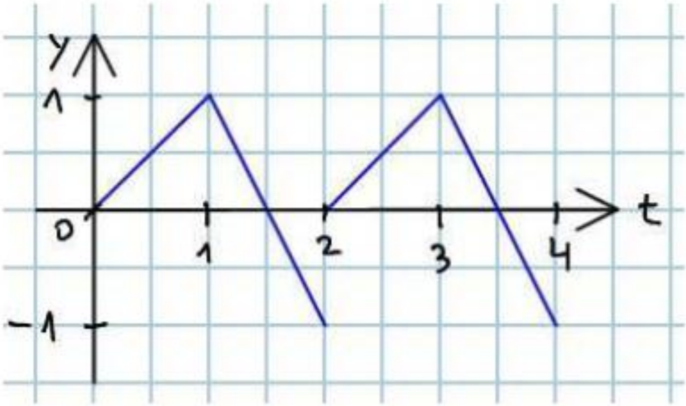
Nr 1. Die periodische Funktion *y(t)* ist gegeben durch einen Teil ihres Schaubildes.



Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe von *y(t)* und hieraus dann auch die reelle Fouriereihe von *y(t)*.

(10 Punkte)

Aus Schaubild:

$$y(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 3-2t & \text{für } 1 \le t < 2 \end{cases} \qquad T = 2 \;;\; \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \quad 1$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 3-2t\,dt \right\} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\left[3t - t^2\right]_1^2 \quad 1$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot 2 - 2^2 - (3\cdot 1 - 1^2)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{4} \quad 1$$

$$c_n = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T y(t)\cdot e^{-j\omega n t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^1 t\cdot e^{-j\pi n t}\,dt + \int_1^2 (3-2t)\,e^{-j\pi n t}\,dt \right) \quad 1$$

$$\left(\text{Aus Formelsammlung: } \int x e^{ax}\,dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{t}{-j\pi n}\cdot e^{-j\pi n t} + \frac{1}{\pi^2 n^2}e^{-j\pi n t} \right]_0^1 + \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{1}{-j\pi n}\cdot e^{-j\pi n t} \right]_1^2 - \left[\frac{t}{-j\pi n}e^{-j\pi n t} + \frac{1}{\pi^2 n^2}e^{-j\pi n t} \right]_1^2 \quad 1$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{-j\pi n}\cdot e^{-j\pi n}} + \frac{1}{\pi^2 n^2}e^{-j\pi n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} \right) + \frac{3}{-2j\pi n}\cdot\left(e^{-2j\pi n} - \cancel{e^{-j\pi n}} \right) - \left(\frac{2}{-j\pi n}e^{-2j\pi n} + \frac{1}{\pi^2 n^2}e^{-2j\pi n} + \cancel{\frac{1}{j\pi n}e^{-j\pi n}} - \frac{1}{\pi^2 n^2}e^{-j\pi n} \right)$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi^2 n^2} + e^{-j\pi n}\left(\frac{3}{2\pi^2 n^2}\right) + e^{-2j\pi n}\cdot\left(\frac{1}{2j\pi n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} \right) = -\frac{1}{2\pi^2 n^2} + e^{-j\pi n}\cdot\left(\frac{3}{2\pi^2 n^2}\right) + e^{-j2\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{j}{2\pi n} \right) \quad 1$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi^2 n^2} + \left(\underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n} - \cancel{j\sin(\pi n)} \right)\cdot\left(\frac{3}{2\pi^2 n^2}\right) + \left(\underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1} - \cancel{j\sin(2\pi n)} \right)\cdot\left(-\frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{j}{2\pi n} \right) \quad 1$$

$$c_n = \frac{3}{2\pi^2 n^2}\cdot\left(-1 + (-1)^n\right) - \frac{j}{2\pi n} \;; \quad 1$$

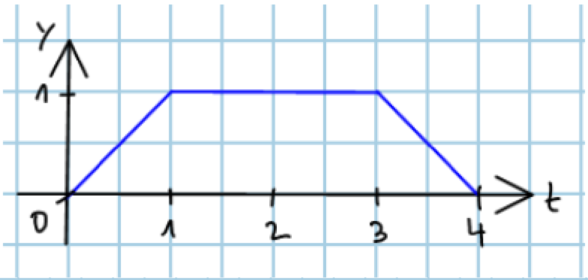
$$a_n = 2\cdot\mathrm{Re}(c_n) = \frac{3}{\pi^2 n^2}\cdot\left(-1 + (-1)^n\right)$$

$$b_n = -2\cdot\mathrm{Im}(c_n) = \frac{1}{\pi n} \quad 1$$

$$a_0 = 2\cdot c_0 = \frac{1}{2} \quad 1$$

10

Nr 2. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Funktion *y(t)*:



$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t < 3 \\ 4-t & 3 \le t \le 4 \end{cases}$$ 1

(8 Punkte)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^1 t\,e^{-j\omega t}\,dt + \int_1^3 e^{-j\omega t}\,dt + \int_3^4 (4-t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$ 1

(Aus Formelsammlung: $\int x e^{ax}\,dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$)

$$F(\omega) = \left[\frac{t}{-j\omega}e^{-j\omega t} + \frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega t}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\right]_1^3 + 4\cdot\left[\frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega t}\right]_3^4 - \left[\frac{t}{-j\omega}e^{-j\omega t} + \frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega t}\right]_3^4$$ 1 1

$$F(\omega) = \frac{j}{\omega}e^{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{j}{\omega}e^{-3j\omega} - \frac{j}{\omega}e^{-j\omega} + \frac{4j}{\omega}e^{-4j\omega} - \frac{4j}{\omega}e^{-3j\omega} - \left(\frac{4j}{\omega}e^{-4j\omega} + \frac{1}{\omega^2}e^{-4j\omega} - \frac{3j}{\omega}e^{-3j\omega} - \frac{1}{\omega^2}e^{-3j\omega}\right)$$ 1 1

$$F(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} + e^{-j\omega}\cdot\left(\cancel{\frac{j}{\omega}} + \frac{1}{\omega^2} - \cancel{\frac{j}{\omega}}\right) + e^{-3j\omega}\cdot\left(\cancel{\frac{j}{\omega}} - \cancel{\frac{4j}{\omega}} + \cancel{\frac{3j}{\omega}} + \frac{1}{\omega^2}\right) + e^{-4j\omega}\cdot\left(\cancel{\frac{4j}{\omega}} - \cancel{\frac{4j}{\omega}} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$ 1

$$\Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\omega^2}\cdot\left(e^{-j\omega} + e^{-3j\omega} - e^{-4j\omega} - 1\right)$$ 1

8

Nr 3. Lösen Sie die folgende Differenzialgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y'' + 6\cdot y' + 8\cdot y = 2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y'(0) = 1$$

Transformieren Sie die DGL hierzu, lösen Sie die entstandene quadratische Gleichung und bilden Sie die Rücktransformation mit der Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation.

(6 Punkte)

$$y'' + 6\cdot y' + 8\cdot y = 2 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 1$$

$$p^2 Y(p) - p\cdot\cancel{y(0)} - \underbrace{y'(0)}_{=1} + 6\cdot(p\cdot Y(p) - \cancel{y(0)}) + 8\cdot Y(p) = \frac{2}{p}$$ 1

$$p^2\cdot Y(p) - 1 + 6pY(p) + 8Y(p) = \frac{2}{p} \qquad |+1$$

$$Y(p)\cdot(p^2 + 6p + 8) = \frac{2+p}{p}$$ 1

6

$$Y(p) = \frac{\cancel{p+2}}{p\cdot\cancel{(p+2)}\cdot(p+4)} = \frac{1}{p\cdot(p+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4}$$ 1

$$1 = A\cdot(p+4) + B\cdot p$$ 1

$p=0$: $1 = 4A \Leftrightarrow A = 1/4$

$p=-4$: $1 = -4B \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4}$

$$Y(p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+4} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot e^{-4t}$$ 1 1

Nr 4. Ermitteln Sie die Glieder der zur gegebenen z-Transformierten $F_z(z) = \frac{z^2+2\cdot z+2}{z^3+z^2-2\cdot z}$ gehörenden Zahlenfolge f_n.

(6 Punkte)

$$F_z(z) = \frac{z^2+2z+2}{z^3+z^2-2z} = \frac{z^2+2z+2}{z(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-1} \qquad 1$$

$$z^2+2z+2 = A\cdot(z+2)\cdot(z-1) + Bz\cdot(z-1) + Cz\cdot(z+2) \qquad 1$$

$$\left.\begin{array}{llll} z=0: & 2 = -2A & \Leftrightarrow & A=-1 \\ z=1: & 5 = 3C & \Leftrightarrow & C = \frac{5}{3} \quad 1 \\ z=-2: & 2 = 6B & \Leftrightarrow & B = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \quad F_z(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{z-1} \qquad 1$$

6

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$f_n = -\delta_{n,1} + \frac{1}{3}\cdot\sigma(n-1)\cdot(-2)^{n-1} + \frac{5}{3}\cdot\sigma(n-1)\cdot 1^{n-1} \qquad 1$$

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n=0 \\ -1+\frac{1}{3}+\frac{5}{3} = 1 & \text{für } n=1 \\ \frac{5}{3}+\frac{1}{3}\cdot(-2)^{n-1} & \text{für } n>1 \end{cases} \qquad 1$$

Klausur Mathe 3 – Teil Numerik – SS 2010

Nr. 1 Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 62 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 30 \\ 124 \\ 241 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A und lösen Sie damit in zwei Schritten das LGS $Ax = b$ nach x auf.

8 Punkte

$i=1$: $S = a_{11} = 9$; $r_{11} = \sqrt{S} = 3$

$j=2$: $r_{12} = \frac{1}{3} \cdot (a_{12}) = 2$ 1

$j=3$: $r_{13} = \frac{1}{3} \cdot (a_{13}) = 1$

$i=2$: $S = a_{22} - (r_{12})^2 = 20 - 2^2 = 16$; $r_{22} = \sqrt{S} = 4$ 1

$j=3$: $r_{23} = \frac{1}{4} \cdot (a_{23} - r_{12} \cdot r_{13}) = \frac{1}{4} \cdot (26 - 2 \cdot 1) = 6$

$i=3$: $S = a_{33} - ((r_{13})^2 + (r_{23})^2) = 62 - (1^2 + 6^2) = 25$; $r_{33} = 5$ 1

$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 1

$Ax = b$ $\qquad R^T \cdot \underbrace{(R \cdot x)}_{y} = b$

$R^T \cdot y = b \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 30 \\ 124 \\ 241 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot y_1 = 30 \iff y_1 = 10 \\ 2 \cdot 10 + 4 \cdot y_2 = 124 \iff y_2 = 26 \quad 1 \\ 10 + 6 \cdot 26 + 5 \cdot y_3 = 241 \iff y_3 = 15 \end{array}\right\} y = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow R \cdot x = y$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix}$ 1

$5 \cdot x_3 = 15 \iff x_3 = 3$

$4 \cdot x_2 + 6 \cdot 3 = 26 \iff x_2 = 2$

$3 \cdot x_1 + 2 \cdot 2 + 3 = 10 \iff x_1 = 1$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1

8

Nr. 2 Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ für das LGS $Ax = b$.

Berechnen Sie den relativen und den absoluten Fehler von x für $\left\|b - \tilde{b}\right\|_\infty \leq 0,1$.

6 Punkte

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

abs. Fehler: $\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|b - \tilde{b}\|_\infty$

$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq 0,8 \cdot 0,1$

$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq 0,08$

6

rel. Fehler: $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|A_\infty\| \dfrac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

$'' \leq 0,8 \cdot 5 \cdot \dfrac{0,1}{7}$

$'' \leq 0,05714$

Nr. 3 Gegeben sind folgen vier Punkte: $P(1|0)$, $Q(2|10)$, $R(3|5)$ und $S(4|20)$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Newton'schen Interpolation ein Polynom ~~vierten~~ dritten Grades, das durch alle vier Punkte verläuft.

b) Berechen Sie mit Hilfe der linearen Regression eine Ausgleichsgerade, die möglichst genau durch diese vier Punkte verläuft.

10 Punkte

a)

x_i	y_i			
$x_0 = 1$	$0 = a_0$			
		$10 = a_1$		
$x_1 = 2$	10		$-\frac{15}{2} = a_2$	
		-5		$\frac{35}{6} = a_3$
$x_2 = 3$	5		10	
		15		
$x_3 = 4$	20			

allgemein: $p(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1) + a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$p(x) = 0 + 10 \cdot (x-1) - \frac{15}{2} \cdot (x-1) \cdot (x-2) + \frac{35}{6} \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$

$p(x) = 10x - 10 - \frac{15}{2} \cdot (x^2 - 3x + 2) + \frac{35}{6} \cdot (x^2 - 3x + 2) \cdot (x - 3)$

$p(x) = 10x - 10 - \frac{15}{2} x^2 + \frac{45}{2} x - 15 + \frac{35}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6)$

$p(x) = -\frac{15}{2} x^2 + \frac{65}{2} x - 25 + \frac{35}{6} x^3 - 35x^2 + \frac{385}{6} x - 35$

$$p(x) = \frac{35}{6} x^3 - \frac{85}{2} x^2 + \frac{230}{3} \cdot x - 60$$

b) $\begin{pmatrix} \sum (x_i)^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i \cdot y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$ liefert $y = ax + b$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 \\ 35 \end{pmatrix} \quad \cdot (-3)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 10 \\ 10 & 4 & 35 \end{array}\right) \Rightarrow$ $b = -5$

$10a + 4 \cdot (-5) = 35$

$a = 5,5$

$y = 5,5x - 5$

10

Nr. 4 Das Integral $\int_0^6 \sqrt{x+2}\,dx$ soll näherungsweise berechnet werden.

Unterteilen Sie hierfür das Intervall in 4 Teile und berechnen Sie die Näherungswerte mit der Rechteckregel und der Trapezregel.

6 Punkte

$n=4$; $a=0$; $b=6$ $\Rightarrow$ $h=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ 1 ; $x_i = i\cdot\frac{3}{2}$ 1 ; $f(x)=\sqrt{x+2}$

$\Rightarrow Rf\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\sum_{i=0}^{3} f\left(\frac{3}{4}+i\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{9}{4}\right)+f\left(\frac{15}{4}\right)+f\left(\frac{21}{4}\right)\right)$ 1

6

$Rf\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{11}{4}}+\sqrt{\frac{17}{4}}+\sqrt{\frac{23}{4}}+\sqrt{\frac{29}{4}}\right) \approx 13{,}2155$ 1

$\Rightarrow Tf\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(f(0)+f(6)\right)+\sum_{i=1}^{3} f\left(i\cdot\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)+\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{10}{2}}+\sqrt{\frac{13}{2}}\right) \approx 13{,}1666$ 1 1