学院__________姓名 __________ 学号____________任课老师________考场教室_________选课号/座位号_________

………密………封………线………以………内………答………题………无………效……

得 分

一、填空题（共 30 分，共 6 题，每空 2 分）

1. 拉普拉斯方程在球坐标系下可表示为 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$，分离变量时，令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，其中 $R(r)$ 满足____方程；$Y(\theta,\varphi)$ 满足_______方程；将变量 θ，φ 进一步分离，令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，则 $\Theta(\theta)$ 满足______方程，$\Phi(\varphi)$ 满足方程___。（方程写名称或形式均可）
2. 在 $[-1,1]$ 的区间内将 x^2 按勒让德多项式展开，可得_________。
3. 贝塞尔方程有两个特解 $J_v(x)$ 和 $J_{-v}(x)$，当 v 为整数时，两者________；当 v 不等于 0 或整数时，第二类柱函数的定义 N_v =_ __；第三类柱函数的定义 $H_v^{(1)}$ =___________，$H_v^{(2)}$ =________。
4. 第一类修正（虚宗量）贝塞尔函数 $I_v(x)$ 与贝塞尔函数 $J_v(x)$ 的关系是_________，当 $x\to 0$ 时：$I_0(0)=$___ __，$I_v(0)=$___ ___ $(v\neq 0)$。
5. 0 阶球贝塞尔函数函数的初等函数可以表示为 $j_0(x)=$________。

得 分

二、写出下列定解问题的本征值问题。求出本征函数和本征值，并给出问题的通解（不要求积分确定系数的值）。（共 24 分）

1. 球坐标系下定解问题 $\begin{cases}\nabla^2 u=0 \quad (r<r_0)\\ u|_{r=r_0}=f(\theta)\\ u|_{r=0}\ \text{有限}\end{cases}$ （8 分）

解：

-----3分

2. 半圆形薄膜的振动问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0 & 0 \le \rho < R, 0 \le \varphi \le \pi \\ u\big|_{\rho=R} = 0 & u\big|_{\rho=0} \text{有限} \\ u\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=\pi} = 0 & \\ u\big|_{t=0} = f_1(\rho,\varphi) & \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(\rho,\varphi) \end{cases}$ （10 分）

解：

3. $\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad (0 < z < h, \rho < l) \\ k\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=l} = q_0, \ u\,|_{\rho=0} \text{有限} \\ u\,|_{z=0} = 0, \quad u\,|_{z=h} = 0 \end{cases}$ （6 分）

得 分

三、证明题（共 16 分）

1. $\int_{-1}^{1} P_l(x)dx = 0 \quad (l = 1, 2, 3\ldots)$ （8 分）

2. 证明 $x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$ 。(8 分)

得 分

四、计算题（ 共 30 分）

1. 在球坐标系下利用分离变量法求解下列定解问题。

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \qquad (r > a, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi) \\ u\big|_{r=r_0} = \sin^2\theta\cos^2\varphi \end{cases}$$

（15 分）

2. 在柱坐标系下利用分离变量法求解下列定解问题。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ u\big|_{\rho=a} = 0, \quad u\big|_{\rho=0} \text{ 解有限} \\ u\big|_{z=0} = 0, \quad u\big|_{z=h} = A \end{cases}$$

（15 分）

[提示：第一类齐次边界条件下，贝塞尔函数的模$N_i^{(m)}$满足$\left[N_i^{(m)}\right]_1^2 = \int_0^l \rho\left[J_m(\frac{p_i^{(m)}}{l}\rho)\right]^2 d\rho = \frac{1}{2}l^2\left[J_{m+1}(p_i^{(m)})\right]^2$]