

1 Pracovní úkol

1. Určete rychlost šíření podélných zvukových vln v mosazné tyči metodou Kundtovy trubice. Z naměřené rychlosti zvuku stanovte modul pružnosti v tahu E materiálu tyče.
2. Změřte rychlost zvuku ve vzduchu a v oxidu uhličitém pomocí uzavřeného rezonátoru. Výsledky měření zpracujte metodou lineární regrese a graficky znázorněte.
3. Vypočítejte Poissonovu konstantu oxidu uhličitého z naměřené rychlosti zvuku.

2 Teorie

Rychlost šíření zvuku určujeme podle vztahu

$$c = \lambda \nu, \quad (1)$$

kde λ je vlnová délka a ν frekvence (kmitočet).

2.1 Kundtova trubice

Slouží ke zviditelnění stojatých vln v plynech. Plyn je napuštěn ve skleněné trubici. Zároveň je v trubici rovnoměrně rozložen prášek. Na konci tyče, která je zasunuta do trubice a slouží jako zdroj zvuku je upevněn lehký korkový píst. Rozkmitáním tyče rozkmitáme též plyn uvnitř trubice a v prášku se vytvoří obrazec podle Obr. 1. Jak je vidět z obrázku 1, na koncích tyče jsou uzly rychlostí. Označíme-li vzdálenost mezi dvěma kmitnami (resp.



Obrázek 1: Obrazec vytvořený v prášku.

uzly) l , pak vlnová délka je dána vztahem

$$\lambda = 2l. \quad (2)$$

Pokud označíme rychlost a vlnovou délku v prostředí tyče dolním indexem 1 a v plynu dolním indexem 2 platí podle [1] vztah

$$\frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}. \quad (3)$$

Tyč je upevněná v polovině, proto délka tyče je rovna polovině základního tónu tyče. Vlnovou délku v plynu určíme podle obrazců v trubici. Určujeme-li rychlost zvuku v tyči je proto nutné, ze vztahu (3), znát rychlost šíření zvuku v plynu.

Pro určení rychlosti šíření zvuku v plynech můžeme použít Laplaceův vztah (uveden např. v [1])

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}, \quad (4)$$

kde κ je Poissonova konstanta, p tlak plynu a ρ je hustota plynu. Při nepříliš vysokém tlaku a dosazením ze stavové rovnice pro ideální plyn dostaneme vztah pro rychlost zvuku v plynu v závislosti na teplotě

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma \cdot t\right)}, \quad (5)$$

kde p_0 je tlak plynu při teplotě 0°C , ρ_0 je příslušná hodnota tlaku plynu a γ je součinitel teplotní rozpínivosti plynu.

Podle [1] určujeme rychlost zvuku v suchém plynu v závislosti na teplotě podle vztahu

$$c = (331,82 + 0,61 \cdot t)m \cdot s^{-1}. \quad (6)$$

A při 50 % vlhkosti vzduchu v okolí 20 °C je rychlost zvuku určena vztahem

$$c = (344,36 + 0,63(t - 20))m \cdot s^{-1}. \quad (7)$$

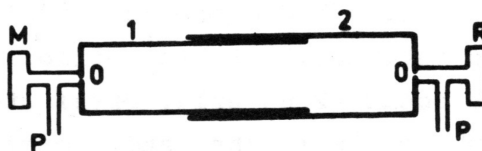
Modul pružnosti tyče určíme podle vzorce (podle [1])

$$E = c^2 \rho, \quad (8)$$

kde c je rychlost zvuku v tyči a ρ hustota materiálu tyče.

2.2 Uzavřený rezonátor

Aparaturu tvoří na obou koncích uzavřená trubice, kde na jednu konci je tónový generátor s modulovatelnou frekvencí. Druhý konec je uzavřen mikrofonem, který snímá zvuk s výstupem na mikroampérmetru (viz Obr. 2). Rychlost zvuku můžeme určovat dvěma způsoby. Při prvním způsobu zvětšujeme délku tyče a délku vlny udává



Obrázek 2: Schéma uzavřeného rezonátoru.

vzdálenost mezi dvěma rezonancemi ($l_1 - l_2$) je rovna polovině vlnové délky. Pak rychlost zvuku určuje vztah

$$c = 2(l_1 - l_2)v. \quad (9)$$

Při druhém způsobu ponecháváme délku trubice konstantní a měníme frekvenci generovaného signálu. Rezonance nastává při frekvencích, kdy délka vlny λ_k odpovídá podmínce (podle [1])

$$\lambda_k = \frac{2l}{k}, \quad (10)$$

kde k je přirozené číslo a l je délka trubice. Odpovídající frekvenci označme ν_k . Při dosazení do (1) dostáváme pro rychlost zvuku

$$c = \frac{2l\nu_k}{k}. \quad (11)$$

Poissonovu konstantu oxidu uhličitého určíme ze vztahu (odvozeno např. v [1])

$$\kappa = \frac{c^2 \mu}{RT}, \quad (12)$$

kde c je rychlost vzduchu v CO_2 , μ molekulová hmotnost CO_2 , R molární plynová konstanta a T teplota v Kelvinech.

2.3 Pomůcky

Použili jsme dělnický metr, který určuje vzdálenost se systematickou chybou $s_{l_{m1}} = 0,5\text{mm}$. Pro obtížnost měření u trubice však ve zbytku textu budeme uvažovat $s_l = 2\text{mm}$. Měřítka určující délku trubice rezonátoru určuje s chybou $s_{l_{m2}} = 0,5\text{mm}$. Na generátoru odečítáme frekvenci při rezonanci s nejistotou $s_\nu = 2\text{Hz}$.

3 Výsledky měření

3.1 Podmínky měření a konstanty

Měření proběhlo při teplotě $(25.8 \pm 0.4)^\circ\text{C}$, relativní vlhkosti vzduchu $(36.0 \pm 2.5)\%$ a při tlaku prostředí $(985 \pm 2)\text{hPa}$.

Molární plynová konstanta má podle [2] hodnotu $R = 8.314\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Hustota mosazi podle [3] je $\rho = (8400 - 8750)\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Hmotnostní konstanta je podle [4] rovna $m_u = 1.661 \cdot 10^{-27}\text{kg}$ a relativní molekulová hmotnost CO_2 je podle periodické tabulky $m_{r\text{CO}_2} = 44.01$.

3.2 Rychlost zvuku v mosazi

Délku tyče jsme určili pomocí dělnického metru na $d = (150.90 \pm 0.05)\text{cm}$. Potom vlnová délka základního tónu na tyči byla

$$\lambda_1 = (301,8 \pm 0.1)\text{cm}.$$

Měřili jsme rezonanční odezvu v Kundtově trubici pro různé zasunutí tyče v trubici a zjistili jsme největší rezonanční odezvu při účinné délce trubice l (tj. délka od uzavřeného konce po korkový píst)

$$l = (61.8 \pm 0.2)\text{cm}.$$

Toto určení největší odezvy však bylo pouze vizuální, proto nejistotu tohoto odhadu s_o budeme uvažovat $s_o = 0.3\text{cm}$. Potom celkovou chybu naměřené délky l zjistíme ze vzorce pro součet chyb (z [5])

$$s_c = \sqrt{s_l^2 + s_o^2}. \quad (13)$$

Odtud účinná délka trubice při největší rezonanční odezvě nakonec

$$l = (61.8 \pm 0.4)\text{cm}.$$

V trubici se rozložili přesně dvě vlny. Potom vlnová délka λ_2 ve vzduchu bude

$$\lambda_2 = l/2 = (30.9 \pm 0.2)\text{cm}.$$

Pro určení rychlosti zvuku ve vzduchu máme vzorce (6) a (7). Avšak ani jeden neodpovídá vzorci pro rychlost zvuku při vlhkosti, ve které jsme měření prováděli. Prvním vzorcem získáme hodnotu $(347.6 \pm 0.3)\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Druhým vzorcem získáme hodnotu $(348.0 \pm 0.3)\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Chybu jsme určili pomocí Gaussova vzorce pro hromadění chyb (viz [5])

$$s_u = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 s_{x_i}^2}. \quad (14)$$

Reálná hodnota bude někde mezi těmito dvěma vypočtenými hodnotami. Vezmeme tedy aritmetický průměr těchto hodnot a chybu stanovíme tak, aby obě spočtené hodnoty i s chybami byli v rámci této chyby. Pak rychlost šíření zvukových vln ve vzduchu za daných podmínek bude

$$c_2 = (347.8 \pm 0.5)\text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ze vzorce (3) můžeme konečně určit rychlost šíření podélných vln v mosazi a chybu této veličiny určit ze vztahu (14). Tedy

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} c_2 = (3397 \pm 23)\text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

kde tabulková hodnota podle [6] je $c_{1t} = 3400\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.3 Modul pružnosti tyče v tahu

Modul pružnosti určíme ze vztahu (8), kde hustotu budeme brát jako aritmetickou hodnotu rosahu, který je uveden v sekci 3.1 a její chybu jako polovinu rozdílu těchto krajních hodnot, tedy $\rho = (8580 \pm 180)\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Odtud již snadno spočteme modul pružnosti mosazné tyče v tahu a jeho chybu určíme podle vztahu plynoucího z Gaussova vztahu (14)

$$s_E = \sqrt{4c^2\rho^2 s_c^2 + c^4 s_\rho^2} \quad (15)$$

Potom hodnota modulu pružnosti E bude

$$E = (99 \pm 3)\text{GPa},$$

kde tabulková hodnota, podle [7], je $E_t = 99\text{GPa}$.

3.4 Rychlost zvuku ve vzduchu - 1. metoda

Uveďme nejprve v tabulce naměřené hodnoty frekvencí, při kterých nastala rezonance.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty frekvencí při rezonanci v uzavřeném rezonátoru pro vzduch

č.	$\nu[\text{kHz}]$
1	0.204
2	0.429
3	0.658
4	0.856
5	1.066
6	1.279
7	1.495
8	1.708
9	1.917
10	2.133
11	2.350
12	2.563
13	2.772
14	2.986
15	3.204
16	3.413
17	3.625
18	3.840
19	4.057

Uvědomíme si, že vztah (10) lze přepsat na vztah

$$\nu_k = ak, \quad (16)$$

kde

$$a = \frac{c}{2l} \quad (17)$$

je konstanta a lze ji určit pro každé měření. Následně pomocí metody nejmenších čtverců určíme nejpravděpodobnější hodnotu konstanty a a její směrodatnou odchylku podle vztahu z [5]

$$s_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta_{a_i}^2}{n(n-1)}}. \quad (18)$$

Odsud dostáváme hodnotu konstanty a pro vzduch

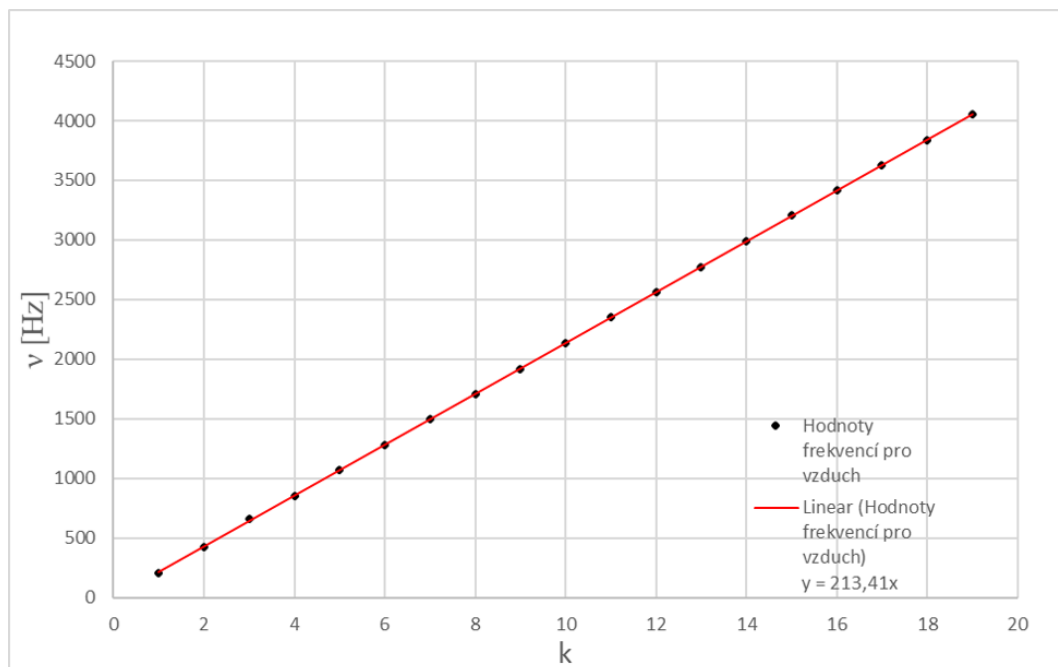
$$a_v = (213 \pm 1)\text{s}^{-1}$$

a podle vzorce (17), kde délka rezonátoru byla určena na $l = (80.00 \pm 0.05)\text{cm}$, určíme rychlost zvuku ve vzduchu na

$$c_{vz} = (341 \pm 2)\text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

kde chybu jsme určili dle Gaussova vztahu pro hromadění chyb (14).

Nyní znázorníme dané body do grafu a proložíme je lineární křivkou pomocí lineární regrese, i tímto způsobem můžeme získat požadované a .



Obrázek 3: Naměřené hodnoty frekvencí při rezonanci proložené křivkou lineární regrese pro vzduch.

V grafu (Obrázek 3) vidíme, že naměřené hodnoty korespondují s lineární závislosti, která odpovídá teorii. Chybové úsečky jsme do grafu neuváděli, neboť statistická odchylka byla v rámci jednotek a chyba přístroje, ze kterého jsme odečítali byla $s_\nu = 2\text{Hz}$, proto by chybové úsečky nebyly ani patrné.

3.5 Rychlost zvuku ve vzduchu - 2. metoda

Na frekvenčním generátoru jsme nastavili frekvenci $\nu = (2440 \pm 2)\text{Hz}$, což představovalo rezonanci při délce rezonátoru $(70.00 \pm 0.05)\text{cm}$. Další polohy (délky rezonátoru), ve kterých jsme našli rezonanci jsou uvedeny v následující tabulce, chyby jednotlivých hodnot jsou vždy $s_l = 0.05\text{cm}$.

Tabulka 2: Délky rezonátoru při rezonanci pro počáteční frekvenci 2440Hz

č.	$l[\text{cm}]$
1	70.00
2	77.10
3	84.20

Mezi každou rezonancí jsme naměřili tozdl délky $\Delta l = l_2 - l_1 = (7.10 \pm 0.07)\text{cm}$, kde chybu jsme určili podle vzorce pro celkovou chybu při odčítání (viz [5])

$$s_c = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \quad (19)$$

Podle vzorce (9) určíme následně hodnotu rychlosti zvuku ve vzduchu a jeho chybu určíme z Gaussova vztahu (14)

$$c_{vz} = (347 \pm 3)\text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3.6 Rychlost zvuku v oxidu uhličitém

Uved' me nejprve v tabulce naměřené hodnoty frekvencí, při kterých nastala rezonance.

Tabulka 3: Naměřené hodnoty frekvencí při rezonanci v uzavřeném rezonátoru pro oxid uhličitý

č.	ν [kHz]
1	0.161
2	0.338
3	0.489
4	0.674
5	0.838
6	1.008
7	1.178
8	1.346
9	1.510
10	1.681
11	1.850
12	2.015
13	2.182
14	2.352
15	2.523
16	2.689
17	2.853
18	3.025
19	3.196
20	3.361

Podobným postupem jako v předchozí sekci dostáváme hodnotu konstanty a pro oxid uhličitý

$$a_{CO_2} = (167.5 \pm 0.4)s^{-1}$$

a podle vzorce (17), kde délka rezonátoru byla určena na $l = (80.00 \pm 0.05)cm$, určíme rychlost zvuku v oxidu uhličitém na

$$c_{CO_2} = (268 \pm 1)m \cdot s^{-1},$$

kde chybu jsme určili dle Gaussova vztahu pro hromadění chyb (14). Vynesme ještě dané naměřené hodnoty pro CO_2 do grafu podobně jako v sekci 3.4 a proložme body křivkou lineární regrese.

Na druhém grafu (Obrázek 4) vídíme znovu, že body naměřených hodnot korespondují s lineární závislostí odvozené v teorii.

3.7 Poissonova konstanta pro CO_2

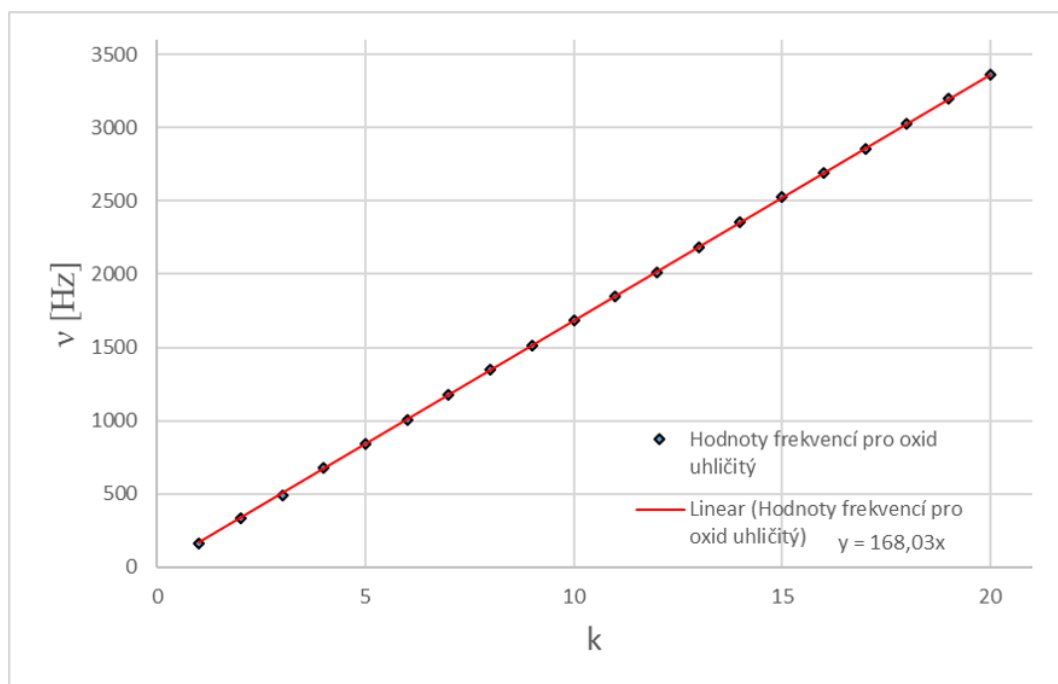
Poissonovu konstantu určíme ze vzorce (12), kde rychlost zvuku jsme získali v předchozí sekci. Chybu určíme z odvozeného vztahu podle (14)

$$s_k = \sqrt{\frac{4c^2\mu^2}{R^2T^2}s_c^2 + \frac{c^4\mu^2}{R^2T^4}s_T^2}. \quad (20)$$

Nakonec tedy

$$\kappa_{CO_2} = 1.27 \pm 0.01,$$

kde tabulková hodnota udává Poissonovu konstantu (viz [8]) jako $\kappa_{tab} = 1.29$.



Obrázek 4: Naměřené hodnoty frekvencí při rezonanci proložené křivkou lineární regrese pro oxid uhličitý.

4 Diskuse

Měřili jsme pomocí metody Kundtovy trubice rychlost podélných vln v mosazi, neměřená hodnota $c_1 = (3397 \pm 23) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ se prakticky nelišila od tabulkové hodnoty $c_{1t} = 3400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ve výpočtu této rychlosti jsme použili vlnové délky v mosazi a ve vzduchu, kde větší chybu představovalo měření vlnové délky ve vzduchu, neboť interval účinné délky byl široký a hodnotu účinné délky, při které byla rezonance nejvýraznější určil lidský element pouze vizuálně.

Modul pružnosti jsme změřili s relativní chybou $\delta_E = 3\%$. Ve vzorci byla použita rychlost šíření podélných vln v mosazi, která sice vystupovala ve druhé mocnině, avšak v předchozím výpočtu byla určena s vysokou přesností. Větší vliv na velikost nejistoty modulu pružnosti v tahu této tyče měla nejistota hustoty mosazi, neboť námi použité tabulky udávají pouze rozmezí, ve kterém se tato hustota může pohybovat. Jelikož jsme neměli k dispozici žádné další vodítko, podle kterého bychom určili hustotu mosazi přesněji, použili jsme prostřední hodnotu tohoto udaného intervalu a chybu považovali takovou, aby všechny možné hodnoty byly v rámci chyby.

Naměřené hodnoty rezonancí v uzavřeném rezonátoru odpovídaly předpokládané lineární závislosti, která byla uvedena v teorii. Zavedli jsme parametr a , který se dal spočíst pro každou naměřenou hodnotu a následně jsme pomocí metody nejmenších čtverců našli jeho průměrnou hodnotu a odchylku. Tento parametr je identický směrnici lineární křivky při použití lineární regrese. Pro vzduch jsme takto spočetli rychlost šíření zvuku $c_{vz} = (341 \pm 2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tato hodnota však reálné hodnotě určené v sekci 3.2 $c_2 = (347.8 \pm 0.5) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ neodpovídala ani v rámci chyby. Tenhle nesoulad mezi výsledky může být způsobený tím, že v rezonátoru mohl zůstat zbytek CO_2 po minulém experimentu a nebyl dokonale vyfoukán pomocí balónku. Všechny hodnoty se však lišili velmi málo od regresní křivky jak můžeme vidět v Obrázku 3. Hlavní zdroj nejistoty představovala statistická odchylka u koeficientu a . Podobně jsme tuto metodu statické délky rezonátoru použili pro měření rychlosti šíření zvuku v CO_2 . Největší příspěvek do celkové chyby představovala znovu statistická odchylka koeficientu a . Získali jsme hodnotu $c_{\text{CO}_2} = (268 \pm 1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tabulková hodnota (viz [6]) je $c_{t\text{CO}_2} = 260 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Na odlišnost naší a tabulkové hodnoty mohla mít vliv znovu přítomnost stopového množství jiného plynu v rezonátoru, v tomto případě vzduchu, který nemusel být všechn nahrazen oxidem uhličitým při jejich výměně.

Pro měření rychlosti zvuku ve vzduchu jsme použili ještě druhou metodu, která spočívala v měnění délky rezonátoru. Zde jsme naměřili pouze dvě hodnoty vlnové délky, které se však shodovali. Největší chybu nám zde však zajistilo odčítání, které bylo použito. Přesto získaná rychlost zvuku byla $c_{vz} = (347 \pm 3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, kdy reálná hodnota zjištěná ze vzorců (6) a (7) byla v rámci chyby.

Poissonova konstanta pro CO_2 byla určena na $\kappa_{\text{CO}_2} = 1.27 \pm 0.01$. S tabulkovou hodnotou 1.29 se lišila o dvě

setiny, což je důsledek neshody u naměřené hodnoty rychlosti zvuku v CO_2 .

5 Závěr

Podařilo se nám určit rychlost šíření podélných vln v mosazi $c_1 = (3397 \pm 23) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ s dobrou shodou s tabulkovou hodnotou. Dále jsme získali modul pružnosti v tahu mosazi $E = (99 \pm 3) \text{ GPa}$, která se taktéž dobře shodovala s tabulkovou hodnotou. Rychlost zvuku ve vzduchu jsme první metodou určili na $c_{vz} = (341 \pm 2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a druhou metodou na $c_{vz} = (347 \pm 3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V oxidu uhličitém jsme určili rychlost šíření zvuku na $c_{CO_2} = (268 \pm 1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Poissonova konstanta pro oxid uhličitý byla určena na $k_{CO_2} = 1.27 \pm 0.01$.

Použitá literatura

- [1] Studium Brownova pohybu [online]. [cit. 2019-12-05]. Dostupné z:
<https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/110>
- [2] Plynová konstanta [online]. [cit. 2019-12-05]. Dostupné z:
<https://www.aldebaran.cz/glossary/print.php?id=406>
- [3] Hustota mosazi [online]. [cit. 2019-12-05]. Dostupné z:
<http://kabinet.fyzika.net/studium/tabulky/hustota-latek.php>
- [4] Hmotnostní konstanta [online]. [cit. 2019-12-05]. Dostupné z:
<http://www.nabla.cz/obsah/chemie/atomova-hmotnostni-konstanta.php>
- [5] Základy zpracování dat fyzikálních měření [online]. [cit. 2019-12-05].
Dostupné z:
<http://fyzikalniolympiada.cz/studijni-texty>
- [6] Rychlost šíření zvuku v mosazi v oxidu uhličitém [online]. [cit. 2019-12-05]. Dostupné z:
<https://media0.mypage.cz/files/media0:55ca371478eb9.pdf>
- [7] Modul pružnosti v tahu mosazi [online]. [cit. 2019-12-05]. Dostupné z:
<https://e-konstrukter.cz/prakticka-informace/mechanicke-vlastnosti-pevnych-latek>
- [8] Poissonova konstanta pro oxid uhličitý [online]. [cit. 2019-12-05]. Dostupné z:
https://cs.wikipedia.org/wiki/Poissonova_konstanta