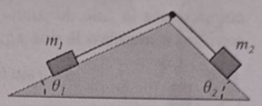
Piano inclinato

Lezione 8

Esercizio 6.16 (applicazione delle leggi di Newton)

Un blocco di massa m_1, posto su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo θ_1 rispetto al piano orizzontale, è collegato con un filo che passa sopra una puleggia ideale a un altro blocco di massa m_2, posto su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo θ_2 rispetto al piano orizzontale. Ricavare l'espressione generica del modulo dell'accelerazione di ciascun blocco e della tensione del filo. Analizzare inoltre i due casi limite in cui:



(a) $\theta_1 = 0°$ e $\theta_2 = 90°$;

(b) $\theta_1 = 90°$ e $\theta_2 = 90°$.

(c) Calcolare l'accelerazione e la tensione per i valori $m_1 = 3.70\,\text{kg}$, $m_2 = 4.86\,\text{kg}$, $\theta_1 = 28°$ e $\theta_2 = 42°$. In quale direzione si muove la massa m_1 sul piano inclinato?

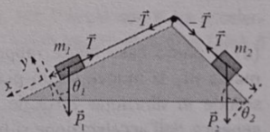
(d) Per gli stessi valori di m_1 e dei due angoli determinare i valori di m_2 per i quali m_1 accelera in salita, accelera in discesa e non accelera.

$$a = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g; \; T = \frac{m_1 m_2\, g}{m_1 + m_2}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2);$$

(c) $a = -1.74\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ (verso l'alto), $T = 23.5\,\text{N}$;

(d) $m_2 > 2.60\,\text{kg}$, $m_2 < 2.60\,\text{kg}$, $m_2 = 2.60\,\text{kg}$ ■

Per poter impostare le equazioni date dalla seconda legge di Newton per le due masse è necessario prima di tutto stabilire un verso di riferimento per il moto risultante del sistema. Si noti che, non conoscendo i valori delle masse e degli angoli di inclinazione dei piani, è indifferente a priori la scelta del verso positivo dell'accelerazione.



Si scelga dunque come positivo il verso in cui la massa m_1 scende lungo il proprio piano inclinato e la m_2 di conseguenza sale. Detta T la tensione del filo, scriviamo le equazioni per le forze agenti lungo la direzione in cui si svolge il moto, che è per ciascuna massa la direzione parallela al rispettivo piano inclinato

$$\begin{cases} m_1 g \sin\theta_1 - T = m_1 a \\ T - m_2 g \sin\theta_2 = m_2 a \end{cases}$$

Nel caso presente non siamo interessati alle equazioni relative alle forze agenti nella direzione normale al piano, in quanto l'accelerazione del sistema non ha una componente in tale direzione (e non sono presenti forze di attrito). Sommando membro a membro le due equazioni precedenti, si trova

$$m_1 g \sin\theta_1 - m_2 g \sin\theta_2 = (m_1 + m_2)\, a$$

da cui infine

$$a = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g$$

Per trovare l'espressione della tensione del filo si può procedere ad esempio eguagliando le espressioni dell'accelerazione che si ricavano dalle due equazioni del sistema di partenza

$$\frac{m_1 g \sin\theta_1 - T}{m_1} = \frac{T - m_2 g \sin\theta_2}{m_2}$$

da cui

$$m_1 m_2 g \sin\theta_1 - m_2 T = m_1 T - m_1 m_2 g \sin\theta_2$$

raccogliendo T

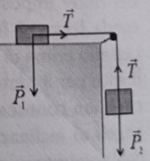
$$T(m_1 + m_2) = m_1 m_2 g\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

e infine

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

Si noti che per la tensione T, contrariamente al caso dell'accelerazione, l'espressione ottenuta è simmetrica rispetto allo scambio delle posizioni delle due masse.

(a) Il primo caso limite rappresenta la situazione in cui la massa m_1 si muove su un piano orizzontale e la massa m_2 scende in direzione verticale. Sostituendo nell'espressione generica dell'accelerazione si ha

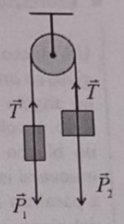


$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

Si noti che si sarebbe potuto ottenere tale risultato scrivendo direttamente la seconda legge di Newton per il sistema (di massa totale $m_1 + m_2$), sul quale l'unica forza responsabile del moto è la forza peso agente sulla seconda massa ($m_2 g$). Sempre sostituendo nell'espressione generica, per la tensione si ottiene

$$T = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g$$

(b) Il secondo caso limite rappresenta la situazione in cui entrambe le masse si muovono lungo la verticale, in una configurazione detta "macchina di Atwood". Per l'accelerazione si ha



$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

e per la tensione del filo

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g$$

che assume quindi un valore doppio rispetto al caso precedente.

(c) Sostituendo i valori dati nell'espressione generica dell'accelerazione, si trova

$$a = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g = -1.74\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

Per interpretare correttamente il segno dell'accelerazione bisogna ricordare quale verso era stato scelto come positivo nel ricavare l'espressione generica di a qui utilizzata. Poiché si era stabilito come positivo il verso in cui la massa m_1 scende lungo il proprio piano inclinato, il segno meno trovato significa che il moto risultante nel caso specifico fa invece salire la m_1 e scendere la m_2. Sostituendo invece i valori dati nell'espressione della tensione si trova

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 23.5\,\text{N}$$

(d) Troviamo innanzitutto il valore della massa m_2 per il quale non si ha accelerazione, semplicemente ponendo uguale a zero l'espressione generica di a (cioè il numeratore della frazione)

$$a = m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2 = 0$$

da cui si ricava

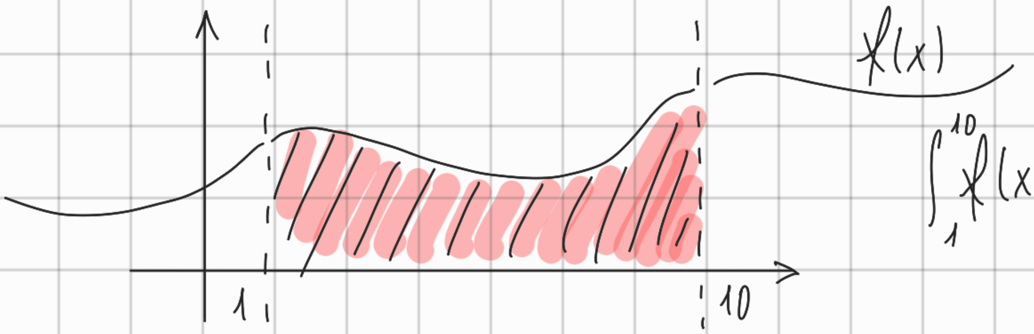
$$m_2 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} m_1 = 2.60\,\text{kg}$$

Rispetto a questo valore limite si avrà quindi che il sistema scenderà con accelerazione costante dalla parte di m_2 per $m_2 > 2.60\,\text{kg}$, e viceversa scenderà dalla parte di m_1 per $m_2 < 2.60\,\text{kg}$.

Integrali

Cosa significa integrare?

1) Calcolare l'area sottesa da una curva!



$$\int_1^{10} f(x)\, dx = \text{area!}$$

2) ma significa anche trovare la funzione primitiva!

$$y = \ln(x) \qquad y' = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)$$

Come si integra?

1) integrali fondamentali

TABELLA INTEGRALI INDEFINITI

$\int k\, dx = k\, x + c$ con k costante

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int a^x dx = a^x \lg_a e + c$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = a^{f(x)} \lg_a e + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$
$\int sen\, x\, dx = -\cos x + c$	$\int sen\, [f(x)] \cdot f'(x)\, dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x\, dx = sen\, x + c$	$\int \cos [f(x)] \cdot f'(x)\, dx = sen\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 [f(x)]} dx = tg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -cotg\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{sen^2 [f(x)]} dx = -cotg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = arcsen\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = arctg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arcsen \frac{x}{\lvert a\rvert} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}} dx = arcsen \frac{f(x)}{\lvert a\rvert} + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{f(x)}{a} + c$

2) per sostituzione

ESEMPIO) $\int 2x e^{x^2} dx$

$t = x^2$
$dt = 2x\,dx$

$$\Rightarrow \int 2x e^{x^2} dx = \int e^{\overset{t}{x^2}} \underbrace{2x\,dx}_{dt} = \int e^t dt = e^t + c$$

3) per parti

definiti $\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$

indefiniti $\int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) dx + c$

4) integrali razionali

$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ con $\deg(N) \geq \deg(D)$

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Q(x) D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

ESERCIZI SVOLTI

1) $\int \pi\, dx = \pi x + c$

2) $\int \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{8} + c$

3) $\int \left(x^5 + 5x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 1\right) dx = \frac{x^6}{6} + \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} x^5 + \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} + \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + x + c$

$= \frac{x^6}{6} + x^5 + \frac{x^4}{12} + x^3 + x + c$

4) $\int (3e^{x}+1)\,dx = 3e^{x} + x + c$

5) $\int \left(\sqrt[4]{x} + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{x^{1/4+1}}{1/4+1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{x^{5/4}}{5/4} + \frac{x^2}{4} + c = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + \frac{x^2}{4} + c$

6) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\,\text{arcsen}(x) + c$

7) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\cos x\,dx = \left[2\,\text{sen}(x)\right]_{\pi/2}^{\pi} = 2\underbrace{\text{sen}(\pi)}_{=0} - 2\underbrace{\text{sen}(\pi/2)}_{=1}$

$= 0 - 2\cdot 1 = -2$

8) $\int_1^5 \frac{x^2}{3}\,dx = \left[\frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^5 = \frac{5^3}{9} - \frac{1^3}{9} = \frac{124}{9}$

9) $\int_{\log 2}^{\log 3} 3e^{x/2}\,dx = 2\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{3}{2}e^{x/2}\,dx = 6\left[e^{x/2}\right]_{\log 2}^{\log 3}$

$= 6\left[e^{\frac{1}{2}\log 3} - e^{\frac{1}{2}\log 2}\right] = 6\left[e^{\log 3^{1/2}} - e^{\log 2^{1/2}}\right]$

$= 6\left[\sqrt{3} - \sqrt{2}\right]$

10) $\int_0^{\pi} \left(5^x + \text{sen}(x) + \frac{x^2}{\pi}\right) dx = \left[5^x \log_5 e - \cos x + \frac{x^3}{3\pi}\right]_0^{\pi} =$

$= 5^{\pi}\log_5 e - \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + \frac{\pi^{\cancel{3}\,2}}{3\cancel{\pi}} - \left(\underbrace{5^0}_{=1}\log_5 e - \underbrace{\cos(0)}_{=1} + 0\right)$

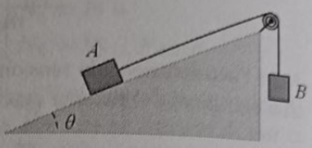
$= 5^{\pi}\log_5 e + 1 + \frac{\pi^2}{3} - \log_5 e + 1$

$= \log_5 e\,(5^{\pi} - 1) + \frac{\pi^2}{3} + 2$

Piano inclinato con attrito

Esercizio 7.14 (forza d'attrito)

Un blocco A di massa $8.00\,\mathrm{kg}$ è libero di muoversi su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30.0°$ privo di attrito. Mediante una fune e una carrucola ideali il blocco A è connesso a un blocco B di massa $22.0\,\mathrm{kg}$ che si può invece muovere in un piano verticale. Determinare:



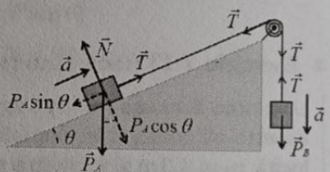
(a) l'accelerazione dei due blocchi;

(b) la tensione della fune.

(c) Ripetere l'esercizio supponendo il piano scabro con coefficiente d'attrito dinamico tra il blocco A e il piano inclinato $\mu_k = 0.12$.

(a) $a = 5.89\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; (b) $T = 86.3\,\mathrm{N}$; (c) $a' = 5.61\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $T' = 92.3\,\mathrm{N}$ ■

(a) In assenza di attrito le uniche forze esterne sui due blocchi sono le forze peso ($P = mg$) e le tensioni della fune. Per il blocco A, essendo vincolato a muoversi lungo il piano inclinato, va considerata solo la componente della forza peso nella direzione del moto. La seconda legge di Newton applicata a ciascun blocco, prendendo come positivo il verso il cui B scende e di conseguenza A risale lungo il piano inclinato, dà il sistema



$$\begin{cases} T - P_A \sin\theta = m_A a \\ P_B - T = m_B a \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni

$$P_B - P_A \sin\theta = (m_A + m_B)\, a$$
$$(m_B - m_A \sin\theta)\, g = (m_A + m_B)\, a$$

da cui si ricava

$$a = \frac{m_B - m_A \sin\theta}{m_A + m_B}\, g = 5.89\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

(b) La tensione della fune si ricava sostituendo l'accelerazione trovata in une delle due equazioni del sistema, ad esempio quella per il blocco B

$$T = m_B\,(g - a) = 86.3\,\mathrm{N}$$

(c) In presenza di attrito dinamico, nella prima equazione del sistema va inclusa anche la forza di attrito F_k, che ha verso opposto a quello del moto

$$\begin{cases} T' - P_A \sin\theta - F_k = m_A a' \\ P_B - T' = m_B a' \end{cases}$$

Anche qui sommando membro a membro si eliminano le tensioni

$$P_B - P_A \sin\theta - F_k = (m_A + m_B)\, a'$$

Il modulo di F_k è proporzionale alla forza premente, che è la componente della forza peso P_A nella direzione normale al piano

$$F_k = \mu_k N = \mu_k m_A g \cos\theta$$

Sostituendo nell'equazione del moto si ha

$$(m_B - m_A \sin\theta)\, g - \mu_k m_A g \cos\theta = (m_A + m_B)\, a'$$

da cui si ricava

$$a' = \frac{m_B - m_A \sin\theta - \mu_k m_A \cos\theta}{m_A + m_B}\, g = 5.61\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

La tensione della fune si trova con la stessa formula del punto (b), dal momento che la forza di attrito non agisce sulla massa B, utilizzando il nuovo valore trovato per l'accelerazione

$$T' = m_B\,(g - a') = 92.3\,\mathrm{N}$$