1 Fourierreihe

Die Aufgaben sind teilweise der Aufgabensammlung von Prof. Blankenbach entnommen. Bitte beachten Sie, dass in den dortigen Lösungen die folgende Definition der Fourierreihe verwendet wird:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,\omega_0\,t) + b_n \sin(n\,\omega_0\,t))$$

Ich und auch Herr Schmidt verwenden die in der Literatur weit verbreitete (z. B. Papula) Definition

$$\boxed{y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,\omega_0\,t) + b_n \sin(n\,\omega_0\,t))}$$

In den Lösungen von Prof. Blankenbach ist daher der Koeffizient a_0 halb so groß wie in der Vorlesung oder in den folgenden Lösungen.

Aufgabe 1.1

Gegeben ist die periodische Funktion

$$f(t) = \begin{cases} -t \text{ für } & -\pi \leq t \leq 0 \\ 0 \text{ für } & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Wie lautet die Fourier-Reihenentwicklung? Berechnen sie a_0, a_k, und b_k und geben Sie die Reihenentwicklung explizit bis $k = 1$ (einschließlich) an.

Aufgabe 1.2

Berechnen Sie die Fourierreihe folgender Funktion mit der Periodendauer $T = \pi$:

$$f(t) = \cos(t) \text{ für } 0 \leq t \leq \pi$$

a) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten.

c) Geben Sie das Ergebnis als Fourierreihe mit Summenzeichen an.

d) Geben Sie Fourierreihe explizit bis $k = 2$ (einschließlich) an.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie der Funktion!

Aufgabe 1.3

Gegeben ist die mit der Periode T periodische Funktion

$$f(t) = \begin{cases} -1 \text{ für } \ 0 \leq t \leq \pi \\ +1 \text{ für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion und geben Sie die relevanten Parameter für die weitere Rechnung an.

b) Berechnen Sie die Fourier-Koeffzienten

c) Geben Sie das Ergebnis als Fourierreihe mit Summenzeichen an.

d) Geben Sie Fourierreihe explizit bis $k = 3$ (einschließlich) an.

2 Fouriertransformation

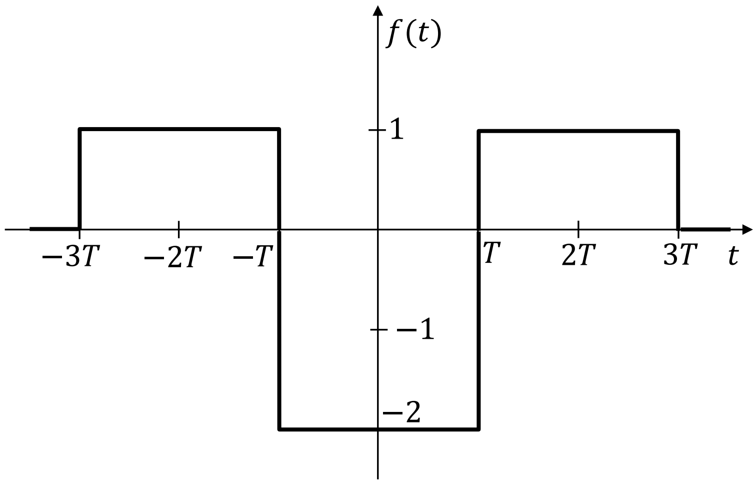
Aufgabe 2.1

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2.2

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der skizzierten Funktion:



b) Skizzieren Sie das Frequenzspektrum $F(\omega)$

c) Wie unterscheidet sich das Ergebnis, wenn die Funktion im Intervall $-T \leq t \leq T$ den Funktionswert 0 (statt -2) hat?

Hinweis: Berücksichtigen Sie die Symmetrieeigenschaften!

Aufgabe 2.3

a) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) = \begin{cases} e^{-a\,t} & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}, \qquad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

b) Teilen Sie das Ergebnis in Real- und Imaginärteil auf.

c) Skizzieren Sie für $a = 1$ den Realteil in der Frequenzdarstellung.

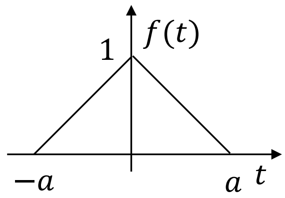
3 Fouriertransformation von Fensterfunktionen

Die Funktionen in den folgenden Aufgaben sind häufig verwendete Fensterfunktionen. Sie können diese Aufgaben auch schon als Übung für die Fouriertransformation rechnen, bevor das Thema Fensterfunktionen in der Vorlesung behandelt wurde.

Aufgabe 3.1 Dreieck-Fenster

Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Dreieck-Fensters:

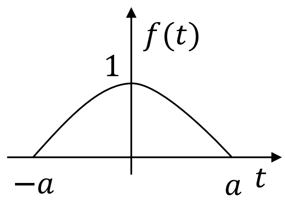
$$f(t) = d_a(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} + 1 \text{ für } & -a \leq 0 \\ -\dfrac{t}{a} + 1 \text{ für } & 0 \leq t \leq a \end{cases}$$



Aufgabe 3.2 Cosinus-Fenster

Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Cosinus-Fensters:

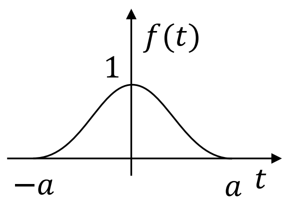
$$f(t) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi t}{2a}\right) & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Aufgabe 3.3 Hanning-Fenster

Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Hanning-Fensters:

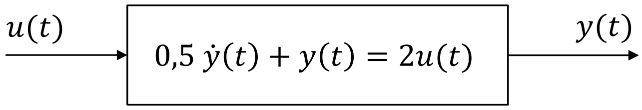
$$f(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\dfrac{\pi t}{2a}\right) & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



4 Frequenzgang

Aufgabe 4.1

Gegeben das folgende System mit den Signalen $u(t)$ als Eingangs- und $y(t)$ als Ausgangsgröße:



a) Berechnen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation, wie die $Y(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet\, y(t)$ von $U(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet\, u(t)$ abhängt. Geben Sie die Übertragungsfunktion an.

b) An den Eingang des Systems wird ein Sinussignal $u(t) = \sin(\omega_0 t)$ geschaltet. Berechnen Sie das zugehörige Ausgangssignal $y(t)$ in Abhängigkeit von ω_0.

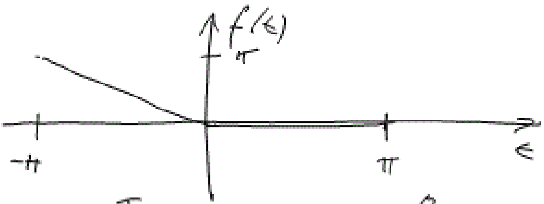
c) Skizzieren Sie für $\omega_0 = 2$ den Verlauf von $u(t)$ und $y(t)$ für $0 \le t \le 2\pi$.

LÖSUNGEN

1 Fourierreihe

Aufgabe 1.1

$$f(t) = \begin{cases} -t & -\pi \le t \le 0 \\ 0 & 0 < t \le \pi \end{cases} \qquad T = 2\pi \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi^2\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -t\cdot\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = (\text{Papula Nr } 282)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2} + \frac{t\cdot\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}\Big(\underbrace{\cos(n\pi)}_{\begin{cases}1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade}\end{cases} = (-1)^n} - 1\Big)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

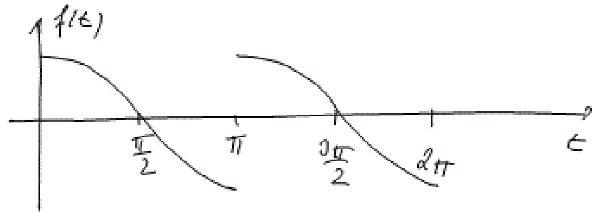
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\sin(nt)\,dt \overset{(208)}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t\cdot\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right) = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1\cos(t) + b_1\sin(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos(t) - 1$$

Aufgabe 1.2

a) $f(t) = \cos(t) \qquad 0 \le t \le \pi \qquad T = \pi \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2$



b) Mittelwert $= 0 \Rightarrow a_0 = 0 \qquad f(t)$ ungerade $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(t)\sin(2nt)\,dt$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\cancel{2}}\left(\sin((1+2n)t) - \sin((1-2n)t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos((1+2n)t)}{1+2n} + \frac{\cos((1-2n)t)}{1-2n}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\overbrace{\cos((1+2n)\pi)}^{-1}}{1+2n} + \frac{1}{1+2n} + \frac{\overbrace{\cos((1-2n)\pi)}^{-1}}{1-2n} - \frac{1}{1-2n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n} - \frac{1}{1-2n}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-2n-1-2n}{(1+2n)(1-2n)} =$$

$$= -\frac{8}{\pi}\,\frac{n}{(1+2n)(1-2n)} = \frac{8}{\pi}\,\frac{n}{(2n+1)(2n-1)}$$

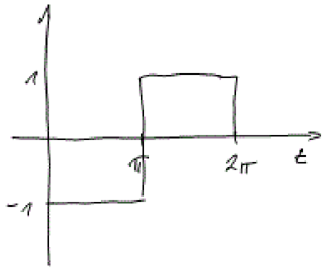
c) $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi}\,\frac{n}{(2n+1)(2n-1)}\,\sin(2nt)$$

d) $$\approx \frac{8}{3\pi}\sin(2t) + \frac{16}{15\pi}\sin(4t)$$

Aufgabe 1.3

a)

$$f(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t \leq \pi \\ +1 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



$T = 2\pi$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

b) Mittelwert $= 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$f(t)$ ungerade $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\sin(nt)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\Big(\cos(n\pi) - 1 - \big(1 - \cos(n\pi)\big)\Big) = \frac{2}{n\pi}\Big(\underbrace{\cos(n\pi)}_{\begin{cases} +1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade}\end{cases}} - 1\Big)$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{n\pi} & n \text{ ungerade } (1,3,5,7) \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

mit $n^* = 2n-1$ $(n = 1,2,3,4,..)$ $\Rightarrow b_n = -\frac{4}{(2n-1)\pi}$

c)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)\pi}\sin\big((2n-1)t\big)$$

d)

$$f(t) \approx -\frac{4}{\pi}\sin(t) - \frac{4}{3\pi}\sin(3t) - \frac{4}{5\pi}\sin(5t)$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)\right)$$

2 Fouriertransformation

Aufgabe 2.1

Die Funktion ist gerade, damit gilt:

$$F(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega\, t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cdot\cos(\omega t)\,dt$$

Lösung des Integrals durch Zerlegung des Produkts der Cosinusfunktionen

Mit der Rechenregel $\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$ folgt

$$F(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\big((1+\omega)t\big)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\big((1-\omega)t\big)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{1+\omega}\sin\big((1+\omega)t\big) + \frac{1}{1-\omega}\sin\big((1-\omega)t\big)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+\omega}\sin\left((1+\omega)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1-\omega}\sin\left((1-\omega)\frac{\pi}{2}\right)$$

Alternative: Lösung des Integrals mit der Integraltafel

Integraltafel (Papula Nr. 252) für $\omega^2 \neq 1$:

$$F(\omega) = 2\left[\frac{\sin((1-\omega)t)}{2(1-\omega)} + \frac{\sin((1+\omega)t)}{2(1+\omega)} +\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{1-\omega}\sin\left((1-\omega)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1+\omega}\sin\left((1+\omega)\frac{\pi}{2}\right)$$

Vereinfachung der Funktion

Mit der Rechenregel $\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$ folgt daraus:

$$F(\omega) = \frac{1}{1+\omega}\Big(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\omega\frac{\pi}{2} + \sin\omega\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{1-\omega}\Big(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\omega\frac{\pi}{2} - \sin\omega\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\Big)$$

Nun mit $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$F(\omega) = \frac{\cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)}{1+\omega} + \frac{\cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)}{1-\omega} = \cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1-\omega}\right)$$

$$= \cos\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \frac{(1+\omega+1-\omega)}{(1+\omega)(1-\omega)}$$

$$\boxed{F(\omega) = \cos\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{für } \omega \neq \pm 1}$$

Analyse der beiden Singularitäten

Grenzwert für $\omega \to \pm 1$ mit der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{\omega \to +1} \frac{2\cos\left(\omega \frac{\pi}{2}\right)}{1-\omega^2} = \lim_{\omega \to +1} 2 \frac{-\frac{\pi}{2} \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right)}{-2\omega} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to -1} \frac{2\cos\left(\omega \frac{\pi}{2}\right)}{1-\omega^2} = \lim_{\omega \to +1} 2 \frac{-\frac{\pi}{2} \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right)}{-2\omega} = \frac{\pi}{2}$$

Die Berechnung für $\omega = \pm 1$ liefert:

$$F(\pm 1) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cdot \cos(t)\, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt$$

Integraltafel (Papula Nummer 229)

$$F(\pm 1) = 2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ergebnis

$$\boxed{F(\omega) = \begin{cases} \cos\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} & \omega \neq \pm 1 \\ \frac{\pi}{2} & \omega = \pm 1 \end{cases}}$$

Vergleich mit dem Cosinus-Fenster (siehe Aufgabe 3.2)

Die Aufgabe ist ein Sonderfall des Cosinusfensters. Für dieses gilt (siehe Lösung zu Aufgabe 3.2)

$$f(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{2a}\right) \text{ für } -a \leq t \leq a \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$F(\omega) = \begin{cases} 2a\cos(\omega a)\left(\frac{1}{\pi + 2\omega a} + \frac{1}{\pi - 2\omega a}\right) & \omega \neq \pm\frac{\pi}{2a} \\ a & \omega = \pm\frac{\pi}{2a} \end{cases}$$

In der Aufgabe ist $a = \frac{\pi}{2}$. Damit folgt für $\omega \neq \pm 1$:

$$F(\omega) = 2a\cos(\omega a)\left(\frac{1}{\pi + 2\omega a} + \frac{1}{\pi - 2\omega a}\right)$$

$$= 2\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\left(\frac{1}{\pi + 2\omega\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi - 2\omega\frac{\pi}{2}}\right) = \pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1-\omega}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\frac{1-\omega+1+\omega}{1-\omega^2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\frac{1}{1-\omega^2}$$

Aufgabe 2.2

a) $f(t)$ ist gerade $F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\,dt$

$$F(\omega) = 2\cdot\int_0^T (-2)\cos(\omega t)\,dt + 2\int_T^{3T}\cos(\omega t)\,dt$$

$$(\omega \neq 0) \quad = -4\cdot\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^T + 2\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_T^{3T}$$

$$= -\frac{4}{\omega}\sin(\omega T) + \frac{2}{\omega}\sin(\omega 3T) - \frac{2}{\omega}\sin(\omega T)$$

$$= \frac{2}{\omega}\left(\sin(3\omega T) - 3\sin(\omega T)\right)$$

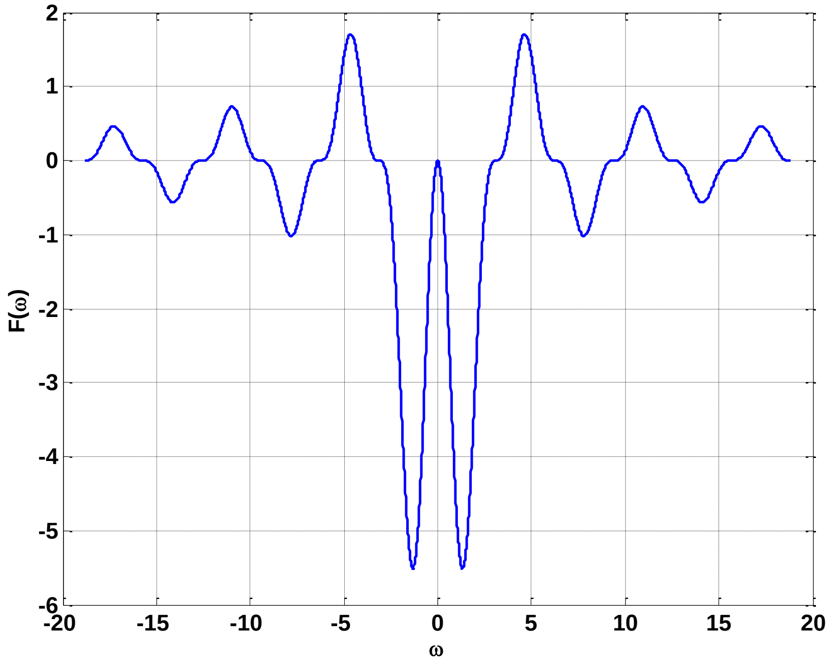
[Papula S. 96 $\quad \sin^3(x) = \frac{1}{4}\left(3\sin(x) - \sin(3x)\right)$]

$$F(\omega) = -\frac{8}{\omega}\sin^3(\omega T) \qquad \text{für } \omega \neq 0$$

$$\underline{\omega = 0:} \quad F(0) = 2\int_0^{3T} f(t)\,dt = 2\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ -\frac{8}{\omega}\sin^3(\omega T) & \omega \neq 0 \end{cases}$$

b)



c) $f(t) = 0$ für $-T \leq t \leq T$

$$F(\omega) = 2 \cdot \underbrace{\int_0^T (-2)\cos(\omega t)\,dt}_{=0} + 2\int_T^{3T} \cos(\omega t)\,dt$$

$$(\omega \neq 0) \quad = \cancel{-4 \cdot \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^T} + 2\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_T^{3T}$$

$$= \cancel{-\frac{4}{\omega}\sin(\omega T)} + \frac{2}{\omega}\sin(\omega 3T) - \frac{2}{\omega}\sin(\omega T)$$

$$\left[\sin(x_1) - \sin(x_2) = 2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\right]$$

$$F(\omega) = \frac{4}{\omega}\cos(2\omega T) \cdot \sin(\omega T)$$

$\underline{\omega = 0:}$
$$F(0) = 2\int_0^{3T} f(t)\,dt = 2\int_T^{3T} dt = 4T$$

$$F(\omega) = \begin{cases} 4T & \omega = 0 \\ \frac{4}{\omega}\cos(2\omega T)\sin(\omega T) & \omega \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2.3

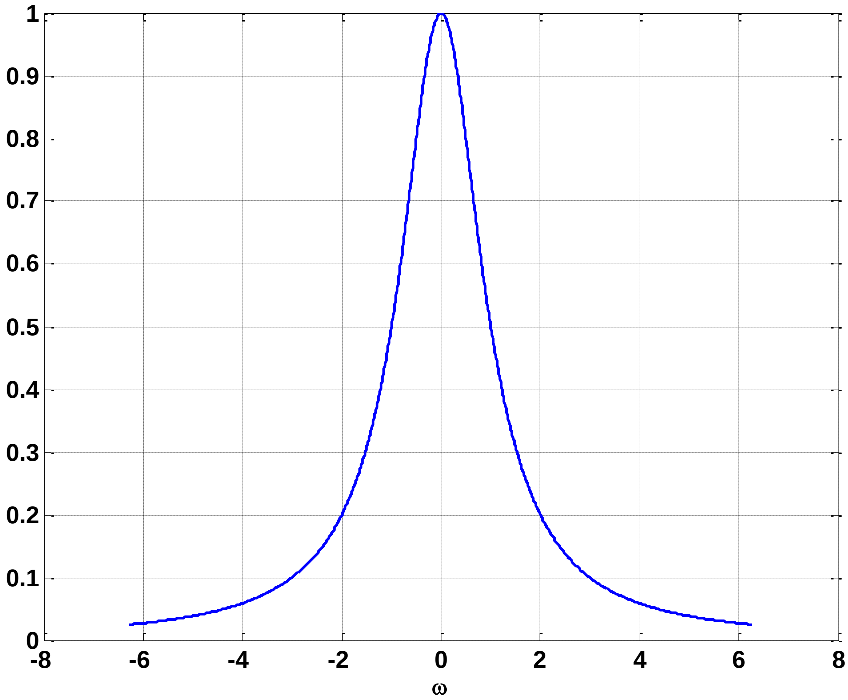
a) $$F(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-a-j\omega)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{-a-j\omega}\, e^{(-a-j\omega)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

b) $$F(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \cdot \frac{a-j\omega}{a-j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+\omega^2} - j\,\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

c) $$\mathrm{Re}(F(\omega)) = \frac{a}{a^2+\omega^2}$$



3 Fouriertransformation von Fensterfunktionen

Aufgabe 3.1 Dreieck-Fenster

Die Funktion ist gerade, damit gilt:

$$F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cdot\cos(\omega\, t)\,\mathrm{d}t$$

$$F(\omega) = 2\int_0^a \left(1-\frac{t}{a}\right)\cdot\cos(\omega\, t)\,dt = 2\int_0^a \cos(\omega\, t)\,dt - \frac{2}{a}\int_0^a t\cdot\cos(\omega\, t)\,dt$$

Lösung des Fourier-Integrals

Mit Integraltafel (z. B. Papula Nr. 232) folgt für $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) = 2\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega\, t)\right]_0^a - \frac{2}{a}\left[\frac{\cos(\omega\, t)}{\omega^2} + \frac{t\cdot\sin(\omega\, t)}{\omega}\right]_0^a$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin(\omega\, a) - \frac{2}{a}\left(\frac{\cos(\omega\, a)}{\omega^2} + \frac{a\cdot\sin(\omega\, a)}{\omega}\right) + \frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) - \frac{2\cos(\omega\, a)}{a\,\omega^2} - \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) + \frac{2}{a\,\omega^2} = \frac{2}{a\,\omega^2}(1-\cos(\omega a))$$

Analyse der Singularität

Grenzwert der berechneten Fouriertransformierten mit der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{\omega\to 0} F(\omega) = \lim_{\omega\to 0}\frac{2(1-\cos(\omega a))}{a\,\omega^2} = \lim_{\omega\to 0}\frac{2a\sin(\omega a)}{2a\omega} = \lim_{\omega\to 0}\frac{a\cos(\omega a)}{1} = a$$

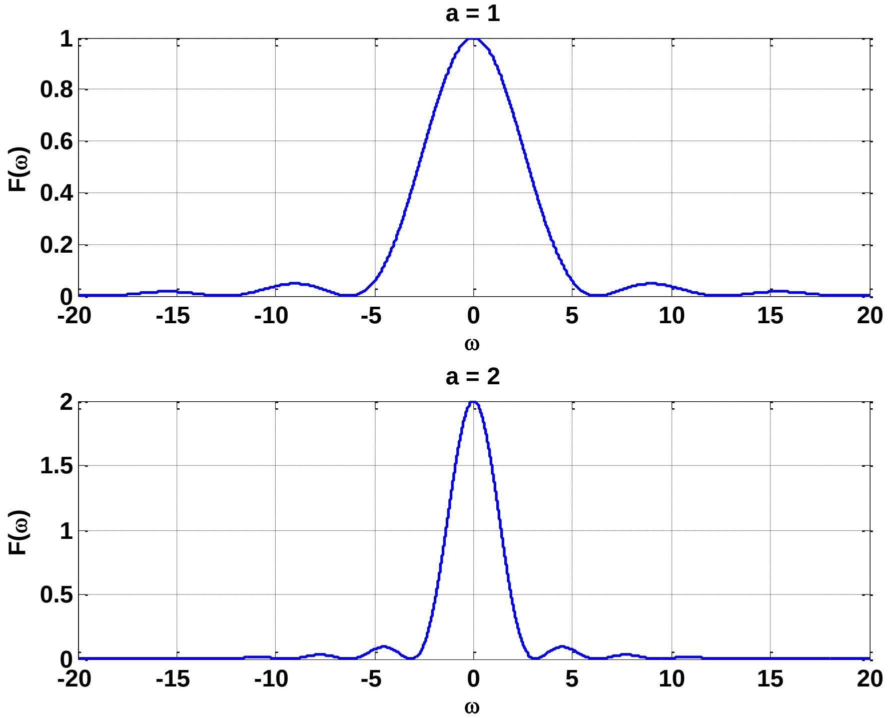
Die Berechnung des Funktionswertes für $\omega = 0$ ergibt:

$$F(0) = \int_{-a}^a f(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2a = a$$

Es handelt sich damit um eine hebbare Singularität.

Ergebnis

$$\boxed{F(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2}{a\,\omega^2}(1-\cos(\omega a)) & \omega \neq 0 \\ a & \omega = 0 \end{cases}}$$



Aufgabe 3.2 Cosinus-Fenster

Die Funktion ist gerade, damit gilt:

$$F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cdot\cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a \cos\left(\frac{\pi t}{2a}\right)\cdot\cos(\omega t)\,dt$$

Mit der Rechenregel $\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$ folgt

$$F(\omega) = \int_0^a \cos\left(\left(\frac{\pi}{2a}+\omega\right)t\right)dt + \int_0^a \cos\left(\left(\frac{\pi}{2a}-\omega\right)t\right)dt$$

Lösung des Fourier-Integrals

$$F(\omega) = \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2a}+\omega}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2a}+\omega\right)t\right) + \frac{1}{\frac{\pi}{2a}-\omega}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2a}-\omega\right)t\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2a}+\omega}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2a}+\omega\right)a\right) + \frac{1}{\frac{\pi}{2a}-\omega}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2a}-\omega\right)a\right)$$

Mit der Rechenregel $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$ folgt daraus:

$$F(\omega) = \frac{1}{\frac{\pi}{2a}+\omega}\left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\omega a + \sin\omega a\cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{\frac{\pi}{2a}-\omega}\left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\omega a - \sin\omega a\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

Nun mit $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$F(\omega) = \frac{\cos(\omega a)}{\frac{\pi}{2a}+\omega} + \frac{\cos(\omega a)}{\frac{\pi}{2a}-\omega} = \cos(\omega a)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2a}+\omega} + \frac{1}{\frac{\pi}{2a}-\omega}\right)$$

$$= 2a\cos(\omega a)\left(\frac{1}{\pi+2\omega a} + \frac{1}{\pi-2\omega a}\right)$$

Analyse der beiden Singularitäten

Grenzwert für $\omega \to \pm\frac{\pi}{2a}$ mit der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{\omega\to+\frac{\pi}{2a}}\left(\frac{2a\cos(\omega a)}{\pi+2\omega a} + \frac{2a\cos(\omega a)}{\pi-2\omega a}\right) = \lim_{\omega\to+\frac{\pi}{2a}}\left(\frac{2a\cos(\omega a)}{\pi-2\omega a}\right)$$
$$= \lim_{\omega\to+\frac{\pi}{2a}}\left(\frac{-2a^2\sin(\omega a)}{-2a}\right) = a$$

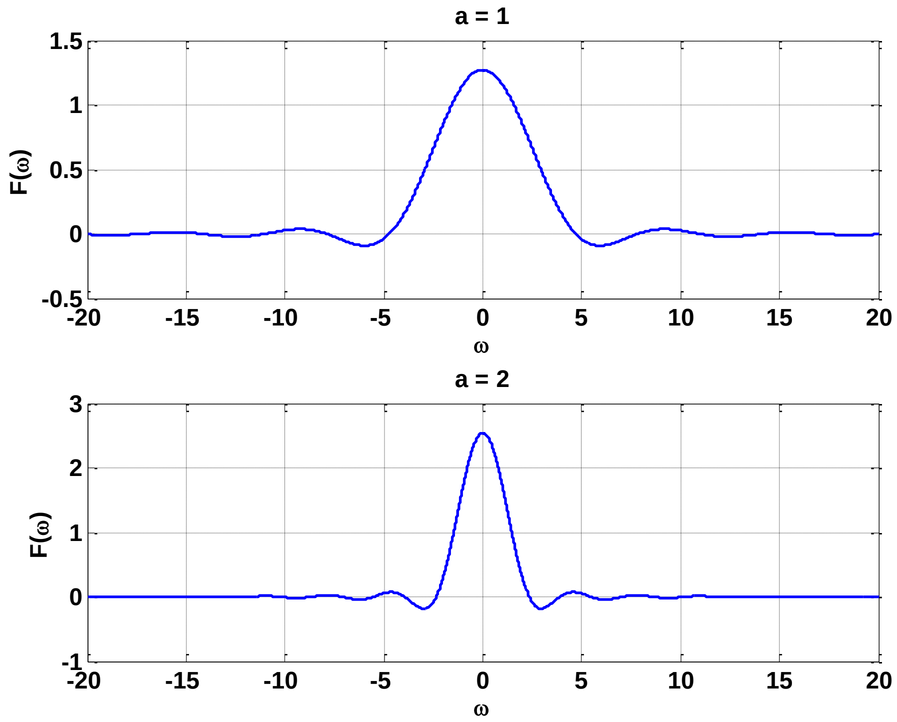
$$\lim_{\omega\to-\frac{\pi}{2a}}\left(\frac{2a\cos(\omega a)}{\pi+2\omega a} + \frac{2a\cos(\omega a)}{\pi-2\omega a}\right) = \lim_{\omega\to-\frac{\pi}{2a}}\left(\frac{2a\cos(\omega a)}{\pi+2\omega a}\right)$$
$$= \lim_{\omega\to-\frac{\pi}{2a}}\left(\frac{-2a^2\sin(\omega a)}{2a}\right) = a$$

Die Berechnung für $\omega = \pm\frac{\pi}{2a}$ (Einsetzen in der zweiten Zeile der Berechnung) liefert:

$$F\left(\pm\frac{\pi}{2a}\right) = \int_0^a \cos(0)\,dt + \int_0^a \cos\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)t\right)dt = a + \left[\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)\right]_0^a = a$$

Ergebnis

$$F(\omega) = \begin{cases} 2a\cos(\omega a)\left(\dfrac{1}{\pi + 2\omega a} + \dfrac{1}{\pi - 2\omega a}\right) & \omega \neq \pm\dfrac{\pi}{2a} \\ a & \omega = \pm\dfrac{\pi}{2a} \end{cases}$$



Aufgabe 3.3 Hanning-Fenster

Die Funktion ist gerade, damit gilt:

$$F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cdot\cos(\omega\, t)\,\mathrm{dt} = 2\int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi t}{2a}\right)\cdot\cos(\omega t)\,dt$$

Mit der Rechenregel $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ folgt daraus

$$F(\omega) = \int_0^a \left(1+\cos\left(\frac{\pi t}{a}\right)\right)\cdot\cos(\omega t)\,dt = \int_0^a \cos(\omega t)\,dt + \int_0^a \cos\left(\frac{\pi t}{a}\right)\cos(\omega t)\,dt$$

Mit der Rechenregel $\cos(x\cdot y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$ folgt schließlich

$$F(\omega) = \int_0^a \cos(\omega t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^a \cos\left(\left(\frac{\pi}{a}+\omega\right)t\right)\,dt\ + \frac{1}{2}\int_0^a \cos\left(\left(\frac{\pi}{a}-\omega\right)t\right)\,dt \qquad (*)$$

Lösung des Fourier-Integrals

Die drei Integrale $(*)$ können für $\omega \neq 0, \omega \neq \pm\frac{\pi}{a}$ gelöst werden:

$$F(\omega) = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^a + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{\pi}{a}+\omega}\sin\left(\left(\frac{\pi}{a}+\omega\right)t\right)\right]_0^a + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{\pi}{a}-\omega}\sin\left(\left(\frac{\pi}{a}-\omega\right)t\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{\sin(\omega a)}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi+\omega a)}{\frac{\pi}{a}+\omega} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi-\omega a)}{\frac{\pi}{a}-\omega} = \frac{a}{2}\sin(\omega a)\cdot\left(\frac{2}{\omega a} - \frac{1}{\pi+\omega a} + \frac{1}{\pi-\omega a}\right)$$

Analyse der beiden Singularitäten

Untersuchung der Grenzwerte

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{a}{2}\sin(\omega T)\cdot\left(\frac{2}{\omega a} - \frac{1}{\pi+\omega a} + \frac{1}{\pi-\omega a}\right) = \lim_{\omega\to 0}\left(a\frac{\sin(\omega a)}{\omega a}\right) = a$$

$$\lim_{\omega\to\frac{\pi}{a}}\left(\frac{a}{2}\sin(\omega a)\cdot\left(\frac{2}{\omega a} - \frac{1}{\pi+\omega a} + \frac{1}{\pi-\omega a}\right)\right)$$

$$= \lim_{\omega\to\frac{\pi}{a}}\left(\frac{a}{2}\sin(\omega a)\cdot\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi-\omega a}\right)\right)$$

$$= \frac{a}{2}\lim_{\omega\to\frac{\pi}{a}}\left(\frac{\sin(\omega a)}{\pi-\omega a}\right) = \frac{a}{2}\lim_{\omega\to\frac{\pi}{a}}\frac{a\cos(\omega a)}{-a} = \frac{a}{2}$$

Auf gleiche Weise gilt für $\omega \to -\frac{\pi}{a}$:

$$\lim_{\omega\to-\frac{\pi}{a}}\left(\frac{a}{2}\sin(\omega a)\cdot\left(\frac{2}{\omega a} - \frac{1}{\pi+\omega a} + \frac{1}{\pi-\omega a}\right)\right) = \frac{a}{2}$$

Die Berechnung der Fouriertransformation für $\omega = 0$ und $\omega = \pm\frac{\pi}{a}$, ausgehend von Gleichung $(*)$

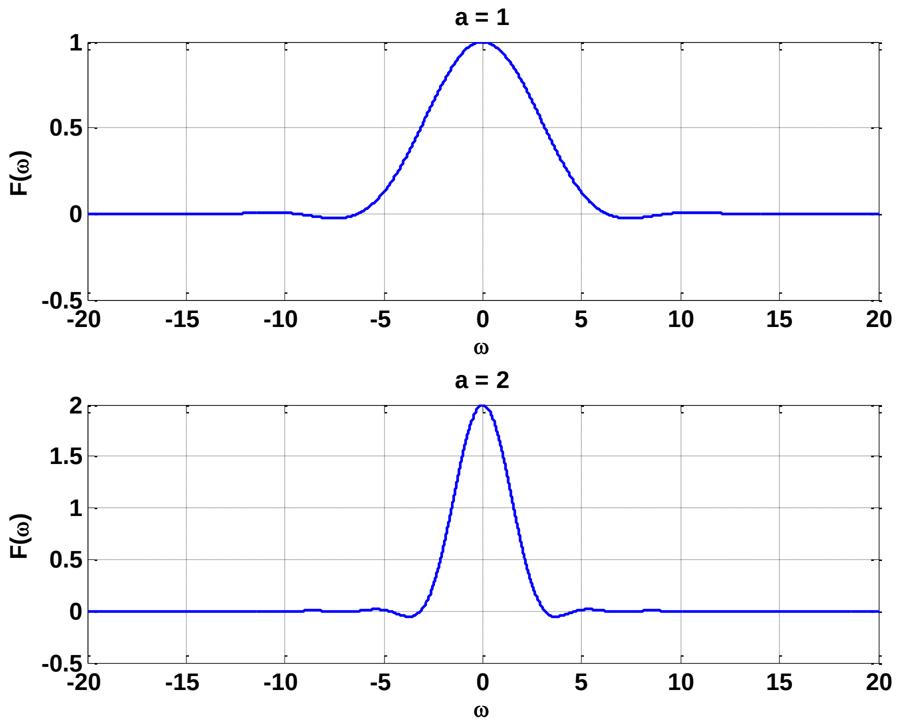
$$F(0) = \int_0^a dt + \frac{1}{2}\int_0^a \cos\left(\frac{\pi}{a}t\right)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^a \cos\left(\frac{\pi}{a}t\right)\,dt = a + \left[\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)\right]_0^a = a$$

$$F\left(\pm\frac{\pi}{a}\right) = \int_0^a \cos\left(\pm\frac{\pi}{a}t\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^a \cos(0)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi}{a}t\right)\,dt$$

$$= \left[\pm\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)\right]_0^a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{a}t\right)\right]_0^a = \frac{1}{2}a$$

Ergebnis

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{a}{2}\sin(\omega a) \cdot \left(\frac{2}{\omega a} - \frac{1}{\pi + \omega a} + \frac{1}{\pi - \omega a}\right) & \omega \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \pm\frac{\pi}{a}\right\} \\ a & \omega = 0 \\ \frac{a}{2} & \omega = \pm\frac{\pi}{a} \end{cases}$$



4 Frequenzgang

a) Fouriertransformation der Differentialgleichung:

$$0{,}5\,\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 0{,}5\,j\omega\,Y(\omega) + Y(\omega) = 2U(\omega)$$

Auflösen nach der Ausgangsgröße

$$Y(\omega) = \frac{2}{1 + j\,0{,}5\,\omega} U(\omega) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = \frac{2}{1 + j\,0{,}5\,\omega}$$

b) Allgemein gilt bei sinusförmigem Eingangsignal

$$y(t) = |G(\omega_0)| \cdot \sin\big(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\big)$$

Nun Berechnung von Betrag und Phase von $G(\omega_0)$

$$G(\omega_0) = \frac{2}{1 + j\frac{\omega_0}{2}} \quad \Rightarrow \quad |G(\omega_0)| = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2}}$$

$$G(\omega_0) = \frac{1 - j\frac{\omega_0}{2}}{|G(\omega_0)|^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega_0) = -\arctan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

Insgesamt folgt damit

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2}} \cdot \sin\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right)$$

c) Für $\omega_0 = 2$ gilt:

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(2\left(t - \frac{\pi}{8}\right)\right)$$