一、填空题

1. 双曲型

2. $1+\frac{1}{8}\left[\sin(x+4t)-\sin(x-4t)\right]$ 或 $1+\frac{1}{4}\cos x\sin 4t$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n-1/2}{l}\pi x\right)$

4. $\int_V G(r,r')f(r')dV'$

5. 0，2/9

6. $J_n(x)+iN_n(x)$ ，$\underline{J_n(x)-iN_n(x)}$

二、计算题

1、

解：由 $(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)\Rightarrow xP_7(x)=\frac{8}{15}P_8(x)+\frac{7}{15}P_6(x)$

$$I=\int_{-1}^{1}P_n(x)\left(xP_7(x)\right)dx=\int_{-1}^{1}P_n(x)\left[\frac{8}{15}P_8(x)+\frac{7}{15}P_6(x)\right]dx$$

$$=\begin{cases}\frac{7}{15}\cdot\frac{2}{13}=\frac{14}{195}(n=6)\\ \frac{8}{15}\cdot\frac{2}{17}=\frac{16}{255}(n=8)\\ 0 \qquad\qquad (n=others)\end{cases}$$

2、

解：$I=\frac{1}{32}\int_0^a (2x)^4 J_1(2x) d(2x)$

$$=\frac{1}{32}\int_0^a (2x)^2\left[(2x)^2 J_1(2x)\right] d(2x)=\frac{1}{32}\int_0^a (2x)^2\left[(2x)^2 J_2(2x)\right]' d(2x)$$

$$=\frac{1}{32}\int_0^a (2x)^2 d\left[(2x)^2 J_2(2x)\right]=\frac{1}{32}(2x)^4 J_2(2x)\Big|_0^a-\frac{1}{16}\int_0^a (2x)^3 J_2(2x) d(2x)$$

$$=\frac{1}{32}(2x)^4 J_2(2x)\Big|_0^a-\frac{1}{16}(2x)^3 J_3(2x)\Big|_0^a=\frac{a^4}{2}J_2(2a)-\frac{a^3}{2}J_3(2a)$$

三、直接写出定解问题的通解表达式，并将其化到最简形式。（注： 无需求解最简通解表达式中的待定系数）

1、

解：$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n-1/2}{l}\pi a)^2 t}\sin(\frac{n-1/2}{l}\pi x)$$

或$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\frac{n+1/2}{l}\pi a)^2 t}\sin(\frac{n+1/2}{l}\pi x)$$

2、

解：$$u(x,y)=A_0+B_0 x+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n ch\frac{n\pi}{b}x+B_n sh\frac{n\pi}{b}x)\cos\frac{n\pi}{b}y$$

或$$u(x,y)=A_0+B_0 x+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}+B_n e^{\frac{n\pi}{b}x})\cos\frac{n\pi}{b}y$$

3、

解：$$u(\rho,\varphi)=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\cos m\varphi)\rho^{-m}$$

4、$$\boldsymbol{u(\rho,t)=R(\rho)T(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(ax_n^{(0)}t\right)+D_n\sin\left(ax_n^{(0)}t\right)\right]+J_0(x_n^{(0)}\rho)}$$

$\boldsymbol{x_n^{(0)}}$ 是 $\boldsymbol{J_0(x)}$ 的第 $\boldsymbol{n}$ 个正零点

四、

解：定解问题为第一类边界条件时的波动问题，其本征值和本征函数分别为

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2=n^2 \quad X(x)=\sin nx$$

通解为$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin nat+B_n\cos nat)\sin nx$

由初始条件：

$$u\big|_{t=0}=\sin x\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx=\sin x\Rightarrow B_1=1,B_n=0(n>1)$$

$$u_t\big|_{t=0}=\sin 3x\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}A_n na\sin nx=\sin 3x\Rightarrow A_3=\frac{1}{3a},A_n=0(n\neq 3)$$

故定解问题的解为：

$$u(x,t)=\cos at\sin x+\frac{1}{3a}\sin 3at\sin 3x$$

六、

解：定解问题为球坐标系下轴对称问题，其通解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)$$

由$u\big|_{r\to\infty}$有限$\Rightarrow A_l=0\Rightarrow u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)$

由$u\big|_{r=a}=4\cos^2\theta+3\Rightarrow\sum_{l=0}^{\infty}B_l a^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)=4\cos^2\theta+3$

$$=\frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)+\frac{13}{3}$$
$$=\frac{8}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{13}{3}$$

对比系数得：$B_2a^{-3}=\frac{8}{3},B_0a^{-1}=\frac{13}{3}\Rightarrow B_2=\frac{8}{3}a^3,B_0=\frac{13}{3}a,B_n=0$

定解问题的解为：

$$u(r,\theta)=\frac{13a}{3r}+\frac{8a^3}{3r^3}P_2(\cos\theta)$$