图论____班　　　　　　　　　　姓名　　　　　　　　　　学号

二部图：
点色数=2；
边色数=最大度
奇圈：均为3；
偶圈：均为2；
Peterson图：
点色数=3；
边色数=4；

简单图，只有完全图和奇圈的点色数达到最大度+1

图论作业 4

完全图Kn的边色数分奇偶讨论：
n为奇数时，边色数=n=最大度+1；
n为偶数时，边色数=n-1=最大度

维津定理：简单图的边色数去最大度或最大度+1

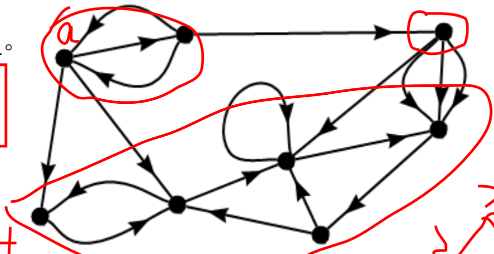
一、填空题

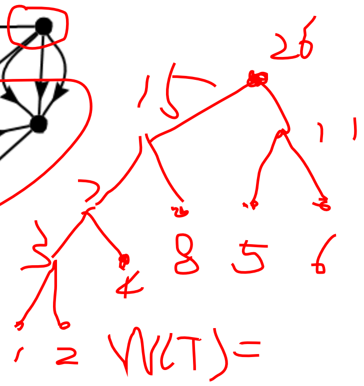
1. 长度至少为 3 的奇圈的点色数和边色数分别为__3__和__3__。
2. 彼得森图的点色数和边色数分别为__3__和__4__。
3. 已知树 T 的度序列为(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)，则 T 的点色数和边色数分别为__2__和__3__。
4. 方体 Q_6 的点色数和边色数分别为__2__和__6__。 $K_{6.6}$
5. 设 G 的阶数为 n，覆盖数为 β，则其独立数为__$n-\beta$__。
6. 完全图 $K_{m,n}$ ($m \geq n$)的独立数和覆盖数分别为__m__和__n__。
7. 已知树 T 的阶数为 n，则其色多项式为__$k(k-1)^{n-1}$__。

每次删掉包含1度定点的边Pk(G)=(k-1)Pk(G-u)

8. 拉姆齐数 $R(3, 3)$=__6__。 背
9. 图中强连通分支的个数为__3__。

连通分支：一定是极大的连通部分，G的分支数即G连通分支的个数





$2M = \sum m_i = 2(t+i-1)$

$m_i = t+i-1$

$(m-1)i = t-1$

至多有 2^n 片树叶

10. 高为 h 的完全二元树至少有__$h+1$__片树叶。
11. 树叶带权分别为 1, 2, 4, 5, 6, 8 的最优二元树权值为__62__。
12. 设 m 元完全树有 t 片树叶，i 个分支点，则其总度数为______。
13. 对具有 m 条边的简单图定向，能得到__2^m__个不同的定向图。

$W(T) = 3\times4+4\times3+19\times2+0 = 24+38 = 62$

二、不定项选择题

1. 下列说法错误的是(DG)

(A) 在正常着色下，图 G 的每个色组在 G 的补图中导出的子图是完全图；✓

(B) 若图 G 非连通，则图 G 的补图必为连通图；✓

(C) 图 G 与其补图具有相同的频序列；✓

(D) 存在 14 阶的自补图；✗ $m = \frac{n(n-1)}{4}$

(E) 所有 4 阶图的补图都是可平面图；✓

(F) 存在 6 阶可平面图 G，其补图也是可平面图；✓

(G) 存在 8 阶外可平面图 G，其补图也是外可平面图。✗

Note：补图及生成子图与其原图，具有相同的点集，差别只是在边

但连通图的补图可以不连通，如完全图Kn以及完全图去掉一条边

如 K_3 的补图 ∴

外 — 最小者7
可 — 最小者9

2. 关于完全图 K_n，下列说法错误的是(B)

(A) 点色数为 n；✓

(B) 边色数为 n；✗

(C) 点连通度为 n-1；✓

(D) 边连通度为 n-1；✓

(E) 是临界图；✓

(F) 是唯一可着色图。✓

背

3. 设 G 是惟一 $k(k \geq 2)$可着色图，下列说法正确的是(D)

(A) 最小度 $\delta(G) \geq k$-1；✓

(B) 图 G 是 k-1 连通的；✓

(C) 在 G 的任一正常 k 着色中，G 的任意两个色组的并导出的子图是连通的；✓

(D) 在 G 的任一正常 k 着色中，G 的任意 l 个色组的并导出的子图是 l 连通的；✗ $l-1$

(E) 若 G 是 k-1 正则的，则 G 必为 K_k。✓ brooks

奇圈C3也是K3完全图，是唯一3可着色

4. 下列说法正确的是(　　　)

(A) 图 G 的独立集是其补图的团；√

(B) 点子集 S 是 G 的独立集当且仅当 S 的补集是 G 的覆盖；√

(C) 若图 G 没有孤立点，则 G 的边独立数与边覆盖数之和等于图 G 的阶数；√

(D) 若图 G 是偶图，则图 G 的边独立数等于点覆盖数；√

(E) 若图 G 是没有孤立点的偶图，则图 G 的点独立数等于边覆盖数。√

5. 下列说法正确的是(BE)

(A) 在有向图中，顶点的出度之和等于边数的两倍；×

(B) 在有向欧拉图中，各点的度数必为偶数；√

(C) 在有向图的邻接矩阵中，所有元素之和等于边数的两倍；× 1倍

(D) 在无环有向图的关联矩阵中，各行元素之和均等于 0；× 列

(E) 在无环有向图的关联矩阵中，所有元素之和等于 0。√

但所有元素之和（即行和之和）为0

6. 对于有向图，下列说法错误的是(D)

(A) 有向图 D 中任意一顶点只能处于 D 的某一个强连通分支中；√

(B) 在有向图 D 中，顶点 v 可能处于 D 的不同的单向连通分支中；√

(C) 有向连通图中顶点间的强连通关系是等价关系；√

(D) 有向连通图中顶点间的单向连通关系是等价关系；×

(E) 强连通图的所有顶点必然处于某一有向闭途径中。√

如填空题9中与a点关联的几条边组成的单向连通分支

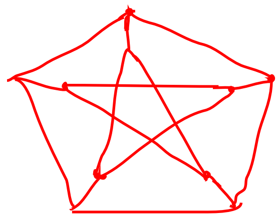
v在两个单向连通分支中与可达关系不是等价的

三、解答题

1. 现有 5 个人 A, B, C, D, E 被邀请参加桥牌比赛。比赛的规则是：①每一场比赛由两个 2 人组进行对决；②要求每个 2 人组(X, Y)都要与其它 2 人组(U, V)进行对决。若每个人都要与其他任意一个人组成一个 2 人组，且每个组在同一天不能有多余一次的比赛，则最少需要安排多少天比赛？

边着色问题

2人组作为一个点，相邻边不能着同一种颜色，红色划线部分表示每一个事件，恰好对应边着色模型中的每一条边



$C_5^2 = \frac{A_5^2}{2!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$(组)

Peterson图边色数=4，故至少需要安排4天比赛

2. 有 6 名博士生要进行论文答辩，答辩委员会成员分别是

A_1={张教授，李教授，王教授}；A_2={赵教授，钱教授，刘教授}；

A_3={严教授，王教授，刘教授}；A_4={赵教授，梁教授，刘教授}；

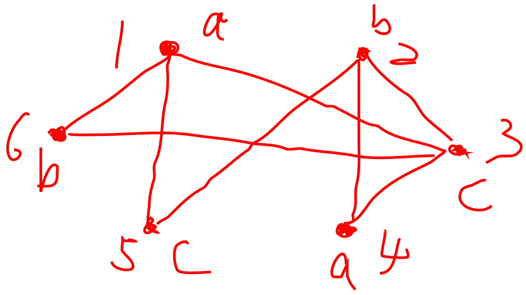
A_5={张教授，钱教授，孙教授}；A_6={李教授，王教授，严教授}。

要使教授们参加答辩不至于发生时间冲突，至少安排几次答辩时间段？请给出一种最少时间段下的安排。

点着色问题

点着色模型，两个顶点之间连一条边，代表顶点表示的两个事件不能呢个同时发生。则建模如下：

以6名博士表示6个顶点，若两个博士的答辩委员会有相同教授，则两点连一条边。则原问题转化为：用不同颜色给每个点着色，使得相邻的点着不同色，求点色数



$\chi=3$

✓ 3. 设 T 是一棵二元完全树，已知树叶数为 $t(t\geq 2)$，求 T 的边数。

解：设分支点为 i 个，则 $M=2i$

由 $(m-1)i=t-1 \Rightarrow i=t-1$

$m=2$

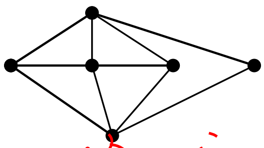
$\therefore M=2(t-1)=2t-2$

不考

4. 设 T 是 8 阶二元有序树，已知 T 的先序遍历和中序遍历分别为 52143768 与 12345678。构造树 T 并求其后序遍历。

5. 求下图的色多项式及色数。

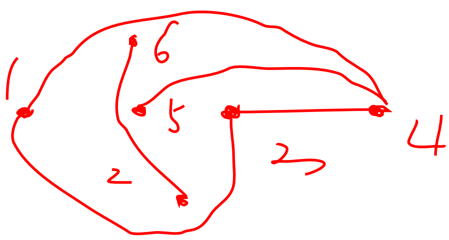
优先采用理想子图法

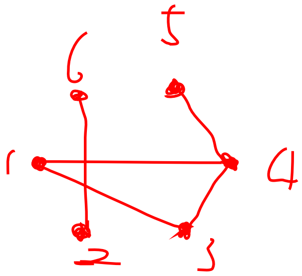


解：令图为 G，不含1度顶点，$n=6$

$m(K_6)=\frac{6\times 5}{2}=15$

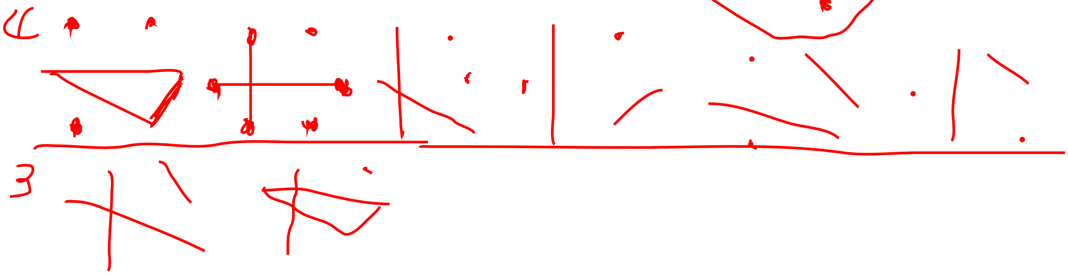
则 $\bar{G}$ 如下：





$r_6=1,\ r_5=5$

$r_4=6,\ r_3=2$



1 2 3

$2\times 2+1$

$3+2+1\times 2$

$2+2+2$

$\Rightarrow h(\bar{G},x)=x^6+5x^5+6x^4+2x^3$

$\therefore P_k(G)=[k]_6+5[k]_5+6[k]_4+2[k]_3$

$[k]_n=k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$