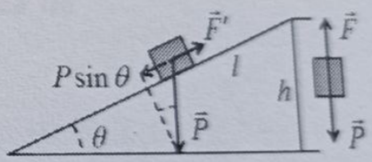
Lezione 9

Esercizio 8.2 (lavoro di una forza costante)

Il sollevamento di uno scatolone di massa 23.0 kg dal pavimento a uno scaffale, eseguito a velocità costante, richiede un lavoro di 370 J. Se lo si esegue invece spingendolo per uno scivolo privo d'attrito, la forza minima richiesta è 63.7 N. Calcolare la lunghezza del piano inclinato dello scivolo.

$l = 5.81\,\text{m}$ ■



Durante il sollevamento lungo la verticale la forza applicata $\vec{F}$ deve contrastare la forza peso $P = m\vec{g}$. Poiché la direzione della forza applicata coincide con quella dello spostamento, il lavoro compiuto è dato semplicemente da

$$L = Fs = mgh$$

dove h è l'altezza dello scaffale dal pavimento. Se si spinge l'oggetto lungo il piano inclinato, in assenza di attrito, la forza richiesta F' deve invece contrastare soltanto la componente della forza peso parallela al piano $mg\sin\theta$. Ricordando che, detta l la lunghezza del piano inclinato, per definizione $\sin\theta = \frac{h}{l}$, si ha

$$F' = mg\sin\theta = \frac{mgh}{l}$$

da cui, utilizzando la relazione ricavata in precedenza, si ricava

$$l = \frac{mgh}{F'} = \frac{L}{F'} = 5.81\,\text{m}$$

Esercizio 8.5 (lavoro di una forza variabile)

Una molla posta su un piano orizzontale privo d'attrito ha un estremo collegato a un vincolo fisso. Applicando una forza esterna $F_1 = 8.00\,\mathrm{N}$ all'estremo libero, la molla assume la lunghezza $l_1 = 12.0\,\mathrm{cm}$; con una forza $F_2 = 12.0\,\mathrm{N}$, la lunghezza della molla è invece $l_2 = 13.0\,\mathrm{cm}$. Determinare:

(a) la costante elastica e la lunghezza a riposo della molla;

(b) il lavoro necessario per allungare la molla di 2.00 cm rispetto alla sua posizione di riposo.

(a) $k = 400\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $l_0 = 10.0\,\mathrm{cm}$; (b) $L = 0.080\,\mathrm{J}$ ■

(a) Detti $\Delta x_{1,2}$ gli allungamenti della molla rispetto alla lunghezza di riposo l_0, nei due casi considerati, per la legge di Hooke si ha

$$\begin{cases} F_1 = k\Delta x_1 \\ F_2 = k\Delta x_2 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} \Delta x_1 = \dfrac{F_1}{k} \\ \Delta x_2 = \dfrac{F_2}{k} \end{cases}$$

La lunghezza complessiva della molla nei due casi è data da

$$\begin{cases} l_1 = l_0 + \Delta x_1 \\ l_2 = l_0 + \Delta x_2 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda, e sostituendo le relazione trovate in precedenza si trova

$$l_2 - l_1 = \Delta x_2 - \Delta x_1 = \frac{F_2 - F_1}{k}$$

da cui si ricava

$$k = \frac{F_2 - F_1}{l_2 - l_1} = 400\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

Mentre la lunghezza a riposo della molla sarà

$$l_0 = l_1 - \Delta x_1 = l_1 - \frac{F_1}{k} = 10.0\,\mathrm{cm}$$

(b) Per allungare la molla rispetto alla sua posizione di riposo è necessario applicare una forza esterna F che contrasti la forza di richiamo F_k della molla. Scelto un asse di riferimento con l'origine nella posizione di riposo della molla e detto x l'allungamento rispetto a tale posizione, la forza minima da applicare dovrà essere

$$F = -F_k = kx$$

e sarà quindi una forza variabile che agisce nella direzione dello spostamento. Il lavoro di questa forza variabile si troverà applicando la definizione generale di lavoro come integrale calcolato tra le posizioni iniziale $x_i = 0$ e finale x_f in cui si trova l'estremo libero della molla

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_0^{x_f} kx\,dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{x_f} = \frac{1}{2}kx_f^2 = 0.080\,\mathrm{J}$$

■ Esercizio 8.8 (teorema lavoro-energia)

Una gru solleva verticalmente una cassa di massa 83.9 kg, inizialmente ferma, per un'altezza $h = 14.6\,\text{m}$ con un'accelerazione costante di $0.570\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$. Calcolare:

(a) la tensione della fune che solleva la cassa;

(b) la velocità finale della cassa;

(c) il lavoro totale compiuto sulla cassa;

(d) il lavoro compiuto dalla forza peso e dalla tensione della fune sulla cassa verificando che $L_{\text{tot}} = L_P + L_T$.

(a) $T = 871\,\text{N}$; (b) $v = 4.08\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$; (c) $L_{\text{tot}} = 698\,\text{J}$;
(d) $L_P = -12.0\,\text{kJ}$, $L_T = 12.7\,\text{kJ}$ ■

(a) Durante il sollevamento la cassa è soggetta alla tensione della fune e alla forza peso; rispetto a un asse verticale orientato verso l'alto, per la seconda legge di Newton si ha

$$T - P = ma$$

da cui si ricava immediatamente

$$T = m\,(g + a) = 871\,\text{N}$$

(b) La velocità acquisita in un moto con accelerazione costante, con partenza da fermo ($v_0 = 0$) e per un tratto di lunghezza h si ricava dalla relazione

$$v^2 = v_0^2 + 2ah = 2ah$$

da cui

$$v = \sqrt{2ah} = 4.08\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

(c) Il lavoro totale compiuto sulla cassa si può ricavare dal teorema lavoro-energia; tenendo presente che l'energia cinetica iniziale della cassa è nulla (essendo $v_0 = 0$), e utilizzando la relazione per v^2 ricavata al punto precedente, si ha

$$L_{\text{tot}} = \Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}mv^2 = mah = 698\,\text{J}$$

(d) Si noti che, come afferma il teorema lavoro-energia, il lavoro qui calcolato è il lavoro della risultante delle forze agenti sulla cassa, cioè della tensione e della forza peso, e non il lavoro speso per sollevare la cassa. Quest'ultimo coincide con il lavoro compiuto dalla sola tensione T, che è dato da

$$L_T = Th = 12.7\,\text{kJ}$$

Mentre il lavoro della forza peso, che agisce in direzione opposta allo spostamento, è dato da

$$L_P = -Ph = -12.0\,\text{kJ}$$

ed è verificata dunque la relazione

$$L_{\text{tot}} = (T - P)\,h = L_T + L_P$$

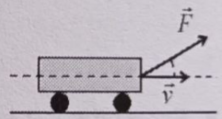
Esercizio 8.12 (lavoro, potenza)

Un cavallo tira un carro alla velocità di $10.0\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ applicandogli una forza costante di $190\,\mathrm{N}$ con una direzione formante un angolo di $27.0°$ con il piano orizzontale. Calcolare:

(a) la potenza sviluppata dal cavallo;

(b) il lavoro compiuto in capo a $12\,\mathrm{min}$.

(a) $P = 470\,\mathrm{W}$; (b) $L = 3.4 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$ ■



(a) Essendo costanti sia la forza applicata che la velocità, anche la potenza sviluppata è costante e coincide con la potenza istantanea, data dalla relazione

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\theta = 470\,\mathrm{W}$$

(b) Inoltre, essendo costante, la potenza coincide anche con la potenza media nell'intervallo di tempo considerato $\Delta t = 12\,\mathrm{min} = 720\,\mathrm{s}$, e quindi il lavoro compiuto si può ricavare direttamente dalla definizione di potenza media $\bar{P} = \dfrac{L}{\Delta t}$

$$L = \bar{P}\Delta t = 3.4 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$$

Esercizio 8.15 (potenza)

Un'auto di massa $1660\,\mathrm{kg}$ inizialmente ferma, raggiunge su strada piana una velocità di $72\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ in $33\,\mathrm{s}$ con accelerazione costante. Calcolare:

(a) l'energia cinetica acquisita dall'auto in questo intervallo;

(b) la potenza media sviluppata dal motore;

(c) la potenza istantanea dopo $10\,\mathrm{s}$ e al termine dell'intervallo.

(a) $\Delta K = 3.3 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$; (b) $\bar{P} = 10\,\mathrm{kW}$; (c) $P(10\,\mathrm{s}) = 6.1\,\mathrm{kW}$, $P_{\mathrm{fin}} = 20\,\mathrm{kW}$ ■

(a) Nota la velocità finale dell'auto $v = 72\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e quella iniziale $v_0 = 0$, la variazione della sua energia cinetica è

$$\Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}mv^2 = 3.3 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$$

(b) Per il teorema lavoro-energia tale variazione ΔK coincide con il lavoro della risultante delle forze agenti sull'auto, che in assenza di attrito coincide con il lavoro fatto dalla forza fornita dal motore. La potenza media sviluppata nell'intervallo di tempo Δt è dunque

$$\bar{P} = \frac{L}{\Delta t} = 10\,\mathrm{kW}$$

(c) Per il calcolo della potenza istantanea è prima necessario ricavare l'accelerazione con cui si muove l'auto, e da questa la forza fornita dal motore e la velocità negli istanti considerati. Per definizione di accelerazione media, che qui coincide con quella istantanea essendo costante

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t} = 0.606\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

La velocità dopo $10\,\mathrm{s}$ è

$$v(10\,\mathrm{s}) = v_0 + at = 6.06\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

e quindi la potenza istantanea, essendo $\vec{F}$ e $\vec{v}$ nella stessa direzione e verso

$$P(10\,\mathrm{s}) = F\,v(10\,\mathrm{s}) = ma\,v(10\,\mathrm{s}) = 6.1\,\mathrm{kW}$$

La potenza istantanea alla fine dell'intervallo si ottiene usando la velocità finale $v(33\,\mathrm{s})$

$$P_{\mathrm{fin}} = ma\,v(33\,\mathrm{s}) = 20\,\mathrm{kW}$$

■ **Esercizio 9.4** (conservazione dell'energia meccanica, corpi in caduta libera)

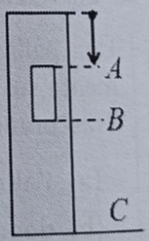
Una palla, lasciata cadere da ferma dal tetto di un edificio, passa davanti ad una finestra alta 120 cm impiegando 0.125 s ad attraversarla in lunghezza. La palla continua a cadere, urta il marciapiedi e rimbalza fino a passare nuovamente davanti al bordo inferiore della finestra 2.00 s dopo essere passata in discesa dal medesimo punto. Dopo la collisione col pavimento, la palla ha lo stesso modulo della velocità che aveva prima di toccare terra ma verso opposto (collisione elastica).

(a) Dimostrare che nella risalita la palla passa davanti al bordo inferiore della finestra con la stessa velocità che aveva in quel punto nella fase di discesa.

(b) Determinare l'altezza dell'edificio.

(b) $h = 20.4\,\mathrm{m}$ ■

(a) Siano A e B gli estremi superiore e inferiore della finestra, e C il punto in cui la palla tocca terra. In assenza di attriti, l'unica forza agente sulla palla durante la caduta è la forza peso, e trattandosi di una forza conservativa vale la legge di conservazione dell'energia meccanica. In particolare nel tratto BC vale la relazione



$$U_C + K_C = U_B + K_B$$

da cui

$$K_C = (U_B - U_C) + K_B$$

cioè

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgh_{BC} + \frac{1}{2}mv_B^2$$

e semplificando m

$$v_C^2 = 2gh_{BC} + v_B^2$$

Si noti che la relazione che lega v_B e v_C, trovata tramite la legge di conservazione dell'energia meccanica, è una relazione tra i moduli delle velocità (che infatti vi compaiono solo al quadrato); ciò significa che tale relazione non contiene informazioni sulla direzione, o nel nostro caso sul verso, dei vettori $\vec{v}_B$ e $\vec{v}_C$. Nella fase di discesa le velocità $\vec{v}_B$ e $\vec{v}_C$ sono entrambe verso il basso, mentre dopo il rimbalzo le nuove velocità saranno date dai vettori $\vec{v}\,'_B$ e $\vec{v}\,'_C$, orientati verso l'alto; anche nella risalita vale la legge di conservazione dell'energia meccanica, e tra i moduli delle nuove velocità varrà stessa relazione

$$v_C'^2 = 2gh_{BC} + v_B'^2$$

Nell'ipotesi dunque che l'urto sia perfettamente elastico, cioè che $|v'_C| = |v_C|$, confrontando le due relazioni precedenti se ne deduce che anche $|v'_B| = |v_B|$.
Una conseguenza di quanto appena dimostrato, che sarà utile per rispondere al quesito del punto successivo, è che gli intervalli di tempo impiegati per percorrere il tratto BC durante la caduta e la risalita sono uguali. Sia prima che dopo il rimbalzo la palla si muove infatti di moto con accelerazione costante pari a g; confrontando le leggi delle velocità nei due casi

$$\begin{cases} v_C - v_B = g\Delta t_{BC} & \text{(caduta)} \\ v'_B - v'_C = g\Delta t'_{BC} & \text{(risalita)} \end{cases}$$

nell'ipotesi che $v'_C = -v_C$ e avendo dimostrato che $v'_B = -v_B$, se ne deduce che deve essere $\Delta t'_{BC} = \Delta t_{BC}$.

(b) Scegliendo per comodità un asse verticale rivolto verso il basso, nel tratto di caduta AB valgono le seguenti leggi del moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} l_{AB} = v_A \Delta t_{AB} + \frac{1}{2} g \Delta t_{AB}^2 \\ v_B - v_A = g \Delta t_{AB} \end{cases}$$

Dalla prima si ricava la velocità v_A che poi si sostituisce nella seconda per trovare v_B

$$\begin{cases} v_A = \dfrac{l_{AB} - \frac{1}{2} g \Delta t_{AB}^2}{\Delta t_{AB}} = 8.99\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ v_B = v_A + g \Delta t_{AB} = 10.2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{cases}$$

Si noti che, una volta trovata la velocità v_A, v_B si sarebbe potuta ottenere anche applicando la conservazione dell'energia meccanica. Viceversa l'unico modo per trovare v_A a partire dal tempo di caduta è la legge oraria del moto uniformemente accelerato, perché la conservazione dell'energia è una legge che non contiene nessuna informazione temporale. Lo stesso dicasi per il tratto di caduta BC, il cui tempo di percorrenza, in base a quanto dimostrato al punto (a), è $\Delta t_{BC} = 1.00\,\mathrm{s}$

$$v_C = v_B + g \Delta t_{BC} = 20.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

A questo punto è possibile utilizzare la legge di conservazione dell'energia meccanica sull'intero tratto di caduta, a partire dal tetto, con velocità iniziale nulla (quindi $K_0 = 0$), fino a terra, per trovare l'altezza totale dell'edificio

$$U_0 + K_0 = U_C + K_C$$

da cui

$$K_C = U_0 - U_C = mgh$$

cioè

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = mgh$$

e infine

$$h = \frac{v_C^2}{2g} = 20.4\,\mathrm{m}$$