Lezione 6

Velocita' $v_m \equiv \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ $[m/s]$ $1\dfrac{m}{s} = 3,6\dfrac{Km}{h}$

$$\bar{v} \equiv \frac{dr}{dt}$$

Accelerazione $a_m \equiv \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ $[m/s^2]$

$$\bar{a} \equiv \frac{dv}{dt}$$

Campo gravitazionale $\bar{g} \equiv \dfrac{F_g}{m}$ $[m/s^2]$ $\bar{g} = 9,81\ m/s^2$

Forza $\bar{F} = m\bar{a}$ $\left[N = kg\dfrac{m}{s^2}\right]$ il peso e' una forza!

Quantita' di moto $p = mv$ $[kg\ m/s]$

$$d\bar{p} = \bar{F}dt \longrightarrow \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Moto rettilineo uniforme

Legge oraria $s = v(t - t_0) + s_0$

Velocita' $v = \dfrac{s - s_0}{t - t_0}$

Tempo $t = \dfrac{s - s_0}{v} + t_0$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Velocita' $v = v_0 + a(t - t_0)$; $v^2 = v_0^2 + 2a\,s - s_0$

Legge oraria $s = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0$

Caduta libera

con sistema di riferimento con coordinate crescenti verso l'alto e $s_0 = 0$

$$\begin{cases} v = -gt \\ s = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$g \simeq 9,81 \ m/s^2$

Moto parabolico

con sistema di riferimento con coordinate crescenti verso l'alto

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$

$\tan \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \end{cases}$$

gittata $\quad x_G = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{g}$

gittata massima $\quad x_{G,MAX} = \frac{v_0^2}{g}$

angolo per la max gittata $\quad \pi/4 = 45°$

tempo di volo $\quad t_{volo} = \frac{2 v_{0y}}{g}$

massima altezza $\quad y_{MAX} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$

Esercizi introduttivi

ES. 1) Studiare dimensionalmente la legge $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ nella quale T rappresenta il periodo di un pendolo, l la sua lunghezza e g l'acc. di gravità. È corretta la relazione?

Eseguendo l'analisi dimensionale del secondo membro della relazione data, si avrebbe

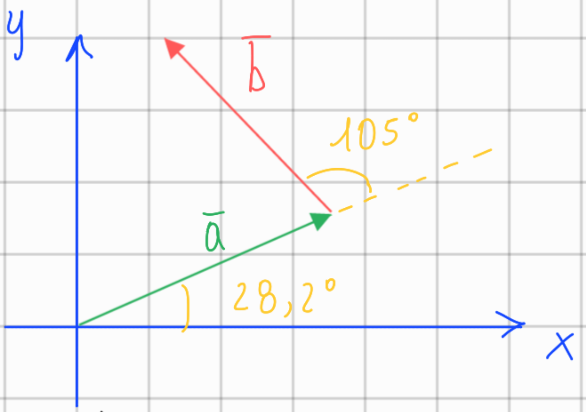
$$[T]^{-1} = \left(\frac{[L][T]^{-2}}{[L]}\right)^{1/2}$$

ES. 2) Sono dati due vettori $\bar{a}$ e $\bar{b}$ di modulo 8,94 unità e orientati come in figura. Detta $\bar{s}$ la loro somma vettoriale, determinare:

a) s_x e s_y

b) modulo di $\bar{s}$

c) l'angolo δ che $\bar{s}$ forma con l'asse x e l'angolo γ che esso forma con $\bar{a}$.



(a) Indicando i due angoli con $\alpha = 28,2°$ e $\beta = 105°$, le componenti del vettore somma sono la somma delle rispettive componenti di $\bar{a}$ e $\bar{b}$

$$\begin{cases} s_x = a_x + b_x = a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha+\beta) = 1,76 \\ s_y = a_y + b_y = a\,\text{sen}\,\alpha + b\,\text{sen}(\alpha+\beta) = 10,8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \bar{s} = (1,76\,\hat{i} + 10,8\,\hat{j})$$

(b) Il modulo di $\bar{s}$ e' dato da: $|\bar{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 10,9$

(c) L'angolo formato dal vettore $\bar{s}$ con l'asse x si può ricavare ricordando che $\tan\delta = \frac{s_y}{s_x}$

$$\rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{s_y}{s_x}\right) = 80,7°$$

L'angolo γ si trova semplicemente per differenza:

$$\gamma = \delta - \alpha = 52,5°$$

Moto in una dimensione

ES 3) Un autobus di linea percorre il tragitto Brescia-Milano per metà del tempo con $v_1 = 59,3$ km/h e per l'altra metà del tempo con velocità $v_2 = 82,5$ km/h. Durante il viaggio di ritorno percorre metà della distanza con velocità v_1 e l'altra metà con velocità v_2. Determinare la velocità scalare media:

(a) all'andata
(b) al ritorno
(c) per l'intero percorso

Sia d la distanza tra il punto di partenza e di arrivo, d_1 e d_2 le distanze parziali del primo e secondo tratto, e analogamente t il tempo totale e t_1, t_2 i tempi parziali.

(a) Nel percorso di andata:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1/2\, t \\ d_1 = v_1 t_1 \\ d_2 = v_2 t_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow d = d_1 + d_2 = v_1 t_1 + v_2 t_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t$$

$$\rightarrow v_m = \frac{d}{t} = \frac{1}{2}(v_1+v_2)\cancel{t} / \cancel{t} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = 70,9 \text{ km/h}$$

(b) Al ritorno:
$$\begin{cases} d_1 = d_2 = 1/2\, d \\ d_1 = v_1 t_1 \\ d_2 = v_2 t_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad t = t_1 + t_2 = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) d$$

media armonica

$$\rightarrow \quad v_m'' = \frac{d}{t} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right)} = \frac{2\, v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 69{,}0 \text{ km/h}$$

(c) Per il percorso totale si ripete il ragionamento del punto (b). La velocita' media complessiva sara' quindi data ancora dalla media armonica delle velocita' parziali.

$$v_m = \frac{2\, v_m' v_m''}{v_m' + v_m''} = 69{,}9 \text{ km/h}$$

ES 4) La posizione di una particella in moto lungo l'asse x e' data da $x(t) = 30t - 9t^2$. Calcolare
(a) v_m durante l'intervallo da $t_1 = 2{,}0$ s a $t_2 = 3{,}0$ s.
(b) velocita' istantanea a $t_2 = 3{,}0$ s.
(c) l'accelerazione istantanea a $t_2 = 3{,}0$ s.

(a) Usiamo la legge oraria!
$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{-15 \text{ m}}{1 \text{ s}} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(b) L'espressione della velocita' istante per istante e' data dalla derivata prima della legge oraria:
$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = 30 - 18t$$
e all'istante $t_2 = 3{,}0$ s si avra' $\quad v(3{,}0\text{ s}) = -24$ m/s

(c) Analogamente, l'acc. istantanea e' data dalla derivata prima della velocita':

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -18$$

che in questo caso risulta COSTANTE, quindi anche per $t_2 = 3{,}0\,s$ si avra':

$$a(3{,}0\,s) = -18\ m/s^2$$

ES. 5) Un treno parte da fermo e si muove con accelerazione costante fino a raggiungere la velocita' $v_1 = 33{,}0\ m/s$. A partire da questo istante, e sempre con la medesima accelerazione, la sua velocita' viene portata a $v_2 = 54{,}0\ m/s$ in un tratto $d_2 = 160\ m$.

Calcolare:

(a) acc. del treno

(b) Δt_2 necessario per percorrere d_2

(c) Δt_1 impiegato per raggiungere v_1

(d) lo spazio percorso dalla partenza all'istante in cui il treno raggiunge la velocita' v_2.

(a) Per il calcolo dell'acc. si consideri il tratto d_2 in cui, non conoscendo ancora il tempo impiegato per percorrerlo, si puo' usare la formula del moto uniformemente accelerato $v_2^2 - v_1^2 = 2a\,\Delta s$

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,d_2} = 5{,}71\ m/s^2$$

(b) Nota l'acc., il tempo si puo' trovare dalla legge lineare della velocita' nel moto uniformemente accelerato $v_2 = v_1 + a\,\Delta t$

$$\Delta t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a} = 3{,}68\,s$$

(c) Analogamente per il primo tratto, tenendo conto che la velocita' iniziale era $v_0 = 0$:

$$\Delta t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} = 5{,}78\,s$$

(d) Infine utilizzando ancora la formula del punto (a), stavolta relativamente al percorso complessivo, si può trovare anche la distanza totale percorsa:

$$d = \frac{v_2^2 - v_0^2}{2a} = 255\ m$$

EX 6) Per misurare l'altezza di una rupe a picco sul mare, un turista lascia cadere un sasso sulla rupe e sente il tonfo dopo $\Delta t = 1{,}83\,s$. Sapendo che il suono si propaga nell'aria a velocità di $343\ m/s$, qual è l'altezza della rupe rispetto al pelo dell'acqua? Dopo quanto tempo il turista sentirebbe il tonfo se la rupe fosse alta la metà?

L'intervallo Δt, dopo cui è percepito il suono, è dato dalla somma del tempo Δt_1 di caduta del sasso che si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione g, e del tempo Δt_2 impiegato dal suono, che invece si muove di moto rettilineo uniforme, a "ripercorrere" la stessa distanza h:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2} g \Delta t_1^2 \\ h = v_s \Delta t_2 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t \end{cases} \qquad \frac{1}{2} g \Delta t_1^2 = v_s \Delta t_2$$

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t \rightarrow \Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_1$$

$$\frac{1}{2} g \Delta t_1^2 = v_s (\Delta t - \Delta t_1) \longrightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2} g \Delta t_1^2 + v_s \Delta t_1 - v_s \Delta t = 0}}$$

$$\Delta = v_s^2 - \cancel{4}^{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}} g\right)(-v_s \Delta t)$$
$$= v_s^2 + 2 g v_s \Delta t$$

$$\Delta t_1 = \frac{-v_s \pm \sqrt{v_s^2 + 2 g v_s \Delta t}}{g}$$

L'unica soluzione positiva, cioè fisicamente accettabile, è $\Delta t_1 = 1{,}78\ s$.

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2} g \Delta t_1^2 = 15{,}6\ m$$

Per rispondere alla seconda domanda, ora $h' = \frac{1}{2} h = 7{,}81\ m$

$$\Rightarrow \quad \Delta t' = \Delta t_1' + \Delta t_2' = \sqrt{\frac{2h'}{g}} + \frac{h'}{v_s} = 1{,}28\ s$$

ES.7) Un passeggero fa cadere una biglia da una mongolfiera che si trova a 32 m di altezza mentre sta salendo con una velocità $v_0 = 1{,}8\ m/s$. Trascurando l'attrito dell'aria, determinare il tempo di caduta e la velocità con cui la biglia raggiunge il suolo. Ripetere l'esercizio nel caso in cui la mongolfiera stia scendendo con la stessa velocità.

La biglia cade da un'altezza h, con velocità positiva v_0 e acc. negativa $a = -g$, perciò vale al suolo:

$$\hookrightarrow 0 = h - \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t - h = 0$$

$$\Delta = v_0^2 - \cancel{4}^{2} \frac{1}{\cancel{2}} g(-h)$$

$$= v_0^2 + 2gh$$

$$\Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

Unica soluzione positiva è $t = 2{,}7\ s$.

Nel caso in cui la mongolfiera si stesse muovendo verso il basso $\Rightarrow$ $\boxed{-v_0}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t - h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

con unica soluzione accettabile $t' = 2{,}4\,s$.

La velocita' con cui la bottiglia arriva al suolo si può ricavare dalla formula del moto uniformemente accelerato $v^2 - v_0^2 = 2gh$

$$v^2 - v_0^2 = 2gh \qquad v^2 = 2gh + v_0^2 \qquad v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

$$= 25\ m/s$$

INDIPENDENTE DAL SEGNO DI v_0!!