学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密封线以内答题无效

附：$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$ （球坐标系）

$\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ （柱坐标系）

$(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)$ $\qquad$ $(2l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)$

一、填空题

1. 偏微分方程$x^2u_{xx}-3xyu_{xy}+2y^2u_{yy}=0(x,y\neq 0)$的方程类型是　　　　　　。

2. 定解问题$\begin{cases}u_{tt}=16u_{xx} & -\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,0)=1,\ \ u_t(x,0)=\cos x\end{cases}$的解为________________________。

3. 由傅里叶级数法，定解问题$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)(0<x<l,t>0)\\ u|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$的通解可以写成级数形式，即$u(x,t)=$______________________。

4. 用格林函数法求解定解问题$\begin{cases}\nabla^2 u=-f(r)\\ u(\boldsymbol{r})|_s=0\end{cases}$，若区域内的格林函数$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$已知，则$V$内任意一点的$u(\boldsymbol{r})=$____________________________。

5. $\int_{-1}^{1}P_{55}^{10}(x)P_{98}^{10}(x)dx=$_________； $\int_{-1}^{1}\left[P_4(x)\right]^2dx=$_________。

6. 已知$J_n(x)$为第一类贝塞尔函数，$N_n(x)$为第二类贝塞尔函数，第三类贝塞尔函数$H_n^{(1)}(x)=$______________，$H_n^{(2)}(x)=$______________

二、计算题

1、计算积分$I=\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_7(x)dx$，其中$P_n(x)$为整数 n(n≥0)阶勒让德函数。

2、计算积分 $I=\int_0^a x^4 J_1(2x)dx$

三、**直接写出**定解问题的通解表达式，并将其化到最简形式。（注：**无需求解最简通解表达式中的待定系数**）

（1）$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \left(0<x<l, t>0\right) \\ u\big|_{x=0} = 0, u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

（2）$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \left(0<x<a, 0<y<b\right) \\ u\big|_{x=0} = \varphi(y), u\big|_{x=a} = \psi(y) \\ u_y\big|_{y=0} = 0, u_y\big|_{y=b} = 0 \end{cases}$

学院＿＿＿＿＿ 姓 名＿＿＿＿＿ 学 号＿＿＿＿＿ 任课教师＿＿＿＿＿ 考场教室＿＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿＿

密……封……线……以……内……答……题……无……效

（3）$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (\rho>\rho_0) \\ u\big|_{\rho=\rho_0}=\psi(\varphi),(0\le\varphi\le 2\pi) \\ u\big|_{\rho\to\infty} \text{有限} \end{cases}$

（4）$\begin{cases} u_{tt}=a^2\left(u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho\right)(\rho<\rho_0,t>0) \\ u\big|_{\rho=\rho_0}=0,u\big|_{\rho=0} \text{有限} \\ u\big|_{t=0}=\varphi(\rho),u_t\big|_{t=0}=\psi(\rho) \end{cases}$

四、 一根长为π的细杆，两端固定，已知杆上各点处初始位移为$\sin x$，初始速度为$\sin 3x$，求杆的振动。即求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<\pi,t>0) \\ u\big|_{x=0}=0 \quad u\big|_{x=\pi}=0 \\ u\big|_{t=0}=\sin x \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\sin 3x \end{cases}$$

五、在球坐标系下求解定解问题：

$$
\begin{cases}
\nabla^2 u = 0 \quad (r > a, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi) \\
u\big|_{r=a} = 4\cos^2\theta + 3 \\
u\big|_{r\to\infty} \text{有限}
\end{cases}
$$