Zadanie 2–2

Patryk Lisik

12 Grudnia 2023

Treść

Pokaż, że dla niesymetrycznego kanały binarnego z rysunku 1, gdzie

$$Pr(X = 0) = x \quad Pr(X = 1) = 1 - x$$

oraz

$$\Pr(Y = 0|X = 0) = 1 - p \qquad \Pr(Y = 1|X = 0) = p$$
$$\Pr(Y = 0|X = 1) = q \qquad \Pr(Y = 1|X = 1) = 1 - q$$

informacja wzajemna dana jest wzorem

$$I(X; Y) = \Omega((1 - p)x + q(1 - x)) - x\Omega(p) - (1 - x)\Omega(q)$$

gdzie

$$\Omega(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x)$$

Rozwiązanie

$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$
$q_0 = x(1 - p) + (1 - x)q$
$q_1 = (1 - x)(1 - q) + xp = 1 - x + px - q - xq$
$H(Y) = -\sum_j q_j \log_2 q_j = -q_0 \log_2 q_0 - q_1 \log_2 q_1$
$= x(1 - p) + q(1 - x) \log_2(x(1 - p) + q(1 - x)) - (1 - x + px - q - xq) \log_2(1 - x + px - q - xq)$
$= \Omega((1 - p)x + q(1 - x))$

$$H(Y|X) = \sum_i p_1 H(Y|x_1) = p_0 H(Y|x_0) + p_1 H(Y|x_1)$$

$$p_0 H(Y|x_0) = x \left(\sum_i \Pr(y_1|x_0) \log_2 \Pr(y_1|x_0) \right)$$

$$= x(\Pr(y_0|x_0) \log_2 \Pr(y_0|x_0) + \Pr(y_1|x_0) \log_2 \Pr(y_1|x_0))$$

$$= x\Omega(p)$$

$$p_1 H(Y|x_1) = (1-x) \left(\sum_i \Pr(y_i|x_1) \log_2 \Pr(y_i|x_1) \right)$$

$$(1-x)(\Pr(y_0|x_1) \log_2 \Pr(y_0|x_1) + \Pr(y_1|x_1) \log_2 \Pr(y_1|x_1))$$

$$= (1-x)\Omega(q)$$