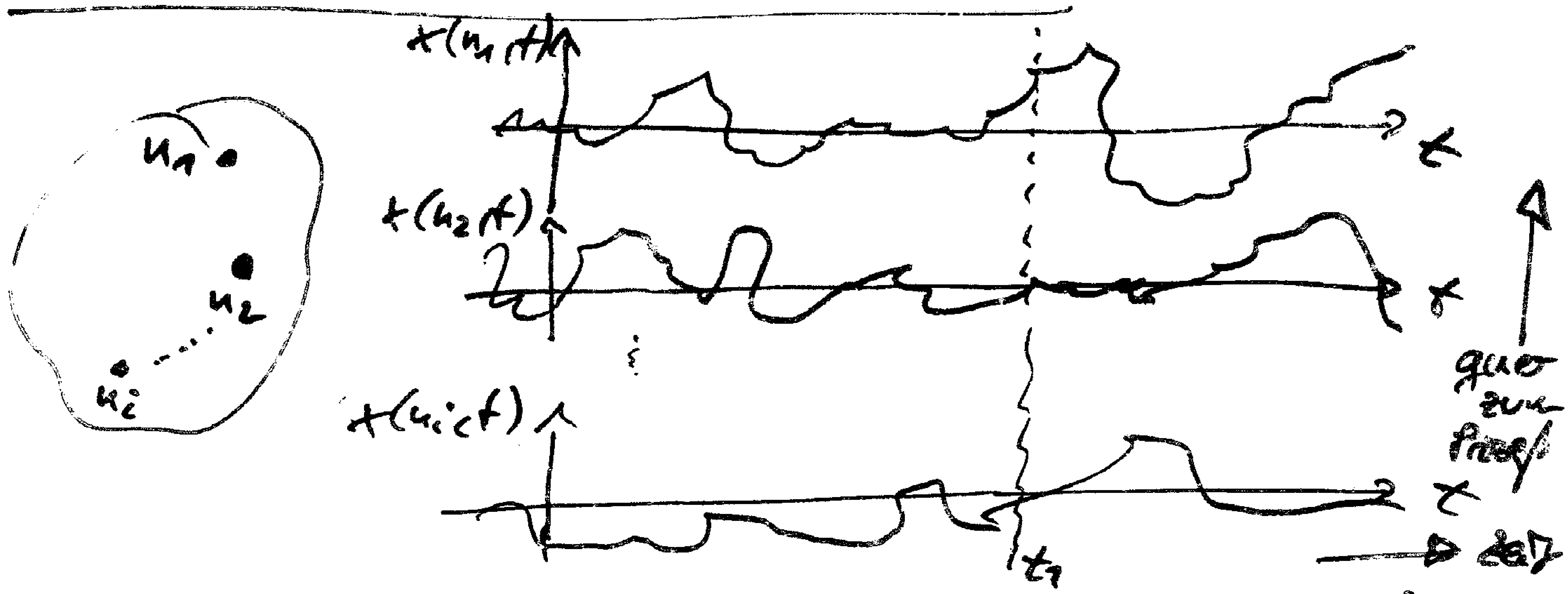
2.3. Stochastische Signale

2.3.1. Stochastischer Prozess



$x(u_i,t)$: Musterfunktion eines stochastischen Prozesses

z.B.: - Schalldruck eines Diskussionsrunde
- Rauschspannung an mehreren Widerständen

Interpretation:

1. Musterfunktionen von t (längs zum Prozeß)
2. Familie von Funktionen mit Variablen u_i und t (quer zum Prozeß)
3. Zufallsvariable für festen Zeitpunkt t_1

Mathematische Beschreibung:

Verteilungsdichtefunktion:

$$f_x(x_0, t) = \frac{dF_x(x_0, t)}{dx_0}$$

Verteilungsfunktion:

$$F_x(x_0, t) = P\left[x(u, t) \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schwelle}}}{x_0}\right]$$

Mathematische Beschreibung:

(zeitabhängig !)

Erwartungswerte (= Scharmittelwerte quer zum Prozeß)

- Mittelwert $m_x(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x(u_i,t)$

  N = Schargröße

  $$= E\{x(u_i,t)\}$$

  $$= \int_{-\infty}^{\infty} x_0 \cdot f_x(x_0,t)\, dx_0$$

- Momentanleistung $E\{x^2(u_i,t)\}$

  $$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^2(u_i,t)$$

  $$= \int_{-\infty}^{\infty} x_0^2 \cdot f(x_0,t)\, dx_0$$

- Varianz $\sigma^2(t) = E\{x^2(u_i,t)\} - m_x^2(t)$

Autokorrelationsfunktion (AKF)

$$\varphi_{xx}(t_1,t_2) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x(n_i,t_1)\cdot x(n_i,t_2)$$

$$= E\left\{x(n_i,t_1)\cdot x(n_i,t_2)\right\}$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx}(t,t) = \underbrace{E\left\{x^2(n_i,t)\right\}}_{\text{Momentanleistung}}$$

Problem: Für Beschreibung (Beobachtung) durch Signal-Messungen:

1) unendlicher Zeitaufwand
2) nur wenige Musterfunktionen sind verfügbar (→ Scharmittelung ist problematisch!)

Abhilfe:

2.3.2. Stationarität

Zufallsprozeß ist unabhängig von t

- viele praktische Prozesse sind zumindest schwach stationär:
  → Mittelwert und AKF sind unabhängig von t

Ergodizität

Schar- und Zeitmittelwert stimmen überein

⇒ ergodische Prozesse sind auch stationär!
(aber gilt nicht umgekehrt!)

2.3.3. Leistungsdichtespektrum

$$\mathcal{F}\{AKF\}\Big|_{\text{(schwach) stationärer Prozess}} = LDS$$

Leistungsdichtespektrum

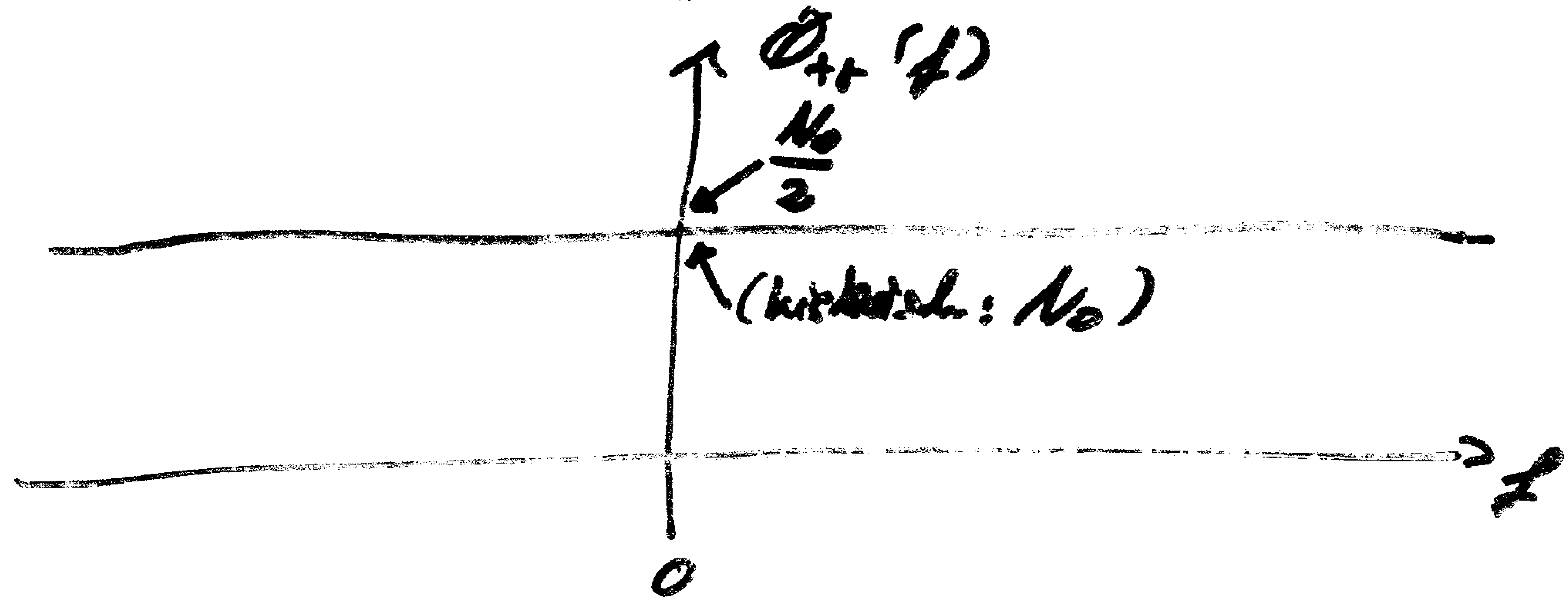
$$\underbrace{\varphi_{xx}(\tau) = E\{x(t+\tau)\cdot x(t)\}}_{AKF} \circ\!\!-\!\!\bullet \underbrace{\Phi_{xx}(f)}_{LDS}$$

$$\boxed{\text{Wiener-Khintchine-Theorem:} \quad \Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau}$$

Eigenschaften:

- „Verteilung" der Leistung eines stochastischen Prozesses (Signals) im Frequenzbereich
- $\Phi_{xx}(f) \geq 0 \quad \forall f$
- Leistung: $\sigma_x^2 + m_x^2 = \varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f)\, df$

2.3.4 Weißes Rauschen



Konstante LDS!

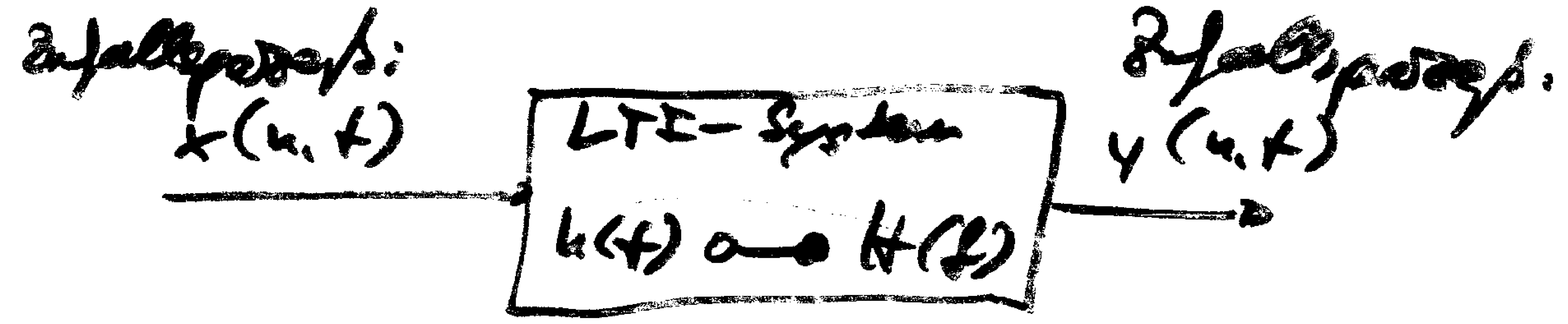
N_0: Rausch(a)rtungsdichte

($\frac{N_0}{2}$ = zweiseitige Rauschleistungsdichte
tatsächlich N_0 = einseitige Rauschleistungsdichte)

AKF: $\varphi_{xx}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$

weiß: unkorreliertes Rauschen,
d.h. Werte im Abstand $\tau \neq 0$ hängen
<u>nicht</u> voneinander ab!

2.3.5 Übertragung durch LTI-Systeme



Annahme: (schwach) stationäre Zufallsprozesse!

$$y(n,t) = x(n,t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(n,t) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

! Erwartungswertbetrachtung

$$m_y = E\{y(n,t)\} = m_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt$$

(Mittelwert)

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau)$$

(AKF)

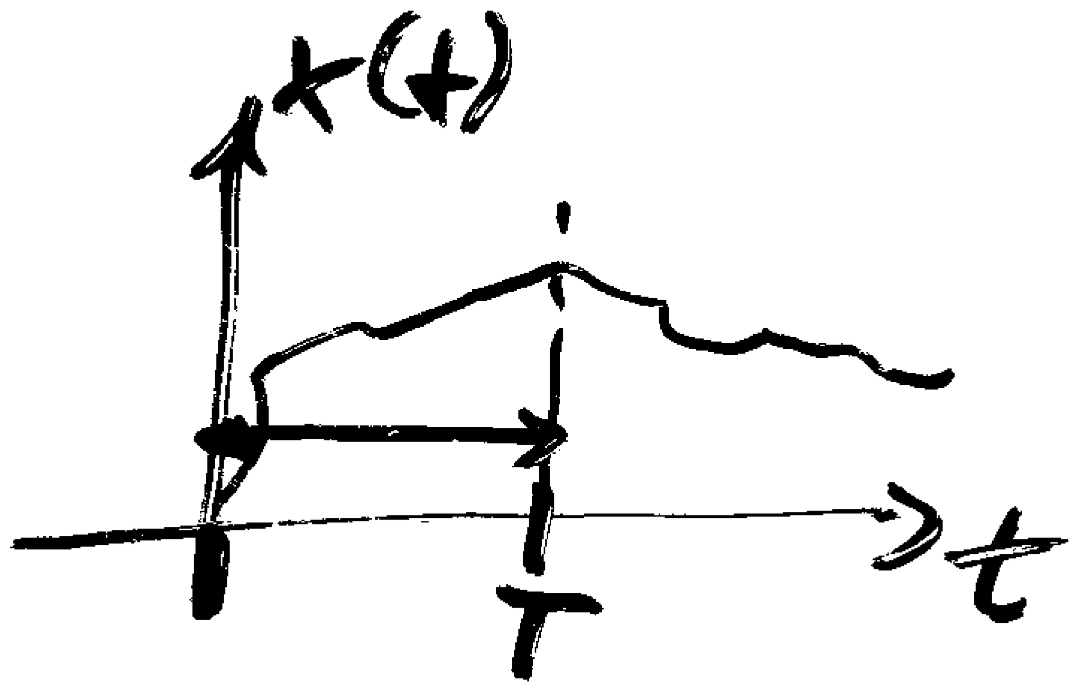
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\Phi_{yy}(f) = \Phi_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2$$

(LDS)

Übungsaufgabe

- Stationärer weißer Prozess mit $N_0/2$



$$\boxed{y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t-\vartheta)\,d\vartheta} \quad \text{gleitendes Mittelungsfilter}$$

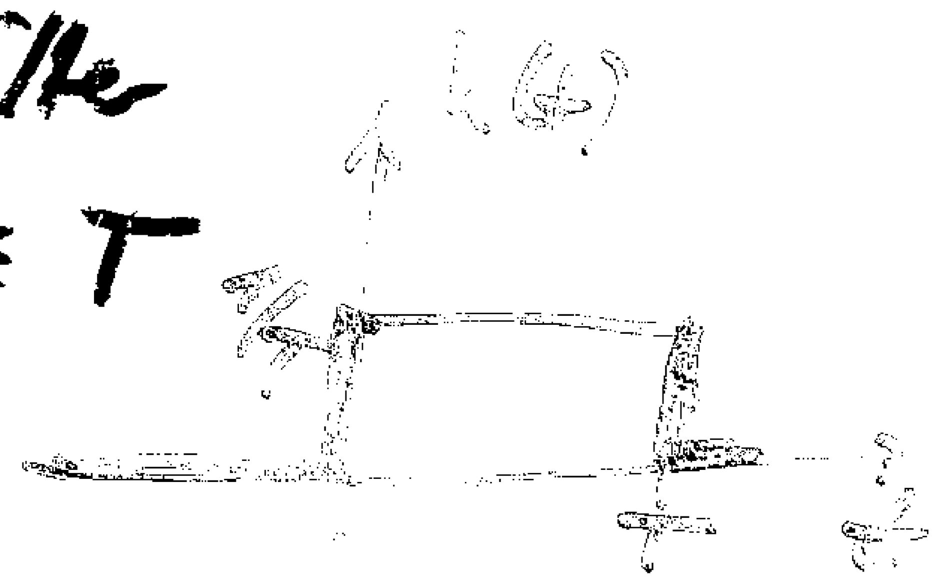
?

a) Impulsantwort und Frequenzgang des Mittelungsfilters?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\vartheta)\cdot h(\vartheta)\,d\vartheta \qquad \text{Faltung}$$

Vergleich mit gleitendem Mittelungsfilter

$$\rightarrow \quad h(t) = \begin{cases} h(t) = 1/T & \text{f. } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad \text{Fourier-Trans.}$$

$$= \int_0^T \frac{1}{T} e^{-j2\pi f t}\, dt = -\frac{1}{j2\pi f T} e^{-j2\pi f t}\Big|_0^T$$

$$= -\frac{1}{j2\pi f T}\left(e^{-j2\pi f T} - 1\right)$$

$$= \frac{e^{-j\pi f T}}{j2\pi f T}\left(e^{+j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right)$$

$$= e^{-j\pi f T} \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = si(\pi f T)\cdot e^{-j\pi f T}$$

b) AKF des Eingangsprozesses ?

$$LDS = N_0/2 \Rightarrow \varphi_{xx}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$$

c) Leistung des Eingangsprozesses innerhalb der Bandbreite $B = 2/T$?

$$\Phi_{xx}(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \text{Leistung} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f)\,df$$

$$= \int_{0}^{2/T} \frac{N_0}{2}\,df$$

$$= \frac{N_0}{2} f \Big|_0^{2/T} = \frac{N_0}{T}$$

d) AKF, LDS des Ausgangsprozesses ?

LDS: $\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot \Phi_{xx}(f)$

$$= \left| si(\pi f T) e^{-j\pi f T} \right|^2 \cdot \frac{N_0}{2}$$

$$= \left| \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right|^2 \cdot \frac{N_0}{2}$$

AKF: $\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{++}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau)$

$$\varphi_{hh}(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau)$$

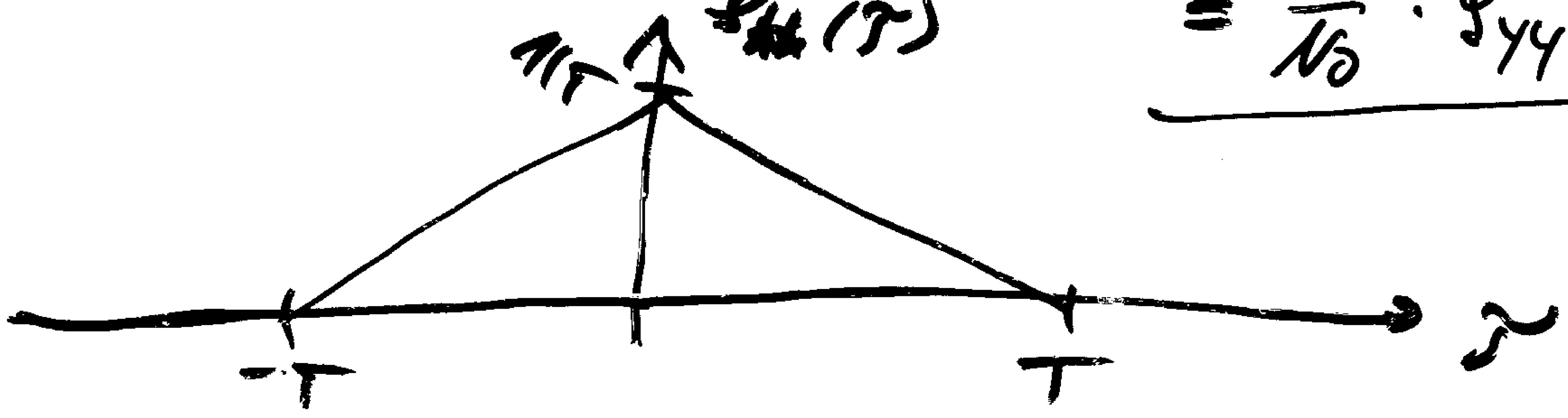
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau+t) \cdot h^*(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T h(t+\tau)\,dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} \frac{1}{T}\,dt = \frac{T-\tau}{T^2} & \text{f. } 0 \le \tau \le T \\ \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T} \frac{1}{T}\,dt = \frac{T+\tau}{T^2} & -T \le \tau \le 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{T-|\tau|}{T^2} & \text{für } |\tau| \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{\equiv \frac{2}{N_0} \cdot \varphi_{yy}(\tau)}$$



- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\Rightarrow \varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau) \cdot \varphi_{hh}(t-\tau)\,dt$$

Ausblend-eigenschaft v. $\delta(\tau)$

$$= \frac{N_0}{2}\varphi_{hh}(t) = \begin{cases} \frac{N_0}{2T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right) & \text{f. } |t| \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

e) Gesamtleistung des Ausgangsprozesses?

Leistung = $\varphi_{yy}(0) = \frac{N_0}{2T}$

Nebenrechnung zu AKF $\varphi_{yy}(\tau)$:

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau)$$
$$= \frac{N_0}{2} \cdot \underbrace{\delta(\tau) * \varphi_{hh}(\tau)}_{=\varphi_{hh}(\tau)}$$
$$= \frac{N_0}{2} \cdot \varphi_{hh}(\tau)$$

$$\Rightarrow \varphi_{hh}(\tau) = \frac{2}{N_0} \cdot \varphi_{yy}(\tau)$$