

## Pracovní úkol

1. Okalibrujte pomocí bodu tání ledu, bodu varu vody a bodu tuhnutí cínu:
  - (a) platinový odporový teploměr (určete konstanty  $R_0$ ,  $A$ ,  $B$ ).
  - (b) termočlánek měď-konstantan (určete konstanty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ )
2. Registrujte časový průběh termoelektrického napětí termočlánku  $\epsilon(\tau)$  a odporu platinového teploměru  $R(\tau)$  při ohřevu a varu vody a při tuhnutí cínu. Změřené průběhy graficky znázorněte.
3. Nakreslete graf teplotní závislosti odporu  $R$  (kalibrační křivka odporového teploměru) a graf teplotní závislosti termoelektrického napětí  $\epsilon$  (kalibrační křivka termočlánku).
4. Ze závislostí  $\epsilon(t)$  a  $R(t)$  dle bodu 2 a kalibračních hodnot dle bodu 1 určete časové závislosti  $\tau_R(t)$  a  $\tau_\epsilon(t)$  teplot měřených odporovým teploměrem a termočlánkem při ohřevu vody a tuhnutí cínu. Určené závislosti porovnejte.

## Teorie

Naším úkolem je zkalibrovat termočlánek měď-konstantan a platinový odporový teploměr. Závislosti  $\epsilon(t)$  pro termočlánek (1) a  $R(t)$  pro odporový teploměr (2) aproximujeme pomocí Taylorových polynomů, s ohledem na přesnost měření nemá smysl snažit se použít polynomy vyššího řádu než dva.

$$\epsilon = a + b \cdot (t_2 - t_1) + c \cdot (t_2 - t_1)^2 \text{ [V]} \quad (1)$$

$$R = R_0 \cdot (1 + A \cdot t + B \cdot t^2) \text{ [\Omega]} \quad (2)$$

kde  $\epsilon$  je termoelektrické napětí na termočlánku,  $R$  odpor odporového teploměru,  $t$  teplota v kelvinech a  $R_0$  odpor odporového teploměru při teplotě  $0^\circ \text{ C}$ . Musíme tedy určit příslušné konstanty  $a$ ,  $b$ ,  $c$  pro termočlánek a  $A$ ,  $B$  pro odporový teploměr. Hodí se také poznamenat, že konstanta  $a$  by měla být nulová, ač se níže ukáže, že není, naměřenou hodnotu je pak možno považovat za chybu měření termočlánku. Všechny konstanty jsou nezávislé na teplotě. Je nutno tedy naměřit proměnné  $\epsilon$  a  $R$  ve třech referenčních

bodech a určit konstanty pomocí následujících vztahů.

$$a = \epsilon(t_1) [V] \quad (3)$$

$$b = \frac{a \cdot (t_2^2 - t_3^2) + e(t_2) \cdot t_3^2 - e(t_3) \cdot t_2^2}{t_2 \cdot t_3 \cdot (t_3 - t_2)} [VK^{-1}] \quad (4)$$

$$c = \frac{a \cdot (t_2 + t_3) + e(t_3) \cdot t_2 - e(t_2) \cdot t_3}{t_2 \cdot t_3 \cdot (t_3 - t_2)} [VK^{-2}] \quad (5)$$

$$R_0 = R(t_1) [\Omega] \quad (6)$$

$$A = \frac{t_2^2 \cdot (R_0 - R_3) + t_3^2 \cdot (R_2 - R_0)}{R_0 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot (t_3 - t_2)} [K^{-1}] \quad (7)$$

$$B = \frac{t_2 \cdot (R_3 - R_0) + t_3 \cdot (R_0 - R_2)}{R_0 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot (t_3 - t_2)} [K^{-2}] \quad (8)$$

vztahy byly odvozeny ze vztahů (1) a (2) a indexy 1, 2, 3 značí teploty v referenčních bodech. Za referenční bod č. 1 jsme volíme směs vody a ledu o teplotě kolem 0° C. Za referenční bod č. 2 teplotu vařící se vody, ta je silně závislá na okolním tlaku a přesně ji určuje následující vztah.

$$t_{varH_2O} = 100.0 + 28.0216 \cdot \left(\frac{p}{p_0} - 1\right) - 11.642 \cdot \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)^2 + 7.1 \cdot \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)^3 [C] \quad (9)$$

kde  $p_0$  značí normální barometrický tlak, který je roven 1013.25 hPa.

Jako poslední referenční bod volíme teplotu tuhnutí cínu, jejíž hodnota je 231.93° C. Tyto hodnoty volíme z důvodů, že při fázové změně je teplota a tedy i  $\epsilon(t)$  a  $R(t)$  velmi stabilní na delším časovém úseku, hodnoty teplot referenčních bodů č. 1 a č. 3 považujeme za stálé a přesné.

Dále ze vztahu (9) a metody přenosu chyb dle [1], [3] můžeme určit chybu s níž jsme schopni určit hodnotu bodu varu vody.

$$\delta_p = \frac{\Delta_p}{p} \quad (10)$$

$$\delta_{t_{varH_2O}} = \sqrt{\delta_p^2 + (2 \cdot \delta_p)^2 + (3 \cdot \delta_p)^2} \quad (11)$$

Nakonec můžeme vyjádřit ze vztahů (1) a (2) následující závislosti času a teploty, jakož i metodou přenosu chyb jejich chyby.

$$t_R = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4 \cdot B \cdot \left(\frac{R}{R_0} - 1\right)}}{2 \cdot B} \quad (12)$$

$$\Delta t_R = \frac{\Delta R}{A^2 + 4 \cdot B \cdot \left(\frac{R}{R_0} - 1\right)} \quad (13)$$

$$t_\epsilon = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4 \cdot c \cdot (\epsilon - a)}}{2 \cdot c} \quad (14)$$

$$\Delta t_\epsilon = \frac{\Delta \epsilon}{\sqrt{b^2 + 4 \cdot c \cdot (\epsilon - a)}} \quad (15)$$

kde  $R$  je odpor v daném čase a  $\epsilon$  je napětí v daném čase, ostatní proměnné jsou stejné jako byly zavedeny výše.

Během měření jsme si opsali chyby měřících přístrojů. Pokud nebyla dokumentace k dispozici, tak po konzultaci s vyučujícím uvažuje chybu posledního digitu. Celý oddíl teorie vychází z [1] a [2], hodnoty konstant z [4].

## Výsledky měření

Laboratorní podmínky v laboratoři v době měření referenčního bodu č. 2, jehož hodnota je závislá na okolních podmínkách, byly teplota  $t = (24.6 \pm 0.4)^\circ \text{C}$  a atmosférický tlak  $p = (1001 \pm 2) \text{ hPa}$ , teplota varu vody v místnosti byla dle (9), (10), (11) určena jako  $t_{varH_2O} = (99.66 \pm 0.21)^\circ \text{C}$ .

Odpor jsme měřili s chybou 0.5 %, napětí s chybou 35 ppm z rozsahu 0.1 V a 90 ppm z hodnoty, obě chyby můžeme vzhledem k naměřeným hodnotám zanedbat.

Tabulka 1: Výsledné hodnoty

$t [^\circ \text{C}]$	$\epsilon [\text{mV}]$	$R [\Omega]$
0	$(3.69 \pm 1.92) \cdot 10^{-3}$	$101.6 \pm 0.5$
99.66	$4.38 \pm 0.00$	$138.6 \pm 0.7$
231.93	$11.32 \pm 0.02$	$187.5 \pm 0.9$

v tabulce jsou vyneseny hodnoty  $t_i$ ,  $R_i$  a  $\epsilon_i$ , kde  $i = 1, 2, 3$ .

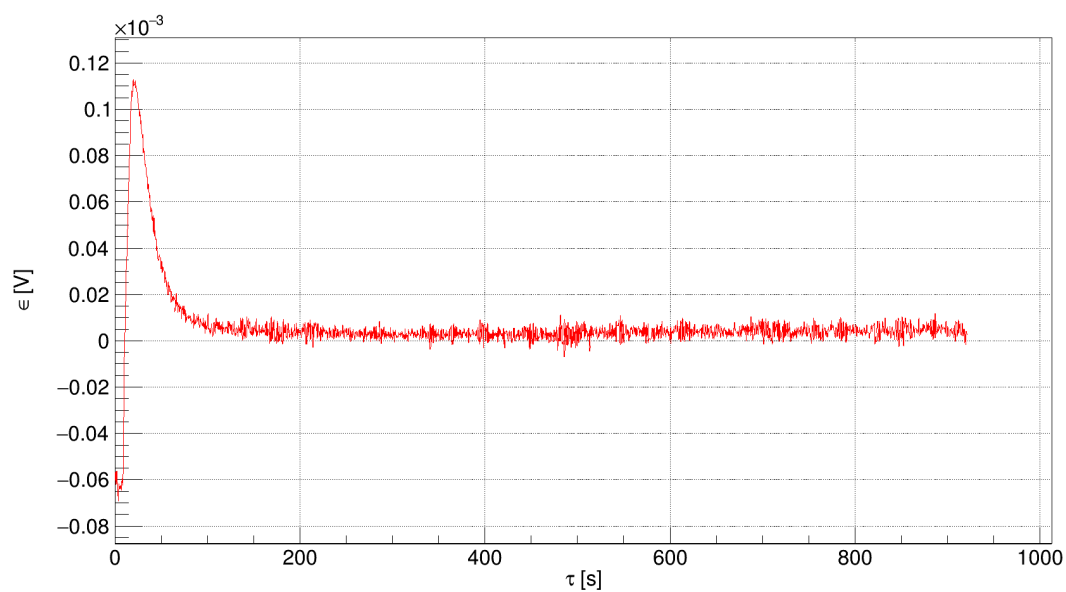
Ze vztahů (3) až (8) a metodou přenosu chyb jsme určili vzorce pro hledané konstanty i jejich chyby. Vzorce pro chyby konstant jsme si dovolili vzhledem k jejich délce vynechat. Stejně jako ve vztazích (11), (13), (15) naše metodika zpracování vychází z [1] a [3].

Tabulka 2: Výsledné hodnoty konstant

Název	hodnota
a	$(3.69 \pm 1.92) [\mu \text{V}]$
b	$(4.03 \pm 0.02) \cdot 10^{-5} [\text{V K}^{-1}]$
c	$(3.70 \pm 0.11) \cdot 10^{-8} [\text{V K}^{-2}]$
$R_0$	$(101.6 \pm 0.5) [\Omega]$
A	$(3.66 \pm 0.07) \cdot 10^{-3} [\text{K}^{-1}]$
B	$(-6.63 \pm 9.15) \cdot 10^{-8} [\text{K}^{-2}]$

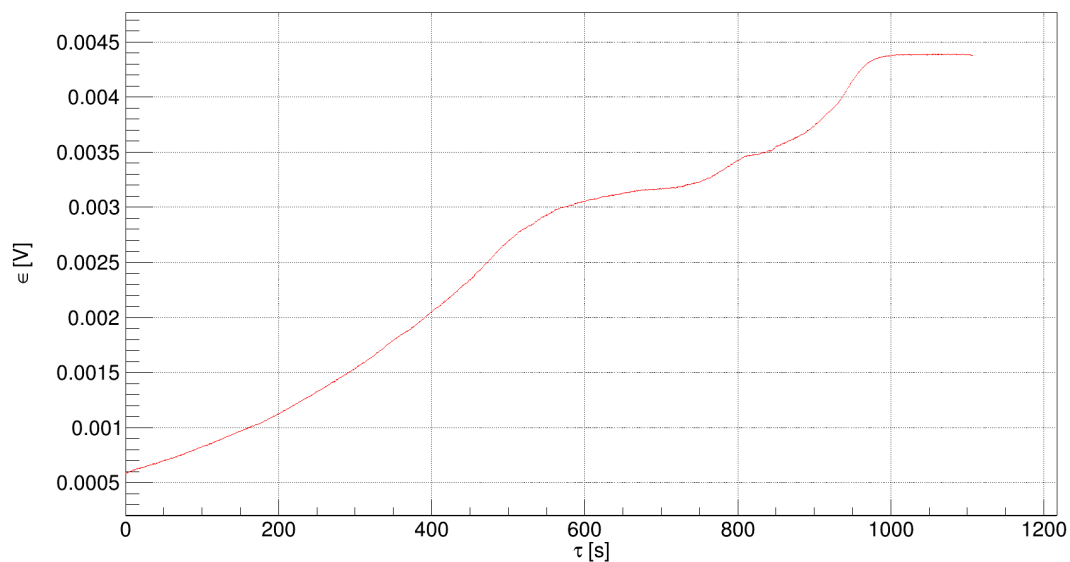
Grafy, kde nejsou značené měřené hodnoty a pouze spojnice obsahují takové množství bodů, že použití markerů by bylo nepraktické. Grafy používají již výše zavedené proměnné mimo  $\tau$ , která značí čas.

Obrázek 1: Kalibrace termočlánku



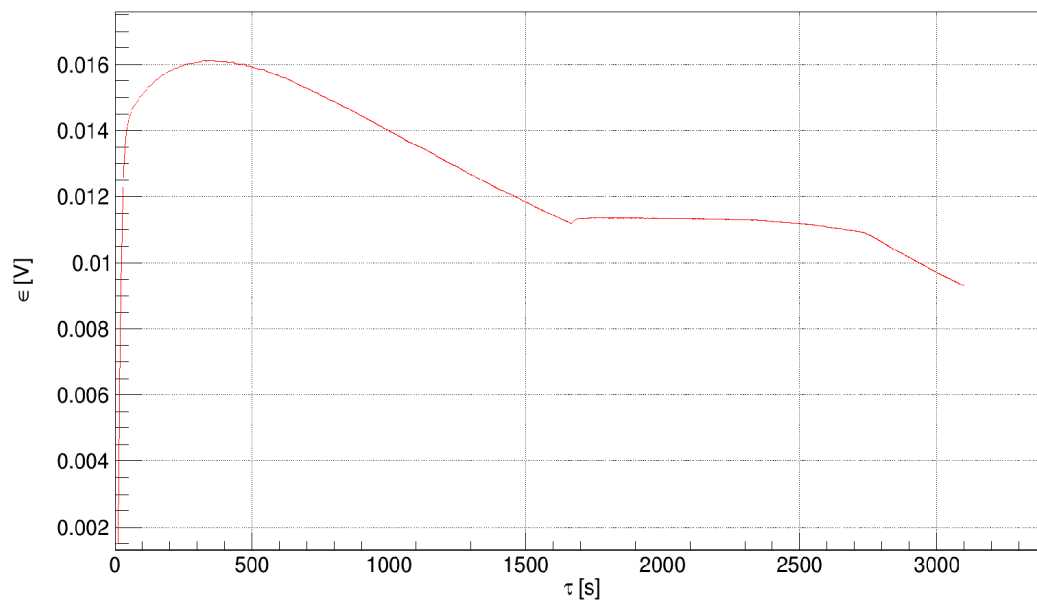
Graf na obrázku č. 1 zobrazuje hodnoty termoelektrického napětí v závislosti na čase při zapojení obou konců do izolované nádoby s ledovou tříští, z hodnot mezi 101. a 921. sekundou určíme konstantu  $a$ , hodnota (jakož i všechny další) uvedena v tabulce výše.

Obrázek 2: Termočlánek poblíž bodu varu vody



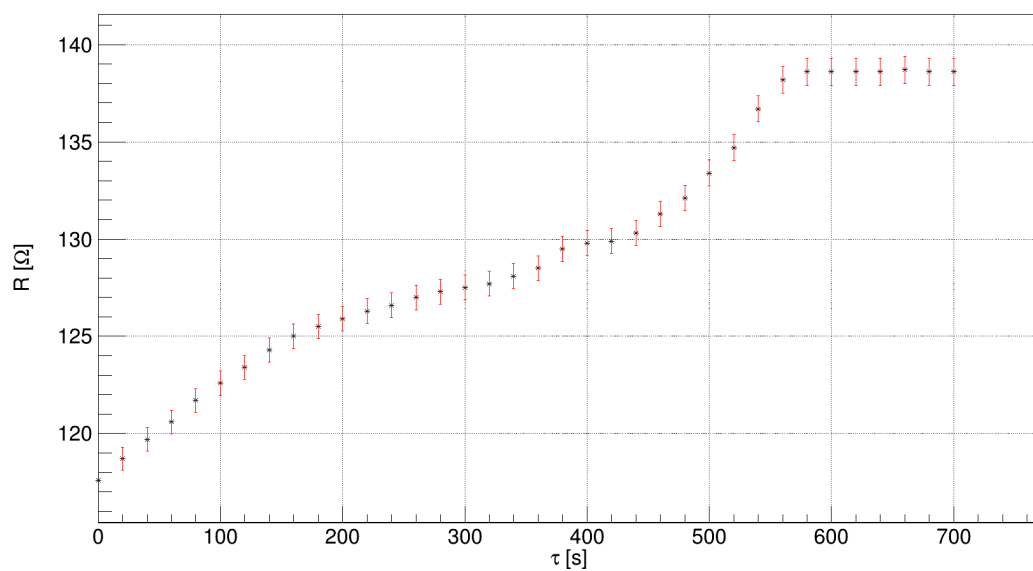
Graf na obrázku č. 2 zobrazuje hodnoty termoelektrického napětí v závislosti na čase při zapojení "teplého" (pro další použití v textu teplým koncem myslíme konec, při jehož zapojení do teplejšího prostředí je hodnota napětí kladná) konce do baňky s vařící se vodou, z hodnot mezi 996. a 1106. sekundou určujeme konstantu  $b$ , hodnota uvedena výše v tabulce. Zajímavá se nám může jevit nelinearita před dosažením bodu varu, po konzultaci s dozorem praktika se domníváme, že měření ovlivnila kapka, která zkondenzovala na konci článku.

Obrázek 3: Termočlánek během chladnutí tuhnutí cínu



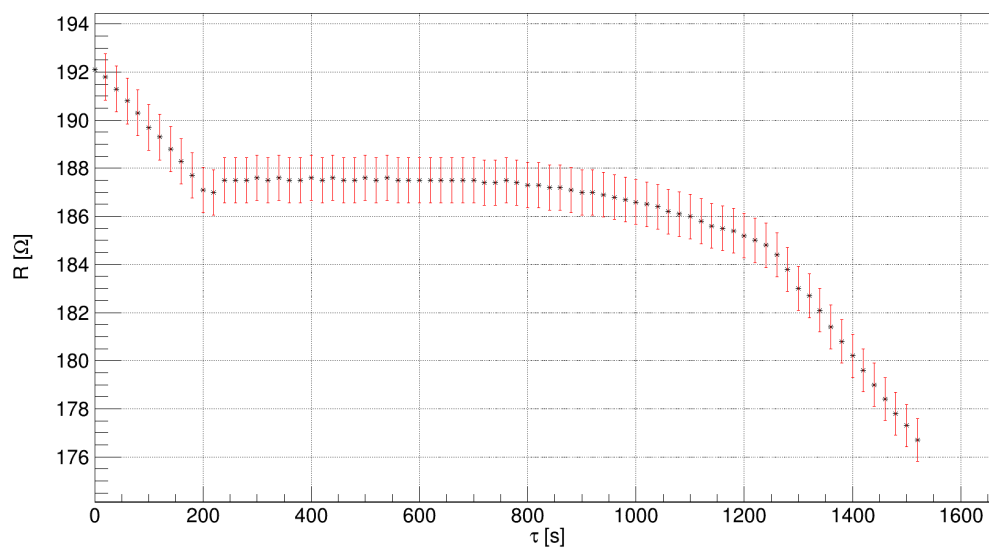
Graf na obrázku č. 3 zobrazuje hodnoty termoelektrického napětí v závislosti na čase při zapojení "teplého" konce do pícky s roztaveným cínem, z hodnot mezi 1674. a 2394. sekundou určujeme konstantu  $c$ , hodnota uvedena výše v tabulce. Z poklesu napětí před fázovou změnou lze usuzovat, že cín byl velmi čistý.

Obrázek 4: Odporový teploměr během varu vody



Graf na obrázku č. 4 zobrazuje hodnoty odporu v závislosti na čase v době, kdy byl teploměr vložen do baňky, v níž se ohřívala a později vařila voda. Z hodnot mezi 986. a 1106. sekundou jsme určili konstantu  $A$ , již výše uvedenou.

Obrázek 5: Odporový teploměr během chladnutí cínu

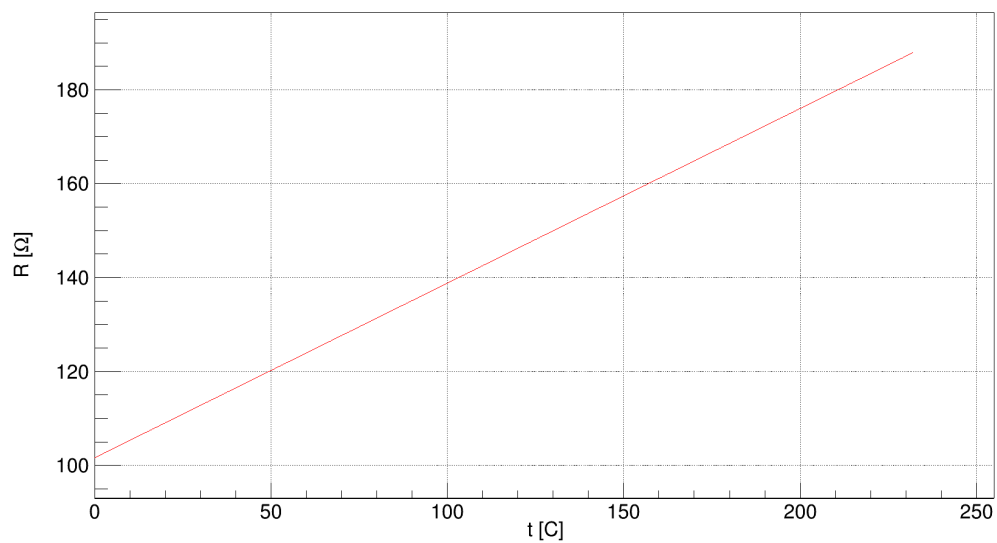


Graf na obrázku č. 5 zobrazuje hodnoty odporu v závislosti na čase v době, kdy byl teploměr vložen do pícky s chladnoucím cínem. Lze si povšimnout poklesu odporu, který je funkcí teploty, přes fázovým přechodem, více je toto diskutováno v sekci diskuse. Z hodnot mezi 1690. a 2230. sekundou jsme určili konstantu  $B$ , již výše uvedenou.

Z uvedených konstant jsme určili následující kalibrační křivky, jak pro termočlánek, tak pro odporový teploměr.

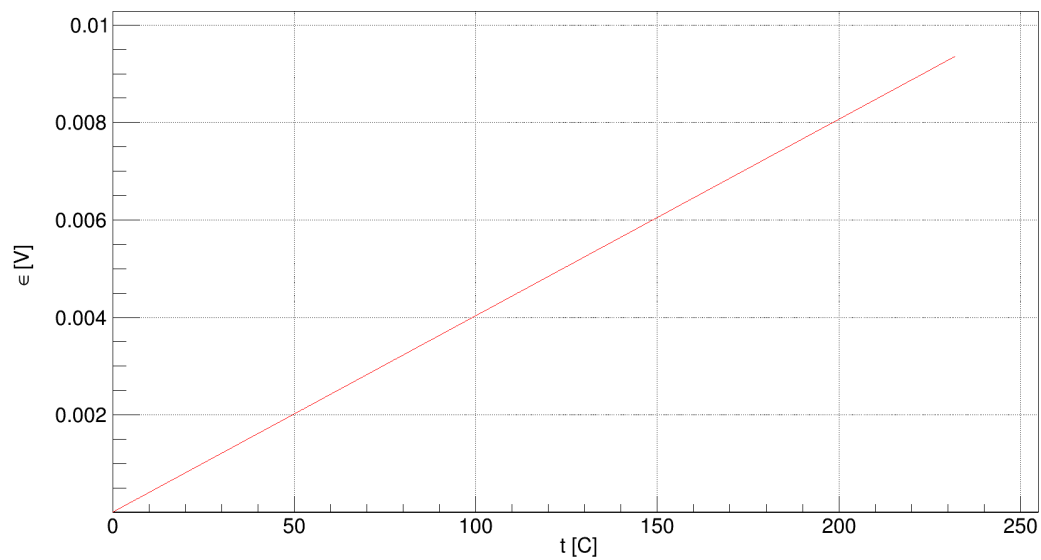


Obrázek 6: Kalibrační křivka odporového teploměru



Graf na obrázku č. 6 zobrazuje kalibrační křivku odporového teploměru.

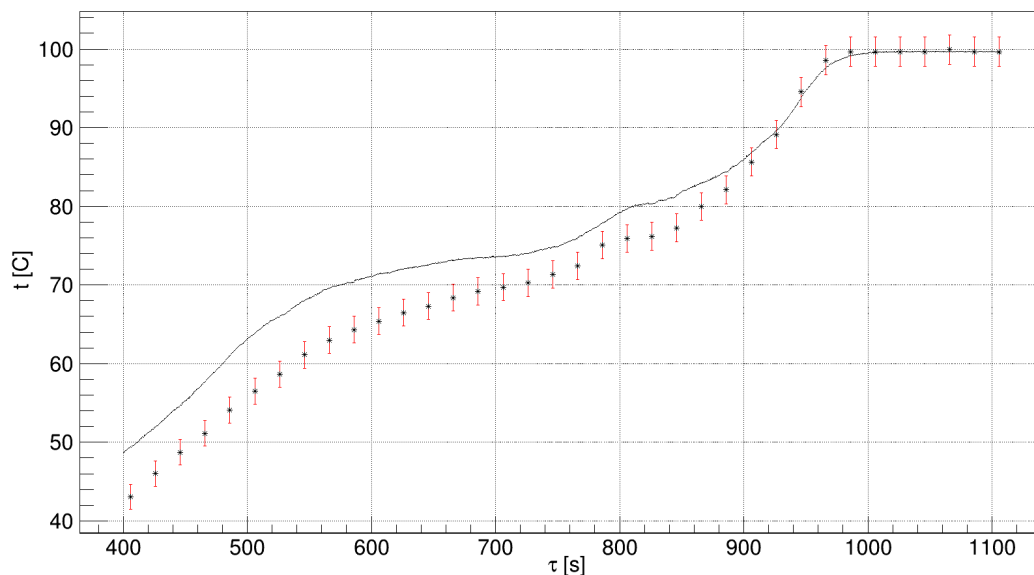
Obrázek 7: Kalibrační křivka termočlánku



Graf na obrázku č. 7 zobrazuje kalibrační křivku termočlánku. U obou grafů si lze

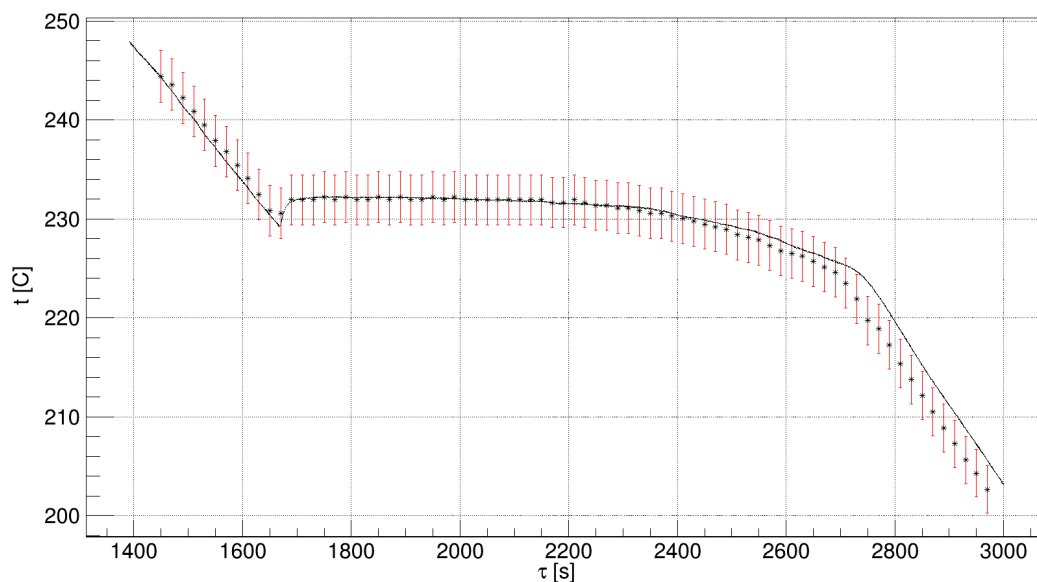
všimnout, že se jedná skoro o lineární funkce, zde u termočlánku si lze též všimnout výraznější nelinearity oproti předcházejícímu grafu. Grafy se samozřejmě liší i směrnici a hodnotami v počátku.

Obrázek 8: Teplota při ohřevu a varu vody jako funkce času



Graf na obrázku č. 8 zobrazuje teplotu zjištěnou měřením napětí na termočlánku zjištěnou dle vztahu (14) jako spojitou funkci, naopak měření teploty pomocí odporu je vyjádřeno diskrétně i s errorbary, které značí odhad rozsah chyby, vypočteno pomocí vztahů (12) a (13). Toto platí pro obrázek 9. Lze si povšimnout, že v oblasti nižších teplot neprochází spojitá funkce oblastí vymezenou errorbary a tudíž jsme museli nějakou chybu při měření nebo vyhodnocení špatně vyhodnotit. Domníváme se, že se jedná o systematickou chybu, více rozebráno v diskusi.

Obrázek 9: Teplota při chladnutí a tuhnutí cínu jako funkce času



Graf na obrázku č. 9 má stejné parametry jako graf na obrázku č. 8, rozdílem však je, že spojitá funkce se nachází z výrazné většiny v oblasti vymezené errorbary a dokonce poblíž jejich středu.

## Diskuse

Nejvýraznější problém, který by mohl ovlivnit naše měření jsou příměsy v cínu, tento problém by šlo eliminovat tím, že by se píčka s cínem nacházela v inertní, např. dusíkové atmosféře. Příměsy bývají hlavně oxidy vznikající při fázových změnách. Jak je vidět na grafu č. 3, tak dokonce před ustálením napětí při měření tuhnutí cínu se nám podařilo naměřit pokles napětí, což ukazuje na jeho velkou chemickou čistotu. Nicméně obdobný problém by nás mohl potkat v případě referenčních bodů vztažených vůči vodě, kdy jakákoliv nečistota ovlivní fázový přechod. Další otázkou je, jak ovlivňuje prostředí ve skleněné baňce samotná baňka, hlavně zda vnitřní tlak je stejný jako tlak v místnosti. Navíc, jak jsme mohli vidět v grafu na obrázku č. 2, tak problém může být i kapka kondenzující na konci termočlánku. Toto se jasně projevuje v předposledním grafu (obrázek 8), kdy jsme během experimentu pozorovali orosené oba konce měřicích přístrojů a zjevně měřící konec teploměru byl pokrytý větší vrstvou kapaliny, důkazem pro tuto úvahu nám může být, že při měření v cínu (obrázek 9) se obě funkce velmi dobře shodují. Navíc je dále si potřeba uvědomit, že i když chybu  $t_\epsilon$  negrafujeme pro nepřehlednost při takto velkém množství měření, tak dosahuje řádu jednotek stupňů dle vztahu (15).

Další nepřesnosti měření mohly vzniknout úvahou vztahů (1) a (2) pouze jakožto

kvadratických, přičemž se může jednat o funkce vyšších řádů.

Problematický může být i zápis napětí  $\epsilon$  pomocí počítače a odporu  $R$  člověkem, kdy by se nám při prudké změně hodnot mohli funkce rozejít, popř. kdybychom kvůli diskrétnosti měření daný jev nezaznamenali. Avšak, jak ukazuje pokles na obrázku č. 9, těmto potížím jsme se úspěšně vyhnuli.

## Závěr

Z naměřených hodnot  $\epsilon$  a  $R$  a se nám podařilo naměřit následující hodnoty konstant:

Název	hodnota
a	$(3.69 \pm 1.92) [\mu\text{V}]$
b	$(4.03 \pm 0.02) \cdot 10^{-5} [\text{V K}^{-1}]$
c	$(3.70 \pm 0.11) \cdot 10^{-8} [\text{V K}^{-2}]$
$R_0$	$(101.6 \pm 0.5) [\Omega]$
A	$(3.66 \pm 0.07) \cdot 10^{-3} [\text{K}^{-1}]$
B	$(-6.63 \pm 9.15) \cdot 10^{-8} [\text{K}^{-2}]$

Dále jsme našli hledané kalibrační křivky i závislosti  $\tau_R(t)$  a  $\tau_\epsilon(t)$ , ty lze najít v části výsledky měření v podobě grafů.

## Použitá literatura

- [1] BROŽ, J. a KOL. Základy fyzikálních měření I. 1. vydání. Praha: SPN, 1983
- [2] Fyzikální praktikum. Kalibrace odporového teploměru a termočlánku – fázové přechody [online][cit. 2019-03-02]. Dostupné z: [https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_108.pdf](https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_108.pdf)
- [3] ENGLICH, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vydání. Praha: Matfyzpress, 2006, ISBN 80-86732-93-2
- [4] Table of physical constants - Wikiversity [online][cit. 2019-03-02]. Dostupné z: [https://en.wikiversity.org/wiki/Table\\_of\\_physical\\_constants](https://en.wikiversity.org/wiki/Table_of_physical_constants)