1 Fourierreihe

1.1 Reelle Fourierreihe

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\,\omega_0\,t) + b_n \cdot \sin(n\,\omega_0\,t)\,)\,; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Berechnung der Koeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$ $a_0 = 0$, wenn Mittelwert $= 0$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t) \cdot \cos(n\,\omega_0\,t)\,dt$$ $a_n = 0$, wenn $y(t)$ gerade

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t) \cdot \sin(n\,\omega_0\,t)\;dt$$ $b_n = 0$, wenn $y(t)$ ungerade

1.2 Komplexe Fourierreihe

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j\,n\,\omega_0\,t} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T y(t) \cdot e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\,dt$$

Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten aus den reellen

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j} \cdot b_n); \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + j \cdot b_n)$$

Berechnung der reellen Fourierkoeffizienten aus den komplexen

$$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n)\,; \quad b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}(c_n)$$

2 Fouriertransformation

Definition / Berechnung

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-j\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot \mathrm{e}^{j\,\omega\,t}\,\mathrm{d}\omega$$

Reelle Berechnung bei symmetrischen Funktionen

$f(t)$ gerade

$$F(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t$$

$f(t)$ ungerade

$$F(\omega) = -2j\int_{0}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega\,t)\,\mathrm{d}t$$

Rechenregeln

	Originalbereich	**Bildbereich**
Linearität	$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)$	$c_1 \cdot F_1(\omega) + c_2 \cdot F_2(\omega)$
Ähnlichkeitssatz	$f(a\,t) \qquad (a \neq 0,\ \text{reell})$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Verschiebung	$f(t - t_0) \quad (t_0\ \text{reell})$	$e^{-j\,\omega\,t_0} \cdot F(\omega)$
Dämpfung	$e^{j\,\omega_0\,t} \cdot f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u)\,du$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
Multiplikation	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(v) \cdot F_2(\omega - v)\,dv$
Ableitung	$f'(t)$ $f''(t)$ $\vdots$ $f^n(t)$	$(j\omega) \cdot F(\omega)$ $(j\omega)^2 \cdot F(\omega) \quad = -\omega^2 \cdot F(\omega)$ $\vdots$ $(j\omega)^n \cdot F(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(u)du$	$\frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega)$
Vertauschung	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) \quad \Rightarrow \quad F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \cdot f(-\omega)$	

Korrespondenzen ($a > 0, \omega_0 > 0$)

Originalfunktion $f(t)$	**Bildfunktion $F(\omega)$**
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{a} \cdot e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$\dfrac{t}{a^2+t^2}$	$\begin{cases} j\pi \cdot e^{-a\lvert\omega\rvert} & \omega < 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -j\pi \cdot e^{-a\lvert\omega\rvert} & \omega > 0 \end{cases}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{-a\,t} \cdot \sigma(t)$	$\dfrac{1}{a+j\,\omega}$
$t \cdot e^{-a\,t} \cdot \sigma(t)$	$\dfrac{1}{(a+j\,\omega)^2}$
$t^n \cdot e^{-a\,t} \cdot \sigma(t)$	$\dfrac{n!}{(1+j\,\omega)^{n+1}}$
$e^{-a\,t^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\dfrac{\sin(a\,t)}{t}$	$\begin{cases} \pi & \lvert\omega\rvert < a \\ \pi/2 & \lvert\omega\rvert = a \\ 0 & \lvert\omega\rvert > a \end{cases}$
$e^{-a\,t} \cdot \sin(\omega_0\,t) \cdot \sigma(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(a+j\,\omega)^2+\omega_0^2}$
$e^{-a\,t} \cdot \cos(\omega_0\,t) \cdot \sigma(t)$	$\dfrac{a+j\omega}{(a+j\,\omega)^2+\omega_0^2}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t+a)$	$e^{j\,a\,\omega}$
$\delta(t-a)$	$e^{-j\,a\,\omega}$
$e^{j\,\omega_0\,t}$	$2\,\pi \cdot \delta(\omega-\omega_0)$
$e^{-j\,\omega_0\,t}$	$2\,\pi \cdot \delta(\omega+\omega_0)$
$\cos(\omega_0\,t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
$\sin(\omega_0\,t)$	$j\,\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

3 Laplacetransformation

Definition/Berechnung

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s\,t}\,dt$$ Voraussetzung: $f(t) = 0$ für $t < 0$

Rechenregeln

	Originalbereich	**Bildbereich**
Linearkombination	$a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)$	$a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0)$	$e^{-st_0} \cdot F(s)$
Dämpfung	$e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t)$	$F(s - \alpha)$
Differentiation	$\frac{df(t)}{dt}$ $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ $\vdots$	$s \cdot F(s) - f(-0)$ $s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(-0) - f'(-0)$ $\vdots$
Integration	$\int_0^t f(\tau)\ d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t) =$ $= \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Anfangswert	$f(+0) = \lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$	
Endwert	$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$	

Korrespondenzen der Laplacetransformation

Originalfunktion $f(t)$	**Bildfunktion $F(s)$**
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$
$e^{-\delta t}$	$\frac{1}{s+\delta}$
$t \cdot e^{-\delta t}$	$\frac{1}{(s+\delta)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\delta t}$	$\frac{1}{(s+\delta)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$
$\frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1+Ts}$
$\frac{t}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(1+Ts)^2}$
$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$
$1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$	$\frac{1}{s \cdot (1+T_1 s)(1+T_2 s)}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-\frac{dt}{T}} \cdot \sin\left(\sqrt{1-d^2}\,\frac{t}{T} + \arccos(d)\right)$	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\,d\,T\,s + 1)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}$