Univerza v Ljubljani
Finančna matematika 1. stopnja

Consecutive square packing

Finančni praktikum

Patrik Gregorič, Petja Murnik

Ljubljana, 2022

Kazalo

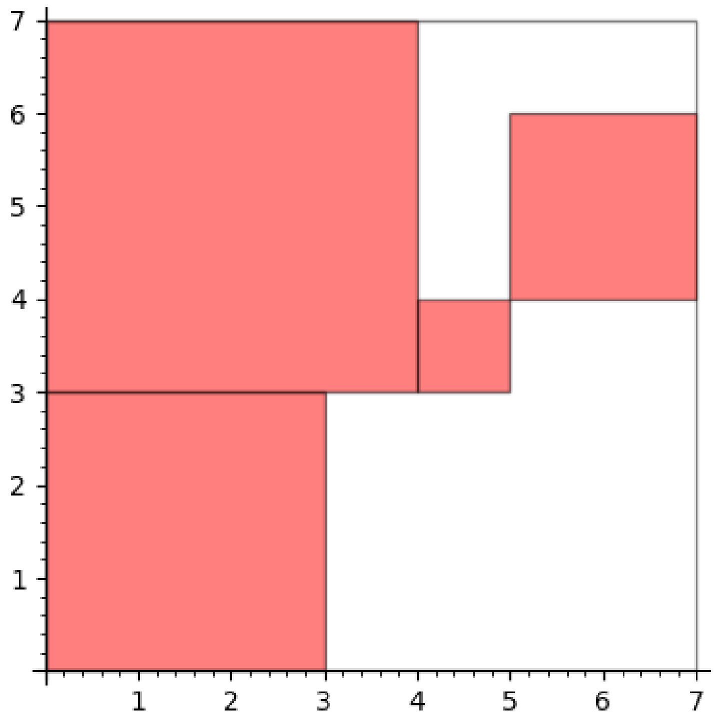
1 Opis problema

1.1 Osnovni problem

Za vsak celo število $i = 1, \ldots, n$ imamo en kvadrat s stranicami dolžine i. Želimo najti kvadrat z najkrajšo stranico, v katerega lahko zložimo vse kvadrate, ne da bi se notranjosti kvadratov prikrivale (robovi se lahko dotikajo). Kvadratov ne moremo obračati lahko jih samo transliramo.

1.2 Ideja za reševanje

Problem je enostavno predstavljiv. Imamo zaporedje vse večjih kvadratov, ki jih razporedimo v ravnino, te se ne prekrivajo, se lahko dotikajo. Kvadratov ne smemo rotirati, lahko jih le premikamo levo, desno, gor, dol. Omejila sva problem le na pozitivne x in y zaradi lažje predstave. Za majhen n si je problem lahko predstavljati, saj ga rešimo zelo hitro kar sami.



Slika 1: Lahek primer za $n = 4$

Opazimo, da postavimo največja kvadrata drug zraven drugega in ostale le razporedimo s kar veliko možnostmi na prosta mesta. Problem je enostaven, ker je veliko različnih možnosti.

2 Reševanje osnovnega problema

2.1 Kratek opis

Za večji n postane problem mnogo težji. Zato sva se odločila reševati s celoštevilskim linearnim programiranjem. To je: uvedla bova spremenljivke, zapisala omejitve in to poslala skozi vgrajene metode za reševanje CLP v programskem jeziku Sage.

2.2 Potek reševanja

Za podatke imava podane kvadrate s stranicami dolžine i, kjer $i = 1, \ldots, n$, in $i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Ciljna funkcija najinega problema je iskanje $\min z$, kjer je z dolžina stranice največjega kvadrata, v katerega se zloži vse manjše kvadrate s stranicami $i = 1, \ldots, n$.
Za reševanje problema sva definirala razred Kvadrat.

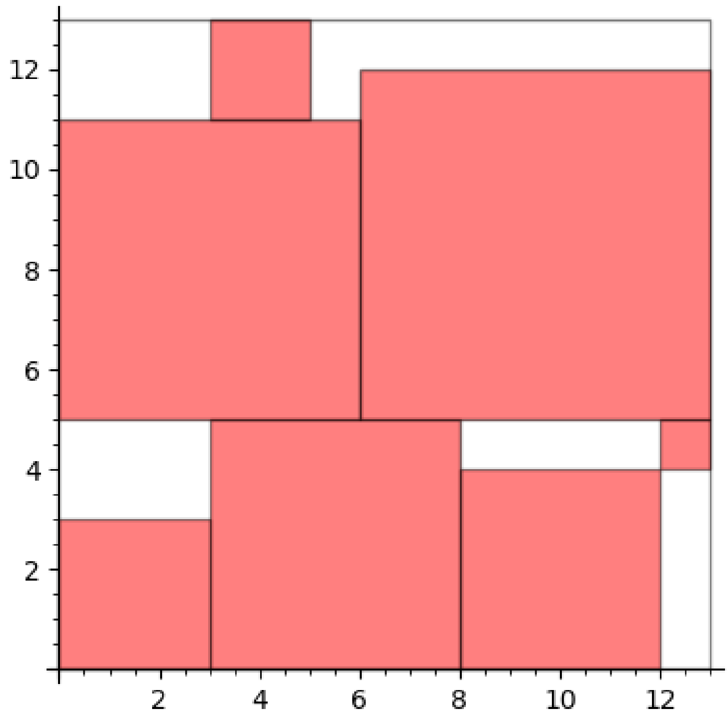
```
from sage.plot.polygon import polygon
class Kvadrat:

    def __init__(self, x, y, dolzina_stranice):
        self.x = x
        self.y = y
        self.dolzina_stranice = dolzina_stranice

    def narisi(self, barva="red"):
        return polygon(
            [(self.x, self.y), (self.x + self.dolzina_stranice, self.y),
             (self.x + self.dolzina_stranice, self.y + self.dolzina_stranice),
             (self.x , self.y + self.dolzina_stranice )],
            color=barva,
            edgecolor='black',
            alpha=0.5,
            zorder=2)

def narisi_rezultat_P(rezultat):
    k = Kvadrat(0,0,rezultat[0])
    rezultat1 = list(rezultat[1])
    K = k.narisi()
    pomoc = []
    for i in rezultat1:
        j = Kvadrat(i[0],i[1],i[2])
        pomoc.append(j)
    RISI = [K]
    for l in pomoc:
```

```
        m = l.narisi()
        RISI.append(m)
    show(sum(RISI[i] for i in range(len(RISI))))
```

Tu sva definirala kvadrat kot levo krajišče (x, y) in dolžino stranice. Drugi dve funkciji `narisi` in `narisi_rezultat_P` nam omogočata prikaz rezultatov, ki jih dobiva v obliki seznama.

```
def packing(kvadrati): #kvadrati je seznam cifer
    p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False)
    x = p.new_variable()
    y = p.new_variable()
    zg_meja = sum(kvadrati) + 1
    a = p.new_variable(binary = True) #kvadrat i ni levo od j
    b = p.new_variable(binary = True) #kvadrat j ni desno od j
    p.set_objective(p['z'])
    p.add_constraint((p['z']) >= (max(kvadrati)))
    for i, d in enumerate(kvadrati): # i je indeks, d je dolžina stranice
        p.add_constraint(x[i] >= 0)  # želimo nenegativne koordinate
        p.add_constraint(y[i] >= 0)
        p.add_constraint(x[i] + d <= p['z']) # omejimo p['z'] z največjo pokrito koor
        p.add_constraint(y[i] + d <= p['z'])
        for j , g in enumerate(kvadrati):
            p.add_constraint(x[i] + d <= x[j] + zg_meja * a[i,j])
            p.add_constraint(x[j] + g <= x[i] + zg_meja * a[j,i])
            p.add_constraint(y[i] + d <= y[j] + zg_meja * b[i,j])
            p.add_constraint(y[j] + g <= y[i] + zg_meja * b[j,i])
    for i, j in Combinations(range(len(kvadrati)), 2):
        p.add_constraint(a[i, j] + a[j, i] + b[i, j] + b[j, i] <= 3)
    z = p.solve()
    xx = p.get_values(x)
    yy = p.get_values(y)
    return (z, [(xx[i], yy[i], d) for i, d in enumerate(kvadrati)])
```

Ta CLP nam reši problem tudi za večji n, do katere rešitve ne pridemo tako intuitivno. Funkcija sprejme seznam cifer v obliki $range(1, n+1)$ in vrne *tuple*, ki vsebuje za prvi element dolžino največjega kvadrata, torej rešitev problema, naslednji element je pa seznam kvadratov, ki so podani od največjega do najmanjšega. Program najprej preveri, da so vse koordinate nenegativne, saj sva tako definirala problem. Nato preverimo pogoje, da morajo biti vsi kvadrati znotraj največjega, ki ga želimo minimizirat in še, da se noben od njih ne sme prekrivat. S pomočjo teh omejitev nam program poda pravilno rešitev, ki jo nato še prikaževa s funkcijo `narisi_rezultat_P`.



Slika 2: Primer za $n = 7$

Opazimo, da problem hitro postane bolj kompleksen.

2.3 Nadgradnja problema

V nadeljevanju bova problem tudi reševala v primeru, če namesto enega kvadrata z dolžino stranice vzamemo dva/tri/štiri ... take kvadrate. Obravnavala bova tudi primer, ko je lahko ena točka v ravnini (velikem kvadratu) pokrita z dvema/tremi/štirimi ... kvadrati.