学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密封线以内答题无效

一、填空题（每空 2 分，共 40 分）

1. 球坐标系下，对拉普拉斯方程 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$ 分离变量，令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，其中变量 r 的函数 $R(r)$ 满足____________方程；变量 θ，φ 的函数 $Y(\theta,\varphi)$ 满足_________________方程；将变量 θ，φ 进一步分离，令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，则变量 θ 的函数 $\Theta(\theta)$ 满足_______________方程，轴对称情况下，变量 θ 的函数 $\Theta(\theta)$ 满足___________方程。（要求写出方程名称）

2. 已知 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，则 $P_2(x)=$__________；将函数 $f(x)=3x^2+5x-\frac{1}{2}$ 以 $P_l(x)$ 为基，作广义傅里叶级数展开，结果为 $f(x)=$___________________。

3. 对于球函数，若 $m=n$、$l\neq k$，则 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y_l^m(\theta,\varphi)Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=$________；若 $m\neq n$、$l=k$，则 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y_l^m(\theta,\varphi)Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=$_______。

4. 对于 n 阶贝塞尔函数 $J_n(x)$，$J_0(0)=$_______，$J_n(0)(n\neq 0)=$________。

5. $J_n(x)$ 和 $N_n(x)$ 分别为 n 阶贝塞尔函数和 n 阶诺依曼函数，则有 $H_n^{(1)}(x)=$_____________，$H_n^{(2)}(x)=$_____________。

6. 虚宗量贝塞尔函数 $I_n(x)$ 与贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的关系是_________，当 n 为整数，$I_n(x)$ 与 $I_{-n}(x)$ 关系为___________。当 x→0 时，$I_0(0)=$_____，$I_n(0)=$______ $(n\neq 0)$。虚宗量汉克尔函数 $K_n(x)$ 与第一类修正贝塞尔函数 $I_n(x)$ 的关系为________，$K_n(x)$ 在原点处具有_______特性 。

7. 亥姆霍兹方程在球坐标系进行变量分离：$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$。其中变量 r 的函数 $R(r)$ 满足_________方程，变量 θ 满足的方程的解为_____________。

二、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 勒让德多项式是个无穷级数。 (　　　)

2. P_l^m 与 $P_l^{[m]}$ 之间的关系为 $P_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}P_l^{[m]}(x)$。 (　　　)

3. m 阶贝塞尔方程的两个特解 $J_m(x)$ 和 $J_{-m}(x)$ 线性无关(m 为自然数)。 (　　　)

4. m 阶贝塞尔函数是无穷衰减振荡函数，具有无穷多个实数零点。 (　　　)

5. Hankel 函数具有行波特性，主要用于讨论开空间波的传播和散射问题。 (　　　)

三、在球坐标系下利用分离变量法求解下列定解问题（共 10 分）

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0 \qquad (0<r<1)\\ u\big|_{r=1}=\cos^2\theta+2\cos\theta\end{cases}$$

学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密 封 线 以 内 答 题 无 效

四、在球坐标系下利用分离变量法求解下列定解问题。（共 14 分）

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \qquad (r > a, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi) \\ u\big|_{r=r_0} = \sin^2\theta\cos^2\varphi \end{cases}$$

五、求解圆柱坐标系中拉普拉斯方程的定解问题。（共 10 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\rho < \rho_0, 0 < z < h) \\ u\big|_{\rho=0} \text{有限}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\rho_0} = u_0 \sin\dfrac{2\pi z}{h} \\ u\big|_{z=0} = 0, \quad u\big|_{z=h} = 0 \end{cases}$$

学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

六、求解定解问题。（共 16 分）

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0, (0 < \rho < 1) \\
u|_{\rho=0} \text{ 有限} \qquad , u|_{\rho=1} = 0 \\
u|_{t=0} = 1, u_t|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$