

---

# **Grundlagen der Signalverarbeitung 2 (Signale & Systeme)**

Prof. Dr.-Ing. Norbert Höptner

Fakultät Technik  
Bereich Informationstechnik (IT)  
Hochschule Pforzheim

Stand: 29.06.2013

## Inhalt

1	Dirac-Impuls .....	4
1.1	Definition .....	4
1.2	Eigenschaften .....	5
1.2.1	Symmetrie .....	5
1.2.2	Ausblendeigenschaft .....	5
1.2.3	Ableitung Sprungfunktion .....	6
1.2.4	Mathematische Funktion .....	6
2	Systemeigenschaften .....	7
2.1	Linearität .....	7
2.1.1	Superpositionsprinzip.....	7
2.1.2	Homogenität.....	8
2.2	Zeitinvarianz .....	8
2.3	Stabilität .....	9
2.4	Kausalität .....	10
3	Systemreaktion.....	11
3.1	Systemreaktion am Beispiel Tiefpass .....	11
3.2	Gewichtung .....	13
3.3	Faltung.....	14
3.4	Eigenfunktion und Frequenzgang.....	18
4	Signale .....	21
4.1	Elementarsignale .....	21
4.1.1	Komplexe Exponentialfunktion .....	21
4.1.2	Sinusförmige Funktion.....	22
4.1.3	Signum-Funktion .....	23
4.1.4	Sprungfunktion .....	24
4.1.5	Rechteckfunktion.....	25
4.1.6	Rampe.....	26
4.1.7	Dreieck-Impuls.....	27
4.2	Gauß-Impuls .....	27
4.2.1	Kausale Signale .....	28
4.3	Signal-Baukasten .....	29
5	Signaleigenschaften & Deterministische Signale .....	31
5.1	Signaleigenschaften.....	31
5.1.1	Gerade und ungerade Signale .....	31

5.1.2	Systemeigenschaften.....	33
5.2	Leistung und Energie von Signalen.....	34
5.3	Parsevalsches Theorem .....	35
5.4	Korrelationsfunktionen .....	38
5.5	Wiener-Khintchine-Theorem.....	42
5.6	Wiener-Lee-Theorem .....	43
5.7	Zusammenfassung.....	44
5.8	Beispiele .....	45
5.8.1	Gauß-Impuls .....	45
5.8.2	Korrelationsmesstechnik.....	46
5.8.3	Korrelation von Leistungssignalen.....	47
5.8.4	Si-Funktion.....	48
6	Stochastische Signale .....	49
6.1	Stochastischer Prozess .....	49
6.2	Stationarität und Ergodizität .....	51
6.3	Leistungsdichtespektrum .....	52
6.4	Weißes Rauschen .....	52
6.5	Übertragung durch ein LTI-System.....	53
7	Abbildungsverzeichnis.....	57

# 1 Dirac-Impuls

## 1.1 Definition

Für die Beschreibung von Impulsen, die nur zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  auftreten (lokalisierte Impulse) benötigt man die sogenannte Diracsche  $\delta$  – Funktion (auch Dirac-Stoß oder Impulsfunktion genannt). Dies ist keine übliche Funktion sondern eine Distribution („verallgemeinerte Funktion“). (vgl. Papula, Lothar: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2, Vieweg+Teubner, 2009).

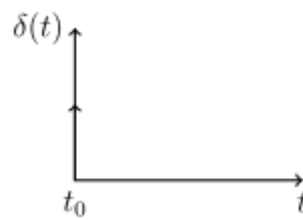


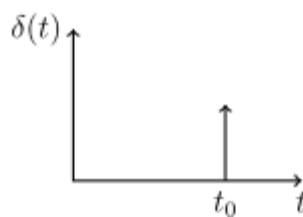
Abbildung 1.1: Dirac-Impuls

Indem man die Breite  $\epsilon$  eines Rechtecksignals gegen Null gehen lässt und die Fläche gleich Eins lässt, kann man den Dirac herleiten. Der Dirac ist der Grenzfall eines Rechtecksignals.

Die Fläche des Dirac beträgt immer Eins. Er ist unendlich schmal und unendlich hoch.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad 1.1$$

Der Dirac lässt sich um  $t_0$  verschieben.

Abbildung 1.2: Dirac-Impuls um  $t_0$  verschoben

Der Wert zum Zeitpunkt  $t_0$  beträgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = x(t_0). \quad 1.2$$

## 1.2 Eigenschaften

### 1.2.1 Symmetrie

Der Dirac-Impuls ist symmetrisch zur y-Achse.

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad 1.3$$

### 1.2.2 Ausblendeigenschaft

Bei der Multiplikation von einer Funktion mit dem Dirac-Impuls ergibt das Produkt zu jedem Zeitpunkt Null. Nur bei  $t = 0$  ergibt sich ein Wert, nämlich  $\infty$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt \quad 1.4$$

Die Funktion  $x(t)$  hat demnach nur bei  $t = 0$  einen Einfluss auf das Produkt, sonst ist das Produkt immer Null. Es muss nicht mehr von  $-\infty$  bis  $+\infty$  integriert werden, man betrachtet nur noch den Funktionswert zum Zeitpunkt  $t = t_0$ . Somit wird aus der Funktion eine Konstante und kann vor das Integral geschrieben werden.

$$x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = x(t_0) \cdot 1 = x(t_0) \quad 1.5$$

Diese Eigenschaft wird als Ausblendungseigenschaft des Dirac-Impuls bezeichnet.

$x(t_0)$  lautet dann Gewichtung und ist mathematisch nicht definiert. Erst durch die Integration kommt die Gewichtung am Ausgang zum Tragen und entspricht einer Verstärkung/Dämpfung des Ausgangssignals.

Anschaulich kann man sich das folgendermaßen vorstellen:

Man schneidet in ein leeres Blatt Papier einen sehr dünnen Schlitz, welcher den Dirac-Impuls symbolisiert. Dieses Blatt hält man nun vor die Funktion und sieht nur noch den Funktionswert in dem Schlitz. Auf den „realen“ Dirac-Impuls übertragen ist das dann ein eindeutiger Wert zum Zeitpunkt  $t = t_0$ .

### 1.2.3 Ableitung Sprungfunktion

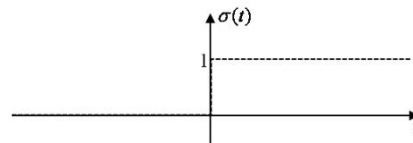


Abbildung 1.3: Sprungfunktion

Das Integral über den Dirac  $\delta(t)$  ergibt Eins. Es ergibt sich somit keine Wertänderung und der Wert der Funktion bleibt konstant auf Eins. Dies entspricht genau der Sprungfunktion. Umgekehrt ergibt sich dann:

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t) \quad 1.6$$

$$\frac{d}{dt}\{\hat{u} \cdot \sigma(t)\} = \hat{u} \cdot \delta(t) \quad 1.7$$

### 1.2.4 Mathematische Funktion

Um auf die Beschreibung einer Funktion zu kommen, wird über die komplette Zeit, d.h. an jeder Stelle, mit dem Dirac-Impuls integriert.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - \tau) dt \right] d\tau \quad 1.8$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \frac{d(\sigma(t-\tau))}{dt} dt \right] d\tau \quad 1.9$$

**Beispiel 1.1:** Berechnen Sie das gegebene Integral.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - a)^5 \cdot \delta(t + a) dt$$

Wegen der Ausblendeigenschaft des Dirac ist nur der Zeitpunkt  $t = -a$  relevant. Setzt man dies ein, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - a)^5 \cdot \delta(t + a) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-a - a)^5 \cdot \delta(0) dt = (-2a)^5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0) dt = -32a^5.$$

## 2 Systemeigenschaften

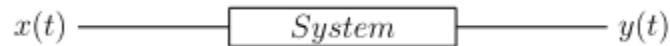


Abbildung 2.1: Allgemeine Darstellung eines Systems

Abbildung 2.1 zeigt die allgemeine Darstellung eines Systems. Ein System ist eine Anordnung, die Eingangssignale auf Ausgangssignale verändert oder unverändert abbildet.

Auf ein System wird das Eingangssignal  $x(t)$  gegeben und im System mit der Funktion  $f\{x(t)\}$  bzw. der Transformation  $T\{x(t)\}$  verändert. Als Ausgangssignal erhält man  $y(t)$ .

$$y(t) = f\{x(t)\} = T\{x(t)\} \quad 2.1$$

Ein Beispiel dafür wäre ein idealer Verstärker mit  $y(t) = v \cdot x(t)$ .

### 2.1 Linearität

#### 2.1.1 Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip besagt

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y(t) = T\{x(t)\} = T\{x_1(t) + x_2(t)\}. \quad 2.2$$

Im Fall der Linearität gilt

$$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t). \quad 2.3$$

Es ist egal, ob man die beiden Eingangssignale  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  erst addiert und dann durch das System führt, oder sie einzeln durch das System führt und die Ausgangssignale  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  anschließend addiert. Es kommt jeweils das Gleiche dabei heraus.

Diese Bedingung ist hier z.B. nicht erfüllt:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t)^2 \\ y_2(t) &= x_2(t)^2 \end{aligned}$$

### 2.1.2 Homogenität

Wird die Summe der Eingangssignale mit einer Konstanten  $k$  multipliziert und durch das System geführt (transformiert), so muss als Antwort das gleiche herauskommen, wie wenn man nur die Eingangssignale transformiert und danach dann mit der Konstanten  $k$  multipliziert und die Summe bildet.

$$T\{\sum_{n=1}^N k_n \cdot x_n(t)\} = \sum_{n=1}^N k_n \cdot T\{x_n(t)\} \quad 2.4$$

Ist ein System linear, so gilt sowohl das Superpositionsprinzip als auch die Homogenität.

## 2.2 Zeitinvarianz

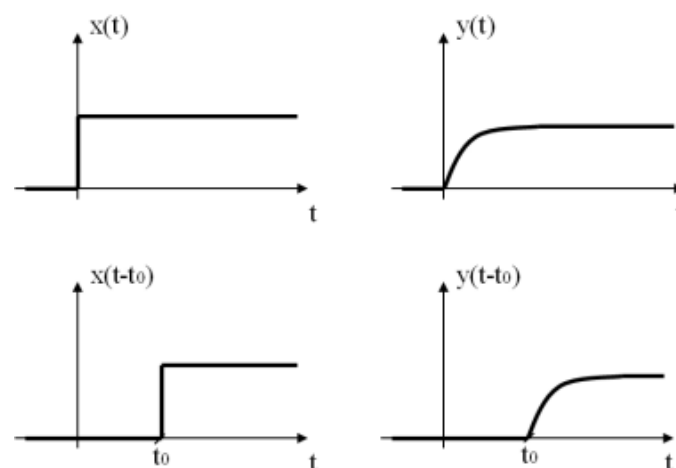


Abbildung 2.2: Sprungfunktion und Antwort mit Zeitverschiebung

Ein System ist zeitinvariant, wenn ein verzögertes Eingangssignal ein verzögertes Ausgangssignal zur Folge hat.

$$x(t - t_0) = y(t - t_0) \quad 2.5$$

Systeme die die oben genannten Eigenschaften Linearität und Zeitinvarianz erfüllen bezeichnet man als LTI-Systeme<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Linear Time Invariant System = lineares zeitunabhängiges System



**Beispiel 2.1:** Ein System mit dem Eingangssignal  $x_1(t) = \cos(\omega t)$  antwortet mit dem Ausgangssignal  $y_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$ . Mit welchem Ausgangssignal  $y_2(t)$  antwortet das System, wenn es mit dem Eingangssignal  $x_2(t) = \sin(\omega t)$  erregt wird?

$$x_2(t) = \sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\omega\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)\right] = x_1\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)$$

$$y_2(t) = y_1\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{1}{2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

## 2.3 Stabilität

Damit ein System stabil ist, muss der Betrag des Eingangssignals kleiner oder gleich der Amplitude  $M$  eines Signals sein. Die Amplitude muss wiederum kleiner  $\infty$  sein.

$$|x(t)| \leq M < \infty \quad 2.6$$

Ist diese Bedingung erfüllt so muss auch folgende Bedingung erfüllt sein:

$$|y(t)| \leq N < \infty \quad 2.7$$

Ist der Betrag des Ausgangssignals auch kleiner oder gleich der Amplitude  $N$  und diese wiederum kleiner  $\infty$ , so liegt ein stabiles System vor. Dies wird als BIBO<sup>2</sup>-Stabilität bezeichnet.

Ein analoges System ist stabil, wenn alle Polstellen in der linken  $s$ -Ebene liegen. Ein digitales System ist stabil, wenn alle Polstellen im Einheitskreis liegen (Vergleich Vorlesung Integraltransformation).

### Beispiel 2.2:

$$x(t) = \sigma(t)$$

$$y_1(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{immer stabil}$$

$$y_1(t) = 1 - e^{+t} \quad \text{nicht stabil, geht gegen } -\infty$$

---

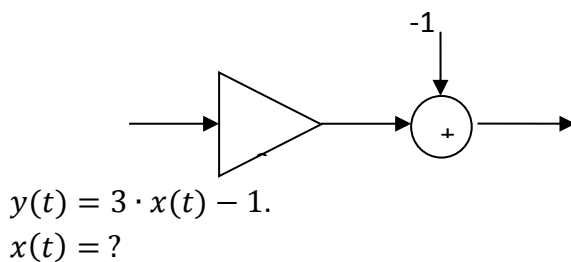
<sup>2</sup> Bounded Input Bounded Output

## 2.4 Kausalität

Wirkung nie vor Ursache. Das Ausgangssignal ändert sich erst wenn das Eingangssignal bei  $t=0$  vorliegt.

### Beispiel 2.3: Systemeigenschaften

Gegeben ist das folgende System



#### a) Linearität

$$y_1(t) = 3 \cdot x_1(t) - 1$$

$$y_2(t) = 3 \cdot x_2(t) - 1$$

$$y_3(t) = 3 \cdot (x_1(t) + x_2(t)) - 1$$

$$y_1(t) + y_2(t) = 3 \cdot x_1(t) - 1 + 3 \cdot x_2(t) - 1 = 3 \cdot (x_1(t) + x_2(t)) - 2$$

Superpositionsprinzip gilt nicht, System ist nicht linear

#### b) Zeitinvarianz

$$\tilde{x}(t) = x(t - t_0) \rightarrow \tilde{y}(t) = 3 \cdot x \cdot (t - t_0) - 1$$

System ist zeitvariant

#### c) Kausalität

Keine Zeitverschiebung  $\rightarrow$  System ist kausal

#### d) Stabilität

System ist stabil, da die Verstärkung von 3 und die Subtraktion von -1 nicht zu einem unendlichem Eingangssignal führt.

Kein LTI-System, da nicht linear.

### 3 Systemreaktion

Für LTI-Systeme soll nun eine mathematische Vorgehensweise entwickelt werden, um aus einem Eingangssignal das Ausgangssignal zu berechnen.

Als theoretisches Testsignal wird der Dirac-Impuls verwendet. Die beiden Eigenschaften, dass alle Frequenzen am Ausgang eines Systems enthalten sind und dass dieser Impuls eine konstante Amplitude von Eins über das komplette Frequenzspektrum besitzt, sind für den Test eines Systems ideal.

$$\delta(t) \leftrightarrow x(f) = 1 \quad 3.1$$

Da jedoch in der Praxis keine Dirac-Impulse vorkommen, müssen andere Möglichkeiten zur Systembestimmung verwendet werden.

Die erste Möglichkeit besteht darin, ein Sinussignal mit fester Amplitude, Phase und Frequenz auf ein System zu geben und dann am Ausgang die Reaktion des Systems zu bestimmen. Dies muss für alle Frequenzen durchgeführt werden und ist somit aufwändig.

Wesentlich schneller und einfacher ist es, wenn man am Eingang die Summe aller Frequenzen einspeist und am Ausgang dann die Reaktion erhält.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t), \text{ mit } x_n(t) = -a_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \quad 3.2$$

#### 3.1 Systemreaktion am Beispiel Tiefpass

Für einen RC-Tiefpass soll das Ausgangssignal  $y(t)$  bestimmt werden.

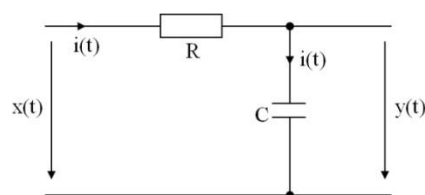


Abbildung 3.1: RC-Tiefpass

Um das Ausgangssignal zu bestimmen muss zuerst eine Differentialgleichung aufgestellt werden. Nach den Kirchhoffschen Regeln ergibt sich für das Eingangssignal

$$x(t) = i(t) \cdot R + y(t). \quad 3.3$$

Der Strom im Kondensator beträgt

$$i(t) = C \cdot \frac{dy}{dt}. \quad 3.4$$

In Gleichung 3.3 eingesetzt ergibt dies

$$x(t) = R \cdot C \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = R \cdot C \cdot \dot{y}(t) + y(t). \quad 3.5$$

Dies Gleichung sortiert nach  $y(t)$  und  $x(t)$  ergibt

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot y(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot x(t). \quad 3.6$$

$R \cdot C$  ist die Zeitkonstante und lässt sich durch  $\tau$  ersetzen:

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{\tau} \cdot y(t) = \frac{1}{\tau} \cdot x(t) \quad 3.7$$

Diese DGL lässt sich mit dem Verfahren „Variation der Konstanten“ lösen.

$$y(t) = e^{-\int \frac{1}{\tau} dt} \cdot \left\{ \int \frac{1}{\tau} \cdot x(t) \cdot e^{-\int \frac{1}{\tau} dt} dt + c \right\} \quad 3.8$$

$$y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left\{ \frac{1}{\tau} \cdot \int x(t) \cdot e^{-\int \frac{1}{\tau} dt} dt + c \right\} \quad 3.9$$

Da wir davon ausgehen, dass das System kausal ist, kann für den Anfangswert  $y(0) = 0$  angenommen werden. Dies gilt für alle  $x(t) = 0$  für  $t \leq 0$ . Hieraus folgt  $c = 0$ .

Gleichung 3.7 schreibt sich dann

$$y(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \int x(t) \cdot e^{-\int \frac{1}{\tau} dt} dt. \quad 3.10$$

Für jedes  $x(t)$  lässt sich nun  $y(t)$  berechnen.

Erregt man das System mit **einem Impuls**  $x(t) = \delta(t)$  und nimmt an das  **$y(t) = h(t)$**  die **Impulsantwort** ist, so erhält man die folgende Gleichung:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \int \delta(t) \cdot e^{-\int \frac{1}{\tau} dt} dt \quad 3.11$$

Durch die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion ergibt sich nur bei  $t = 0$  ein Wert  $\neq 0$ . Der Ausdruck  $e^{-\int \frac{1}{\tau} dt}$  ergibt für  $t = 0$  ebenfalls 1. Die **Übertragungsfunktion** des Systems lautet

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad 3.12$$

## 3.2 Gewichtung

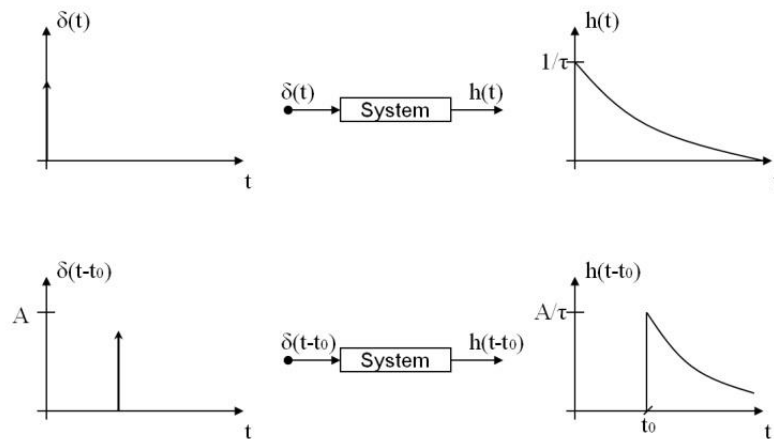


Abbildung 3.2:  $\delta$ -Impuls und Impulsantwort zeitverschoben und gewichtet

Erregt man ein System mit **zwei gewichteten Impulsen**, so ergibt sich am Eingang bzw. Ausgang

$$K_1 \cdot \delta(t - t_1) + K_2 \cdot \delta(t - t_2) = x(t) \quad \xrightarrow{\text{System}} \quad K_1 \cdot h(t - t_1) + K_2 \cdot h(t - t_2) = y(t) \quad 3.13$$

Allgemein gilt

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i \cdot \delta(t - t_i) = x(t) \quad \xrightarrow{\text{System}} \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i \cdot h(t - t_i) = y(t) \quad 3.14$$

Wenn man  $K_i$  infinitesimal klein werden lässt, so ergibt sich ein Grenzübergang und aus der Konstanten  $K_i$  wird eine Funktion  $K(\tau)$ . Aus der Summe wird ein Integral.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad \xrightarrow{\text{System}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = y(t) \quad 3.15$$

Da  $K(\tau)$  kein konstanter Wert mehr ist, sondern eine Funktion, kann dafür  $x(\tau)$  eingesetzt werden.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad \xrightarrow{\text{System}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = y(t) \quad 3.16$$

In Gleichung 3.16 ergibt sich auf der rechten Seite der Faltungssatz.

### 3.3 Faltung

Erregt man ein LTI-System mit der Impulsantwort  $h(t)$  mit einem Eingangssignal  $x(t)$ , so ergibt sich das Ausgangssignal nach Gleichung 3.17.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \hat{=} X(s) \cdot H(s) \quad 3.17$$

Dieses Integral ist das Faltungsintegral.

Da nur kausale Systeme betrachtet werden, reicht die Betrachtung von 0 bis  $+\infty$  aus.

$$\int_0^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad 3.18$$

Die Faltung ist kommutativ.

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad 3.19$$

#### Beispiel 3.1: Rechteck-Erregung auf ein RC-Glied

Ein RC-Glied wird mit einem Rechtecksignal erregt. Gesucht ist das sich ergebende Ausgangssignal.

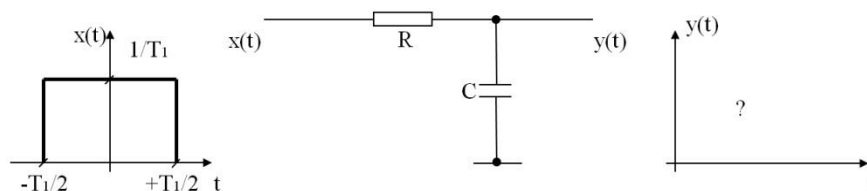


Abbildung 3.3: RC-Tiefpass mit Rechteckeingangssignal

Die Funktion des Eingangssignals lautet

$$x(t) = \frac{1}{T_1} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right).$$

Die Impulsantwort lautet

$$h(t) = \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\frac{t}{T_{RC}}}.$$

Mit Hilfe der Faltung lässt sich das Ausgangssignal  $y(t)$  berechnen.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{1}{T_1} \cdot \text{rect}\left(\frac{1}{T_1}\right) \cdot \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{T_{RC}}} d\tau.$$

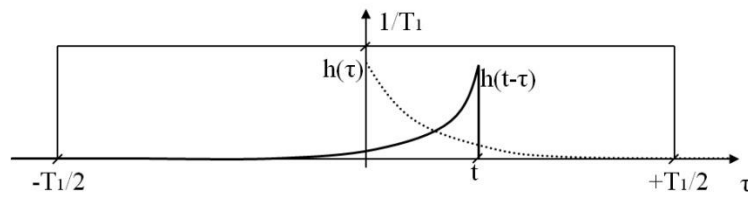


Abbildung 3.4: Graphische Interpretation der Faltung

Folgende drei Fälle sind nun zu beachten:

$$1) \quad t < -\frac{T_1}{2} \quad y(t) = 0$$

$$2) \quad -\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2}$$

$$y(t) = \int_{-\frac{T_1}{2}}^t \frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_{RC}}} d\tau = \left[ \frac{1}{T_1} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_{RC}}} \right]_{-\frac{T_1}{2}}^t = \frac{1}{T_1} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t+\frac{T_1}{2}}{T_{RC}}} \right)$$

$$3) \quad t > \frac{T_1}{2}$$

$$y(t) = \int_{\frac{T_1}{2}}^t \frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_{RC}}} d\tau = \frac{1}{T_1} \cdot \left( e^{-\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_{RC}}} - e^{-\frac{t+\frac{T_1}{2}}{T_{RC}}} \right)$$

$$= \frac{1}{T_1} \cdot \left( e^{-\frac{T_1}{2 \cdot T_{RC}}} - e^{-\frac{T_1}{2 \cdot T_{RC}}} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_{RC}}}$$

Das Ausgangssignal verläuft wie in Abbildung 3.5 dargestellt.

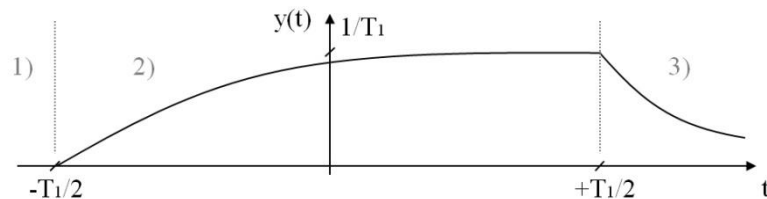


Abbildung 3.5: Verlauf des Ausgangssignales

### Beispiel 3.2: Sprungantwort eines RC-Glieds

Ein RC-Glied wird mit einem Sprung zum Zeitpunkt  $t = 0$  erregt. Gesucht ist die Sprungantwort des RC-Glieds.

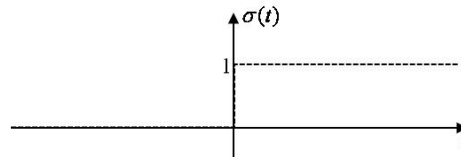


Abbildung 3.6: Sprungfunktion

Die Impulsantwort des RC-Glieds lautet

$$h(t) = \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\frac{t}{T_{RC}}}$$

und die Sprungfunktion lautet

$$x(t) = \sigma(t).$$

Die Sprungfunktion entspricht dem Integral über den Dirac-Impuls.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Erregt man ein System mit einem Impuls, so erhält man am Ausgang die Impulsantwort.

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{System}} h(t)$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \xrightarrow{\text{System}} h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

Setzt man für  $h(\tau)$  die Impulsantwort des RC-Glieds ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\frac{\tau}{T_{RC}}} d\tau \\ &= \frac{1}{T_{RC}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\tau}{T_{RC}}} d\tau \\ &= \left[ \frac{1}{R \cdot C} \cdot (-T_{RC}) \cdot e^{-\frac{\tau}{T_{RC}}} \right]_0^t \\ &= - \left[ e^{-\frac{\tau}{T_{RC}}} - 1 \right] = 1 - e^{-\frac{\tau}{T_{RC}}}. \end{aligned}$$



### Beispiel 3.3: Frequenzgang RC-Glied

Gesucht ist der Frequenzgang eines RC-Glieds.

Um den Frequenzgang zu bestimmen, muss die Impulsantwort mit Hilfe der Fourier-Transformation in den Frequenzbereich transformiert werden.

Die Impulsantwort lautet

$$h(t) = \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\frac{t}{T_{RC}}}.$$

Die Vorschrift der Fourier-Transformation lautet:  $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ .

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{T_{RC}} \cdot e^{-\frac{t}{T_{RC}}} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T_{RC}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{T_{RC}} + j\omega\right)t} dt \\ &= \left[ \frac{-\frac{1}{T_{RC}}}{\frac{1}{T_{RC}} + j\omega} \cdot e^{-\left(\frac{1}{T_{RC}} + j\omega\right)t} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 - \left( -\frac{1}{1 + j\omega T_{RC}} \right) = \frac{1}{1 + j\omega T_{RC}}. \end{aligned}$$

Betragsfrequenz:  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T_{RC})^2}}$

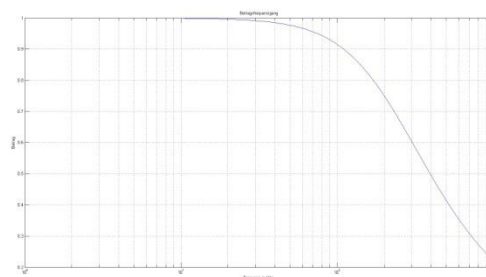


Abbildung 3.7: Betragsfrequenzgang eines Tiefpass

Phasengang:  $\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega T_{RC}}{1} = \tan^{-1} \omega T_{RC}$

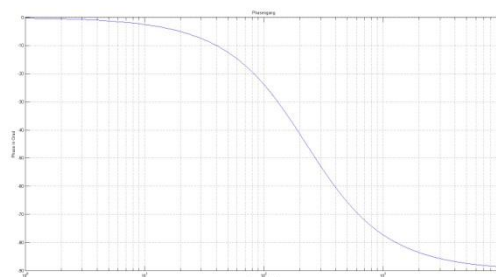


Abbildung 3.8: Phasengang eines Tiefpass

### 3.4 Eigenfunktion und Frequenzgang

Die Eigenfunktion ist eine komplexe Exponentialfunktion:

$$x(t) = \underline{U} \cdot e^{j\omega t} \quad 3.20$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot \underline{U} \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega(-\tau)} d\tau \right] \cdot \underline{U} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad 3.21$$

Da  $x(t)$  kein  $\tau$  enthält ist es gegenüber  $\tau$  eine Konstante und kann deshalb aus dem Integral herausgezogen werden. Als Ergebnis erhält man dann wieder  $x(t)$  mit einer Gewichtung (das Integral).

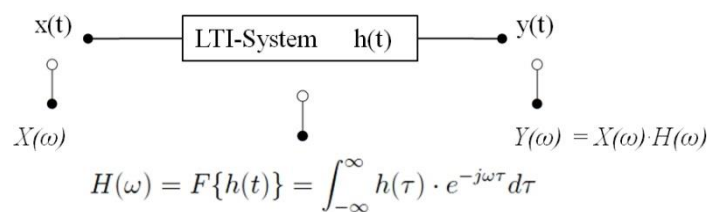


Abbildung 3.9: Allgemeine LTI-Systembeschreibung

Der Betrag von  $|H(\omega)|$  ist der Betragsfrequenzgang und  $\varphi(\omega) = \arg H(\omega)$  ist der Phasengang der Übertragungsfunktion.

Die Funktion  $H(\omega)$  kann sehr einfach direkt aus einem gegebenen Netzwerk heraus bestimmt werden.

#### Beispiel 3.3: Bestimmung der Übertragungsfunktion eines RC-Tiefpass

Für einen RC-Tiefpass soll die Übertragungsfunktion bestimmt werden.

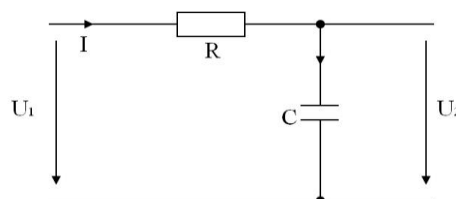


Abbildung 3.10: RC-Tiefpass

$$U_1 = I \cdot R + U_2$$

$$U_2 = \frac{I}{j\omega C} \rightarrow I = j\omega C U_2$$

$$U_1 = (j\omega CR + 1) \cdot U_2$$

$$\frac{U_2}{U_1} = H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

### Beispiel 3.4: Differenzierer

Die Übertragungsfunktion eines Differenzierers lautet

$$H(\omega) = \begin{cases} j\omega T & \text{für } \frac{-1}{T} \leq \omega \leq \frac{1}{T} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Warum handelt es sich hierbei um einen Differenzierer?

a) Betrachtung des Betrags:

$$|H(\omega)| = |j\omega T| = \sqrt{0^2 + \omega^2 T^2} = \omega T$$

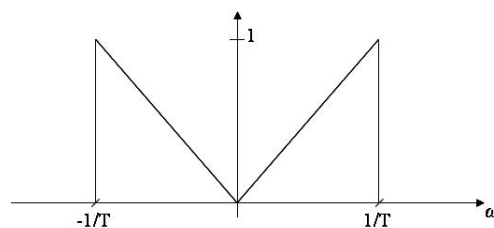


Abbildung 3.11: Betrag der Übertragungsfunktion

b) Betrachtung der Phase

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega T}{0}\right) = \arctan(\pm\infty) = \pm \frac{\pi}{2}$$

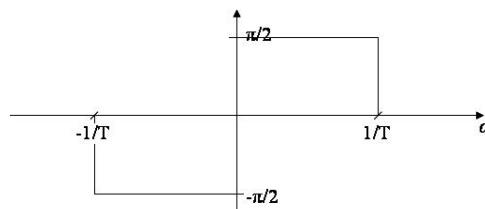


Abbildung 3.12: Phase der Übertragungsfunktion

Aus Abbildung 3.9 ist eine 90°-Phasenschiebung für positive Frequenzen zu erkennen. Für eine

Sinus- bzw. Cosinusfunktion gleicht eine Phasenschiebung um +90° einer Differentiation. Für andere Funktionstypen ist dies also kein Differenzierer. Da jedoch jedes Signal durch Cosinus und Sinusfunktionen dargestellt werden kann, ist in der allgemeinen Signalverarbeitung von einem Differenzierer auszugehen.

Das Problem ist, dass die **Phase immer mit dem Betrag zusammen hängt** und man somit nicht nur eines von beiden verändern kann, ohne das andere ebenfalls zu beeinflussen. Die Eigenschaft des Differenzierens liegt beim Hilbert-Transformator vor.

Als Differenzierer wirken sowohl der Kondensator als auch die Spule. Es wird aber eine bestimmte Beschaltung vorausgesetzt.

$$U_2 = j\omega L \cdot U_1 \rightarrow \frac{U_2}{U_1} = H(\omega) = j\omega L$$

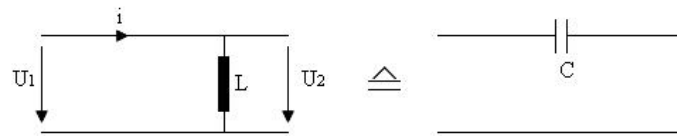


Abbildung 3.13: Beschaltung idealer Bauteile für einen Differenzierer

## 4 Signale

Bei Signalen wird zwischen deterministischen und stochastischen Signalen unterschieden.

Deterministische Signale sind mathematisch exakt beschreibbar, der Wert eines Signals lässt sich zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$  berechnen. Cosinus und Sinus sind Beispiele für deterministische Signale.

Stochastische Signale sind undefiniert und zufällig. Durch Beobachtung des Signals lassen sich Aussagen über den Mittelwert bzw. Erwartungswert des Signals machen. Ein Beispiel für ein stochastisches Signal ist Rauschen.

### 4.1 Elementarsignale

Aus Elementarsignalen können alle anderen Signalformen dargestellt werden.

#### 4.1.1 Komplexe Exponentialfunktion

Die komplexe Exponentialfunktion ist gegeben durch

$$x(t) = A \cdot e^{st}. \quad 4.1$$

$A$  bezeichnet man als Amplitude und den Parameter  $s$  als Dämpfungsfaktor. Zerlegt man den komplexen Exponenten  $s$  in Real- und Imaginärteil

$$s = \sigma + j\omega \quad 4.2$$

erhält man

$$x(t) = \underbrace{A \cdot e^{\sigma t}}_{\text{Einhüllende}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\substack{\text{komplexer} \\ \text{Schwungsanteil}}}. \quad 4.3$$

Das Signal setzt sich aus der Einhüllenden und dem komplexen Schwingungsanteil zusammen. Es wird zwischen drei Fällen unterschieden:

- $\sigma = \Re(s) < 0$  : abklingendes A
- $\sigma = \Re(s) = 0$  : stationäres oder harmonisches A
- $\sigma = \Re(s) > 0$  : aufklingendes A

$$x(t) = A \cdot e^{\sigma t} \cdot [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

$$\Re\{x(t)\} = A \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Im\{x(t)\} = \underbrace{A \cdot e^{\sigma t}}_{\text{Einhüllende}} \cdot \sin(\omega t)$$

#### 4.1.2 Sinusförmige Funktion

Eine sinusförmige Funktion ist gegeben durch

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad 4.4$$

$U_0$  ist die Amplitude,  $\omega_0$  die Kreisfrequenz und  $\varphi_0$  die Phasenverschiebung.

Die Fourier-Transformation dieses Signales ist schwierig. Deswegen wird die Sinusfunktion nach Euler durch die Exponentialfunktion ersetzt, um die Fourier-Transformation zu lösen.

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad 4.5$$

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, folgt

$$u(t) = \frac{U_0}{2j} (e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega_0 t} - e^{-j\varphi_0} \cdot e^{-j\omega_0 t}). \quad 4.6$$

Setzt man

$$\underline{\hat{u}} = \frac{U_0}{j} e^{j\varphi_0} = U_0 \cdot \sin(\varphi_0) - jU_0 \cdot \cos(\varphi_0), \quad 4.7$$

so ergibt sich

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{\hat{u}}{2} e^{-j\omega_0 t}. \quad 4.8$$

Diese Funktion lässt sich leicht in den Frequenzbereich nach Fourier transformieren.

$$U(f) = \frac{\hat{u}}{2} \delta(f - f_0) + \frac{\hat{u}^*}{2} \delta(f + f_0) \quad 4.9$$

Aus dieser Funktion lässt sich das Frequenzspektrum bestimmen.

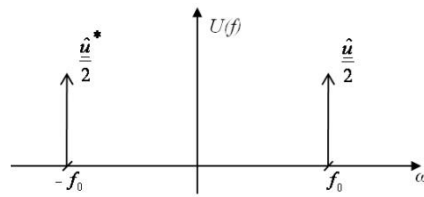


Abbildung 4.1: Frequenzspektrum der Funktion u(t)

Die Phasenverschiebung der Funktion steckt in der Amplitude  $\hat{u}$ . Daraus ergeben sich zwei Fälle für  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0 = 0 \rightarrow \underline{\hat{u}} = -jU_0 = \frac{1}{j}U_0 \quad 4.10$$

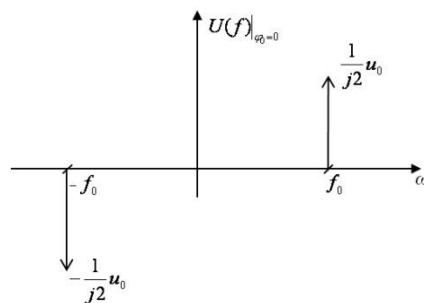


Abbildung 4.2: Frequenzspektrum

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \underline{\hat{u}} = U_0 \quad 4.11$$

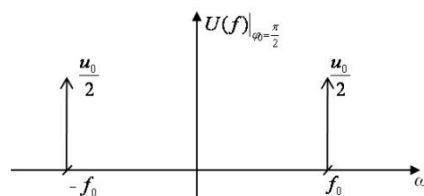


Abbildung 4.3: Frequenzspektrum

### 4.1.3 Signum-Funktion

Die Signum-Funktion ist definiert zu

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ -1 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad 4.12$$

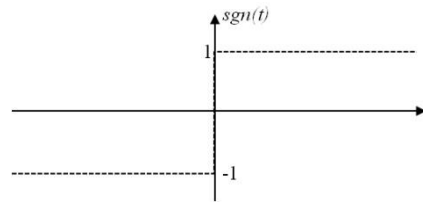


Abbildung 4.4: Signum-Funktion

Sie wird über den Zusammenhang mit dem Dirac-Impuls hergeleitet.

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \quad 4.13$$

Die Ableitung lautet  $2\delta(t)$ , da ein Sprung von -1 zu 0 und ein Sprung von 0 zu +1 vorliegt.

Mit der Fourier-Transformation folgt:

$$x(t) = \int \frac{d}{dt} \text{sgn}(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot 2 = \frac{1}{j\pi f} \quad 4.14$$

#### 4.1.4 Sprungfunktion

Die Sprungfunktion ist definiert zu

$$x(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad 4.15$$

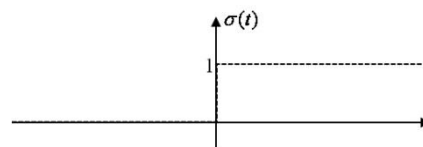


Abbildung 4.5: Sprungfunktion

Die Sprungfunktion entspricht der Signum-Funktion, indem diese mit 1 addiert und mit  $\frac{1}{2}$  multipliziert wird.

$$x(t) = \sigma(t) = \frac{1}{2} \cdot (\text{sgn}(t) + 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \quad 4.16$$

Transformiert man diese Funktion nach Fourier in den Frequenzbereich, so ergibt sich

$$X(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j\pi f} \quad 4.17$$



Umgekehrt ergibt sich

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad 4.18$$

$$\operatorname{sgn}(t) = 2 \cdot \left( \sigma(t) - \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \sigma(t) - 1 \quad 4.19$$

$$\mathcal{F}(\operatorname{sgn}(t)) = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j\pi f} \right) - \delta(f) = \delta(f) + \frac{1}{j\pi f} - \delta(f) = \frac{1}{j\pi f} \quad 4.20$$

### 4.1.5 Rechteckfunktion

Die Rechteckfunktion ist definiert zu

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad 4.21$$

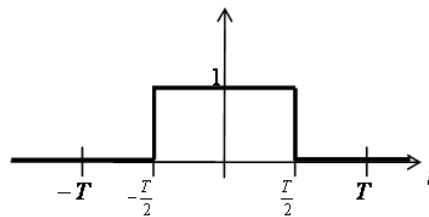


Abbildung 4.6: Rechteckfunktion

Sie setzt sich aus zwei Sprungfunktionen zusammen.

$$x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \sigma\left(t + \frac{T}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad 4.22$$

Transformiert man diese Funktion nach Fourier in den Frequenzbereich, so ergibt sich

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \cdot e^{j2\pi \frac{T}{2} f} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j\pi f} \cdot e^{j2\pi \frac{T}{2} f} - \left[ \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \cdot e^{-j2\pi \frac{T}{2} f} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j\pi f} \cdot e^{-j2\pi \frac{T}{2} f} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j\pi f} \cdot e^{j2\pi \frac{T}{2} f} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j\pi f} \cdot e^{-j2\pi \frac{T}{2} f} \\ &= \frac{1}{\pi f} \cdot \sin(\pi f T) \quad \left| \cdot \frac{T}{T} \right. \\ &= T \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \\ &= T \cdot \operatorname{si}(\pi f T). \end{aligned} \quad 4.23$$

Eine Zeitverschiebung im Zeitbereich entspricht der Multiplikation mit  $e^{j2\pi \tau f}$  im Frequenzbereich mit einer Verschiebung um  $\tau$ .

Das Frequenzspektrum eines Rechtecksignals ist eine si-Funktion.

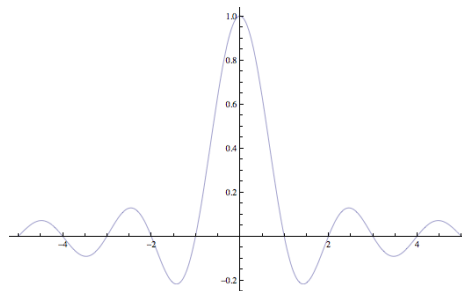


Abbildung 4.7: si-Funktion

Wird das Rechteck breiter, so wird die si-Funktion schmaler.

Wird das Rechteck schmaler, so wird die si-Funktion breiter.

#### 4.1.6 Rampe

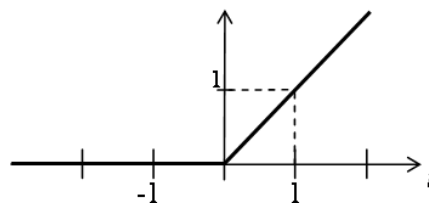


Abbildung 4.8: Rampenfunktion

Die Rampe beginnt bei  $t = 0$  und ist kausal.

Die Rampe entspricht einer Sprungfunktion multipliziert mit einem Vorfaktor.

$$r(t) = t \cdot \sigma(t) \quad 4.24$$

Transformiert man diese Funktion nach Fourier in den Frequenzbereich, so ergibt sich

$$R(f) = \frac{j}{2} \cdot \delta'(f) - \frac{1}{4\pi^2 f^2}. \quad 4.25$$

Der hintere Term ist für alle  $f \neq 0$  korrekt. Nur für  $f = 0$  bedarf es einer genaueren Betrachtung.

Eine Multiplikation mit  $t$  im Zeitbereich entspricht einer Differenzierung von  $\delta(t)$  im Frequenzbereich.

$\delta'(f)$  ist ein „Doppelimpuls“.

### 4.1.7 Dreieck-Impuls

Der Dreieck-Impuls ist definiert zu

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t+T}{T}; & -T \leq t \leq 0 \\ \frac{t-T}{T}; & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \frac{[r(t+T) - 2r(t) + r(t-T)]}{T}. \quad 4.26$$

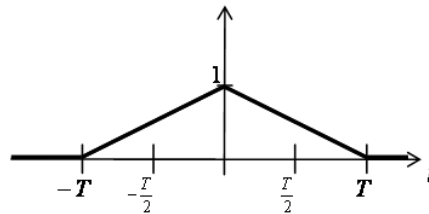


Abbildung 4.9: Dreieckfunktion

Die Abschnitte  $[-T \leq t \leq 0]$  und  $[0 \leq t \leq T]$  entsprechen einer Rampe mit positiver/negativer Steigung und einer Normierung auf T, damit die Amplitude zu Eins wird.

Den entstandenen Term in den Frequenzbereich zu transformieren ist sehr kompliziert. Hier ist es einfacher abschnittsweise mit der normalen Fourier-Transformation zu integrieren.

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f) = T \cdot \text{sinc}^2(\pi f T) \quad 4.27$$

## 4.2 Gauß-Impuls

Der Gauß-Impuls ist definiert zu

$$g(t) = e^{-a^2 t^2}. \quad 4.28$$

Transformiert man diese Funktion nach Fourier in den Frequenzbereich, so ergibt sich

$$G(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{-\frac{\pi^2 f^2}{a^2}}. \quad 4.29$$

Das Spektrum der Frequenzfunktion ähnelt dem der Zeitfunktion, da sich nach der Fourier-Transformation wieder eine e-Funktion ergibt.

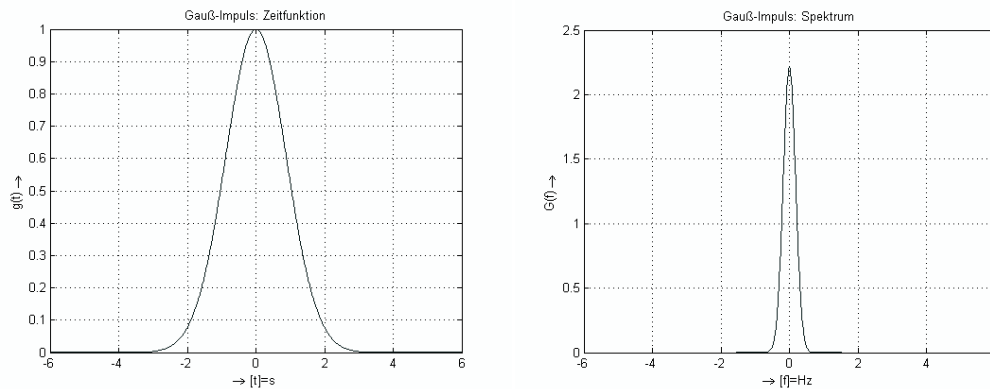


Abbildung 4.10: Gauß-Impuls mit Zeitverlauf (links) und Spektrum (rechts)

Je größer  $a$  wird, desto schmaler wird das Spektrum, je kleiner  $a$  wird, desto breiter wird das Spektrum.

Der Gauß-Impuls ist für sich elementar, es kann mit ihm jedoch keine weitere Funktion dargestellt werden. Daher wird er nicht unter den Elementarfunktionen aufgeführt.

Das Zeitbandbreitenprodukt ist die Multiplikation von  $g(t) \cdot G(f)$ .

Es wird verwendet, um ein Bewertungsmerkmal zu erhalten. Es sagt aus, wie viele Signale auf einer Leitung übertragbar sind. Das Ziel ist ein möglichst kleines Produkt. Die Signale müssen jedoch abgeschnitten werden, da sie ja theoretisch ins Unendliche gehen würden. Hierfür eignet sich besonders gut der Gauß.

#### 4.2.1 Kausale Signale

Ein Signal ist dann kausal, wenn gilt

$$x(t) = 0 \text{ für } t < 0. \quad 4.30$$

Durch Verschieben kann man aus einem akausalen Signal ein kausales machen. Kausalität erzwingt man auch durch die Multiplikation mit der Sprungfunktion  $\sigma(t)$ .

$$x_k(t) = x(t) \cdot \sigma(t) \quad 4.31$$

$\sigma(t)$  ist für  $t < 0$  immer Null und somit auch  $x_k(t)$ .

Der Gauß-Impuls ist kein kausales Signal, da er erst im Unendlichen zu Null wird.

### 4.3 Signal-Baukasten

Das Ziel ist es, das Zusammensetzen beliebiger zeitverschobener Elementarsignale um damit eine einfachere Fourier-Transformation zu ermöglichen.

#### Beispiel 4.1:

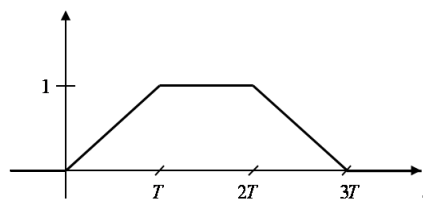


Abbildung 4.11: Signalverlauf

Das Signal setzt sich aus vier Rampen zusammen:

$$s(t) = r\left(\frac{t}{T}\right) - r\left(\frac{t-T}{T}\right) - r\left(\frac{t-2T}{T}\right) + r\left(\frac{t-3T}{T}\right)$$

Das Signal kann aber auch aus zwei Dreieck-Funktionen bestimmt werden und folgendermaßen dargestellt werden:

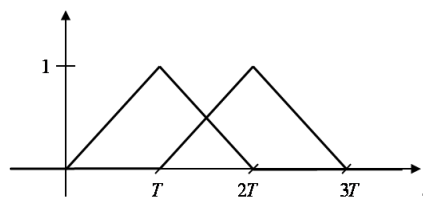


Abbildung 4.12: Signalverlauf mit zwei Dreieck-Funktionen dargestellt

Die Fourier-Transformation kann nun sehr leicht für zwei Dreieck-Signale erfolgen. Diese müssen lediglich in die Formel..... eingesetzt und die Verschiebung um  $T$  und  $2T$  beachtet werden.

$$\begin{aligned} S(f) &= T \cdot \text{si}^2(\pi f T) \cdot e^{-j2\pi f T} + T \cdot \text{si}^2(\pi f T) \cdot e^{-j2\pi f 2T} \\ &= T \cdot \text{si}^2(\pi f T) \cdot [e^{-j2\pi f T} + e^{-j4\pi f T}] \\ &= T \cdot \text{si}^2(\pi f T) \cdot e^{-j3\pi f T} \cdot \left[ \frac{e^{j\pi f T} + e^{-j\pi f T}}{2 \cos(\pi f T)} \right] \end{aligned}$$

$$S(f) = 2T \cdot e^{-j3\pi f T} \cdot \text{si}^2(\pi f T) \cdot \cos(\pi f T)$$

#### Beispiel 4.2: Gauß-Tiefpass

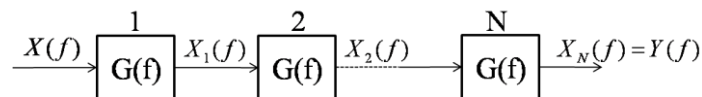


Abbildung 4.13: Blockschaltbild Gauß-Tiefpass

Die Übertragungsfunktion eines Gauß-Tiefpass lautet

$$G(f) = e^{-\pi^2 \frac{f^2}{a^2}}$$

Gesucht ist die Gesamtübertragungsfunktion  $|H(f)|$ .

Werden mehrere Systeme hintereinander geschaltet, so ergibt sich die Gesamtübertragungsfunktion aus dem Produkt der einzelnen Übertragungsfunktionen.

$$X_1(f) = X(f) \cdot G(f)$$

$$X_2(f) = X_1(f) \cdot G(f) = X(f) \cdot [G(f)]^2$$

$$X_N(f) = X(f) \cdot [G(f)]^N = X(f) \cdot H(f)$$

Die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich zu

$$H(f) = [G(f)]^N = e^{-\pi^2 f^2 \frac{N}{a^2}} = e^{-\pi^2 f^2 \left(\frac{\sqrt{N}}{a}\right)^2}.$$

Die Impulsantwort lautet

$$h(t) = \frac{a/\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{a}{\sqrt{N}}\right)^2 \cdot t^2}.$$

Der Unterschied von  $G(f)$  und  $H(f)$  liegt in der Konstante  $\frac{1}{a^2} \rightarrow \frac{N}{a^2}$ . Das bedeutet, dass  $H(f)$  eine  $\sqrt{N}$ -fach geringere Grenzfrequenz besitzt und somit näher zur y-Achse rückt. Im Zeitbereich wird aus  $\frac{a}{\pi} \rightarrow \frac{a/\sqrt{N}}{\pi} = \frac{a}{\sqrt{N}\pi}$ .

## 5 Signaleigenschaften & Deterministische Signale

### 5.1 Signaleigenschaften

#### 5.1.1 Gerade und ungerade Signale

Signalen können die Signaleigenschaften gerade und ungerade zugeordnet werden.

Gerade Signale werden als achsensymmetrisch bezeichnet.

$$x_g(t) = x_g(-t) \qquad \cos(\omega t) = \cos(-\omega t)$$

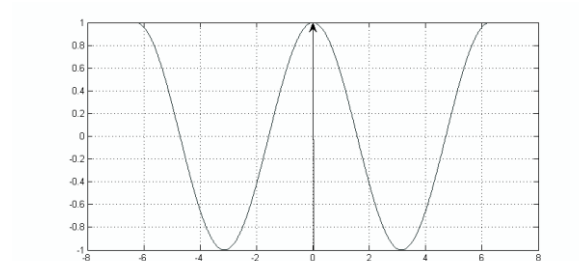


Abbildung 5.1: cos-Funktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_g(t) dt = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x_g(t) dt$$

Ungerade Signale werden als punktsymmetrisch bezeichnet.

$$x_u(t) = -x_u(-t) \qquad \sin(\omega t) = -\sin(-\omega t)$$

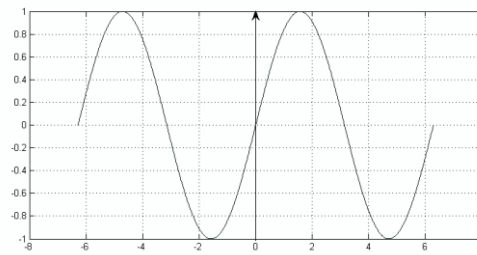


Abbildung 5.2: sin-Funktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_u(t) dt = 0$$

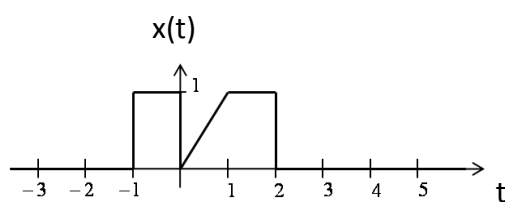
Signale können in einen geraden und ungeraden Anteil zerlegt werden. Die Summe aus beiden Signalanteilen ergibt wiederum das Signal selbst.

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{\frac{x(t)}{2} + \frac{x(t)}{2}}_{=x(t)} + \underbrace{\frac{x(-t)}{2} - \frac{x(-t)}{2}}_{=0} \\ x(t) &= \underbrace{\frac{x(t)}{2} + \frac{x(-t)}{2}}_{x_g(t)} + \underbrace{\frac{x(t)}{2} - \frac{x(-t)}{2}}_{x_u(t)} \end{aligned}$$

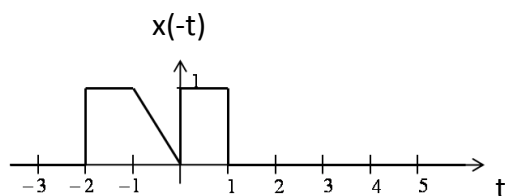
5.1

**Beispiel 5.1:** Graphische Lösung einer Signalzerlegung in geraden und ungeraden Anteil

$x(t)$  :

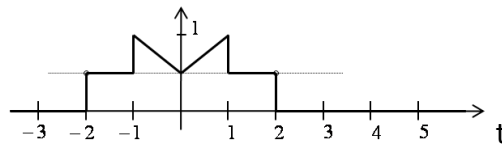


$x(-t)$  :

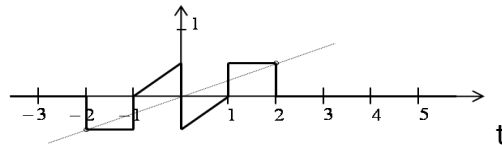




$$x_g(t) = \frac{x(t)}{2} + \frac{x(-t)}{2}$$



$$x_u(t) = \frac{x(t)}{2} - \frac{x(-t)}{2}$$



### 5.1.2 Systemeigenschaften

Ein Signal setzt sich aus einem geraden und einem ungeraden Anteil zusammen. Dieser Ausdruck ist immer reell.

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t)$$

Nach Euler gilt

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t).$$

Der Cosinus ist ein gerader Anteil, der Sinus ein ungerader Anteil.

Transformiert man die Funktion  $f(t)$  nach Fourier in den Frequenzbereich, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_g(t) + f_u(t)] \cdot [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_g(t) \cdot \cos(\omega t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_u(t) \cdot \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f_g(t) \cdot \sin(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f_u(t) \cdot \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

Das Integral über ein Produkt aus einer geraden und ungeraden Funktion ergibt immer Null. Es ergibt sich

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_g(t) \cdot \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f_u(t) \cdot \sin(\omega t) dt . \quad 5.2$$

Bei reellen Zeitfunktionen gilt folgender Zusammenhang:

gerade Zeitfunktion (ungerades Integral entfällt)  $\rightarrow$  reelles Spektrum

ungerade Zeitfunktion (gerades Integral entfällt)  $\rightarrow$  imaginäres Spektrum

Beispiele:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T \cdot \text{si}(\pi f T)$$

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{j2} \delta(f - f_0) - \frac{1}{j2} \delta(f + f_0)$$

## 5.2 Leistung und Energie von Signalen

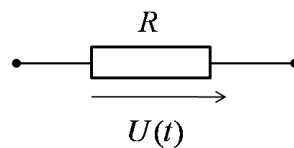


Abbildung 5.3: Widerstand

Die elektrische Energie, die im Zeitbereich  $[t_1, t_2]$  bei einer Spannung  $u(t)$  an einem Widerstand  $R$  anfällt, beträgt

$$E_{el} = \frac{1}{R} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \quad 5.3$$

Durch Normierung des Widerstandes auf  $R = 1\Omega$  ergibt sich

$$E_{el} = \int_{t_1}^{t_2} a^2(t) dt. \quad 5.4$$

Anstelle von  $u(t)$  wird ein allgemeines Signal  $a(t)$  angenommen, da die Energie auch über den Strom errechnet werden kann.

**Definition Energiesignal:**  $E < \infty$

z.B. Pulse, zeitlich limitierte Signale, nicht jedoch periodische Signale

**Definition Leistungssignal:**

$$E \rightarrow \infty \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} a^2(t) dt \quad \text{mit } P < \infty \quad 5.5$$

Interessant ist die Analyse der Signale im Frequenzbereich, um beispielsweise deren Bandbreite ermitteln zu können. Daher wird das Zeitsignal mit den bekannten Frequenztransformationen in den Frequenzbereich transformiert. Aus diesem Grund ist auch die Ermittlung der Energie eines Signals im Frequenzbereich interessant. Eine Lösung dazu bietet das Parsevalsche Theorem.

### 5.3 Parsevalsches Theorem

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow F_1(f) * F_2(f) \quad 5.6$$

Die Operatoren sind nun genau Vertauscht gegenüber früheren Betrachtungen.

$$\begin{aligned} F_1(f) * F_2(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x) \cdot F_2(f - x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned} \quad 5.7$$

**Spezialfälle:**

für  $f = 0$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x) \cdot F_2(-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt \quad 5.8$$

$$\text{Für } f_1(t) = f_2(t) \rightarrow F_1(x) = F_2(x)$$

wird der Mittelwert des Zeitsignals gleich dem Mittelwert der Frequenzen, wobei dieser Mittelwert auch dem Gleichanteil des Signals entspricht:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x) \cdot F_1(-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_1(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(t) dt . \quad 5.9$$

Für reelle Signale  $F_1(-x) = F_1^*(x)$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x) \cdot F_1^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(x)|^2 dx \quad 5.10$$

und weiterhin für  $x = f$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(t) dt \quad 5.11$$

Das Betragsquadrat  $|F_1(f)|^2$  entspricht dem Energiedichtespektrum der Funktion  $f_1(t)$ .  
Das Integral des Energiedichtespektrums entspricht der Energie.

**Beispiel 5.2:** Parsevalsches Theorem angewandt auf eine si-Funktion

$$f(t) = \text{si}\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

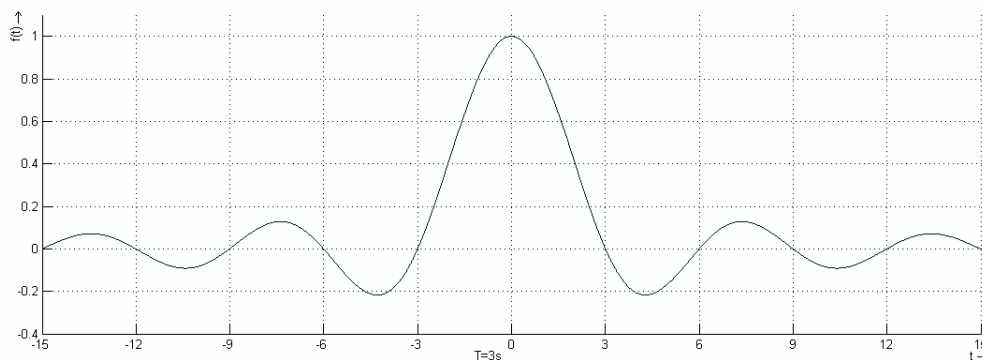


Abbildung 5.4: si-Funktion

Lösung über die Energie-Integration:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt = ???$$

Dieses Integral ist nicht ganz einfach zu lösen. Es muss also einen einfacheren Weg geben.  
Dieser führt über das Parsevalsche Theorem.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df$$

$$F(f) = \text{si}\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \rightsquigarrow T \cdot \text{rect}(fT)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} T^2 \cdot \text{rect}^2(fT) df = T^2 \cdot \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} 1 df$$

$$= [T^2 \cdot f]_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}}$$

$$= T^2 \cdot \left[ \frac{1}{2T} - \left( -\frac{1}{2T} \right) \right]$$

$$= T^2 \cdot \frac{1}{T} = T$$

### Beispiel 5.3: Hilbert-Transformator

a) Kausale, reelle Zeitfunktion  $f(t) = f_g(t) + f_u(t)$

Zeige:  $f_g(t) = f_u(t) \cdot \text{sgn}(t)$

Bzw.  $f_u(t) = f_g(t) \cdot \text{sgn}(t)$

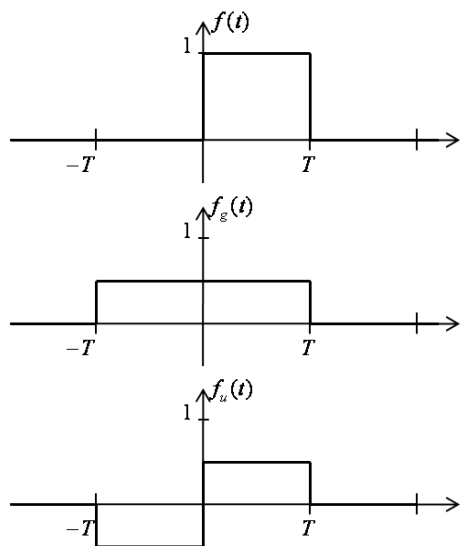


Abbildung 5.5:  $f(t)$  aufgeteilt in geraden und ungeraden Anteil

b) Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil des Spektrums

$$f_g(t) = f_u(t) \cdot \text{sgn}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \Re\{F(f)\} = j\Im\{F(f)\} * \frac{1}{j\pi f} = \Im\{F(f)\} * \frac{1}{\pi f}$$

$$f_u(t) = f_g(t) \cdot \text{sgn}(t) \quad \rightsquigarrow \quad j\Im\{F(f)\} = \Re\{F(f)\} * \frac{1}{j\pi f} = -j\Re\{F(f)\} * \frac{1}{\pi f}$$

$$\Re\{F(f)\} = \Im\{F(f)\} * \frac{1}{\pi f}$$

$$\Im\{F(f)\} = -\Re\{F(f)\} * \frac{1}{\pi f}$$

## 5.4 Korrelationsfunktionen

Wenn man zwei Funktionen miteinander vergleicht, d.h. die Korrelationsfunktion  $\varphi(f_1(t), f_2(t))$  bildet, und auf ihre Abhängigkeit zueinander überprüft, so erhält man als Ergebnis entweder, dass beide Variablen korrelieren oder dass sie unkorreliert sind.

Korrelieren bedeute „in Wechselwirkung zueinander stehen“. Wenn die Zufallsvariablen korrelieren sind sie voneinander abhängig. Ähnlich sind sich Funktionen auch wenn sie Phasenverschoben sind oder andere Frequenzanteile besitzen. Ein Ansatz, um die Ähnlichkeit zweier Funktionen zu bestimmen ist die Energien zu vergleichen. Im speziellen die Differenzenergie  $E_\Delta$ . Für die Energie von einem Signal  $f(t)$  gilt:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \quad 5.12$$

Für die Differenz von zwei Signalen  $f(t)$  und  $g(t)$  gilt somit:

$$E_\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) - g(t)]^2 dt \quad 5.13$$

Da es sich bei der Differenz um ein Binom handelt, kann man dieses erst einmal ausmultiplizieren und die einzelnen Terme dann in eigene Integrale schreiben.

$$\begin{aligned} E_\Delta &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f^2(t) - 2 \cdot f(t) \cdot g(t) + g^2(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t) dt \end{aligned} \quad 5.14$$

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \quad 5.15$$

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt \quad 5.16$$

$$f_{f,g} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t) dt \quad 5.17$$

Für die weitere Betrachtung interessieren die Einzelenergien  $E_f$  und  $E_g$  nicht mehr, sondern nur die Funktion  $f_{f,g}$ , die von beiden Signalen abhängig ist. Aus ihr kann man das Korrelationsprodukt  $\varphi_{fg}$  bilden (Kreuzkorrelation).

$$\varphi_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t + \tau) dt \quad 5.18$$

$g(t)$  wird über alle  $\tau$  verschoben, um herauszufinden, ob eine Ähnlichkeit mit  $f(t)$  besteht. Je höher der Wert des Integrals ist, desto ähnlicher sind sich die beiden Signale.

Wird z.B. eine sin-Funktion über eine sin-Funktion verschoben, so sind die Werte klein. Liegt sie direkt auf der sin-Funktion, so ergibt sich eine  $\sin^2$ -Funktion und die Werte sind groß.

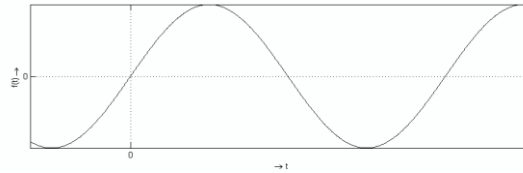


Abbildung 5.6: sin-Funktion  $f(t)$  und  $g(t)$

Für  $\tau = 0$  liegen also beide Sinusfunktionen exakt übereinander. Für die Verschiebung um alle  $\tau$  wird  $\varphi_{fg}$  eine cos-Funktion. Die Korrelation einer sin-Funktion ist eine cos-Funktion.

#### Beispiel 5.4: Zwei unterschiedlich breite Rechteck-Funktionen

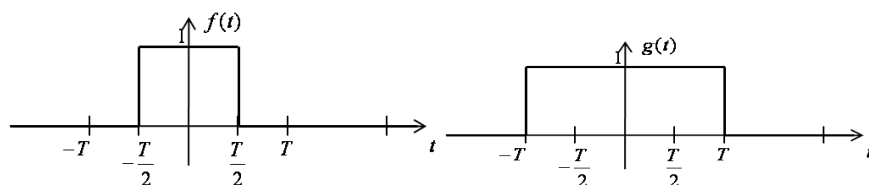


Abbildung 5.7: Rechteck-Funktionen

$$f(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Fallunterscheidung:

- I.  $-\infty < -\tau \leq -\frac{3T}{2}$   $\varphi_{fg} = 0$
- II.  $-\frac{3T}{2} < -\tau \leq -\frac{T}{2}$   $\varphi_{fg} = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+T} 1 \, dt = -\tau + T + \frac{T}{2} = -\tau + \frac{3}{2}T$
- III.  $-\frac{T}{2} < -\tau \leq \frac{T}{2}$   $\varphi_{fg} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \, dt = T$
- IV.  $\frac{T}{2} < -\tau \leq \frac{3T}{2}$   $\varphi_{fg} = \int_{-\tau-T}^{\frac{T}{2}} 1 \, dt = \tau + \frac{3T}{2}$
- V.  $\frac{3T}{2} < -\tau \leq \infty$   $\varphi_{fg} = 0$

Graphische Veranschaulichung der Korrelationsproduktbildung:

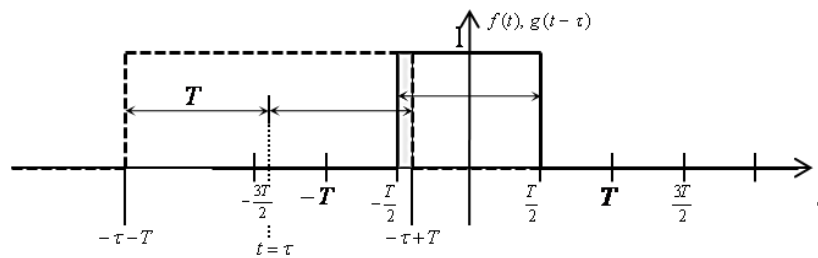


Abbildung 5.8: Verschiebung von  $g(t)$  um  $\tau$  in  $f(t)$

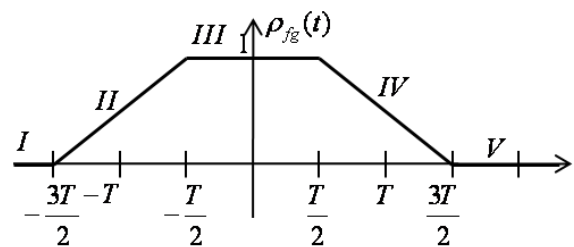


Abbildung 5.9: Korrelationsprodukt

Anmerkung: Existiert nur ein Maximum und keine „Sattelstelle (III)“, so sind beide korrelierte Signale identisch.

Zusammenhang des Korrelationsintegrals mit der Faltung:

$$\varphi_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t + \tau) dt \quad \text{mit } -\infty < T < \infty$$

Substitution:  $\vartheta = -t$  und  $d\vartheta = -dt$

$$\varphi_{fg}(\tau) = \int_{\infty}^{-\infty} f(-\vartheta) \cdot g(-\vartheta + \tau) (-d\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\vartheta) \cdot g(\tau - \vartheta) d\vartheta$$

Substitution  $\vartheta = \tau$  und  $\tau = \vartheta$

$$= f(-\tau) * g(\tau).$$

Das „echte“ Faltungsintegral lautet jedoch  $a(\tau) * b(\tau)$ . Es muss also für  $f(-\tau)$  gelten:

$f(\tau) = f(-\tau)$ . Dies ist bei geraden Funktionen immer der Fall. Das Faltungsintegral ist das Korrelationsprodukt von geraden nicht jedoch von ungeraden Funktionen.

Weiterhin ist die Korrelationsfunktion im Allgemeinen nicht kommutativ:

$$\varphi_{fg}(\tau) = f(-\tau) * g(\tau) \neq g(\tau) * f(-\tau) = \varphi_{gf}(-\tau) \quad 5.19a$$

Für die Korrelation zweier beliebiger Signale  $f(t)$  und  $g(t)$  heißt die Korrelation Kreuzkorrelation. Sind es jedoch die identischen Signale, so wird sie Autokorrelation genannt.



## Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion (AKF)

- I. Immer symmetrisch  $\varphi_{ff}(\tau) = \varphi_{ff}(-\tau)$
- II. Maximum immer bei  $\tau = 0: \varphi_{ff}(0) = E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$
- III. Immer doppelte Breite von  $f(t)$  (bei zeitlich begrenzten Signalen!)

### Beispiel 5.5: AKF eines Rechteck-Pulses

$$\varphi_{gg}(\tau) = g(-\tau) * g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot g(t + \tau) dt$$

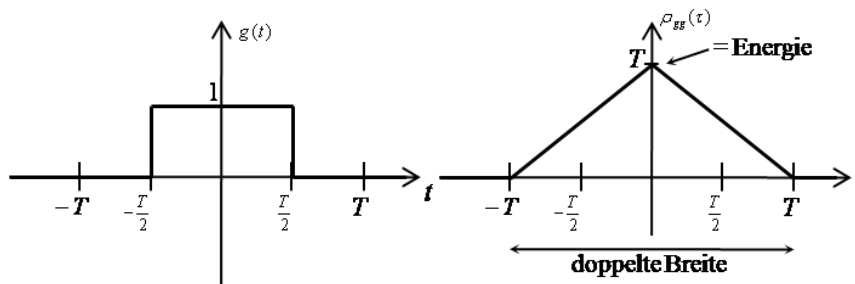


Abbildung 5.10: Rechteck-Impuls und AKF

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Autokorrelationsfunktion von  $g(t)$

- I.  $-\tau < -T \quad \varphi_{gg} = 0$
- II.  $-\tau: 0 \dots T \quad \varphi_{gg} = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt$

## 5.5 Wiener-Khintchine-Theorem

Mit dem Wiener-Khintchine-Theorem lässt sich die Energie aus der Korrelationsfunktion berechnen.

Die AKF transformiert ergibt im Frequenzbereich das Energiedichtespektrum:

$$\varphi_{gg}(\tau) = g(-\tau) * g(\tau)$$



$$G^*(f) \cdot G(f) = |G(f)|^2 \quad 5.20$$

Die Energie berechnet sich also über das Integral der Fourier-Transformierten der AKF:

$$\underbrace{E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{\varphi_{gg}(\tau)\} df}_{\text{Parsevalsches Theorem}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\varphi_{gg}(\tau) \leftrightarrow |G(f)|^2}_{\text{Wiener-Khintchine-Theorem}} \quad \text{also:}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{|G(f)|^2\} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \cdot e^{-j2\pi f \tau} df .$$

Mit dem Sonderfall für  $\tau = 0$ :

$$\varphi_{gg}(0) = E = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df . \quad 5.21$$

Zur Bestimmung der Energie stehen nun drei Methoden zur Verfügung:

Energie-Methode 1	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt$	Zeitbereich
Energie-Methode 2	$E = \int_{-\infty}^{+\infty}  G(f) ^2 df$	Frequenzbereich
Energie-Methode 3	$E = \varphi_{gg}(0)$	AKF

Die Energie selbst ist oft uninteressant, durch sie kann jedoch immer etwas über die Eigenschaften eines Signals ausgesagt werden (z.B. Rauschen).

## 5.6 Wiener-Lee-Theorem

Das Wiener-Lee-Theorem befasst sich mit der Frage, wie man stochastische Signale (z.B. Weißes Rauschen) beschreiben kann. Vor allem ist der Einfluss eines LTI-Systems beim Anlegen eines stochastischen Signals auf eben jenes Signal von Interesse.

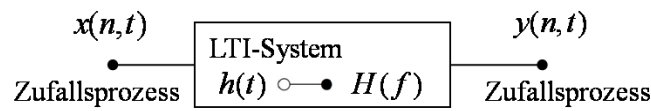


Abbildung 5.11: LTI-System

Für die folgende Berechnung nimmt man für  $h(t)$  an, dass es ein Zeitsignal sei. Hierfür muss natürlich die Impulsantwort bekannt sein.

Die Eingangs-AKF lautet

$$\varphi_{xx}(\tau) = x(-\tau) * x(\tau). \quad 5.22$$

Die Ausgangs-AKF lautet

$$\varphi_{yy}(\tau) = y(-\tau) * y(\tau). \quad 5.23$$

Mit den Regeln der Entfaltung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \varphi_{yy}(\tau) &= [x(-\tau) * x(\tau)] * h(t) \\ &= \underbrace{[x(-\tau) * h(-\tau)]}_{y(-\tau)} * \underbrace{[x(\tau) * h(\tau)]}_{y(\tau)} \\ &= x(-\tau) * x(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \end{aligned} \quad 5.24$$

Da die Faltung kommutativ ist, ist die Reihenfolge der Terme egal.

Die Faltung eines negativen Faltungselements  $x(-\tau)$  mit einem Zeitsignal  $h(t)$  ergibt eine Faltung von  $x(-\tau) * h(-\tau)$ ,

analog dazu mit positivem  $x(\tau) * h(\tau)$ .

Aus dem hier errechneten Zusammenhang lässt sich die Wiener-Lee-Beziehung durch

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau) \quad 5.25$$

beschreiben, wobei  $\varphi_{hh}(\tau)$  die sogenannte Systemautokorrelierte ist. Weiterhin lässt sich im Frequenzbereich folgender Zusammenhang bilden:

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau) \quad 5.26$$

$$|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2 \quad 5.27$$

Gleichung 5.27 gibt die Beziehung der Leistungsdichtespektren an, wobei  $|H(f)|^2$  die sogenannte Leistungsübertragungsfunktion ist.

Kennt man die AKF am Eingang sowie die Impulsantwort eines Systems, so kann man im Frequenzbereich das Leistungsdichtespektrum von  $y(t)$  bestimmen. Zu beachten ist jedoch, dass es sich hier um ein Betragsquadrat handelt: es kann somit nur der Betrag bestimmt werden, über die Phase ist jedoch nichts bekannt.

## 5.7 Zusammenfassung

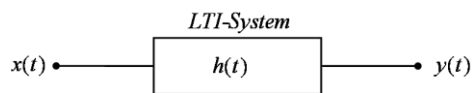


Abbildung 5.12: LTI-System

Zeitbereich:	$x(t)$	$h(t)$	$y(t) = x(t) * h(t)$	5.28
Frequenzbereich	$X(f)$	$H(f)$	$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$	5.29
AKF	$\varphi_{xx}(\tau)$	$\varphi_{hh}(\tau)$	$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau)$	5.30
Energie	$ X(f) ^2$	$ H(f) ^2$	$ Y(f) ^2 =  X(f) ^2 \cdot  H(f) ^2$	5.31

## 5.8 Beispiele

### 5.8.1 Gauß-Impuls

Gegeben ist der Gauß-Impuls mit

$$g(t) = e^{-\pi t^2}.$$

Es soll die Energie und das Energiedichtespektrum bestimmt werden.

Dazu muss zunächst die AKF des Gauß-Impulses berechnet werden.

$$\begin{aligned}\varphi_{gg}(\tau) &= g(-\tau) * g(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot g(t + \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cdot e^{-\pi(t+\tau)^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(2t^2 + 2t\tau + \tau^2)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\tau)^2} \cdot e^{-\pi\frac{1}{2}\tau^2} dt\end{aligned}$$

$$\text{Mit der Zwischenrechnung } (\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\tau)^2 = 2t^2 + 2t\tau + \frac{1}{2}\tau^2$$

$$\text{Substitution: } u = \sqrt{2}t \quad du = \sqrt{2}dt$$

$$\begin{aligned}\varphi_{gg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi\frac{1}{2}\tau^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} du \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi\frac{1}{2}\tau^2}\end{aligned}$$

Die Energie ergibt sich zu

$$E = \varphi_{gg}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Das Energiedichtespektrum ergibt sich zu

$$|G(f)|^2 = \mathcal{F}\{\varphi_{gg}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi\frac{1}{2}\tau^2}\right\}.$$

Aus der Korrespondenz ist bekannt, dass

$$e^{a^2 t^2} \longleftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\pi^2}{a^2} f^2}$$

$$1) \text{ Mit } \frac{\sqrt{\pi}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow a = \sqrt{2\pi} \rightarrow |G(f)|^2 = e^{-2\pi f^2} \text{ t,f vertauscht}$$

$$2) \text{ Mit } a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rightarrow |G(f)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{2} f^2} = e^{-2\pi f^2}$$

### 5.8.2 Korrelationsmesstechnik

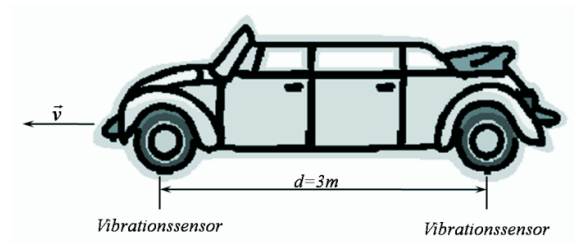


Abbildung 5.13: Korrelationsmesstechnik

Ein Fahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  auf der Straße. Wie kann die Geschwindigkeit mit Hilfe der beiden Vibrationssensoren, die an den Achsen verbaut sind, bestimmen?

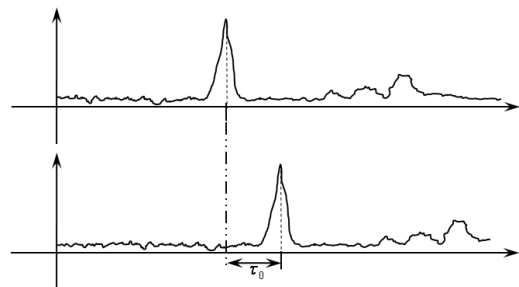


Abbildung 5.14: Signalverläufe der beiden Vibrationssensoren

$x_1$  ist das Signal vom Vibrationssensor 1,  $x_2$  ist das Signal vom Vibrationssensor 2.  $x_2$  entspricht dem Signal  $x_1$  um  $\tau_0$  verschoben.

$$x_2(t) \approx x_1(t - \tau_0)$$

Die Kreuzkorrelation lautet

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1 x_2}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_1(t - \tau_0 + \tau) dt. \end{aligned}$$

Sie hat ihr Maximum bei  $\tau = \tau_0$ .

$$\varphi_{x_1 x_2}(\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t) dt = E_{x_1}$$

$$v = \frac{d}{\tau_0} = \frac{3m}{\tau_0}$$

### 5.8.3 Korrelation von Leistungssignalen

Energie von Leistungssignalen  $E \rightarrow \infty$

$$\varphi_{s_1 s_2}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s_1(t) \cdot s_2(t + \tau) dt$$

$KKF^2$ :

$$s_1(t) = \cos(\omega t), s_2(t) = \sin(\omega t)$$

$$\varphi_{s_1 s_2}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega(t + \tau)) dt = ?$$

Sehr kompliziert zu rechnen, daher

$AKF^2$

$$\begin{aligned} \varphi_{s_1 s_2}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\alpha} \cdot \underbrace{\cos(\omega(t + \tau))}_{\beta} dt \\ &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [\cos(\omega t) + \cos(\omega(2t + \tau))] dt \end{aligned}$$

$$\text{mit: } \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ t \cdot \cos(\omega \tau) + \frac{1}{2\omega} \sin(\omega(2t + \tau)) \right]_{-T}^{+T} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ 2T \cdot \cos(\omega \tau) + \frac{1}{2\omega} \sin(\omega(2T + \tau)) - \frac{1}{2\omega} \sin(\omega(2T + \tau)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \cos(\omega \tau) = \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) \end{aligned}$$

### 5.8.4 Si-Funktion

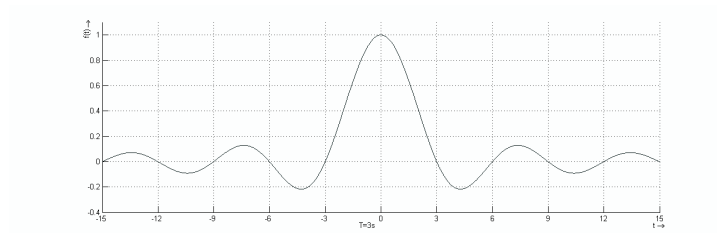


Abbildung 5.15: Signalverlauf si-Funktion

$$g(t) = \text{si}(\pi \frac{t}{T})$$

$$\varphi_{gg}(\tau) \rightsquigarrow |G(f)|^2$$

- I.  $G(f) = T \cdot \text{rect}(fT)$
- II.  $|G(f)|^2 = T^2 \cdot \text{rect}(fT)$
- III.  $\varphi_{gg}(\tau) = T \cdot \text{si}(\pi \frac{\tau}{T})$

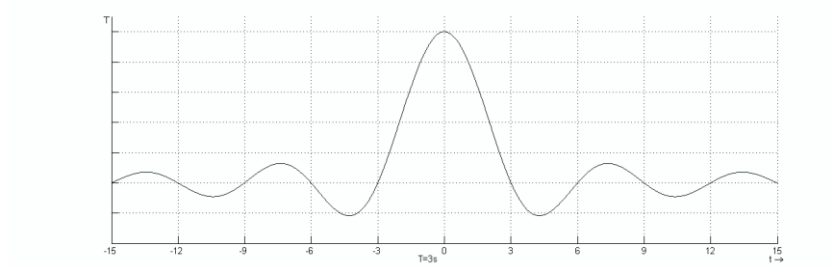


Abbildung 5.16: AKF einer si-Funktion

Die AKF einer Si-Funktion ist wieder eine Si-Funktion, jedoch ist ihre Amplitude nicht mehr 1 sondern  $T$ .

$$E = \varphi_{gg}(0) = T$$



## 6 Stochastische Signale

### 6.1 Stochastischer Prozess

Bei stochastischen Prozessen werden die Signalverläufe der „Vergangenheit“ (also alles links von  $t_1$  in Abbildung 6.1) betrachtet, um aus dieser Erkenntnis für die Zukunft eine Aussage/Vorhersage treffen zu können. So kann aber auch zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_i$  je eine Messung erfolgen und daraus ein Trend oder ein Verhalten abgeleitet werden.

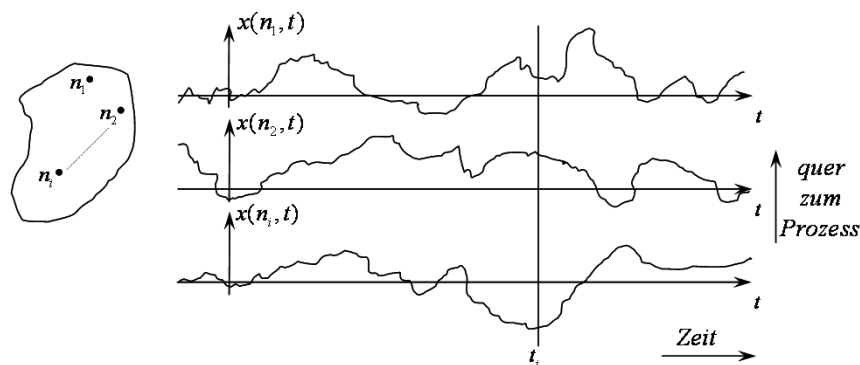


Abbildung 6.1: Stochastische Signale

$x(n_i, t)$  ist eine Musterfunktion eines stochastischen Prozesses, dies können z.B. Schalldruck einer Diskussionsrunde/Vorlesungssaal oder Rauschspannung an mehreren Widerständen sein. Die Musterfunktionen sind sowohl von der Zeit, auf der das Hauptaugenmerk liegt, wie auch von den Variablen abhängig. Beim Beispiel mit dem Schalldruck kann man sich folgendes vorstellen:

Im Raum werden  $n$  Mikrofone verteilt, diese haben alle eine unterschiedliche Musterfunktion. In Abbildung 6.1 wären das dann drei Mikrofone. Betrachtet werden kann nun die unterschiedliche Amplitude jedes Mikrofons.

Interpretation von Abbildung 6.1:

1. Musterfunktion von  $t$  (längs zum Prozess)
2. Familie von Funktionen mit Variablen  $n_i$  und  $t$  (quer zum Prozess)
3. Zufallsvariablen für einen festen Zeitpunkt  $t_1$ .

Mathematische Beschreibung der Verteilungsfunktion

$$F_x(x_0, t) = P \left[ x(n, t) \leq \underbrace{x_0}_{\text{Schwellenwert}} \right] \quad 6.1$$

Wenn die Verteilungsfunktion geringe Veränderungen hat, so gilt für die Verteilungsdichtefunktion

$$f_x(x_0, t) = \frac{dF_x(x_0, t)}{dx_0}, \quad 6.2$$

dass sie nahe Null ist. Sie gilt als Anhaltspunkt wie stark die Konzentration eines Wertes ist.

Durch die Einführung der Schwellenwerte wird der Prozess „geclustert“. Es folgt also eine Entscheidung, ob der Zufallswert kleiner oder größer als  $x_0$  ist. Bei mehreren  $x_0$  entsteht eine neue Funktion. Die stochastischen Signale sind alle zeitabhängig.

### Erwartungswerte (=Scharmittelwert quer zum Prozess):

Es werden mehrere Musterfunktionen betrachtet und aus ihnen ein Mittelwert (Mittelfunktion) gebildet. Diese Funktion ist dann nur noch zeitabhängig.

Mittelwert = Erwartungswert

$$m_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(n_i, t) = E\{x(n_i, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 \cdot f_x(x_0, t) dx_0 \quad 6.3$$

N = Schargröße

Der Mittelwert wird aus der Summe aller Musterfunktionen gebildet. Diese Summe wird dann auf die Anzahl N normiert. Um jedoch nicht unendlich viele Musterfunktionen aufzusummieren werden in der Regel nur einige ausgewählt. Daraus folgt dann ein Trend. Um jedoch eine Erwartungstreue zu erhalten müssen alle Musterfunktionen aufsummiert werden. Wird z.B. beim Zeitpunkt  $t_1$  die Summe der Amplitudenwerte der Mikrofone im Raum gebildet, so erhält man den Mittelwert der gesamten Raumes, dieser ist jedoch vom realen Wert der Raumakustik weit entfernt.

### Momentanleistung

$$E\{x^2(n_i, t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^2(n_i, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0^2 \cdot f_x(x_0, t) dx_0 \quad 6.4$$

### Varianz = Streuung

$$\sigma^2(t) = E\{x^2(n_i, t)\} - m_x^2(t) \quad 6.5$$

Durch die Subtraktion von  $m_x^2(t)$  wird der evtl. vorhandene Mittelwert der Leistung kompensiert.

## Autokorrelationsfunktion (AKF)

Die Korrelation aller Musterfunktionen ergibt die Ähnlichkeit der Musterfunktionen zu zwei Zeitpunkten. Ist die Autokorrelation sehr groß, so besteht eine große Ähnlichkeit. Daraus wird dann die Ähnlichkeit des Zufallsprozesses in sich ersichtlich. Am Beispiel mit Würfeln lässt sich dies sehr gut nachvollziehen.

Bei genügend häufigem Würfeln werden sich die Zahlen wiederholen und somit eine Ähnlichkeit besitzen.

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}(t_1, t_2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(n_i, t_1) \cdot x(n_i, t_2) = E\{x(n_i, t_1) \cdot x(n_i, t_2)\} \\ \varphi_{xx}(t, t) &= E\{x^2(n_i, t_2)\} = \text{Momentanwert}\end{aligned}\quad 6.6$$

Jedoch gibt es Probleme bei der Beschreibung (Beobachtung) durch die Signal-Messung. Es wäre

1. ein unendlicher Zeitaufwand erforderlich
2. es sind nur wenige Musterfunktionen verfügbar, d.h. die Bestimmung des Scharmittelwerts ist problematisch!

Würden  $N \rightarrow \infty$  laufen, so würde der Prozess exakt bestimmbar werden und somit aus einem stochastischen Prozess ein deterministischer werden.

Abhilfe für die oben genannten Problematiken wird u.a. durch die Stationarität geschafft.

## 6.2 Stationarität und Ergodizität

### Stationarität:

Das bedeutet, dass der Zufallsprozess unabhängig von  $t$  ist. Viele praktische Prozesse sind zumindest schwach stationär, das bedeutet, dass die AKF und der Mittelwert von  $t$  unabhängig sind.

Der Vorteil ist nun, dass nicht mehr unendlich lange gewartet werden muss sondern die Messung an einem Zeitpunkt gleichzeitig für mehrere Zufallsvariable ausreicht.

### Ergodizität

Das bedeutet, dass der Schar- und der Zeit- Mittelwert übereinstimmen. Ergodische Prozesse sind auch stationär, jedoch sind stationäre nicht notwendigerweise ergodisch!

Der Zufallsprozess wird nun zu einem Zeitpunkt betrachtet, z.B. bei den Mikrofonen. Ist eine

Schallquelle im Raum, so breitet sich eine homogene Schallwelle im ganzen Raum aus und „kommt“ sozusagen bei jedem Mikrofon „vorbei“. Anstelle nun alle Mikrofone einzeln zu betrachten fasst man diese zusammen.

### 6.3 Leistungsdichtespektrum

$$\mathcal{F}\{AKF\}_{(schwach)stationärer Prozess} = LDS_{Leistungsdichtespektrum}$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = E\{x(t + \tau) \cdot x(t)\} \leftrightarrow \Phi_{xx}(f) = LDS \quad 6.7$$

Wiener-Khintchine-Theorem

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad 6.8$$

Eigenschaften:

- „Verteilung der Leistung eines stochastischen Prozesses (Signal) im Frequenzbereich
- $\Phi_{xx}(f) \geq 0 \forall f$
- Leistung:  $\sigma_x^2 + m_x^2 = \varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f) df$

Es kann nun eine Annahme mit der Gleichung 6.8 für die Leistung bei z.B. 1000 Hz getroffen werden. Diese kann dann mit anderen verglichen und ihr Verhalten beschrieben werden.

### 6.4 Weißes Rauschen

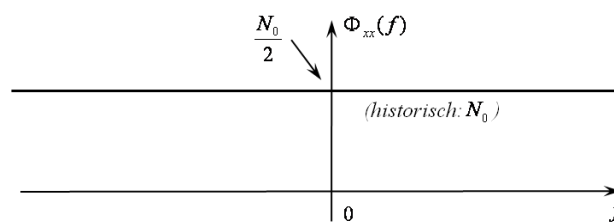


Abbildung 6.2: Frequenzspektrum weißes Rauschen

Konstantes Rausch-Leistungsdichtespektrum

$N_0$ : Rauschleistungsdichte ( $\frac{N_0}{2}$  = zweiseitige Rauschleistungsdichte (positive und negative Frequenzen getrennt betrachtet), historisch  $N_0$  = einseitige Rauschleistungsdichte)

$$AKF: \varphi_{xx}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau) = \text{Wiener Khintchine – Theorem}$$

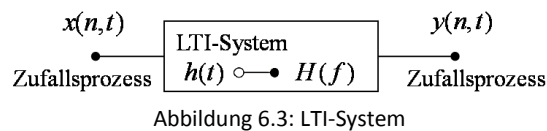
Die AKF des weißen Rauschens ist ein Dirac-Impuls.

Da  $\delta(\tau)$  im Frequenzbereich konstant folgt weißes Rauschen, außerdem gilt:

unkorreliertes Rauschen, d.h. Werte im Abstand  $\tau \neq 0$  haben nichts miteinander zu tun!

## 6.5 Übertragung durch ein LTI-System

Es wird z.B. weißes Rauschen auf das System gegeben.



Der Zufallsprozess  $x(n, t)$  ist durch  $m_x$  beschrieben.

Annahme: (schwach) stationäre Zufallsprozesse

Nach dem Faltungssatz gilt:

$$y(n, t) = x(n, t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(n, t) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad 6.9$$

$$m_y = E\{y(n, t)\} \text{ (Mittelwert)} = m_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \text{ ebenfalls ein Mittelwert}$$

Der Mittelwert am Ausgang ist der Mittelwert am Eingang multipliziert mit dem Integral über der Impulsantwort.

Das gleiche zeigt sich auch mit anderen Zufallsprozessen, z.B. der AKF:

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau) \quad 6.10$$

$$\Phi_{yy}(f) = \Phi_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2 \quad 6.11$$

Gib man weißes Rauschen auf ein LTI-System, so kommt am Ausgang die AKF der Impulsantwort heraus.

### Beispiel 6.1: Gleitendes Mittelungsfilter

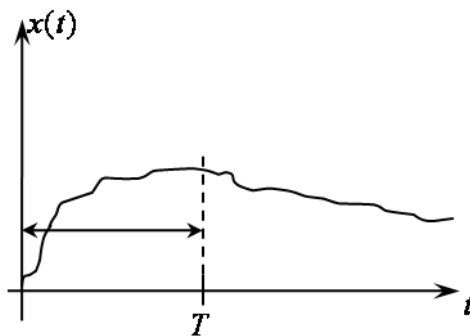
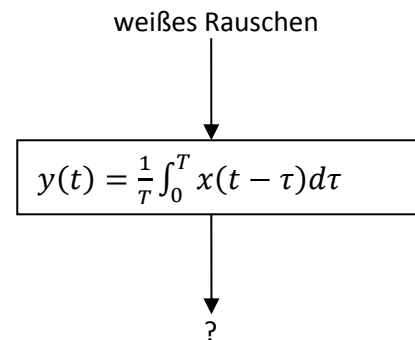


Abbildung 6.4: möglicher Signalverlauf eines Rauschprozesses



Das Ziel ist, das Leistungsdichtespektrum am Ausgang des Prozesses zu bestimmen.

a) Impulsantwort und Frequenzgang des Mittelungsfilters?

Der Faltungssatz lautet:  $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau$

Vergleicht man diese Funktion mit der Funktion des gleitenden Mittelungsfilters so ergibt sich für die Impulsantwort des Filters

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Impulsantwort wurde bestimmt, da das Leistungsdichtespektrum am Ausgang mit der Impulsantwort am Eingang berechnet wird. Die Impulsantwort entspricht einem Rechteck-Impuls.

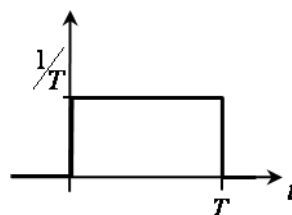


Abbildung 6.5: Impulsantwort gleitendes Mittelungsfilter

Das Frequenzspektrum wird über die Fourier-Transformation der Impulsantwort berechnet.

$$h(t) \leftrightarrow H(f)$$

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f\tau} dt = \int_0^T \frac{1}{T} \cdot e^{-j2\pi f\tau} dt = \left[ -\frac{1}{j2\pi f\tau} \cdot e^{-j2\pi f\tau} \right]_0^T \\ &= -\frac{1}{j2\pi f\tau} \cdot (e^{-j2\pi fT} - 1) \\ &= -\frac{1}{j2\pi f\tau} \cdot e^{-j\pi fT} \left( \frac{e^{-j2\pi fT} - 1}{e^{-j\pi fT}} \right) \\ &= -\frac{1}{j2\pi f\tau} \cdot e^{-j\pi fT} (e^{-j2\pi fT} \cdot e^{+j\pi fT} - e^{+j\pi fT}) \\ &= -\frac{1}{j2\pi f\tau} \cdot e^{-j\pi fT} (e^{+j\pi fT} - e^{-j2\pi fT} \cdot e^{+j\pi fT}) \\ &= \frac{e^{-j\pi fT}}{j2\pi f\tau} (e^{+j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) \\ &= e^{-j\pi fT} \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = \text{si}(\pi fT) \cdot e^{-j\pi fT} \end{aligned}$$

b) AKF des Eingangsprozesses

Das LDS am Eingang wird benötigt, um damit dann mit Hilfe der Impulsantwort das LDS am Ausgang zu berechnen.

$$LD = \Phi_{xx}(f) \frac{N_0}{2} \rightarrow \varphi_{xx}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t)$$

c) Leistung des Eingangsprozesses innerhalb der Bandbreite  $B=2/T$ ?

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(f) &= \frac{N_0}{2} \\ \text{Leistung} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f) df = \int_0^{\frac{2}{T}} \frac{N_0}{2} df = \left[ \frac{N_0}{2} \cdot f \right]_0^{\frac{2}{T}} = \frac{N_0}{T} \end{aligned}$$

d) AKF, LDS des Ausgangsprozesses?

Das LDS ergibt sich zu:

$$\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot \Phi_{xx}(f) = |\text{si}(\pi fT) \cdot e^{-j\pi fT}|^2 \cdot \frac{N_0}{2} = \left| \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right|^2 \cdot \frac{N_0}{2}$$

Zur Berechnung der AKF benötigt man die AKF am Eingang sowie die AKF der Impulsantwort.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau)$$

Die AKF der Impulsantwort (Systemkorrelierte) berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{hh}(\tau) &= h(\tau) * h^*(-\tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau+t) \cdot h^*(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T h(\tau+t) dt \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} \frac{1}{T} dt = \frac{T-\tau}{T^2} & 0 \leq \tau \leq T \\ \frac{1}{T} \int_{-\tau}^T \frac{1}{T} dt = \frac{T+\tau}{T^2} - T & -T \leq \tau \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{T-|\tau|}{T^2} & |\tau| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

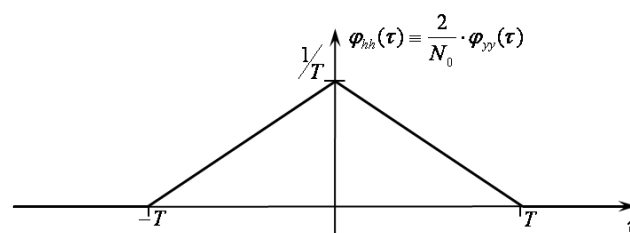


Abbildung 6.6: AKF weißes Rauschen

Die AKF des Ausgangsprozesses lautet dann:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{yy}(\tau) &= \varphi_{xx}(\tau) * \varphi(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \underbrace{\delta(t) * \varphi_{hh}(\tau)}_{\text{Ausblendeigenschaft des Dirac}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t) \cdot \varphi_{hh}(t-\tau) dt \\
 &= \frac{N_0}{2} \cdot \varphi_{hh}(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & \tau \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

e) Gesamtleistung des Ausgangsprozesses?

$$\varphi_{yy}(0) = \frac{N_0}{2T}$$



## 7 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1: Dirac-Impuls .....	4
Abbildung 1.2: Dirac-Impuls um $t_0$ verschoben.....	4
Abbildung 1.3: Sprungfunktion .....	6
Abbildung 2.1: Allgemeine Darstellung eines Systems .....	7
Abbildung 2.2: Sprungfunktion und Antwort mit Zeitverschiebung .....	8
Abbildung 3.1: RC-Tiefpass.....	11
Abbildung 3.2: $\delta$ -Impuls und Impulsantwort zeitverschoben und gewichtet.....	13
Abbildung 3.3: RC-Tiefpass mit Rechteckeingangssignal .....	14
Abbildung 3.4: Graphische Interpretation der Faltung .....	15
Abbildung 3.5: Verlauf des Ausgangssignales .....	15
Abbildung 3.6: Sprungfunktion .....	16
Abbildung 3.7: Betragsfrequenzgang eines Tiefpass.....	17
Abbildung 3.8: Phasengang eines Tiefpass .....	17
Abbildung 3.9: Allgemeine LTI-Systembeschreibung.....	18
Abbildung 3.10: RC-Tiefpass.....	18
Abbildung 3.11: Betrag der Übertragungsfunktion.....	19
Abbildung 3.12: Phase der Übertragungsfunktion.....	19
Abbildung 3.13: Beschaltung idealer Bauteile für einen Differenzierer .....	20
Abbildung 4.1: Frequenzspektrum der Funktion $u(t)$ .....	23
Abbildung 4.2: Frequenzspektrum .....	23
Abbildung 4.3: Frequenzspektrum .....	23
Abbildung 4.4: Signum-Funktion .....	24
Abbildung 4.5: Sprungfunktion .....	24
Abbildung 4.6: Rechteckfunktion .....	25
Abbildung 4.7: si-Funktion.....	26
Abbildung 4.8: Rampenfunktion .....	26
Abbildung 4.9: Dreieckfunktion.....	27
Abbildung 4.10: Gauß-Impuls mit Zeitverlauf (links) und Spektrum (rechts) .....	28
Abbildung 4.11: Signalverlauf.....	29
Abbildung 4.12: Signalverlauf mit zwei Dreieck-Funktionen dargestellt .....	29
Abbildung 4.13: Blockschaltbild Gauß-Tiefpass .....	30
Abbildung 5.1: cos-Funktion.....	31
Abbildung 5.2: sin-Funktion .....	32
Abbildung 5.3: Widerstand.....	34
Abbildung 5.4: si-Funktion.....	36
Abbildung 5.5: $f(t)$ aufgeteilt in geraden und ungeraden Anteil.....	37
Abbildung 5.6: sin-Funktion $f(t)$ und $g(t)$ .....	39
Abbildung 5.7: rect-Funktionen.....	39
Abbildung 5.8: Verschiebung von $g(t)$ um $\tau$ in $f(t)$ .....	40
Abbildung 5.9: Korrelationsprodukt.....	40
Abbildung 5.10: Rechteck-Impuls und AKF .....	41

Abbildung 5.11: LTI-System .....	43
Abbildung 5.12: LTI-System .....	44
Abbildung 5.13: Korrelationsmesstechnik .....	46
Abbildung 5.14: Signalverläufe der beiden Vibrationsmesser .....	46
Abbildung 5.15: Signalverlauf si-Funktion.....	48
Abbildung 5.16: AKF einer si-Funktion .....	48
Abbildung 6.1: Stochastische Signale .....	49
Abbildung 6.2: Frequenzspektrum weißes Rauschen .....	52
Abbildung 6.3: LTI-System .....	53
Abbildung 6.4: möglicher Signalverlauf eines Rauschprozesses .....	54
Abbildung 6.5: Impulsantwort gleitendes Mittelungsfiler.....	54
Abbildung 6.6: AKF weißes Rauschen.....	56