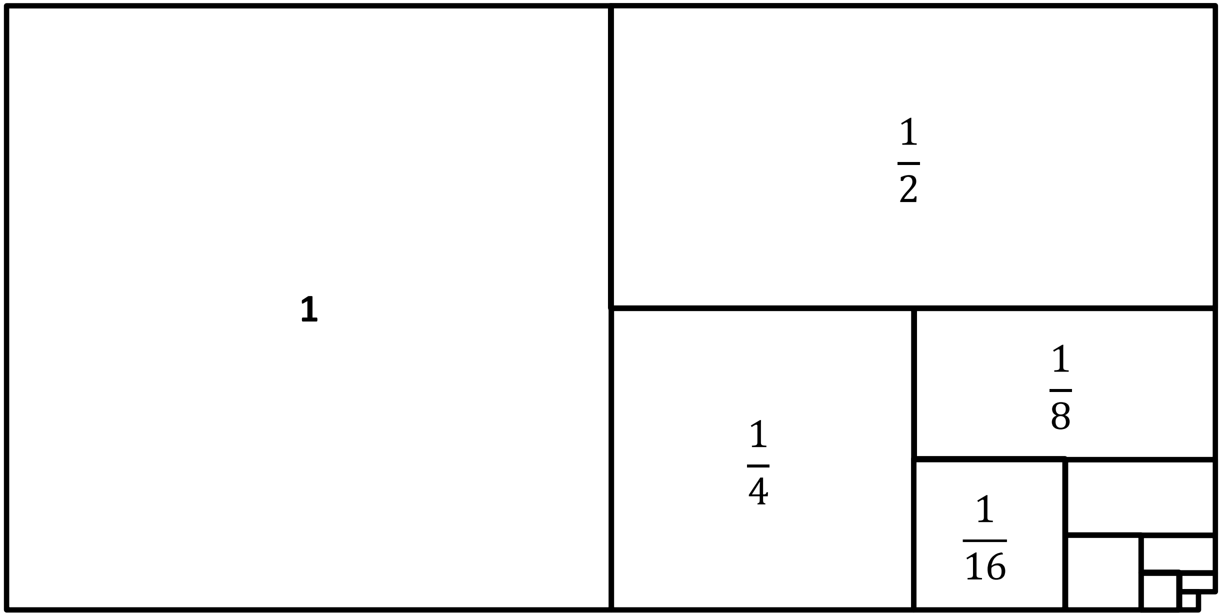
Mathematik 3

Reihen

Wintersemester 2013/14

Beispiel Geometrische Reihe

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



$$s_n \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

➔ **Notwendige Bedingung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k; \qquad a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

➔ **Quotientenkriterium (hinreichend)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k; \qquad \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \qquad \begin{cases} q < 1: & \text{Konvergenz} \\ q = 1: & \text{Keine Aussage möglich} \\ q > 1: & \text{Divergenz} \end{cases}$$

➔ **Wurzelkriterium (hinreichend)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k; \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q \qquad \begin{cases} q < 1: & \text{Konvergenz} \\ q = 1: & \text{Keine Aussage möglich} \\ q > 1: & \text{Divergenz} \end{cases}$$

➔ Definition

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

➔ Konvergenzradius

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

➔ Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

➔ MacLaurinsche Reihe ($x_0 = 0$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

Beispiele für Potenzreihen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenz
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
e^{-x}	$1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
a^x	$1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln a)^3}{3!}x^3+\frac{(\ln a)^4}{4!}x^4+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\ln x$	$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots$	$0<x\leq 2$
$\ln x$	$2\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\cdots\right]$	$x>0$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	$-1<x\leq 1$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$

Taylorreihe der Sinusfunktion