Zadanie 2–1

Patryk Lisik

12 Grudnia 2023

Treść

Dla dwóch jednakowych binarnych kanałów symetrycznych połączonych szeregowo i przedstawionych na rysunku 1 wyznacz macierz prawdopodobieństw warunkowych w przód $P_{ij} = \Pr(Y = y_j | X = x_i)$ kanału ($x_i = 0, 1; y_j = 0, 1$). Jakie są prawdopodobieństwa wyjściowe $q_j = \Pr(Y = y_j)$ kanału, jeżeli $p_0 = \Pr(X = 0) = x, p_1 = \Pr(X = 1) = 1 - x$? Wyznacz macierz prawdopodobieństw warunkowych wstecz $Q_{ij} = \Pr(X = x_i | Y = y_j)$ kanału oraz macierz prawdopodobieństw łącznych $\mathrm{R}_{ij} = \Pr(X = x_i, Y = y_j)$.

Rozwiązanie

Macierz w przód P_{ij}

$$\begin{pmatrix} (1-p)(1-p) + p \cdot p & (p \cdot (1-p)) + (1-p) \cdot p \\ (p \cdot (1-p)) + (1-p) \cdot p & (1-p)(1-p) + p \cdot p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p^2 - 2p + 1 & 2p - 2p^2 \\ 2p - 2p^2 & 2p^2 - 2p + 1 \end{pmatrix}$$

Łatwo zauważyć że $P = -2p^2 + 2p$

Prawdopodobieństwo wyjściowe

$$q_0 = xP_{00} + (1-x)P_{10} = 4p^2 - 2p^2 - 4px + 2p + x$$
$$q_1 = (1-x)P_{11} + xP_{01} = -2p^2 + 2p + x - 1$$

Macierz prawdopodobieństwo wstecz Q_{ij}

$$Q_{ij} = \frac{p_i}{q_j} P_{ij}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{p_0}{q_0} P_{00} & \frac{p_1}{q_0} P_{10} \\ \frac{p_0}{q_1} P_{01} & \frac{p_1}{q_1} P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x(2p^2-2p+1)}{4p^2x-2p^2-4px+2p+x} & \frac{(1-x)(2p-2p^2)}{4p^2x-2p^2-4px+2p+x} \\ \frac{x(2p-2p^2)}{-2p^2+2p+x-1} & \frac{(1-x)(2p^2-2p+1)}{-2p^2+2p+x-1} \end{pmatrix}$$

Macierz prawdopodobieństwo łącznych:

$$R_{ij} = p_i P_{ij}$$

$$R = \begin{pmatrix} p_0 P_{00} & p_1 P_{10} \\ p_0 P_{01} & p_1 P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(2p^2 - 2p + 1) & (1-x)(2p - 2p^2) \\ x(2p - 2p^2) & (1-x)(2p^2 - 2p + 1) \end{pmatrix}$$