Mathematik 3

Fouriertransformation

Wintersemester 2013/14

Fouriertransformation

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\,\omega\,t}\,dt}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\,\omega\,t}\,d\omega$$

Schreibweise $F(\omega) = \mathcal{F}\big(f(t)\big)$ $\quad F(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t)$

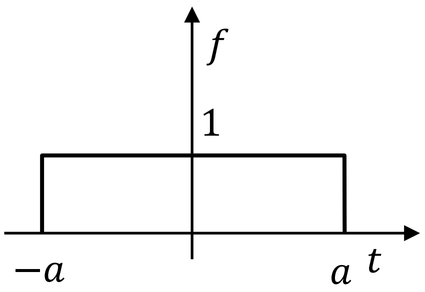
Konvergenz $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$

$f(t)$ gerade $\displaystyle F(\omega) = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega\,t)\,dt$

$f(t)$ ungerade $\displaystyle F(\omega) = -2j \cdot \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega\,t)\,dt$

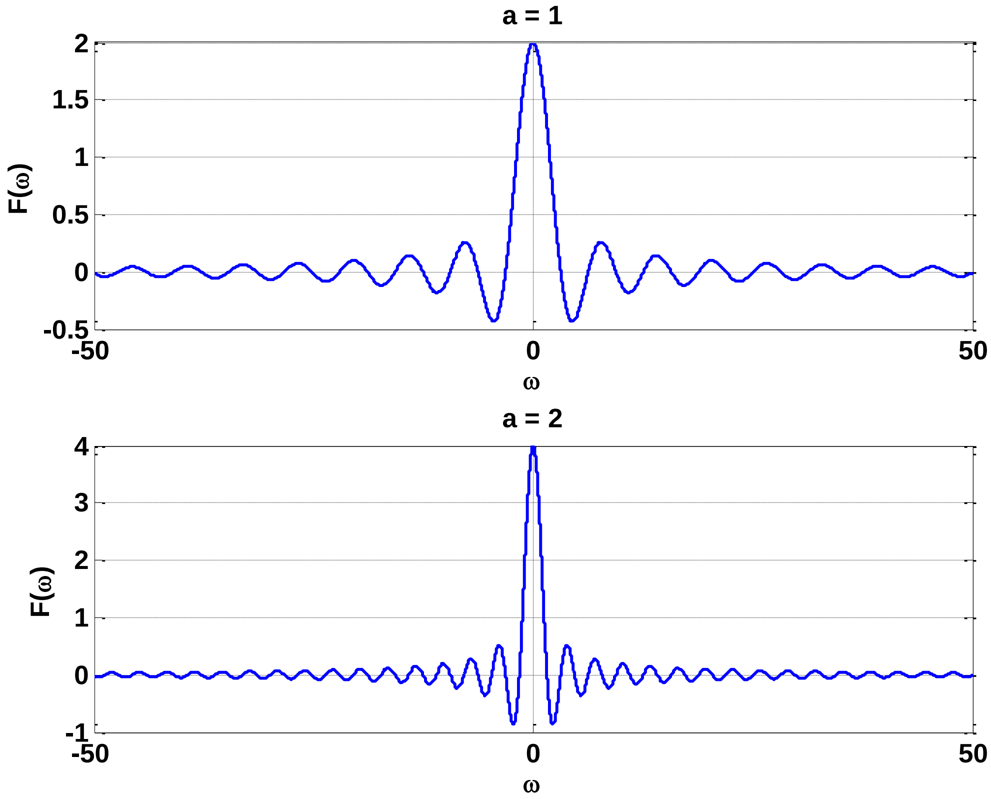
Rechteck

Zeitfunktion



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -a \le t \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fouriertransformation



$$\boxed{F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega\, a)}$$

Rechenregeln der Fouriertransformation

	Originalbereich	Bildbereich
Linearität	$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)$	$c_1 \cdot F_1(\omega) + c_2 \cdot F_2(\omega)$
Ähnlichkeitssatz	$f(a\,t) \qquad (a \neq 0, \text{reell})$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Verschiebung	$f(t - t_0) \quad (t_0 \text{ reell})$	$e^{-j\,\omega\,t_0} \cdot F(\omega)$
Dämpfung	$e^{j\,\omega_0\,t} \cdot f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u)\,du$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
Multiplikation	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(v) \cdot F_2(\omega - v)\,dv$
Vertauschungssatz	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega) \quad \Rightarrow \quad F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi \cdot f(-\omega)$	

Rechenregeln der Fouriertransformation

➔ Mit diesen Regeln kann die Fouriertransformation zur Lösung von Differentialgleichungen verwendet werden.

➔ In der Technik wird hierfür jedoch meist die Laplacetransformation eingesetzt

	Originalbereich	**Bildbereich**
Ableitung	$f'(t)$ $f''(t)$ $\vdots$ $f^n(t)$	$(j\omega)\cdot F(\omega)$ $(j\omega)^2\cdot F(\omega) \quad = -\omega^2\cdot F(\omega)$ $\vdots$ $(j\omega)^n\cdot F(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(u)du$	$\frac{1}{j\omega}\cdot F(\omega)$

Fouriertransformation

Originalfunktion $f(t)$	**Bildfunktion $F(\omega)$**
$\sigma(t-a)-\sigma(t-b)=\begin{cases}1 & a\le t\le b\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	$j\cdot\dfrac{e^{j\,b\,\omega}-e^{-j\,a\,\omega}}{\omega}$
$\sigma(t+a)-\sigma(t-a)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert\le a\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	$\dfrac{2\cdot\sin(a\,\omega)}{\omega}$
$\sigma(t+a)-\sigma(t)=\begin{cases}1 & -a\le t\le 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	$j\cdot\dfrac{1-e^{j\,a\,\omega}}{\omega}$
$\sigma(t)-\sigma(t-a)=\begin{cases}1 & 0\le t\le a\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	$j\cdot\dfrac{e^{-j\,a\,\omega}-1}{\omega}$
$\begin{cases}a-\lvert t\rvert & \lvert t\rvert\le a\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	$\dfrac{2\cdot(1-\cos(a\,\omega))}{\omega^2}$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{a}\cdot e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$\dfrac{t}{a^2+t^2}$	$\begin{cases}j\pi\cdot e^{-a\lvert\omega\rvert} & \omega<0\\ 0 & \omega=0\\ -j\pi\cdot e^{-a\lvert\omega\rvert} & \omega>0\end{cases}$

Fouriertransformation

Originalfunktion $f(t)$	**Bildfunktion $F(\omega)$**
$e^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2\,a}{a^2+\omega^2}$
$e^{-a\,t}\cdot\sigma(t)$	$\dfrac{1}{a+j\,\omega}$
$t\cdot e^{-a\,t}\cdot\sigma(t)$	$\dfrac{1}{(a+j\,\omega)^2}$
$e^{-a\,t^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\dfrac{\sin(a\,t)}{t}$	$\begin{cases}\pi & \|\omega\|<a\\ \pi/2 & \|\omega\|=a\\ 0 & \|\omega\|>a\end{cases}$
$e^{-a\,t}\cdot\sin(b\,t)\cdot\sigma(t)$	$\dfrac{b}{(a+j\,\omega)^2+b^2}$
$e^{-a\,t}\cdot\cos(b\,t)\cdot\sigma(t)$	$\dfrac{a+j\omega}{(a+j\,\omega)^2+b^2}$

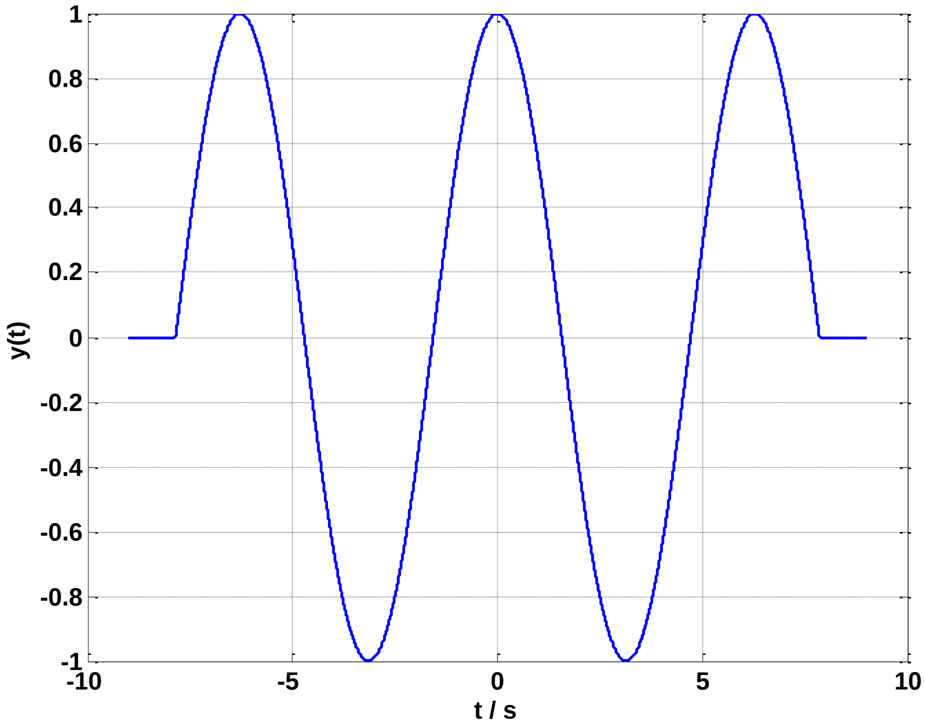
Verallgemeinerte Fouriertransformation

Originalfunktion $f(t)$	**Bildfunktion $F(\omega)$**
$\delta(t)$	1
$\delta(t+a)$	$e^{j\,a\,\omega}$
$\delta(t-a)$	$e^{-j\,a\,\omega}$
$e^{j\,a\,t}$	$2\,\pi\cdot\delta(\omega-a)$
$e^{-j\,a\,t}$	$2\,\pi\cdot\delta(\omega+a)$
$\cos(a\,t)$	$\pi[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]$
$\sin(a\,t)$	$j\,\pi[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]$
$\delta(t+a)+\delta(t-a)$	$2\cdot\cos(a\,\omega)$
$\delta(t+a)-\delta(t-a)$	$2\,j\cdot sin(a\,\omega)$

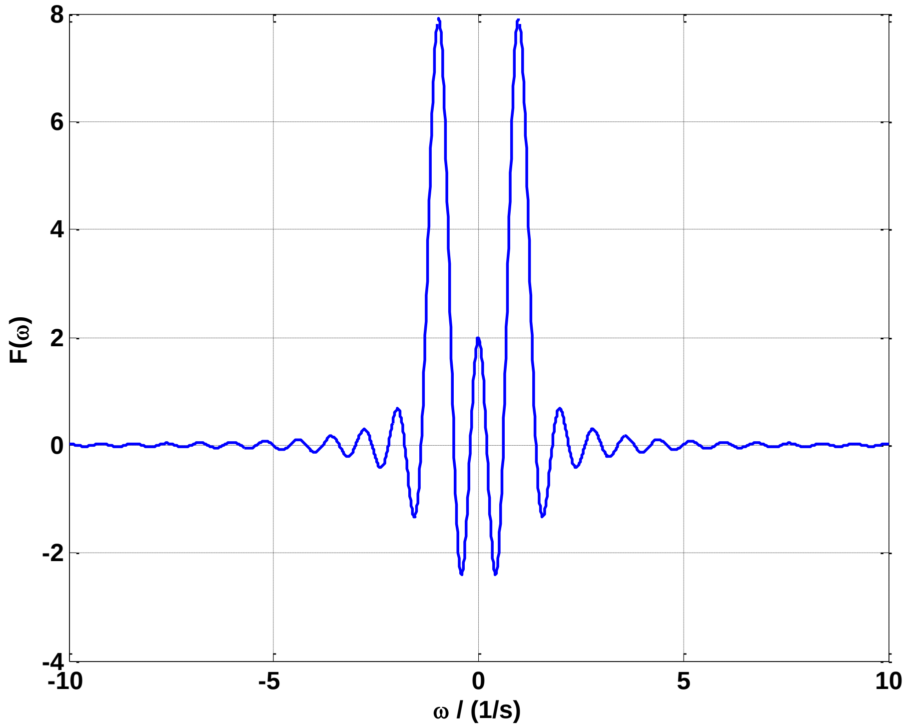
Zeitbeschränktes Cosinus-Signal

$$y(t) = \cos(1 \cdot t)\,; \quad -2{,}5\pi \leq t \leq 2{,}5\pi$$

Zeitsignal



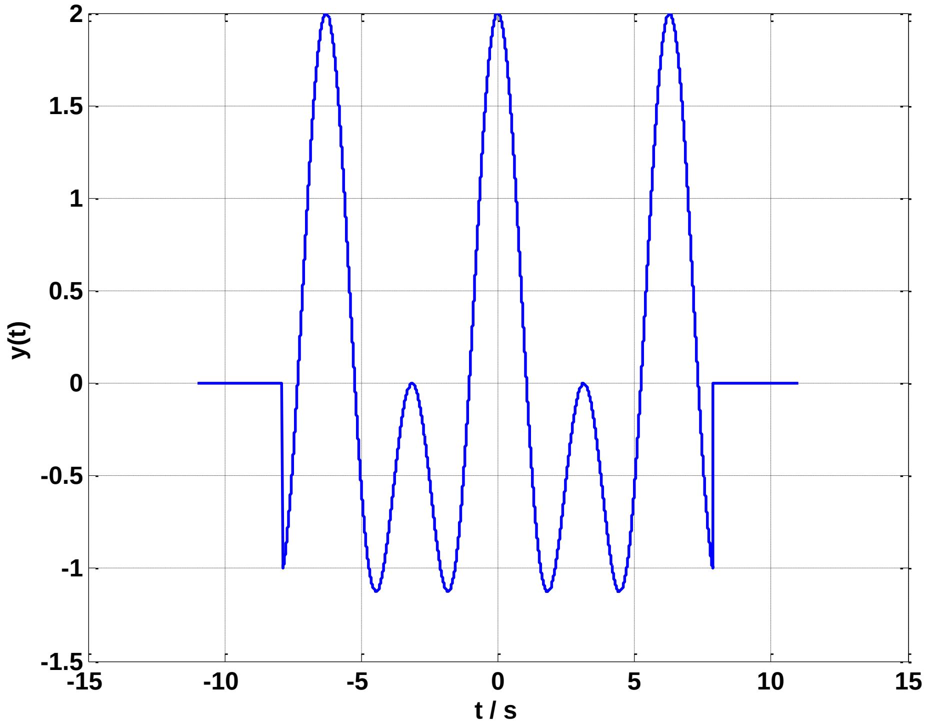
Fourier-Transformation



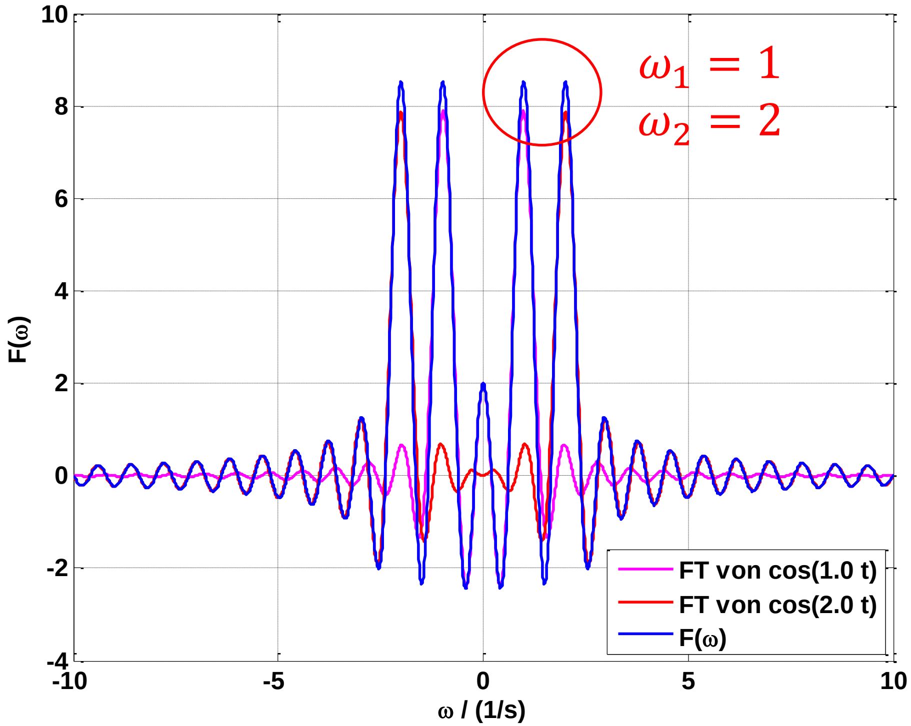
Summe zweier Cosinus-Signale

$$y(t) = \cos(1 \cdot t) + \cos(2 \cdot t)\,; \quad -2{,}5\pi \leq t \leq 2{,}5\pi$$

Zeitsignal



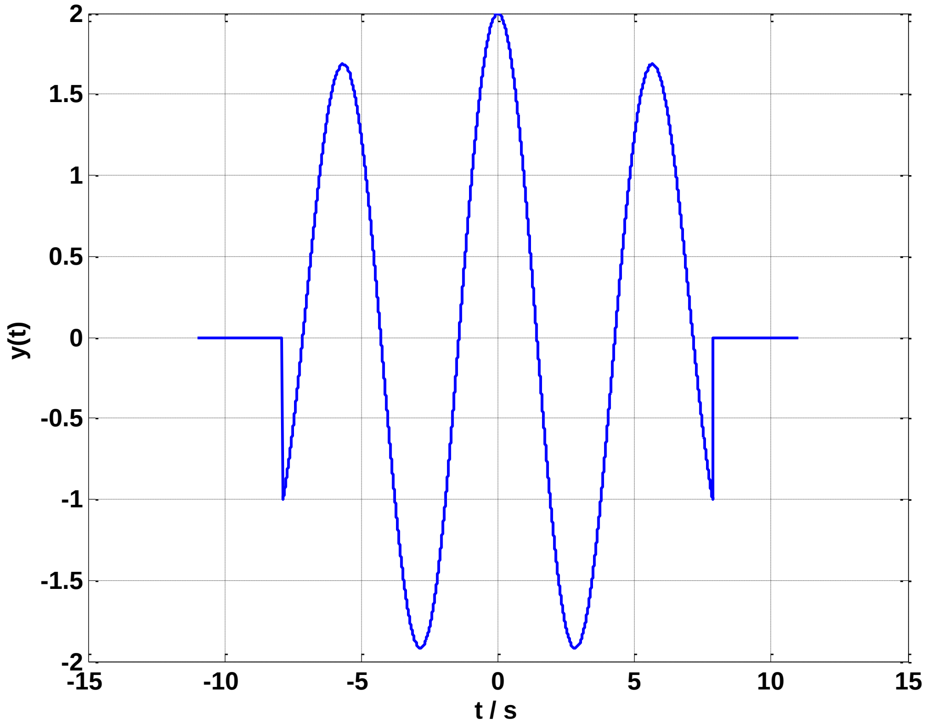
Fourier-Transformation



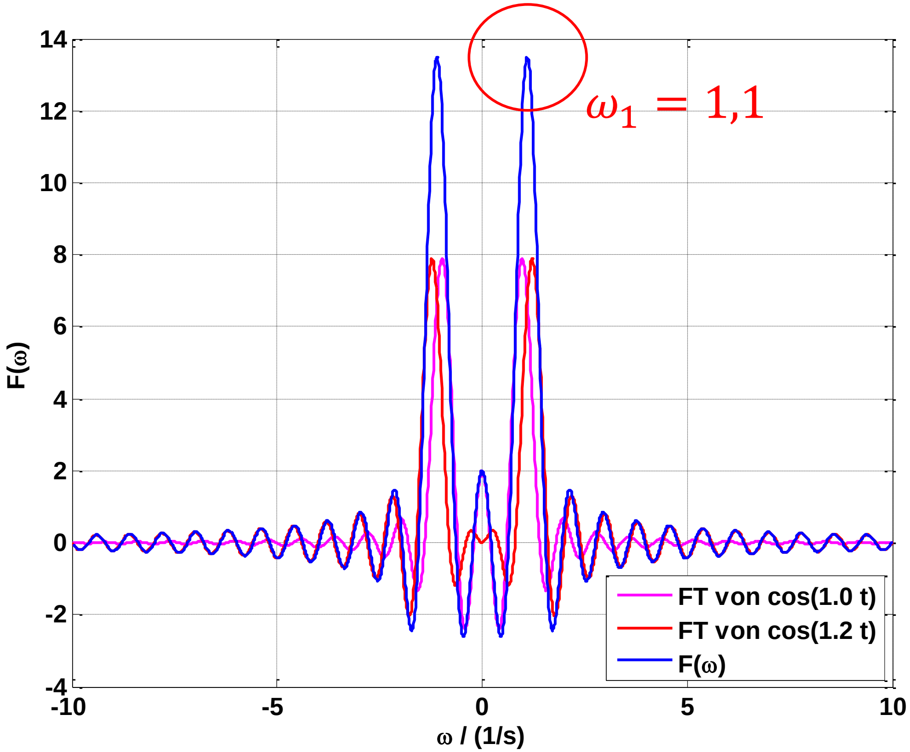
Summe zweier Cosinus-Signale

$$y(t) = \cos(1 \cdot t) + \cos(1{,}2 \cdot t)\,; \quad -2{,}5\pi \le t \le 2{,}5\pi$$

Zeitsignal



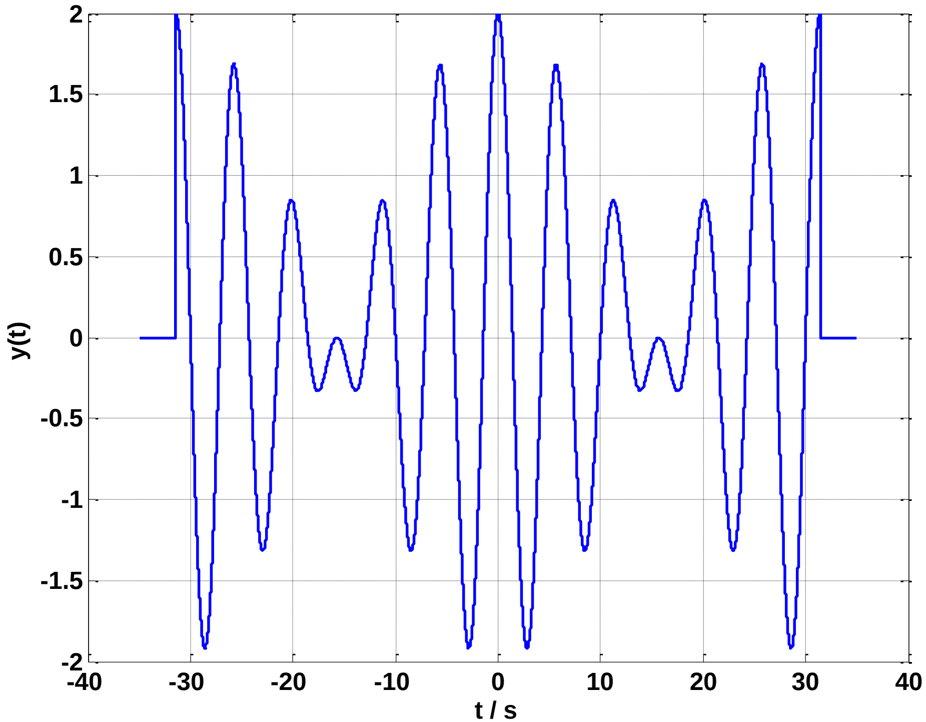
Fourier-Transformation



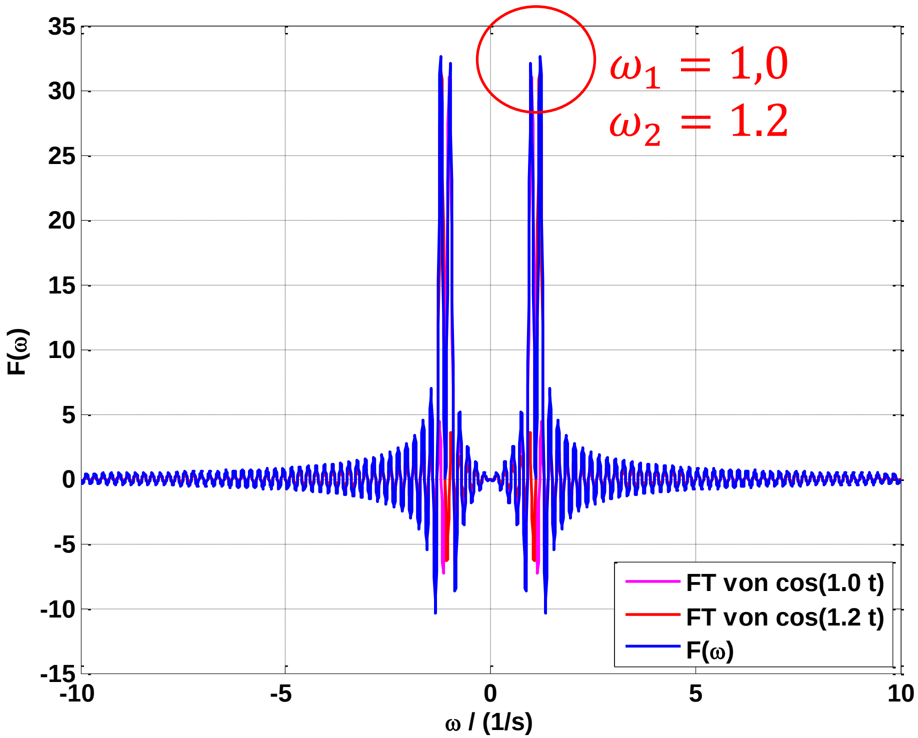
Die beiden Peaks „verschmelzen"

$$y(t) = \cos(1 \cdot t) + \cos(1{,}2 \cdot t)\,; \quad -10\pi \le t \le 10\pi$$

Zeitsignal



Fourier-Transformation

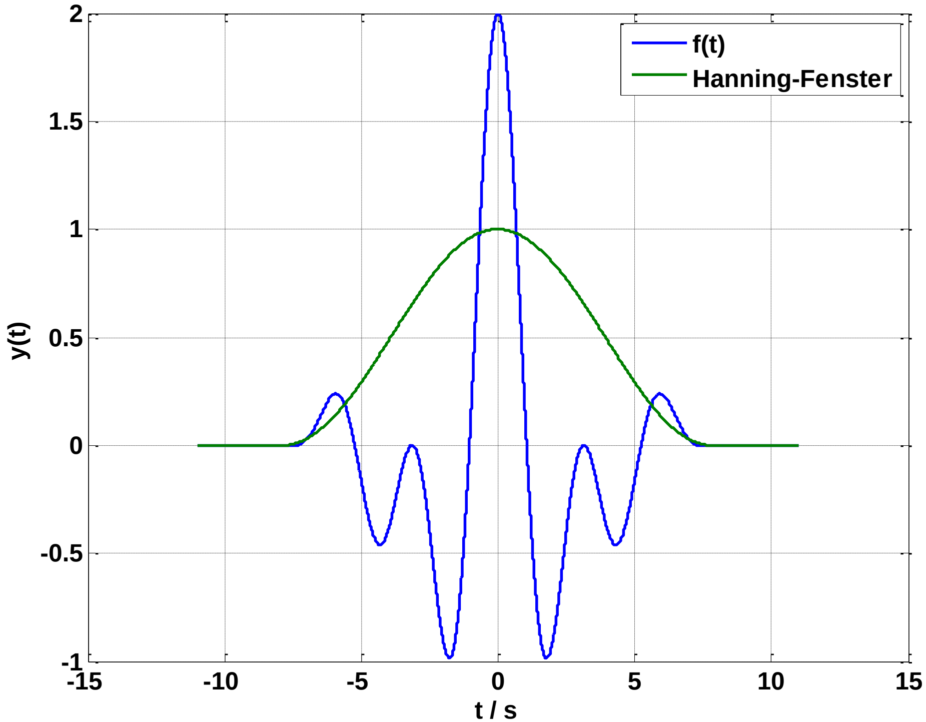


Erst mit einem größeren Fenster sind beide Frequenzen erkennbar

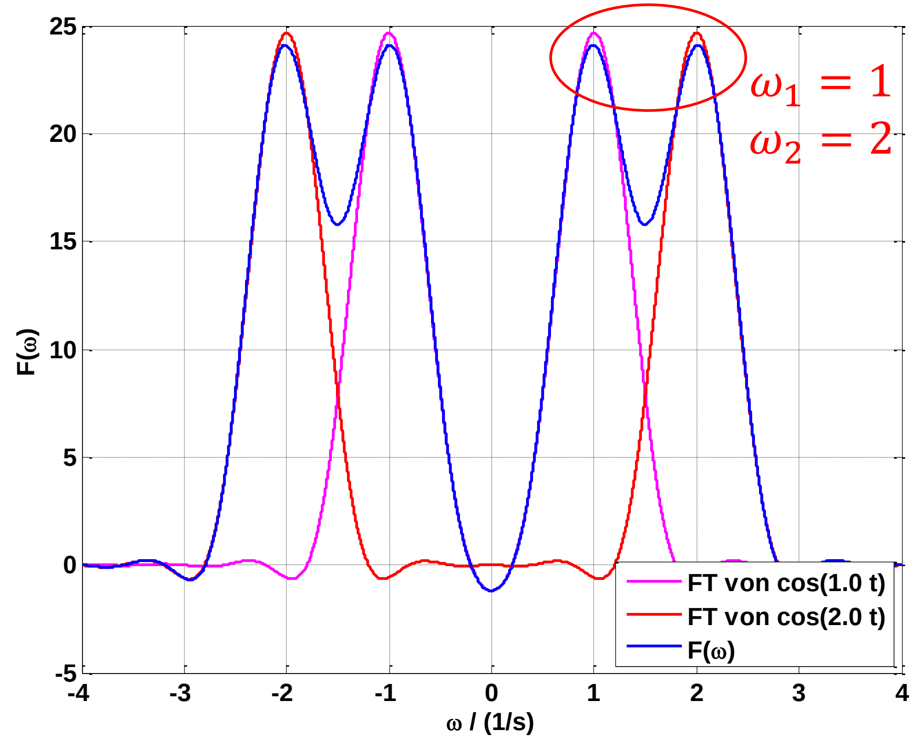
Summe zweier Cosinus-Signale

$y(t) = \cos(1 \cdot t) + \cos(2 \cdot t)$ mit Hanning-Fenster $[-2{,}5\pi; 2{,}5\pi]$

Zeitsignal



Fourier-Transformation

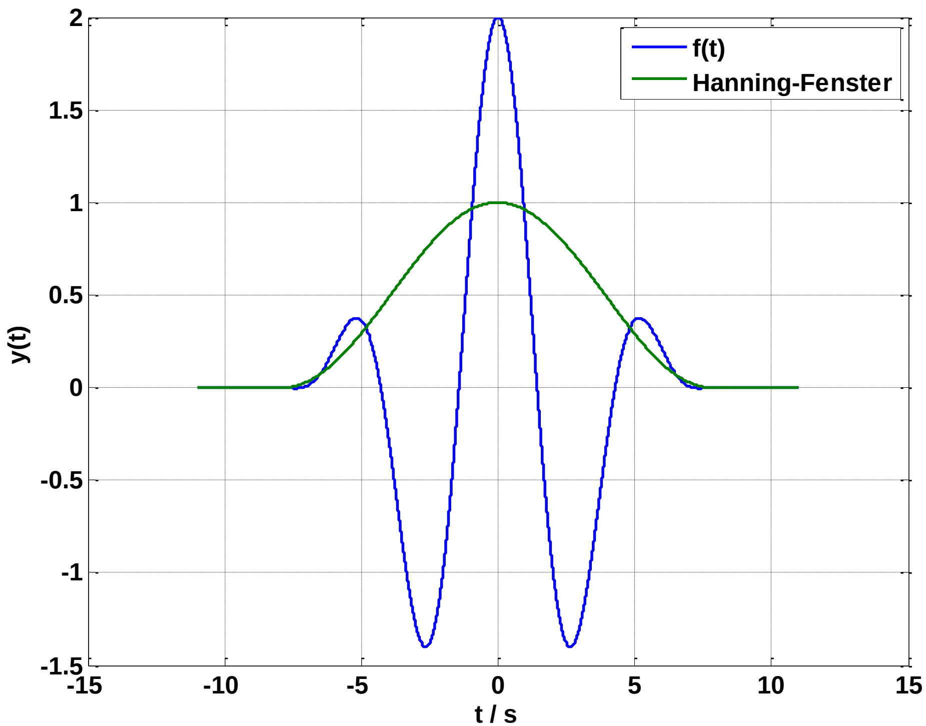


Glatterer Verlauf

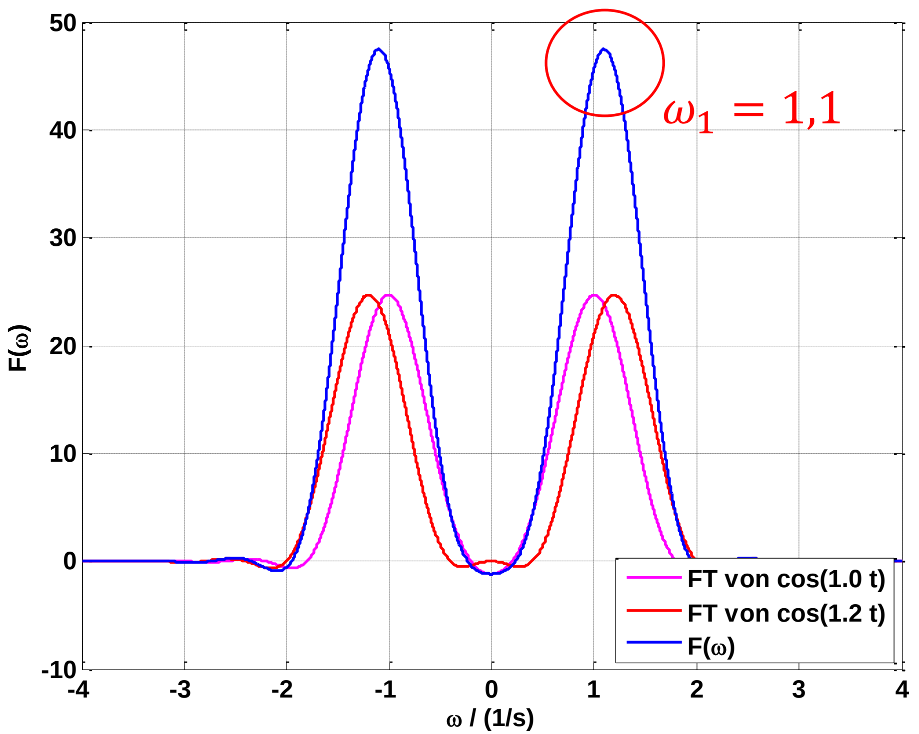
Summe zweier Cosinus-Signale

$$y(t) = \cos(1 \cdot t) + \cos(1{,}2 \cdot t) \text{ mit Hanning-Fenster } [-2{,}5\pi; 2{,}5\pi]$$

Zeitsignal



Fourier-Transformation

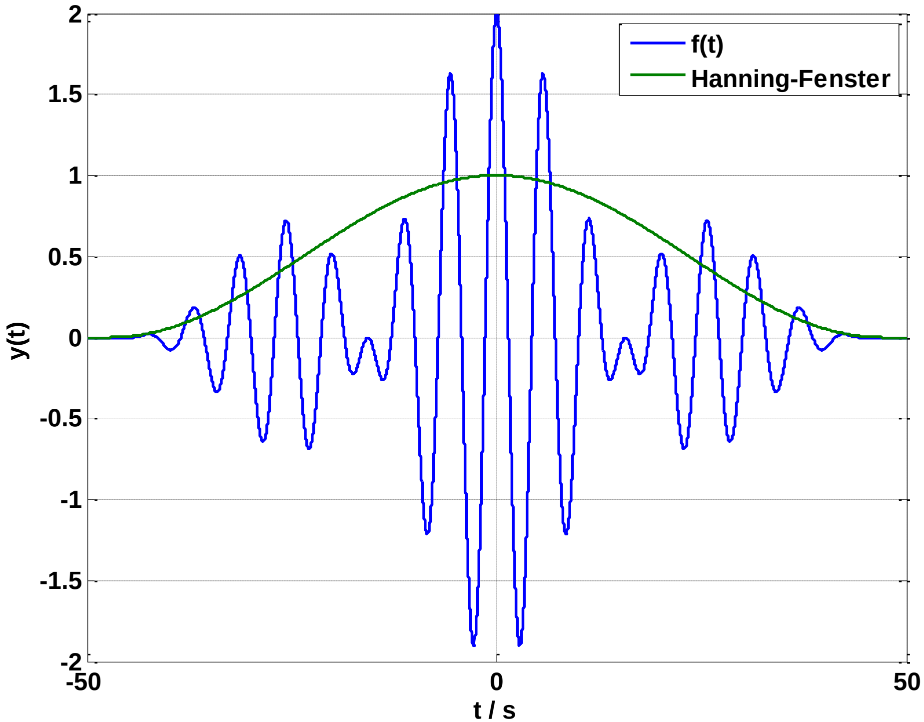


Die beiden Peaks „verschmelzen" auch mit dem Hanning-Fenster

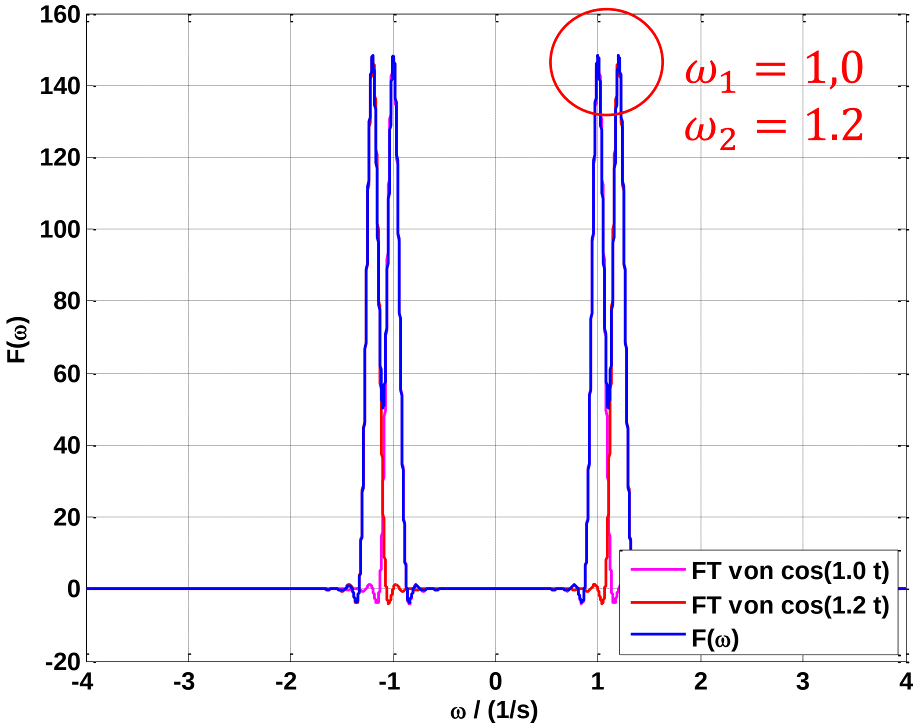
Summe zweier Cosinus-Signale

$y(t) = \cos(1 \cdot t) + \cos(1{,}2 \cdot t)$ mit Hanning-Fenster $[-15\pi; 15\pi]$

Zeitsignal

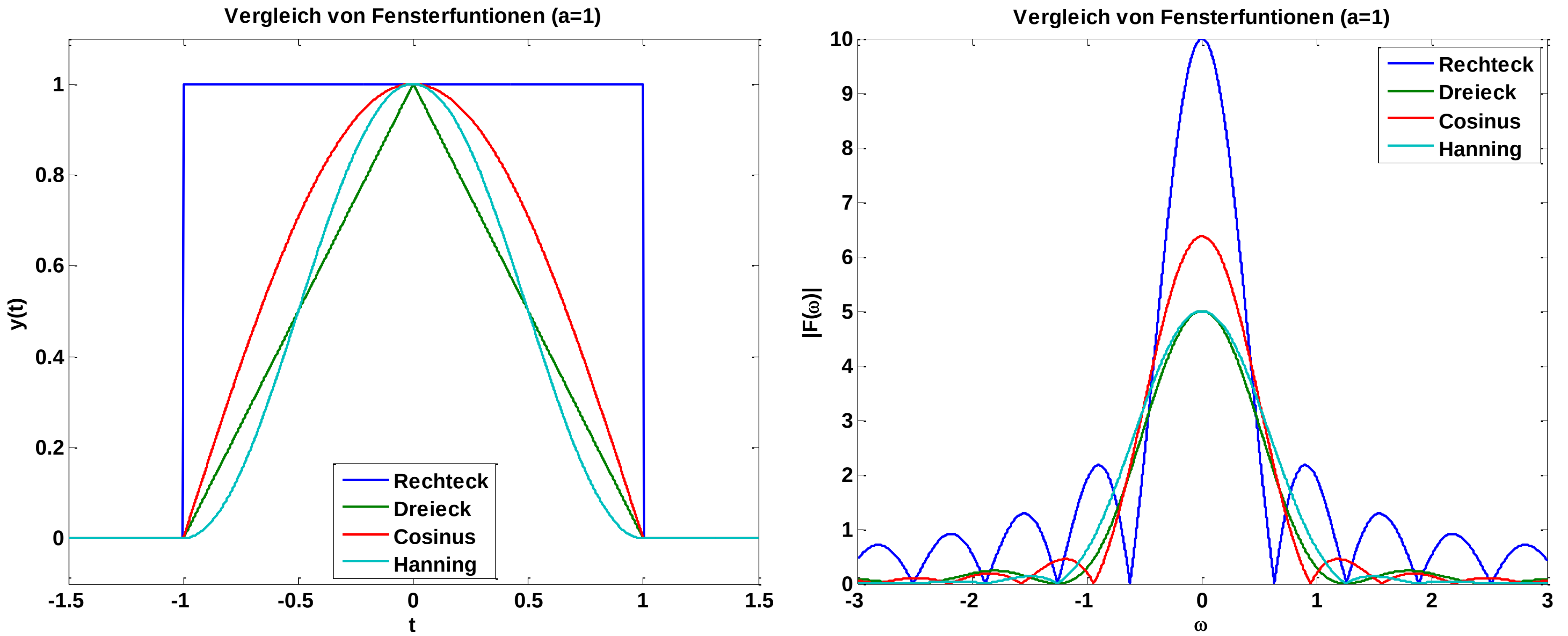


Fourier-Transformation

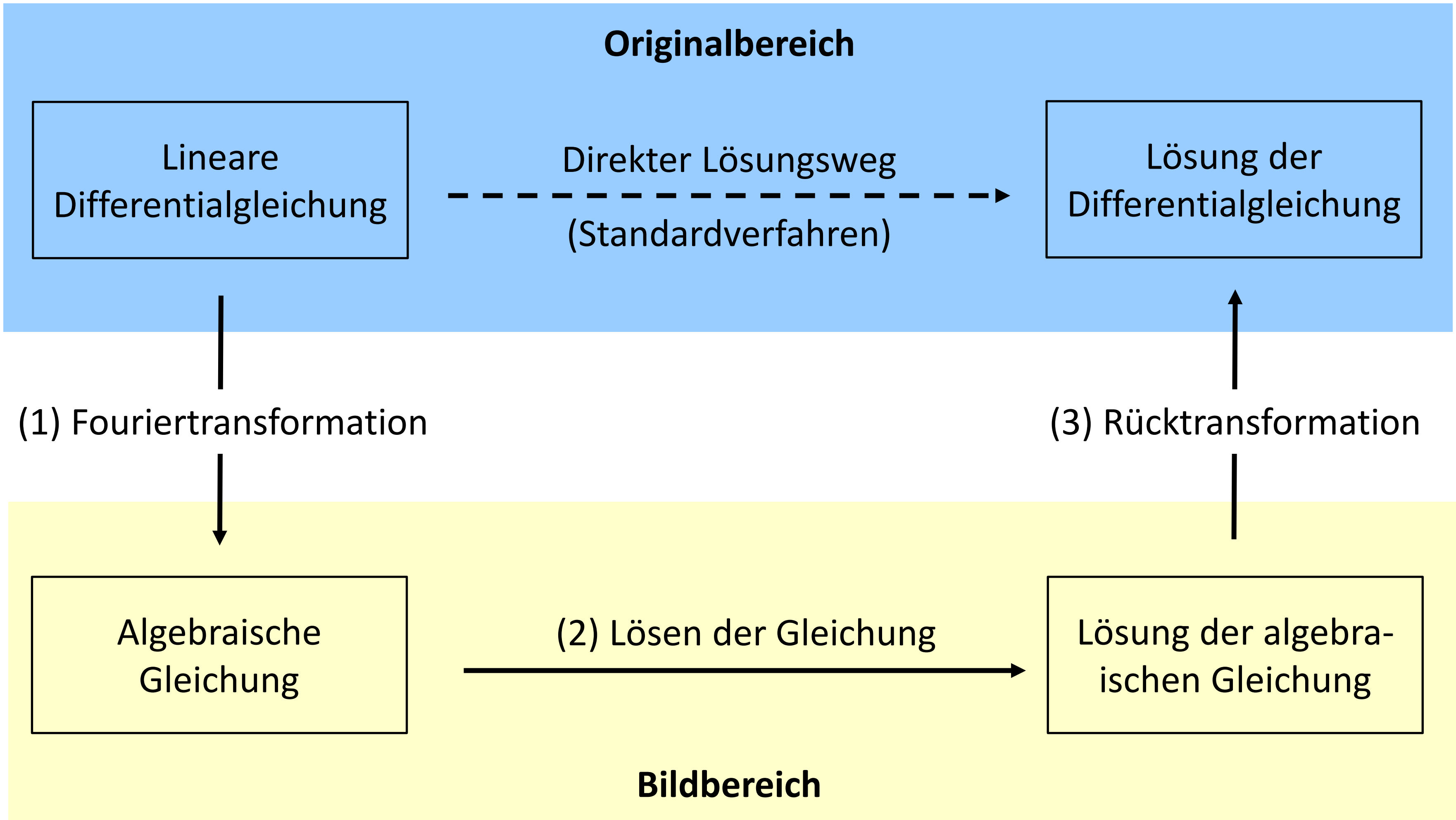


Erst mit einem größeren Fenster sind beide Frequenzen erkennbar

Vergleich von Fensterfunktionen



Lösung von Differentialgleichungen im Bildbereich



Systembeschreibung mit Fouriertransformation

$u(t)$ → **Lineares zeitinvariantes System** → $y(t)$

Eingangsgröße — Ausgangsgröße

Differentialgleichung

$$y(t) + a_1 y'(t) + \cdots + a_n y^{(n)}(t) =$$
$$= u(t) + b_1 u'(t) + \cdots + b_m u^{(m)}(t)$$

Übertragungsfunktion

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot U(\omega)$$

Testsignale

Impuls: $u(t) = \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(\omega) = 1$

$$\boxed{y(t) = g(t)}$$

Sinus: $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$

Frequenzgang: Übertragung Sinusförmiger Signale

Eingangsgröße

$$\boxed{u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega_0 t)}$$

Ausgangsgröße

$$\boxed{y(t) = |G(\omega_0)| \cdot u_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))}$$

- Selbe Frequenz
- Amplitude multipliziert mit $|G(\omega_0)|$
- Phasenverschiebung $\varphi(\omega_0) = \arg\big(G(\omega_0)\big)$

„Einheit“ Dezibel

Verhältnis zweier Leistungs- / Energiegrößen

$$L = \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\mathrm{B} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\mathrm{dB}$$

Feldgrößen

➔ Leistungsgrößen hängen von den Feldgrößen quadratisch ab, z. B. $P = R \cdot I^2$

$$L = \log\left(\frac{F_1^2}{F_2^2}\right)\mathrm{B} = \log\left(\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2\right)\mathrm{B} = 2 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)\mathrm{B} = 20 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)\mathrm{dB}$$

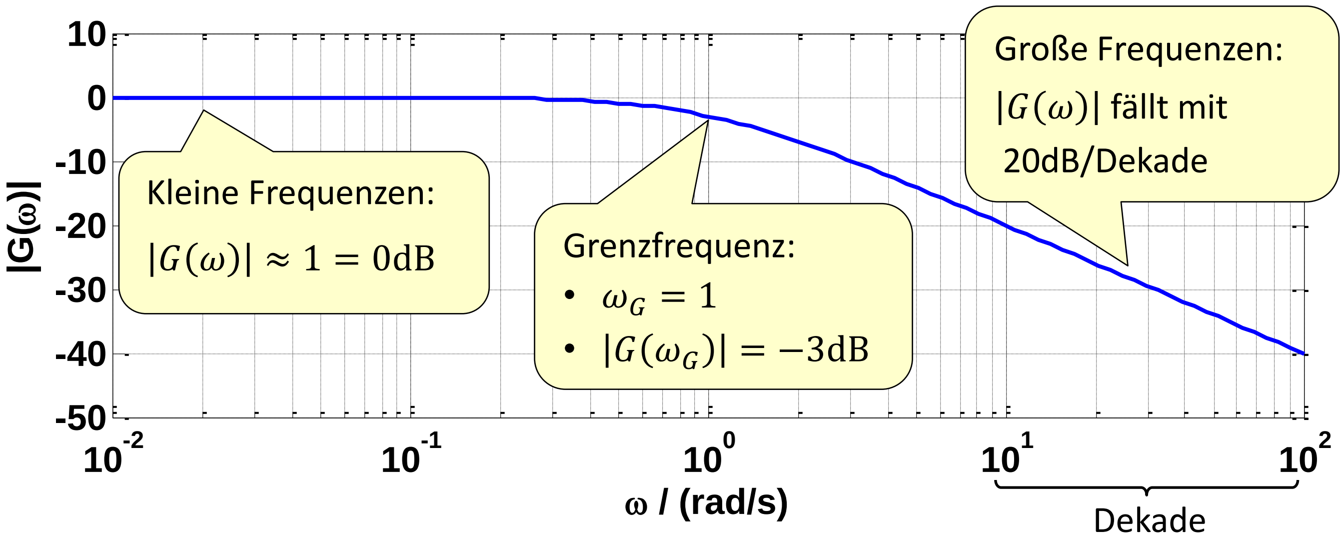
➔ Bezug auf feste Basis $F_2 = 1$

$$L = 20 \cdot \log(F_1)\ \mathrm{dB}$$

Betrag des Frequenzgangs in Dezibel

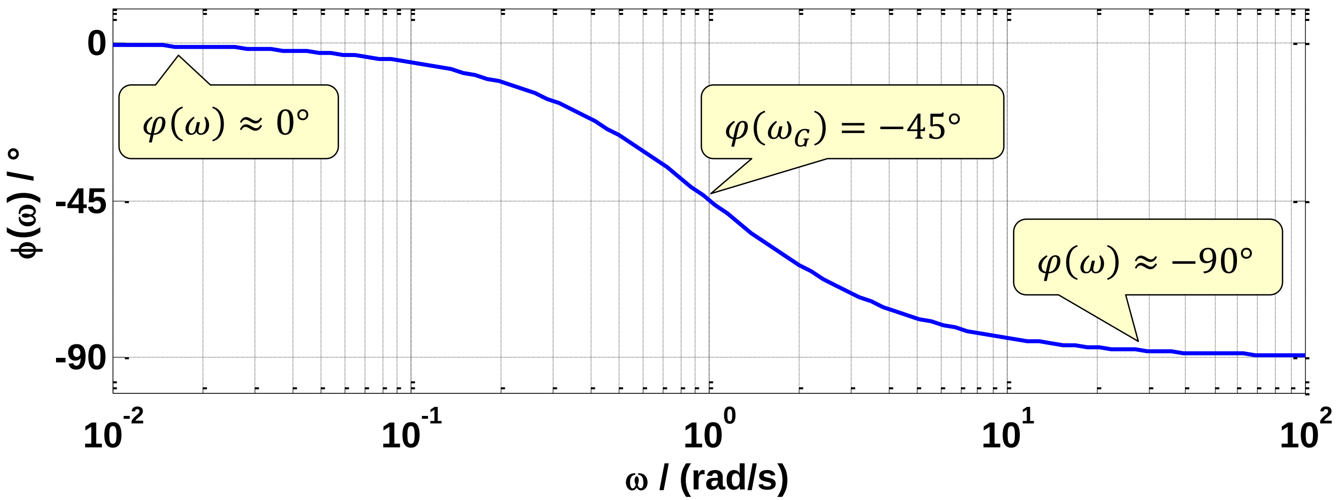
$$\boxed{|G(\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20 \cdot \log|G(\omega)|}$$

Beispiel: Frequenzgang Tiefpass erster Ordnung



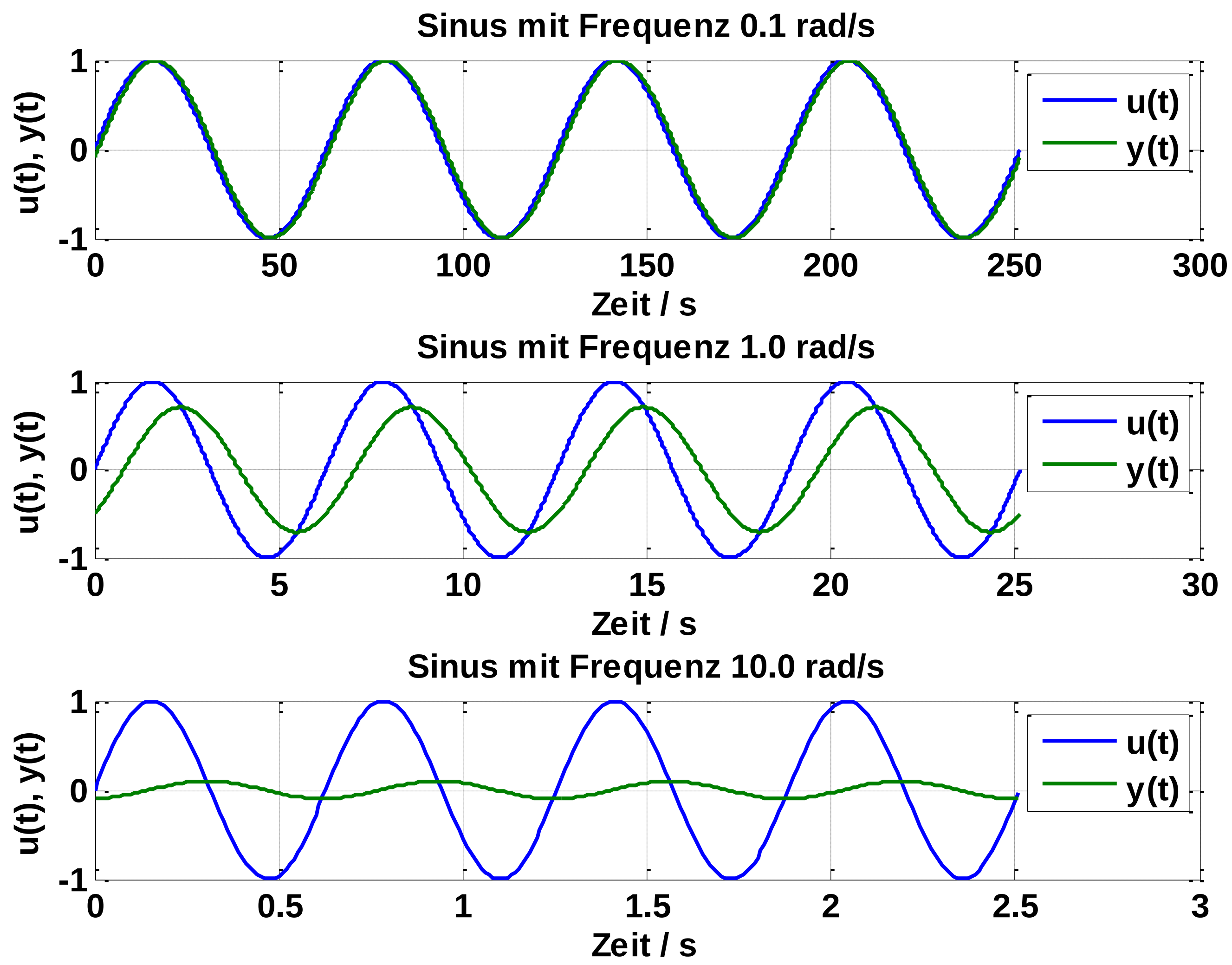
$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\,\dfrac{\omega}{\omega_G}}$$

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_G}\right)^2}}$$



$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_G}\right)$$

Beispiel: Frequenzgang Tiefpass erster Ordnung



$$\boxed{G(\omega) = \frac{1}{1 + j\,\omega}}$$