Высшая математика

Лисид Лаконский

May 2023

Содержание

1 Расчетно-графическая работа №4, вариант №21

1.1 Задание №1

Дана аналитическая функция $f(z) = u + iv$, где $u = Re\ f(z)$, $v = Im\ f(z)$. Найти эту функцию, если:

$$v = 4xy - y$$

Решение. Найдем действительную часть функции $f(z)$.
Так как $v(x, y) = 4xy - y$, то:
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 4y$
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = 4x - 1$
В соответствии с условиями Коши-Римана:
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = 4x - 1$
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -4y$
Поскольку $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4x - 1$, то
$u(x, y) = \int (4x - 1)\,\mathrm{d}x = 2x^2 - x + \phi(y)$
Найдем частную производную по «игрек»:
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0 + \phi'_y(y)$
Таким образом:
$0 + \phi'_y(y) = -4y \Longleftrightarrow \phi(y) = -2y^2 + C$
В результате: $u(x, y) = 2x^2 - x - 2y^2 + C$
$f(z) = u+iv = (2x^2 - x - 2y^2 + C) + (4xy - y)i = 2x^2 - x - 2y^2 + C + 4xyi - yi = -(x+yi) + 2(x^2 + 2xyi - y^2) + C = -z + 2z^2 + C$

Ответ: $-z + 2z^2 + C$

1.2 Задание №2

Найти образ E области D плоскости z при отображении функцией $w = f(z)$

$$D\ :\ \{z|\ |z| < 1;\ 0 < arg\ z < \frac{\pi}{4}\};\ w = z^4$$

Решение.
$w = z^4 = |z|^4(\cos 4 \arg z + i \sin 4 \arg z)$, то есть, $0 < |w| < 1$, $0 < Arg\ w < \pi$.

Ответ: Множество E есть полукруг радиуса 1.

1.3 Задание №3

Найти функцию, отображающую область D плоскости z на область E плоскости w.

$$D\ :\ \{z\ |\ |z - 2i| < 1,\ Re\ z < 0\};\quad E : \{w\ |\ Im\ w > 0\}$$

1.4 Задание №4

Вычислить интеграл.

$$\int\limits_{AB} zRe\ z^2\,\mathrm{d}z;\quad AB : \{\text{отрезок прямой},\ z_A = 0,\ z_B = 1 + 2i\}$$

Решение. Уравнение отрезка с концами в точках z_A, z_B имеет вид:

$$z - z_A = t(z_B - z_A),\quad 0 \le t \le 1$$

В нашем случае $z = t(1 + 2i) = t + 2ti$, $z^2 = (t + 2ti)(t + 2ti) = t^2 + 2t^2i + 2t^2i - 4t^2 = 4t^2i - 3t^2$. Следовательно,
$Re\ z^2 = -3t^2$, $\mathrm{d}z = (1 + 2i)\,\mathrm{d}t$

$\int\limits_{AB} = (t+2ti)(-3t^2)(1+2i)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{AB}((-3t^3-6t^3i)(1+2i))\,\mathrm{d}t = \int\limits_{AB}(-3t^3-6t^3i-6t^3i-12t^3i^2)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{AB}(12t^3-12t^3i-3t^3)\,\mathrm{d}t =$
$(3t^4-3it^4-\frac{3}{4}t^4)\Big|_0^1 = (\frac{9}{4}t^4-3it^4)\Big|_0^1 = \frac{9}{4}-3i$

Ответ: $\frac{9}{4}-3i$

1.5 Задание №5

Вычислить при помощи формул Коши интеграл.

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}\,\mathrm{d}z$$

Решение.
$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}\,\mathrm{d}z = 0$, так как $f(z)$ является аналитической всюду в указанной области.

Ответ: 0

1.6 Задание №6

Найти все лорановские разложения по степеням z функции.

$$w = \frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$$

Решение.
$w = \frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3} = \frac{5z+50}{z(25+5z-2z^2)}$
Центр разложения: $z_0 = 0$
$25z+5z^2-2z^3 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -\frac{5}{2},\ z_2 = 0,\ z_3 = 5$ — точки, в которых функция теряет свою аналитичность
Находим следующие области: $|z| > 5$, $0 < |z| < 5$, $0 < |z| < \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2} < |z| < 5$

1. $|z| > 5$:
   $f(z) = \frac{5z+50}{z^2} * \frac{1}{\frac{25}{z}+5-2z} = \frac{5z+50}{z^2} * \frac{1}{1-(2z-\frac{25}{z}-4)} = \frac{5z+50}{z^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2z-\frac{25}{z}-4)^n = \frac{5z+50}{z^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{2z^2-4z-25}{z})^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(5z+50)(2z^2-4z-25)^n}{z^{n+2}}$,
   область сходимости: $|\frac{2z^2-4z-25}{z}| < 1$

1.7 Задание №7

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0 функцию.

$$w = ze^{\pi/(z-a)^2},\ z_0 = a$$