

## Pracovní úkol

1. Změřte dynamickou viskozitu destilované vody při pokojové teplotě metodou výtoky kapaliny kapilárou z Mariotteovy láhve.
2. Určete teplotní závislost kinematické viskozity destilované vody v oboru teplot od 20 °C do 60 °C pomocí Ubbelohdeova viskozimetru.
3. Sestrojte graf teplotní závislosti kinematické viskozity. Určete aktivační energii děje.

## Teorie

Naším úkolem bylo naměřit dynamickou viskozitu vody  $\eta$  destilované vody při pokojové teplotě, k tomu nám posloužila Mariottova lahev. Dynamická viskozita  $\eta$  vyjadřuje úměrnost mezi tečným napětím  $\tau$  mezi vrstevkami proudící kapaliny a změnou rychlosti  $\frac{dv}{dy}$  ve směru kolmém k proudění.

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} \text{ [Pa]} \quad (1)$$

Za předpokladu lamilárního proudění platí pro  $\eta$  Poisseuillovův vztah

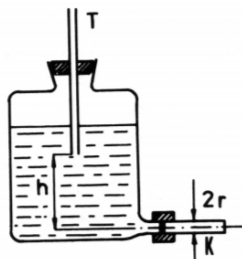
$$\eta = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot p \cdot t}{8 \cdot V \cdot l} \text{ [N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (2)$$

kdy objem  $V$ , délku  $l$  a poloměr  $r$  určíme stejně jako dobu výtoky kapaliny o daném objemu snadno. Problémem je však, jak udržet stálý (hydrostatický tlak), který je funkcí výšky hladiny, která s odtékající hladinou klesá.

$$p = h \cdot \rho \cdot g \text{ [Pa]} \quad (3)$$

a to právě řeší elegantně Mariottova lahev, která nasává vzduch do lahve spolu s odtékající vodou tak, že celkový tlak se, a tudíž i rychlost výtoky, nemění. Výšku  $h$  měříme pomocí katetometru mezi středem kapiláry a spodní částí trubice nasávající vzduch, viz Obrázek 1.

Obrázek 1: Mariottova lahev



Nyní se ještě na chvíli vraťme k předpokladu, že proudění během našeho experimentu s Mariottovou lahví bylo laminární. Laminární proudění je takové, pro které Reynoldsovo číslo nepřekročí hodnotu  $2 \cdot 10^3$ . Reynoldsovo číslo vyjadřuje nakolik se podílí na celkovém odporu kapaliny vnitřní tření, je určeno následujícím vztahem.

$$Re = \frac{2 \cdot r \cdot \rho \cdot u}{\eta} \quad [1] \quad (4)$$

kde  $u$  je střední rychlost kapaliny při průtoku trubicí, kterou lze určit snadno jako

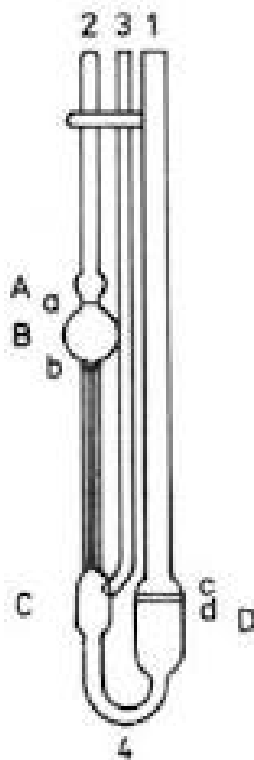
$$u = \frac{V}{\pi \cdot r^2 \cdot t} \quad [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] \quad (5)$$

V případě, že je Reynoldsovo číslo překročí hranici  $2 \cdot 10^3$ , pak přestává platit vztah (1) a je nutno rozšířit Poiseuillův vztah o Hagenovu úpravu.

$$\eta = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot p \cdot t}{8 \cdot V \cdot l} - \frac{n}{8 \cdot \pi \cdot V \cdot l \cdot t} \quad [\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (6)$$

kde  $n$  je číselný koeficient blížící hodnotě 1.1.

Obrázek 2: Ubbelohdeovův viskozimetr



Dále jsme měřili teplotní závislost kinematické viskozity  $\nu$ , která je definována jako dynamická viskozita na hustotu tekutiny a zároveň vztah (8) definuje vztah  $\nu$  na čase, za který proteče kapalina mezi ryskou a a b Ubbelohdeovým viskozimetrem (viz Obrázek 2).

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}] \quad (7)$$

$$\nu = k \cdot t [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}] \quad (8)$$

kde  $k$  je kalibrační konstanta uvedená ve zkušebním listu Ubbelohdeova viskozimetru.

Jako poslední určuje aktivační energii  $\varepsilon_A$ , která nám dává do vztahu dynamickou viskozitu a teplotu, jelikož viskozita je transportním případem transportního jevu, kdy přenos hybnosti molekul pomocí molekul je procesem tepelně aktivovaným dle vztahu.

$$\eta = \eta_0 \cdot \exp\left(\frac{\varepsilon_A}{k \cdot T}\right) [\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (9)$$

kde  $k$  je Boltzmannova konstanta o hodnotě  $k = 1.381 \cdot 10^{-23} [\text{J} \cdot \text{K}^{-1}]$  dle [4] a  $T$  termodynamická teplota. Zlogaritmováním dostaneme vztah do tvaru přímky, přičemž  $\frac{\varepsilon_A}{k}$  je její směrnici, kterou lze spočítat lineární regresí naměřených hodnot.

$$\ln(\eta) = \ln(\eta_0) + \frac{\varepsilon_A}{k \cdot T} [\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (10)$$

Na konec se vyjádříme ještě k chybám měřených veličin, pomocí metody přenosu chyb dle [1] a [3] jsme určili následující vztahy popisující chyby

$$\delta_\nu = \delta_t = \frac{\Delta_t}{t} \quad (11)$$

$$\delta_u = \sqrt{\delta_V^2 + 2 \cdot \delta_r^2 + \delta_t^2} \quad (12)$$

$$\delta_p = \delta_h \quad (13)$$

$$\delta_\eta = \sqrt{\delta_V^2 + 4 \cdot \delta_r^2 + \delta_t^2 + \delta_p^2 + \delta_l^2} \quad (14)$$

$$\delta_{Re} = \sqrt{\delta_\eta^2 + \delta_r^2 + \delta_u^2} \quad (15)$$

$$\delta_{\varepsilon_A} = \sqrt{\delta_\eta^2 + \delta_T^2 + \text{stat}^2} \quad (16)$$

kde ve vztahu pro aktivační energii uvažuje pouze přenesené chyby i chybu regrese, celkovou chybu za nás počítá ROOT. Všechny výše uvedené teoretické poznatky vychází z [2].

## Výsledky měření

Teplota v laboratoři během měření byla  $(24.6 \pm 0.4) ^\circ\text{C}$ , jelikož se teplota v laboratoři výrazně neměnila v průběhu měření, pak tuto teplotu považujeme za teplotu vody v Mariottově lahvi v průběhu všech měření. Hustota destilované vody za této teploty je

$997 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , tuto teplotu považuje za stálou a přesnou. Tlak v místnosti byl  $(986 \pm 2) \text{ hPa}$ , ten však výrazně viskozitu vody neovlivňuje za předpokladu, že se výrazně neměnil, což se nedělo.

Kalibrační konstantu  $k$  Ubbelohdeova viskozimetru jsme našli ve zkušební listu jako  $k = 3.003 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . Stejně tak rozměry trubice, kterou vytéká voda z Mariottovy lahve, jsme našli v příložené dokumentaci jako  $r = (0,645 \pm 0,015) \text{ mm}$  a  $l = (146 \pm 2) \text{ mm}$ . Chybu rtuťového teploměru uvažujeme jako  $0.25 \text{ }^\circ\text{C}$ , jakožto polovinu nejmenšího dílku, dle kterého jsme měřili (byť stupnice je stupňová). S ohledem na podmínky v laboratoři dle [2] je přesnost měření katetometrem 1 milimetr, výsledná naměřená hodnota výšky  $h = (57 \pm 1) \text{ mm}$ . Chybu měření času  $s$  ohledem na běžnou lidskou reakční dobu odhadujeme jako  $0.2 \text{ s}$ .

Průměrná doba výtoku objemu  $V = (40.0 \pm 0.5) \text{ ml}$  z Mariottovy lahve byla  $t = (150.31 \pm 0.98) \text{ s}$ , s pomocí toho údaje jsme určili průměrnou rychlost dle vztahu (5) a (12) jako  $u = (2.04 \pm 0.07) \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$  a tudíž i Reynoldsovo číslo  $Re = (268.1 \pm 17.9)$  dle (4) a (15), čili jsme zjistili, že Hagenovu úpravu není potřeba užít, protože proudění bylo laminární.

Hlavní výsledky měření jsme zaznamenali do tabulek, kdy jako objem  $V$  bylo voleno ve všech případech jako  $40 \text{ ml}$  z důvodu, co nejvíc podobných podmínek při měření Mariottovou lahví, jaké problémy jsme se pokoušeli eliminovat popsáno blíže v diskusi. Ubbelohdeova viskozimetru nezačínáme měření na  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  z prostého důvodu, že na takovou teplotu se nám nepovedlo přístroj podchladit. Snažili jsme se o měření po pěti stupních, přičemž nám zbyl čas navíc, tak jsme provedli měření navíc v místech, kde na teplotní škále byly větší rozestupy.

Tabulka 1: Výsledky měření  $\eta$  Mariottovou trubicí

$t [\text{s}]$	$\eta [10^{-4} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$
149.31	$9.70 \pm 0.49$
151	$9.81 \pm 0.49$
149.48	$9.72 \pm 0.49$
151.47	$9.84 \pm 0.49$
149.55	$9.72 \pm 0.49$
150.37	$9.77 \pm 0.49$
151.99	$9.88 \pm 0.50$
149.88	$9.74 \pm 0.49$
151.92	$9.87 \pm 0.49$
150.56	$9.79 \pm 0.49$
149.68	$9.73 \pm 0.49$
149.22	$9.70 \pm 0.49$
149.56	$9.72 \pm 0.49$

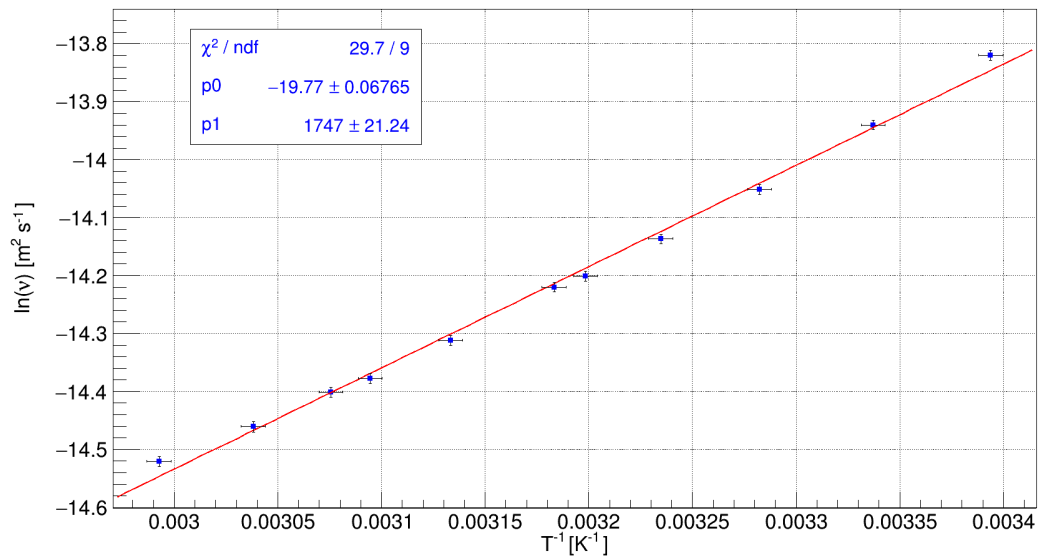
Celkově pak v průměru  $\eta = (9.77 \pm 0.49) \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , pro porovnání, dle [5] by  $\eta$  měla být  $8.97 \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Více o tom, kde mohly vzniknout chyby v diskusi.

Tabulka 2: Výsledky měření  $\nu$  na Ubbelohdeově viskozimetru

T [° C]	t [s]	$\nu$ [ $10^{-1} \cdot \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ ]
21.5	331.56	$9.96 \pm 0.06$
26.5	293.99	$8.83 \pm 0.06$
31.5	263.05	$7.90 \pm 0.06$
36	241.46	$7.25 \pm 0.06$
39.5	226.40	$6.80 \pm 0.06$
41	222.24	$6.67 \pm 0.06$
46	202.77	$6.09 \pm 0.06$
50	189.81	$5.70 \pm 0.06$
52	185.48	$5.57 \pm 0.06$
56	174.65	$5.24 \pm 0.06$
61	164.56	$4.94 \pm 0.06$

Z hodnot v tabulce č. 2 jsme dle určili lineární aproximaci  $\ln(\nu)$  jako funkci  $\frac{1}{T}$ . Zobrazeno na grafu na obrázku č. 3.

Obrázek 3: Závisť  $\ln(\nu)$  na  $\frac{1}{T}$



Vidíme, že grafovanou závislost lze aproximovat pomocí lineární funkce  $y = p_1 x + p_0$ . Z koeficientů regrese  $p_0$  a  $p_1$  snadno určíme hodnotu  $\varepsilon_A$  dle (10) jako  $\varepsilon_A = (2.41 \pm 0.03) \cdot 10^{-20} \text{ J}$  a  $\nu_0 = (2.59 \pm 0.01) \cdot 10^{-9} \cdot \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ .

## Diskuse

Možnou společnou chybou měření oběma viskozitoměry může být kontaminace destilované vody jinými příměsemi.

Naměřená hodnota  $\eta$  s užitím Mariottově lahve není příliš přesná a to se snažíme odhady chyb nepřehánět, bohužel zde jsou velké chyby dány již přístrojem. Už jen  $r$ , které se vyskytuje ve vztahu (2) ve čtvrté mocnině máme zadane s relativní chybou 2.36 %, což vnáší do měření kruciální chybu. Ani relativní chyba  $l$ , která činí 1.4 % není malá, navíc ji neovlivníme sebelepší precizností měření. Další nezanedbatelnou chybou bylo času respektive objemu, nepřesnost vzniklou existencí kapek po předchozím měření se nám nepodařilo účinně eliminovat. Dalším problémem mohlo být, že kvůli rozvlněné hladině se špatně určuje odtokový objem. Provedli jsme tolik měření, že vždy po měření jsme mohli překontrolovat výšku hladiny a pokud se lišila od naší referenční hodnoty 40ml výrazněji měnila, tak jsme tyto hodnoty rovnou vyškrtli a provedli měření znovu. Problémem mohl být též špatně pootočený kohout na trubici, ale i na to jsme se snažili dávat pozor. Vezmeme-li toto vše na vědomí, tak se nám zdá rozdíl mezi naměřenou dynamickou viskozitou  $\eta = (9.77 \pm 0.78) \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  a tabulkovou hodnotou  $8.97 \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  zanedbatelný. Nezdá se, že bychom se dopustili systematické chyby.

Naměřená hodnota  $\nu$  je naopak poměrně přesná. Tento fakt přisuzujeme tomu, že chyba měření byla závislá, mimo provedení přístroje, pouze na naší reakční době, která je navíc o tři řády nižší než nejmenší naměřený čas průtoku Ubbelohdeova viskozimetru.

## Závěr

Naměřili jsme dynamickou viskozitu  $\eta = (9.77 \pm 0.49) \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , a poté jsme metodou lineární regrese určili aktivační energii  $\varepsilon_A = (2.41 \pm 0.03) \cdot 10^{-20} \text{ J}$  navíc jsme vynesli do grafu závislost  $\ln(\eta) \sim \frac{1}{T}$  i aproximující křivku (přímku)  $y = p_1 x + p_0$ , kde  $p_0 = -19.77 \pm 0.07$  a  $p_1 = 1747 \pm 21$ .

## Použitá literatura

- [1] BROŽ, J. a KOL. Základy fyzikálních měření I. 1. vydání. Praha: SPN, 1983
- [2] Fyzikální praktikum. Měření viskozity [online][cit. 2019-03-10]. Dostupné z: [https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_112.pdf](https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_112.pdf)
- [3] ENGLICH, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vydání. Praha: Matfyzpress, 2006, ISBN 80-86732-93-2
- [4] Table of physical constants - Wikiversity [online][cit. 2019-03-10]. Dostupné z: [https://en.wikiversity.org/wiki/Table\\_of\\_physical\\_constants](https://en.wikiversity.org/wiki/Table_of_physical_constants)

[5] Engeneering toolbox - Water dynamic, kinematic viscosity [online][cit. 2019-03-10]. Dostupné z: [https://www.engineeringtoolbox.com/water-dynamic-kinematic-viscosity-d\\_596.html](https://www.engineeringtoolbox.com/water-dynamic-kinematic-viscosity-d_596.html)