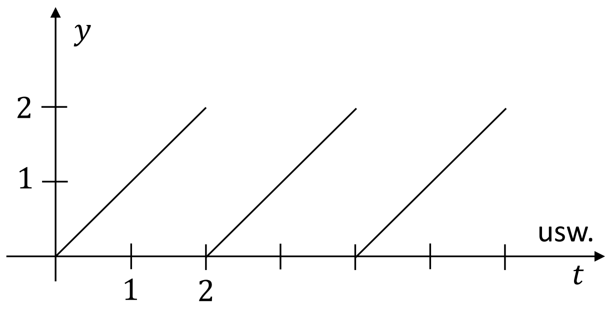
Aufgabe

Berechnen Sie die Fourierreihe der folgenden Sägezahnfunktion:



Lösung

Periodendauer: $T = 2 \;\Rightarrow\; \omega_0 = \frac{2\,\pi}{T} = \pi$

Innerhalb der Periode gilt: $y(t) = t, \quad 0 \le t \le 2$

Berechnung von a_0

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \int_0^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2 = 2$$

Symmetrie: $y(t)$ ist ungerade Funktion ⇒ $a_n = 0$

Berechnung von b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cdot\sin(n\,\omega_0\,t)\,dt = \int_0^2 t\cdot\sin(n\,\pi\,t)\,dt$$

Papula Nr. 208 $\int x\cdot\sin(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cdot\cos(ax)}{a}$

$$b_n = \left[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\,\pi\,t) - \frac{1}{n\,\pi}\,t\cos(n\,\pi\,t)\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{n^2\pi^2}\underbrace{\sin(2\,n\,\pi)}_{0} - \frac{1}{n\,\pi}2\underbrace{\cos(2\,n\,\pi)}_{1}\right) - \left(\frac{1}{n^2\pi^2}\underbrace{\sin(0)}_{0} - \frac{1}{n\,\pi}\underbrace{0\cos(0)}_{0}\right) = -\frac{2}{n\,\pi}$$

Fourierreihe

$$y(t) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi\,t) + \frac{1}{2}\sin(2\,\pi\,t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\pi\,t) + \frac{1}{4}\sin(4\,\pi\,t) + \cdots\right)$$