

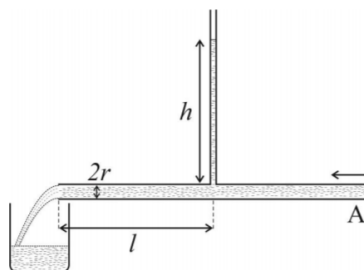
Pracovní úkol

1. Pro tři vodorovné trubice s různými poloměry kruhového průřezu, které jsou opatřeny manometry, změřte závislost objemového průtoku Q_v na úbytku statického tlaku Δp na vyšetřované délce trubice l ve směru proudění.
2. Sestrojte graf závislosti $Q_v = Q_v(p)$.
3. Ze směrnice závislosti $Q_v = Q_v(p)$ v oblasti laminárního proudění určete poloměr trubice.
4. Upravený poloměr dosad' te do vztahů pro výpočet Re a k .
5. Sestrojte graf závislosti $k = k(Re)$, kde k je součinitel odporu trubice a Re je Reynoldsovo číslo. Do grafu vynesete teoretickou závislost pro laminární i turbulentní proudění.

Teorie

V teorii vycházíme z [1], jedná se o zdroj rovnic i obrázku aparatury. Jak již bylo uvedeno v pracovním úkolu, tak se snažíme měřit různé druhy proudění při daném tlaku a také vlastnosti trubíc. K tomu nám slouží aparatura zobrazená na přiloženém schématu.

Obrázek 1: Schéma měřicí aparatury



Voda je přiváděna přepadem přes bod A, máme možnost regulovat její rychlost. Dále l reprezentuje délku trubice, na níž klesne tlak o Δp , r poloměr trubice a h výšku vodního sloupce v manometru, která nám slouží k určení rozdílu tlaku mezi manometrem a ústím trubice. Pro vztah (rozdíl) tlaku a výšky vodního sloupce platí

$$\Delta p = h \cdot g \cdot \rho(t) \text{ [Pa]} \quad (1)$$

kde g je lokální tíhové zrychlení a $\rho(t)$ hustota zkoumané kapaliny, v našem případě vody, o dané teplotě. V dalších případech značíme již pouze jako ρ . Měříme-li objem proteklý za čas, pak je možno změřit objemový průtok Q_v .

$$Q_v = \frac{V}{t} = r^2 \cdot \pi \cdot v_s \text{ [m}^3 \cdot \text{s}^{-1}] \quad (2)$$

kde V je objem, který protekl trubicí za čas t . Stejně tak můžeme definovat objemový průtok Q_v pomocí již střední rychlosti proudění kapaliny v^s . Pomocí střední rychlosti

proudění lze pak definovat Reynoldsovo číslo, které nám umožňuje rozlišit laminární, přechodový a turbulentní průběh proudění.

$$Re = \frac{r \cdot \rho \cdot v_s}{\eta(t)} [1] \quad (3)$$

kde $\eta(t)$ je dynamická viskozita měřené kapaliny (vody) za teploty t , dále značíme pouze η . Porovnání se vztahem (2) můžeme odvodit vztah pro Reynoldsovo číslo závislý na veličinách, které měříme. Ty jsou popsány v sekci výsledky měření.

$$Re = \frac{\rho \cdot Q_v}{\pi \cdot r \cdot \eta} [1] \quad (4)$$

Je-li Re menší než přibližně 1000, pak je proudění laminární. Je-li jeho hodnota vyšší, ale menší než přibližně 2000, pak je proudění nestabilní a je v přechodové fázi. To se projevuje tak, že výrazně kolísá hladina manometru, kvůli vírům v kapalině. A při vyhodnocení dat by mělo dojít k poklesu experimentálně určené hodnoty Q_v dle (2) oproti hodnotě $Q_v(p)$, kterou zavádíme pomocí tzv. Poiseullových rovnic pro laminární proudění.

$$Q_v(p) = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}] \quad (5)$$

Předpokládáme, že měření poloměru r posuvným měřítkem je nepřesné, právě proto můžeme poloměr určit dle vztahu (5) určit jako směrnici lineární závislosti $y = ax + b$. Tedy konkrétně následujícími úpravami.

$$Q_v(p) = a \cdot \Delta p [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}] \quad (6)$$

$$a = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l} [\text{m}^5 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1}] \quad (7)$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot a \cdot \eta \cdot l}{\pi}} [\text{m}] \quad (8)$$

Dále zavádíme součinitel odporu trubice k , pomocí něhož lze vyjádřit úbytek tlaku na délce l .

$$\Delta p = \frac{k \cdot l \cdot \rho \cdot v_s^2}{2 \cdot r} [\text{Pa}] \quad (9)$$

Z rovnice (2,3,5 a 9) lze součinitel k vyjádřit jako

$$k = \frac{16}{Re} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot r^5 \cdot \Delta p}{\rho \cdot l \cdot Q_v^2} [1] \quad (10)$$

Kde druhá rovnost dává do souvislosti k a námi měřené veličiny a je odvozena z (2) a (9). Explicitně uvádíme tento vzorec, abychom z něj později snadno určili chybu. Zároveň platí experimentálně zjištěný aproximativní vztah pro hladkostěnné trubice během turbulentního proudění

$$k_t \approx \frac{0.133}{\sqrt[4]{Re}} [1] \quad (11)$$

Nyní rozebereme chyby výsledných měřených veličin. Vycházíme z metody přenosu chyb popsané v [2] a [3]. Začneme chybou změny tlaku. Hodnotu lokálního tíhového zrychlení $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ dle [2] považujeme za přesnou, její možná nepřesnost je řádově méně významná než chyby ostatní a mimo to i v [2] je pro jakékoli aplikace považována za přesnou.

$$\delta_h = \frac{\Delta h}{h} \quad (12)$$

$$\delta_{\Delta p} = \sqrt{\delta_h^2 + \delta_\rho^2} \quad (13)$$

samořejmě je nutno si uvědomit, že ρ a v dalších vzorcích i η jsou závislé na teplotě a její nejistotě. Jelikož závislost těchto proměnných na t není snadno vyjádřitelná, pak ji aproximujeme jako lineární a za relativní chybu tedy považujeme

$$\delta_\eta = \frac{2 \cdot (\eta(t + \Delta t) - \eta(t - \Delta t))}{\eta(t + \Delta t) + \eta(t - \Delta t)} \quad (14)$$

analogicky s chybou $\rho(t)$. Chyby dalších veličin dopočteme stejným způsobem jako ze vztahů (2),(3),(7),(8) a (10).

$$\delta_{Q_v} = \sqrt{\delta_v^2 + \delta_t^2} \quad (15)$$

$$\delta_{Re} = \sqrt{\delta_\rho^2 + \delta_{Q_v}^2 + \delta_r^2 + \delta_\eta^2} \quad (16)$$

$$\delta_a = \sqrt{16 \cdot \delta_r^2 + \delta_\eta^2 + \delta_l^2 + \delta_{fit}^2} \quad (17)$$

$$\delta_r = \sqrt{\frac{\delta_a^2}{16} + \frac{\delta_\eta^2}{16} + \frac{\delta_l^2}{16}} \quad (18)$$

$$\delta_k = \sqrt{25 \cdot \delta_r^2 + \delta_{\Delta p}^2 + \delta_\rho^2 + \delta_l^2 + 4 \cdot \delta_{Q_v}^2} \quad (19)$$

Chybu směrnice uvádíme pouze pro úplnost, počítá ji za nás program ROOT, v němž tvoříme grafy a regrese.

Výsledky měření

Na úvod uved' me použité přístroje a jejich chybu. Všechny užití přístroje byly analogové, takže dle [2] a [3] uvažujeme jejich chybu jako polovinu nejmenšího dílku stupnice. Teplotu vody jsme měřili teploměrem s chybou $0.5 \text{ }^\circ\text{C}$ Menší objemy (u trubic s pomalejším výtokem) jsme měřili s chybou 0.25 ml , větší pak s chybou 1 ml . Chybu měření času odhadujeme jako 0.3 s , což je více než je běžná reakční doba, nicméně se stiskem stopek je nutné ještě vzdálit válec z výtokové oblasti, což do určení času, kdy skončil přítok vody do válce, přináší další nejistotu. Výšku h na manometru jsme měřili s chybou 0.5 mm v případě nepohyblivé hladiny. Pro ostatní případy jsme k této hodnotě přičítali polovinu rozdílu amplitudy kmitání kapaliny v manometru. Vzdálenosti jsme měřili svinovacím metrem s chybou 0.05 cm a průměry trubic s posuvným měřítkem, které má chybu 0.05 mm .

Podmínky v laboratoři ovlivňují experiment za předpokladu, že se výrazně nezměnil tlak vzduchu, řádově méně než ostatní jevy, které budeme rozebírat v sekci diskuse, proto je neuvádíme. Naopak krucální pro správné vyhodnocení dat je teplota

vody, kterou jsme měřili vždy se stejným výsledkem, chybový interval tedy ovlivňuje pouze chyba teploměru a tedy $t = (23 \pm 0.5)^\circ\text{C}$. Této hodnotě přísluší dle [4] hustota $\rho = 997.5 \pm 0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a dle [5] dynamická viskozita $\eta = (9.3 \pm 0.1) \cdot 10^{-4} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$.

Nejprve uved' me naměřené geometrické parametry trubic l a r .

Tabulka 1: Naměřené vzdálenost l pro jednotlivé trubice

l_A [cm]	l_B [cm]	l_C [cm]
25.00 ± 0.05	25.00 ± 0.05	19.52 ± 0.05
25.01 ± 0.05	25.00 ± 0.05	19.51 ± 0.05
25.01 ± 0.05	25.00 ± 0.05	19.51 ± 0.05
25.01 ± 0.05	25.00 ± 0.05	19.51 ± 0.05

Celkově nám tedy vychází hodnoty $l_B = (25.01 \pm 0.05) \text{ cm}$, $l_B = (25.00 \pm 0.05) \text{ cm}$ a $l_C = (19.51 \pm 0.05) \text{ cm}$.

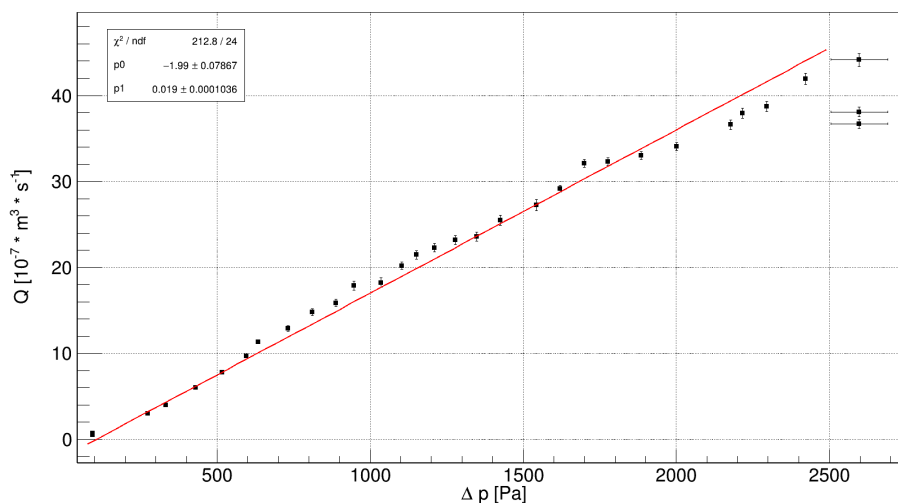
Tabulka 2: Naměřené průměry d pro jednotlivé trubice

d_A [mm]	d_B [mm]	d_C [mm]
2.10 ± 0.05	3.00 ± 0.05	3.20 ± 0.05
2.10 ± 0.05	3.05 ± 0.05	3.20 ± 0.05
2.10 ± 0.05	3.05 ± 0.05	3.20 ± 0.05
2.00 ± 0.05	3.00 ± 0.05	3.20 ± 0.05

Výsledné poloměry tedy jsou $r_A = (1.08 \pm 0.03) \text{ mm}$ a $r_B = (1.51 \pm 0.03) \text{ mm}$, $r_C = (1.60 \pm 0.03) \text{ mm}$. Dále se podíváme na závislost $Q_v(p)$. Pro všechny tři trubice jsou data tabelována i vyvedena v grafech.

Tabulka 3: Hodnoty $Q_v(p)$ u trubice A

h [cm]	V [ml]	t [s]	Δp [Pa]	Q_v [$10^{-7} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$]
2.8 ± 0.1	20.0 ± 0.3	66.8 ± 0.3	273 ± 5	2.99 ± 0.04
3.4 ± 0.1	20.0 ± 0.3	50.4 ± 0.3	332 ± 5	3.97 ± 0.06
4.4 ± 0.1	20.0 ± 0.3	33.4 ± 0.3	430 ± 5	5.99 ± 0.09
5.3 ± 0.1	20.0 ± 0.3	25.6 ± 0.3	518 ± 5	7.82 ± 0.13
6.1 ± 0.1	20.0 ± 0.3	20.7 ± 0.3	596 ± 5	9.68 ± 0.19
6.5 ± 0.1	20.0 ± 0.3	17.6 ± 0.3	635 ± 5	11.34 ± 0.24
7.5 ± 0.1	20.0 ± 0.3	15.5 ± 0.3	732 ± 5	12.90 ± 0.30
8.3 ± 0.1	20.0 ± 0.3	13.5 ± 0.3	810 ± 5	14.81 ± 0.38
9.1 ± 0.1	20.0 ± 0.3	12.6 ± 0.3	889 ± 5	15.89 ± 0.43
9.7 ± 0.1	20.0 ± 0.3	11.2 ± 0.3	947 ± 5	17.89 ± 0.53
10.6 ± 0.1	20.0 ± 0.3	11.0 ± 0.3	1035 ± 5	18.23 ± 0.55
11.3 ± 0.1	55.0 ± 1.0	27.3 ± 0.3	1103 ± 5	20.18 ± 0.43
11.8 ± 0.1	55.0 ± 1.0	25.6 ± 0.3	1152 ± 5	21.46 ± 0.46
12.4 ± 0.1	55.0 ± 1.0	24.7 ± 0.3	1211 ± 5	22.29 ± 0.49
13.1 ± 0.1	55.0 ± 1.0	23.7 ± 0.3	1279 ± 5	23.19 ± 0.51
13.8 ± 0.1	55.0 ± 1.0	23.4 ± 0.3	1347 ± 5	23.55 ± 0.52
14.6 ± 0.1	55.0 ± 1.0	21.6 ± 0.3	1426 ± 5	25.47 ± 0.58
15.8 ± 0.1	55.0 ± 1.0	20.2 ± 0.3	1543 ± 5	27.25 ± 0.64
16.6 ± 0.1	100.0 ± 1.0	34.3 ± 0.3	1621 ± 5	29.17 ± 0.39
17.4 ± 0.1	100.0 ± 1.0	31.1 ± 0.3	1699 ± 5	32.12 ± 0.45
18.2 ± 0.1	100.0 ± 1.0	31.0 ± 0.3	1777 ± 5	32.29 ± 0.45
19.3 ± 0.1	100.0 ± 1.0	30.3 ± 0.3	1885 ± 5	33.04 ± 0.47
20.5 ± 0.1	100.0 ± 1.0	29.4 ± 0.3	2002 ± 5	34.07 ± 0.49
22.3 ± 0.1	100.0 ± 1.0	27.3 ± 0.3	2177 ± 5	36.60 ± 0.54
22.7 ± 0.1	100.0 ± 1.0	26.4 ± 0.3	2217 ± 5	37.95 ± 0.58
23.5 ± 0.1	100.0 ± 1.0	25.8 ± 0.3	2295 ± 5	38.71 ± 0.59
24.8 ± 0.1	100.0 ± 1.0	23.9 ± 0.3	2422 ± 5	41.93 ± 0.67
26.6 ± 1.0	100.0 ± 1.0	27.3 ± 0.3	2597 ± 5	36.70 ± 0.55
26.6 ± 1.0	100.0 ± 1.0	26.3 ± 0.3	2597 ± 5	38.10 ± 0.58
26.6 ± 1.0	100.0 ± 1.0	22.7 ± 0.3	2597 ± 5	44.13 ± 0.73

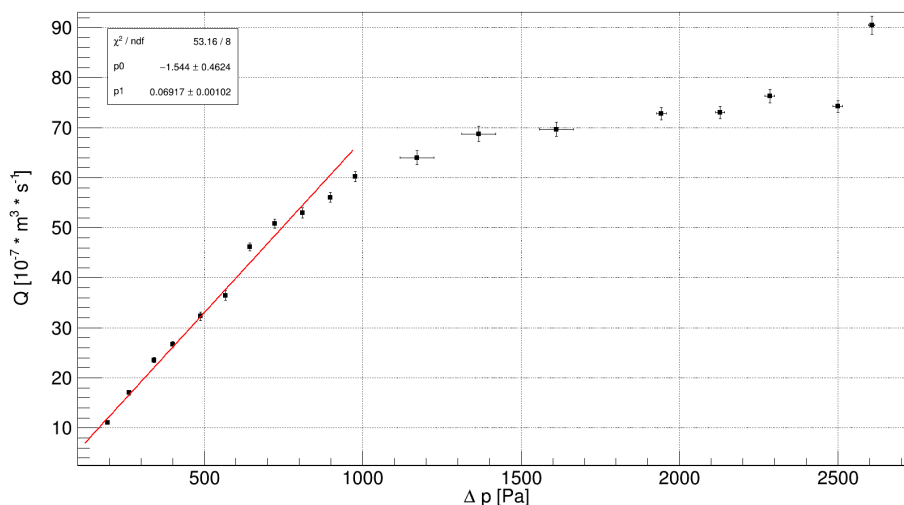


Obrázek 2: Graf závislosti $Q_v(p)$ pro trubici A

Lze si všimnout nástupu přechodové fáze proudění u posledních tří měření. V souladu s teorií hodnota $Q_v(p)$ klesla. Jedno z měření se však zásadně neliší od laminární části, pro kterou určujeme regresi. Všechna tři měření měla stejný přítok kapaliny a tedy i výšku h a její kolísání. Dá se tedy říci, že hodnota Reynoldsova čísla se pro poslední měření pohybovala okolo hodnoty 1000. Všechna měření, a to platí i pro všechny další grafy, mají errorbary, ovšem mnohdy je chyba tam malá, že jsou jen velmi těžko rozpoznatelné.

Tabulka 4: Hodnoty $Q_v(p)$ u trubice B

h [cm]	V [ml]	t [s]	Δp [Pa]	Q_v [$10^{-7} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$]
2.0 ± 0.1	20.0 ± 0.3	18.2 ± 0.3	195 ± 5	11.00 ± 0.23
2.7 ± 0.1	20.0 ± 0.3	11.8 ± 0.3	264 ± 5	17.02 ± 0.48
3.5 ± 0.1	55.0 ± 1.0	23.4 ± 0.3	342 ± 5	23.53 ± 0.52
4.1 ± 0.1	55.0 ± 1.0	20.6 ± 0.3	400 ± 5	26.66 ± 0.62
5.0 ± 0.1	55.0 ± 1.0	17.0 ± 0.3	488 ± 5	32.30 ± 0.82
5.8 ± 0.1	55.0 ± 1.0	15.1 ± 0.3	566 ± 5	36.47 ± 0.98
6.6 ± 0.1	100.0 ± 1.0	21.7 ± 0.3	644 ± 5	46.17 ± 0.79
7.4 ± 0.1	100.0 ± 1.0	19.7 ± 0.3	723 ± 5	50.81 ± 0.93
8.3 ± 0.1	100.0 ± 1.0	18.9 ± 0.3	810 ± 5	52.99 ± 1.00
9.2 ± 0.1	112.0 ± 1.0	20.0 ± 0.3	898 ± 5	56.08 ± 0.98
10.0 ± 0.1	122.0 ± 1.0	20.3 ± 0.3	976 ± 5	60.25 ± 1.02
12.0 ± 0.6	98.0 ± 1.0	15.3 ± 0.3	1172 ± 54	63.97 ± 1.41
14.0 ± 0.6	104.0 ± 1.0	15.1 ± 0.3	1367 ± 54	68.74 ± 1.51
16.5 ± 0.6	114.0 ± 1.0	16.4 ± 0.3	1611 ± 54	69.64 ± 1.41
19.9 ± 0.2	142.0 ± 1.0	19.5 ± 0.3	1943 ± 15	72.82 ± 1.23
21.8 ± 0.2	142.0 ± 1.0	19.4 ± 0.3	2129 ± 15	73.05 ± 1.24
23.4 ± 0.2	140.0 ± 1.0	18.4 ± 0.3	2285 ± 15	76.29 ± 1.36
25.6 ± 0.2	154.0 ± 1.0	20.8 ± 0.3	2500 ± 15	74.22 ± 1.18
26.7 ± 0.1	144.0 ± 1.0	15.9 ± 0.3	2607 ± 10	90.51 ± 1.82

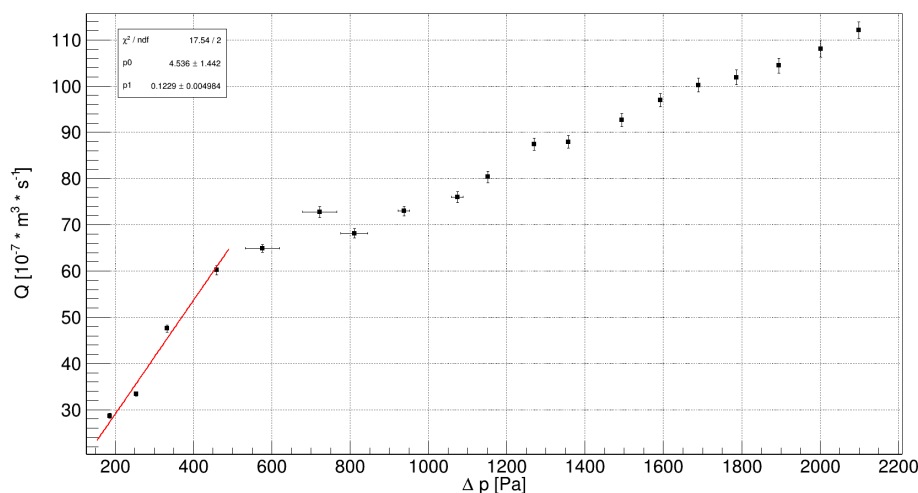


Obrázek 3: Graf závislosti $Q_v(p)$ pro trubicí B

Lze si povšimnout opět v podstatě lineární části, jak předpokládá naše teorie, kde je proudění laminární. Poté nastupuje pokles resp. odklon od směrnice směrem k nižším hodnotám $Q_v(p)$, kde je proudění v přechodové fázi a nakonec nárůst spojený s ustálením turbulentního proudění u posledního bodu grafu. Jak je vidět z grafu i tabulky, tak u části měření mezi výškou h 19.9 až 25.6 cm jsme nebyli schopni rozhodnout z tabulkových hodnot, jestli se jedná o mírně oscilující proudění nebo o již turbulentní proudění. Ze grafu bychom se spíše přiklonili k interpretaci, že tato data sdílí směrnici s prouděním přechodovým a až poslední hodnota je hodnotou proudění turbulentního.

Tabulka 5: Hodnoty $Q_v(p)$ u trubice C

h [cm]	V [ml]	t [s]	Δp [Pa]	Q_v [$10^{-7} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$]
1.9 ± 0.1	74 ± 1	25.8 ± 0.3	186 ± 5	28.69 ± 0.51
2.6 ± 0.1	98 ± 1	29.4 ± 0.3	254 ± 5	33.39 ± 0.48
3.4 ± 0.1	104 ± 1	21.9 ± 0.3	332 ± 5	47.55 ± 0.80
4.7 ± 0.1	121 ± 1	20.1 ± 0.3	459 ± 5	60.23 ± 1.03
5.9 ± 0.5	166 ± 1	25.6 ± 0.3	576 ± 44	64.87 ± 0.86
7.4 ± 0.5	146 ± 1	20.1 ± 0.3	723 ± 44	72.28 ± 1.20
8.3 ± 0.4	157 ± 1	23.0 ± 0.3	810 ± 34	68.17 ± 0.99
9.6 ± 0.2	168 ± 1	23.0 ± 0.3	937 ± 15	72.95 ± 1.04
11.0 ± 0.2	157 ± 1	20.7 ± 0.3	1074 ± 15	75.99 ± 1.20
11.8 ± 0.1	164 ± 1	20.4 ± 0.3	1152 ± 5	80.35 ± 1.28
13.0 ± 0.1	186 ± 1	21.3 ± 0.3	1269 ± 5	87.41 ± 1.32
13.9 ± 0.1	180 ± 1	20.5 ± 0.3	1357 ± 5	87.93 ± 1.38
15.3 ± 0.1	188 ± 1	20.3 ± 0.3	1494 ± 5	92.70 ± 1.46
16.3 ± 0.1	213 ± 1	22.0 ± 0.3	1592 ± 5	96.65 ± 1.40
17.3 ± 0.1	241 ± 1	21.4 ± 0.3	1689 ± 5	100.32 ± 1.48
18.3 ± 0.1	202 ± 1	19.8 ± 0.3	1787 ± 5	101.92 ± 1.62
19.4 ± 0.1	216 ± 1	20.7 ± 0.3	1894 ± 5	104.45 ± 1.59
20.5 ± 0.1	200 ± 1	18.5 ± 0.3	2002 ± 5	108.11 ± 1.83
21.5 ± 0.1	220 ± 1	19.6 ± 0.3	2099 ± 5	112.07 ± 1.79



Obrázek 4: Graf závislosti $Q_v(p)$ pro trubici C

U trubice C jsme nenaměřili všechny hodnoty výšky manometru, protože sud, z něhož přitéká do trubice vody neposkytoval dostatečný tlak, ani při plně otevřeném kohoutu. Po konzultaci s vedoucím úlohy jsme měření trubice C ukončili. Z průběhu grafu i hodnot v tabulce lze vidět, že pokud by měření pokračovali, tak bychom naměřili pouze další hodnoty pro turbulentní měření. Existenci dalších změn proudění námi ověřovaná teorie nepředpokládá.

V grafu opět vidíme lineární oblast proudění laminárního, přechodového, kde dochází ke změně směrnice i proudění turbulentního, jehož opět stoupající charakter podporuje úvahy o povaze proudění pod grafem zobrazující závislost $Q_v(p)$ pro trubici C. Bohužel máme naměřena pouze dvě měření pro oblast přechodového proudění, což zpětně hodnotíme jako chybu. Směrnice této oblasti, ač ji nepotřebujeme nijak kvantifikovat, by byla mnohem přesněji určena naměřením hodnot tří či čtyř, které by snížily velký rozptyl hodnot směrnice, pokud je přímka určena pouze dvěma nepřesně určenými body.

S pomocí lineární regrese aplikované na oblasti lineárního proudění a vztahů (8) a (17) jsme určili přesnější hodnoty poloměrů. Pro porovnání uvádíme i naměřené hodnoty. Je vidět, že hodnoty se liší v řádu procent, ač se jejich chybové úsečky neprotínají. Pro další výpočty pracujeme s nově získanými hodnotami, které jsou dle povahy měření přesnější.

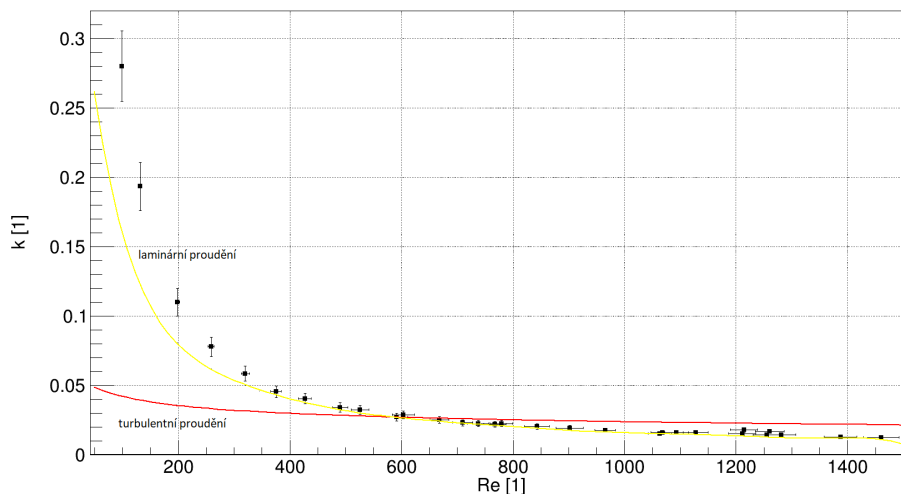
Tabulka 6: Porovnání poloměrů r získaných přímými měřeními a $r(a)$ získaných lineární regresí

Objekt	r [mm]	$r(a)$ [mm]
Trubice A	1.08 ± 0.03	1.03 ± 0.01
Trubice B	1.51 ± 0.03	1.42 ± 0.04
Trubice C	1.60 ± 0.03	1.54 ± 0.02

Dosadíme-li nově získané hodnoty poloměrů do vztahů (4) a (16) získáme hodnotu a chybu Reynoldsova čísla Re a ze vztahů (10) a (19) hodnotu a chybu součinitele odporu k . Výsledky opět prezentujeme jako tabelované hodnoty i grafy. Získaný vztah pak porovnáme s teoretickými vztahy (10) a (11).

Tabulka 7: Závislost $k(Re)$ pro trubici A

Re [1]	k [1]
99 ± 3	0.280 ± 0.025
131 ± 4	0.193 ± 0.017
198 ± 4	0.110 ± 0.010
259 ± 6	0.078 ± 0.007
320 ± 8	0.058 ± 0.005
375 ± 9	0.045 ± 0.004
427 ± 11	0.040 ± 0.004
490 ± 14	0.034 ± 0.003
526 ± 16	0.032 ± 0.003
592 ± 19	0.027 ± 0.003
603 ± 20	0.029 ± 0.003
668 ± 17	0.025 ± 0.002
710 ± 18	0.023 ± 0.002
737 ± 19	0.022 ± 0.002
767 ± 20	0.022 ± 0.002
779 ± 20	0.022 ± 0.002
843 ± 22	0.020 ± 0.002
902 ± 25	0.019 ± 0.002
965 ± 18	0.017 ± 0.002
1063 ± 21	0.015 ± 0.001
1068 ± 21	0.016 ± 0.001
1093 ± 21	0.016 ± 0.001
1127 ± 22	0.016 ± 0.001
1211 ± 24	0.015 ± 0.001
1256 ± 26	0.014 ± 0.001
1281 ± 26	0.014 ± 0.001
1387 ± 29	0.013 ± 0.001
1214 ± 25	0.018 ± 0.002
1261 ± 26	0.016 ± 0.002
1460 ± 31	0.012 ± 0.001

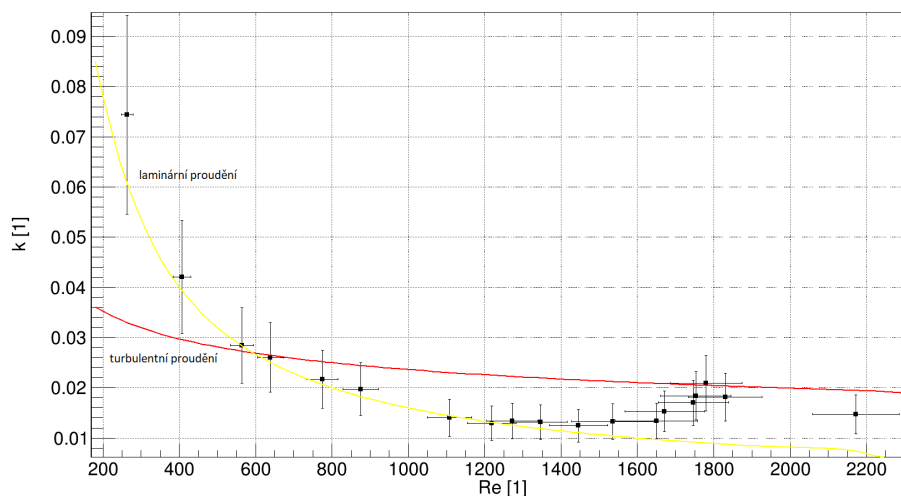


Obrázek 5: Graf závislosti $k(Re)$ pro trubici A

Na grafu na Obrázku č. 5 si lze povšimnout, že hodnoty k se z většiny blíží horní křivce, která zobrazuje teoretickou závislost $k(Re)$ za předpokladu, že se jedná o laminární proudění. Po překonání hodnoty Reynoldsova čísla 1000 se body mírně vzdalují této závislosti a blíží se k druhé závislosti spodní, která zobrazuje teoretickou závislost pro turbulentní proudění. Tato pozorování jsou v souladu s naší teorií i tvrzeními vyslovenými v komentářích k závislosti $Q(v)$ pro trubici A.

Tabulka 8: Závislost $k(Re)$ pro trubici B

Re [1]	k [1]
264 ± 15	0.074 ± 0.020
409 ± 23	0.042 ± 0.011
565 ± 31	0.028 ± 0.008
640 ± 34	0.026 ± 0.007
775 ± 41	0.022 ± 0.006
876 ± 46	0.020 ± 0.005
1108 ± 59	0.014 ± 0.004
1220 ± 64	0.013 ± 0.003
1272 ± 67	0.013 ± 0.004
1346 ± 71	0.013 ± 0.003
1446 ± 76	0.012 ± 0.003
1536 ± 107	0.013 ± 0.004
1650 ± 108	0.013 ± 0.004
1672 ± 104	0.015 ± 0.004
1748 ± 92	0.017 ± 0.004
1753 ± 93	0.018 ± 0.005
1831 ± 97	0.018 ± 0.005
1782 ± 94	0.021 ± 0.006
2173 ± 114	0.015 ± 0.004



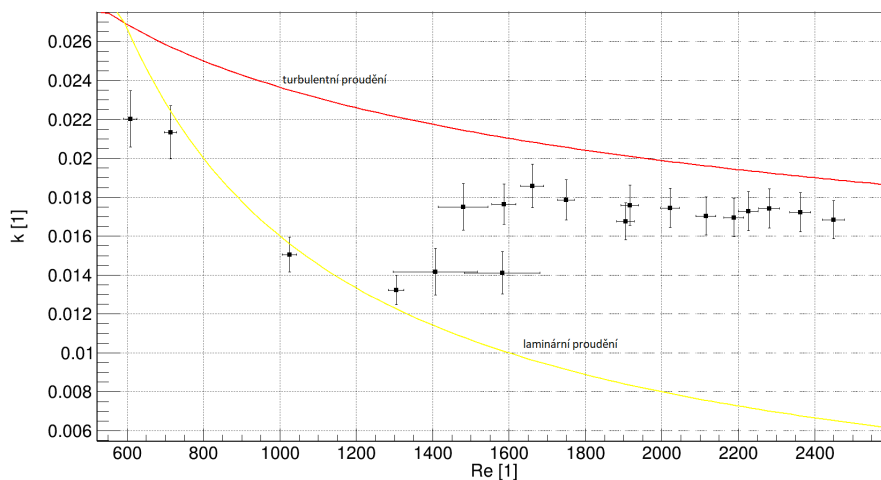
Obrázek 6: Graf závislosti $k(Re)$ pro trubici B

Na grafu na Obrázku č. 6 si lze povšimnout, že hodnoty k se z počátku blíží horní křivce, která zobrazuje teoretickou závislost $k(Re)$ za předpokladu, že se jedná o laminární proudění. Po překonání hodnoty Reynoldsova čísla 1000 se body vzdalují této závislosti a blíží se k druhé závislosti spodní, která zobrazuje teoretickou závislost pro turbulentní proudění. Po překonání hodnoty Re 1800 se již drží této závislosti. Tato pozorování jsou v souladu s naší teorií i tvrzeními vyslovenými v komentářích k závislosti $Q(\nu)$ pro trubici B.

Ještě si dovolíme okomentovat chybu k , která se pro trubici B pohybuje kolem 25 %, u ostatních dvou trubíků se drží kolem 8 %. Chyby určení Re pak jsou pro všechny trubice kolem menší než 5 %. Ona velká chyba k u trubice B je způsobena přenosem z chyby 5 % u $r(a)_B$, kdežto zbylé dva poloměry mají chybu kolem 1.5 %, význam chyby r při určování k lze vidět z (19). O tom, jak zpřesnit měření se více rozepíšeme v diskusi.

Tabulka 9: Závislost $k(Re)$ pro trubici C

Re [1]	k [1]
633 ± 18	0.020 ± 0.001
737 ± 17	0.020 ± 0.001
1050 ± 20	0.013 ± 0.001
1330 ± 21	0.011 ± 0.001
1432 ± 110	0.012 ± 0.001
1607 ± 99	0.012 ± 0.001
1505 ± 66	0.016 ± 0.001
1611 ± 31	0.016 ± 0.001
1678 ± 30	0.017 ± 0.001
1774 ± 22	0.016 ± 0.001
1930 ± 23	0.015 ± 0.001
1941 ± 23	0.016 ± 0.001
2047 ± 24	0.015 ± 0.001
2140 ± 25	0.015 ± 0.001
2213 ± 26	0.015 ± 0.001
2250 ± 27	0.015 ± 0.001
2306 ± 27	0.015 ± 0.001
2387 ± 28	0.015 ± 0.001
2474 ± 29	0.015 ± 0.001



Obrázek 7: Graf závislosti $k(Re)$ pro trubici C

Na grafu na Obrázku č. 7 si lze povšimnout, že hodnoty k se z počátku blíží spodní křivce, která zobrazuje teoretickou závislost $k(Re)$ za předpokladu, že se jedná o laminární proudění. Po překonání hodnoty Reynoldsova čísla 1000 se body vzdalují této závislosti a blíží se k druhé závislosti horní, která zobrazuje teoretickou závislost pro turbulentní proudění. Po překonání hodnoty Re 1700 se již drží této závislosti. U všech tří závislostí $k(Re)$ si lze všimnout, že hodnoty pro turbulentní proudění jsou menší než teoretický vztah udaný vztahem (11), ten je však pouze aproximativní. Navíc mohlo dojít k některým systematickým chybám respektive zanedbáním, tyto jevy rozebíráme v diskusi.

Diskuse

Při měření objemového průtoku u trubice A jsme měřili vždy stejné objemy (20, 55 a 100 ml), důvodem zavedení této metody bylo, že při zápisu času bylo velmi snadné rozpoznat, zda nedošlo při měření k systematické chybě. Naopak nevýhodou se stala rostoucí chyba měření, protože s tím, jak rostla rychlost kapaliny rostla i relativní chyba určení času. U trubic B a C se vzhledem k rychlosti proudění kapaliny ukázala tato metoda jako neudržitelná. Tento způsob se ukázal jako mylný již během měření. Proto jsme pokračovali v měření u trubic B a C způsobem, že nám stačila přibližná hodnota kolem nějakého určitého objemu, aby jsme alespoň s nějakou jistotou rozeznali systematickou chybu v tak velkém měření. Samozřejmě bychom mohli až při vyhodnocení aplikovat 3σ kritérium, avšak chybějící data bychom už nezískali.

Obecně jsme se snažili měnit odměrné válce, později určený objem, tak, aby chyba v měření času i objemu byla menší než 3%, což se nám v případě všech měření podařilo. Naprostá většina rel. chyb určení času a objemu je dokonce menší než 1.5%. Jako kruciólní se ukázala opožděná změna nádoby z 25 ml na 55 ml. Obecně pokaždé, když došlo ke změně nádoby, tak relativní chyba Q_V klesla. Celkově jsme tedy měli nádoby, respektive měřené objemy, měnit dříve, protože jsme podcenili chybu měření času na úkor chyby měření objemu.

Dalším problémem však je, že jak jsme se dozvěděli, tak někdo dva dny před naším měřením rozbil odběrný válec na 50 ml, který byl na tento objem přesně určen a relativní chyba jeho objemu byla více než poloviční oproti válci náhradnímu. To nás vedlo ke snaze raději i po velmi krátké době (kolem 10 s) měřit na válci s objemem 20 ml. Náš odhad se ukázal jako mylný, jedná se právě o hodnoty atakující chybu 3% na druhou stranu v chybě Q_V se toto příliš neprojevuje, protože rel. chyba válce 55 ml je vyšší než válce 20 ml.

Odpověď na problém s 55 ml válcem i obecně chybu měření způsobenou nepřesnostmi v měření času a objemu by bylo měřit delší dobu a tudíž i větší objemy, což by obě chyby podílející se na určení Q_V poměrně snížilo, bohužel čas určený na měření je limitován. Toto se názorně projevuje u trubice C, kde je rychlost proudění mnohem větší a tudíž za podobný čas si můžeme dovolit naměřit velké objemy, jejichž rel. chyba je díky tomu nízká. Na druhou stranu, pokud by dále rychlost stoupala, tak by pro nás bylo problematické dané objemy zachytit nebo bychom museli zmenšit čas t , což by chybu začalo opět zvětšovat.

Větší množství měření by mohlo významně zpřesnit i hodnoty směrnice, kterou jsem hledali fitováním lineární závislosti na závislost Q_V v oblasti laminárního proudění. Zvláště pak se tento nedostatek měření projevil při určování poloměru trubice B a následně se přenesl i do hodnoty k_B .

Ještě si dovolíme terminologickou poznámku, rozbit byl 50 ml válec, na místo něj jsme měřili do náhradního. Po přeměřování ve všech ostatních válcích jsme však zjistili, že tento náhradní 50 ml válec má reálný objem 55 ml.

Další chyby do měření Re a k vneslo nepřesné určení teploty, resp. z ní plynoucí chyba η , která měla při námi uvažované aproximaci dle vztahu (14) chybu přes 2 %, to samé platí i pro ρ , ač tam byla chyba zanedbatelná. Navíc, kdybychom skutečně znali funkční vztahy těchto veličin s t , tak bychom se zbavili chyb, které ani nekvantifikujeme zavedením vztahu (14) oproti reálnému vztahu. Stejně tak nevíme, jak moc se liší vztah (11) od reality.

Na konec bychom se vyjádřili k možným systematickým chybám. Jednak víme, že manometrické trubice neměří tlak přesně. Při výtoku vody z trubice může docházet k víření a proudění, které nejsme sto naší měřící metodou postihnout. Občas se stalo,

že v manometru byla bublinky. Mohlo se tedy stát, že takovýto jev zkreslil nějakou hodnotu Q_V . K tomu však nejspíše nedošlo s ohledem na to, že všechny hodnoty splňují 3σ kritérium a s ohledem na naši úvodní měřicí metodu stejných objemů. Dále je možné, že byla měřená kapalina znečištěna nějakou hustší příměsí, což by ovlivnilo hodnoty η a ρ , oboje by vedlo k vyšší hodnotám k než předpokládáme, k čemuž opět nedošlo dle našich pozorování. Samozřejmě by mohla být hustota kapaliny i nižší, avšak mimo nepřesně určené teploty nás nenapadá, jak by bylo možno příměsí snížit hustotu vody, neb tato příměs by jednoduše vyplavala nad kapalinu již v sudu, popř. manometru.

Přes všechny výše zmíněné chyby se se všechna měření shodují s teorií a lze tedy tvrdit, že měření bylo provedeno správně a neobsahuje hrubé systematické chyby, totéž platí i pro vyhodnocení.

Závěr

Sestrojili jsme tabulky a grafy závislostí $Q_V(p)$ pro všechny tři trubice. Všechny tři závislosti se chovali v souladu s předpoklady zmíněnými v teorii. Ze směrnic $Q_V(p)$ v oblasti laminárního proudění jsme určili poloměry trubic r přesněji než než měřením posuvným měřítkem s ohledem na teorii. Změřené hodnoty jsou tyto $r(a)_A = 1.03 \pm 0.01$ mm, $r(a)_B = 1.42 \pm 0.04$ mm a $r(a)_C = 1.54 \pm 0.02$ mm. Tyto poloměry se řádově neliší od hodnot měřených posuvným měřítkem, ač se jejich chybové intervaly neprotínají. Z těchto vypočtených poloměrů jsme sestrojili grafy a tabulky závislostí $k(Re)$ pro všechny tři trubice. Výsledky $k(Re)$ byly v souladu s teorií i závislostmi $Q_V(p)$, nedošlo tedy k chybě měření ani vyhodnocení dat.

Použitá literatura

- [1] Fyzikální praktikum. Studium proudění viskózní kapaliny trubicemi kruhového průřezu [online][cit. 2019-04-04]. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_103.pdf
- [2] BROŽ, J. a KOL. Základy fyzikálních měření I. 1. vydání. Praha: SPN, 1983
- [3] ENGLISH, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vydání. Praha: Matfyzpress, 2006, ISBN 80-86732-93-2
- [4] SImetric. Water [online][cit. 2019-04-04]. Dostupné z: https://www.simetric.co.uk/si_water.htm
- [5] Engineering Toolbox. Water - dynamic and kinematic viscosity [online][cit. 2019-04-05]. Dostupné z: https://www.engineeringtoolbox.com/water-dynamic-kinematic-viscosity-d_596.html?vA=23.5&units=C#