Zbiory rozmyte

Zbiory ostre

Przyjmijmy, że *U* jest przestrzenią rozważanych obiektów.
Zbiorem ostrym nazywamy taki zbiór, który charakteryzuje następująca zależność:

$$\mu_w : U \Rightarrow \{0,1\}$$

gdzie indeks *w* oznacza zbiór obiektów.
Niech *A* oznacza zbiór odpowiadający pewnej właściwości. Funkcja przynależności jest wówczas określona następująco:

$$\forall_{u \in U} \mu_A(u) = \begin{cases} 1 & dla\ u \in A \\ 0 & dla\ u \notin A \end{cases}$$

Zbiory rozmyte

Lotfi Zadeh (1965)

Zbiorem rozmytym jest taki zbiór obiektów, gdzie poszczególne elementy mogą w pełni należeć do tego zbioru, wcale nie należeć lub należeć w pewnym stopniu.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

Notacja zbioru rozmytego: $\mu_A | x$

Przykładowa funkcja przynależności dla zbioru wysoka temperatura (WT) dająca zbiór rozmyty przedstawia się następująco:

$$WT = \{(u, \mu_{WT}(u) | u \in \Re)\}$$

$$\mu_{WT}(u) = \begin{cases} 0 & dla\ u \le 1 \\ \dfrac{(u-1)^2}{u^2 - u} & dla\ u > 1 \end{cases}$$

Zbiory rozmyte - terminologia

- Zbiór konwencjonalne (dystrybutywne) – zbiory ostre (*crisp set*)
- Nośnik (*support*) zbioru rozmytego – zbiór ostry złożony z tych elementów uniwersum, które należą tego zbioru rozmytego w niezerowym stopniu:

$$A = supp\ \{x : \mu_A(x) > 0\}$$

- Pusty zbiór rozmyty – żaden element uniwersum nie należy do tego zbioru (nośnik zbioru pustego jest pustym zbiorem ostrym)
- Punkt rozgraniczenia (*crossover point*) – taki element *x* zbioru rozmytego *A*, że: $\mu_A(x)=0.5$
- Jądro (*kernel*) lub nukleus (*nucleus*) zbioru rozmytego *A* – zbiór ostry tych elementów, które w pełni należą do *A* (należą w stopniu równym 1) (oznaczenie: *ker*(A))

Zbiory rozmyte - terminologia

- Wysokość zbioru rozmytego (*height*) – liczba będąca supremum wartości funkcji przynależności zbioru rozmytego *A*

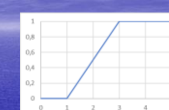
$$hgt(A) = sup\ \mu_A(x)$$

- Zbiór rozmyty normalny – wysokość wynosi 1. Normalizacja zbioru polega na podzieleniu funkcji przynależności przez wysokość zbioru.

Klasy funkcji przynależności

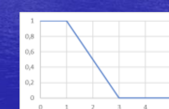
- **funkcje klasy** Γ:

$$\Gamma_{a,b}(u) = \begin{cases} 0 & dla\ u \le a \\ \dfrac{u-a}{b-a} & dla\ a < u \le b \\ 1 & dla\ u > b \end{cases}$$



- funkcje klasy *L*:

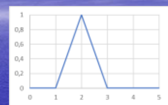
$$L_{a,b}(u) = \begin{cases} 1 & dla\ u \le a \\ \dfrac{b-u}{b-a} & dla\ a < u \le b \\ 0 & dla\ u > b \end{cases}$$



Klasy funkcji przynależności

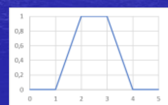
- funkcje klasy Λ:

$$\Lambda_{a,b,c}(u)=\begin{cases}0 & dla\, u\le a \vee u\ge c\\ \frac{u-a}{b-a} & dla\, a<u\le b\\ \frac{c-u}{c-b} & dla\, b<u<c\end{cases}$$



- funkcje klasy Π:

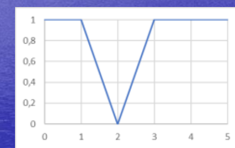
$$\Pi_{a,b,c,d}(u)=\begin{cases}0 & dla\ u\le a \vee u\ge d\\ \frac{u-a}{b-a} & dla\ a<u\le b\\ 1 & dla\ b<u\le c\\ \frac{d-u}{d-c} & dla\ c<u<d\end{cases}$$



Klasy funkcji przynależności

- funkcje klasy V:

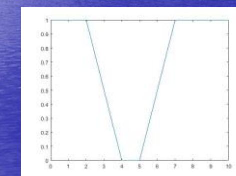
$$V_{a,b,c}(u)\ =1-\ \Lambda_{a,b,c}(u)$$



Klasy funkcji przynależności

- funkcje klasy U:

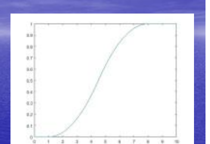
$$U_{a,b,c,d}(u)\ =1-\ \Pi_{a,b,c,d}(u)$$



Klasy funkcji przynależności

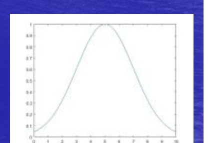
- funkcje klasy s:

$$s_{a,b}(u)=\begin{cases}0 & dla\, u\le a\\ 2\cdot\left(\frac{u-a}{b-a}\right)^2 & dla\, a<u\le\frac{a+b}{2}\\ 1-2\cdot\left(\frac{u-b}{b-a}\right)^2 & dla\,\frac{a+b}{2}<u\le b\\ 1 & dla\, u\ge b\end{cases}$$



- funkcje klasy π:

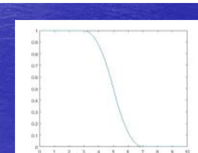
$$\pi_{b,c}(u)=\begin{cases}s_{c-b,c}(u) & dla\ u<c\\ 1-s_{c,c+b}(u) & dla\ u\ge c\end{cases}$$



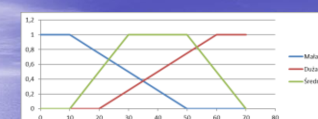
Klasy funkcji przynależności

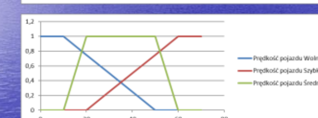
- funkcje klasy z:

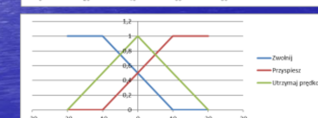
$$z_{a,b}(u)=1-s_{a,b}(u)\ =\begin{cases}1 & dla\ u\le a\\ 1-2\cdot\left(\frac{u-a}{b-a}\right)^2 & dla\ a<u\le\frac{a+b}{2}\\ 2\cdot\left(\frac{u-b}{b-a}\right)^2 & dla\frac{a+b}{2}<u\ <b\\ 1 & dla\ u\ge b\end{cases}$$



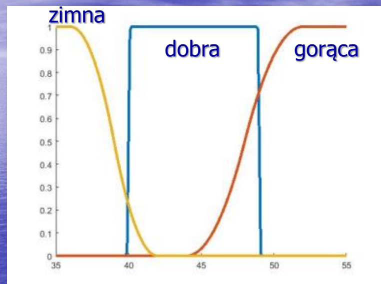
Przykład wykorzystania funkcji przynależności







Przykład wykorzystania funkcji przynależności



Podstawowe operacje mnogościowe na zbiorach

- dopełnienie

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

- suma

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \;\; (Max)$$

- iloczyn

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \;\; (Min)$$

- różnica

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \min\left(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\right)$$

Właściwości zbiorów rozmytych

- wypukłość

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

- wklęsłość

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

Własności zbiorów

- jeśli A jest wklęsłe to dopełnienie jest wklęsłe
- funkcja monotoniczna jest wypukła i wklęsła
- moc zbioru rozmytego

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)$$

- relatywna moc zbioru

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|} \quad \Rightarrow \quad \|A\| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)$$

Własności zbiorów rozmytych

- równość A=B, jeśli:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

- zawieranie się zbiorów rozmytych $A \subseteq B$:

$$\forall_{x \in U} \; \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

Liczba rozmyta

Liczbą rozmytą typu *L* nazwiemy wypukły i znormalizowany zbiór rozmyty z przestrzeni *R* taki, że istnieje dokładnie jedno

$$x_0 \in \Re, \mu_{L_1}(x_0) = 1$$

x_0 jest nazywane średnią wartością *L* (są również rozważane przypadki, dla których x_0 jest przedziałem).

Rozmytość a prawdopodobieństwo

Interpretacje prawdopodobieństwa:

- Prawdopodobieństwo jest własnością zdarzeń i reprezentuje częstość z jaką zdarzenie te zachodzą.
- Interpretacja logiczna – iloraz liczby zdarzeń należących do danego zdania w stosunku do liczby wszystkich zdarzeń.
- Interpretacja subiektywna – stopień przekonania o prawdziwości zdania.

Rozmytość a prawdopodobieństwo

1. Zdarzenia to zbiory ostre natomiast niepewność dotyczy przypadkowości zajścia danego zdarzenia.
2. Rozmytość to niepewność związana z określeniem przynależności danego elementu do zbioru.
3. Prawdopodobieństwo charakteryzuje się addytywnością do maksymalnej wartości.
4. Rozmytość to ocena – brak wymagań dotyczących addytywności i unormowania.

Prawdopodobieństwo zdarzenia rozmytego

Prawdopodobieństwo zdarzenia rozmytego:

$$p(A) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot \mu_A(\omega)$$

gdzie $P(\omega)$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego.

Metody procesu defuzyfikacji

- Metoda maksimum funkcji przynależności
- Metoda środka ciężkości
- Metoda średniej ważonej maksimów

Metoda maksimum funkcji przynależności

- Metoda ta może być stosowana dla unimodalnych funkcji przynależności.
- Ten sposób wyznaczania wartości wyjściowej nie uwzględnia kształtu funkcji przynależności.

$$\mu(u_o) = \sup_{u \in U} \mu(u)$$

Metoda wyznaczania środka ciężkości (ang. center of gravity, center of area)

Wartość wyjściowa wyznaczana jest jako środek ciężkości figury opisanej funkcją przynależności $\mu(u)$

$$u_{COG} = \frac{\int \mu_A(u) u \, du}{\int \mu_A(u) \, du}$$

W przypadku dyskretnym:

$$u_{COG} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu_A(u_k) u_k}{\sum_{k=1}^{N} \mu_A(u_k)}$$

Przybliżona reprezentacja wiedzy
(niepewna reprezentacja wiedzy)

Wnioskowanie przybliżone polega na stosowaniu:
- Dokładnych reguł i przybliżonych przesłanek
- Przybliżonych reguł i dokładnych przesłanek
- Przybliżonych reguł i przybliżonych przesłanek

(wnioskowanie dokładne: dokładne reguły i dokładne przesłanki)

Źródła niepewności:
- Losowość uwzględnianych zdarzeń
- Odchylenia pomiarowe
- Istnienie ukrytych cech (pomijanych) lub parametrów powodujących losowy charakter zjawisk opisywanych niekompletnym zbiorem zmiennych
- Brak odpowiedniej wiedzy lub występujące w niej sprzeczności

Etapy zastosowania wnioskowania przybliżonego

Metody określania:
- niepewności stwierdzeń przybliżonych
- niepewności przybliżonych reguł wnioskowania
- niepewności przesłanek złożonych z kilku stwierdzeń przybliżonych
- niepewności konkluzji wynikających z przybliżonych przesłanek i przybliżonych reguł
- niepewności konkluzji wyznaczanej za pomocą kilku niezależnych reguł przybliżonych

Algorytm wnioskowania rozmytego

1. Wyznacz wartości funkcji przynależności dla poszczególnych pojęć rozmytych występujących w warunkach reguł.
2. Na podstawie funkcji przynależności wyznacz obszary rozmyte odpowiadające zmiennej zawartej w konkluzji reguły.
3. Dokonaj zestawienia obszarów rozmytych wyznaczonych w punkcie 2.
4. Na podstawie otrzymanych obszarów rozmytych, wyznacz wynikowy obszar rozmyty.
5. Dokonaj defuzyfikacji wynikowego obszaru rozmytego.

Podstawowe operacje mnogościowe na zbiorach

- dopełnienie

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

- suma

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

- iloczyn

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

- różnica

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \min\left(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\right)$$

Operacje algebraiczne

- iloczyn

$$\mu_{A \circ B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

- suma

$$\mu_{A \square B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

- różnica

$$\mu_{A - B}(x) = \mu_A(x) \cdot \left(1 - \mu_B(x)\right)$$

Operacje logiczne

- iloczyn

$$\mu_{A \otimes B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$$

- suma

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$$

- różnica

$$\mu_{A \ominus B}(x) = \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x))$$

Operacje drastyczne

- iloczyn

$$\mu_{A \dot\wedge B}(x) = \begin{cases} 0 \quad dla\ \mu_A < 1, \mu_B < 1 \\ \mu_A \qquad\quad \mu_B = 1 \\ \mu_B \qquad\quad \mu_A = 1 \end{cases}$$

- suma

$$\mu_{A \dot\vee B}(x) = \begin{cases} 1 \quad dla\ \mu_A > 0, \mu_B > 0 \\ \mu_A \qquad\quad \mu_B = 0 \\ \mu_B \qquad\quad \mu_A = 0 \end{cases}$$

Operacje drastyczne

- różnica

$$\mu_{A \dot- B}(x) = \begin{cases} 0 \quad dla\ \mu_A < 1, \mu_B > 0 \\ \mu_A \qquad\quad \mu_B = 0 \\ 1 - \mu_B \qquad \mu_A = 1 \end{cases}$$