# Mathe 3 – Analysis – SS 2012

Notiztitel 19.03.2012

**Inhalt:**
- Fourierreihe
- Fouriertransformation
- Laplacetransformation (Wh.)
- z-Transformation (so weit die Zeit reicht)

**Bücher:**
- Papula Band 2
- O. Föllinger: Laplace, Fourier und z-Transf.
- T. Butz: Fouriertransf. für Fußgänger

**Klausur:** 90 min. zusammen mit Numerik

Hilfsmittel: normaler TR (ohne CAS)
+ Bücher (??)
+ handgeschr. Formelsammlung (??)

## Fourierreihen

**Ziel:** Eine periodische, aber nicht sinusförmige Funktion $y(t)$ als Summe von sinusförmigen Fkt. darzustellen.

**Bsp.:**


$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t) \right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ nennt man <u>Fourier Koeffizienten</u>.

Herleitung der Koeffizienten (zur Vereinfachung sei $T = 2\pi$, d.h. $\omega = 1$)

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt) \right) \quad (*)$$

Hilfsmittel 1) $$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin(nt)\, dt = 0$$

2) $$\int_0^{2\pi} \cos(nt) \cdot \cos(mt)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \sin(mt)\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

<u>Herleitung von $a_0$:</u>

$$\int_0^{2\pi} y(t)\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt) \right) \right) dt$$

$$\overset{(*)}{=} a_0 \cdot \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nt)\, dt}_{=0} + b_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(nt)\, dt}_{=0} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} y(t)\, dt = a_0 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t)\, dt}$$

<u>Herleitung von $a_n$:</u>

$(*)$ mit $\cos(mt)$ multiplizieren, dann integrieren

$$\int_0^{2\pi} y(t) \cdot \cos(mt)\, dt = \frac{a_0}{2} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(mt)\, dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cdot \cos(mt)\, dt + b_n \cdot \overbrace{\int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \cos(mt)\, dt}^{=0} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} y(t)\cdot\cos(mt)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nt)\cdot\cos(mt)\,dt}_{=\begin{cases}0 & \text{für } n\neq m\\ \pi & \text{für } n=m\end{cases}}\Bigr)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} y(t)\cdot\cos(mt)\,dt = a_m\cdot\pi$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cdot\cos(mt)\,dt$$

Genau so ergibt sich: $b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cdot\sin(mt)\,dt$

Wann ist die Fourierentwicklung überhaupt möglich?

$\Rightarrow$ Wenn die Dirichlet-Bedingungen gelten:

1) $y(t)$ ist in $[0;T]$ in endlich viele stetige und monotone Teile zerlegbar.

2) An den Unstetigkeitsstellen muss jeweils der rechts- und linksseitige Grenzwert existieren

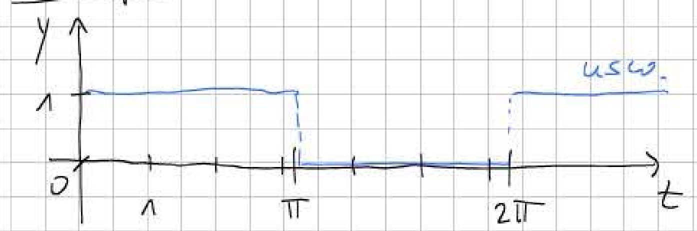
Allgemein gilt (für $\omega \neq 1$):

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n\cdot\cos(n\omega t) + b_n\cdot\sin(n\omega t)\bigr)$$

mit $a_0 = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T y(t)\,dt$ ; $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cdot\sin(n\omega t)\,dt$

1. Bsp.:




$T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 1$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

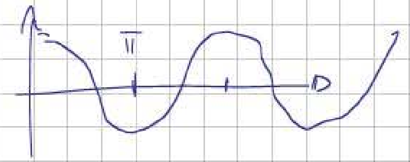
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\,dt = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \cdot \sin(nt) \right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot \sin(n\pi) - \frac{1}{n} \cdot \sin(0) \right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cdot \cos(nt) \right]_0^{\pi}$$

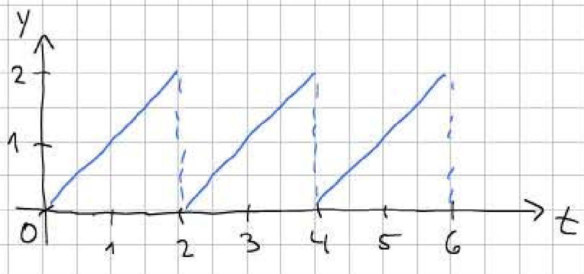
$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{1}{n} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{= \begin{cases} -1 & \text{ungeraden} \\ 1 & \text{geraden} \end{cases}} + \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} \right)$$




$$\Rightarrow b_n = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } n \\ \frac{2}{n \cdot \pi} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

d.h.: $y(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5t) + \ldots \right)$

2. Bsp.:




$T = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pi$

$y(t) = t \quad \text{für } 0 \le t < 2$

Aus Formelsammlung:

$$\int x \cdot \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a} \cdot x \cdot \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \cdot \sin(ax)$$

$$\int x \cdot \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a} \cdot x \cdot \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cdot \cos(ax)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(t) = \int_0^2 y(t)\,dt = \int_0^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2 = 2$$

Aus Symmetrie folgt $a_n = 0$

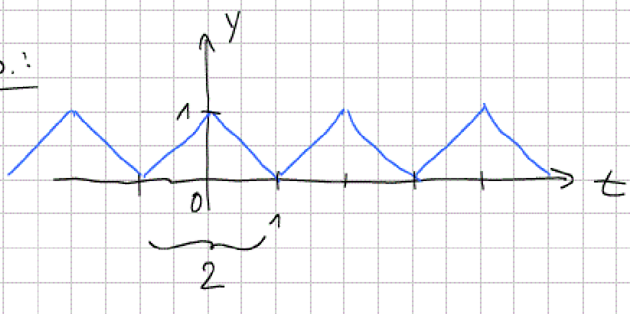
$$b_n = \int_0^2 t \cdot \sin(n\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{n\pi} \cdot t \cdot \cos(n\pi t) + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi t)\right]_0^2$$

$$b_n = \left(-\frac{2}{n\pi}\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} + \frac{1}{n^2\pi}\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0}\right) - \left(\frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0}\right)$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) \approx 1 - \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\pi t) + \frac{1}{3}\sin(3\pi t) + \ldots\right)$$

3. Bsp.:




$T = 2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$y(t) = \begin{cases} t+1 & \text{für } -1 \le t < 0 \\ 1-t & \text{für } 0 \le t < 1 \end{cases}$$

$y(t)$ gerade $\Rightarrow$ $b_n = 0$ ; $a_0 = 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t) \cdot \cos(n\omega t)\,dt = \int_{-1}^{1} y(t) \cdot \cos(n\pi t)\,dt$$

$$a_n = \int_{-1}^{0} (t+1) \cdot \cos(n\pi t)\,dt + \int_0^1 (1-t) \cdot \cos(n\pi t)\,dt$$

$$a_n = \left[ \frac{1}{n\pi} \cdot t \cdot \sin(n\pi t) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \cos(n\pi t) + \frac{1}{n\pi} \cdot \sin(n\pi t) \right]_{-1}^{0}$$

$$+ \left[ \frac{1}{n\pi} \cdot \sin(n\pi t) - \frac{1}{n\pi} \cdot t \cdot \sin(n\pi t) - \frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \cos(n\pi t) \right]_{0}^{1}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{n^2\pi^2}\right) - \left(\frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \cos(-n\pi)\right) + \left(-\frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi)\right) - \left(-\frac{1}{n^2\pi^2}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \left(2 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(2 - 2 \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n^2\pi^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$y(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \left( \cos(\pi t) + \frac{1}{9} \cos(3\pi t) + \frac{1}{25} \cos(5\pi t) + \dots \right)$$

## Vereinfachungen für das Rechnen mit FR

(*)

1) $a_n = 0 \iff y(t)$ ist ungerade Fkt (punktsym. zum Urspr.)

2) $b_n = 0 \iff y(t)$ ist gerade Fkt. (achsensym. zur y-Achse)

3) $a_0 = 0 \iff y(t)$ hat den „Mittelwert" Null

(*) nach dem Abziehen des „DC-Offset"

## Komplexe Fourierreihen

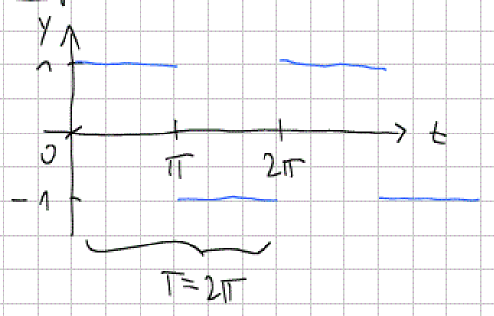
$e^{jt} = \cos t + j \cdot \sin t \quad ; \quad T = 2\pi$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jnt} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot e^{-jnt} \, dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - j b_n)$$

$$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n) \quad ; \quad b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}(c_n)$$

Bsp.:




$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot e^{-jnt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} e^{-jnt}\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-jnt}\, dt \right)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{1}{-jn} \cdot e^{-jnt} \right]_0^{\pi} - \left[ -\frac{1}{jn} \cdot e^{-jnt} \right]_{\pi}^{2\pi} \right)$$

$$c_n = \frac{j}{2\pi n} \cdot \left( \left[ e^{-jnt} \right]_0^{\pi} - \left[ e^{-jnt} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{j}{2\pi n} \cdot \left( e^{-jn\pi} - 1 - e^{-jn2\pi} + e^{-jn\pi} \right)$$

$$c_n = \frac{-j}{2\pi n} \cdot \left( e^{-jn2\pi} - 2 \cdot e^{-jn\pi} + 1 \right) = \frac{-j}{2\pi n} \cdot \left( e^{-jn\pi} - 1 \right)^2$$

$$c_n = \frac{-j}{2\pi n} \cdot \left( \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \cancel{j \cdot \sin(n\pi)} - 1 \right)^2$$

$$c_n = \frac{-j}{2\pi n} \cdot \left( (-1)^n - 1 \right)^2 = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{2j}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{2j}{n\pi} \right) \cdot e^{jnt} \quad (\text{für } n \text{ ungerade})$$

$$e^{jt} - e^{-jt} = 2j \sin t$$

$$\Rightarrow \quad y(t) \approx \left(-\frac{2j}{\pi}\right)\cdot\left(\ldots - \frac{1}{3}\cdot e^{-3jt} - e^{-jt} + e^{jt} + \frac{1}{3} e^{3jt} + \ldots\right)$$

$$y(t) \approx \left(-\frac{2j}{\pi}\right)\cdot\left(\ldots \frac{1}{3}\cdot \underbrace{\left(e^{3jt} - e^{-3jt}\right)}_{2j\sin(3t)} + \underbrace{\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)}_{2j\sin t} + \ldots\right)$$

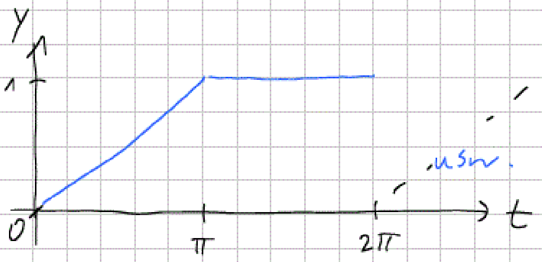
$$y(t) \approx \frac{4}{\pi}\cdot\left(\ldots \frac{1}{3}\sin(3t) + \sin(t) + \ldots\right)$$

Zum Vergleich: Umrechnungsformeln verwenden:

$$a_n = 2\cdot \mathrm{Re}(c_n) = 0$$

$$b_n = -2\cdot \mathrm{Im}(c_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

2. Bsp.:




$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cdot t & \text{für } 0 \le t < \pi \\ 1 & \text{für } \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\left(\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}\right) + j\cdot\frac{1}{2\pi n} \qquad (n \neq 0)$$

## Sätze über Fourierreihen

Schreibweise: $f(t) \longleftrightarrow \{c_n \,;\, \omega_n\}$ $\qquad \omega_n = n\cdot\omega = n\cdot\frac{2\pi}{T}$

FR wird beschrieben durch die Koeffizienten $c_n$ und die jeweils zugehörige Kreisfrequenz

Linearität:

$$\left.\begin{array}{l} f(t) \longleftrightarrow \{c_n \,;\, \omega_n\} \\ g(t) \longleftrightarrow \{c_n' \,;\, \omega_n'\} \end{array}\right\}$$ beide haben die gleiche Periode $T$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = a\cdot f(t) + b\cdot g(t)} \qquad \boxed{h(t) \longleftrightarrow \{a\cdot c_n + b\cdot c_n' \,;\, \omega_n\}}$$

**1. Verschiebungssatz:** (Verschiebung im Zeitbereich)

$$f(t) \leftrightarrow \{c_n ; \omega_n\}$$
$$f(t-a) \leftrightarrow \{c_n \cdot e^{-j\omega_n \cdot a} ; \omega_n\}$$

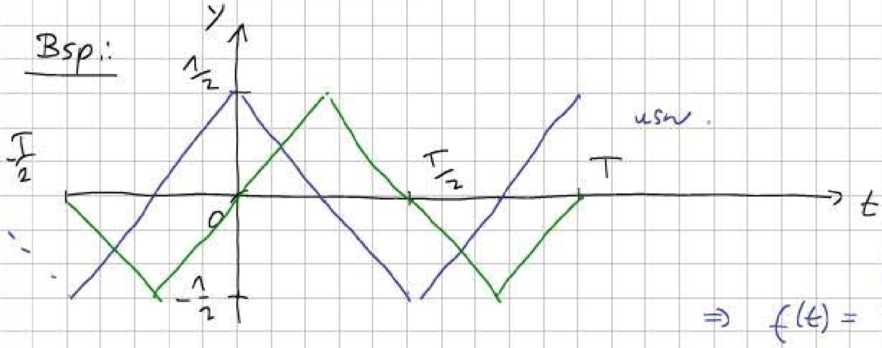
**Beweis:**

$$c_n^{neu} = \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t-a) \cdot e^{-j\omega_n t} \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+a}^{\frac{T}{2}+a} f(t') \cdot e^{-j\omega_n \cdot (t'+a)} \, dt'$$

$$\begin{pmatrix} \text{Sub.: } t' = t-a \\ dt' = dt \end{pmatrix} \qquad (\text{NR: } e^x \cdot e^y = e^{x+y})$$

$$c_n^{neu} = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+a}^{\frac{T}{2}+a} f(t') \cdot e^{-j\omega_n t'} \, dt}_{= c_n} \; e^{-j\omega_n a}$$

**Bsp.:**




$$\Rightarrow f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{T} \cdot t & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{T} \cdot t & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ reelle FR liefert $a_0 = 0$; $b_n = 0$ und $a_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 n^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & '' \; n \text{ gerade} \end{cases}$

Jetzt soll $f(t)$ um $\frac{T}{4}$ nach rechts geschoben werden.

1. Schritt: $c_n$ für $f(t)$ vor der Verschiebung ausrechnen

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j \cdot b_n) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2 n^2} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

2. Schritt $c_n^{neu}$ für verschobenes $y(t)$ ausrechnen $(a = \frac{T}{4})$

$$c_n^{neu} = c_n \cdot e^{-j\omega_n \cdot a} = c_n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot \frac{T}{4}} = c_n \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} n}$$

$$c_n^{neu} = c_n \cdot \left( \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}_{=0} - j \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}_{=(-1)^{\frac{n+3}{2}}} \right)$$

für $n$ ungerade, sonst $=0$

(oder $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$)

$$c_n^{neu} = \frac{2}{\pi^2 \cdot n^2} \cdot \left( -j \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \quad \text{für ungerade } n$$

3. Schritt: Zurückrechnen in $a_n^{neu}$ und $b_n^{neu}$:

$$a_n^{neu} = 2 \cdot \operatorname{Re}\left( c_n^{neu} \right) = 0$$

$$b_n^{neu} = -2 \cdot \operatorname{Im}\left( c_n^{neu} \right) = \frac{4}{\pi^2 n^2} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{für } n \text{ ungerade}$$

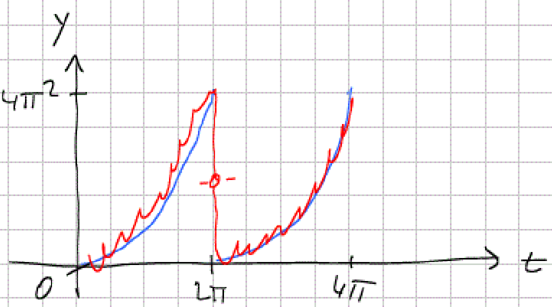
Der 2. Verschiebungssatz:

$$f(t) \longleftrightarrow \{ c_n ; \omega_n \}$$

$$f(t) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot t} \longleftrightarrow \{ c_{n-a} ; \omega_n \}$$

Bsp.:

1)




$$f(t) = t^2 \quad \text{für } t \in [0; 2\pi)$$

$$T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$$

Reelle Koeff. ausrechnen

Tipp:

$$\int x^2 \cdot \sin(ax)\, dx = \frac{2x}{a^2} \cdot \sin(ax) - \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \cos(ax)$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax)\, dx = \frac{2x}{a^2} \cdot \cos(ax) + \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \sin(ax)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2\, dt = \frac{1}{3\pi} \cdot (2\pi)^3 = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cdot \cos(nt)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left[ \frac{2t}{n^2} \cdot \cos(nt) + \left( \frac{t^2}{n} - \frac{2}{n^3} \right) \cdot \sin(nt) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{2 \cdot 2\pi}{n^2} \right) = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot \sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\cdot \sin(nt)\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{2t}{n^2}\cdot\sin(nt) - \left(\frac{t^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\cdot\cos(nt)\right]_0^{2\pi} = \left[\left(-\left(\frac{(2\pi)^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\right) - \left(-\left(-\frac{2}{n^3}\right)\right)\right]\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$b_n = -\frac{4\pi}{n}$$

d.h. $$f(t) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\cos(nt) - \frac{4\pi}{n}\cdot\sin(nt)\right)$$

$\Rightarrow$ Stetigkeit der FR ausnutzen um z. B. einen Grenzwert auszurechnen

Wir wissen, dass $\frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\cos(nt) - \frac{4\pi}{n}\cdot\sin(nt)\right)$

für $t = k\cdot 2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ den Wert $2\pi^2$ annimmt

(„Mitte der Sprungstelle")

d.h. $$2\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \qquad \Big|\,:4$$

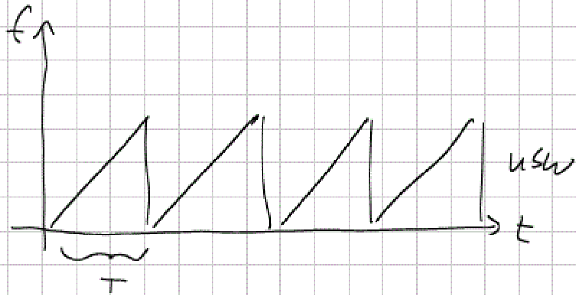
$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

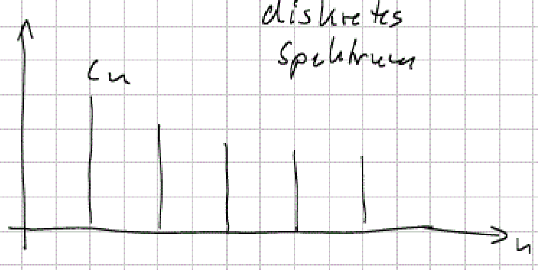
d.h. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

## Fouriertransformation

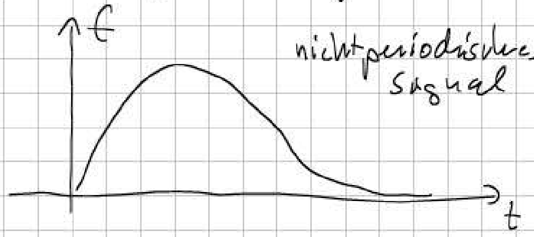
Bisher: Fourierreihe




$\Rightarrow$

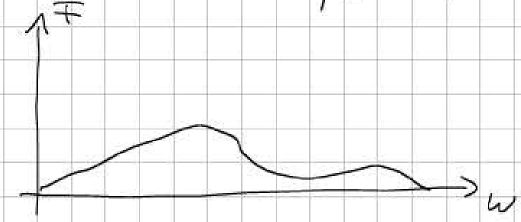


Jetzt: Fouriertransformation




$\Rightarrow$

kontinuierliches Spektrum




$$\omega_n = n\,\frac{2\pi}{T}$$

<u>Def.:</u> Eine Zeitfunktion $f(t)$ wird in eine <u>Frequenzfunktion $F(\omega)$</u> umgerechnet

auch <u>Spektraldichte</u> genannt

**Hintransformation:** $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

**Rücktransformation:** $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

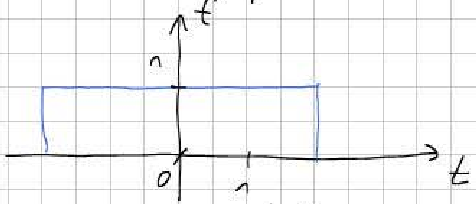
Schreibweise $\quad f(t) \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(\omega)$

Existenz der FT: FT von $f$ existiert dann, wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt$ existiert und endlich ist.

<u>Bsp.:</u>

1) Rechteckimpuls

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -2 \le t \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-2}^{2} e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega t}\right]_{-2}^{2}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-j\omega}\cdot\left(e^{-2j\omega} - e^{2j\omega}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\cdot\left(e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(2j\cdot\sin(2\omega)\right)$$

NR:
$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$
$$e^{-jx} = \cos x - j\sin x$$
$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x$$
$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin(2\omega)$$

wichtig: $\omega$ ist die neue Variable
Auf keinen Fall $\omega$ ersetzen durch $\omega = \frac{2\pi}{T}$ oder $n\frac{2\pi}{T}$

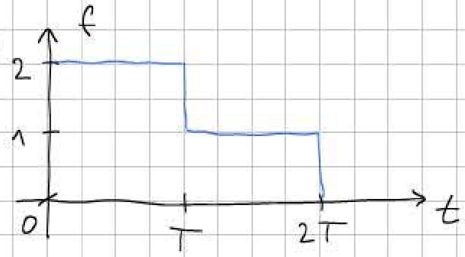
2)


$$f(t) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-at} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^\infty 2 \cdot e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = 2 \cdot \int_0^\infty e^{(-a-j\omega)\cdot t}\, dt$$

$$F(\omega) = 2 \cdot \left[\frac{1}{-a-j\omega} \cdot e^{(-a-j\omega)t}\right]_0^\infty = \frac{2}{a+j\omega} = 2 \cdot \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

3)




$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq t < T \\ 1 & \text{für } T \leq t < 2T \\ 0 & \text{für } 2T \leq t \\ & \text{oder für } t < 0 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = 2\int_0^T e^{-j\omega t}\, dt + \int_T^{2T} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = 2 \cdot \left[\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t}\right]_0^T + \left[\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t}\right]_T^{2T}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{-j\omega} \cdot \left(e^{-j\omega T} - 1\right) + \frac{1}{-j\omega} \cdot \left(e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega T}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-j\omega} \cdot \left(e^{-j\omega 2T} + e^{-j\omega T} - 2\right) = \frac{j}{\omega} \cdot \left(e^{-j\omega 2T} + e^{-j\omega T} - 2\right)$$

Für gerade oder ungerade $f(t)$ gilt:

$f(t)$ gerade: $F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t) \cos(\omega t)\, dt$

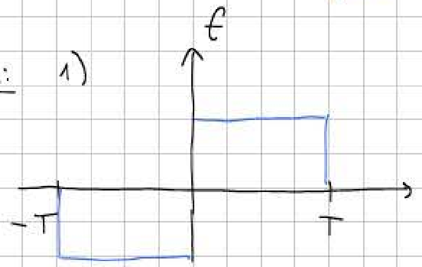
$f(t)$ ungerade: $$F(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t)\, dt$$

Beweis:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t))\, dt$$

$$F(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt}_{= 0 \text{ für } f(t) \text{ ungerade}} - j \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t)\, dt}_{= 0 \text{ für } f(t) \text{ gerade}}$$

Bsp.: 1)



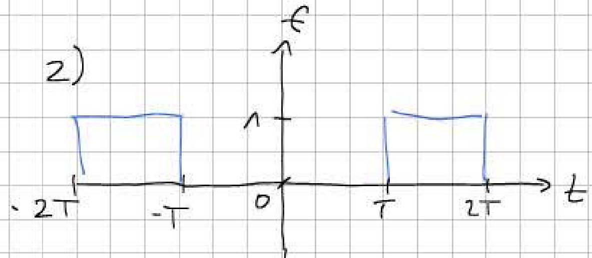

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t \le T \\ -1 & \text{für } -T \le t < 0 \end{cases}$$

$f(t)$ ist eine ungerade Fkt.

$$\Rightarrow \quad F(\omega) = -2j \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t)\, dt = -2j \cdot \int_0^{T} \sin(\omega t)\, dt$$

$$F(\omega) = -2j \cdot \left[ -\frac{1}{\omega} \cdot \cos(\omega t) \right]_0^T = \frac{2j}{\omega} \cdot \left( \cos(\omega T) - 1 \right)$$

2)




$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } T \le t \le 2T \\ & \text{oder für } -2T \le t \le -T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ist gerade

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t)\, dt = 2 \cdot \int_T^{2T} \cos(\omega t)\, dt = \frac{2}{\omega} \left[ \sin(\omega t) \right]_T^{2T}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \left( \sin(\omega 2T) - \sin(\omega T) \right)$$

zum Vergleich:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-2T}^{-T} e^{-j\omega t}\, dt + \int_T^{2T} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-2T}^{-T} + \frac{1}{-j\omega}\cdot\left[e^{-j\omega t}\right]_{T}^{2T}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-j\omega}\cdot\left(e^{j\omega T} - e^{j\omega 2T}\right) + \frac{1}{-j\omega}\cdot\left(e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega T}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-j\omega}\Big(\cancel{\cos(\omega T)} + j\sin(\omega T) - \cancel{\cos(\omega 2T)} - j\sin(\omega 2T)$$
$$+\cancel{\cos(\omega 2T)} - j\sin(\omega 2T) - \cancel{\cos(\omega T)} + j\sin(\omega T)\Big)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-j\omega}\left(2j\sin(\omega T) - 2j\sin(\omega 2T)\right)$$

$$\boxed{F(\omega) = \frac{2}{\omega}\cdot\left(\sin(\omega 2T) - \sin(\omega T)\right)}$$

**Rechenregeln zur FT:**

**Linearität:**

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$$
$$g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(\omega)$$

$$\Rightarrow a\cdot f(t) + b\cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet a\cdot F(\omega) + b\cdot G(\omega)$$

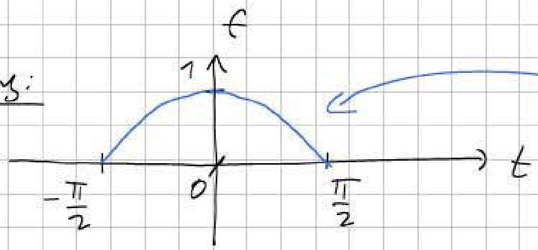
**Verschiebung im Zeitbereich:**

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$$
$$f(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$$

**Verschiebung im Frequenzbereich:**

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$$
$$f(t)\cdot e^{-j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega+\omega_0)$$

**Übung:**




$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Tipp:

1) $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

2) $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x$

$$F(\omega) = 2 \cdot \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t)\,dt = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos(\omega t)\,dt$$

$$F(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t + \omega t) + \cos(t - \omega t)\,dt$$

$$F(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((1+\omega)t) + \cos((1-\omega)t)\,dt$$

$$F(\omega) = \left[\frac{1}{1+\omega} \cdot \sin((1+\omega)t) + \frac{1}{1-\omega} \cdot \sin((1-\omega)t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1+\omega} \cdot \sin\left((1+\omega)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1-\omega} \cdot \sin\left((1-\omega)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1+\omega} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1-\omega} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\frac{\pi}{2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1+\omega} \cdot \left(\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot \cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\right)$$

$$+ \frac{1}{1-\omega} \cdot \left(\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot \cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\right)$$

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1-\omega}\right) \cdot \cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{1-\omega^2} \cdot \cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)$$

## Laplace-Transformation

Unterscheidung zur FT:

| Fourier | Laplace |
|---|---|
| Eingeschwungene Systeme | Einschaltvorgänge |
| $f(t)$ muss endliche Energie haben | Endliche Energie nicht notwendig |

Ziel: Lösen von DGL

1) DGL mit LT in eine algebraische Gleichung umwandeln (neue Variable)
2) Lösen dieser Gl. (im Bildraum)
3) Rücktransf. liefert Lösung der DGL

Def.: $$\boxed{F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt}$$ $t \geq 0$

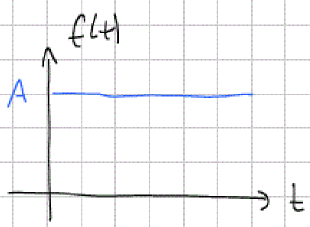
$f(t)$: Originalfkt (im Zeitbereich)

$F(p)$: Bildfkt. (im Bildraum)

wichtig: i.a. ist $p$ komplex

Schreibweise: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet^{LT}\; F(p)$

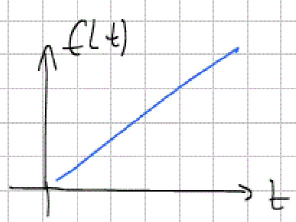
Bsp.:

1) 

$$\Rightarrow \quad f(t) = \begin{cases} A & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^\infty A \cdot e^{-pt}\, dt = \left[\frac{A}{-p} \cdot e^{-pt}\right]_0^\infty = \frac{A}{p}$$

$$\Rightarrow \quad A \circ\!\!-\!\!\bullet^{LT}\; \frac{A}{p}$$

2) 

$$f(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(Tipp: $\int x e^{ax}\, dx = \frac{1}{a^2} \cdot e^{ax} \cdot (ax - 1)$) (*)

$$F(p) = \int_0^\infty t \cdot e^{-pt}\, dt = \left[\frac{1}{p^2} \cdot e^{-pt} \cdot (-pt - 1)\right]_0^\infty = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot t \circ\!\!-\!\!\bullet^{LT}\; \frac{A}{p^2}$$

1) Linearität: $$\left.\begin{array}{l} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet^{LT}\; F(p) \\ g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet^{LT}\; G(p) \end{array}\right\} \quad a \cdot f(t) + b\, g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; a F(p) + b \cdot G(p)$$

Rücktransf. $\Rightarrow$ mit Tabellen

Bsp.:

1) $f(t) = 8t - \frac{7}{2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet^{LT}\; F(p) = \frac{8}{p^2} - \frac{7}{2p}$

2) $f(t) = -3t + 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet^{LT}\; F(p) = -\frac{3}{p^2} + \frac{1}{p}$

2) Ähnlichkeit (Dehnung) $f(t) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(p)$

$$f(a\cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Bsp.: 1) $f(t) = \sin t \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(p) = \frac{1}{p^2+1}$

$g(t) = \sin(at) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} G(p) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{p^2}{a^2}+1} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

3) Verschiebung im Zeitbereich: $f(t) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(p)$

a) $f(t-t_0) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} e^{-t_0\cdot p}\cdot F(p)$

b) $f(t+t_0) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} e^{t_0 p}\cdot\left(F(p) - \int_{u=0}^{t_0} f(u)\cdot e^{-pu}\,du\right)$

Bsp.: zu a) $\sin t \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{p^2+1}$

$\sin(t-2) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{e^{-2p}}{p^2+1}$

zu b) $t \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{p^2}$

$t+2 \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} e^{2p}\cdot\left(\frac{1}{p^2} - \int_{u=0}^{2} u\cdot e^{-pu}\,du\right)$

$$\Rightarrow = e^{2p}\cdot\left(\frac{1}{p^2} - \left[\frac{1}{p^2}\cdot e^{-pu}(-p\cdot u-1)\right]_{u=0}^{2}\right)$$

$$= e^{2p}\left(\frac{1}{p^2} - \left(\left(\frac{1}{p^2}\cdot e^{-2p}\cdot(-2p-1)\right) + \frac{1}{p^2}\right)\right)$$

$$= e^{2p}\cdot\left(\frac{1}{p^2}\cdot e^{-2p}(2p+1)\right) = \frac{1}{p^2}\cdot(2p+1) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}$$

4. Dämpfung: $f(t) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(p)$

$$e^{-at}\cdot f(t) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(p+a)$$

Bsp.: $f(t) = 1 \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(p) = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow e^{-4t} \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{p+4}$

$$e^{2t} \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{1}{p-2}$$

$$\sin t \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{1}{p^2+1}$$

$$e^{-3t} \cdot \sin t \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{1}{(p+3)^2+1}$$

## 5) Ableitungssätze:

a) Ableitung im Zeitbereich:

$$f(t) \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet F(p)$$

$$f'(t) \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet ?$$

$$\Rightarrow LT(f'(t)) = p \cdot F(p) - f(0)$$

2 Bedingungen müssen erfüllt sein:

1) $\lim\limits_{t \to \infty} (e^{-pt} \cdot f(t)) = 0$

2) $f(0)$ muss einen endlichen Wert haben.

$$\Rightarrow LT(f''(t)) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$LT(f^{(n)}(t)) = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) + \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Bsp.: 1)

$$\sin(t) \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{1}{p^2+1}$$

$$\cos(t) \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{p}{p^2+1}$$

2)

$$t^4 \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{24}{p^5}$$

$$4 \cdot t^3 \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{24}{p^4}$$

$$12 \cdot t^2 \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{24}{p^3}$$

$$24 \cdot t \circ\!\xrightarrow{LT}\!\bullet \frac{24}{p^2}$$

b) Ableitung im Bildbereich

$$f(t) \;\circ\!\!\overset{LT}{-\!\!\!-}\!\!\bullet\; F(p)$$

$$? \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F'(p)$$

$$\Downarrow$$

$$(-t)\cdot f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F'(p)$$

$$\vdots$$

$$(-t)^n\cdot f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F^{(n)}(p)$$

Bsp.: 1) $\sin t \;\circ\!\!\overset{LT}{-\!\!\!-}\!\!\bullet\; \frac{1}{p^2+1}$

$t^2\cdot \sin t \;\circ\!\!\overset{LT}{-\!\!\!-}\!\!\bullet\; ?$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \left((p^2+1)^{-1}\right)' = -(p^2+1)^{-2}\cdot 2p = \frac{-2p}{(p^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-2p}{(p^2+1)^2}\right)' = \frac{-2\cdot(p^2+1)^2 - 2\cdot(p^2+1)\cdot 2p\cdot(-2p)}{(p^2+1)^4} = \frac{-2(p^2+1)+8p^2}{(p^2+1)^3}$$

$$= \frac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}$$

2) $e^{-3t} \;\circ\!\!\overset{LT}{-\!\!\!-}\!\!\bullet\; \frac{1}{p+3} = (p+3)^{-1} = F(p)$

$t^3\cdot e^{-3t} \;\circ\!\!\overset{LT}{-\!\!\!-}\!\!\bullet\; ?$

$F'(p) = (-1)\cdot(p+3)^{-2}$

$F''(p) = 2\cdot(p+3)^{-3}$

$F'''(p) = (-6)\cdot(p+3)^{-4} \quad \Rightarrow$ Lsg. ist $6\cdot(p+3)^{-4}$

6) Integralsätze

a) Integration im Zeitbereich

$$f(t) \;\circ\!\!\overset{LT}{-\!\!\!-}\!\!\bullet\; F(p)$$

$$\int_0^t f(u)\,du \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{p}F(p)$$

allgemein: $\int_a^t f(u)\,du \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{p}\left(F(p) - \int_0^a f(u)\,du\right)$

Bsp.: 1) $\cos t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{p}{p^2+1}$

$$\int_0^t \cos u \, du = \left[\sin u\right]_0^t = \sin t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{p^2+1}$$

2) $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{p^3}$

$$\int_0^t u^2 \, du = \frac{1}{3} t^3 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2}{p^4}$$

b) Integration im Bildbereich: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(p)$

$$\frac{1}{t} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_p^\infty F(u)\, du$$

Bsp.: 1) $f(t) = t \circ\!\!-\!\!\bullet F(p) = \frac{1}{p^2}$

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \int_p^\infty u^{-2}\, du = \left[-u^{-1}\right]_p^\infty = \frac{1}{p}$$

2) $f(t) = 4 \cdot t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet F(p) = \frac{8}{p^3}$

$$4 \cdot t \circ\!\!-\!\!\bullet \int_p^\infty 8 \cdot u^{-3}\, du = \left[(-4) \cdot u^{-2}\right]_p^\infty = \frac{4}{p^2}$$

3) $f(t) = 5^{3t+1} \circ\!\!-\!\!\bullet$ ?

4) $f(t) = (-2) \cdot \sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet$ ?

5) $f(t) = e^{t-4} - 8t^2 + 2 \circ\!\!-\!\!\bullet$ ?

zu 3) $f(t) = 5 \cdot 5^{3t} = 5 \cdot e^{(\ln 5 \cdot 3) t} \circ\!\!-\!\!\bullet 5 \cdot \frac{1}{p - 3 \cdot \ln 5}$

zu 4) $\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{p^2+1}$

$\Downarrow$

$$(-2) \cdot \sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} \cdot (-2) = \frac{-2\omega}{p^2 + \omega^2}$$

zu 5) $f(t) = e^{-4} \cdot e^{t} - 8t^{2} + 2$

$$F(p) = \frac{e^{-4}}{p-1} - \frac{16}{p^3} + \frac{2}{p}$$

7) <u>Grenzwertsätze</u>

Oft ist bei einer Rücktransformation nicht die gesamte Funktion $f(t)$ von Interesse, sondern nur $f(0)$ oder insbesondere $f(\infty)$

Es gilt: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(p)$

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\quad f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} (p \cdot F(p)) \\ &2)\quad f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} (p \cdot F(p)) \end{aligned}}$$

<u>Beweis zu 1):</u> $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(p)$

$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet p \cdot F(p) - f(0)$

$$p \cdot F(p) - f(0) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad \Big| \lim_{p\to 0} (\quad)$$

$$\lim_{p\to 0} \left(p \cdot F(p) - f(0)\right) = \lim_{p\to 0} \left( \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt \right)$$

$$'' = \int_0^\infty f'(t) \underbrace{\left( \lim_{p\to 0} e^{-pt} \right)}_{=1} dt$$

$$'' = \int_0^\infty f'(t)\, dt = \left[ f(t) \right]_0^\infty$$

$$\lim_{p\to 0} \left(p \cdot F(p)\right) - \cancel{f(0)} = f(\infty) \cancel{- f(0)}$$

gültig, wenn der GW $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert, d. h. endlich ist.

Bspi: 1) $F(p) = \frac{p}{p^2+4}$ ges.: $f(0)$

$\bullet\!-\!\circ$ $f(t) = \cos(2t)$

$\Rightarrow f(0) = \lim_{p \to \infty} (p \cdot F(p))$

$t = 0$

$f(0) = \lim_{p \to \infty} \left( \frac{p^2}{p^2+4} \right) = 1$

$f(0) = 1$

Alternativ: Tabelle der Rücktransf. liefert

2) $F(p) = \frac{6p+16}{p \cdot (p+2)}$ ges.: $f(\infty)$ und $f(t)$

mit Partialbruch zerleg. und Rücktransf.

3) $F(p) = \frac{3p}{p^2+5} + \frac{1}{p^3}$ ges.: $f(0)$ "

4) $F(p) = \frac{12}{p(p-1)} + \frac{2}{p+4}$ ges.: $f(0)$ "

zu 2) $p \cdot F(p) = \frac{6p+16}{p+2} \xrightarrow{p \to 0} 8 = f(\infty)$

$F(p) = \frac{6p+16}{p \cdot (p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2}$

$6p + 16 = A(p+2) + B \cdot p$

$p = -2: \quad 4 = -2 \cdot B \Leftrightarrow B = -2$

$p = 0: \quad 16 = 2A \Leftrightarrow A = 8$

$F(p) = \frac{8}{p} - \frac{2}{p+2} \quad \bullet\!-\!\circ \quad f(t) = 8 - 2 \cdot e^{-2t}$

**Tabelle:** Spezielle Laplace-Transformationen

| Bildfunktion $F(s)$ | Originalfunktion $f(t)$ |
|---|---|
| (1) $1$ | $\delta(t)$ |
| (2) $\frac{1}{s}$ | $1$ (Sprungfunktion $\sigma(t)$) |
| (3) $\frac{1}{s-a}$ | $e^{at}$ |
| (4) $\frac{1}{s^2}$ | $t$ |

**Tabelle:** Spezielle Laplace-Transformationen (Fortsetzung)

| | | |
|---|---|---|
| (5) | $\frac{1}{s(s-a)}$ | $\frac{e^{at}-1}{a}$ |
| (6) | $\frac{1}{(s-a)^2}$ | $t \cdot e^{at}$ |
| (7) | $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ | $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ |
| (8) | $\frac{s}{(s-a)^2}$ | $(1+at) \cdot e^{at}$ |
| (9) | $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ | $\frac{a \cdot e^{at} - b \cdot e^{bt}}{a-b}$ |
| (10) | $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{1}{2} t^2$ |
| (11) | $\frac{1}{s^2(s-a)}$ | $\frac{e^{at}-at-1}{a^2}$ |
| (12) | $\frac{1}{s(s-a)^2}$ | $\frac{(at-1) \cdot e^{at}+1}{a^2}$ |
| (13) | $\frac{1}{(s-a)^3}$ | $\frac{1}{2} t^2 \cdot e^{at}$ |
| (14) | $\frac{s}{(s-a)^3}$ | $\left(\frac{1}{2} at^2 + t\right) \cdot e^{at}$ |
| (15) | $\frac{s^2}{(s-a)^3}$ | $\left(\frac{1}{2} a^2 t^2 + 2at + 1\right) \cdot e^{at}$ |
| (16) | $\frac{1}{s^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ |
| (17) | $\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ | $\frac{t^{n-1} \cdot e^{at}}{(n-1)!}$ |
| (18) | $\frac{1}{s^2+a^2}$ | $\frac{\sin(at)}{a}$ |
| (19) | $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\cos(at)$ |

**Tabelle:** Spezielle Laplace-Transformationen (Fortsetzung)

| | | |
|---|---|---|
| (20) | $\frac{(\sin b) \cdot s + a \cdot \cos b}{s^2+a^2}$ | $\sin(at+b)$ |
| (21) | $\frac{(\cos b) \cdot s - a \cdot \sin b}{s^2+a^2}$ | $\cos(at+b)$ |
| (22) | $\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$ | $\frac{e^{bt} \cdot \sin(at)}{a}$ |
| (23) | $\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ | $e^{bt} \cdot \cos(at)$ |
| (24) | $\frac{1}{s^2-a^2}$ | $\frac{\sinh(at)}{a}$ |
| (25) | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh(at)$ |
| (26) | $\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$ | $\frac{e^{bt} \cdot \sinh(at)}{a}$ |
| (27) | $\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$ | $e^{bt} \cdot \cosh(at)$ |
| (28) | $\frac{1}{s(s^2+4a^2)}$ | $\frac{\sin^2(at)}{2a^2}$ |
| (29) | $\frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$ | $\cos^2(at)$ |
| (30) | $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ | $\frac{t \cdot \sin(at)}{2a}$ |
| (31) | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ | $t \cdot \cos(at)$ |
| (32) | $\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$ | $\frac{t \cdot \sinh(at)}{2a}$ |
| (33) | $\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$ | $t \cdot \cosh(at)$ |
| (34) | $\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$ | $\frac{\sin(at)}{t}$ |

3) $F(p) = \frac{3p}{p^2+5} + \frac{1}{p^3}$ ges.: $f(0)$

4) $F(p) = \frac{12}{p(p-1)} + \frac{2}{p+4}$ ges.: $f(0)$

zu 3) $p \cdot F(p) = \frac{3p^2}{p^2+5} + \frac{1}{p^2} \xrightarrow{p \to \infty} \boxed{3}$

Rücktransf.: $F(p) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; f(t) = 3 \cdot \cos(\sqrt{5} \cdot t) + \frac{1}{2} t^2$

$\downarrow t \to 0$

$\boxed{3}$

zu 4) $p \cdot F(p) = \frac{12}{p-1} + \frac{2p}{p+4} \xrightarrow{p \to \infty} \boxed{2}$

$$F(p) \bullet\!\!\xrightarrow{\text{Nr.5 und Nr.3}}\!\!\circ\ 12\cdot(e^{t}-1)+2\cdot e^{-4t} \xrightarrow{t\to 0} \boxed{2}$$

5) <u>geg.:</u> $F(p) = \dfrac{3p}{p^2+1} - \dfrac{2}{p^2(p^2+1)}$

<u>ges.:</u> a) $f(0)$ und $f(\infty)$ mit Grenzwertsätzen

b) $f(t)$ mit Tabelle (alte Klausur)

6) <u>geg.:</u> $F(p) = \dfrac{5p}{2p^2+8} - \dfrac{3}{p(p-1)}$

<u>ges.:</u> a) $f(0)$ und $f(\infty)$ mit Grenzwertsätzen

b) $f(t)$ mit Tabelle (alte Klausur)

zu 5) a) $\left(p\cdot F(p)\right) = \dfrac{3p^2}{p^2+1} - \dfrac{2}{p\cdot(p^2+1)}$

$$(p\cdot F(p)) \xrightarrow{p\to 0} \boxed{-\infty}$$

$$(p\cdot F(p)) \xrightarrow{p\to \infty} \boxed{3}$$

b) <u>Papula - Formelsammlung:</u>

$$\boxed{\text{Nr. 42} \quad \frac{1}{s^2\cdot(s^2+a^2)} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{at-\sin(at)}{a^3}}$$

$$F(p) = \frac{3p}{p^2+1}\left(-\frac{2}{p^2\cdot(p^2+1)}\right) = \frac{3p}{p^2+1} + \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}\right)$$

$$-2 = Ap\cdot(p^2+1) + B(p^2+1) + (Cp+D)p^2$$

$p=0$: $\boxed{-2 = B}$

$p=-1$: $-2 = -2A - 4 - C + D$

$p=1$: $-2 = 2A - 4 + C + D$

$p=2$: $-2 = 10A - 10 + 8C + 4D$

$$\begin{array}{ccc} A & C & D \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{D=2} \quad \cdot 4 \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$-3A + 6D = 12 \qquad -2A - C + D = 2$$
$$-3A + 12 = 12 \qquad 0 - C + 2 = 2$$
$$A = 0 \qquad C = 0$$

$$F(p) = \frac{3p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = 3\cos t - 2t + 2\sin t$$

zu 6) a) $$\left(p \cdot F(p)\right) = \frac{5p^2}{2p^2+8} - \frac{3}{p-1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{p^2}{p^2+4} - \frac{3}{p-1}$$

$$\left(p \cdot F(p)\right) \xrightarrow{p \to 0} 3 = f(\infty)$$ ?

$$\left(p \cdot F(p)\right) \xrightarrow{p \to \infty} \frac{5}{2} = f(0)$$

b) $$F(p) = \frac{5p}{2p^2+8} - \frac{3}{p \cdot (p-1)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{p \cdot (p-1)}$$

$$f(t) = \frac{5}{2} \cdot \cos(2t) - 3 \cdot (e^t - 1)$$ ?

## Faltung

geg.: $f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(p)$ ges.: ? $\circ\!\!-\!\!\bullet F_1(p) \cdot F_2(p)$

$f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_2(p)$

Schreibweise: $f_1(t) * f_2(t)$

$\Rightarrow$ „Faltungsintegral" bzw. „Integralkombination"

$$f_1(t) * f_2(t) = LT^{-1}\{F_1(p) \cdot F_2(p)\} = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u)\, du$$

Bsp.: 1) $$F(p) = \frac{1}{p^2 (p^2+1)} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p^2+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \ \sin t$$

$t$ (for $\frac{1}{p^2}$)

$$\Rightarrow f(t) = \int_0^t \sin u \cdot (t-u)\, du = \int_0^t t\cdot \sin u - u \cdot \sin u \, du$$

(Tipp: $\int x \cdot \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cdot x \cdot \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \cdot \sin(ax)$)

$$\Rightarrow f(t) = \Big[ -t \cdot \cos u + u \cdot \cos u - \sin u \Big]_0^t = \left(\cancel{-t\cdot\cos t} + \cancel{t\cdot\cos t} - \sin t\right) - (-t \quad)$$

$$f(t) = t - \sin t$$

2) $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \underbrace{\frac{1}{p-1}}_{e^t} \cdot \underbrace{\frac{1}{p-2}}_{e^{2t}}$ $\xrightarrow{\text{Tabelle}}$ $e^{2t} - e^t$

$$f(t) = \int_0^t e^{2u} \cdot e^{t-u}\, du = \int_0^t e^{u+t}\, du = \Big[ e^{u+t} \Big]_{u=0}^t = e^{2t} - e^t$$

Part. bruchzerl.: $\frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$ $\mapsto$ $e^{2t} - e^t$

$1 = A \cdot (p-2) + B(p-1)$

$p=1$: $1 = -A \Leftrightarrow A = -1$

$p=2$: $1 = B \Leftrightarrow B = 1$

3) $t * e^t$
4) $e^{-t} * \sin t$
} als HA

zu 3) $f(t) = \int_0^t u \cdot e^{t-u}\, du = \int_0^t u \cdot e^t \cdot e^{-u}\, du = e^t \int_0^t u \cdot e^{-u}\, du$

(Tipp: $\int x e^{ax}\, dx = e^{ax} \frac{(ax-1)}{a^2}$)

$$f(t) = e^t \cdot \Big[ e^{-u} \cdot (-u-1) \Big]_0^t = e^t \left( e^{-t} \cdot (-t-1) + 1 \right)$$

$$f(t) = -t - 1 + e^t$$

zu 4) $f(t) = \int_0^t \sin u \cdot e^{-t+u}\, du = e^{-t} \int_0^t e^u \cdot \sin u \, du$

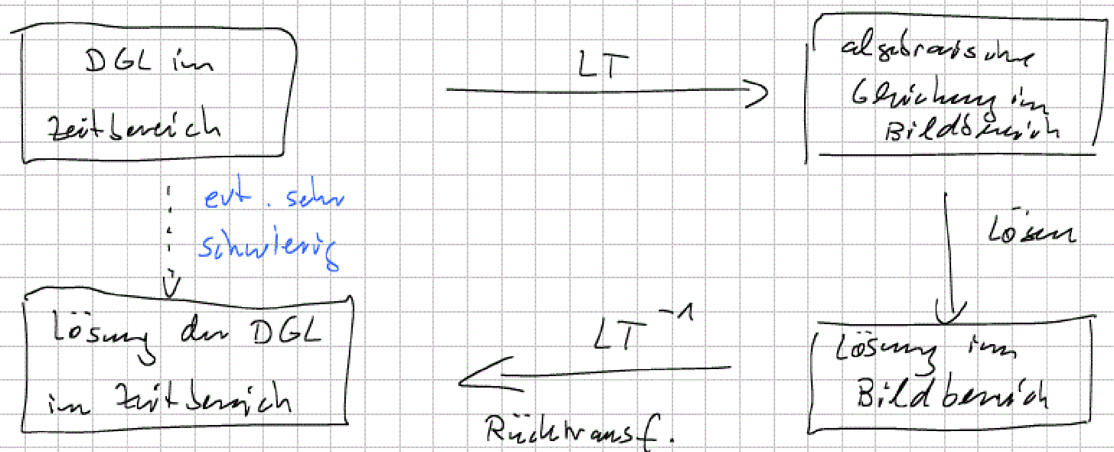
$$\left( \text{Tipp: } \int e^{ax} \cdot \sin(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \cdot \left( a \sin(bx) - b \cdot \cos(bx) \right) \right)$$

$$f(t) = e^{-t} \left[ \frac{1}{2} e^x \cdot \left( \sin x - \cos x \right) \right]_0^t$$

$$f(t) = e^{-t} \cdot \left( \frac{1}{2} e^t \cdot (\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} \right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \left( \sin t - \cos t + e^{-t} \right)$$

LT zum Lösen von DGL




Ableitungsregeln

$$y(t) \overset{LT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} Y(p)$$
$$y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ p \cdot Y(p) - y(0)$$
$$y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0)$$

Bsp.:

1) $y' + 2y = 2t - 4 \quad ; \quad y(0) = 1$

$$p \cdot Y(p) - 1 + 2Y(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p} \qquad | +1$$

$$Y(p) \cdot (p+2) = \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p} + 1 \qquad | : (p+2)$$

$$Y(p) = \frac{2}{p^2\cdot(p+2)} - \frac{4}{p\cdot(p+2)} + \frac{1}{p+2}$$

$$\Big\downarrow \text{ Nr. 11 + Nr. 8}$$

$$y(t) = \frac{2\cdot(e^{-2t}+2t-1)}{4} + 2\cdot(e^{-2t}-1) + e^{-2t}$$

$$y(t) = \frac{7}{2}\cdot e^{-2t} + t - \frac{3}{2}$$

2. Bsp.: $y'' + 2y' + y = 9\cdot e^{2t}$ ; $y(0) = 0$ ; $y'(0) = 1$

3. Bsp.: $y'' + 2y' - 3y = 2t$ ; $y(0) = 1$ ; $y'(0) = 0$

zu 2.: $p^2 Y(p) - \cancel{p\cdot y(0)} - y'(0) + 2\cdot\big(p\cdot Y(p) - \cancel{y(0)}\big) + Y(p) = \frac{9}{p-2}$

$$Y(p)\cdot(p^2+2p+1) - 1 = \frac{9}{p-2}$$

$$Y(p) = \frac{p+7}{(p-2)\cdot(p+1)^2} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}$$

$$p+7 = A\cdot(p+1)^2 + B\cdot(p-2)(p+1) + C\cdot(p-2)$$

$p=-1$: $6 = (-3)\cdot C \Leftrightarrow C = -2$

$p = 2$: $9 = 9A \Leftrightarrow A = 1$

$p = 0$: $7 = 1 + B\cdot(-2) + 4 \Leftrightarrow B = -1$

$$Y(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2}$$

$$\Big\downarrow$$

$$y(t) = e^{2t} - e^{-t} - 2\cdot t\cdot e^{-t}$$

zu 3.: $p^2 Y(p) - p\cdot \underbrace{y(0)}_{=1} - \cancel{y'(0)} + 2\cdot\big(p\cdot Y(p) - \underbrace{y(0)}_{=1}\big) - 3Y(p) = \frac{2}{p^2}$

$$Y(p)\cdot(p^2+2p-3) - p - 2 = \frac{2}{p^2}$$

$$Y(p)\cdot(p+3)(p-1) = \frac{2}{p^2} + p + 2$$

$$\parallel \qquad = \frac{p^3+2p^2+2}{p^2}$$

$$Y(p) = \frac{p^3+2p^2+2}{p^2\cdot(p+3)\cdot(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3} + \frac{D}{p-1}$$

$$p^3+2p^2+2 = Ap(p+3)(p-1) + B(p+3)(p-1) + Cp^2(p-1) + Dp^2(p+3)$$

$p=0$: $\quad 2 = -3B \quad \Leftrightarrow \quad B = -\frac{2}{3}$

$p=1$: $\quad 5 = 4D \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{5}{4}$

$p=-3$: $\quad -7 = -36C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{7}{36}$

$p=-1$: $\quad 3 = 4A - \frac{2}{3}\cdot(-4) + \frac{7}{36}\cdot(-2) + \frac{5}{4}\cdot 2$

$\quad TR \Rightarrow \quad A = -\frac{4}{9}$

$$Y(p) = \left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{p} + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{7}{36}\cdot\frac{1}{p+3} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p-1}$$

$$y(t) = -\frac{4}{9} - \frac{2}{3}t + \frac{7}{36}\cdot e^{-3t} + \frac{5}{4}\cdot e^{t}$$

4) $\quad y'' + 5y' + 6y = 3t \quad ; \quad y(0) = 1 \; ; \quad y'(0) = 0$

$$p^2Y(p) - p\cdot y(0) - y'(0) + 5\cdot(p\cdot Y(p) - \cdot y(0)) + 6\cdot Y(p) = \frac{3}{p^2}$$

$$p^2Y(p) - p + 5\cdot p\cdot Y(p) - 5 + 6\cdot Y(p) = \frac{3}{p^2}$$

$$Y(p)\cdot\left(p^2+5p+6\right) = \frac{3}{p^2} + p + 5$$

$$Y(p)\cdot(p+2)(p+3) = \frac{3+p^3+5p^2}{p^2}$$

$$Y(p) = \frac{p^3+5p^2+3}{p^2\cdot(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+3}$$

$$p^3+5p^2+3 = A\cdot p\cdot(p+2)(p+3) + B(p+2)(p+3) + Cp^2\cdot(p+3) + Dp^2(p+2)$$

$p=0$: $\quad 3 = 6B \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{1}{2}$

$p=-2$: $\quad 15 = 4C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{15}{4}$

$p=-3$: $\quad 21 = -9D \quad \Leftrightarrow \quad D = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$

$p = 1$: $\quad 9 = 12A + 6 + 15 - 7$

$$-5 = 12A$$

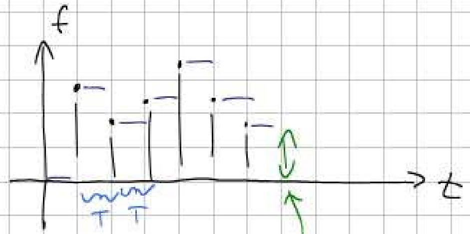
$$-\frac{5}{12} = A$$

$$Y(p) = -\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{p+2} - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{p+3}$$

$$y(t) = -\frac{5}{12} + \frac{1}{2}t + \frac{15}{4}\cdot e^{-2t} - \frac{7}{3}\cdot e^{-3t}$$

## z-Transformation

Ist nötig, um eine Folge von diskreten Signalen in eine kontinuierliche Funktion zu transformieren, um damit dann z. B. Differenzengleichungen zu lösen




⇒ Zahlenfolge $f_n$ wird gemessen (im zeitlichen Abstand T)

$$f_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \left\{ \sigma(t-nT) - \sigma(t-(n+1)\cdot T) \right\}$$

Höhe

Balken der Höhe 1 und der Breite T von $t = nT$ bis $T = (n+1)T$, sonst 0

Laplace-Transf.: $\quad F_T(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \left\{ \frac{1}{p}\cdot e^{-nTp} - \frac{1}{p}\cdot e^{-(n+1)Tp} \right\}$

$$F_T(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\cdot\frac{1}{p} e^{-nTp}\cdot\left(1 - e^{-Tp}\right)$$

$$F_T(p) = \frac{1-e^{-Tp}}{p}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTp} \longrightarrow F_z(z)$$

„Haltefunktion"

Setze $\quad z = e^{Tp}$

$$\boxed{F_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^{-n}}$$

← z-Transformierte der Zahlenfolge $f_n$

$$f_n \;\circ\!\!\xrightarrow{z}\!\!\bullet\; F_z(z) \qquad z \text{ ist i.a. komplex}$$

Bsp.: 1) $f_n = (1; 1; 1; 1; \ldots)$

d.h. zur Folge $f_n$ gehört z.B. die Fkt. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

(Aber auch viele andere $f(t)$ sind denkbar)

$$\Rightarrow \quad F_z(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \ldots$$

Erinnerung: geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \overset{\text{für } |q|<1}{=} \frac{1}{1-q}$

Jetzt $q = \frac{1}{z} \Rightarrow F_z(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$ ist konvergent für $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, also für $|z| > 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma(t) \;\circ\!\!\xrightarrow{z}\!\!\bullet\; \frac{z}{z-1}}$$

2) $f(t) = e^{\alpha t}$ (mit $\alpha$ komplex)

$\Rightarrow f_n = f(nT) = e^{\alpha n T}$

$$F_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n T} \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\alpha T}}{z}\right)^n$$

Dies ist wieder eine geometrische Reihe mit $q = \frac{e^{\alpha T}}{z}$

d.h. Konvergenz für $\left|\frac{e^{\alpha T}}{z}\right| < 1$

$\alpha = \eta + j\omega$

$$|e^{\alpha T}| = |e^{(\eta + j\omega)T}| = e^{\eta T} \cdot |e^{j\omega T}| = e^{\eta T}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\eta T} < |z|$$

$$\Rightarrow \quad F_z(z) = \frac{1}{1 - \frac{e^{\alpha T}}{z}} = \frac{z}{z - e^{\alpha T}} \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

$$\boxed{f(t) = e^{\alpha t} \;\circ\!\!\xrightarrow{z}\!\!\bullet\; F_z(z) = \frac{z}{z - e^{\alpha T}}}$$

3) $f_n = (1; -1; 1; -1; \ldots)$

$$F_z(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - \ldots$$
$$= 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \ldots$$

Setze $q = -\frac{1}{z} \Rightarrow F_z(z) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{z}{z+1}$

4) $f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right)$

$\Rightarrow f_n = f(nT) \qquad n = 0, 1, 2,$

$f_n = (1; -1; -1; \ldots)$

gleiche Folge $f_n$ wie in 3) und auch die gleiche z-Transf.

D.h. eine Rücktransf. liefert nur Infos über die Folge $f_n$

aber nicht über die Fkt. $f(t)$, die $f_n$ erzeugt

5) Extrembsp.: $f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right)$

$\Rightarrow f_n = f(nT) = \sin(\pi n) = (0; 0; 0; \ldots)$

enthält überhaupt keine Information

6) $f(t) = \delta(t - mT)$ Dirac-Stoß zur Zeit $t = mT$

$\Rightarrow F_z(z) = (e^{Tp})^{-m} = z^{-m}$ $\qquad \boxed{\delta(t-mT) \circ\!\!\xrightarrow{z}\!\!\bullet\, z^{-m}}$

---

Es gilt Linearität: $f_1 \circ\!\!\xrightarrow{z}\!\!\bullet\, F_{1,z}(z)$

$f_2 \circ\!\!\xrightarrow{z}\!\!\bullet\, F_{2,z}(z)$

$$c_1 f_1 + c_2 \cdot f_2 \circ\!\!\xrightarrow{z}\!\!\bullet\, c_1 \cdot F_{1,z}(z) + c_2 \cdot F_{2,z}(z)$$

---

7) $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

$e^{jx} = \cos x + j \sin x$

$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$

$f(t) = \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}\right) \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2j} \cdot (e^{jx} - e^{-jx})$

$\cos x = \frac{1}{2} \cdot (e^{jx} + e^{-jx})$

$$f(t) = \frac{1}{2j} \cdot \left( e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} - e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega t} \right)$$

$$\Big\downarrow z$$

$$F_z(z) = \frac{1}{2j} \cdot \left( e^{j\varphi} \cdot \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - e^{-j\varphi} \cdot \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right)$$

$$F_z(z) = \frac{z}{2j} \cdot \left( \frac{e^{j\varphi} \cdot (z - e^{-j\omega T}) - e^{-j\varphi} \cdot (z - e^{j\omega T})}{(z - e^{j\omega T}) \cdot (z - e^{-j\omega T})} \right)$$

$$F_z(z) = \frac{z}{2j} \cdot \left( \frac{z \cdot (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) - e^{j(\varphi - \omega T)} + e^{j(\omega T - \varphi)}}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1} \right)$$

$$F_z(z) = \frac{z}{2j} \cdot \left( \frac{z \cdot 2j \cdot \sin\varphi + 2j \sin(\omega T - \varphi)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega T) + 1} \right)$$

$$F_z(z) = z \cdot \frac{z \cdot \sin\varphi + \sin(\omega T - \varphi)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

$$\boxed{\sin(\omega t + \varphi) \;\circ\!\xrightarrow{z}\!\bullet\; z \cdot \frac{z \cdot \sin\varphi + \sin(\omega T - \varphi)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega T) + 1}}$$

$\Rightarrow \varphi = 0$

$$\sin(\omega t) \;\circ\!\xrightarrow{z}\!\bullet\; \frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega T) + 1}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\omega t) \;\circ\!\xrightarrow{z}\!\bullet\; z \cdot \frac{z - \cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

Dämpfung:

$$f(t) \;\circ\!\xrightarrow{z}\!\bullet\; F_z(z)$$
$$e^{\alpha t} \cdot f(t) \;\circ\!\xrightarrow{z}\!\bullet\; F_z(e^{-\alpha T} \cdot z)$$

$\alpha$ i.a. komplex

Differenzieren:

$$f(t) \;\circ\!\xrightarrow{z}\!\bullet\; F_z(z)$$
$$t \cdot f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; -z \cdot T \cdot F_z'(z)$$

Bsp.:
1) $f(t) = 4 \cdot t$
2) $f(t) = -7 \cdot t^2$
3) $f(t) = e^{-2t} \cdot t$
4) $f(t) = e^{-3t} \cdot t^2$

ges.: $F_z(z)$

→ Geht mit $\boxed{1 \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet \frac{z}{z-1}}$ und Dämpfung und Diff.

1) $4 \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet 4 \cdot \left(\frac{z}{z-1}\right)$

$\Downarrow$

$4 \cdot t \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet -4 \cdot z \cdot T \cdot \frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{4zT}{(z-1)^2}$

2) $-7 \cdot t \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet \frac{-7zT}{(z-1)^2} = (-7T)\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)$

$\Downarrow$

$(-7) \cdot t^2 \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet (-7T) \cdot (-zT) \cdot \frac{\left((z-1)^2 - 2(z-1) \cdot z\right)}{(z-1)^4}$

$\parallel$

$7zT^2 \cdot \frac{(z-1)-2z}{(z-1)^3} = (-7)T^2 \frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$

Nr. 15 (Tabelle)

3) Bekannt: $t \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet \frac{zT}{(z-1)^2}$ Nr. 5

$\Downarrow$ z wird ersetzt durch $e^{2T} \cdot z$

$e^{-2t} \cdot t \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet \frac{e^{2T} \cdot zT}{(e^{2T} \cdot z - 1)^2}$

zum Vergleich: Bekannt war $e^{-2t} \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet \left(\frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$

$\Downarrow$ diff.

$t \cdot e^{-2t} \circ\!\!\stackrel{z}{-}\!\!\bullet (-zT) \cdot \frac{z - e^{-2T} - z}{(z-e^{-2T})^2}$

$\parallel$

$\frac{zTe^{-2T}}{(z-e^{-2T})^2}$

das selbe ??

$\Downarrow$

ja, denn

$\frac{z \cdot T \cdot e^{-2T}}{(z-e^{-2T})^2} \cdot \frac{e^{4T}}{e^{4T}} = \frac{zTe^{2T}}{(e^{2T} \cdot z - 1)^2}$

Bsp.: Rücktransformationen gesucht

Nr. 13 $\frac{\alpha}{z-\alpha}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ ...

1) $F_z(z) = \frac{-3}{(z+1)^2} + \frac{5z}{z-2}$ Nr. 8

Nr. 13

$\circ\!\!-\!\!\bullet$ $f_n = 3 \cdot \sigma(n-1) \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-1} + 5 \cdot 2^n$

$$f_n = \begin{cases} 5 & n=0 \\ 3 \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-1} + 5 \cdot 2^n & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$f_n = (5 ; 10 ; 17 ; 46 ; \quad ; \ldots)$ with $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$

2) $F_z(z) = \dfrac{-1}{z} + \dfrac{3}{(z+2)^2}$ Nr. 2 $(k=1)$; Nr. 13 $(\alpha = -2)$

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}$$

$f_n = -\delta_{n,1} - \frac{3}{2} \cdot \sigma(n-1)(n-1) \cdot (-2)^{n-1}$

$$f_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ -\frac{3}{2} \cdot (n-1) \cdot (-2)^{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

3) $F_z(z) = \dfrac{-2}{z \cdot (z-1)} + \dfrac{z}{z+1} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z-1} + \dfrac{z}{z+1}$

$= \dfrac{2}{z} - \dfrac{2}{z-1} + \dfrac{z}{z+1}$ Nr. 2, Nr. 10, Nr. 8

$\Rightarrow \quad -2 = A(z-1) + Bz$

$z=0: \quad -2 = -A \iff \boxed{A = 2}$

$z=1: \quad \boxed{-2 = B}$

$f_n = 2 \cdot \delta_{n,1} - 2 \cdot \sigma(n-1) \cdot 1^{n-1} + (-1)^n$

$$f_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ (-1)^n - 2 & n \geq 2 \end{cases}$$

4) $F_z(z) = \dfrac{6 \cdot z^3 + 2}{2 \cdot z^3 + 5 \cdot z^2 - 3 \cdot z} = \dfrac{(6z^3 + 15z^2 - 9z) - 15z^2 + 9z + 2}{2z^3 + 5z^2 - 3z}$

$$F_z(z) = 3 + \frac{-15z^2+9z+2}{2z^3+5z^2-3z} = 3 + \frac{\cancel{2}\left(-\frac{15}{2}z^2+\frac{9}{2}z+1\right)}{\cancel{2}z\left(z^2+\frac{5}{2}z-\frac{3}{2}\right)}$$

$$z^2+\frac{5}{2}z-\frac{3}{2}=0$$

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-4\cdot 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}}{2} = \frac{-\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$$

$$F_z(z) = 3 + \frac{-\frac{15}{2}z^2+\frac{9}{2}z+1}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3)} = 3 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z-\frac{1}{2}} + \frac{C}{z+3}$$

$$-\frac{15}{2}z^2+\frac{9}{2}z+1 = A\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3) + Bz(z+3) + Cz\left(z-\frac{1}{2}\right)$$

$z=0$: $\quad 1 = A\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \iff A = -\frac{2}{3}$

$z=\frac{1}{2}$: $\quad \frac{11}{8} = B\cdot\frac{7}{4} \iff B = \frac{11}{14}$

$z=-3$: $\quad -80 = C\cdot\frac{21}{2} \iff C = -\frac{160}{21}$

$$F_z(z) = 3 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z} + \frac{11}{14}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{160}{21}\cdot\frac{1}{z+3}$$

$$f_n = 3\cdot\delta_{n,0} - \frac{2}{3}\cdot\delta_{n,1} + \frac{11}{14}\cdot\sigma(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{160}{21}\cdot\sigma(n-1)\cdot(-3)^{n-1}$$

$$f_n = \begin{cases} 3 & n=0 \\ -\frac{2}{3}+\frac{11}{14}-\frac{160}{21} & n=1 \\ \frac{11}{14}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{160}{21}\cdot(-3)^{n-1} & n\geq 2 \end{cases}$$

<u>Nr. 5</u> $\quad F_z(z) = \frac{2z^2+3z+1}{z^2+z+1} = \frac{(z^2+z+1)+z^2+2z}{z^2+z+1} = 1 + \frac{z^2+2z}{z^2+z+1}$

<u>Nr. 6</u> $\quad F_z(z) = \frac{z^2-z+3}{z^2+z-6} = \frac{(z^2+z-6)-2z+9}{(z+3)(z-2)} = 1 + \frac{-2z+9}{(z+3)(z-2)}$

zu <u>Nr. 5</u> $\quad$ Nr. 20 aus Tabelle: $\quad \alpha^n\cos(\omega n) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z(z-\alpha\cos\omega)}{z^2-2\alpha z\cos\omega+\alpha^2}$

Wähle $\alpha = -1$ : $\quad +2 \cdot \cos\omega = 1$

$$\cos\omega = \frac{1}{2} \iff \omega = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad -\alpha \cdot \cos\omega = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (-1)^n \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2+z+1} \qquad (-1)^n \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot z}{z^2+z+1}$$

d.h. Zerlegung von $F_z(z) = 1 + \dfrac{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2+z+1} + \dfrac{\frac{3}{2}z}{z^2+z+1}$

mit Nr. 19 und Nr. 20: $\alpha = -1$; $\omega = \frac{\pi}{3}$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad f_n = \delta_{n,0} + (-1)^n \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot (-1)^n \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

zu Nr. 6

$$F_z(z) = 1 + \frac{-2z+9}{(z-2)(z+3)} = 1 + \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3} = 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{-3}{z+3}$$

$$-2z + 9 = A\cdot(z+3) + B(z-2)$$

$z = -3$: $\quad 15 = (-5)\cdot B \iff B = -3$

$z = 2$: $\quad 5 = 5A \iff A = 1$

$$f_n = \delta_{n,0} + \sigma(n-1)\cdot 2^{n-1} - 3\cdot\sigma(n-1)\cdot(-3)^{n-1}$$

$$f_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2^{n-1} + (-3)^n & n \geq 1 \end{cases}$$

Nr. 7 $\quad F_z(z) = \dfrac{4z^2}{z^2+3z+2} = \dfrac{(4z^2+12z+8) - 12z - 8}{(z+1)(z+2)} = 4 + \dfrac{-12z-8}{(z+1)(z+2)}$

$$F_z(z) = 4 + \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} \iff -12z - 8 = A(z+2) + B(z+1)$$

$z = -1$: $\quad 4 = A$

$z = -2$: $\quad 16 = -B \qquad B = -16$

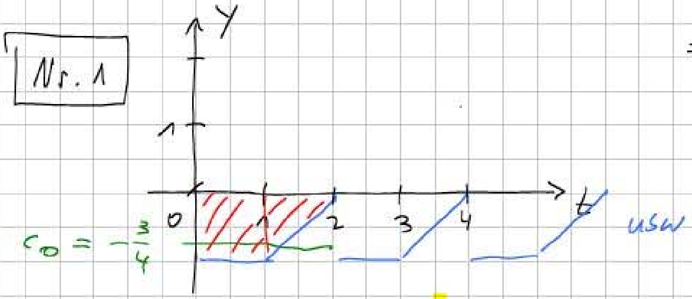
$$\Rightarrow F_z(z) = 4 + \frac{4}{z+1} - \frac{16}{z+2}$$

$$f_n = 4\cdot\delta_{n,0} + 4\cdot\sigma(n-1)\cdot(-1)^{n-1} - 16\cdot\sigma(n-1)\cdot(-2)^{n-1}$$

$$f_n = \begin{cases} 4 & n = 0 \\ 4\cdot(-1)^{n-1} - 16\cdot(-2)^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

## Wh. zu FR und FT

**Nr. 1**




$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < 1 \\ -2+t & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$T = 2$

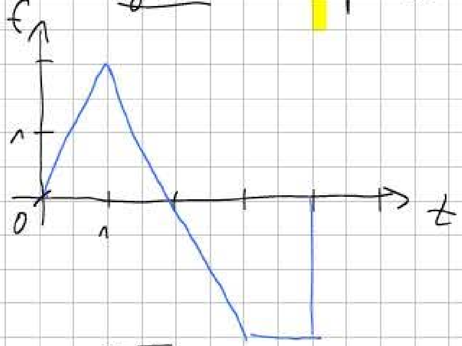
$c_0 = \frac{a_0}{2}$ $\Rightarrow \omega = \pi$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T y(t) \cdot e^{-jn\omega t}\, dt$$

ges.: komplexe FR und daraus dann die reelle FR

Tipp: $\int x e^{ax} dx = e^{ax} \cdot \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right)$

**Nr. 2**




ges.: FT

zu Nr. 1

$$c_0 = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T y(t)\, e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{2}\left( \int_0^1 (-1)\cdot e^{-jn\pi t} dt + \int_1^2 (-2+t)\, e^{-jn\pi t} dt \right)$$

$$c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \int_0^1 e^{-jn\pi t} dt - \int_1^2 e^{-jn\pi t} dt + \frac{1}{2}\int_1^2 t\, e^{-jn\pi t} dt$$

$$c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \left[\frac{1}{-jn\pi} e^{-jn\pi t}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{-jn\pi} e^{-jn\pi t}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[e^{-jn\pi t}\cdot\left(\frac{t}{-jn\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right)\right]_1^2$$

$$c_n = \frac{-j}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right) - \frac{j}{n\pi}\left(e^{-jn\pi 2} - e^{-jn\pi}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-jn\pi 2}\cdot\left(\frac{2j}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right) - e^{-jn\pi}\cdot\left(\frac{j}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right)\right)$$

$$c_n = \frac{j}{2n\pi} + \underbrace{e^{-jn\pi}}_{=(-1)^n} \cdot \left( -\frac{1}{2n^2\pi^2} \right) + \underbrace{e^{-jn2\pi}}_{=1} \cdot \left( \frac{1}{2n^2\pi^2} \right)$$

$$= \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} - j \underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0}$$

$$c_n = \frac{j}{2n\pi} + (-1)^n \cdot \left( -\frac{1}{2n^2\pi^2} \right) + \left( \frac{1}{2n^2\pi^2} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{2n^2\pi^2} \cdot \left( 1 - (-1)^n \right) + j \frac{1}{2n\pi}$$

$$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n) = \frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \left( 1 - (-1)^n \right)$$

$$b_n = (-2) \cdot \mathrm{Im}(c_n) = -\frac{1}{n\pi} \quad ; \quad a_0 = 2 \cdot c_0 = -\frac{3}{2}$$

zu Nr. 2

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \cdot \left( -1 + 2 \cdot e^{-j\omega} - e^{-3j\omega} - j\omega \cdot e^{-4j\omega} \right)$$

# Einige Infos zur z-Transformation

Tabelle 4.1 Zugeordnete Rechenoperationen zwischen Original- und Bildbereich bei der Z-Transformation ($\alpha, \beta$ sind komplexe Zahlen; $k = 1, 2, \ldots$; $n$ ist ganzzahlig)

| Nr. | Originalbereich | Bildbereich |
|---|---|---|
| 1 | $\{f_n\}, \quad \{g_n\}$ <br> $f_n = f(n), g_n = g(n)$ | $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{1}{z^n}, \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{1}{z^n}$ |
| 2 | $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$ | $\alpha F(z) + \beta G(z)$ |
| 3 | $\{f_n\} * \{g_n\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} f_{n-k} g_k\right\}$ <br> $f_n = \sigma(n) f(n), g_n = \sigma(n) g(n)$ | $F(z)G(z)$ |
| 4 | $\{f_{n-k}\}$ | $z^{-k}\left(F(z) + \sum_{m=1}^{k} f_{-m} z^m\right)$ |
| 5 | $\{f_{n+k}\}$ | $z^{k}\left(F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m}\right)$ |
| 6 | $\{f_n - f_{n-1}\}$ | $\frac{z-1}{z} F(z) - f_{-1}$ |
| 7 | $\{f_{n+1} - f_n\}$ | $(z-1)F(z) - z f_0$ |
| 8 | $\{s_n\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} f_k\right\}, \quad n \geq 0$ | $\frac{z}{z-1} F(z)$ |
| 9 | $\{\alpha^n f_n\}$ | $F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ |
| 10 | $\{n f_n\}$ <br> $\{n^2 f_n\}$ <br> $\{n^3 f_n\}$ | $-zF'(z)$ <br> $z[F'(z) + zF''(z)]$ <br> $-z[F'(z) + 3zF''(z) + z^2 F'''(z)]$ |
| 11 | $f_0$ | $\lim_{z \to \infty} F(z)$ |
| 12 | $f_n, \quad n \geq 0$ | $\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} F(z) \, \mathrm{d}z$ <br> $C$ ist eine beliebige geschlossene Kurve, die im Konvergenzbereich von $F(z)$ verläuft und den Koordinatenursprung der $z$-Ebene einmal im mathematisch positiven Sinn umrundet. |

Tabelle 4.2 Korrespondenzen ausgewählter Originalfolgen und Bildfunktionen bei der Z-Transformation ($\alpha, \beta$ sind komplexe Zahlen; $\omega, \tau > 0$ sind reelle Zahlen; $n$ und $k \geq 0$ sind ganze Zahlen)

| Nr. | Originalbereich, $\{f_n\}$ | Bildbereich, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ |
|---|---|---|
| 1 | $0$ | $0$ |
| 2 | $\delta_{n,k} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}$ | $\frac{1}{z^k}$ |
| 3 | $\sigma([n-k]\tau)$ | $\frac{z}{z^k(z-1)}$ |
| 4 | $\sigma(n\tau) - \sigma([n-k]\tau)$ | $\frac{z(z^k-1)}{z^k(z-1)}$ |
| 5 | $n$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| 6 | $n-1$ | $\frac{z(2-z)}{(z-1)^2}$ |
| 7 | $\sigma(n-1)[n-1]$ | $\frac{1}{(z-1)^2}$ |
| 8 | $\alpha^n$ | $\frac{z}{z-\alpha}$ |
| 9 | $\alpha^{n-1}$ | $\frac{z}{\alpha(z-\alpha)}$ |
| 10 | $\sigma(n-1)\alpha^{n-1}$ | $\frac{1}{z-\alpha}$ |
| 11 | $n\alpha^n$ | $\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$ |
| 12 | $[n-1]\alpha^{n-1}$ | $\frac{z(2\alpha - z)}{\alpha(z-\alpha)^2}$ |
| 13 | $\sigma(n-1)[n-1]\alpha^{n-1}$ | $\frac{\alpha}{(z-\alpha)^2}$ |
| 14 | $\sigma(n-k)\binom{n}{k}\alpha^{n-k}$ | $\frac{z}{(z-\alpha)^{k+1}}$ |

Tabelle 4.2 Fortsetzung

| Nr. | Originalbereich, $\{f_n\}$ | Bildbereich, $F(z)$ |
|---|---|---|
| 15 | $n^2\alpha^n$ | $\frac{\alpha z(z+\alpha)}{(z-\alpha)^3}$ |
| 16 | $\sigma(n-1)[n-1]^2\alpha^{n-1}$ | $\frac{\alpha(z+\alpha)}{(z-\alpha)^3}$ |
| 17 | $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \neq \beta$ | $\frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ |
| 18 | $\sigma(n-1)\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \neq \beta$ | $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ |
| 19 | $\alpha^n \sin(\omega n)$ | $\frac{\alpha z \sin(\omega)}{z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2}$ |
| 20 | $\alpha^n \cos(\omega n)$ | $\frac{z[z - \alpha\cos(\omega)]}{z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2}$ |
| 21 | $\alpha^n \sin(\omega n + \tau)$ | $\frac{z[z\sin(\tau) + \alpha\sin(\omega - \tau)]}{z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2}$ |
| 22 | $\alpha^n \cos(\omega n + \tau)$ | $\frac{z[z\cos(\tau) - \alpha\cos(\omega - \tau)]}{z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2}$ |
| 23 | $n\alpha^n \sin(\omega n)$ | $\frac{\alpha z(z^2 - \alpha^2)\sin(\omega)}{[z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2]^2}$ |
| 24 | $n\alpha^n \cos(\omega n)$ | $\frac{\alpha z[(z^2 + \alpha^2)\cos(\omega) - 2\alpha z]}{[z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2]^2}$ |
| 25 | $\alpha^n \sinh(n\tau)$ | $\frac{\alpha z \sinh(\tau)}{z^2 - 2\alpha z \cosh(\tau) + \alpha^2}$ |
| 26 | $\alpha^n \cosh(n\tau)$ | $\frac{z[z - \alpha\cosh(\tau)]}{z^2 - 2\alpha z \cosh(\tau) + \alpha^2}$ |
| 27 | $\frac{\alpha^n}{n!}, \quad n \geq 0$ | $e^{\alpha/z}$ |