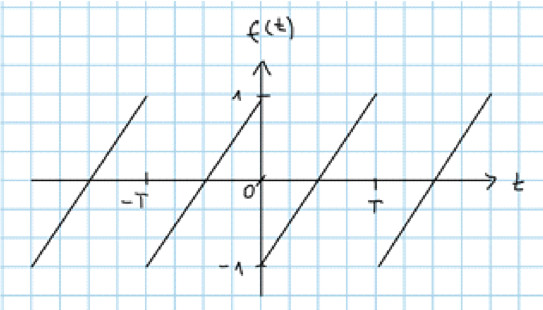
Teil II – Analysis (zusammen 30 Punkte)

Nr. 1 Berechnen Sie die relle Fourierreihe folgender Funktion f mit der Periodendauer T:



(8 Punkte)

$f(t) = -1 + \frac{2}{T} \cdot t$ (für $t \in [0;T]$)

FR: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)$ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Mittelwert ist 0, d.h. $a_0 = 0$ 1

f(t) ist insgesamt eine ungerade Fkt, d.h. $a_n = 0$ 1

$\rightarrow b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t)\, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left(-1 + \frac{2}{T} \cdot t\right) \cdot \sin(n\omega t)\, dt$ 1 1

$b_n = \frac{2}{T} \left(\int_0^T -\sin(n\omega t)\, dt + \frac{2}{T} \int_0^T t \cdot \sin(n\omega t)\, dt \right)$

Aus Formelsammlung:

$\int x \cdot \sin(cx)\, dx = \frac{\sin(cx)}{c^2} - \frac{x \cdot \cos(cx)}{c}$

$b_n = \frac{2}{T} \cdot \left[\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^T + \frac{4}{T^2} \cdot \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n^2\omega^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^T$ 1 1

$b_n = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{1}{n\omega} \cdot \underbrace{(\cos(n \cdot 2\pi) - \cos 0)}_{=0} \right) + \frac{4}{T^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2\omega^2} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot 2\pi)}_{=0} - \frac{T}{n\omega} \cdot \cos(n \cdot 2\pi) - \frac{1}{n^2\omega^2} \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\frac{0 \cdot \cos 0}{n\omega}}_{=0} \right)$

1

$b_n = \frac{4}{T^2} \cdot \left(-\frac{T^2}{n \cdot 2\pi} \right) = -\frac{2}{n\pi}$

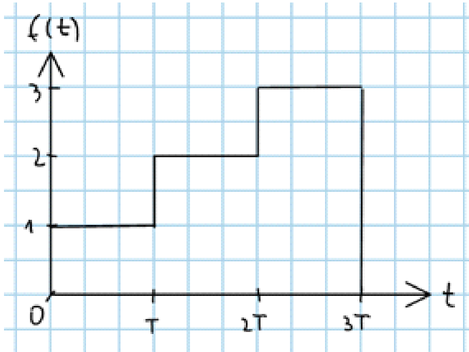
1

$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n\pi} \right) \cdot \sin(n\omega t) = -\frac{2}{\pi} \cdot \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \ldots \right)$

8

Nr. 2 Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Funktion f:

(8 Punkte)



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < T \\ 2 & \text{für } T \le t < 2T \\ 3 & \text{für } 2T \le t < 3T \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt = \int_0^T e^{-j\omega t} \, dt + 2 \cdot \int_T^{2T} e^{-j\omega t} \, dt + 3 \cdot \int_{2T}^{3T} e^{-j\omega t} \, dt$$

1 1

$$F(\omega) = \left[\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \right]_0^T + 2 \left[\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \right]_T^{2T} + 3 \left[\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \right]_{2T}^{3T}$$

1 1

$$F(\omega) = \frac{1}{-j\omega} \cdot \left(e^{-j\omega T} - 1 \right) + \frac{2}{-j\omega} \cdot \left(e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega T} \right) + \frac{3}{-j\omega} \cdot \left(e^{-j\omega 3T} - e^{-j\omega 2T} \right)$$

1 1

$$F(\omega) = e^{-j\omega T} \left(\frac{j}{\omega} - \frac{2j}{\omega} \right) + e^{-j\omega 2T} \left(\frac{2j}{\omega} - \frac{3j}{\omega} \right) + \frac{3j}{\omega} e^{-j\omega 3T} - \frac{j}{\omega}$$

1

$$F(\omega) = \frac{j}{\omega} \left[-1 - e^{-j\omega T} - e^{-2j\omega T} + 3 e^{-3j\omega T} \right] = -\frac{j}{\omega} \left[1 + e^{-j\omega T} + e^{-2j\omega T} - 3 e^{-3j\omega T} \right]$$

1

8

Nr. 3 Lösen Sie die folgende Differenzialgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y'' + 4 \cdot y' + 3 \cdot y = 4 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \ \text{ und } y'(0) = 0$$

Transformieren Sie die DGL hierzu, lösen Sie die entstandene quadratische Gleichung und bilden Sie die Rücktransformation mit der Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation.

(8 Punkte)

$$\underbrace{y'' + 4y' + 3y = 4}_{\circ\!-\!\bullet} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y'(0) = 0$$

$$p^2 Y(p) - p\,y(0) + y'(0) + 4 \cdot (p\,Y(p) - y(0)) + 3\,Y(p) = \frac{4}{p} \qquad 1$$

$$p^2 Y(p) - p + 4(p\,Y(p) - 1) + 3\,Y(p) = \frac{4}{p}$$

$$p^2 Y(p) - p + 4p\,Y(p) - 4 + 3\,Y(p) = \frac{4}{p} \qquad | + p + 4$$

$$Y(p)\,(p^2 + 4p + 3) = \frac{4}{p} + p + 4 \qquad 1 \qquad | : (p^2 + 4p + 3)$$

$$Y(p) = \frac{4 + p^2 + 4p}{p \cdot (p^2 + 4p + 3)} \ 1 = \frac{p^2 + 4p + 4}{p\,(p+1)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+3} \qquad 1$$

$$p^2 + 4p + 4 = A(p+1)(p+3) + B\,p\,(p+3) + C\,p\,(p+1)$$

$p = 0$: $\quad 4 = 3A \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{4}{3}$

$p = -1$: $\quad 1 = -2B \quad \Leftrightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$ $\quad 1$

$p = -3$: $\quad 1 = 6C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{6}$ $\quad 1$

$$Y(p) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p+3} \qquad 1$$

Tabelle: $e^{at} \circ\!-\!\bullet \frac{1}{p-a}$

$$y(t) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{6} \cdot e^{-3t} \qquad 1$$

8

Nr.4 Ermitteln Sie die Glieder der zur gegebenen z-Transformierten $F_z(z) = \frac{15\cdot z^{-3}}{3-7\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2}}$ gehörenden Zahlenfolge f_n.

(6 Punkte)

$$F_z(z) = \frac{15\cdot z^{-3}}{3-7\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2}} \quad \begin{vmatrix}\cdot z^3 \\ \cdot z^3\end{vmatrix} = \frac{15}{z(3z^2-7z+2)} \; 1 = \frac{15}{3z\left(z^2-\frac{7}{3}z+\frac{2}{3}\right)}$$

$$F_z(z) = \frac{5}{z\cdot(z-2)(z-\frac{1}{3})} \; 1$$

$$z^2 - \frac{7}{3}z + \frac{2}{3} = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{+\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}-4\cdot\frac{2}{3}}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{+\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}}}{2} = \frac{+\frac{7}{3}\pm\frac{5}{3}}{2} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{3}\end{cases}$$

$$F_z(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow 5 = A(z-2)(z-\tfrac{1}{3}) + Bz(z-\tfrac{1}{3}) + Cz(z-2) \quad 1$$

$z=0$: $\quad 5 = A\cdot\frac{2}{3} \iff A = \frac{15}{2}$

$z=2$: $\quad 5 = B\cdot 2\cdot\frac{5}{3} \iff B = \frac{3}{2}$

$z=\frac{1}{3}$: $\quad 5 = C\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\frac{5}{3}) \iff C = -9 \quad 1$

$$\rightarrow F_z(z) = \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{z} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-2} - 9\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{3}}$$

$$f_n = \frac{15}{2}\cdot\delta_{n,1} + \frac{3}{2}\sigma(n-1)\cdot 2^{n-1} - 9\cdot\sigma(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

1

$$f_n = \frac{15}{2}\cdot\delta_{n,1} + \frac{3}{4}\cdot\sigma(n-1)\cdot 2^n - 27\cdot\sigma(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6

$$f_n = \begin{cases} \frac{15}{2}+\frac{3}{2}-9=0 & \text{für } n=1 \\ \frac{3}{4}\cdot 2^n - 27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{für } n\geq 2\end{cases} \quad 1$$