学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

得 分
一、

一、填空题（每空 2 分，共 40 分）

1. 球坐标系下，对拉普拉斯方程 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$ 分离变量，令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，其中变量 r 的函数 $R(r)$ 满足 欧拉 方程；变量 θ，φ 的函数 $Y(\theta,\varphi)$ 满足 球函数 方程；将变量 θ，φ 进一步分离，令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，则变量 θ 的函数 $\Theta(\theta)$ 满足 连带勒让德 方程，轴对称情况下，变量 θ 的函数 $\Theta(\theta)$ 满足 勒让德 方程。（要求写出方程名称）

2. 已知 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，则 $P_2(x)=$ $\frac{1}{2}(3x^2-1)$；将函数 $f(x)=3x^2+5x-\frac{1}{2}$ 以 $P_l(x)$ 为基，作广义傅里叶级数展开，结果为 $f(x)=$ $\frac{1}{2}P_0(x)+5P_1(x)+2P_2(x)$。

3. 对于球函数，若 $m=n$、$l\neq k$，则 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y_l^m(\theta,\varphi)Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=$ 0 ；若 $m\neq n$、$l=k$，则 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y_l^m(\theta,\varphi)Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=$ 0 。

4. 对于 n 阶贝塞尔函数 $J_n(x)$，$J_0(0)=$ 1 ，$J_n(0)(n\neq 0)=$ 0 。

5. $J_n(x)$ 和 $N_n(x)$ 分别为 n 阶贝塞尔函数和 n 阶诺依曼函数，则有 $H_n^{(1)}(x)=$ $J_n(x)+iN_n(x)$，$H_n^{(2)}(x)=$ $J_n(x)-iN_n(x)$。

6. 虚宗量贝塞尔函数 $I_n(x)$ 与贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的关系是 $I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$，当 n 为整数，$I_n(x)$ 与 $I_{-n}(x)$ 关系为 $I_{-n}(x)=I_n(x)$。当 x→0 时，$I_0(0)=$ 1 ，$I_n(0)=$ 0 $(n\neq 0)$。虚宗量汉克尔函数 $K_n(x)$ 与第一类修正贝塞尔函数 $I_n(x)$ 的关系为 $K_n(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(x)-I_n(x)}{\sin n\pi}$，$K_n(x)$ 在原点处具有 发散 特性 。

7. 亥姆霍兹方程在球坐标系进行变量分离：$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$。其中变量 r 的函数 $R(r)$ 满足 球贝塞尔 方程，变量 θ 满足的方程的解为 $P_l^m(\cos\theta)$ 。

得 分

二、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 勒让德多项式是个无穷级数。 (×)
2. P_l^m 与 $P_l^{[m]}$ 之间的关系为 $P_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}P_l^{[m]}(x)$。 (√)
3. m 阶贝塞尔方程的两个特解 $J_m(x)$ 和 $J_{-m}(x)$ 线性无关(m 为自然数)。 (×)
4. m 阶贝塞尔函数是无穷衰减振荡函数，具有无穷多个实数零点。 (√)
5. Hankel 函数具有行波特性，主要用于讨论开空间波的传播和散射问题。 (√)

得 分

三、在球坐标系下利用分离变量法求解下列定解问题（共 10 分）

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0 \qquad (0<r<1)\\ u\big|_{r=1}=\cos^2\theta+2\cos\theta\end{cases}$$

解：轴对称、球内问题，通解为 $u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(c_l r^l+d_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta)$ ---------3 分

球内问题，d_l=0

通解简化为 $u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^l P_l(\cos\theta)$ --------------1 分

带入边界条件：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l P_l(\cos\theta)=\cos^2\theta+2\cos\theta=x^2+2x=\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)+2P_1(\cos\theta)+\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)$$

所以： $c_0=\frac{1}{3},c_1=2,c_2=\frac{2}{3}$ ----------4 分

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+2rP_1(\cos\theta)+\frac{2}{3}r^2P_2(\cos\theta)$$ ---------2 分

得 分

四、在球坐标系下利用分离变量法求解下列定解问题。（共 14 分）

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \qquad (r > a, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi) \\ u\big|_{r=r_0} = \sin^2\theta\cos^2\varphi \end{cases}$$

解：通解为

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(A_l^m r^l + B_l^m r^{-(l+1)})\left[C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)$$

----------4 分

考虑$u|_{r\to\infty}$ 有限值$\Rightarrow A_l^m = 0$　即：$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} r^{-(l+1)}\left[C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)$

------2 分

代入球面边值条件：

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r_0^{l+1}}\left[C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta) = \sin^2\theta\cos^2\varphi = \frac{1}{3}P_0 - \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{6}P_2^2\cos 2\varphi$$

----6 分

$D_l^m = 0$

$C_0^0 = \frac{1}{3}r_0, C_2^0 = -\frac{1}{3}r_0^3, C_2^2 = \frac{1}{6}r_0^3, C_l^m = 0 \ (l \neq 0,2, m \neq 0,2\ )$

$$\therefore u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{3}\cdot\frac{r_0}{r}P_0(\cos\theta) - \frac{1}{3}\cdot\frac{r_0^3}{r^3}P_2(\cos\theta) + \frac{1}{6}\cdot\frac{r_0^3}{r^3}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$$

---2 分

学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密 封 线 以 内 答 题 无 效

得　分

五、求解圆柱坐标系中拉普拉斯方程的定解问题。（共 10 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad (\rho<\rho_0, 0<z<h) \\ u\big|_{\rho=0}\text{有限}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\rho_0}=u_0\sin\dfrac{2\pi z}{h} \\ u\big|_{z=0}=0, \quad u\big|_{z=h}=0 \end{cases}$$

解：本征值为：$\lambda=\left(\dfrac{n\pi}{h}\right)^2, Z(z)=\sin\dfrac{n\pi}{h}z$

定解问题的通解为：$u(\rho,z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[A_n I_0(\dfrac{n\pi}{h}\rho)+B_n K_0(\dfrac{n\pi}{h}\rho)\right]\sin\dfrac{n\pi}{h}z$ ------3 分

由$u\big|_{\rho=0}$有限 $\Rightarrow B_n=0$

通解简化为：$u(\rho,z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n I_0(\dfrac{n\pi}{h}\rho)\sin\dfrac{n\pi}{h}z$ ---------------2 分

由 $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\rho_0}=u_0\sin\dfrac{2\pi z}{h} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{n\pi}{h}I_0{}'(\dfrac{n\pi}{h}\rho_0)\sin\dfrac{n\pi}{h}z=u_0\sin\dfrac{2\pi z}{h}$

$\Rightarrow A_2=\dfrac{u_0 h}{2\pi I_0{}'(\frac{2\pi}{h}\rho_0)}, A_n=0(n\neq 2)$ ---------------3 分

定解问题解为：$u(\rho,z)=\dfrac{u_0 h}{2\pi I_0{}'(\frac{2\pi}{h}\rho_0)}I_0(\dfrac{2\pi}{h}\rho)\sin\left(\dfrac{2\pi}{h}z\right)$ ------------2 分

学院＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿ 任课教师＿＿＿＿＿＿ 考场教室＿＿＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿＿＿

密……封……线……以……内……答……题……无……效

得 分

六、求解定解问题。（共 16 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho})=0,(0<\rho<1) \\ u|_{\rho=0} \text{ 有限 } ,u|_{\rho=1}=0 \\ u|_{t=0}=1,u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

解：令$u(\rho,t)=R(\rho)T(t)$，代入方程整理得$\begin{cases} T''+\lambda a^2 T=0 \\ \rho^2 R''+\rho R'+\lambda\rho^2 R=0 \end{cases}$

解本征值问题$\begin{cases} \rho^2 R''+\rho R'+\lambda\rho^2 R=0 \\ R|_{\rho=0} \text{ 有限 } \quad R|_{\rho=1}=0 \end{cases}$

得 $\lambda=\left(p_i^{(0)}\right)^2, R(\rho)=J_0\left(p_i^{(0)}\rho\right)$，其中 $p_i^{(0)}$ 为 $J_0(x)=0$ 第 i 个根。

方程通解为：$u(\rho,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[A_i\cos(p_i^{(0)}at)+B_i\sin(p_i^{(0)}at)\right]J_0\left(p_i^{(0)}\rho\right)$ ----6 分

由初始条件：$u_t|_{t=0}=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}B_i p_i^{(0)}aJ_0\left(p_i^{(0)}\rho\right)=0 \Rightarrow B_i=0$

通解简化为：$u(\rho,t)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos(p_i^{(0)}at)J_0\left(p_i^{(0)}\rho\right)$ ---------2 分

由初始条件：$u|_{t=0}=1 \qquad \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}A_i J_0\left(p_i^{(0)}\rho\right)=1$

$$A_i=\frac{2}{\left(p_i^{(0)}\right)^2\left[J_1(p_i^{(0)})\right]^2}\int_0^1 J_0(p_i^{(0)}\rho)(p_i^{(0)}\rho)d(p_i^{(0)}\rho) \qquad \text{------2 分}$$

$$=\frac{2}{\left(p_i^{(0)}\right)^2\left[J_1(p_i^{(0)})\right]^2}\left[J_1(p_i^{(0)}\rho)(p_i^{(0)}\rho)\right]\Big|_0^1=\frac{2}{p_i^{(0)}J_1(p_i^{(0)})} \qquad \text{----4 分}$$

方程解为：$u(\rho,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{2}{p_i^{(0)}J_1(p_i^{(0)})}\cos(p_i^{(0)}at)J_0\left(p_i^{(0)}\rho\right)$ -----2 分