Literatura

1. Łachwa A.: Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji, EXIT Warszawa 2001
2. Rutkowski L.: Metody i techniki sztucznej inteligencji. PWN, 2005

Operacje na zbiorach rozmytych

A = [0/1; 0.2/2; 0.5/3; 0.5/7; 0.6/8; 1/9;0/10]

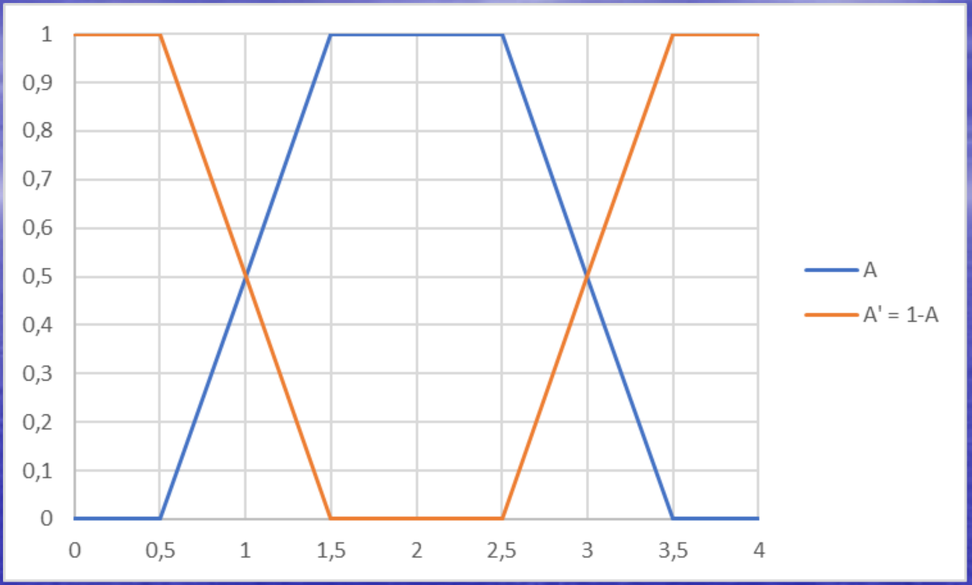
B = [1/1; 0.8/2; 0.7/3; 0.4/7; 0.3/8; 0.1/9;0/10]

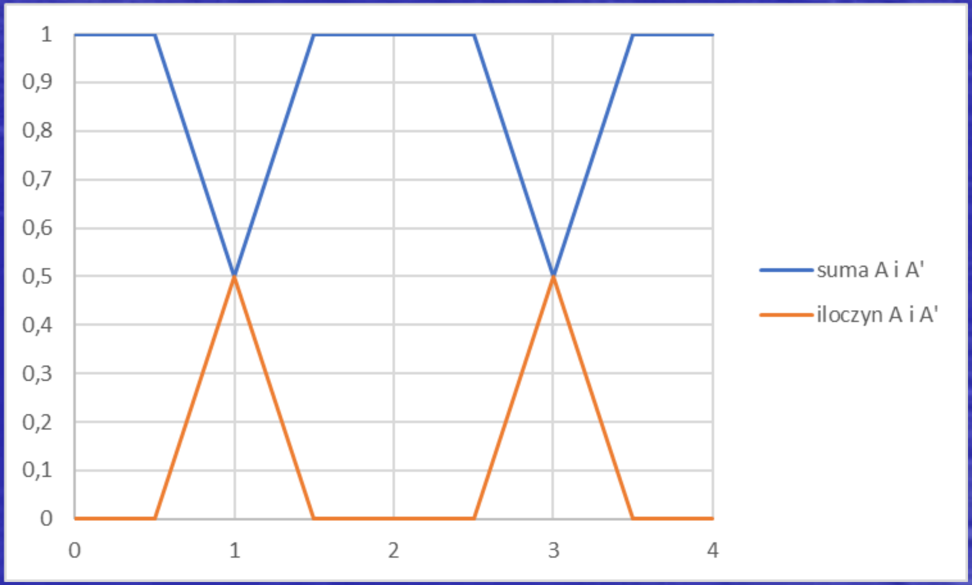
Suma i iloczyn zbioru i jego dopełnienia

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

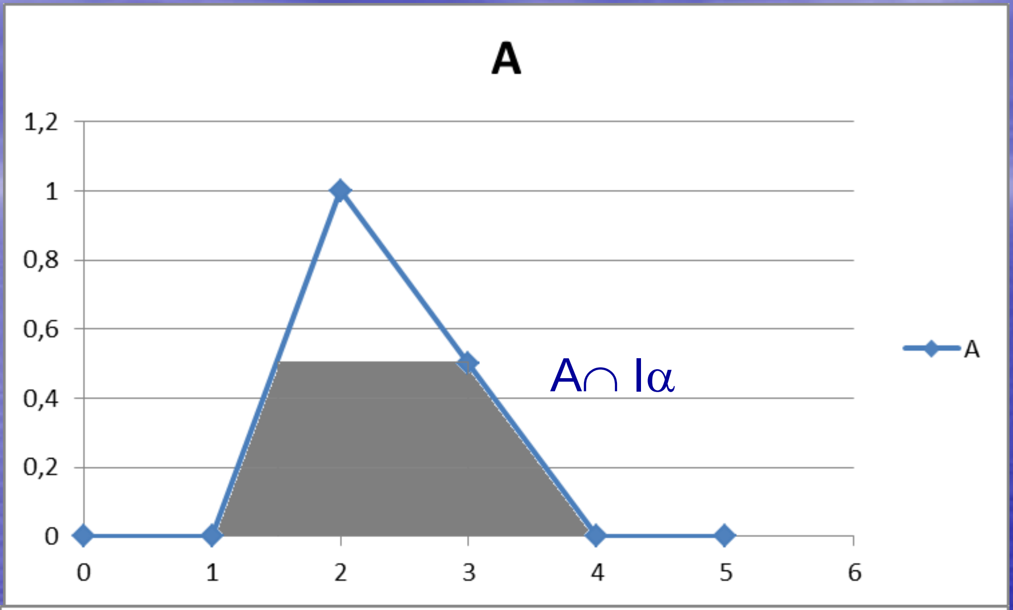
$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

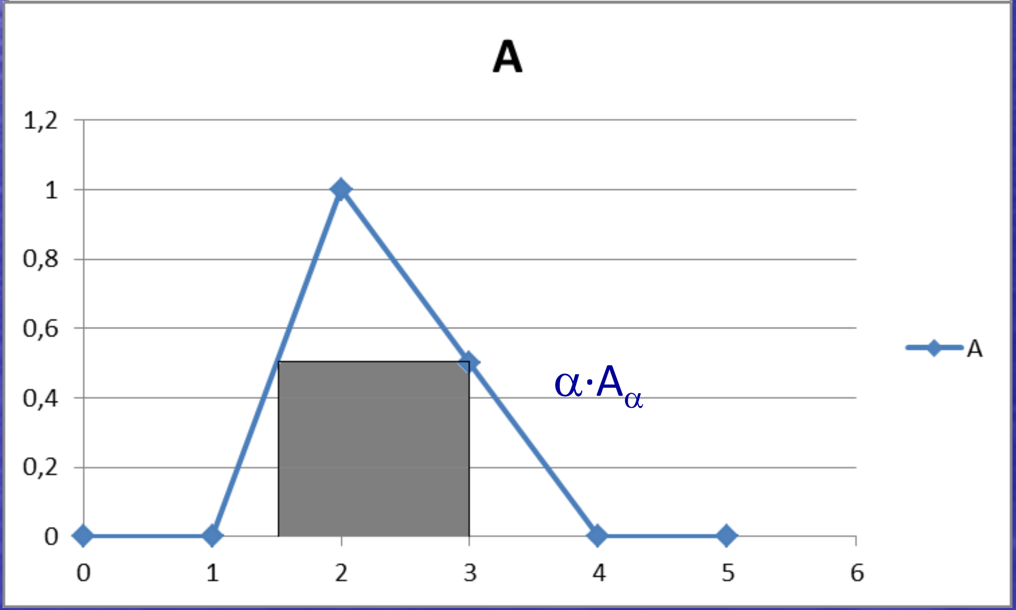
$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$



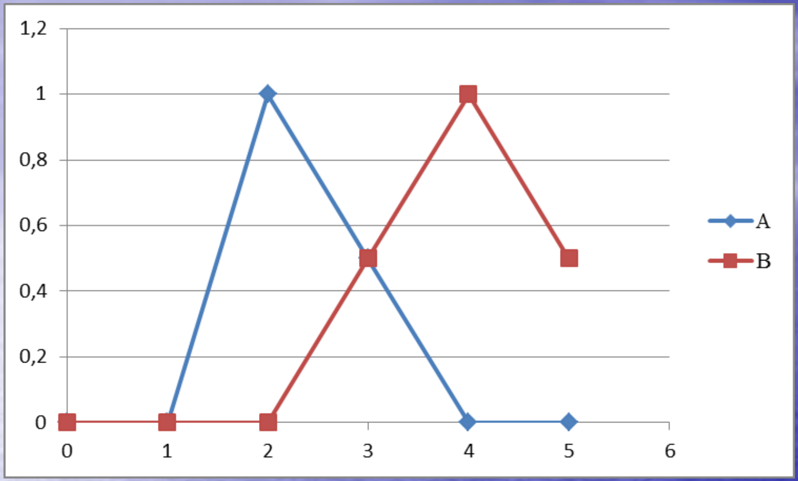


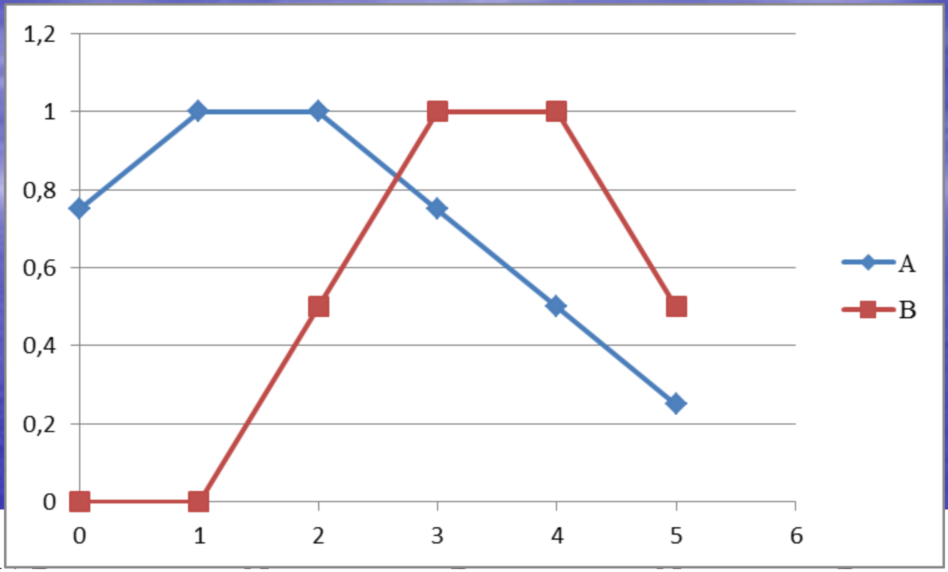
Obcinanie zbioru rozmytego

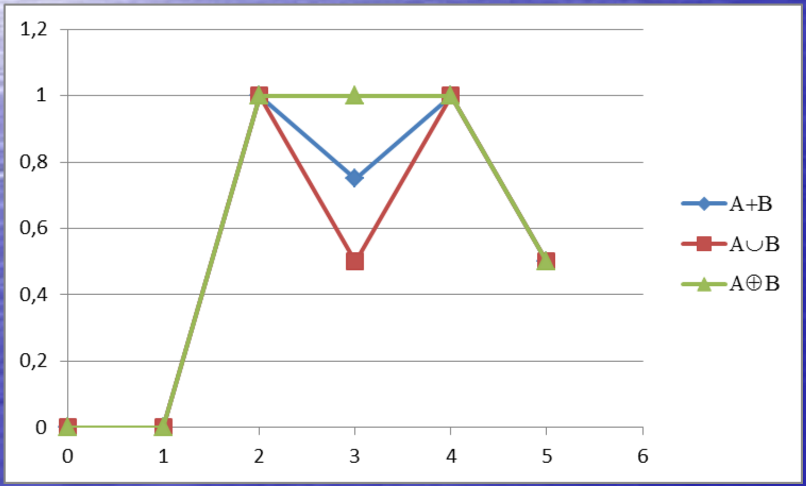


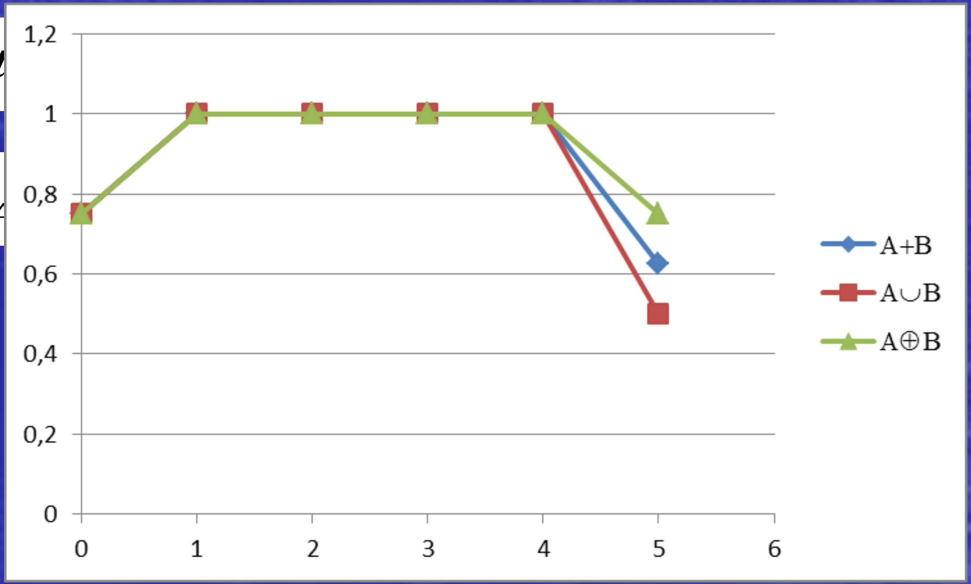


Porównanie sum algebraicznej, mnogościowej i logicznej

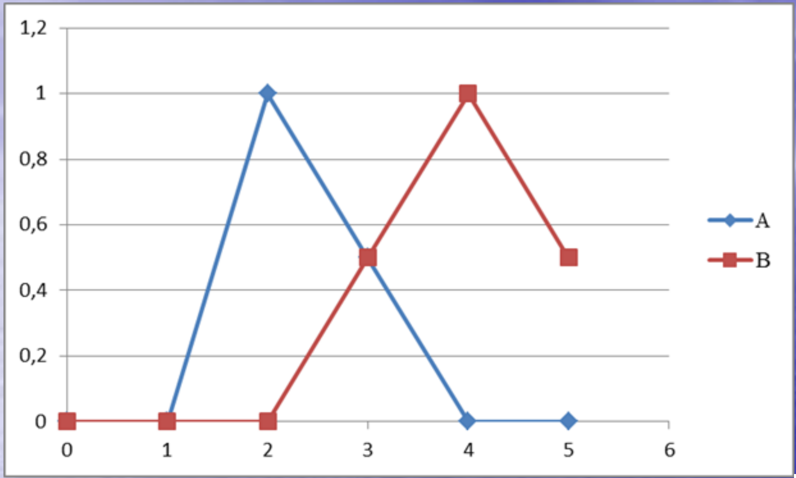


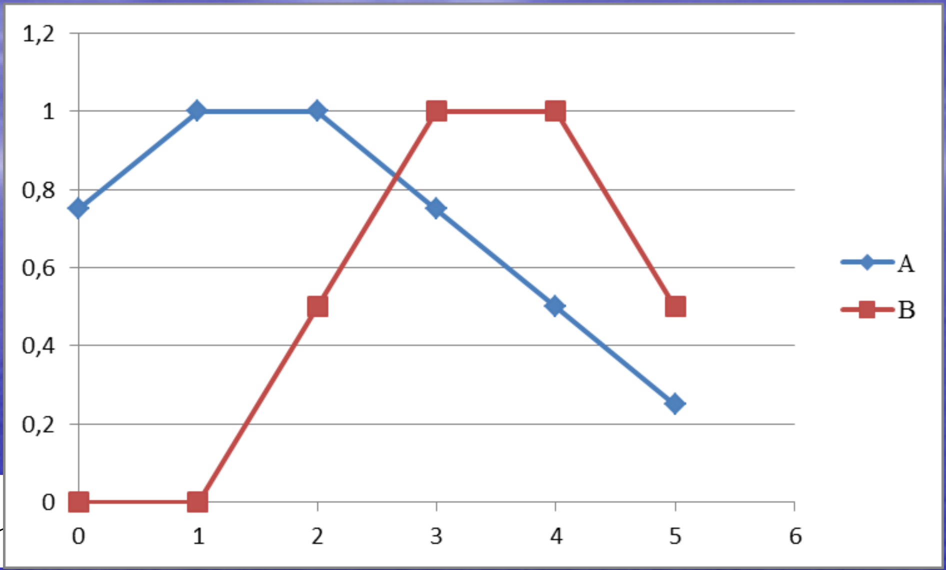


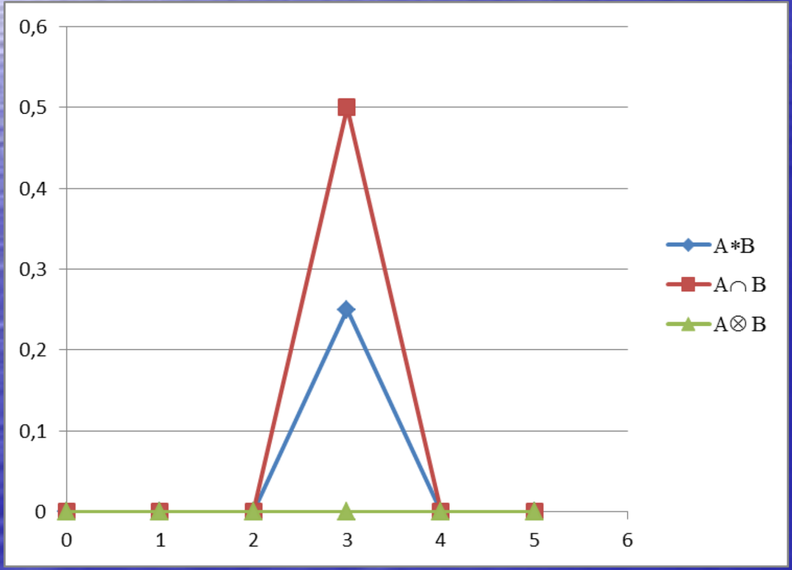


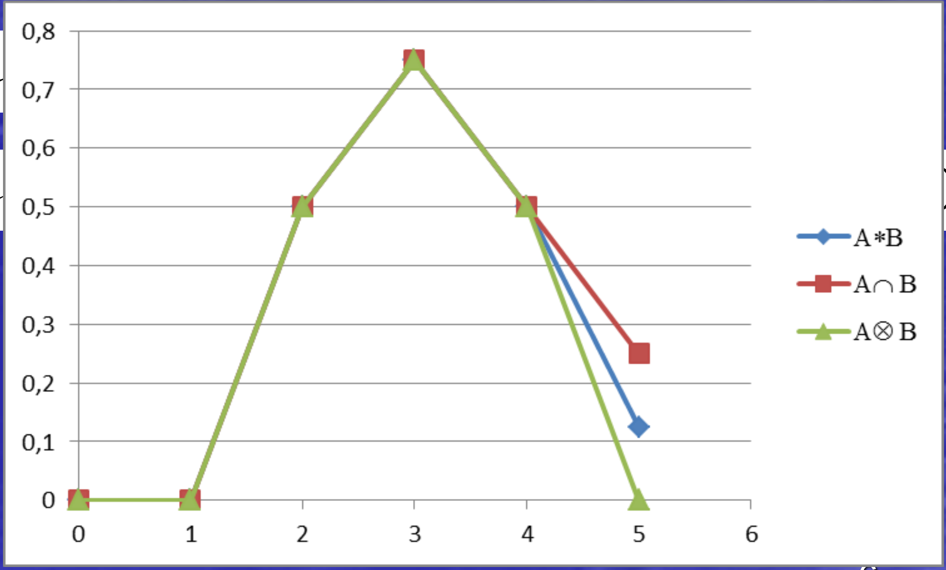


Porównanie iloczynu algebraicznego, mnogościowego i logicznego

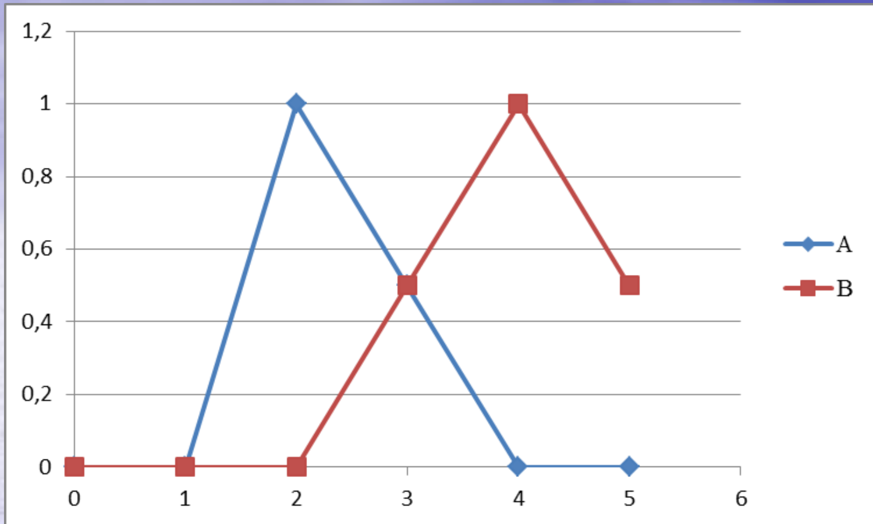


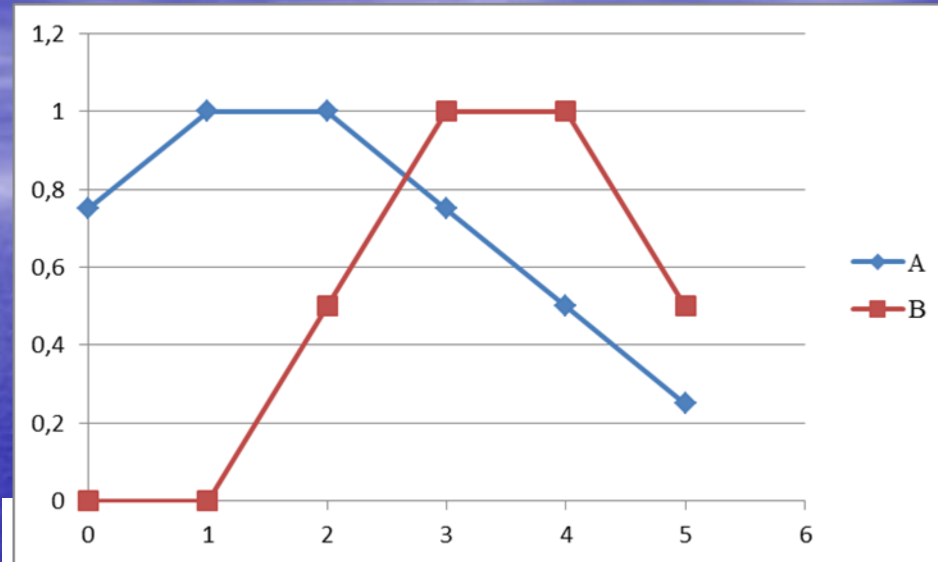


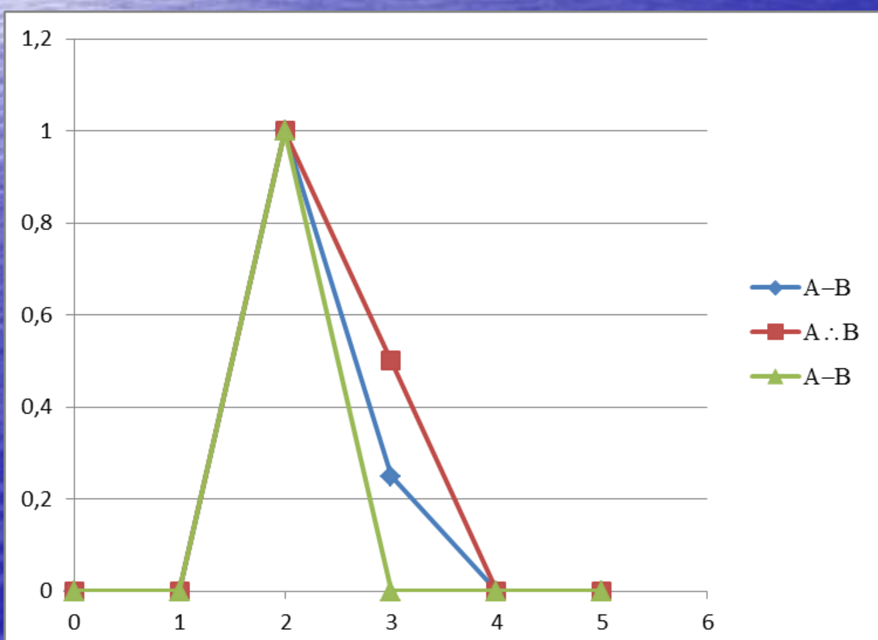


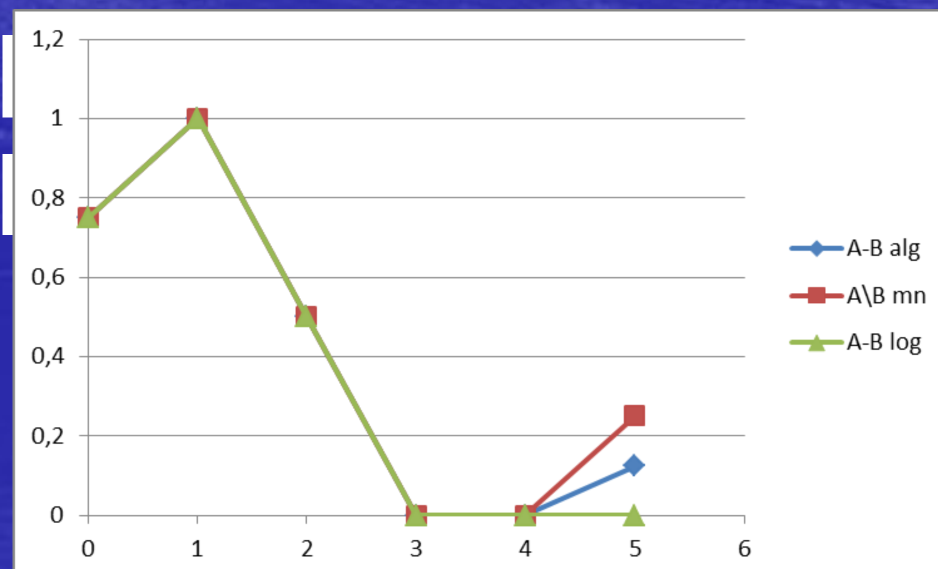


Porównanie różnic algebraicznego, mnogościowego i logicznego

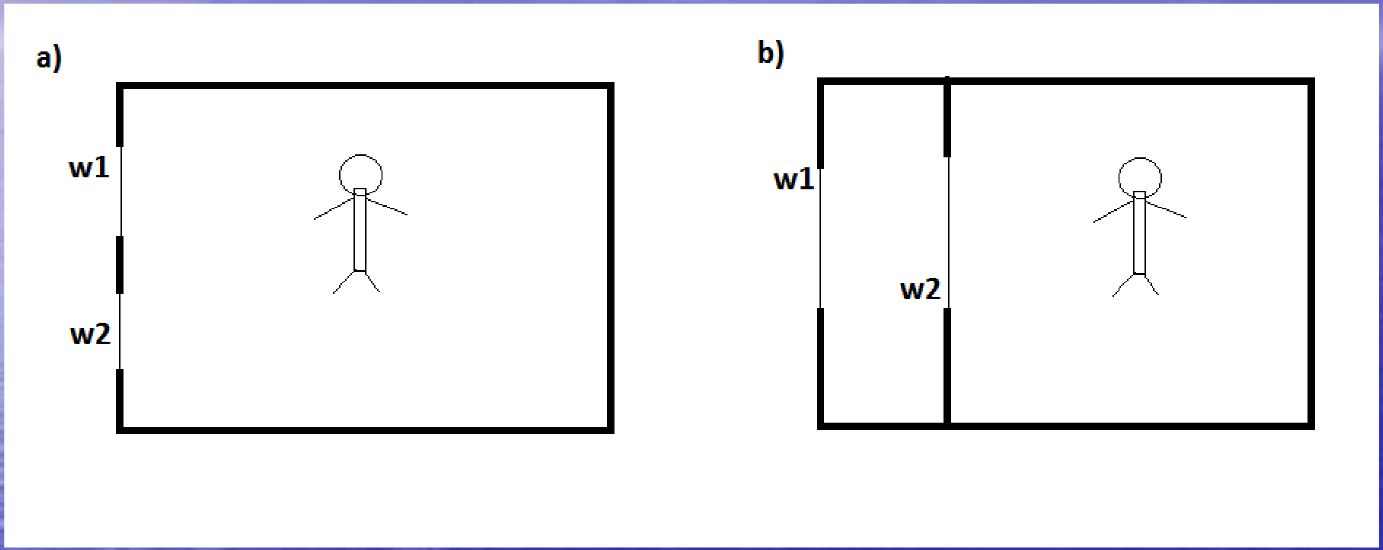








Przykład cel więziennych Van Neuta Lemke [1]



Jak łatwo światło dociera do więźnia ?

Jak łatwo może się on wydostać z więzienia ?

Liczby rozmyte

Definicja

Zbiór rozmyty A określony w zbiorze liczb rzeczywistych, $A \subseteq \mathbf{R}$, którego funkcja przynależności

$$\boxed{\mu_A : \mathbf{R} \rightarrow [0,1]}$$

spełnia warunki:

- zbiór rozmyty A jest normalny,
- zbiór A jest wypukły,
- $\mu_A(x)$ jest funkcją przedziałami ciągłą

nazywamy liczbą rozmytą.

Liczby rozmyte

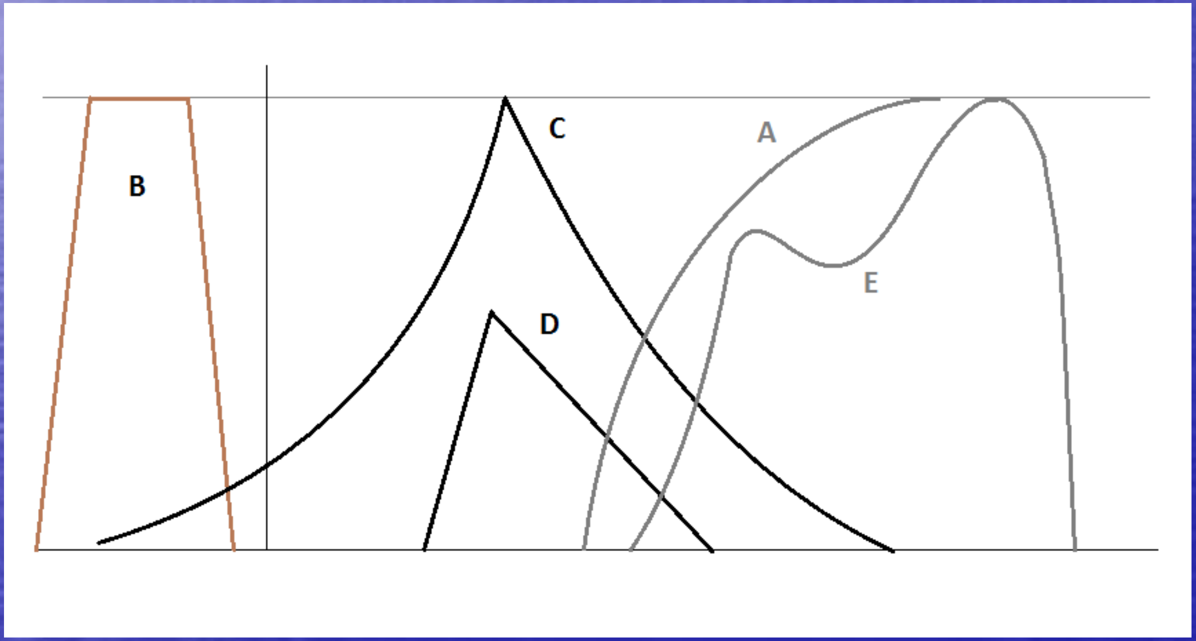
własności:

A – dodatnia niewłaściwa

B – płaska ujemna

C – właściwa mieszana

D i E – zbiory rozmyte nie będące liczbami



Podział i rodzaje liczb rozmytych

Liczba - właściwości
Właściwa rozmyta
Niewłaściwa
Płaska liczba rozmyta (przedział rozmyty)

Liczba - znak
Dodatnie
Ujemne
Mieszane

Zasada rozszerzania

Zasada ta pozwala na wykorzystanie operacji arytmetycznych stosowanych w zbiorach ostrych na zbiory rozmyte.

Założenia: funkcja

$f: X \to Y$,

A – zbiór rozmyty w X

B – zbiór rozmyty w Y

Zbiór rozmyty B jest indukowany przez zastosowanie odwzorowania f na zbiorze A. Wtedy:

$$\mu_B = \sup_{x \in f^{-1}(y) \neq 0} \mu_A(x), \quad y = f(x) \in Y$$

Podstawowe operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych A_1 , $A_2 \subseteq \mathbf{R}$:

dodawanie	$A_1 \oplus A_2 = B$	$\mu_B(y) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 + x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
odejmowanie	$A_1 \ominus A_2 = B$	$\mu_B(y) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 - x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
mnożenie	$A_1 \odot A_2 = B$	$\mu_B(y) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 \cdot x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
dzielenie	$A_1 \oslash A_2 = B$	$\mu_B(y) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 : x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$

Twierdzenie (Dubois i Prade)

Jeżeli liczby rozmyte A_1 , A_2 mają ciągłe funkcje przynależności to wynikiem operacji arytmetycznych dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia są liczby rozmyte.

Operacje jednoargumentowe przeprowadza się również za pomocą zasady rozszerzania.

Przykłady operacji jednoargumentowych:

1. Operacja zmiany znaku

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x)$$

Liczby rozmyte A i –A są symetryczne względem osi *x*.

2. Operacja odwrotności

$$\mu_{A^{-1}}(x) = \mu_A(x^{-1})$$

Zakładamy, że A jest liczbą rozmytą dodatnią lub ujemną.

3. Operacja skalowania

$$\mu_{\lambda A}(x) = \mu_A(x\lambda^{-1})$$

4. Operacja eksponent

$$\mu_{e^A}(x) = \begin{cases} \mu_A(\log x) & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Zatem e^A jest liczbą rozmytą dodatnią.

5. Operacja wartości bezwzględnej

$$\mu_{|A|}(x) = \begin{cases} \max(\mu_A(x), \mu_A(-x)) & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

|A| jest liczbą rozmytą dodatnią.

Definicja liczby rozmytej typu *L*-*P*

Liczba rozmyta A ⊆ **R** jest liczbą rozmytą typu *L*-*P*

⇔

jej funkcja przynależności ma postać:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & \text{jeżeli} \quad x \le m \\ P\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & \text{jeżeli} \quad x \ge m \end{cases}$$

gdzie:

m – liczba rzeczywista zwana wartością liczby rozmytej A ($\mu_A(m) = 1$),

α – liczba rzeczywista dodatnia zwana rozrzutem lewostronnym,

β – liczba rzeczywista dodatnia zwana rozrzutem prawostronnym,

natomiast *L* i *P* są funkcjami odwzorowującymi

$$(-\infty, \infty) \rightarrow [0,1]$$

oraz spełniającymi warunki:

- $L(-x) = L(x)$, $P(-x) = P(x)$,
- $L(0) = 1$, $P(0) = 1$,
- *L* i *P* są funkcjami nierosnącymi w przedziale $[0, +\infty)$

W przypadku, gdy rozrzuty α i β zwiększają się, to liczba A staje się „bardziej” rozmyta.

Liczbę rozmytą typu *L-P* zapisuje się w postaci:

$$\mathrm{A} = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP}$$

Zatem operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych typu *L-P* sprowadzają się do operacji na jej parametrach.

Liczba rozmyta **przeciwna** do powyższej liczby rozmytej jest równa

$$-\mathrm{A} = (-m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP}$$

Suma liczb rozmytych A = $(m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP}$ i B = $(m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LP}$ ma postać

$$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LP}$$

Definicja płaskiej liczby rozmytej L-P:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & \text{jeżeli} \quad x \le m_1 \\ 1 & \text{jeżeli} \quad m_1 \le x \le m_2 \\ P\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & \text{jeżeli} \quad x \ge m_2 \end{cases}$$

Płaską liczbą rozmytą A możemy utożsamić z przedziałem rozmytym A postaci

$$\mathrm{A} = (m_1, m_2, \alpha_A, \beta_A)_{LP}$$

Normy trójkątne

Ogólne podejście do operacji na zbiorach rozmytych

Iloczyn zbiorów można definiować za pomocą tzw. T-normy:

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

np. T= min($\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$)

Sumę zbiorów rozmytych natomiast przez S-normę (*T-konormę)*

$$\mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Np. S = max($\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$)

Definicja T-normy

Odwzorowanie:

$$T:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$$

nazywamy *T*-normą, jeżeli funkcja T :

- jest monotoniczna:

  $T(a, c) \le T(b, d)$ dla $a \le b$ i $c \le d$

- jest przemienna

  $T(a, b) = T(b, a)$

- jest łączna

  $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$

- spełnia warunki brzegowe

  $T(a, 0) = 0,\quad T(a, 1) = a$

gdzie $a, b, c \in [0,1]$.

T-norma jest ograniczona tak, że:

$$T_d(a,b) \le T(a,b) \le \min(a,b)$$

gdzie T_d jest *T*-normą postaci

$$T_d(a,b) = \begin{cases} a & \text{gdy} \quad b = 1 \\ b & \text{gdy} \quad a = 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad a,b \ne 1 \end{cases}$$

T-normę oznacza się :

$$T(a,b) = a \overset{T}{*} b$$

Definicja S-normy

Odwzorowanie:

$$S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

nazywamy *S*-normą, jeżeli funkcja S:

- jest monotoniczna:

  $S(a, c) \le S(b, d)$ dla $a \le b$ i $c \le d$

- jest przemienna:

  $S(a, b) = S(b, a)$

- jest łączna

  $S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c))$

- spełnia warunki brzegowe

  $S(a, 0) = a, \quad S(a, 1) = 1$

gdzie $a, b, c \in [0,1]$.

S-norma jest ograniczona tak, że

$$\max(a,b) \le S(a,b) \le S_g(a,b)$$

gdzie S_w jest *S*-normą postaci

$$S_g(a,b) = \begin{cases} a & \text{gdy} \quad b = 0 \\ b & \text{gdy} \quad a = 0 \\ 1 & \text{gdy} \quad a,b \ne 0 \end{cases}$$

S-normę oznacza się:

$$S(a,b) = a \overset{S}{*} b$$

T-normie odpowiada *S*-norma wg zależności:

$$a \overset{T}{*} b = 1 - \left[(1-a) \overset{S}{*} (1-b) \right]$$

***T*- oraz *S*-normy**:

Nr	***T*(*a*, *b*)**	***S*(*a*, *b*)**
1	min(*a*, *b*)	max(*a*, *b*)
2	*ab*	*a* + *b* – *ab*
3	max(*a* + *b* – 1, 0)	min(*a* + *b*, 1)

Relacje rozmyte

Relacje rozmyte

Relacja jest zdefiniowana na zbiorach ostrych i definiuje zbiór rozmyty:

$$R \overset{def}{=} \{((x, y), \mu_R(x, y)) : x \in X, y \in Y, \mu_R : X \times Y \to [0,1]\}$$

gdzie: X i Y – zbiory ostre.

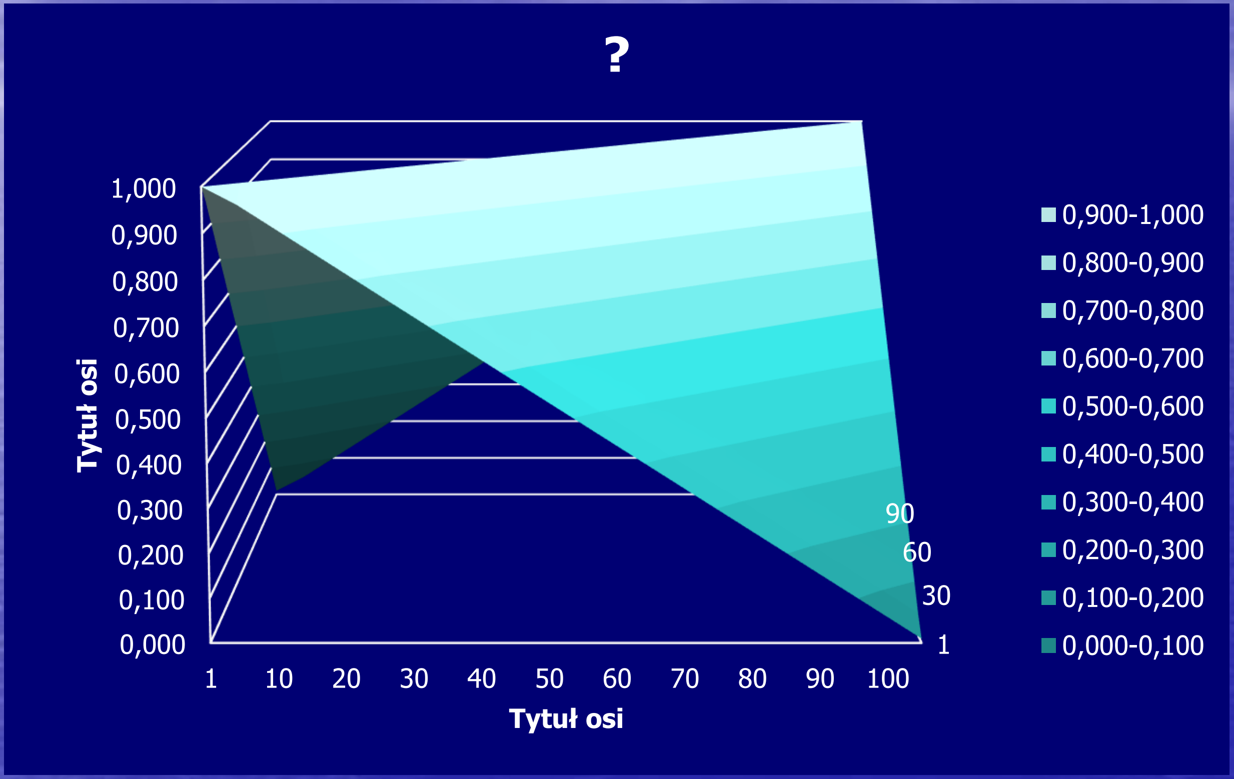
Przykład:

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & .. & .. & \mu_R(x_1, y_m) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_R(x_n, y_1) & \dots & \dots & \mu_R(x_n, y_m) \end{bmatrix}$$

Inna forma zapisu:

$$R = \sum_{X \times Y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)} \quad \text{lub} \quad R = \int_{X \times Y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}$$

Przykład relacji rozmytej

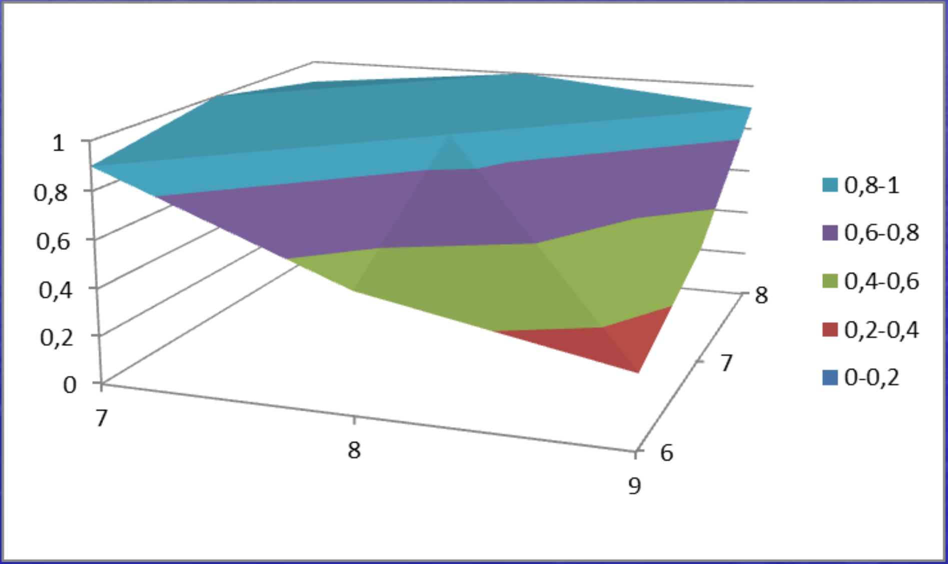


$$\mu_R(x,y) = 1 - \left| w(x) - w(y) \right| / 100,\ \forall x, y \in R$$

Przykład relacji rozmytej dla zbiorów A = {3,4,5} i B = {4,5,6}

Relacja R ⊂ X×Y, która mówi: „B jest mniej więcej równe A”

A\B	7	8	9
6	0,9	0,5	0,3
7	1	0,9	0,5
8	0,9	1	0,9



$$\mu_R(y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ 0{,}9 & , \quad |x-y| = 1 \\ 0{,}5 & , \quad |x-y| = 2 \\ 0{,}3 & , \quad |x-y| = 3 \end{cases}$$

Złożenie relacji rozmytych A, B

Definicja

Złożeniem typu sup-*T* relacji rozmytych $A \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ i $B \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ nazywamy relację rozmytą $A \circ B \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \circ B}(x, z) = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \left\{ \left[\mu_A(x, y) \overset{T}{*} \mu_B(y, z) \right] \right\}$$

Konkretna postać funkcji przynależności $\mu_{A \circ B}(x, z)$ złożenia $A \circ B$ zależy od przyjętej *T*-normy.

Jeżeli jako *T*-normę przyjmiemy *min*, to otrzymamy złożenie typu *sup-min*

$$\mu_{A \circ B}(x, z) = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \left\{ \min \left[\mu_A(x, y), \mu_B(y, z) \right] \right\}$$

Jeżeli zbiór **Y** jest dyskretny, to sprowadza się to do postaci:

$$\mu_{A \circ B}(x, z) = \max_{y \in \mathbf{Y}} \left\{ \min \left[\mu_A(x, y), \mu_B(y, z) \right] \right\}$$

Przykład złożenia relacji rozmytych R i S

$X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{a,b,c\}$, $Z = \{\alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi\}$

Relacja $R \subset X \times Y$, gdzie X jest w relacji z Y

R(x, y)	a	b	c
1	0,4	0,6	0,8
2	0,1	0,8	0,9
3	0,7	0,7	0,7
4	0,8	0,4	0,1

Relacja $R \circ S \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$

X\Z	α	β	χ	δ	ε	ϕ
1	0,4	0,3	0,8	0,6	0,4	0,2
2	0,2	0,3	0,9	0,6	0,3	0,2
3	0,6	0,3	0,7	0,6	0,5	0,2
4	0,6	0,3	0,4	0,4	0,5	0,1

Relacja S, gdzie Y jest w relacji z Z

S(y,z)	α	β	χ	δ	ε	ϕ
a	0,6	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1
b	0,2	0,3	0,5	0,3	0,2	0,1
c	0,1	0,2	0,9	0,6	0,3	0,2

Podstawowe własności relacji rozmytych

I **– macierz jednostkowa,** ***O*** **– macierz zerowa,**
A**,** ***B*****,** ***C*** **– relacje rozmyte**

$A \circ I = I \circ A = A$	Element neutralny
$A \circ O = O \circ A = O$	Element zerowy
$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$	Łączność
$A^m \circ A^n = A^{m+n}$	Relacja potęg
$(A^m)^n = A^{mn}$	Potęgowanie
$A \circ (B \cup C) = (A \circ B) \cup (A \circ C)$	Rozdzielność względem $\cup$
$A \circ (B \cap C) = (A \circ B) \cap (A \circ C)$	Rozdzielność względem $\cap$
$B \subset C \quad \rightarrow \quad A \circ B \subset B \circ C$	Zawierania

Złożenie zbioru rozmytego z relacją rozmytą

Złożenie zbioru rozmytego
A ⊆ **X**
 i relacji rozmytej
R ⊆ **X** × **Y**
oznaczamy przez **A ∘ *R*** i definiujemy jako zbiór rozmyty B ⊆ **Y** :

B = A ∘ *R*

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \mathbf{X}} \left\{ \left[\mu_A(x) \overset{T}{*} \mu_R(x, y) \right] \right\}$$

T-norma oraz właściwości zbioru **X** określają postać funkcji $\mu_B(y)$:

$T(a, b)$	zbiór **X**	typ	$\mu_B(y)$
min(a, b)	ciągły	sup-min	$\sup_{x \in \mathbf{X}} \{\min[\mu_A(x), \mu_R(x, y)]\}$
min(a, b)	dyskretny	max-min	$\max_{x \in \mathbf{X}} \{\min[\mu_A(x), \mu_R(x, y)]\}$
$a \cdot b$	ciągły	sup-iloczyn	$\sup_{x \in \mathbf{X}} \{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\}$
$a \cdot b$	dyskretny	max-iloczyn	$\max_{x \in \mathbf{X}} \{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\}$

Przybliżone wnioskowanie

- **Modus ponens**

  Założenia: A', A->B

$$B' = A' \circ (A \to B)$$

$$gdzie$$

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \left\{ \mu_{A'}(x) \overset{T}{*} \mu_{A \to B}(x, y) \right\}$$

- **Modus tollens**

  Założenia: B', A->B

$$A' = (A \to B) \circ B'$$

$$gdzie$$

$$\mu_{A'}(x) = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \left\{ \mu_{A \to B}(x, y) \overset{T}{*} \mu_{B'}(y) \right\}$$

Modus ponens [2]

- A′ = A
- A′=bardzo A =>
- A′ = mniej więcej A,
- A′ = nie A,

$$\mu_{A'}(x) = \mu_A^2(x)$$

$$\mu_{A'}(x) = \mu_A^{\frac{1}{2}}(x)$$

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Relacja	Stwierdzenie x jest A′	Wniosek y jest B′
1	A	B
2a	Bardzo A	Bardzo B
2b	Bardzo A	B
3a	Mniej więcej A	Mniej więcej B
3b	Mniej więcej A	B
4a	Nie A	Nieokreślone
4b	Nie A	Nie B

Modus tollens [2]

Relacja	Przesłanka y jest B′	Wniosek x jest A′
1	Nie B	Nie A
2	Nie bardzo B	Bardzo A
3	Mniej więcej B	Mniej więcej A
4a	B	Nieokreślone
4b	B	A

Sterownik Mamdaniego

$$\mu_{A \to B}(x, y) = T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

- Reguła minimum – suma mnogościowa
- Reguła typu iloczyn (Larsena) – iloczyn algebraiczny

Reguły rozmytych implikacji

Niech *A* i *B* będą zbiorami rozmytymi, $A \subseteq \mathbf{X}$ oraz $B \subseteq \mathbf{Y}$.
Rozmytą implikacją $A \rightarrow B$ nazywamy relację *R* określoną w $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ i zdefiniowaną za pomocą jednej z poniższych reguł.

1. Reguła typu minimum, tzw. reguła Mamdaniego:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

2. Reguła typu iloczyn, tzw. reguła Larsena:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

A	**B**	**Min(A,B)**	**A*B**	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$
0	0	**0**	**0**	1
0	1	**0**	**0**	1
1	0	**0**	**0**	0
1	1	**1**	**1**	1

Implikacje wnioskowania logicznego

- Kleene-Dienes (binarna)
$$\mu_{A\to B}(x,y)=\max\left(1-\mu_A(x),\mu_B(y)\right)$$
- Łukasiewicz
$$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\left(1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\right)$$
- Reichenbach
$$\mu_{A\to B}(x,y)=1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\mu_B(y)$$
- Fodor
$$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1 & \mu_A\le\mu_B\\ \max(1-\mu_A(x),\mu_B(y)) & \mu_A>\mu_B\end{cases}$$
- Rescher
$$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1 & \mu_A\le\mu_B\\ 0 & \mu_A>\mu_B\end{cases}$$
- Goguen
$$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1 & \mu_A=0\\ \min\left(1,\dfrac{\mu_B}{\mu_A}\right) & \mu_A>0\end{cases}$$
- Gödel
$$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1 & \mu_A<\mu_B\\ \mu_B & \mu_A>\mu_B\end{cases}$$

Implikacje wnioskowania logicznego c.d.

- Yager

$$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1 & \mu_A=0\\ {\mu_B}^{\mu_A} & \mu_A>0\end{cases}$$

- Zadeh

$$\mu_{A\to B}(x,y)=\max(\min\left(\mu_A(x),\mu_B(y)\right),1-\mu_A(x))$$

- Willmott

$$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\begin{cases}\max(1-\mu_A(x),\mu_B(y)\\ \max(\mu_A(x),1-\mu_B(y),\min(1-\mu_A(x),\mu_B(y)))\end{cases}$$

- Dubois-Prade

$$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1-\mu_A(x) & \mu_B(y)=0\\ \mu_B(y) & \mu_A(x)=1\\ 1 & w\ przeciwnym\ przypadku\end{cases}$$

Implikacje wnioskowanie logiczne

- Implikacja binarna $\mu_{A\to B}(x,y) = \max\left(1-\mu_A(x), \mu_B(y)\right)$

A	B	Max(A,B)	$\mu_{A\to B}(x,y)$
0	0	**1**	1
0	1	**1**	1
1	0	**0**	0
1	1	**1**	1

- Implikacja Łukasiewicza

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \min\left(1, 1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\right)$$

A	B	1-A+B	Min(.)	$\mu_{A\to B}(x,y)$
0	0	1	**1**	1
0	1	2	**1**	1
1	0	0	**0**	0
1	1	1	**1**	1

Implikacje wnioskowanie logiczne

- Implikacja Reichenbach

$$\mu_{A\to B}(x,y) = 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)$$

A	B	$1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)$	$\mu_{A\to B}(x,y)$
0	0	**1**	1
0	1	**1**	1
1	0	**0**	0
1	1	**1**	1

- Implikacja Fodor

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \begin{cases} 1 & \mu_A \le \mu_B \\ \max(1-\mu_A(x), \mu_B(y)) & \mu_A > \mu_B \end{cases}$$

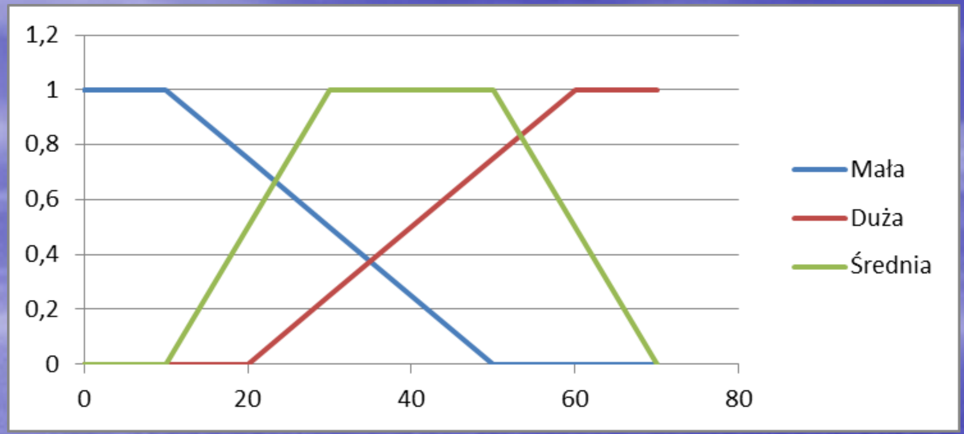
A	B		$\mu_{A\to B}(x,y)$
0	0	**1**	1
0	1	**1**	1
1	0	**0**	0
1	1	**1**	1

Zastosowania

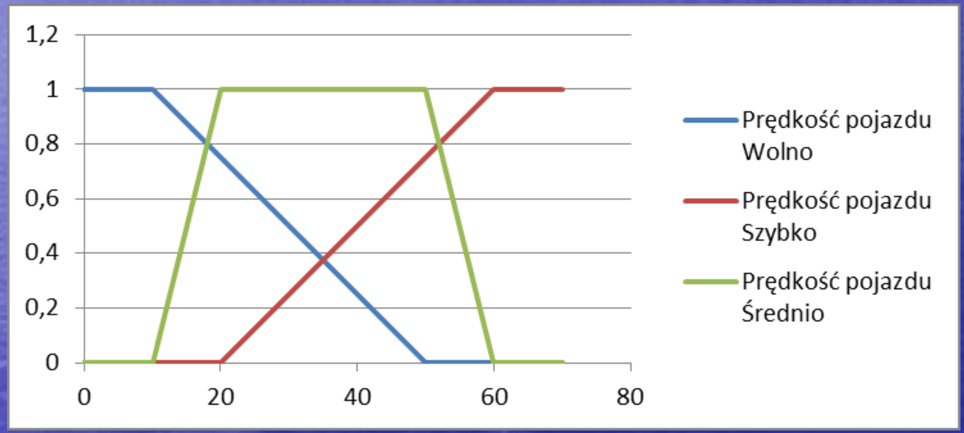
- rozpoznawanie obrazów, przetwarzanie obrazów, diagnostyka techniczna, analiza uszkodzeń, komputerowe wspomaganie decyzji, sterowanie złożonymi procesami
- sterowanie ciśnieniem pary w kotłach i szybkością silnika parowego Mamdani 1974
- sterowanie procesem grzewczym wody Lemke i Kikert 1976
- sterowanie ruchem ulicznym Pappis i Mamdani 1977
- autopilot statków ze wspomaganiem systemu rozmytego van Amerongen Lemke van der Veen 1977
- instalacja przemysłowa pieców obrotowych w cementowni Larsen 1980
- Matsushita Electrical - pralki automatyczne (lata 1980) - wykorzystanie sensorów, zależność długości prania oraz ilości detergentów od wielkości ładunku (ciężaru) i od stopnia zabrudzenia mierzonej sensorami
- Matsushita Electrical - odkurzacz - stopień ssania od stopnia zabrudzenia odkurzanej powierzchni

Zastosowania

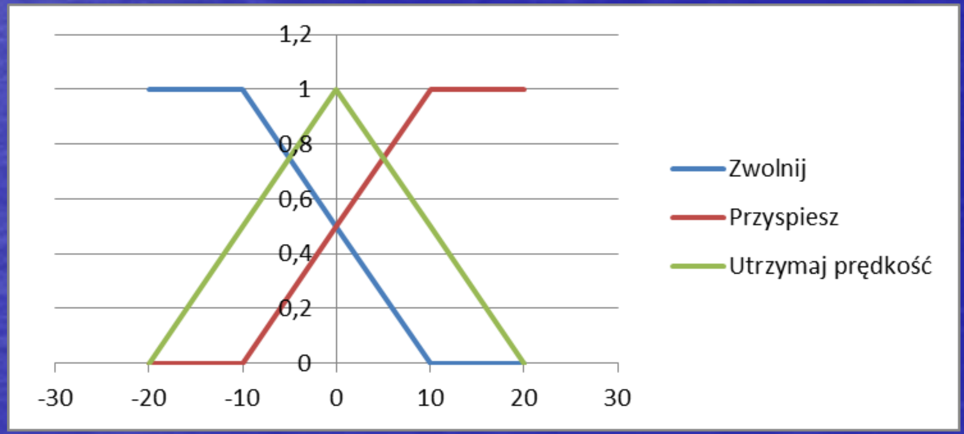
- Mitsubishi Heavy Industry - system klimatyzacji pomieszczeń - obniżenie zużycia energii o 24% w stos. do standardowej proc. klimatyzacji
- Sanyo Fisher - kamera 8 mm z automatyką ogniskowania i określania warunków oświetlenia
- Matsushita - elektroniczny stabilizator obrazu
- Sugeno - model helikoptera bezzałogowego (lata 90-te) - reagującego na rozmyte rozkazy przekazywane drogą radiową
- automatyczne przekładnie biegów, układów blokowania hamulcach
- wspomaganie diagnostyki medycznej, w lingwistyce i ekonomii...



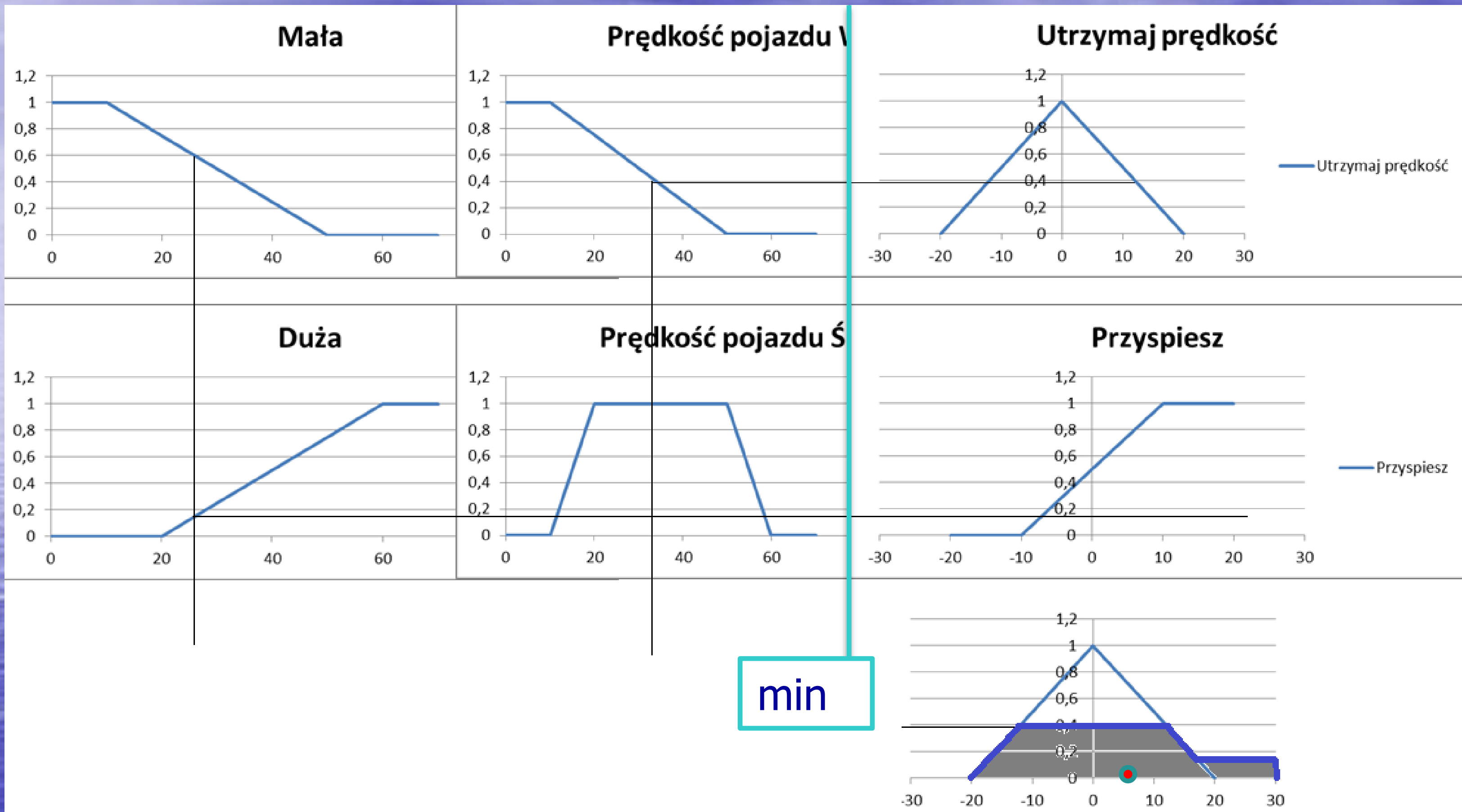
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
20
40
60
80
Mała
Duża
Średnia



1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
20
40
60
80
Prędkość pojazdu Wolno
Prędkość pojazdu Szybko
Prędkość pojazdu Średnio



1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-30
-20
-10
0
10
20
30
Zwolnij
Przyspiesz
Utrzymaj prędkość


Mała
Prędkość pojazdu V
Utrzymaj prędkość
Utrzymaj prędkość
Duża
Prędkość pojazdu Ś
Przyspiesz
Przyspiesz
min