Nachfolgend Klausuraufgaben mit beispielhaften Ergebnissen (ohne Gewähr).
Bitte beachten Sie, dass Punkte, Klausurzeit und Hilfsmittel unterschiedlich waren.

1. Aufgabe

Gegeben ist die periodische Funktion: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ 0 & \text{für } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Wie lautet ihre Fourier-Reihenentwicklung? Berechnen Sie a_0, a_k und b_k und geben die Reihenentwicklung explizit bis k=1 (einschließlich) an.

$$a_o = \frac{\pi}{4} \quad a_k = \frac{1}{\pi k^2}(-1)^k - \frac{1}{\pi k^2} \quad b_k = \frac{1}{k}\cos(-k\pi) = \frac{1}{k}(-1)^k$$

2. Aufgabe

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

f gerade, b(t) = 0

$F(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi}{2}\omega$ mit Lücke für $\omega = 1$;Nullstellen für $\omega = 3,5,7,...$

3. Aufgabe

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau}t & \text{für } 0 \le x \le \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dabei ergeben sich 3 Terme. Transformieren Sie dieses Ergebnis zurück in den Zeitbereich. Skizzieren Sie die originale Zeitfunktion und die Terme der Rücktransformation.

4. Aufgabe

Ergibt sich aus den Teilfunktionen der Rücktransformation die originale Zeitfunktion? Begründung mittels der Skizze und ganz wenigen Stichworten genügt.

$$F(p) = -\frac{A}{p}e^{-p\tau} - \frac{A}{\tau p^2}e^{-p\tau} + \frac{A}{\tau p^2} \quad \text{Rücktrafo:} \quad f(t) = -A - \frac{A}{\tau}(t-\tau) \quad + \frac{A}{\tau}t$$

5. Aufgabe

Entwickeln Sie folgende Dreiecksfunktion in eine Fourier-Reihe. Geben Sie die Fourier-Koeffizienten möglichst vereinfacht an. Skizzieren Sie diese Koeffizienten als Amplituden in der ‚Frequenzdarstellung'.

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{T}t \text{ für } -0{,}5\,T \le t \le 0 \\ 1 - \frac{2}{T}t \text{ für } 0 \le t \le +0{,}5\,T \end{cases}$$

Tipp: ∫ x cosax dx = x/a sinax + 1/a² cosax

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für } k = 0 \\ \left(\frac{2}{\pi k}\right)^2 \text{ für } k \text{ ungerade} \\ 0 \text{ für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

6. Aufgabe

Berechnen Sie die Fourier-Transformation der unten angegebenen Zeitfunktion ($a > 0$, reell). Splitten Sie das Ergebnis [$1/(a + j\omega)$] in Real- und Imaginärteil auf. Skizzieren Sie den Realteil in der Frequenzdarstellung.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Tipp: $1/(a + j\omega)$ geschickt binomisch erweitern

$$F(\omega) = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

7. Aufgabe

a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte eines verzögerten Rechteckimpulses

b) Skizzieren Sie die Zeitfunktion mit den Variablen.

c) Lassen Sie bei der Laplace-Transformierten dann b gegen unendlich laufen. Wie ‚vereinfacht' sich die Formel? Begründen Sie das Ergebnis anhand der Laplace-Tabellen und führen eine Rücktransformation mit der Korrespondenztabelle durch.

d) Im nächsten Schritt lassen Sie a gegen Null laufen. Gehen Sie dann wie in c) vor.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ A & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{für } t > b \end{cases}$$

a) $F(p) = \frac{A}{p}\left(e^{-ap} - e^{-bp}\right)$ mit $a < b$ und $p > 0$

c) $F(p) = \frac{A}{p}\left(e^{-ap} - e^{-bp}\right) \underbrace{=}_{b \to \infty} \frac{A}{p} e^{-ap}$ $\quad F(p) = A \frac{1}{p} e^{-ap}$

d) $F(p) = A \frac{1}{p}$

8. Aufgabe

Gegeben Sei die mit der Periode T periodische Funktion

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \le t \le \pi \\ +1 & \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion und geben relevante Parameter für die weitere Rechnung an.

b) Berechnen die Fourier-Reihe der Funktion.

$$b_k = \frac{-4}{(2k-1)\pi}$$

c) Schreiben Sie die Reihenentwicklung explizit mit den in Frage kommenden a_k's und b_k's.

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)\,t$$

d) Geben Sie explizit die ersten 3 Glieder der Reihenentwicklung an

$$f(t) = \frac{-4}{\pi}\sin t + \frac{-4}{3\pi}\sin 3t + \frac{-4}{5\pi}\sin 5t = \frac{-4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t\right)$$

9. Aufgabe

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{für } t \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anschließend geben Sie bitte den Realteil explizit an. Wie lautet der Wert des Realteils für $\omega = 0$ und der Grenzwert für $\omega \to \infty$? Skizzieren Sie dann den Realteil.

Tipp: Nenner mittels binomischer Formeln reell machen durch Erweitern.

$$F(\omega) = \frac{1}{\lambda + j\omega}$$

10. Aufgabe

a) Gegeben sei ein RLC-Serienschwingkreis. Zum Zeitpunkt t = 0 sei Spannung und Strom in der gesamten Schaltung Null. Dann wird ein deltaförmiger Spannungspuls angelegt. Bestimmen Sie die Funktion, die das Zeitverhalten des Stromes mittels Bildspannungen.

Tipps: - Führen Sie ggf. Abkürzungen für längere Ausdrücke mit R, L und C ein
- Nenner auf Hauptnenner bringen
- Nenner für binomische Formel erweitern
- Zähler erweitern, so daß Verschiebungssatz angewandt werden kann
- Dann auf 2 Brüchen aufteilen, einen multiplikativ erweitern, so daß Rücktransformation mit Korrespondenztabelle einfach wird

Bildspannungen: $R\,I(p) + L\,p\,I(p) + \frac{1}{C\,p} I(p) = U_0$ $\quad I(p) = \frac{U_0}{L} \frac{p}{p^2 + x^2} - \frac{U_0\,y}{Lx} \frac{x}{p^2 + x^2}$

Rücktrafo: $f(t) = \frac{U_0}{L} e^{-a\,t} \left(\cos xt - \frac{y}{x} \sin xt \right)$

11. Aufgabe

Lösen Sie die DGL $\ddot{x} + \omega_o^2\, x = \delta(t)$ mit $x(0+) = 1$ und $\dot{x}(0+) = 0$ mit Hilfe der LaPlace-Transformation. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 8.

Tipp: Vor Rücktransformation auf 2 Brüche aufsplitten.

F(p) $\quad \frac{p}{p^2 + \omega_o^2} + \frac{1}{\omega_0} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_o^2}$ $\qquad f(t) = \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$

12. Aufgabe

Berechnen Sie die Fourier-Reihe folgender Funktion mit der Periodendauer $T = \pi$:

$f(t) = \cos(t)$ (d.h. für $0 \le t \le \pi$)

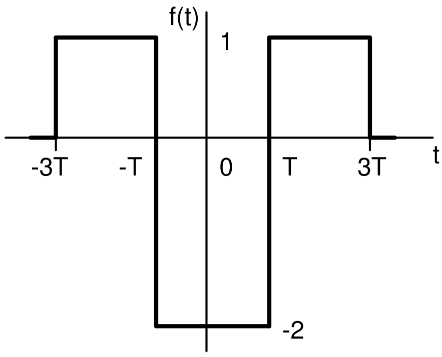
- Skizzieren Sie als Erstes die Funktion.
- Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten.
- Geben Sie das Ergebnis als Fourier-Reihe mit Summenzeichen an.
- Geben Sie das explizite Ergebnis für die ersten beiden Glieder an.

Aufpassen bzgl. Symmetrie, hier ist a_k=0 der richtige Ansatz!

$$b_k = \frac{8}{\pi} \frac{k}{(2k+1)(2k-1)} \qquad f(t) = \frac{8}{3\pi}\sin 2t + \frac{16}{15\pi}\sin 4t$$

13. Aufgabe

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der nebenstehend skizzierten Funktion.



- Skizzieren Sie das Frequenzspektrum.
- Wie unterscheidet sich das Ergebnis von dem Fall bei dem im Intervall -T … +T die Funktion Null statt ‚-2' ist?

Tipp: Berücksichtigen Sie die Symmetrieeigenschaften der Sinusfunktion.

$$F(\omega) = -\frac{8}{\omega}\sin^3(\omega T)$$

- Wie unterscheidet sich das Ergebnis von dem Fall bei dem im Intervall -T…+T die Funktion Null statt ‚-2' ist? DC-Anteil $F(\omega) = \frac{4}{\omega}\{\cos 2\omega T \sin \omega T\}$

14. Aufgabe

1. Lösen Sie die folgende DGL mit Hilfe der LaPlace-Transformation:
   $\ddot{x} + \omega_o^2\, x = \sin(\omega t)$ mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$

$F(p) = \omega \,/\, (p^2 + \omega^2)\ (p^2 + \omega_o)$ $\qquad f(t) = \dfrac{\omega \sin \omega_o t - \omega_o \sin \omega t}{\omega_o (\omega^2 - \omega_0^2)}$

a) Was für ein System beschreibt diese DGL?

Ungedämpftes schwingungsfähiges System mit externer Sinusanregung

b) Was passiert für $\omega_o = \omega$? Resonanzkatastrophe

c) Warum tritt der Fall b) nicht in der Praxis auf? Dämpfung

15. Aufgabe

Gegeben Sei die mit der Periode T periodische Funktion

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \le t \le \pi \\ +1 & \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion und geben relevante Parameter für die weitere Rechnung an.

b) Berechnen die Fourier-Reihe der Funktion.

$$b_k = \frac{-4}{(2k-1)\pi}$$

c) Schreiben Sie die Reihenentwicklung explizit mit den in Frage kommenden a_k's und b_k's.

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)\pi}\ \sin(2k-1)\,t$$

d) Geben Sie explizit die ersten 3 Glieder der Reihenentwicklung an

$$f(t) = \frac{-4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t\right)$$

16. Aufgabe

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anschließend geben Sie bitte den Realteil explizit an. Wie lautet der Wert des Realteils für $\omega = 0$ und der Grenzwert für $\omega \to \infty$? Skizzieren Sie dann den Realteil.

Tipp: Nenner mittels binomischer Formeln reell machen durch Erweitern.

Realteil : $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$ Wert für $\omega = 0$: $\frac{1}{\lambda}$ Grenzwert für $\omega \to \infty$: 0

17. Aufgabe

a) Gegeben sei ein RLC-Serienschwingkreis. Zum Zeitpunkt t = 0 sei Spannung und Strom in der gesamten Schaltung Null. Dann wird ein deltaförmiger Spannungspuls angelegt. Bestimmen Sie die Funktion, die das Zeitverhalten des Stromes mittels Bildspannungen.

Tipps: - Führen Sie ggf. Abkürzungen für längere Ausdrücke mit R, L und C ein
- Nenner auf Hauptnenner bringen
- Nenner für binomische Formel erweitern
- Zähler erweitern, so daß Verschiebungssatz angewandt werden kann
- Dann auf 2 Brüchen aufteilen, einen multiplikativ erweitern, so daß Rücktransformation mit Korrespondenztabelle einfach wird

$U_R + U_L + U_C = U_o$ (delta-Fkt) LT mit Bildspannungen: $R\, I(p) + L\, p\, I(p) + \frac{1}{C\, p} I(p) = U_0$

$$I(p) = \frac{U_0}{L} \frac{p}{p^2 + x^2} - \frac{U_0\, y}{Lx} \frac{x}{p^2 + x^2} \qquad f(t) = \frac{U_0}{L} e^{-at} \left(\cos xt - \frac{y}{x} \sin xt \right)$$

18. Aufgabe

Lösen Sie die DGL $\ddot{x} + \omega_o^2\, x = \delta(t)$ mit $x(0+) = 1$ und $\dot{x}(0+) = 0$ mit Hilfe der LaPlace-Transformation. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 8.

Tipp: Vor Rücktransformation auf 2 Brüche aufsplitten.

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_o^2} + \frac{1}{\omega_0}\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_o^2} \qquad f(t) = \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Vergleich 8 und 9: Ergebnis ähnlich, 9: keine Dämpfung, deshalb fehlt e-Fkt