Feder-Dämpfer System

In dieser Aufgabe soll das Verhalten des in Abbildung 1 dargestellten Masse-Feder-Dämpfer Systems in Matlab modelliert und simuliert werden.

Modellierung

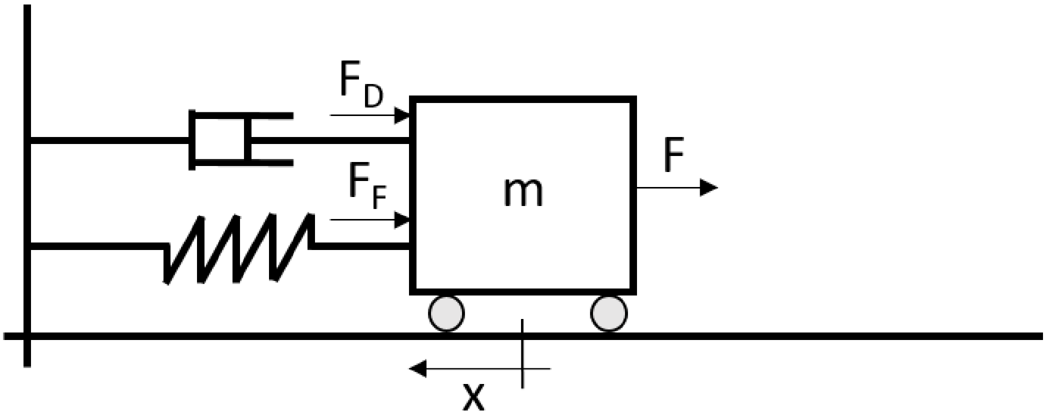

Abbildung 1: Einfaches Masse-Feder-Dämpfer System

Dazu kann zunächst unter Vernachlässigung von Reibung die folgende Kräftebilanz aufgestellt werden:

$$F_T = -F_D - F_F - F \tag{1}$$

Die Trägheitskraft F_T setzt sich als Summe aus Federkraft F_F Dämpferkraft F_D und einer äußeren angreifenden Kraft F nach Gleichung 1 zusammen.

$$F_T = m \cdot \ddot{x} \tag{2}$$
$$F_D = d \cdot \dot{x} \tag{3}$$
$$F_F = c \cdot x \tag{4}$$
$$F = F(t) \tag{5}$$

In den beschreibenden Gleichungen bezeichnet m die Masse des Objekts, d die Dämpfungskonstante, c die Federkonstante, $x = x(t)$ den Ort, $\dot{x} = \dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit und $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ die Beschleunigung der Masse. Durch Einsetzen von Gleichung 2 bis 4 in 1 erhält folgende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$m \cdot \ddot{x} = -d \cdot \dot{x} - c \cdot x - F \tag{6}$$

Durch normieren von Gleichung 6 nach der Objektmasse m ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{x} = -\left(\frac{d}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x + \frac{F}{m}\right) \tag{7}$$

Um Matlabs ode-Solver* zum Lösen der beschreibenden Gleichung verwenden zu können, muss diese zunächst in ein System erster Ordnung überführt werden†. Mit Einführung der Variablen v als Geschwindigkeit‡, kann Gleichung 7 in ein Diffentialgleichungssystem erster Ordnung überführt werden:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{v} &= -\left(\frac{d}{m} \cdot v + \frac{c}{m} \cdot x + \frac{F}{m}\right) && (8) \\ \dot{x} &= v && (9) \end{aligned}}$$

Mit Einführung des Zustandsvektors

$$y = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \tag{10}$$

kann das Differentialgleichungssystem 8 und 9 in die allgemeinen Form eines Anfangswertproblem (AWP) 11 geschrieben werden

$$\dot{y} = f\left(y\right) = f\left(y\left(x, v\right)\right), \;\; y(0) = y_0 \tag{11}$$

*ode = **o**rdinary **d**ifferential **e**quations

†Matlabs solver verlangen Systeme erster Ordnung

‡$\dot{x} = v \rightarrow \ddot{x} = \dot{v}$