

Lezione 4

Funzione continua

Quando una funzione è continua nel punto x_0 ?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Somma, differenza e prodotto di funzioni continue è ancora CONTINUA!

ESERCIZI

Studiare continuità delle seguenti funzioni

- 1) Dimostrare che la funzione $f(x) = 3x - 5$ sia continua in $x = 2$
- 2) Studiare la continuità della funzione $f(x) = 1/x$
- 3) Studiare la continuità della funzione

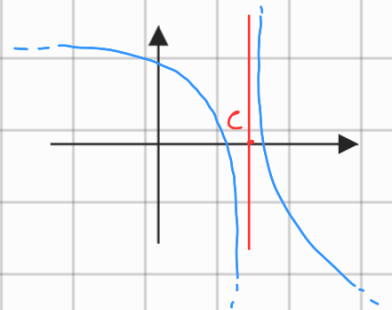
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 2}$$

[N.B. $D = \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ ASINTOTO!]

Asintoti

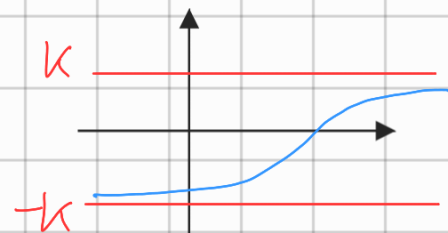
Asintoto verticale

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$$



Asintoto orizzontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = k$$



Asintoto obliquo

CONDIZIONE NECESSARIA
(MA NON SUFFICIENTE!)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

SOLO SE E' VERIFICATA, SI PROCEDE AL
CALCOLO SUCCESSIVO

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad m \neq 0$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - mx]$$

ESERCIZI:

Si ricercano gli asintoti delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

2) $f(x) = \frac{x^2-25}{x+1}$

3) $f(x) = \frac{x^2-x-4}{x-1}$

4) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

5) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ [N.B. ATTENZIONE ALLA NORMALIZZAZIONE!]

6) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+5} - x$

Derivare una funzione

Significa analizzare l'andamento di una funzione (crescita e decrescita!) Si usa il rapporto incrementale parziale ma... andiamo ai calcoli e vediamo le derivate fondamentali!

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
kx	k
x^u	$u x^{u-1}$
\sqrt{x}	$1/(2\sqrt{x})$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$
$\ln x$	$1/x$

Generalizzando:

$f(x)$	$f'(x)$
$k f(x)$	$k f'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$
$[f(x)]^u$	$u [f(x)]^{u-1} f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$

ESERCIZI

Calcola le derivate prime delle seguenti funzioni:

$$1) f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

$$3) f(x) = \frac{\cos x}{2x^2 + 3}$$

$$4) f(x) = 3x^4 + 5x + x^{3/2} - 2x^{-3}$$

$$5) f(x) = e^{-3x} (x^2 + 2x - 1)$$

$$6) f(x) = x \ln(x)$$

$$7) f(x) = e^{2x} (2 \sin 3x - 4 \cos 3x)$$

$$8) f(x) = \cos(2x) - \sin x$$

$$9) f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$10) f(x) = x \sqrt{1+x^2}$$

$$11) f(x) = \frac{1}{\tan x}$$

$$12) f(x) = (\sin x)^3$$

$$13) f(x) = \exp\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$$

$$14) f(x) = e^{\sqrt{x}}$$

$$15) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 5}$$

$$16) f(x) = 3x - 5 \ln x + 4\sqrt{x} + 8$$

$$17) f(x) = (2x - 3)(x^2 - 2)$$

$$18) f(x) = (\cos x + x)(2 \sin x + 3)$$

$$19) f(x) = \frac{e^x + 1}{2e^x - 3}$$

$$20) f(x) = (\ln x - 2x)^3$$