学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

……密……封……线……以……内……答……题……无……效……

电子科技大学 2019-2020 学年第 1 学期期中考试 A 卷

考试科目：__数学物理方法__ 考试形式：__闭卷__ 考试日期：__2019__ 年 __11__ 月 __15__ 日

本试卷由 __五__ 部分构成，共 __5__ 页。考试时长：__120__ 分钟

成绩构成比例：平时成绩 __50__ %，期末成绩 __50__ %

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	合计
得分									

得 分

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

（1） $\cos\left[iLn(2i)\right] = \underline{\ \frac{3i}{4}\ }$， $\mathrm{Re}[(2i)^i] = \underline{\ e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\cos(\ln 2)\left(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)\ }$。

（2） 已知 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$，则 $z^{100}+z^{50}+1 = \underline{\ -i\ }$。

（3） $\sin^2(4+7i)+\cos^2(4+7i) = \underline{\ 1\ }$。

（4） 要使复变函数 $f(z)=x^2+2xy+ay^2+i(-x^2+bxy+y^2)$ 在复平面上处处解析，则 a,b 的取值分别为 $\underline{\ a=-1, b=2\ }$。

（5） 计算积分 $\oint\limits_{|z-4|=3}\frac{1-\sin z}{z^2(z-4)}dz = \underline{\ \frac{1-\sin 4}{8}\pi i\ }$。

（6） 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n z^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b^n z^n$ （$0<a<b$）的收敛半径为 $\underline{\ \frac{1}{b}\ }$。

（7） 将函数 $f(z)=e^z$ 以 $z_0=5$ 为中心展开为级数形式为 $f(z)=\underline{\ e^5\bullet\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\left(z-5\right)^n\ }$。

（8） 复变函数 $f(z)=\frac{z^2+1}{z^3(z-2)}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),2]=\underline{\ \frac{5}{8}\ }$， $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\underline{\ 0\ }$。

得 分

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1、方程 $z^2 = 2z\operatorname{Re}(z) - 1$ 在复平面上表示的几何形状为（ A ）

A．圆形　　B．直线　　C．椭圆　　D. 双曲线

2、设 $f(z) = \sin z$ ，则以下命题中，不正确的是（ C ）

A． $f(z)$ 在复平面上处处解析　B． $f(z)$ 的周期为 2π　C． $|f(z)| \le 1$　D． $f(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

3、 $z = i$ 是函数 $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-i)(z-2i)^5}$ 的（ A ）

A．可去奇点　　B．单极点　　C．本性奇点　　D．5 阶极点

4、若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = 1+2i$ 处收敛，则该级数在 $z_0 = 2i$ 处（ A ）

A．一定是收敛的　　B．有条件收敛　　C．一定是发散的　　D．不能确定敛散性

5、设 $z = \alpha$ 分别是函数 $f(z)$、$g(z)$ 的本性奇点和 m 阶极点，则 $z = \alpha$ 是函数 $f(z)g(z)$ 的（ B ）

A．可去奇点　　B．本性奇点　　C． m 阶极点　　D．小于 m 阶的极点

得 分

三、判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1、等式 $Lnz^n = nLnz$ 一定成立。（ × ）

2、若函数 $f(z)$ 在 z_0 点处满足柯西-黎曼条件，则 $f(z)$ 在 z_0 处解析。（ × ）

3、若级数 $\{z_n\}$ 绝对收敛，则 $\{\operatorname{Re} z_n\}$ 与 $\{\operatorname{Im} z_n\}$ 都绝对收敛。（ √ ）

4、若 z_0 分别是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的 m,n 阶极点（m>n），则 z_0 是 $f(z)/g(z)$ 的 $m-n$ 阶极点。（ √ ）

5、若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则对 D 内任一简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)dz = 0$ 。（ × ）

6、若函数 $f(z)$ 是单连通区域 D 内的每一点均可导，则它在 D 内有任意阶导数。（ √ ）

7、若无穷远点是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname{Re}s\left[f(z),\infty\right]$ 必为零。（ × ）

8、若函数 $f(z)$ 在复平面上解析，且对于任意 z 有 $|f(z)| \le M < \infty$ ，则 $f(z)$ 必为常数。（ √ ）

9、函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析，则将 $f(z)$ 在 z_0 处展开成级数必为泰勒级数。（ √ ）

10、若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在，则函数 $f(z)$ 在 z_0 处可展开为罗朗级数，且其主要部分为有限多项。（ × ）

学院________ 姓 名________ 学 号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

……密……封……线……以……内……答……题……无……效……

得 分

四、计算题（4 小题，共 40 分）

1、（10 分）求解析函数 $f(z)=\left(2xy-2y\right)+iv(x,y)$ 的完整表达式，并使 $f(2)=-i$ 。

解：$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)=\left(2xy-2y\right)+iv(x,y)$

$\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2\left(2xy-2y\right)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\left(2xy-2y\right)}{\partial y^2}=0$，为调和函数。（2 分）

函数 $f(z)$ 为解析函数，满足柯西黎曼条件，故：

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2-2x$ （2 分）

$\therefore v(x,y)=\int\left(2-2x\right)dx+f(y)=2x-x^2+f(y)$ （2 分）

又由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow f'(y)=2y\Rightarrow f(y)=y^2+c$ （2 分）

$\therefore v(x,y)=2x-x^2+y^2+c$

由 $f(2)=-i\Rightarrow 0+i(2*2-2^2+0^2+c)=-i\Rightarrow c=-1$ （1 分）

故 $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)=\left(2xy-2y\right)+i\left(2x-x^2+y^2-1\right)$ （1 分）

2、（10 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}$ 分别在指定区域内展开为级数形式。

（1）$1<|z|<4$　　（2）$0<|z-1|<3$

解：（1） $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-4}-\dfrac{1}{z-1}\right)$ （1 分）

$$\frac{1}{z-4}=-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$$ （1 分）

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-(n+1)}$$ （2 分）

$$f(z)=-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-(n+1)}\quad\left(1<|z|<4\right)$$ （1 分）

（2） $f(z)=\dfrac{1}{\left(z-1\right)\left(z-4\right)}=\dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{z-1-3}=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z-1}{3}}$ （3 分）

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^{n}=-\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(z-1)^{k}}{3^{k+2}}\quad \left(0<|z-1|<3\right)$$ （2 分）

3、（10 分）计算积分 $I=\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{e^{z}}{z^{2}(z^{2}-4)}dz$ 。

解：在积分路径内，被积函数

$$f(z)=\frac{e^{z}}{z^{2}(z^{2}-4)}$$

有单极点 z=2 和二阶极点 z=0。 （2 分）

$$\operatorname{Re}s\left[f(z),2\right]=\left.\frac{e^{z}}{z^{2}(z+2)}\right|_{z=2}=\frac{e^{2}}{16}$$ （3 分）

$$\operatorname{Re}s\left[f(z),0\right]=\left.\left[e^{z}\left(z^{2}-4\right)^{-1}\right]'\right|_{z=0}=\left.\left(\frac{e^{z}}{z^{2}-4}-\frac{2ze^{z}}{\left(z^{2}-4\right)^{2}}\right)\right|_{z=0}=-\frac{1}{4}$$ （3 分）

$$\therefore I=\frac{e^{2}-4}{8}\pi i$$ （2 分）

4、（10 分）计算积分 $I=\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^{2}+9}dx\ (m>0)$

解：构造复变函数 $F(z)=\frac{ze^{imz}}{z^{2}+9}$

在上半空间存在单极点 z=3i， （3 分）

$$\operatorname{Re}s\left(F(z),3i\right)=\left.\frac{ze^{imz}}{z+3i}\right|_{z=3i}=\frac{1}{2}e^{-3m}$$ （3 分）

故可得积分 $I=\pi\bullet\operatorname{Re}s\left(F(z),3i\right)=\frac{\pi}{2e^{3m}}$ （4 分）

得 分

五、证明题（10 分）

若函数 $\varphi(z)$ 在 $z=\alpha$ 处解析，$z=\alpha$ 为函数 $f(z)$ 的一阶极点且 $\mathrm{Res}\left[f(z),\alpha\right]=A$，

证明：$\mathrm{Res}\left[f(z)\cdot\varphi(z),\alpha\right]=A\cdot\varphi(\alpha)$ 。

证明：由于 $\varphi(z)$ 在 $z=\alpha$ 处解析，$z=\alpha$ 为函数 $f(z)$ 的一阶极点，故 $z=\alpha$ 是 $f(z)\cdot\varphi(z)$ 的一阶极点。（3 分）

根据一阶极点留数计算公式

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\alpha\right]=\lim_{z\to\alpha}\left(z-\alpha\right)f(z)=A \qquad \text{（2 分）}$$

则 $$\mathrm{Res}\left[f(z)\cdot\varphi(z),\alpha\right]=\lim_{z\to\alpha}\left[\left(z-\alpha\right)f(z)\cdot\varphi(z)\right] \qquad \text{（2 分）}$$

$$=\lim_{z\to\alpha}\left(z-\alpha\right)f(z)\cdot\lim_{z\to\alpha}\varphi(z)$$

$$=\lim_{z\to\alpha}\left(z-\alpha\right)f(z)\cdot\lim_{z\to\alpha}\varphi(z)$$

$$=A\cdot\varphi(\alpha) \qquad \text{（3 分）}$$

得证。

另证：由于 $\varphi(z)$ 在 $z=\alpha$ 处解析，$z=\alpha$ 为函数 $f(z)$ 的一阶极点，故 $z=\alpha$ 是 $f(z)\cdot\varphi(z)$ 的一阶极点。

函数 $\varphi(z)$ 在 $z=\alpha$ 处解析，则 $\varphi(z)$ 在 $z=\alpha$ 处展开为泰勒级数，即 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$

而 $z=\alpha$ 为函数 $f(z)$ 的一阶极点且留数为 A，则 $f(z)$ 在 $z=\alpha$ 处展开为罗朗级数

$$f(z)=\frac{A}{z-\alpha}+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-\alpha)^k$$

故：$$f(z)\varphi(z)=\left(\frac{A}{z-\alpha}+b_0+b_1(z-\alpha)+b_2(z-\alpha)^2+\cdots\right)\left(a_0+a_1(z-\alpha)+a_2(z-\alpha)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{A}{z-\alpha}a_0+a_0b_0+Aa_1+a_0b_1(z-\alpha)+a_1b_0(z-\alpha)+\cdots$$

根据留数的定义，$\mathrm{Re}s\left[f(z)\varphi(z),\alpha\right]=Aa_0=A\varphi(\alpha)$

得证！

学院________ 姓 名________ 学 号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效