Высшая математика

Лисид Лаконский

April 2023

Содержание

1 Определенные интегралы и функции многих переменных, вариант №21

1.1 Задание №2

Найти точки экстремума и точки перегиба функции

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x (4t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

Решение.
$\Phi(x) = \int\limits_0^x (4t - t^2)\,\mathrm{d}t = (2t^2 - \frac{t^3}{3})\Big|_0^x = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$
$\Phi'(x) = 4x - x^2$, $4x - x^2 = 0 \iff x(4-x) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 = 4$ — точки экстремума
Изобразим знаки $\Phi'(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = 0$, $x = 4$. Найдем точки максимума и минимума: $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 4$
$\Phi(0) = 0$, $\Phi(4) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$

$\Phi''(x) = f'(x) = 4 - 2x$, $4 - 2x = 0 \iff x = 2$ — точка перегиба
Изобразим знаки $\Phi''(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченной точкой $x = 2$. Определим, на каких промежутках график функции вогнут, а на каких выпукл.
$\Phi''(0) = 4$ — график вогнутый, $\Phi''(2) = 0$, $\Phi(x) < 0\ \forall\ \Phi(x), x > 2$ — график выпуклый

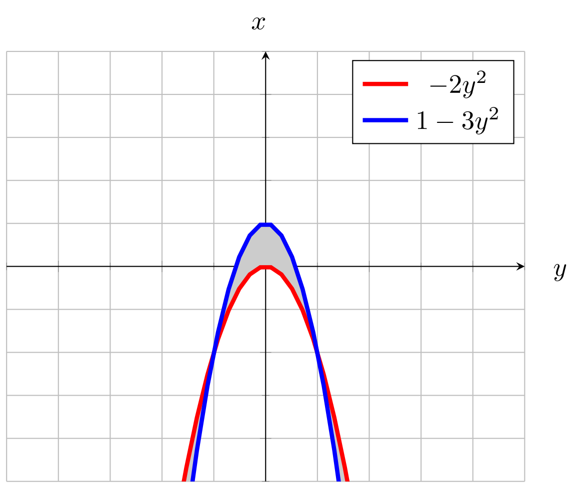
Ответ. Точки экстремума: $x = 0$, $x = 4$. Точки перегиба: $x = 2$

1.2 Задание №3

Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь

$$x = -2y^2,\ x = 1 - 3y^2$$

График.



Решение.
$-2y^2 = 1 - 3y^2 \iff y^2 = 1 \iff y = \pm 1$, $x(-1) = -2$, $x(1) = -2$
$S_1 = -\int\limits_{-2}^{0} ((1 - 3y^2) - (-2y^2)) = -\int\limits_{-2}^{0} (1 - y^2) = -(y - \frac{y^3}{3})\Big|_{-2}^{0} = (-2 + \frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$
$S = 2S_1 = \frac{4}{3}$

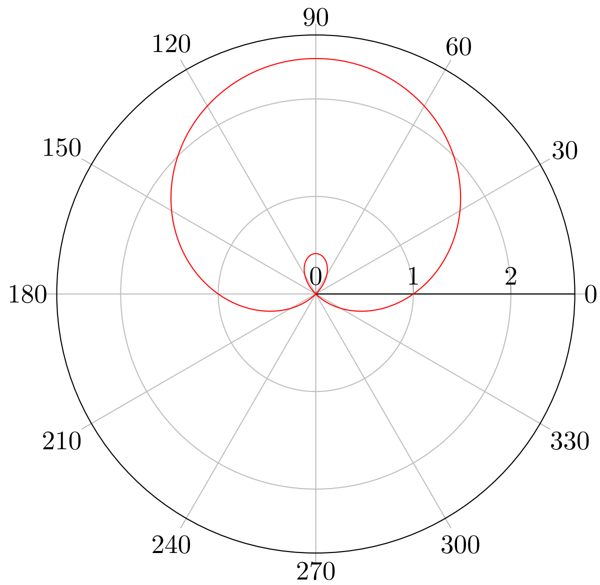
Ответ. $S = \frac{4}{3}$

1.3 Задание №4

Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь.

$$r = 1 + \sqrt{2}\sin\phi$$

График.



Решение. $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3}(1+\sqrt{2}\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}(\phi - \sqrt{2}\cos\phi)\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{1}{2}((\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.23$

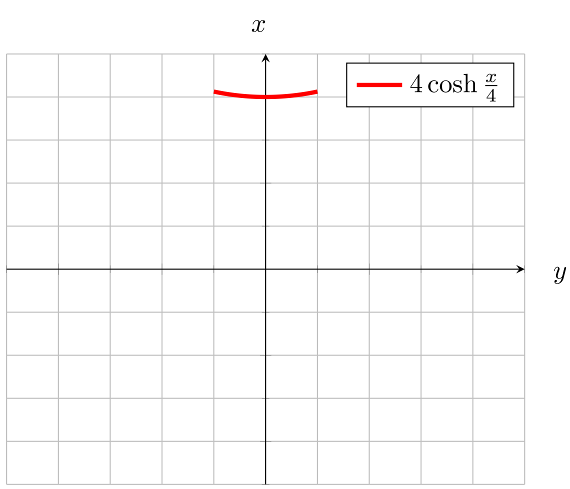
Ответ. $S = 1.23$

1.4 Задание №6

Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

$$y = 4\cosh\frac{x}{4},\ 0 \le x \le 1$$

График.



Решение. $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+(\sinh\frac{x}{4})^2}\,\mathrm{d}x = \dots$

$\int \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{4}}\,\mathrm{d}x = \dots$
Выполним замену $u = \frac{x}{4}$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x$
$\dots = 4\int \sqrt{1+\sinh^2(u)}\,\mathrm{d}u = 4\int \sqrt{\cosh^2(u)}\,\mathrm{d}u = 4\int \cosh(u)\,\mathrm{d}u = 4\sinh(u) + C = \dots$
Вернемся к переменной x
$\dots = 4\sinh(\frac{x}{4}) + C$

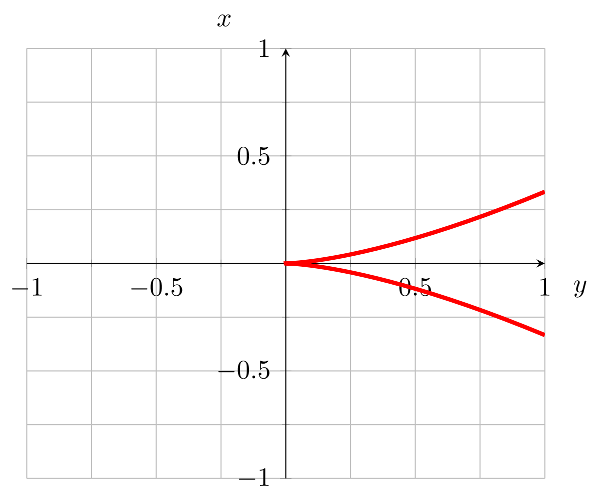
$\dots = (4\sinh(\frac{x}{4}))\Big|_{-1}^{1} = (4\sinh\frac{x}{4} - (-4\sinh\frac{x}{4})) = 8\sinh\frac{x}{4}$
Ответ. $l = 8\sinh\frac{x}{4}$

1.5 Задание №7

Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

$$y = \frac{t^3}{3},\ x = t^2,\ -1 \le t \le 1$$

График.



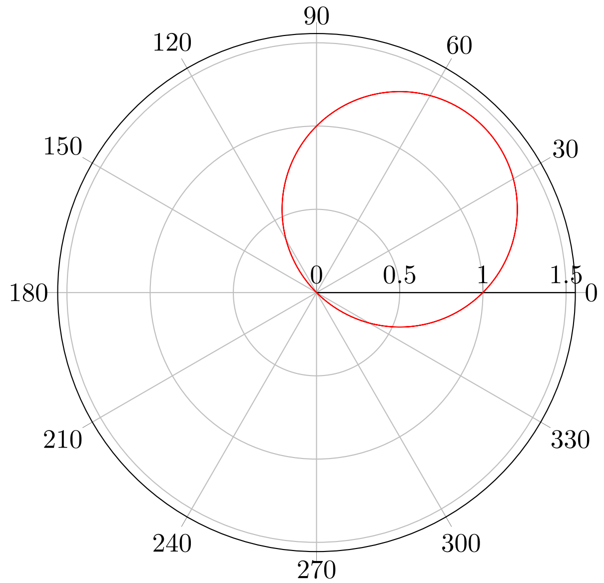
Решение.
$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{(t^2)^2 + (2t)^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{t^4 + 4t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{0}^{1} t\sqrt{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \dots$
Выполним замену $u = t^2 + 4$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$. Получаем новую нижнюю границу $u = 4 + 0^2 = 4$ и новую верхнюю границу $u = 4 + 1^2 = 5$
$\dots = \int\limits_{4}^{5} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2u\sqrt{u^2}}{3}\Big|_{4}^{5} = \frac{2*5\sqrt{5}}{3} - \frac{2*4*\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 8)$
Ответ. $l = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 8)$

1.6 Задание №8

Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

$$r = \sin\phi + \cos\phi$$

График.



Решение.
$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2} \, \mathrm{d}\phi$
$l = 2\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{(\sin\phi + \cos\phi)^2 + (\cos\phi - \sin\phi)^2} \, \mathrm{d}\phi = 2\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{(\sin^2\phi + 2\sin\phi\cos\phi + \cos^2\phi) + (\cos^2\phi - 2\cos\phi\sin\phi + \sin^2\phi)} \, \mathrm{d}\phi =$
$2\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{2\sin^2\phi + 2\cos^2\phi} \, \mathrm{d}\phi = 2\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{2} \, \mathrm{d}\phi = 2\sqrt{2}\pi$
Ответ. $l = 2\sqrt{2}\pi$

1.7 Задание №10

Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 x}$$

Решение.
$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \dots$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \dots$, выполним замену $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, тогда $\dots = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} = \dots$
Вернемся к переменной x, $\dots = -\frac{1}{\ln x}$

$\dots = \lim\limits_{a\to 0}(-\frac{1}{\ln x})\Big|_{a}^{1/2} = \lim\limits_{a\to 0}(-\frac{1}{\ln 1/2} + \frac{1}{\ln a}) = -\frac{1}{\ln 1/2} = \frac{1}{\ln 2}$
Ответ: $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$

1.8 Задание №11

Найти и изобразить в плоскости xOy область определения функции

$$z = \sqrt{e^{xy}(x - y^2)}$$

$$\begin{cases} e^{xy}(x-y^2) \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq y^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -\sqrt{x} \\ y \leq \sqrt{x} \end{cases} \tag{1}$$

График.