

Высшая математика

Лисид Лаконский

May 2023

Содержание

1	Расчетно-графическая работа №4, вариант №21	2
1.1	Задание №1	2
1.2	Задание №2	2
1.3	Задание №3	2

1 Расчетно-графическая работа №4, вариант №21

1.1 Задание №1

Дана аналитическая функция $f(z) = u + iv$, где $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$. Найти эту функцию, если:

$$u = 4xy - y$$

Решение.

Найдем мнимую часть функции $f(z)$. Найдем частные производные от действительной части:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4x - 1$$

Условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - 4x$$

Поскольку $\frac{\partial v}{\partial y} = 4y$, то общий интеграл $v(x, y)$ восстанавливаем частным интегрированием по «игрек»:

$$v = \int (4y) dy = 2y^2 + \phi(x), \text{ где } \phi(x) \text{ — неизвестная функция, зависящая только от «икс»}.$$

Теперь от $v(x, y) = 2y^2 + \phi(x)$ берем частную производную по «икс»:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \phi'_x(x)$$

И результат приравняем к изначальной частной производной по «икс»:

$$\phi'_x(x) = 1 - 4x \iff \phi(x) = x - 2x^2 + C$$

$$v(x, y) = 2y^2 + x - 2x^2 + C$$

Таким образом,

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i = (4xy - y) + (2y^2 + x - 2x^2 + C)i = 4xy - y + 2y^2i + xi - 2x^2i + Ci = y(4x - 1) + 2i(y^2 - x^2) + xi + Ci$$

1.2 Задание №2

Найти образ E области D плоскости z при отображении функцией $w = f(z)$

$$D : \{z \mid |z| < 1; 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}; \quad w = z^4$$

Решение.

$$w = z^4 = |z|^4 (\cos 4 \arg z + i \sin 4 \arg z), \text{ то есть, } 0 < |w| < 1, 0 < \operatorname{Arg} w < \pi.$$

Множество E есть единичный ($r = 1$) полукруг.

1.3 Задание №3

Найти функцию, отображающую область D плоскости z на область E плоскости w .

$$D : \{z \mid |z - 2i| < 1, \operatorname{Re} z < 0\}; \quad E : \{w \mid \operatorname{Im} w > 0\}$$