Lezione 2

Modulo dei numeri complessi

Abbiamo visto i numeri complessi

$$z = a + ib$$

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

MODULO

ARGOMENTO

$$z = r e^{i\theta}$$

$$r = |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r \geq 0}$$

EX. 1

$$z = -3 + 3i$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

EX. 2

$$z = +2 - 5i$$

$$r = \sqrt{(2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

EX. 3

$$z = -2i$$

$$r = \sqrt{(-2)^2} = +2$$

SOLO IL + PERCHÉ $r \geq 0$!!

Complesso coniugato

$$z = a + ib \longrightarrow \bar{z} = a - ib$$

$$Re(\bar{z}) = Re(z)$$
$$Im(\bar{z}) = -Im(z)$$

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \longrightarrow \bar{z} = r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$

$$z = r e^{i\theta} \longrightarrow \bar{z} = r e^{-i\theta}$$

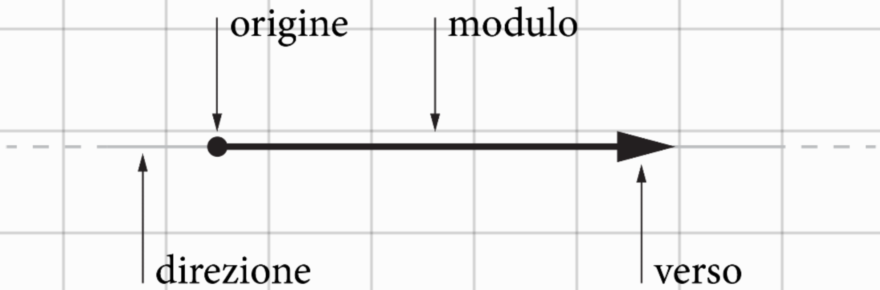
EX.1 $z = 1 - 3i$

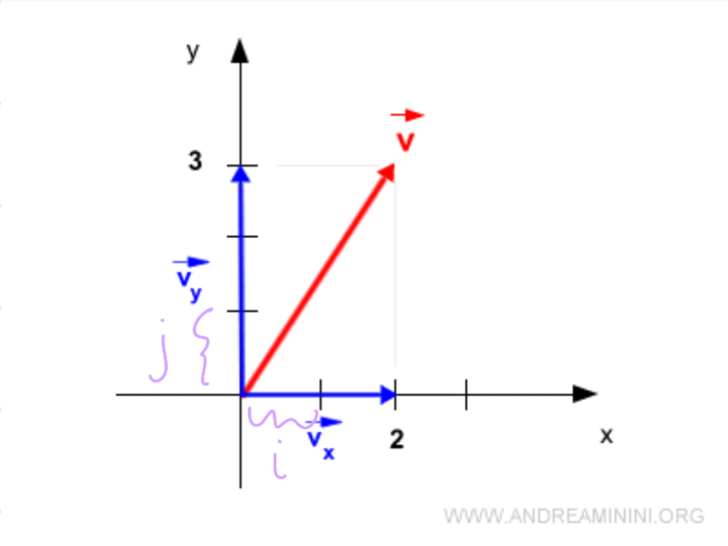
$\bar{z} = 1 - (-3)i = 1 + 3i$

Grandezza scalare

Temperatura	$10°$ / $-5°$
Larghezza tavolo	100 cm
Altezza di Giancarlo	1,97 m

Grandezza vettoriale





$$\bar{V}_x = 2\hat{i}$$

$$\bar{V}_y = 3\hat{j}$$

$$\bar{V} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

PRODOTTO CON UNO SCALARE

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda\bar{v} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 2\lambda \\ -1\lambda \end{pmatrix}$$

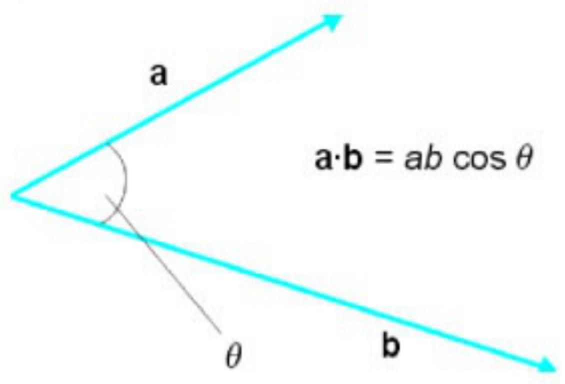
Ad esempio se $\lambda = -2$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-2) \\ 2\cdot(-2) \\ -1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ +2 \end{pmatrix}$$

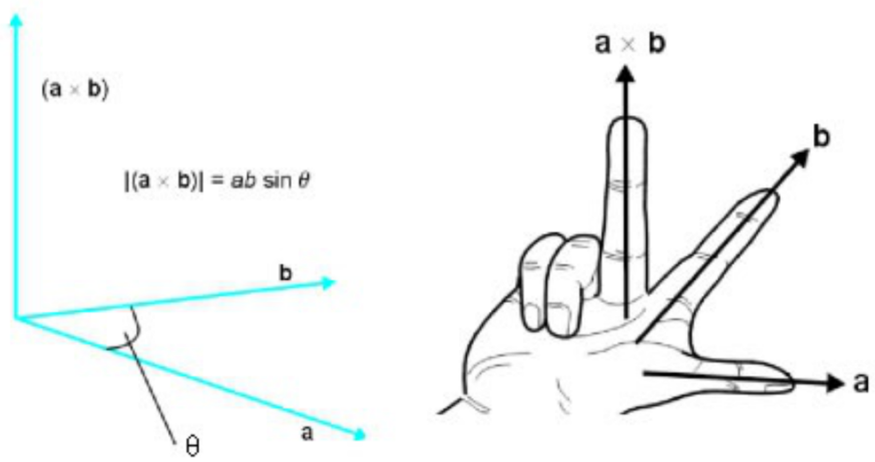
PRODOTTO SCALARE E VETTORIALE

$$\mathbf{V} = V_x \cdot \mathbf{i} + V_y \cdot \mathbf{j} + V_z \cdot \mathbf{k}$$

Il prodotto scalare di due vettori è definito nel seguente modo:



mentre il prodotto vettoriale di due vettori in questo:



PRODOTTO SCALARE

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

EX. 1 $\quad \bar{u} = (1, 2, 3) \qquad \bar{v} = (1, 0, 3)$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 1 + 0 + 9 = 10$$

MODULO DI UN VETTORE

$$\| \bar{u} \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \| \bar{u} \| \, \| \bar{v} \| \cos \theta$$

N.B. $\quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{u} \perp \bar{v}$

$\quad \bar{u} \cdot \bar{u} = 1$

ESERCIZI

1) Calcolare il modulo dei seguenti vettori:
   a) $\bar{u} = (-1, 0, 5, -2)$
   b) $\bar{v} = (-2, -2, +1)$
   c) $\bar{t} = (2a, 4a, 5\gamma)$
2) Determinare l'angolo θ tra i vettori $\bar{u} = (2, 1)$ e $\bar{v} = (1, 3)$
3) Per quale valore di a i due vettori $\bar{u} = (1, -1, 2)$ $\quad \bar{v} = (-2, a, 4)$

4) Per quali valori reali di k i vettori $\bar{u}=(1,2k,-2)$ $\bar{v}=(-2,-4k,4)$ sono ortogonali?

5) Determinare il valore del parametro t tale che l'angolo tra i vettori $\bar{u}, \bar{v}$ sia di $\pi/3$ con $\bar{u}=(1,2,1)$ $\bar{v}=(1,0,t)$

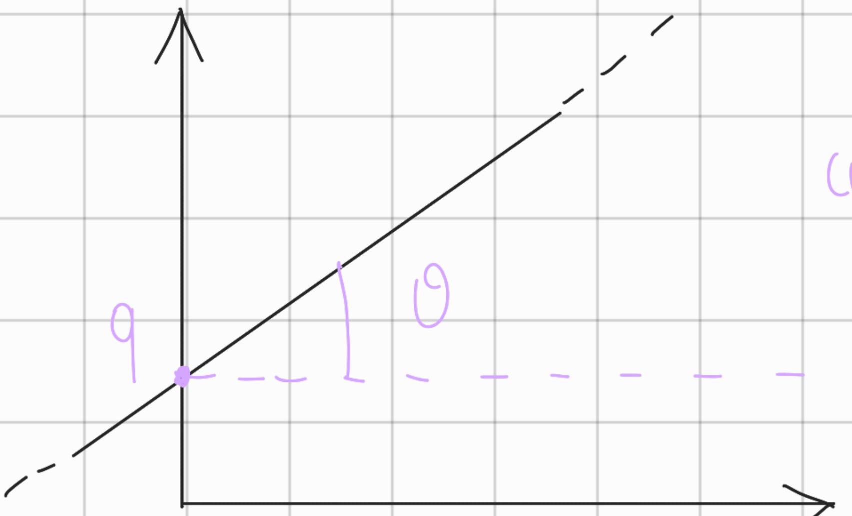
PRODOTTO VETTERIALE

$$(\bar{v}, \bar{w}) \mapsto \bar{v} \times \bar{w} \Rightarrow \|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\| \, \|\bar{w}\| \operatorname{sen}\theta$$

N.B. $\bar{i} \times \bar{j} = -\bar{j} \times \bar{i}$

$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{0}$

Equazione delle rette



ESPLICITA

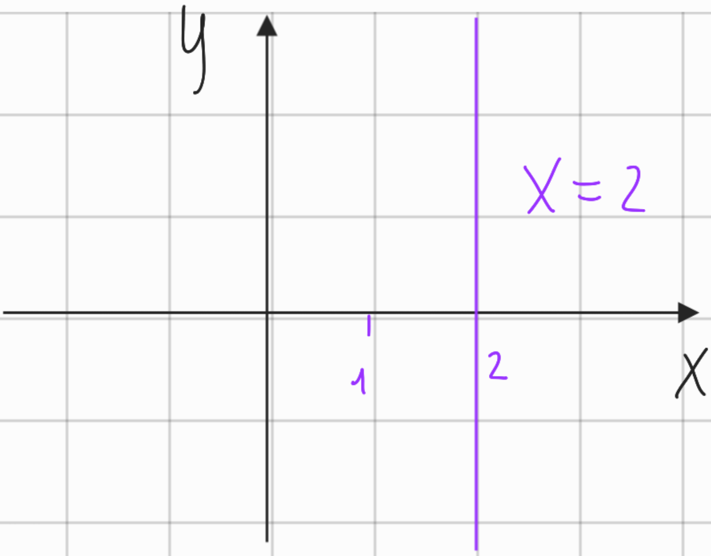
$$y = mx + q$$

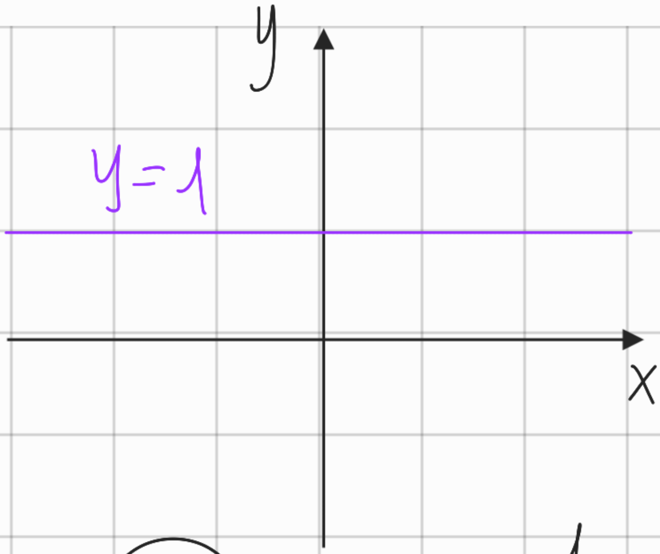
COEFFICIENTE ANGOLARE

ORDINATA ALL'ORIGINE

IMPLICITA

$$ax + by + c = 0$$





$$y = mx + q$$
$$y = m_1 x + q_1$$

$\perp \quad m_1 = -\dfrac{1}{m}$

$\parallel \quad m_1 = m$

Coefficiente angolare di una retta passante per due punti:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Retta passante per due punti $P(x_1, y_1)$ $Q(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ESERCIZI:

1) Trovare l'equazione della retta passante per i punti $A(-2, -8)$ e $B(1, 0)$

2) Rappresentare le rette:

- $-2 - \frac{5}{3}y = 0$
- $x - y - 5 = 0$
- $-3x + y = 0$
- $-1 + \frac{7}{3}x = 0$

quale fra queste rette sono $\perp$? Quali sono $//$? (se ce ne sono)

3) Verificare che il punto $P(0,0)$ appartenga alla retta $-\frac{5}{2}x + y = 0$. Potevamo verificarlo in altro modo?

4) Verificare se il punto $Q(-1, 5)$ appartiene alla retta $y = 3x - \frac{1}{5}y$

5) Determinare l'ordinata del punto P di ascissa -3 appartenente alla retta di equazione $2x - 2y + 3 = 0$

6) Determinare l'ascissa del punto P di ordinata 1 appartenente alla retta di equazioni $3x - 7y + 1 = 0$

7) Data la retta di equazione $2x - ky + k - 1 = 0$ determinare il valore

del parametro k affinché il punto $P(1,2)$ appartenga alla retta

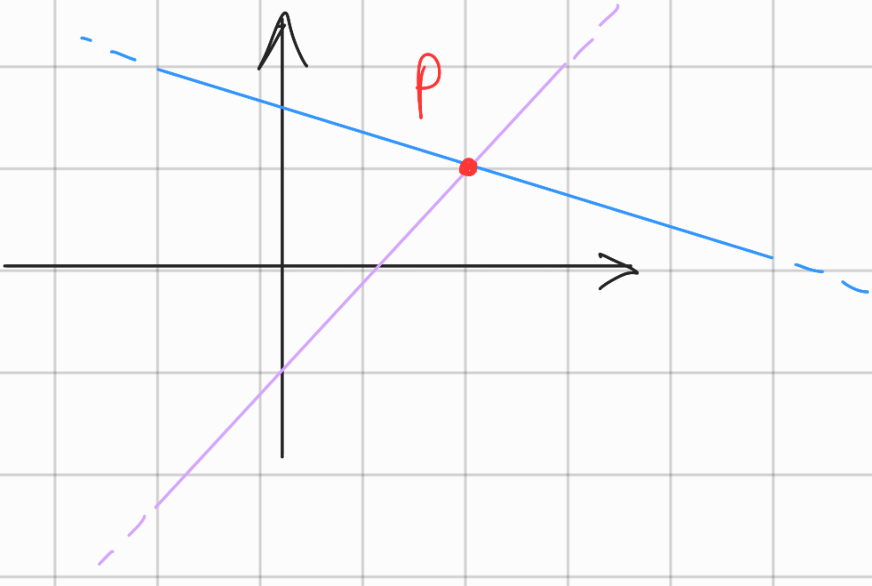
8) Data la retta di equazione $y = x - k + 1$ determinare il valore del parametro k affinché $P(3,1)$ appartenga alla retta.

9) Scrivere l'equazione della retta passante per $P(2,3)$ e parallela alla retta di equazione $3x - 5y + 6 = 0$.

10) Scrivere l'eq. della retta che passa per $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ed è $\perp$ alla retta $x + 2y - 7 = 0$

Intersezioni fra rette

Si risolve un sistema!



$$\begin{cases} \text{eq. n. 1} \\ \text{eq. n. 2} \end{cases}$$

SI TROVANO LE COORDINATE DEL PUNTO P!!

ESERCIZI

Risolvere e rappresentare le seguenti intersezioni fra rette

1) $\begin{cases} 2y - 11x + 16 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-\frac{1}{2}} = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = -\dfrac{2}{5}x - \dfrac{7}{5} \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} -x - 3y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + y + 6 = 0 \end{cases}$

8) $$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$