Высшая математика

Лисид Лаконский

April 2023

Содержание

1 Ряды, вариант №21

1.1 Задание №1

Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{10}+9}$$

Решение.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{10}+9} \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$ — эталонный ряд
Степень при n больше единицы — следовательно, ряд сходится.

Ответ: ряд сходится

1.2 Задание №2

Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^2+1}}{n^3-1}$$

Решение.
Более большой ряд: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ — эталонный ряд, сходящийся
По признаку сравнения из сходимости большего ряда следует сходимость более маленького ряда, следовательно, исходный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится

1.3 Задание №3

Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+5)^8}{(n+7)^7}$$

Решение.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+5)^8}{(n+7)^7} = \infty$ — необходимый признак сходимости не выполнен, следовательно, ряд расходится

Ответ: ряд расходится

1.4 Задание №4

Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n!)^4}$$

Решение.
$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{(n+1)^2}{(n!*(n+1))^4} * \frac{(n!)^4}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^4*n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2*n^2} = 0$
По признаку Д'Аламбера, ряд является сходящимся

Ответ: ряд сходится

1.5 Задание №5

Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+7}$$

Решение.
Проверим абсолютную сходимость, для этого исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+7}$ на сходимость.
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+7}=1$ — не выполнен необходимый признак сходимости, следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся

Проверим условную сходимость.
Проверим выполнение первого условия теоремы Лейбница: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+7}=-\frac{1}{8}+\frac{2}{9}-\frac{3}{10}$ — условие выполняется
Проверим выполнение второго условия: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+7}=1$ — условие не выполняется, ряд не является условную сходящимся по теореме Лейбница

Ответ: ряд не сходится ни абсолютно, ни условно

1.6 Задание №6

Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+2}}$$

Решение.
Проверим абсолютную сходимость, для этого исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+2}}$ на сходимость.
Пусть $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+2}}$.
$\int\limits_1^{\infty}(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+2}})\,\mathrm{d}n=\infty$ — интеграл расходится, следовательно, ряд тоже является расходящимся, согласно интегральному признаку Коши

Проверим выполнение первого условия теоремы Лейбница: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+2}}=-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}-\ldots$ — первое условие выполняется
Проверим выполнение второго условия: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+2}}=0$ — условие выполняется, следовательно, ряд является условно сходящимся по теореме Лейбница

Ответ: ряд не сходится абсолютно, но сходится условно

1.7 Задание №7

Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+n}$$

Решение.
Проверим абсолютную сходимость.
Введем $f(x)=\frac{1}{x^3+x}$
$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\beta\to\infty}(\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1))\Big|_1^{\beta}=\frac{\ln 2}{2}$ — ряд сходится абсолютно, так как сходится интеграл, согласно интегральному признаку Коши

Проверим условную сходимость.

Первое условие теоремы Лейбница выполняется — каждый последующий член по модулю меньше предыдущего.
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+x} = 0$ — второе условие теоремы Лейбница выполняется.
Следовательно, ряд сходится условно

Ответ: ряд сходится и абсолютно, и условно

1.8 Задание №8

Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - 2\ln n}$$

Решение.
Проверим абсолютную сходимость. Для этого исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-2\ln n}$
Более маленький ряд: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ — эталонный ряд, расходится.
Так как более маленький ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, данный ряд тоже расходится.
То есть, исходный ряд не сходится абсолютно.

Проверим условную сходимость.
$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-2\ln n} = -\frac{1}{2-2\ln 2} + \frac{1}{3-2\ln 3} - \frac{1}{4-2\ln 4}$.
Видим, что первое условие теоремы Лейбница выполняется.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-2\ln n} = 0$ — второе условие теоремы Лейбница выполняется.
То есть, исходный ряд сходится условно.

Ответ: ряд не сходится абсолютно, но сходится условно.

1.9 Задание №9

Найти область сходимости функционального ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + x^2}$$

Решение.
$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+x^2}{(n+1)^3+x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+x^2}{n^3+3n^2+3n+1+x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{x^2}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{x^2}{n^3}} = 1$ — признак неприменим

1.10 Задание №10

Найти область сходимости функционального ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^{2n}}{\sqrt{n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{2^{n+1}x^{2(n+1)}}{\sqrt{n+1}} * \frac{\sqrt{n}}{2^n x^{2n}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{2*x^2*\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}| = 2x^2$
Ряд сходится при $2x^2 < 1 \iff x^2 < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Отдельно проверим граничные значения:
$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n(-\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n}}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}*2^n*1^n}{2^n*\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}*1^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{\sqrt{n}}$
Проверим сходимость данного ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{3(n+1)+1}}{\sqrt{n+1}} * \frac{\sqrt{n}}{(-1)^{3n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = -1$ — по признаку Д'Аламбера, ряд сходится
При $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ряд так же сходится.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$