Lezione 7

Moto circolare uniforme

Velocità tangenziale	Velocità angolare	Frequenza e periodo	Accelerazione centripeta
$v = \frac{s}{t}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$f = \frac{1}{T}$	$a_c = \frac{v^2}{r}$
$v = \frac{2\pi r}{T}$	$\omega = 2\pi f$	$T = \frac{1}{f}$	$a_c = \omega^2 r$
$r = \frac{vT}{2\pi}$	$T = \frac{2\pi}{\omega}$		$v = \sqrt{a_c r}$
$T = \frac{2\pi r}{v}$	$v = \omega r$		$r = \frac{v^2}{a_c}$
	$\omega = \frac{v}{r}$		$\omega = \sqrt{\frac{a_c}{r}}$
	$r = \frac{v}{\omega}$		$r = \frac{a_c}{\omega^2}$
Caratterizzazione: modulo della velocità, velocità angolare, periodo, frequenza, modulo dell'accelerazione centripeta costanti			
Legge oraria: $\theta_t = \theta_0 + \omega t$			

Moto circolare uniformemente accelerato

Accelerazione totale	$\vec{a}_{tot} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$
Modulo accelerazione totale	$a_{tot} = \sqrt{a_T^2 + a_C^2}$
Modulo accelerazione tangenziale	$a_T = \alpha r$
Accelerazione angolare	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$
Legge oraria con $t_0 = 0$	$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$
Velocità angolare	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
Equazione senza il tempo	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
Caratterizzazione: accelerazione angolare α costante, modulo dell'accelerazione tangenziale a_T costante.	

Moto armonico

Periodo e frequenza	$T = \frac{1}{f}$; $f = \frac{1}{T}$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$
Pulsazione	$\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\omega = 2\pi f$
Legge oraria (senza sfasamento)	$x = A\cos(\omega t)$
Legge oraria (con sfasamento)	$x(t) = Acos(\omega t + \phi)$
Velocità	$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$
Velocità massima	$v_{max} = \omega A$
Accelerazione	$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$
Accelerazione massima	$a_{max} = A\omega^2$

Esercizi

Esercizio 5.1 (moto circolare, legge oraria)

Carlo e Marco si stanno allenando per una gara podistica su un percorso che forma un anello di raggio $R = 38.0\,\text{m}$. Carlo corre con velocità costante $v_C = 2.70\,\text{m s}^{-1}$, Marco parte da fermo e si muove con accelerazione angolare costante $\alpha = 1.30 \cdot 10^{-3}\,\text{rad s}^{-2}$. Sapendo che i due atleti si trovano nella stessa posizione all'istante iniziale, determinare:

(a) in quale istante e dopo quanti giri Marco sorpassa Carlo;

(b) il modulo delle accelerazioni dei due corridori al momento del sorpasso.

(a) $t_s = 109\,\text{s}$, $n_s = 1.24$ giri (b) $a_C = 0.192\,\text{m s}^{-2}$, $a_M = 0.769\,\text{m s}^{-2}$ ■

(a) L'istante del sorpasso, cioè del momento in cui le posizioni dei due corridori arrivano a coincidere, è la soluzione del sistema formato dalle loro leggi orarie, qui espresse in termini di variabili rotazionali

$$\begin{cases} \theta_C = \omega_C t = \left(\frac{v_C}{R}\right) t \\ \theta_M = \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

Oltre alla soluzione relativa all'istante iniziale ($t = 0\,\text{s}$), l'altra soluzione del sistema è data da

$$t_s = \frac{2\omega_C}{\alpha} = \frac{2v_C}{\alpha R} = 109\,\text{s}$$

La distanza (angolare) percorsa fino all'istante del sorpasso si trova sostituendo la soluzione trovata in una delle due equazioni del sistema, ad esempio la prima

$$\theta_s = \omega_C t_s = \left(\frac{v_C}{R}\right) t_s = 7.77\,\text{rad}$$

e il numero di giri è dato dal rapporto tra tale angolo e l'angolo corrispondente a un giro (2π)

$$n_s = \frac{\theta_s}{2\pi} = 1.24\,\text{giri}$$

(b) Il primo corridore, muovendosi a velocità costante, avrà soltanto un'accelerazione centripeta dovuta al moto circolare, il cui modulo è costante ed è dato da

$$a_C = \frac{v_C^2}{R} = 0.192\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

Il secondo corridore invece avrà una componente tangenziale dell'accelerazione di modulo costante, oltre a una componente centripeta che però nel suo caso aumenta con la velocità, e che va valutata all'istante del sorpasso

$$\begin{cases} a_M^{\text{t}} = \alpha R = 0.0494\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \\ a_M^{\text{cp}} = \omega_M^2 R = (\alpha t_s)^2 R = 0.7673\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \end{cases}$$

Le due componenti danno quindi un'accelerazione risultante di modulo

$$a_M = \sqrt{a_{\text{t}}^2 + a_{\text{cp}}^2} = 0.769\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

Esercizio 5.5 (moto rotatorio, accelerazione angolare)

Il volano di un motore ruota alla velocità di $25.3\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. Spento il motore, il volano rallenta con accelerazione angolare costante e si arresta in $19.7\,\text{s}$. Calcolare:

(a) l'accelerazione angolare;

(b) l'angolo, espresso in radianti, di cui ruota il volano prima di fermarsi;

(c) il numero di giri compiuti nella fase di rallentamento.

(a) $\alpha = -1.28\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$; (b) $\Delta\phi = 249\,\text{rad}$; (c) $n = 39.7\,\text{giri}$ ■

(a) Utilizzando la definizione stessa di accelerazione angolare (media) si ha

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{-\omega_0}{\Delta t} = -1.28\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$$

(b) La distanza angolare percorsa, nello stesso intervallo di tempo, è

$$\Delta\phi = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2 = 249\,\text{rad}$$

(c) Il numero di giri corrispondente si ottiene infine dividendo la distanza angolare per l'angolo di un giro (2π)

$$n = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = 39.7\,\text{giri}$$

■ Esercizio 5.9 (variabili lineari e angolari)

Un motociclista, inizialmente in quiete, accelera in modo uniforme percorrendo 132 m in 8.60 s. Sapendo che la moto ha ruote di 63.0 cm di diametro, calcolare:

(a) l'accelerazione lineare della moto e l'accelerazione angolare delle ruote;

(b) la velocità del motociclista e la velocità angolare delle ruote al termine degli 8.60 s;

(c) il numero di giri compiuti dalle ruote.

(a) $a = 3.57\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\alpha = 11.3\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$; (b) $v = 30.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\omega = 97.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$;
(c) $n = 66.7$ giri ■

(a) L'accelerazione lineare della moto si ricava dalla formula della distanza percorsa in un moto uniformemente accelerato con partenza da fermo

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

da cui

$$a = \frac{2s}{t^2} = 3.57\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Si noti che l'accelerazione della moto coincide con l'accelerazione lineare dei punti che si trovano sul battistrada delle ruote, supponendo che queste ruotino senza slittare. L'accelerazione angolare delle ruote sarà quindi data da

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2a}{d} = 11.3\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$$

(b) La velocità della moto, in un moto uniformemente accelerato con partenza da fermo, si trova come

$$v = at = \frac{2s}{t} = 30.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

e per la velocità angolare delle ruote vale quanto detto nel ricavare l'accelerazione

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2v}{d} = 97.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

(c) Il numero di giri compiuti dalle ruote si può ricavare dallo spostamento angolare di una ruota nel tempo in cui si muove con accelerazione costante, con partenza da fermo

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 419\,\mathrm{rad}$$

che corrisponde a un numero di giri

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = 66.7\ \text{giri}$$

Seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Terza legge di Newton (principio di azione e reazione)

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Forza risultante di n forze

$$\vec{F}_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Forza peso e accelerazione di gravità

$$\vec{F}_P = m\vec{g}$$

$$g_{Terra} \simeq 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Forza d'attrito (coefficiente d'attrito statico / dinamico)

$$F_A = \mu \cdot F_\perp \qquad \begin{cases} \mu_s & \text{statico} \\ \mu_d & \text{dinamico} \end{cases}$$

Piano inclinato (senza attrito)

Accelerazione perpendicolare al piano	$a_y = 0$
Accelerazione parallela al piano	$a_x = g\sin(\alpha)$
Angolo da altezza e lunghezza	$\sin(\alpha) = \frac{h}{l}$
Angolo da base e lunghezza	$\cos(\alpha) = \frac{d}{l}$
Angolo da altezza e base	$\tan(\alpha) = \frac{h}{d}$

Piano inclinato con attrito

Accelerazione perpendicolare al piano (corpo inizialmente fermo)	$a_y = 0$
Accelerazione parallela al piano (corpo inizialmente fermo)	$a_x = g\sin(\alpha) - \mu_s g\cos(\alpha)$
Angolo critico per l'equilibrio (corpo inizialmente fermo)	$\alpha = \arctan(\mu_s)$
Accelerazione perpendicolare al piano (corpo inizialmente in moto)	$a_y = 0$
Accelerazione parallela al piano (corpo inizialmente in moto)	$a_x = g\sin(\alpha) - \mu_d g\cos(\alpha)$
Angolo critico (corpo inizialmente in moto)	$\alpha = \arctan(\mu_d)$
Angolo da altezza e lunghezza	$\sin(\alpha) = \frac{h}{l}$
Angolo da base e lunghezza	$\cos(\alpha) = \frac{d}{l}$
Angolo da altezza e base	$\tan(\alpha) = \frac{h}{d}$

Forza elastica (legge di Hooke)

$$\vec{F}_e = -k\vec{x}$$

$$x = L - L_0$$

Forza centripeta

Forza centripeta (con $\vec{a}$ accelerazione centripeta): $\vec{F} = m\vec{a}$
Forza centripeta (in modulo): $F_c = m\frac{v^2}{r}$
Forza centripeta (in modulo): $F_c = m \cdot \omega^2 \cdot r$
NB: per gli esercizi, tenere a mente le formule del moto circolare uniforme!

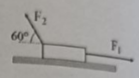
Condizione di equilibrio

$$\vec{F}_{ris} = 0$$

Esercizi

Esercizio 6.2 (prima e seconda legge di Newton)

Un blocco di massa $m = 5.5\,\text{kg}$ è inizialmente fermo su un piano orizzontale privo di attrito. Su di esso agiscono due forze dirette come in figura di intensità $F_1 = 6.2\,\text{N}$ e $F_2 = 4.8\,\text{N}$. Determinare:



(a) la forza normale esercitata dal piano sul blocco;

(b) l'accelerazione del blocco;

(c) per quanto tempo deve agire la forza perché il blocco raggiunga la velocità $v = 5.2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$;

(d) la distanza percorsa dal blocco in questo tempo.

(a) $N = 50\,\text{N}$; (b) $a = 0.69\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; (c) $t = 7.5\,\text{s}$; (d) $d = 20\,\text{m}$ ■

(a) La forza normale esercitata dal piano sul blocco, per la terza legge di Newton, eguaglia la forza premente esercitata dal blocco sul piano, che in questo caso è data dalla forza peso diminuita della componente verticale di F_2

$$N = P - F_{2y} = mg - F_2 \sin 60° = 50\,\text{N}$$

(b) Nella direzione orizzontale invece la risultante delle forze agenti sul blocco deve eguagliare, per la seconda legge di Newton, il prodotto della sua massa per l'accelerazione. Assumendo come riferimento positivo il verso da sinistra a destra si ha

$$F_1 - F_{2x} = ma$$

da cui

$$a = \frac{F_1 - F_2 \cos 60°}{m} = 0.69\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

(c) Essendo costanti le forze agenti sul blocco ne risulterà un moto con un'accelerazione costante, per cui vale la legge

$$v = v_0 + at$$

ed essendo il blocco inizialmente fermo si avrà

$$t = \frac{v}{a} = 7.5\,\text{s}$$

(d) La distanza percorsa sarà invece data da

$$d = \frac{1}{2}at^2 = 20\,\text{m}$$

Esercizio 6.8 (applicazione delle leggi di Newton)

La cabina di un ascensore di massa $2811.8\,\text{kg}$, appesa a un cavo portante, sta salendo con un'accelerazione $a = 1.16\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$. Determinare:

(a) l'intensità T della tensione del cavo portante;

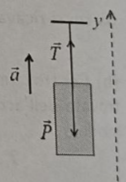
(b) l'intensità T' della tensione del cavo se nelle stesse condizioni l'accelerazione fosse orientata verso il basso.

Sapendo che il cavo portante ha un carico di rottura (cioè la massima tensione che può sopportare senza rompersi) pari a $31750\,\text{N}$,

(c) qual è la massima accelerazione verso l'alto che il cavo portante può imprimere all'ascensore senza rompersi?

(a) $T = 3.08 \cdot 10^4\,\text{N}$; (b) $T' = 2.43 \cdot 10^4\,\text{N}$; (c) $a_{\text{max}} = 1.48\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ ■

(a) Applicando la seconda legge di Newton al moto della cabina rispetto a un asse verticale orientato verso l'alto, si ha



$$T - mg = ma$$

da cui si ricava

$$T = m\,(g + a) = 3.08 \cdot 10^4\,\text{N}$$

(b) Nel secondo caso cambierà il segno dell'accelerazione a, per cui si avrà

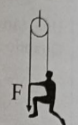
$$T' = m\,(g - a) = 2.43 \cdot 10^4\,\text{N}$$

(c) Riprendendo l'equazione scritta per il caso (a) e sostituendo alla tensione T il suo valore massimo, si ricava l'accelerazione massima

$$a_{\text{max}} = \frac{T_{\text{max}} - mg}{m} = 1.48\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

Esercizio 6.11 (applicazione delle leggi di Newton)

Per una manifestazione dimostrativa, un alpinista di 82 kg deve raggiungere una finestra sfruttando una carrucola ideale posta in cima a una torre. L'alpinista si lega a una corda che passa sulla carrucola e, per sollevarsi, tira il capo libero della corda verso il basso con una forza $F = 408\,\mathrm{N}$. Determinare l'accelerazione dell'alpinista verso l'alto. Raggiunta la velocità di $0.79\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, l'alpinista tira la fune in modo da salire con velocità costante. Quanto vale ora la forza esercitata?



$a = 0.14\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; $F' = 402\,\mathrm{N}$ ■

Per la terza legge di Newton, alla forza F esercitata dall'uomo sulla corda verso il basso è associata una forza di pari intensità esercitata dalla corda sull'uomo verso l'alto. Inoltre la forza esercitata sul capo libero della corda si trasmette inalterata in modulo, tramite la carrucola ideale, fino al punto in cui la corda è fissata all'uomo. Quindi complessivamente sull'uomo agisce una forza verso l'alto di intensità $2F$, oltre alla forza peso verso il basso, e la loro risultante è responsabile della sua accelerazione

$$2F - mg = ma$$

da cui

$$a = \frac{2F - mg}{m} = 0.14\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Nella seconda parte della salita, se la velocità rimane costante significa che l'accelerazione dell'uomo è nulla, perciò la forza esercitata sarà tale che

$$2F' - mg = 0$$

quindi

$$F' = \frac{1}{2} mg = 402\,\mathrm{N}$$

Esercizio 6.6 (accelerometro)

Per misurare l'accelerazione di un'auto, una piccola massa di 45 g viene appesa allo specchietto retrovisore con uno spago sottile. Quando l'automobile è ferma lo spago cade verticalmente, mentre si osserva che quando l'auto sta accelerando lo spago forma un angolo $\theta = 13.0°$ con la verticale. Calcolare quanto valgono in tale istante

(a) l'accelerazione dell'auto;

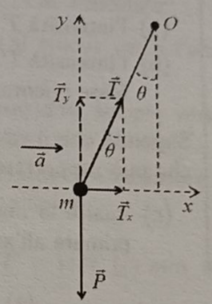
(b) la tensione dello spago.

(a) $a = 2.26\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; (b) $T = 0.453\,\mathrm{N}$ ■

(a) Le forze agenti sulla massa appesa allo spago sono la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ che è sempre diretta lungo la verticale verso il basso, e la tensione $\vec{T}$ che è diretta secondo la direzione dello spago verso il punto O in cui è appeso. Se l'auto è ferma (o si muove con velocità costante) tali forze sono una opposta all'altra e perciò danno una risultante nulla. Se l'auto invece ha un'accelerazione, rispetto a un sistema di riferimento inerziale esterno, per la seconda legge di Newton si avrà che

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Scomponendo l'equazione vettoriale nelle componenti lungo gli assi x e y si ha



$$\begin{cases} T_x = ma \\ T_y - mg = 0 \end{cases}$$

Si noti che per la geometria del problema il rapporto tra T_x e T_y corrisponde alla tangente trigonometrica dell'angolo θ formato dallo spago con la verticale, perciò

$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{a}{g} = \tan\theta$$

da cui si ricava

$$a = g\tan\theta = 2.26\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

(b) Per trovare il valore della tensione dello spago basterà sostituire l'espressione trovata dell'accelerazione nel sistema che dà le componenti di T e calcolarne il modulo

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = mg\sqrt{1 + \tan^2\theta} = \frac{mg}{\cos\theta} = 0.453\,\mathrm{N}$$