74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

# Zadání úloh dalších kol

## Kategorie A

### Školní kolo

**1.** Rozhodněte, zda existují navzájem různá reálná čísla $a$, $b$, $c$ taková, že čísla $a^2 + b$, $b^2 + c$, $c^2 + a$ se v nějakém pořadí rovnají číslům $a + b^2$, $b + c^2$, $c + a^2$. (*Patrik Bak*)

**2.** Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ takový, že $|AB| = |BC|$, $|AE| = |DE|$, $AC \perp AD$ a $CD \parallel BE$. Dokažte, že trojúhelníky $ABC$ a $AED$ mají stejné obsahy. (*Patrik Bak*)

**3.** Řekneme, že přirozené číslo je *ploché*, pokud jsou všechny jeho číslice stejné (i jednomístná čísla považujeme za plochá). Rozhodněte, zda lze každé přirozené číslo, které není ploché, vyjádřit jako součet několika navzájem různých plochých čísel. (*Jozef Rajník*)

### Krajské kolo

**1.** Jsou dána dvě navzájem různá reálná čísla $a$, $b$ taková, že výrazy $a^3 + b$ a $a + b^3$ mají stejnou hodnotu. Dokažte, že pro jejich součin platí $-1 \leqq ab < \frac{1}{3}$. (*Jana Kopfová, Jaromír Šimša*)

**2.** Probíhá online hlasování mezi variantami $A$ a $B$. Než Pavel hlasoval, byl počet procent hlasů pro variantu $A$ roven kladnému celému číslu. Pavlovým hlasem se toto číslo zvětšilo přesně o jedna. Dokažte, že Pavlův hlas byl devatenáctým hlasem pro variantu $A$. (*Josef Tkadlec*)

**3.** V týmu je sedm hráčů. V každém kole turnaje jich pět hraje a dva sedí na tribuně. Dokažte, že nezávisle na (kladném) počtu kol i výběru pětic lze na konci turnaje nalézt dva hráče, kteří byli spolu (ať už na hřišti nebo na tribuně) ve více než polovině kol. (*David Hruška*)

**4.** V rovině je dána úsečka $BC$. Uvažujeme všechny ostroúhlé trojúhelníky $ABC$, v nichž $|\sphericalangle BAC| = 45°$. V každém takovém trojúhelníku označíme $D$ a $E$ po řadě ty body stran $AB$ a $AC$, pro které je přímka $BC$ společnou tečnou kružnic opsaných trojúhelníkům $ACD$ a $ABE$. Paty kolmic z bodů $D$ a $E$ k přímce $BC$ označíme po řadě $P$ a $Q$. Dokažte, že v rovině existuje bod $X$ neležící na přímce $BC$, pro nějž velikost úhlu $PXQ$ nezávisí na poloze bodu $A$. (*Zdeněk Pezlar*)

### Ústřední kolo

**1.** Pro reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$ platí

$$a+b+c+d=0 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0.$$

Kolik z rovností

$$ab=cd, \qquad ac=bd, \qquad ad=bc$$

může současně platit? Určete všechny takové počty. (*Michal Janík*)

**2.** Najděte největší celé číslo $n$ s následující vlastností: Kdykoliv je v rovině dáno pět navzájem různých bodů tak, že některé dva z nich leží uvnitř trojúhelníku tvořeného zbylými třemi body, pak lze některé tři z těchto pěti bodů označit $X$, $Y$, $Z$ tak, že platí $n^\circ < |\sphericalangle XYZ| \leqq 180^\circ$. (*Josef Tkadlec*)

**3.** Nechť $p$ je největší prvočinitel přirozeného čísla $n > 1$. Pro každou neprázdnou podmnožinu dělitelů čísla $n$ napíšeme na tabuli součet jejích prvků. Předpokládejme, že jsme takto napsali více než $p$ čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, p+2\}$ a žádné číslo z této množiny jsme nenapsali vícekrát. Dokažte, že pak jsme žádné číslo nenapsali vícekrát. (*Zdeněk Pezlar*)

**4.** Podél kružnice je napsáno několik (alespoň tři) navzájem různých prvočísel. Pro každá dvě sousední prvočísla určíme největší prvočinitel jejich součtu. Takto získáme až na pořadí opět stejná prvočísla, jako byla ta napsaná. Najděte všechny možné výchozí množiny prvočísel.
(Například prvočísla $2, 7, 3, 11, 17$ v tomto pořadí nevyhovují, protože odpovídající součty $9, 10, 14, 28, 19$ mají největší prvočinitele $3, 5, 7, 7, 19$.) (*Michal Janík*)

**5.** Najděte všechna kladná celá čísla $n$ s následující vlastností: Ve čtvercové tabulce $n \times n$ lze vybarvit $2n$ polí tak, že žádná dvě z nich nesousedí stranou ani vrcholem a v každém řádku i každém sloupci jsou vybarvená právě dvě pole. (*Jakub Štepo*)

**6.** V daném ostroúhlém trojúhelníku $ABC$ označme $H$ průsečík výšek, $\omega$ kružnici opsanou a $O$ její střed. Dále označme $M$ střed strany $BC$ a $D \neq A$ průsečík přímky $AH$ s kružnicí $\omega$. Přímka $DM$ protne kružnici $\omega$ v bodě $E \neq D$. Nechť $F \neq E$ je průsečík přímky $AE$ s kružnicí opsanou trojúhelníku $OME$. Dokažte, že platí $|FH| = |FA|$. (*Michal Pecho*)

# Kategorie B

## Školní kolo

**1.** Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Potom každou jeho dvojici po sobě jdoucích číslic interpretujeme jako dvojmístné číslo a těchto osm čísel napíšeme na tabuli.

a) Kolik nejvíce mocnin prvočísel mezi nimi může být?

b) Kolik různých devítimístných čísel nás k tomuto počtu dovede?

(Uvažujeme jen mocniny prvočísel s celočíselným exponentem větším než 1.)

(*Dominik Rigasz*)

**2.** Uvnitř pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku $ABC$ s přeponou $BC$ leží bod $D$ takový, že $AD \perp BD$. V polorovině určené přímkou $AD$ neobsahující bod $B$ leží čtverec $ADEF$. Dokažte, že přímka $EF$ prochází bodem $C$. (*Patrik Bak*)

**3.** Pro přirozená čísla $r$, $s$ platí, že zlomek $r/s$ leží v intervalu $\langle 23/45; 46/89\rangle$. Jakou nejmenší hodnotu může mít jmenovatel $s$? (*Pavel Calábek*)

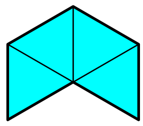
## Krajské kolo

**1.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2z + 1 = 0,$$
$$y^2 - xy - 2y + 2x = 0.$$

(*Mária Dományová*)

**2.** Určete všechna přirozená čísla $n$ s následující vlastností: Pravidelný šestiúhelník se stranou délky $n$ lze rozřezat na útvary jako na obrázku složené ze čtyř rovnostranných trojúhelníků se stranou délky 1.



(*Anastasia Bredichina*)

**3.** Nechť $I$ je středem kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$. Obraz kružnice $k$ opsané trojúhelníku $BIC$ v osové souměrnosti podle přímky $BC$ protne úsečky $AB$ a $AC$ po řadě v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Předpokládejme, že se úsečky $BE$ a $CD$ protínají na kružnici $k$. Určete všechny možné velikosti úhlu $BAC$.

(*Anastasia Bredichina, Patrik Bak*)

**4.** Najděte všechna přirozená čísla $n$ taková, že čísla

$$\frac{1}{n} \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{n + 23^2}$$

mají nekonečné desetinné rozvoje, které se shodují od některého místa stejného pro obě čísla. (*Ján Mazák, Josef Tkadlec*)

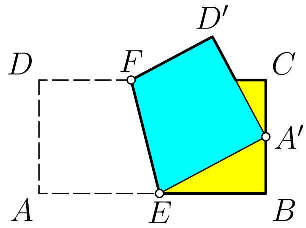
# Kategorie C

## Školní kolo

**1.** Čtvercovou tabulku $4 \times 4$ vybarvujeme čtyřmi různými barvami tak, aby každé pole tabulky bylo vybarveno právě jednou barvou. Rozhodněte, zda lze nalézt obarvení, v němž bude každá barva v každé z devíti menších tabulek $2 \times 2$ a také
a) v každém řádku a v každém sloupci,
b) v každém řádku. (*Jaroslav Švrček*)

**2.** Patrik napsal na tabuli dvě přirozená čísla. Všiml si, že jejich součet je prvočíslo 313, které je navíc dělitelem součtu jejich největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Která čísla Patrik na tabuli napsal? (*Patrik Bak*)

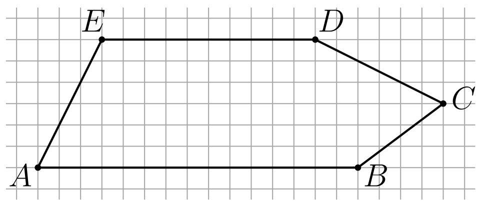
**3.** List papíru o rozměrech $2 \times 1$ přeložíme jako na obrázku tak, že vrchol $A$ splyne se středem $A'$ úsečky $BC$. Určete obsah přeložené části, tj. čtyřúhelníku $A'D'FE$. (*Tomáš Bárta*)




## Krajské kolo

**1.** Dvojmístné číslo $\overline{ab}$ nazveme *nafouknutelné*, pokud z něj po přičtení 990násobku vhodného jednomístného čísla získáme čtyřmístné číslo tvaru $\overline{axxb}$ s nenulovou číslicí $x$. Kolik nafouknutelných čísel existuje? (*Mária Dományová*)

**2.** Ve čtvercové síti leží pětiúhelník $ABCDE$, jehož vrcholy jsou v mřížových bodech stejně jako na obrázku. Dokažte, že tento pětiúhelník lze rozdělit na dva shodné čtyřúhelníky. (*Jaroslav Zhouf, Josef Tkadlec*)




**3.** Kolika způsoby lze vybarvit čtvercovou tabulku $4 \times 4$ čtyřmi různými barvami tak, aby každé její pole bylo vybarveno právě jednou barvou a aby v každé menší čtvercové tabulce $2 \times 2$ byla každá barva právě jednou? (*Jana Kopfová*)

**4.** Lenka staví konstrukci tvaru kvádru z magnetických tyčinek délky 1 a kovových kuliček. Na konstrukci $2 \times 3 \times 1$ (viz obrázek) spotřebovala 46 tyčinek a 24 kuliček. Na jinou konstrukci $a \times b \times 1$ spotřebovala 679 tyčinek. Kolik na ni spotřebovala kuliček? Určete všechny možnosti. (*Jana Kopfová, Lenka Kopfová, Josef Tkadlec*)