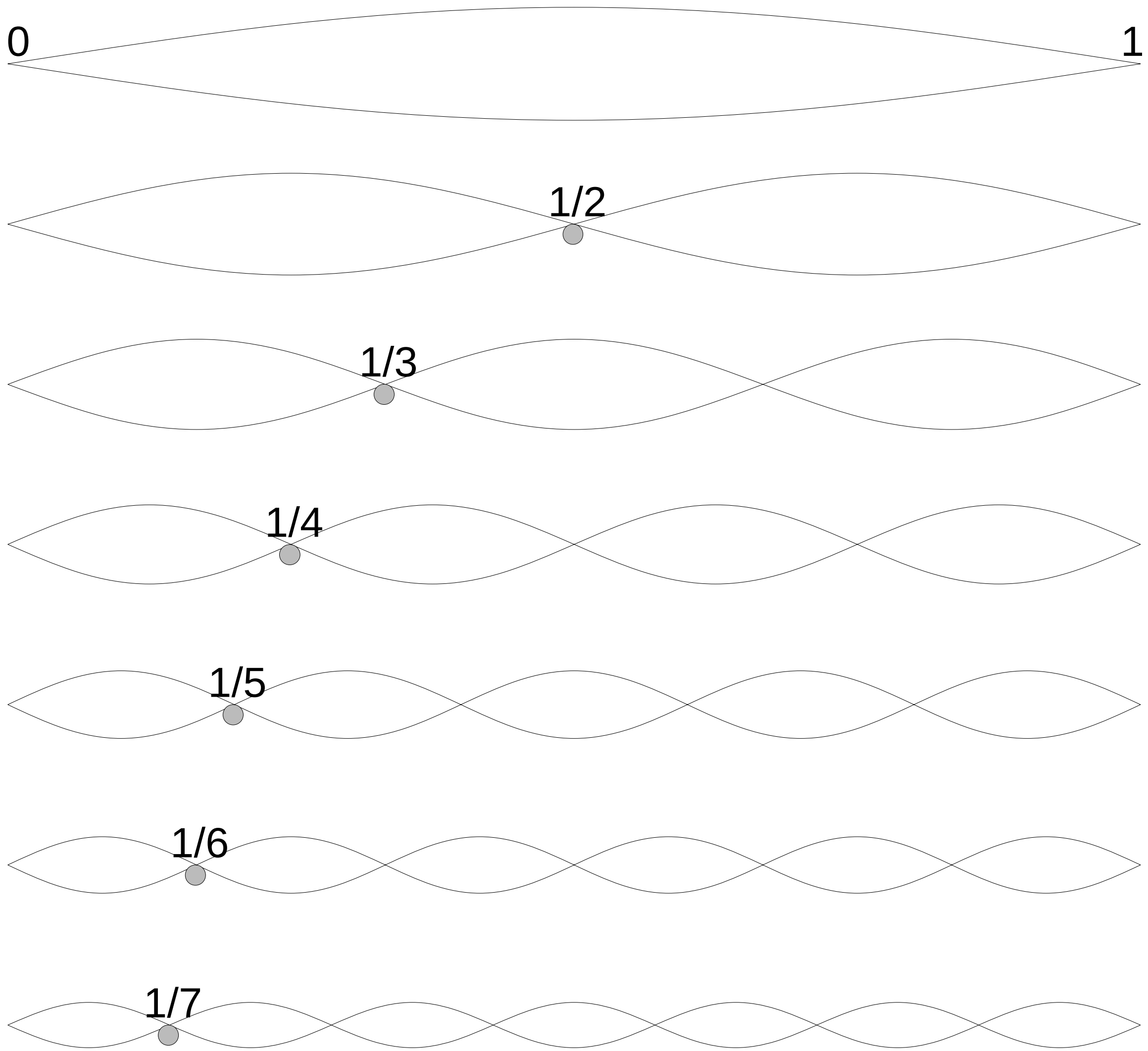
Mathematik 3

Fourier-Reihen

Wintersemester 2013/14

Schwingformen einer Saite



$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

$$2 \cdot \omega_0$$

$$3 \cdot \omega_0$$

$$4 \cdot \omega_0$$

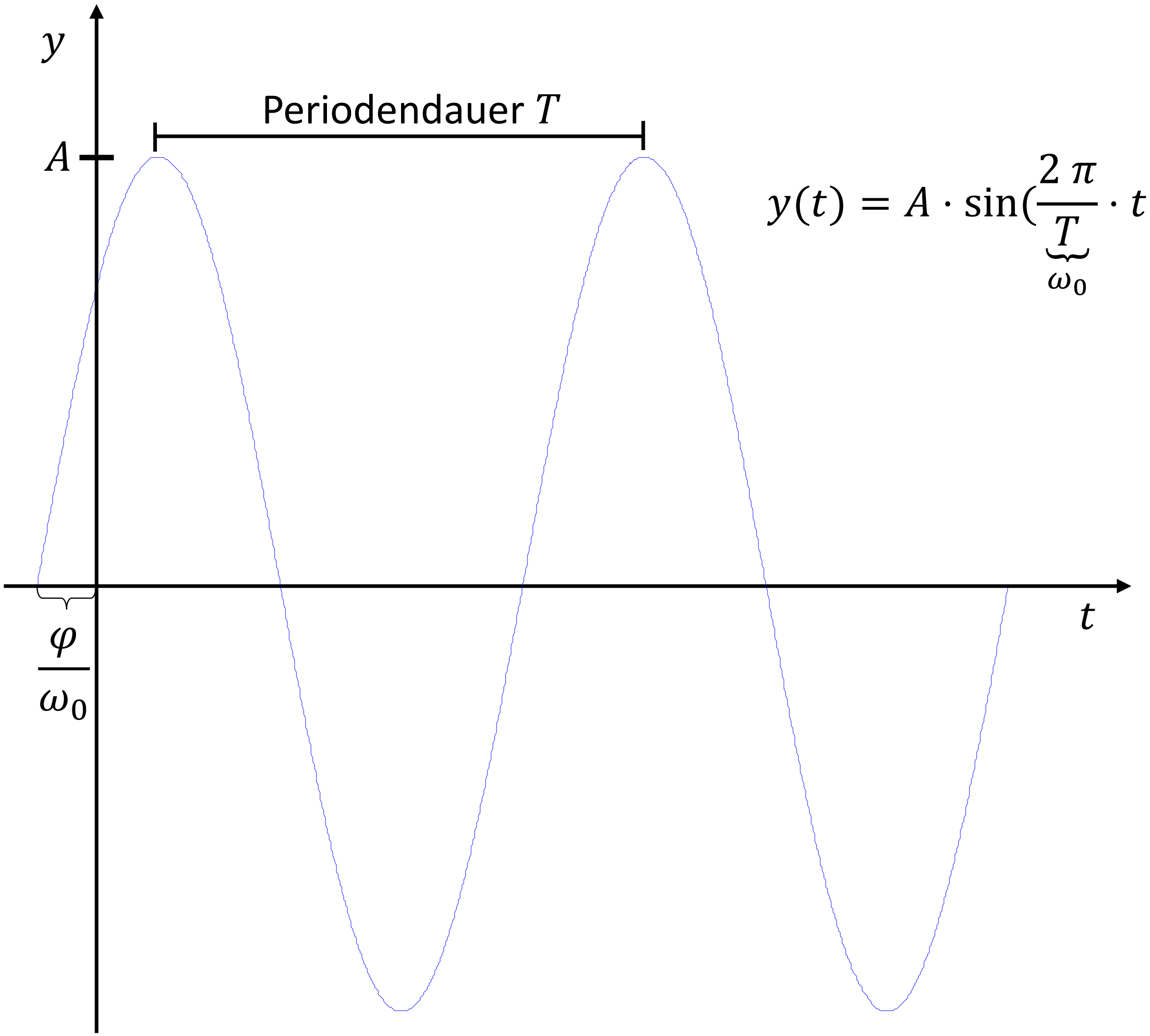
$$5 \cdot \omega_0$$

$$6 \cdot \omega_0$$

$$7 \cdot \omega_0$$

Bild: Wikipedia

Sinussignal



$$y(t) = A \cdot \sin(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega_0} \cdot t + \varphi)$$

Integrale für die Herleitung der Fourier-Koeffizienten

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\,t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin(n\,t)\,dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\,t) \cdot \cos(m\,t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin(n\,t) \cdot \sin(m\,t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \pi & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\,t) \cdot \cos(m\,t)\,dt = 0$$

Fourier-Reihe

$$\boxed{y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\,\omega_0\,t) + b_n \cdot \sin(n\,\omega_0\,t)\,)\,; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

$a_0 = 0$, wenn Mittelwert = 0

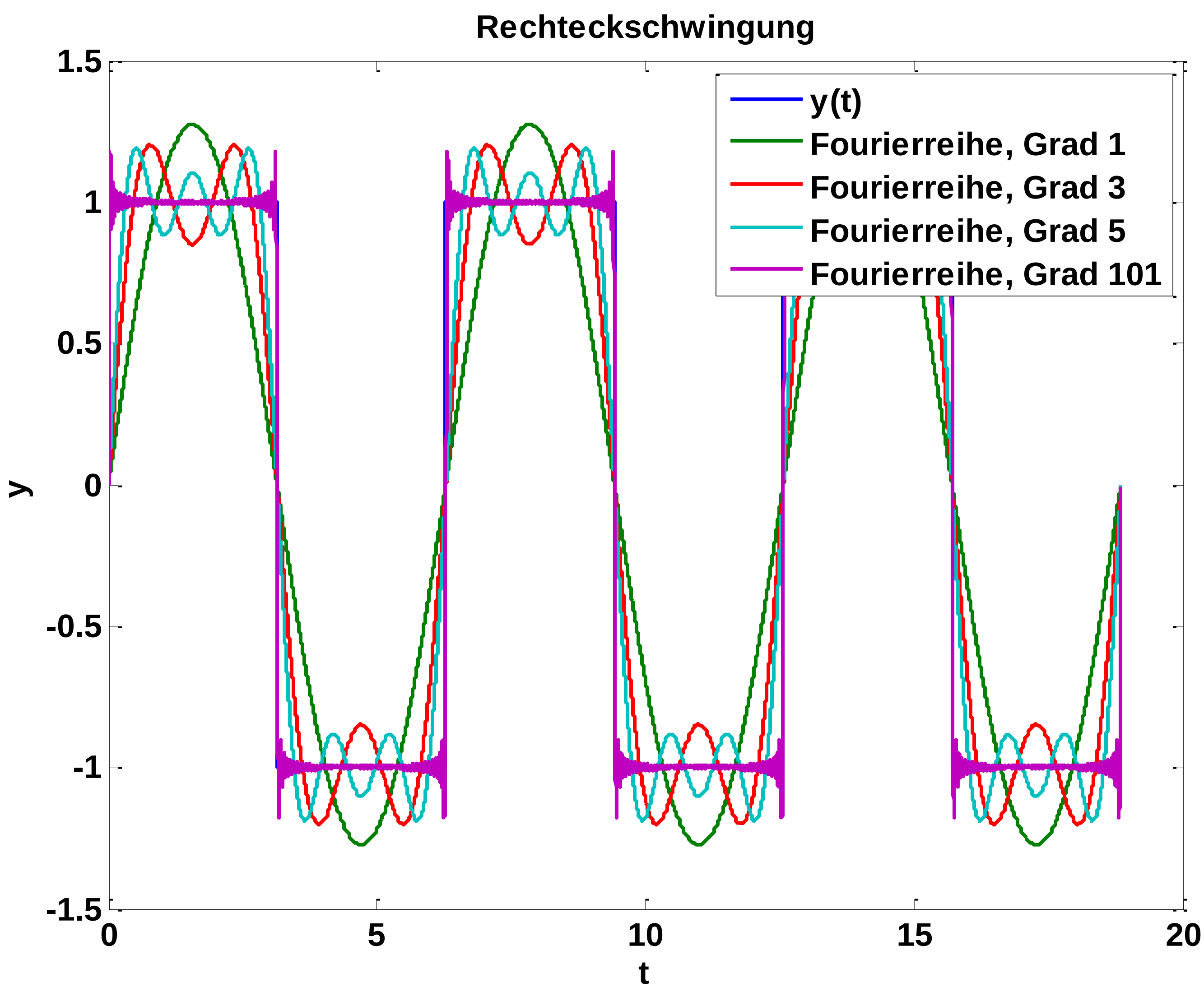
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cdot\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt$$

$a_n = 0$, wenn $y(t)$ ungerade

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cdot\sin(n\,\omega_0\,t)\,dt$$

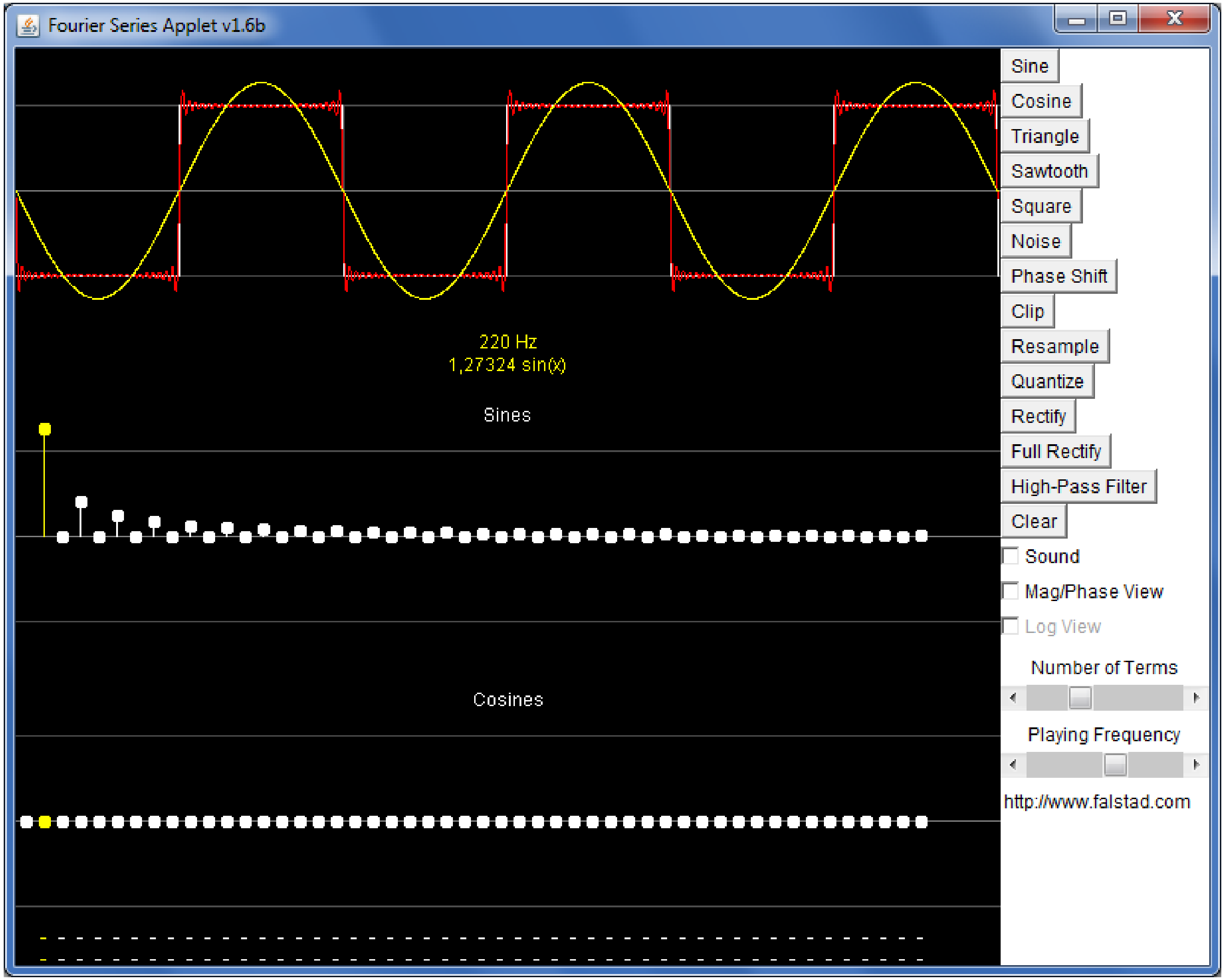
$b_n = 0$, wenn $y(t)$ gerade

Fourierreihe der Rechteckschwingung



Java-Applet im Internet

http://www.falstad.com/fourier/



Fourierreihe in komplexer Darstellung

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j\,n\,\omega_0\,t} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\,dt$$

➔ **Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten aus den reellen**

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - j\cdot b_n); \qquad c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + j\cdot b_n)$$

➔ **Berechnung der reellen Fourierkoeffizienten aus den komplexen**

$$a_n = 2\cdot \mathrm{Re}(c_n); \qquad b_n = -2\cdot \mathrm{Im}(c_n)$$