Lezione 10

Matematica

STUDIO DI FUNZIONE

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = 2x^2 \ln x$$

1) Dominio:

$$D = (0; +\infty)$$

2) Simmetrie:

$$f(-x) = 2x^2 \ln(-x)$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

f(x) non è ne pari ne dispari.

3) Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1; 0) \in f(x)$$

4) Segno:

$$f(x) > 0 \rightarrow \ln x > 0 \rightarrow x > 1$$

5) Limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = [0 \cdot \infty]$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \ln x}{x^{-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Risolviamolo con De L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^{-1}}{-2x^{-3}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -x^2 = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Non ci sono asintoti obliqui.

6) Derivate:

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 4x \ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x(2\ln x + 1)$$

Studiamone il segno:

$$f'(x) \geq 0 \to 2\ln x + 1 \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \to \ln x \geq -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) \geq 0 \to x \geq e^{-\frac{1}{2}}$$

Otteniamo quindi un minimo per

$$x_{MIN} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = 2(2\ln x + 1) + 2x \cdot \frac{2}{x}$$

$$f''(x) = 4\ln x + 6$$

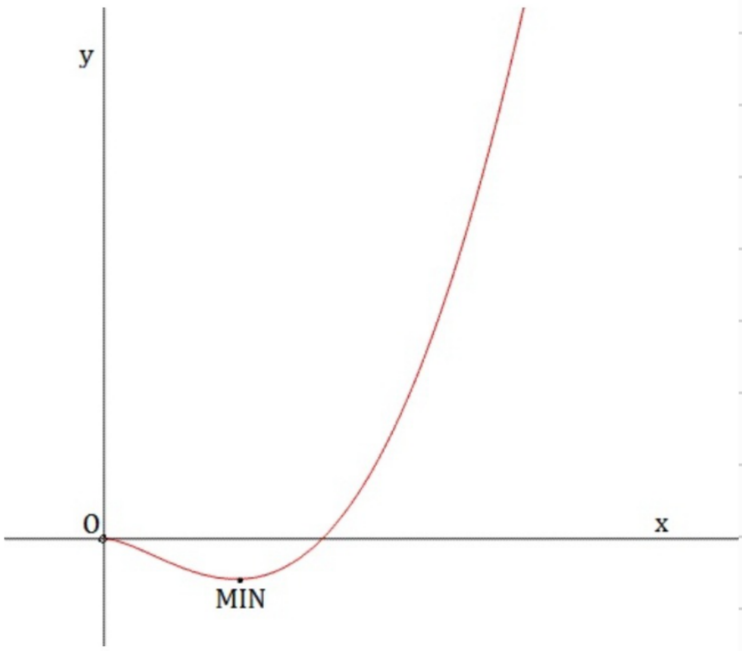
$$f''(x) \geq 0 \to 4\ln x + 6 \geq 0$$

$$f''(x) \geq 0 \to \ln x \geq -\frac{3}{2}$$

$$f''(x) \geq 0 \to x \geq e^{-\frac{3}{2}}$$

Otteniamo un punto di flesso:

$$x_F = e^{-\frac{3}{2}}$$



INTEGRALI

(a) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx;$

(b) $\int_0^1 x^2\sqrt{3x^3+2}\,dx;$

(c) $\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}\,dx;$

(a) Si ha

$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$

(b) Si ha

$\int_0^1 x^2\sqrt{3x^3+2}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^1 (3x^3+2)^{\frac{1}{2}}(9x^2)\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{(3x^3+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{27}(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{27}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}).$

(c) Si ha

$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}\,dx = \int_0^1 (x^2+x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+1)\,dx = \left[\frac{(x^2+x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2\left[\sqrt{x^2+x+3}\right]_0^1 = 2(\sqrt{5}-\sqrt{3}).$

Fisica

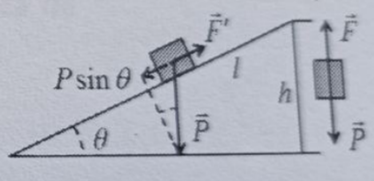
MECCANICA

Esercizio 8.2 (lavoro di una forza costante)

Il sollevamento di uno scatolone di massa 23.0 kg dal pavimento a uno scaffale, eseguito a velocità costante, richiede un lavoro di 370 J. Se lo si esegue invece spingendolo per uno scivolo privo d'attrito, la forza minima richiesta è 63.7 N. Calcolare la lunghezza del piano inclinato dello scivolo.

$l = 5.81\,\text{m}$ ■

Durante il sollevamento lungo la verticale la forza applicata $\vec{F}$ deve contrastare la forza peso $P = m\vec{g}$. Poiché la direzione della forza applicata coincide con



quella dello spostamento, il lavoro compiuto è dato semplicemente da

$$L = Fs = mgh$$

dove h è l'altezza dello scaffale dal pavimento. Se si spinge l'oggetto lungo il piano inclinato, in assenza di attrito, la forza richiesta F' deve invece contrastare soltanto la componente della forza peso parallela al piano $mg\sin\theta$. Ricordando che, detta l la lunghezza del piano inclinato, per definizione $\sin\theta = \frac{h}{l}$, si ha

$$F' = mg\sin\theta = \frac{mgh}{l}$$

da cui, utilizzando la relazione ricavata in precedenza, si ricava

$$l = \frac{mgh}{F'} = \frac{L}{F'} = 5.81\,\mathrm{m}$$

TERMODINAMICA

Una mole di gas ideale monoatomico si espande assorbendo 3000J di calore. Sapendo che il lavoro (W) compiuto dal gas è pari al doppio della sua variazione di energia interna, si calcoli la variazione di temperatura del gas.

Prima di tutto, scriviamo i dati del problema:

Q_A=3000J

W=2ΔU

Ora, ricordiamo che la variazione di energia interna è legata alla variazione di temperatura, essendo

$\Delta U = nc_V\Delta T = 3/2R\Delta T$, (*)

dove abbiamo tenuto in considerazione che n=1 (numero di moli) e che il gas è monoatomico, quindi il calore specifico molare a volume costante è c_V=3/2R (R=8,31J/(K mole).

Per il **Primo Principio della Termodinamica** sappiamo che

Q-W=ΔU

e che W=2ΔU, quindi ΔU=Q/3=1000J.

A questo punto, abbiamo “legato” le variabili e possiamo rispondere al quesito del problema, calcolando la variazione di temperatura, perché la ricaviamo dalla (*):

ΔT= 2ΔU/(3R)=80,2K

ELETTROMAGNETISMO

Proviamo a calcolare la forza di Coulomb in un esempio. Consideriamo due cariche elettriche $Q_1 = +2,3\ \mu\mathrm{C}$ e $Q_2 = +1,4\ \mu\mathrm{C}$ a una distanza reciproca di $r = 0,85\ \mathrm{m}$. In accordo con i prefissi del Sistema Internazionale, il simbolo $\mu\mathrm{C}$ va letto come microcoulomb.

Limitiamoci al calcolo del modulo della forza. La forza elettrostatica che agisce tra le due cariche ha un'intensità data da:

$$F = k_0 \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2} =$$

$$\simeq 8,99 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot \frac{(2,3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}) \cdot (1,4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0,85\ \mathrm{m})^2} \simeq 0,04\ \mathrm{N}$$

Poiché le due cariche hanno segni concordi possiamo affermare che la forza elettrostatica, in questo caso, è repulsiva.

Ora proviamo a calcolare il modulo della forza che si esercita tra due cariche di 1 coulomb poste alla distanza di 1 metro:

$$F = k_0 \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2} =$$

$$\simeq \left(8,99 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}\right) \cdot \frac{(1\ \mathrm{C}) \cdot (1\ \mathrm{C})}{(1\ \mathrm{m})^2} = 8,99 \cdot 10^9\ \mathrm{N}$$

Quasi 9 miliardi di newton: con una forza simile potremmo sollevare un oggetto da 900 000 tonnellate! Questo ci dice che una carica di 1 C è davvero enorme, e che il Coulomb è un'unità di misura tale per cui i valori con cui ci si confronta richiedono spesso l'uso dei prefissi del Sistema Internazionale.