Zadanie 2–4

Patryk Lisik

15 Grudnia 2023

Treść

Znajdź prawdopodobieństwa warunkowe $\Pr(X = x_i|Y = y_j)$ dla binarnego kanału wymazującego o prawdopodobieństwie wymazania $\Pr(Y = ?|X = 0) = \Pr(Y = ?|X = 1) = 0.469$, jeżeli prawdopodobieństwa nadania wiadomości ze źródła są $\Pr(X = 0) = 0.25$ i $\Pr(X = 1) = 0.75$. Znajdź ekwiwokację, informację wzajemną i pojemność kanału.

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwa warunkowe:

$$
\begin{aligned}
\Pr(X = 0|Y = 0) = && 0.531 \cdot 0.25 =& 0.13275 \\
\Pr(X = 0|Y = 1) && =& 0.0 \\
\Pr(X = 0|Y = ?) = && 0.469 \cdot 0.25 =& 0.11725 \\
\Pr(X = 1|Y = 0) && =& 0.0 \\
\Pr(X = 1|Y = 1) = && 0.531 \cdot 0.75 =& 0.39825 \\
\Pr(X = 1|Y = ?) = && 0.469 \cdot 0.75 =& 0.35175
\end{aligned}
$$

Ekwiwokacja:

$$
\begin{aligned}
&q_0 = \Pr(X=0|Y=0) \\
&q_1 = \Pr(X=1|Y=1) \\
&q_? = \Pr(X=0|Y=?) + \Pr(X=1|Y=?) = 0.469 \\
&H(X|Y) = \sum_j q_j H(X, y_j) = q_0 H(X, y_0) + q_1 H(X, y_1) + q_1 H(X, y_?) = \\
&= q_0 \left(-\Pr(X=0|Y=0)\log_2 \Pr(X=0|Y=0) + \Pr(X=0|Y=1)\log_2 \Pr(X=0|Y=1)\right) + \\
&+ q_1 \left(-\Pr(X=1|Y=1)\log_2 \Pr(X=1|Y=1) + \Pr(X=1|Y=0)\log_2 \Pr(X=1|Y=0)\right) + \\
&+ q_? \left(-\Pr(X=0|Y=?)\log_2\ \Pr(X=0|Y=?) - \Pr(X=1|Y=?)\log_2\ \Pr(X=1|Y=?)\right) \\
&= 0.13275 \cdot (-0.13275 \cdot \log_2 0.13275 + 0) + 0.39825 \cdot (-0.39825 \cdot \log_2 0.39825 + 0) \\
&+ 0.469 \cdot (-0.11725 \cdot \log_2 0.11725 - 0.35175 \cdot \log_2 0.35175) \\
&= 0.051 + 0.211 + 0.419 = 0.681
\end{aligned}
$$

Dlaczego $0 \cdot \log_2 = 0$?

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = \frac{\log x}{x^{-1}} \overset{\text{H}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{x^{-2}} = x = 0$$

W tym działaniu wyobrażamy sobie $x \log x$ jako funkcję

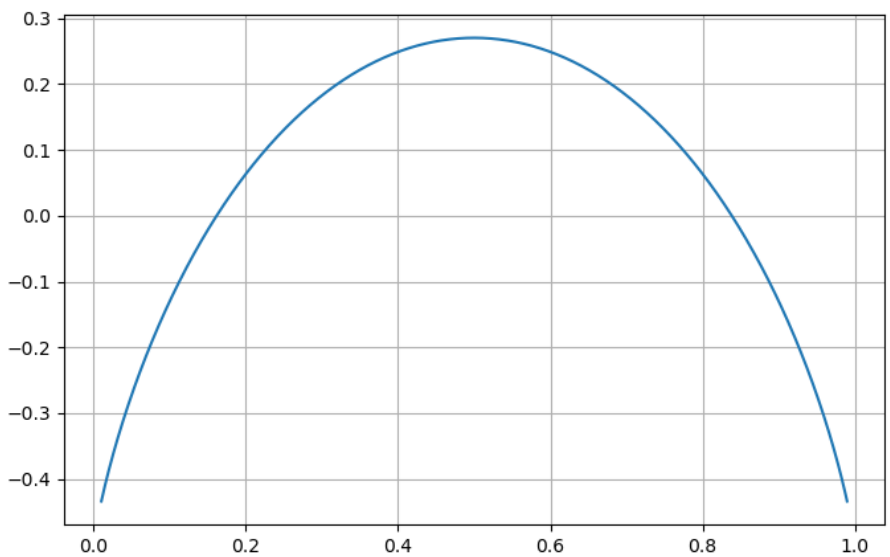
$$x \log x = \begin{cases} x \log x & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Informacja wzajemna:

$$
\begin{aligned}
&I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \\
&H(X) = -\sum_i p_i \log_2 p_i = -0.25 \cdot \log_2 0.25 - 0.75 \cdot \log_2 0.75 = 0.811 \\
&I(X;Y) = 0.811 - 0.681 = 0.13
\end{aligned}
$$

Pojemność kanału:

Na rysunku 1 widać że podobnie jak dla BSC dla kanału Γ z zadania $C = \max I(X;Y) \iff p_0 = p_1 = 0.5$. Dla $p = 0.5 \quad I(X;Y) = 0.27$



Rysunek 1: Informacja wzajemna w zależności od p. Zakładamy że $p_0 = p \quad p_1 = 1 - p$