

Lezione 1 (TOLC!)

I numeri numerici

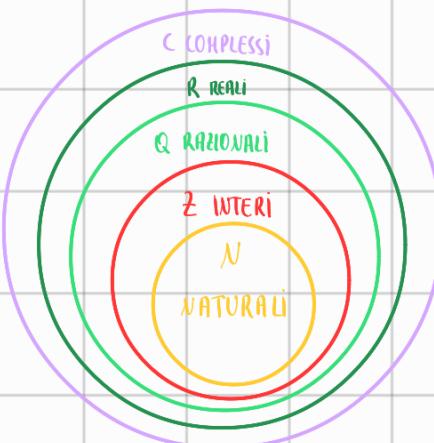
Numeri naturali: 7, 11, 155

Numeri interi: 0, 5, -123

Numeri razionali: $\frac{3}{11}$, 0,41, -6,25

Numeri reali: π , $\sqrt[3]{19}$

Numeri complessi: 3+iz, 5-i7

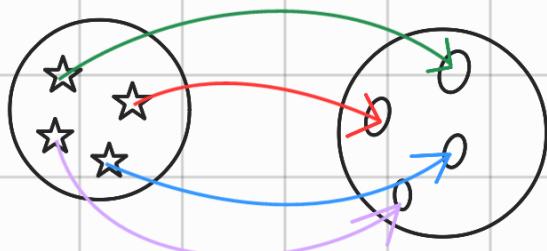


Cardinalità e insiemini equipotenti

CARDINALITÀ DI UN INSIEME FINITO: numero di oggetti presenti nell'insieme

INSIEMI EQUIPOTENTI: è possibile stabilire una correlazione biunivoca

sia fra i due \Rightarrow hanno stessa cardinalità!



Insieme infinito

Un insieme è INFINTO se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme.

Esempio: \mathbb{N} , \mathbb{Z} etc...

(\mathbb{N})

- infinito

- ordinato \rightarrow relazione d'ordine

- chiuso rispetto addizione e moltiplicazione
- proprietà'

SOMMA

MOLTIPLICAZIONE

★ ASSOCIAUTIVA

$$(15+23)+22 = 15+(23+22) = 60 \quad (3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2) = 30$$

★ COMMUTATIVA

$$3+5 = 5+3 = 8$$

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$$

★ ESISTENZA DELL' ELEMENTO NEUTRO $5+0=5$

$$5 \cdot 1 = 5$$

- (Z)
- infinito

- $\mathbb{Z} = \{ \dots, -\mu, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \mu, \dots \}$

- chiuso rispetto all'addizione, sottrazione e moltiplicazione

- proprietà'

★ ASSOCIAUTIVA

★ COMMUTATIVA

★ ELEMENTO NEUTRO (0 E 1)

★ ELEMENTO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ADDITIONE

- (Q)
- insieme infinito

- $\mathbb{Q} = \{ a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$

- chiuso rispetto a addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione

- proprietà
 - ★ ASSOCIAUTIVA
 - ★ COMMUTATIVA
 - ★ ELEMENTO DELL' ELEMENTO NEUTRO (0 E 1)
 - ★ ELEMENTO SIMMETRICO RISPETTO ALL' ADDIZIONE

(R)

- numeri reali razionali $12/4 = 3$
- numeri reali non razionali $\sqrt{2}, \pi$

Modulo e valore assoluto

$$|a| = a \text{ se } a \geq 0$$

$$|a| = -a \text{ se } a < 0$$

Numeri complessi

$$\sqrt{4} = \pm 2 \quad \text{MA} \quad \sqrt{-4} ?? \quad \text{IMPOSSIBILE IN IR!}$$

$$i^2 = -1 \quad \text{e dunque} \quad \sqrt{-1} = i$$

NUMERI COMPLESSI!

$$\underbrace{x + iy}_{\text{PARTE REALE}} \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R} \quad \underbrace{}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}$$

$$\text{CONIUGATO: } z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$\text{MODULO: } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

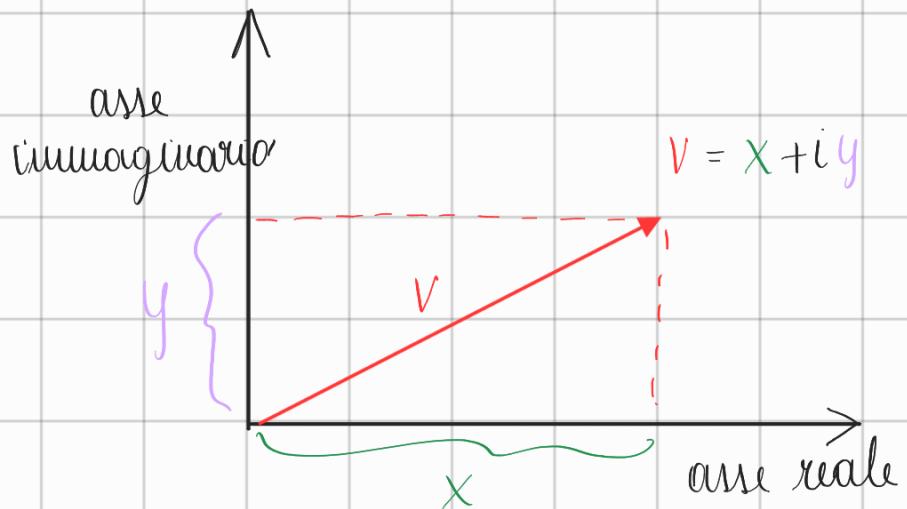
$$\text{ADDITIONE: } (3+2i) + (5+4i) = (3+5) + (2i+4i) = 8+6i$$

$$\text{MOLTIPLICAZIONE: } (3+2i)(5+4i) = 15 + 12i + 10i + \underbrace{8i^2}_{-8} = 7 + 22i$$

Proprietà

- commutativa
- associativa
- $0 = 0 + i0$ elemento neutro addizione
- $1 = 1 + i0$ elemento neutro della moltiplicazione

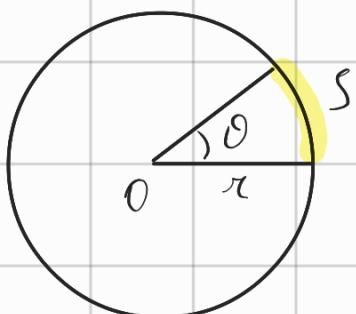
PIANO COMPLESSO



Misura degli angoli

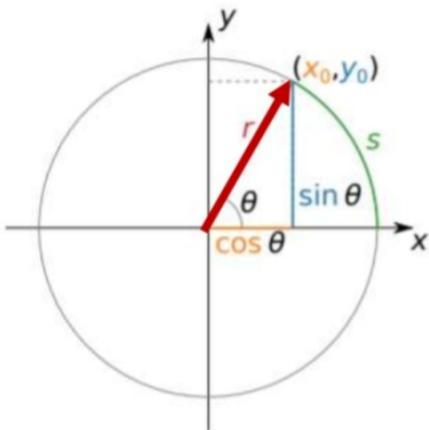
$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\theta = [0, 2\pi]$$



$\theta [^\circ]$	$\theta [\text{rad}]$
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

Funzioni trigonometriche



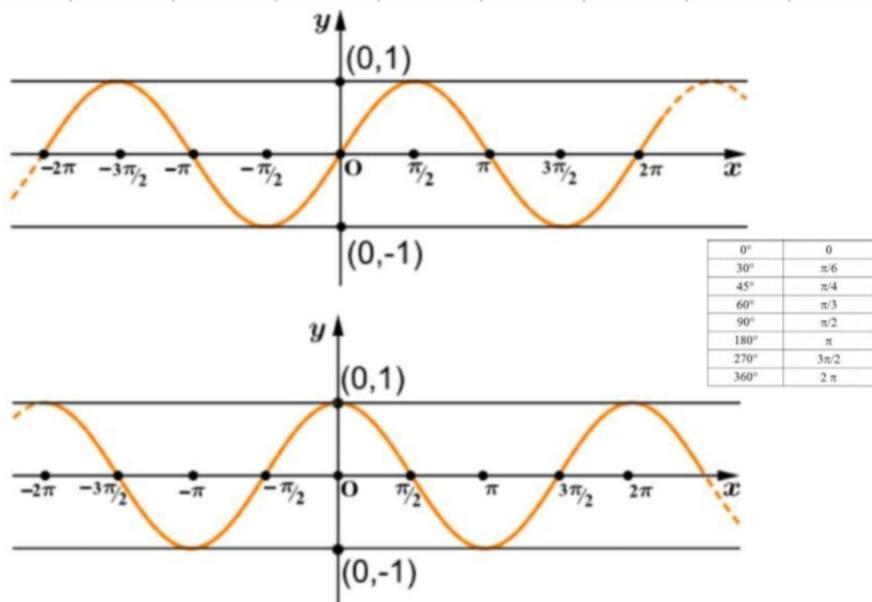
$$\cos \theta = \frac{x_0}{r} = \frac{\text{adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\sin \theta = \frac{y_0}{r} = \frac{\text{opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan \theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$r = \underbrace{r \cos \theta}_a + i \underbrace{r \sin \theta}_b$$

$$r = a + bi$$



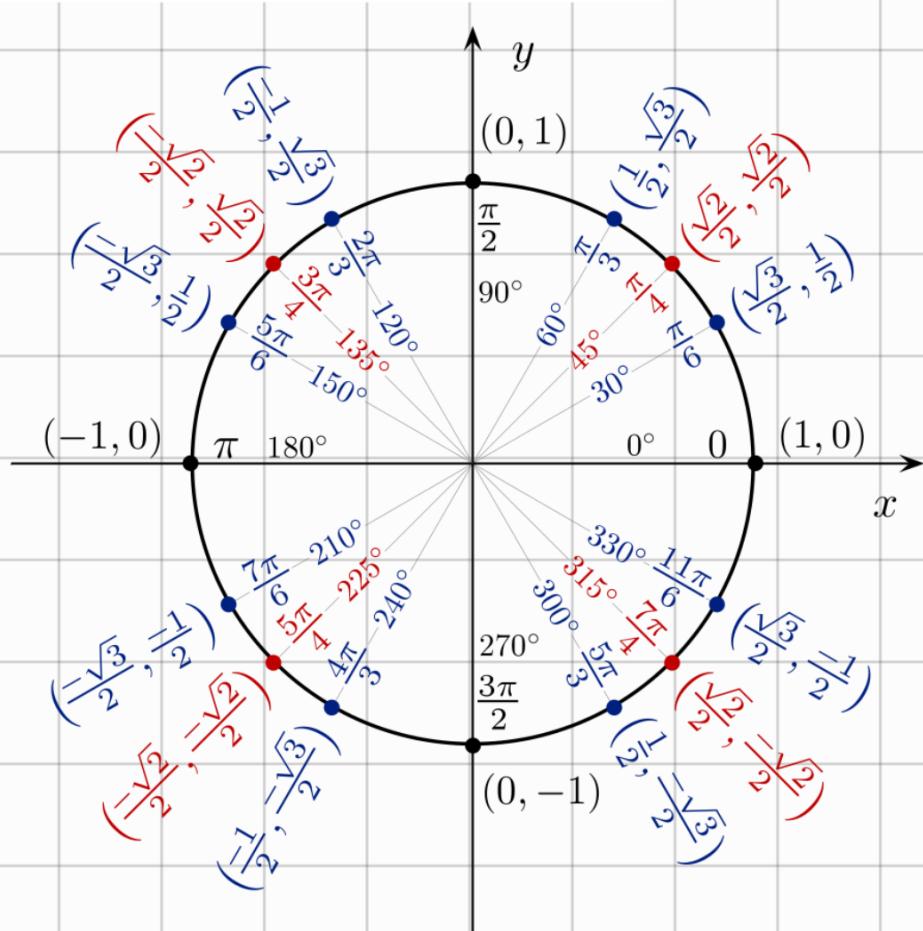
SENO

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$

COSENO



Potenze

$$a^u = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{u \text{ volte}}$$

★ $a^u a^m = a^{u+m}$

★ $(a^u)^m = a^{u \cdot m}$

★ $a^u / a^m = a^{u-m}$

★ $a^{1/u} = \sqrt[u]{a}$

★ $a^{u/m} = (\sqrt[m]{a})^m = \sqrt[m]{a^m}$

ESERCIZI

1. **Esercizio.** Determinare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

- (a) $\frac{1}{i}$;
- (b) $-\frac{1}{i}$;
- (c) $\frac{1-i}{1+7i} - 5i$;
- (d) $1 - \frac{1}{i}$;
- (e) $i - \frac{1}{i}$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $\frac{1}{i} = -i$; quindi si ha $\Re(\frac{1}{i}) = 0$, $\Im(\frac{1}{i}) = -1$.
- (b) Si ha $-\frac{1}{i} = i$; quindi si ha $\Re(-\frac{1}{i}) = 0$, $\Im(-\frac{1}{i}) = 1$.
- (c) Si ha

$$\frac{1-i}{1+7i} - 5i = \frac{(1-i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)} - 5i = \frac{1-7i-i-7}{1+49} - 5i = \frac{-6-8i}{50} - 5i = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25} - 5i = -\frac{3}{25} - \frac{129}{25}i.$$
Si ha quindi $\Re(\frac{1-i}{1+7i} - 5i) = -\frac{3}{25}$ e $\Im(\frac{1-i}{1+7i} - 5i) = -\frac{129}{25}$.
- (d) Si ha $1 - \frac{1}{i} = 1 + i$. Si ha quindi
 $\Re(1 - \frac{1}{i}) = 1$ e $\Im(1 - \frac{1}{i}) = 1$.
- (e) Si ha $i - \frac{1}{i} = i + i = 2i$. Si ha quindi
 $\Re(i - \frac{1}{i}) = 0$ e $\Im(i - \frac{1}{i}) = 2$.

2. **Esercizio.** Determinare la parte reale, la parte immaginaria e il modulo dei seguenti numeri complessi:

- (a) $\frac{1}{1-i}$;

$$(b) \frac{2+i}{3+i}.$$

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Quindi si ha } \Re z = \frac{1}{2}, \Im z = \frac{1}{2}, |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) Si ha

$$\frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i+3i+1}{9+1} = \frac{7+i}{10} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Si ha quindi

$$\Re(\frac{2+i}{3+i}) = \frac{7}{10}, \Im(\frac{2+i}{3+i}) = \frac{1}{10} \text{ e}$$

$$\left| \frac{2+i}{3+i} \right| = \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$1) \left(\operatorname{tg} 0^\circ - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 270^\circ \right)^{1/2}$$

$$2) \operatorname{sen}^2 90^\circ + \cos^2 360^\circ$$

$$3) \frac{\cos \pi + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{3}{2} \pi}$$

$$4) \left(4 \operatorname{sen} 30^\circ + \sqrt{2} \operatorname{tg} 45^\circ \right) \left(1 + \frac{1}{3} \cos 30^\circ \right)$$

$$5) 4 \cos 45^\circ \operatorname{sen}^2 60^\circ$$

$$6) 1 - \operatorname{sen} 45^\circ \cos 45^\circ$$

$$7) \operatorname{tg}^2 30^\circ \operatorname{sen}^2 60^\circ$$

$$8) \left(\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \right) \frac{1}{\tan \frac{\pi}{13}}$$

$$9) \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + 2\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$10) \frac{3 \tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{3}}{\tan \frac{\pi}{4}}$$

$$11) (\tan^2 \pi + a) \cos \theta + \sin \left(\frac{3}{2}\pi \right)$$

$$12) \frac{2a + \sin 45^\circ}{b \cos 60^\circ} \tan 30^\circ$$

$$13) \left(1 - a \sin \frac{\pi}{6} - b \sin \frac{\pi}{6} \tan^2 \frac{\pi}{6} \right)^{1/3}$$

$$14) (\cos 360^\circ + 2 \cos 450^\circ) (1 - \tan 540^\circ)$$

$$15) \sqrt{2} \sin 450^\circ + \tan^2 360^\circ$$

$$16) \left(\cos \frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2} \cos 3\pi \right) \sin \frac{3}{2}\pi$$

$$17) \sqrt{3} \sin \left(\frac{5}{2}\pi \right) \frac{1}{3} \cos(2\pi)$$

$$18) \frac{\operatorname{tg} \pi + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{\cos 2\pi}$$

$$19) \left(\cos \frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2} \cos 3\pi \right) \operatorname{seu} \frac{3}{2}\pi$$

$$20) \frac{1}{10} \operatorname{seu}(3\pi) \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$
