Pracovní úkol

1. Experimentálně ověřte platnost vztahu pro časovou závislost středního kvadratického posunutí částice $\overline{s^2}$ při Brownově pohybu.

2. Určete aktivitu Brownova pohybu A částic latexu ve vodě za pokojové teploty.

3. Vypočtěte Avogadrovu konstantu N_A.

1 Teorie

Brownovým pohybem rozumíme ustavičný, chaotický pohyb malých částic rozptýlených v kapalině nebo plynu (viz [1]). Pohyb je způsoben molekulami daného prostředí, ve kterém se častice pohybují, a to jejich tepelným pohybem. Díky malým rozměrům částic nejsou nárazy molekul kapaliny na částici v daném okamžiku rovnoměrné ze všech směrů. Proto pozorujeme částici konat chaotický pohyb. Označíme-li s vzdálenost dvou po sobě jdoucích poloh pozorované částice v rovině a určíme-li aritmetický průmer kvadrátu tohoto posunutí, platí pro něj podle [1] Einsteinův vztah

$$\overline{s^2} = 2A \cdot t, \tag{1}$$

kde A je koeficient úměrnosti a nazývá se Aktivita Brownova pohybu. Výpočet $\bar{s^2}$ dělá program Brown použitý při měření. Posunutí částic budeme měřit mikroskopem napojeným na počítač s speciálním programem Motic Images, který po kalibraci určí danou vzdálenost. Tenhle koeficient A se dá vyjádřit vztahem (odvození v [2])

$$A = \frac{RT}{3\pi\eta r N_A}, \tag{2}$$

kde R je molární plynová konstanta, r je poloměr dané částice, T je teplota okolí, η je dynamická viskozita dané suspenze a N_A Avogadrova konstanta. Avogadrovu konstantu můžeme ze vzorce vyjádřit a získáme tak vztah

$$N_A = \frac{RT}{3\pi\eta r A}. \tag{3}$$

Označíme-li vzdálenost dvou naměřených bodů za čas t, tedy bodů i a $i+1$ jako s_t, vdálenost i a $i+2$ bodu jako s_{2t} a analogicky zavedeme i veličiny s_{3t} a s_{4t}, pak z [1] platí následující poměr

$$\overline{s_t} : \overline{s_{2t}} : \overline{s_{3t}} : \overline{s_{4t}} = t : 2t : 3t : 4t. \tag{4}$$

Je-li shoda dostatečná, můžeme data použít k výpočtu aktivity Brownova pohybu a k určení Avogadrovy konstanty. Dynamická viskozita použité suspenze (tekutiny s rozptýlenými částicemi) je závislá na koncentraci částic. Můžeme ji určit podle vzorce z [1] pomocí viskozity destilované vody za dané teploty okolí η_v

$$\eta = (1 + 2.5 \cdot \varphi) \cdot \eta_v, \tag{5}$$

kde φ je objemový podíl částic. Námi použitá suspenze obsahovala objemový podíl částic latexu 1:10000 v destilované vodě.

Aparatura

Použili jsme akustické zařízení měřící časovou prodlevu pro záznam poloh t. Dále stopky, které měří s chybou $\Delta t = 0.01$s. Na chyba určení časové prodlevy měl vliv i lidský faktor, reakční doba, tuto chybu můžeme odhadnout na 0.3s.

Teploměr, kterým jsme určovali okolní teplotu určuje s chybou $\Delta t = 0.1°$C.

Použité pravítko měří s chybou poloviny nejmenšího dílku, tedy 0.5mm.

2 Výsledky měření

Podmínky měření

Měření proběhlo při teplotě $(26,8 \pm 0.1)$ °C, relativní vlhkosti vzduchu 28, 5% a při tlaku prostředí (985.2 ± 0.2)hPa.

Molární plynová konstanta má podle [3] hodnotu $R = 8.314$ J $\cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$.

Akustická značka

Pravidelná akustická značka, která signalizovala zaznamenání pohohy sledované částice byla změřena třikrát pomocí stopek a to po deseti periodách akustické značky. Chybu přístroje můžeme vzhledem k lidskému faktoru zanedbat a uvažovat chybu měření jako reakční chybu běžného člověka, tedy 0.3s. Výsledky jsou zaznamenány v následující tabulce.

Tabulka 1: Měření deseti period akustické značky.

č.	$10t$[s]
1	48.0
2	47.9
3	47.8
$\overline{10t}$	47.9

Navzdory tomu, že jsme naměřili 10 period dané akustické značky, budeme považovat chybu jedné periody jako reakční dobu člověka 0.3s, neboť ta se projeví také při zaznamenávání polohy při zaznění akustické značky, vzhledem k této chybě je chyba přístroje a statistická odchylka měření deseti period zanedbatelná. Proto jsme hodnotu ujedné periody akustické značky určili jako

$$t = (4.8 \pm 0.3)s \tag{6}$$

Měření velikosti částic latexu ve vodě

Z fotografie vytvořené elektronovým mikroskopem (viz příloha) jsme změřili průměr deseti částic. Použili jsme k tomu měřítko (pravítko) s chybou 0.5mm. V následující tabulce jsou uvedeny naměřené hodnoty průměrů částic.

Tabulka 2: Průměry částic.

č.	d[mm]
1	19.5
2	20.5
3	20.5
4	22.5
5	20.5
6	20.5
7	21.0
8	21.5
9	20.0
10	22.5
$\overline{d}$	20.9

Statistická chyba dané sady měření se spočte dle vzorce statistickou chybu (viz [4]) samozřejmě přenásobena studentovým koeficientem.

$$\Delta_{dstat} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(x_i - \overline{x})^2} = 1mm \tag{7}$$

Pro určení celkové chyby naměřených průměrů podle [4] sečteme kvadráty systematické a statistické chyby a odmocníme

$$\Delta_d = \sqrt{\Delta^2_{dsys} + \Delta^2_{dstat}} = 1.1mm. \tag{8}$$

Dostaneme pro průměr částice na fotografii hodnotu

$$d = (21 \pm 1)mm \tag{9}$$

Délka měřítka, které je pod fotografií je $m = (59.0 \pm 0.5)$mm a má reprezentoovat $1\mu m$. Reálný poloměr čáastice pak určíme ze vzorce $r = d/2m$. A jeho chybu určíme z Gaussova vzorce pro chybu odvozené veličiny

$$\Delta_r = \sqrt{\frac{\Delta^2_d}{4m^2} + \frac{d^2\Delta^2_m}{4m^4}} \tag{10}$$

Dostáváme tedy nakonec hodnotu pro poloměr měřených částic

$$r = (0.178 \pm 0.009)\mu m \tag{11}$$

Dynamická viskozita

Dynamická viskozita vody při dané teplotě okolí je dle [5] $\eta_v = 0.851 \cdot 10^{-3}$ Pa · s. Avšak použité množství vody je velmi teplotně náchylné byť jen na příme záření mikroskopu, proto nejistotu teploty vody záměrně zvýšíme na (27 ± 2)°C. Odsud potom chybu hodnoty viskozity určíme jako

$$\Delta_{\eta_v} = \frac{\eta_v(25°C) - \eta_v(29°C)}{2} \tag{12}$$

Odsud hodnota dynamické vikozity i s nejistotou

$$\eta_v = (0.85 \pm 0.04) \cdot 10^{-3} \cdot Pa \cdot s \tag{13}$$

Dynamickou viskozitu suspenze určíme podle vztahu (5), kde ale $\varphi = 1/10000$. Výraz s objemovým podílem je zanedbatelný vzhledem k chybě viskozity vody určené výše. Proto dynamická viskozita bude rovna dynamické viskozitě vody.

$$\eta = \eta_v. \tag{14}$$

Aktivita Brownova pohybu

Na počítači jsme zaznamenávali polohu jednotlivých částic pomocí mikroskopu a programu Motic Image. Program vyhodnocoval výsledky až po úspěšném zaznamenání 25 poloh částice. Podažilo se nám zaznamenat 5 částic. Pouze dvě z nich ale splňovaly podmínku pro poměr průměrných kvadratických posunutí (vztah (4)), a to při 3. a 5. měření. V tabulce 3 jsou uvedeny střední kvadráty aritmetických průměrů pro posunutí za čas t, 2t, 3t a 4t tří částic se středními kvadratickými odchylkami. První z nich je uváděna pro ilustraci neúspěšného měření. Další dvě budou použity pro další vyhodnocování.

Tabulka 3: Střední kvadratické hodnoty posunutí.

částice	$\overline{s_t}[\mu m^2]$	$\overline{s_{2t}}[\mu m^2]$	$\overline{s_{3t}}[\mu m^2]$	$\overline{s_{4t}}[\mu m^2]$
1	16 ±4	38 ±8	66 ±14	95 ±21
3	21 ±3	41 ±5	60 ±7	84 ±9
5	23 ±5	46 ±9	73 ±10	91 ±12

V tabulce 4 jsou uvedeny poměry jednotlivých středních kvadrátů posunutí pro tyto tři částice a v závorce josu uvedeny jejich standartní odchylky.

Tabulka 4: Poměry středních kvadratických hodnot posunutí.

částice	$\overline{s_t}$: $\overline{s_{2t}}$: $\overline{s_{3t}}$: $\overline{s_{4t}}$
1	1 : 2.36 (0.78) : 4.03 (1.37) : 5.81 (2.03)
3	1 : 1.96 (0.39) : 2.86 (0.53) : 4.02 (0.73)
5	1 : 1.99 (0.56) : 3.20 (0.79) : 3.97 (0.99)

Provedli jsme lineární regresi pro částice 3 a 5 podle vzorce (1). Pro lineární regresi jsme použili program Excel. Hodnoty aktivity Brownova pohybu jsou uvedeny v tabulce 5.

Tabulka 5: Aktivita Brownova pohybu.

částice	A $[10^{-12} \cdot m^2 \cdot s^{-1}]$
3	2.40 ±0.05
5	2.15 ±0.05

Směrodatné odchylky provedl program Excel funkcí LINREGRESE. Vynesme ještě do grafu naměřené hodnoty a jejich lineární regrese (Obrázek 1 a 2).

Avogadrova konstanta

Pro Avogadrovu konstantu spočteme ještě průměrnou hodnotu Aktivity brownova pochybu a její směrodatnou ochylku podle analogického vzorce jako (8) tedy

$$\Delta_{\overline{A}} = \sqrt{\frac{\Delta^2_{A_3}}{4} + \frac{\Delta^2_{A_5}}{4}} \tag{15}$$

Dostáváme tedy

$$\overline{A} = (2.28 \pm 0.04) \cdot 10^{-12} \cdot m^2 \cdot s^{-1} \tag{16}$$

Hodnotu Avogadrovy konstanty spočteme ze vzorce (3) a jeho chybu určíme z Gaussova zákona o přenosu chyb

$$\Delta_{N_A} = N_A \sqrt{\frac{\Delta^2_T}{T^2} + \frac{\Delta^2_{eta}}{\eta^2} + \frac{\Delta^2_r}{r^2} + \frac{\Delta^2_{\overline{A}}}{\overline{A}^2}} \tag{17}$$

Odsud tedy dostáváme pro hodnotu Avogadrovy konstanty

$$N_A = (7.8 \pm 0.6) \cdot 10^{23} \cdot mol^{-1} \tag{18}$$

3 Diskuze

Přestože akustická značka byla změřena s poměrně dobrou přesností, museli jsme uvažovat chybu jedné periody jako reakční dobu člověka, neboť u každého zaznamenání polohy se tato chyba projevila. Mohli jsme ale zanedbat vlivy statistické i vliv nepřesnosti měřidla.

Jak je vidět z přiložené fotografie z elektronového mikroskopu, všechny koule latexu nebyli stejně velké, což je dáno i trojrozměrností fotografovaného vzorku. Právě kvůli této skutečnosti jsme získali velkou statistickou chybu průměru částic z fotografie (viz (7)).

U dynamické viskozity jsme museli uvažovat poměrně široký interval teplot vzorku, neboť jsme jeho teplotu během měření průběžně nekontrolovali a bylo by to náročné. Ovšem tahle viskozita se s časem příliš nemění, a proto vliv chyby viskozity na celkovou chybu měření nebyl příliš velký. Změna viskozity při přimíchání latexu se prakticky neprojevila.

Pro časovou náročnost zaznamenávání poloh částic se nám podařilo získat kvalitní hodnoty pouze pro dvě částice. Ovšem z nich získané aktivity Brownova pohybu nebyly zatížené příliš velkou statistickou chybou. Proto po zprůměrování jsme tuto hodnotu mohli dosatit do vzorce pro Avogadrovu konstantu.

Avogadrova konstanta námi naměřená se se od tabulové hodnoty $6.23 \cdot 1023 mol^{-1}$ (viz [5]) lišila zásadně. Tenhle efekt přikládáme nedostatku změřených částic.

4 Závěr

Ověřili jsme platnost vztahů (1) a (4) pro Brownův pohyb. Změřili jsme aktivitu Brownova pohybu za pokojové teplaty jako $A = (2.28 \pm 0.04) \cdot 10^{-12} \cdot m^2 \cdot s^{-1}$. Nepodařilo se nám ale získat hodnoty Avogadorvy konstanty blízké tabulkové hodnotě vlivem nedostatku kvalitních dat z časové náročnosti. Její hodnota byla určena na $N_A = (7.8 \pm 0.6) \cdot 10^{23} \cdot mol^{-1}$.

Použitá literatura

[1] Studium Brownova pohybu [online]. [cit. 2019-24-04]. Dostupné z:
`https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/116`

[2] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1967

[3] Plynová konstanta [online]. [cit. 2019-24-04]. Dostupné z:
`https://www.aldebaran.cz/glossary/print.php?id=406`

[4] Základy zpracování dat fyzikálních měření [online]. [cit. 2019-24-04].
Dostupné z:
`http://fyzikalniolympiada.cz/studijni-texty`

[5] Tabulky [online]. [cit. 2019-24-04]. Dostupné z:
`http://uchi.vscht.cz/uploads/pedagogika/labchi/tabulky.pdf`