Navier-Stokes vergelijkingen die de stroming in termen van snelheid en druk beschrijven zijn dimensieloos gemaakt met het Reynolds getal Re . Bij gelijke afmeting van het vierkant (kubus) en viscositeit kan Re gezien worden als een maat voor de snelheid waarmee de bovenkant (bovenvlak) beweegt. Voor kleine waarden van Re zal de stroming regelmatig en glad zijn, terwijl voor grote waarden de stroming turbulent zal zijn.

Om de POD eigenfuncties te bepalen is een zo groot mogelijk aantal ongecorreleerde momentane snelheidsvelden nodig. Deze zijn bepaald met een zogenaamde *Directe Numerieke Simulatie* (DNS). DNS wil zeggen dat de volledige turbulente stroming, inclusief de kleinste werveltjes, uitgerekend wordt. Deze DNS is gedaan bij $Re=22,000$ voor 2D en bij $Re=10,000$ voor 3D. In beide gevallen in de stroming turbulent. De 2D DNS laat zien dat er steeds meer energie in de grote wervel in het midden van het vierkant wordt opgebouwd. Deze energie wordt 2 keer in de simulatie van 3500 seconden gedissipeerd door kleinere wervels in het midden van het vierkant.

In het 2D geval is meer DNS uitgevoerd bij een aantal andere waarden van Re om referenties te bepalen voor de simulatie op basis van de POD eigenfuncties. Uit de DNS

blijkt dat voor $Re=7,972$ de stroming de eerste bifurcatie ondergaat en van stationair periodiek wordt. Verhoging van Re laat zien dat de stroming quasi-periodiek wordt met 2 periodes, bij verdere verhoging van Re wordt de stroming (onverwacht) weer periodiek.

De berekening van de 2D POD eigenfuncties is gedaan op basis van 700 momentane snelheidvelden, zogenaamde *snapshots*. De eerste 80 POD eigenfuncties zijn uitgerekend. De hoog-energetische POD eigenfuncties hebben grootschalige structuren en er zijn duidelijk paren te herkennen. De minder energie-rijke POD eigenfuncties hebben kleinere structuren.

Met deze 80 POD eigenfuncties is een Galerkin projectie van de Navier-Stokes vergelijkingen uitgevoerd. De turbulente stroming wordt dan beschreven door de 80 gewone differentiaal vergelijkingen voor de 80 tijdsafhankelijke coëfficiënten van de POD eigenfuncties. In vergelijking met de DNS is deze 80 een grote reductie van het aantal vrijheidsgraden; de DNS had ongeveer $3 \cdot 10^5$ vrijheidsgraden. Aan de 80 differentiaal vergelijkingen moet een model voor de interactie met alle overige POD eigenfuncties worden toegevoegd. De resultaten van de nieuwe beschrijving toont veel overeenkomsten met de DNS. Het voornaamste verschil is de frequentie waarmee de opgebouwde energie in de grote wervel in het midden van het vierkant wordt gedissipeerd door kleinere wervels.

Met deze nieuwe beschrijving is ook een analyse gedaan van de eerste bifurcaties van de 2D driven cavity flow. Hieruit blijkt dat de eerste bifurcatie van de nieuwe beschrijving bij $Re=7,819$ plaatsvindt. Deze waarde ligt verassend dicht bij de DNS voorspelling. Verder wordt, net als bij de DNS bij verdere verhoging van Re eerst een quasi-periodieke oplossing gevonden en daarna weer een periodieke oplossing. Het dynamische gedrag van deze oplossing en die van de DNS tonen veel overeenkomsten.

De 3D POD is uitgerekend op basis van 320 *snapshots*. Dit aantal is verdubbeld door gebruik te maken van het symmetrie-vlak van de stromingsgeometrie. De hoog-energetische POD eigenfuncties tonen structuren die lijken op de zogenaamde Taylor-Görtler wervels die ook geobserveerd zijn in experimenten bij lagere Reynolds getallen. Verder is een duidelijk oscillerend gedrag in de dwars-snelheden te zien bij het achtervlak van de kubus. Dit betekent dat de turbulente stroming daar redelijk homogeen is omdat voor homogene turbulentie de POD eigenfuncties overeenkomen met Fourier eigenfuncties, die ook oscilleren.

Met de eerste 80 POD eigenfuncties is wederom een dynamisch systeem afgeleid door een Galerkin projectie van de Navier-Stokes vergelijkingen. De eerste 80 POD eigenfuncties bevatten in het 3D geval veel minder energie dan in het 2D geval. Dit kan er de oorzaak van zijn dat de nieuwe beschrijving veel minder overeenkomsten vertoont met de DNS dan in het 2D geval.