Lezione 11

Matematica

STUDIO DI FUNZIONE

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x^2 e^{3x+5}$$

1) Dominio:

$$D = \mathbb{R}$$

2) Simmetrie:

$$f(-x) = x^2 e^{-3x+5}$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

f(x) non è ne pari ne dispari.

3) Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (0;0) \in f(x)$$

4) Segno:

$$f(x) \geq 0 \; \forall x \in D$$

5) Limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = [\infty \cdot 0]$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-3x-5}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Risolviamolo con De L'Hopital:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-3e^{-3x-5}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{9e^{-3x-5}} = 0$$

y=0 è un asintoto orizzontale per la funzione data.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Non ci sono asintoti obliqui.

6) Derivate:

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2xe^{3x+5} + 3x^2e^{3x+5}$$
$$f'(x) = e^{3x+5}\left(3x^2 + 2x\right)$$

Studiamone il segno:

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow 3x^2 + 2x \geq 0$$
$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq 0$$

Otteniamo quindi un minimo per

$$x_{MIN} = 0$$

e un massimo per

$$x_{MAX} = -\frac{2}{3}$$

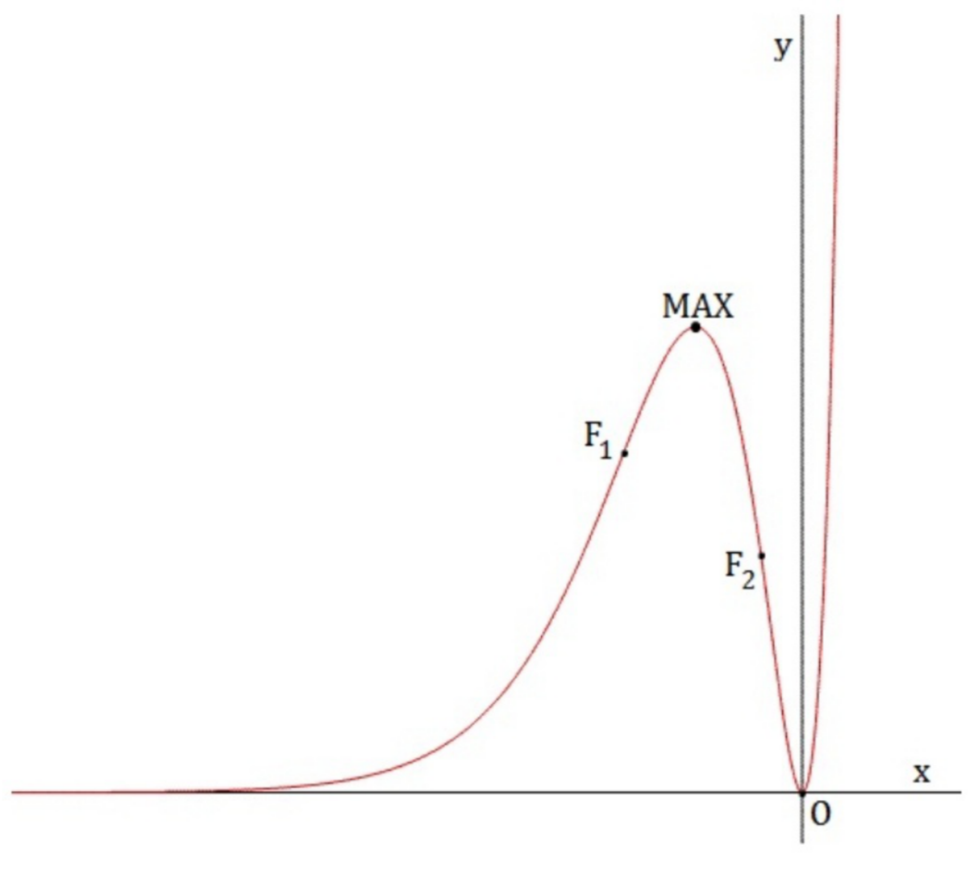
Derivata seconda:

$$f''(x) = 3e^{3x+5}\left(3x^2 + 2x\right) + e^{3x+5}(6x + 2)$$
$$f''(x) = e^{3x+5}\left(9x^2 + 12x + 2\right)$$
$$f''(x) \geq 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 2 \geq 0$$

Otteniamo due punti di flesso:

$$x_{F1} = \frac{-2-\sqrt{2}}{3}$$

$$x_{F2} = \frac{-2+\sqrt{2}}{3}$$



INTEGRALE

Esercizio 1. *Calcolare il seguente integrale indefinito*

$$\int \sqrt{1-3\,x}\,dx\,.$$

Soluzione. Poniamo

$$t = 1-3\,x$$

da cui

$$x = \frac{1-t}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} - \frac{t}{3}$$

derivando rispetto a t abbiamo

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}$$

quindi

$$\int \sqrt{1-3\,x}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt$$

poiché $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$, abbiamo

$$-\frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{3}\,\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\,(1-3\,x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\,(1-3\,x)^{\frac{3}{2}} + C$$

in definitiva:

$$\int \sqrt{1-3\,x}\,dx = -\frac{2}{9}\,\sqrt{(1-3\,x)^3} + C$$

Fisica

MECCANICA

Esercizio 8.8 (teorema lavoro-energia)

Una gru solleva verticalmente una cassa di massa 83.9 kg, inizialmente ferma, per un'altezza $h = 14.6\,\mathrm{m}$ con un'accelerazione costante di $0.570\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Calcolare:

(a) la tensione della fune che solleva la cassa;

(b) la velocità finale della cassa;

(c) il lavoro totale compiuto sulla cassa;

(d) il lavoro compiuto dalla forza peso e dalla tensione della fune sulla cassa verificando che $L_{\mathrm{tot}} = L_P + L_T$.

(a) $T = 871\,\mathrm{N}$; (b) $v = 4.08\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; (c) $L_{\mathrm{tot}} = 698\,\mathrm{J}$;
(d) $L_P = -12.0\,\mathrm{kJ}$, $L_T = 12.7\,\mathrm{kJ}$ ■

(a) Durante il sollevamento la cassa è soggetta alla tensione della fune e alla forza peso; rispetto a un asse verticale orientato verso l'alto, per la seconda legge di Newton si ha

$$T - P = ma$$

da cui si ricava immediatamente

$$T = m\,(g + a) = 871\,\mathrm{N}$$

(b) La velocità acquisita in un moto con accelerazione costante, con partenza da fermo ($v_0 = 0$) e per un tratto di lunghezza h si ricava dalla relazione

$$v^2 = v_0^2 + 2ah = 2ah$$

da cui

$$v = \sqrt{2ah} = 4.08\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

(c) Il lavoro totale compiuto sulla cassa si può ricavare dal teorema lavoro-energia; tenendo presente che l'energia cinetica iniziale della cassa è nulla (essendo $v_0 = 0$), e utilizzando la relazione per v^2 ricavata al punto precedente, si ha

$$L_{\mathrm{tot}} = \Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}mv^2 = mah = 698\,\mathrm{J}$$

(d) Si noti che, come afferma il teorema lavoro-energia, il lavoro qui calcolato è il lavoro della risultante delle forze agenti sulla cassa, cioè della tensione e della forza peso, e non il lavoro speso per sollevare la cassa. Quest'ultimo coincide con il lavoro compiuto dalla sola tensione T, che è dato da

$$L_T = Th = 12.7\,\mathrm{kJ}$$

Mentre il lavoro della forza peso, che agisce in direzione opposta allo spostamento, è dato da

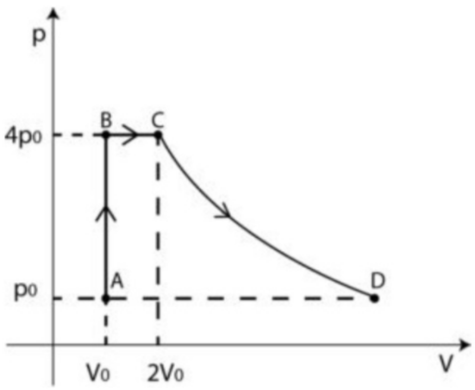
$$L_P = -Ph = -12.0\,\mathrm{kJ}$$

ed è verificata dunque la relazione

$$L_{\mathrm{tot}} = (T - P)\,h = L_T + L_P$$

TERMODINAMICA

Una mole di gas ideale monoatomico si trova inizialmente in uno stato A con volume V_0 e pressione p_0 a temperatura T=300K ed è sottoposto alla seguente equenza di trasformazioni:



A→B: compressione isocora (volume costante) fino alla pressione $4p_0$;

B→C: espansione isobara fino al volume $2V_0$;

C→D: espansione isoterma fino alla pressione p_0.

Si calcolino il lavoro compiuto ed il calore scambiato dal gas durante la sequenza di trasformazioni.

E' conveniente calcolare volume, pressione e tempaeratura negli stati A, B, C e D.

A: volume, pressione e temperature sono quelli iniziali, Vo, po, To e l'equazione di stato è

$$p_oV_o=nRT_o$$

B: poichè la compressione avviene a volume costante, $V_B=V_o$, $p_B=4p_o$, e la temperatura è una generica T_B; la corrispondente equazione di stato è

$$4p_oV_o=nRT_B$$

Dal confronto delle equazioni di stato rispetto ad A e B si ottiene (basta dividere membro a membro) **$T_B=4T_o$.**

C: $V_C=2V_o$, $p_C=p_B=4p_o$ (espansione a pressione costante) e l'equazione di stato è

$$4p_o2V_o=nRT_C$$

che, confrontata con l'equazione allo stato A (ancora dividendo membro a membro) si ha **$T_C=8T_o$.**

D: volume V_D, pressione $p_D=p_o$, temperatura $T_D=T_C=8T_o$, (espansione a temperatura costante), la cui uqeuazione di stato è

$$V_Dp_o=8nRT_o$$

Per calcolare il lavoro, ricordiamo che la grandezza è additiva, per cui basta calcolare i lavori durante le 3 trasformazioni:

$W_{AB}=0$, perchè isocora

$$\int_{V_B}^{V_C} pdV = p_B \int_{V_B}^{V_C} dV = p_B(V_C - V_B) = 4p_0V_0$$

W_{BC}=

Nella trasformazione C→D occorre ricordare che l'espansione avviene e a temperatura costante e che quindi può essere portata fuori dall'integrale , dopo aver ricavato T dall'equazione di stato (ddobbiamo scriverla in funzione di V):

W_{CD}=

$$\int_{V_C}^{V_D} pdV = \int_{V_C}^{V_D} \frac{nRT}{V} dV = nRT_C \int_{V_C}^{V_D} \frac{1}{V} dV = nRT_C \, ln \frac{V_D}{V_C} = 8RT_0 ln4$$

Ora, basta solo sostituire i valori numerivi per avere il lavoro complessivo: W=37600J.

Per calcolare il calore scambiato, ricorriamo al primo principio della termodinamica: Q=ΔU+W (♦).

Ricordiamo che la variazione di energia interna per un gas monoatomico è data da $\Delta U = nc_V \Delta T = nc_V(T_D - T_C) = 26200J$

Pertanto, (♦) Q= 63800J.

ELETTROMAGNETISMO

Vediamo un semplice esempio di applicazione della legge di Biot-Savart. Un filo rettilineo è percorso da una corrente di 70 mA; quanto vale il campo magnetico a una distanza di 20 centimetri dal filo?

Svolgimento: prima di applicare la formula dobbiamo convertire le misure:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{d} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}}{2\pi} \cdot \frac{70 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}}{20 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{T}$$