第七章习题解答

7.2 解：$YS\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=F_0, YS\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=F_0$

7.3 解：$k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-q_0, k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=q_0$

7.5 解：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=\dfrac{F_0\sin\omega t}{YS} \\ u|_{t=0}=0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \end{cases}$$

7.8 解：

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0\ (a^2=k/\rho c) \\ u|_{x=0}=0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\dfrac{T_0x}{l} \end{cases}$$

第八章习题解答

8.1 (1) $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4x^2y^2 = -4x^2y^2 < 0$ 椭圆型方程

(2) $\Delta = b^2 - 4ac = 0 + 16e^{2x}y^2 = 16e^{2x}y^2 > 0$ 双曲型方程

8.2 (1) $\Delta = b^2 - 4ac = 4a^2 - 4a \cdot a = 0$ 抛物型方程

(2) $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 > 0$ 双曲型方程

(3) $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$ 椭圆型方程

第九章习题解答

9.1 解：$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

9.2 解：很明显，对于x>at区域，端点震动的影响还未传递到，因此必然有$u(x,t)=0$．现在研究x<at区域。

将初始条件延拓到x<0区域，得定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u\big|_{x=0}=A\sin\omega t \\ u\big|_{t=0}=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ \varphi(x), & x<0\end{cases}, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ \psi(x), & x<0\end{cases} \end{cases}$$

其中$\varphi(x),\psi(x)$为待定函数

将达朗贝尔公式用于上定解问题，通解可表示为

$$u=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi$$

由$u\big|_{x=0}=A\sin\omega t\Rightarrow\frac{1}{2}[\Phi(at)+\Phi(-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(\xi)d\xi=A\sin\omega t$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}[0+\varphi(-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{0}\psi(\xi)d\xi=A\sin\omega t$$

第九章习题解答

9.2 解(续)：$\frac{1}{2}\varphi(-at)+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{0}\psi(\xi)d\xi = A\sin\omega t$

令at=x，则上式变为

$$\frac{1}{2}\varphi(-x)+\frac{1}{2a}\int_{-x}^{0}\psi(\xi)d\xi = A\sin\omega\frac{x}{a}$$

由于$\varphi(x),\psi(x)$为任意待定函数，要满足上式，可取

$$\varphi(x)=2A\sin(-\frac{\omega}{a}x),\psi(x)=0$$

此时，定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)=\frac{1}{2}2A\sin\left[-\frac{\omega}{a}(x-at)\right]=A\sin(t-\frac{\omega}{a}x)\ (t>\frac{x}{a})$$

第10章习题解答

10.1 解：

（1） $\lambda_n = \beta_n^2 = \left[\dfrac{n-1/2}{l}\pi\right]^2 \qquad X_n(x) = \sin\dfrac{(n-1/2)\pi}{l}x \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

（2） $\lambda_n = \beta_n^2 = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad X_n(x) = \cos\dfrac{n\pi}{l}x \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$

（3） 当λ<0时，$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$\begin{cases} X(a) = Ae^{\sqrt{-\lambda}a} + Be^{-\sqrt{-\lambda}a} = 0 \\ X(b) = Ae^{\sqrt{-\lambda}b} + Be^{-\sqrt{-\lambda}b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = Be^{2\sqrt{-\lambda}a} \\ Be^{\sqrt{-\lambda}b}(e^{2\sqrt{-\lambda}a} + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$$

当λ=0时，$X(x) = Ax + B$

$$\begin{cases} X(a) = A \bullet a + B = 0 \\ X(b) = A \bullet b + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$$

当λ>0时，$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

$$\begin{cases} X(a) = A\cos\sqrt{\lambda}a + B\sin\sqrt{\lambda}a = 0 \\ X(b) = A\cos\sqrt{\lambda}b + B\sin\sqrt{\lambda}b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\sin\sqrt{\lambda}b\cos\sqrt{\lambda}a - \cos\sqrt{\lambda}b\sin\sqrt{\lambda}a) = 0 \\ B(\sin\sqrt{\lambda}a\cos\sqrt{\lambda}b - \cos\sqrt{\lambda}a\sin\sqrt{\lambda}b) = 0 \end{cases}$$

第10章习题解答

10.1 解：

（3）（续）
$$\begin{cases} A(\sin\sqrt{\lambda}b\cos\sqrt{\lambda}a-\cos\sqrt{\lambda}b\sin\sqrt{\lambda}a)=0 \\ B(\sin\sqrt{\lambda}a\cos\sqrt{\lambda}b-\cos\sqrt{\lambda}a\sin\sqrt{\lambda}b)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} A\sin\left[\sqrt{\lambda}(b-a)\right]=0 \\ B\sin\left[\sqrt{\lambda}(a-b)\right]=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=0 or \sqrt{\lambda}=\dfrac{n\pi}{b-a} \\ B=0 or \sqrt{\lambda}=\dfrac{n\pi}{a-b} \end{cases}$$

若A=0或B=0将只有零解，故舍去，而$\sqrt{\lambda}>0$，取

$$\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{b-a}\Rightarrow\lambda=\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$$

由$A\cos\sqrt{\lambda}a+B\sin\sqrt{\lambda}a=0\Rightarrow A=-B\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}a}{\cos\sqrt{\lambda}a}$

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x=\frac{B}{\cos\sqrt{\lambda}a}\left(\sin\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}a-\sin\sqrt{\lambda}a\cos\sqrt{\lambda}x\right.$$

$$=\frac{B}{\cos\sqrt{\lambda}a}\sin\sqrt{\lambda}(x-a)$$

故本征函数 $X(x)=\sin\sqrt{\lambda}(x-a)$

第10章习题解答

10.7 解：本征值和本征函数为

$$\lambda_n=\beta_n^2=\left[\frac{n-1/2}{l}\pi\right]^2 \qquad X_n(x)=\sin\frac{(n-1/2)\pi}{l}x \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

定解问题通解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t+D_n\sin\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t\right]\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$$

由初始条件，

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x=\varphi(x)\Rightarrow C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}xdx$$

$$u_t\big|_{t=0}=\psi(x)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{(2n-1)\pi a}{2l}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x=\psi(x)$$

$$\Rightarrow D_n=\frac{4}{(2n-1)\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}xdx$$

第10章习题解答

10.8 解：本题为圆域内拉普拉斯方程求解，其通解为：

$$u(r,\theta)=C_0+D_0\ln r+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[r^m\left(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta\right)$$
$$+r^{-m}\left(C_m\cos m\theta+D_m\sin m\theta\right)\Big]$$

求解区域为圆域内部，由自然边界条件

$$u\big|_{r=0}<\infty\Rightarrow D_0=C_m=D_m=0\ \Rightarrow u(r,\theta)=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}r^m\left(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta\right)$$

由边界条件

$$u\big|_{r=R}=f(\theta)\Rightarrow C_0+\sum_{m=1}^{\infty}R^m\left(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta\right)=f(\theta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta,\\ A_m=\dfrac{1}{\pi R^m}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos m\theta d\theta,\\ B_m=\dfrac{1}{\pi R^m}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin m\theta d\theta\end{cases}$$

教材：10.1　10.7　10.8　10.12　10.18

第10章习题解答

10.12 解：本题为矩形域泊松方程求解。

令 $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$，由特解法，取

$$w(x,y)=-\frac{1}{12}x^4y+axy$$

代入原问题，得与v有关的新定解问题：

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 \\ \left.\left(v-\frac{y}{12}x^4\right)\right|_{y=0}=0,\left.\left(v-\frac{b}{12}x^4+abx\right)\right|_{y=b}=0 \\ \left.v\right|_{x=0}=0,\left.\left(v-\frac{b^4y}{12}+aby\right)\right|_{x=b}=0 \end{cases}$$

要让上定解问题可解，x方向边界条件应齐次，故取$a=\frac{b^3}{12}$

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 \\ \left.v\right|_{y=0}=0,\left.v\right|_{y=b}=\frac{b}{12}x^4-\frac{b^4}{12}x \\ \left.v\right|_{x=0}=0,\left.v\right|_{x=b}=0 \end{cases}$$

第10章习题解答

10.12 解：本题为矩形域泊松方程求解。

令$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$，由特解法，取

$$w(x,y)=-\frac{1}{12}x^4y+axy$$

代入原问题，得与v有关的新定解问题：

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 \\ \left.\left(v-\dfrac{y}{12}x^4\right)\right|_{y=0}=0,\left.\left(v-\dfrac{b}{12}x^4+kbx\right)\right|_{y=b}=0 \\ v\big|_{x=0}=0,\left.\left(v-\dfrac{x^4y}{12}+kxy\right)\right|_{x=a}=0 \end{cases}$$

要让上定解问题可解，x方向边界条件应齐次，故取$k=\dfrac{a^3}{12}$

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 \\ v\big|_{y=0}=0,v\big|_{y=b}=\dfrac{b}{12}\left(x^4-a^3x\right) \\ v\big|_{x=0}=0,v\big|_{x=b}=0 \end{cases}$$

第10章习题解答

10.12 解(续)：通解为

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n ch(\frac{n\pi}{a}y)+B_n sh(\frac{n\pi}{a}y)\right]\sin\frac{n\pi}{a}x$$

由： $v\big|_{y=0}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{a}x=0\Rightarrow A_n=0$

$$v\big|_{y=b}=\frac{b}{12}\left(x^4-a^3x\right)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}B_n sh(\frac{n\pi}{a}b)\sin\frac{n\pi}{a}x=\frac{b}{12}\left(x^4-a^3x\right)$$

$$\Rightarrow B_n sh(\frac{n\pi}{a}b)=\frac{2}{a}\int_0^a(\frac{b}{12}x^4-\frac{b^4}{12}x)\sin\frac{n\pi}{a}xdx$$

解上积分求得Bn，代入即可得原问题的解。

第10章习题解答

10.18 解：写出定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u|_{x=0}=Ay(b-y), u|_{x=a}=0 \\ u|_{y=0}=B\sin(\pi x/a), u|_{y=b}=0 \end{cases}$$

由叠加原理，令 $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ ，将原问题拆分为两个定解问题，即：

$$(I)\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 \\ v|_{x=0}=Ay(b-y), v|_{x=a}=0 \\ v|_{y=0}=0, v|_{y=b}=0 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0 \\ w|_{x=0}=0, w|_{x=a}=0 \\ w|_{y=0}=B\sin(\pi x/a), w_{y=b}=0 \end{cases}$$

由分离变量法，可解得(I)的解为

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8Ab^2 sh\left[\frac{(2k-1)\pi}{b}(a-x)\right]}{[(2k+1)\pi]^3 sh\left[\frac{(2k-1)\pi a}{b}\right]}\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{b}y\right]$$

10.18 解（续）：

由分离变量法，可解得(II)的解为

$$w(x,y)=\frac{B\bullet sh\frac{\pi}{a}(b-y)}{sh\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x$$

故原问题的解为：

$$u(x,y)=\frac{B\bullet sh\frac{\pi}{a}(b-y)}{sh\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8Ab^2 sh\left[\frac{(2k-1)\pi}{b}(a-x)\right]}{\left[(2k+1)\pi\right]^3 sh\left[\frac{(2k-1)\pi a}{b}\right]}\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{b}y\right]$$

第10章习题解答

补充：1、求解细杆导热问题，杆长l，两端保持为零度，初始温度分布

$u|_{t=0}=bx(l-x)/l^2$。[定解问题为

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0(0\le x\le l,\ t>0) \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=bx(l-x)/l^2 \end{cases}$$

解：令 $u=X(x)T(t)$

第一类边值问题：$\lambda=(\frac{n\pi}{l})^2 \quad X(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$

通解为：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$

由定解条件：$u|_{t=0}=bx(l-x)/l^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=bx(l-x)/l^2$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{bx(l-x)}{l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}\frac{8b}{n^3\pi^3} & n\text{为奇数}\\ 0 & n\text{为偶数}\end{cases}$$

定解问题解为：

$$u(x,t)=\frac{8b}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$$

第10章习题解答

补充：2、求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ 0<x<l,t>0 \\ u_x|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=A\cos\dfrac{3\pi x}{l},u_t|_{t=0}=0 \\ u|_{t\to\infty}\text{有限} \end{cases}$$

4、解： 令 $u=X(x)T(t)$

第二类边值问题： $\lambda=(\frac{n\pi}{l})^2 \quad X(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x$

通解为： $u=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t)\cos\frac{n\pi x}{l}$

由定解条件： $u_t|_{t=0}=0\Rightarrow B_0=B_n=0$

$$u|_{t=0}=A\cos\frac{3\pi x}{l}\Rightarrow A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}=A\cos\frac{3\pi x}{l}\Rightarrow\begin{cases}A_3=A\\A_n=0(n\neq 3)\end{cases}$$

$$u=A\cos\frac{3\pi at}{l}\cos\frac{3\pi x}{l}$$

第10章习题解答

补充：3、求解细杆导热问题，杆长l，初始温度均匀为u_0，两端保持温度为u_1。[提示：定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{x=0} = u_1, u|_{x=l} = u_1, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

8、解：令$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ $\quad w(x) = u_1 + \frac{x}{l}(u_2 - u_1)$

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{x=0} = u_{1,} u|_{x=l} = u_2, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = u_0 - w(x) \end{cases}$$

通解为：$v = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$

由定解条件：$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l [u_0 - w(x)] \sin\frac{n\pi}{l} x dx$

$$= \frac{2(u_0 - u_1)}{n\pi}[(-1)^n - 1] + \frac{2(u_1 - u_2)}{n\pi}(-1)^n$$

（注：以上求解过程针对更复杂的$u_1 \neq u_2$问题求解进行）

第11章习题解答

16.2、解：

$$I=\int_{-1}^{1}x^2P_n(x)dx=\int_{-1}^{1}(\frac{2}{3}P_2+\frac{1}{3}P_0)\bullet P_n dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}P_2\bullet P_n dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}P_0\bullet P_n dx$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{3} & (n=0)\\ \frac{4}{15} & (n=2)\\ 0 & (n=others)\end{cases}$$

第11章习题解答

16.4、解：

$$(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)$$

$$I=\int_0^1 xP_l(x)dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{(l+1)}{(2l+1)}P_{l+1}(x)+\frac{l}{(2l+1)}P_{l-1}(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{(l+1)}{(2l+1)}P_{l+1}(x)dx+\int_0^1\frac{l}{(2l+1)}P_{l-1}(x)dx$$

$$=\int_0^1\frac{(l+1)}{(2l+1)}\frac{1}{(2l+3)}\left[P_{l+2}'(x)-P_l'(x)\right]dx$$

$$(2l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)$$

$$+\int_0^1\frac{l}{(2l+1)}\frac{1}{(2l-1)}\left[P_l'(x)-P_{l-2}'(x)\right]dx$$

$$=\frac{(l+1)}{(2l+1)}\frac{1}{(2l+3)}\left[P_{l+2}(x)-P_l(x)\right]\Big|_0^1$$

$$+\frac{l}{(2l+1)}\frac{1}{(2l-1)}\left[P_l(x)-P_{l-2}(x)\right]\Big|_0^1$$

16.6 证明：$(m+n+1)\int_0^1 x^m P_n(x)dx = m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)dx$

证： $n\int_0^1 x^m P_n(x)dx = \int_0^1 x^m \left[nP_n(x)\right]dx$ $\quad lP_l(x) = xP_l'(x) - P_{l-1}'(x)$ (16.3.16)

$$= \int_0^1 x^m \left[xP_n'(x) - P_{n-1}'(x)\right]dx$$

$$= \int_0^1 x^{m+1}P_n'(x)dx - \int_0^1 x^m P_{n-1}'(x)dx$$

$$= \int_0^1 x^{m+1}dP_n(x) - \int_0^1 x^m dP_{n-1}(x)$$

$$= x^{m+1}P_n(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 P_n(x)dx^{m+1} - x^m P_{n-1}(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 P_{n-1}(x)dx^m$$

$$= P_n(1) - P_{n\text{-}1}(1) - (m+1)\int_0^1 x^m P_n(x)dx + m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)dx$$

$$= -(m+1)\int_0^1 x^m P_n(x)dx + m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)dx$$

$$\therefore = (m+n+1)\int_0^1 x^m P_n(x)dx = m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)dx$$

得证！

第11章习题解答

16.7、证明： $\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n'(x)]^2dx=\int_{-1}^{1}\underline{(1-x^2)P_n'(x)}\bullet P_n'(x)dx$

$$(x^2-1)P_l'(x)=lxP_l(x)-lP_{l-1}(x)$$

$$=-\int_{-1}^{1}\left[nxP_n(x)-nP_{n-1}(x)\right]\cdot P_n'(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}nP_{n-1}(x)\cdot P_n'(x)dx-\int_{-1}^{1}nP_n(x)\cdot \underline{xP_n'(x)}dx$$

$$lP_l(x)=xP_l'(x)-P_{l-1}'(x)$$

$$=\int_{-1}^{1}nP_{n-1}(x)\cdot P_n'(x)dx-\int_{-1}^{1}nP_n(x)\cdot[nP_n(x)+P_{n-1}'(x)]dx$$

$$=n\int_{-1}^{1}\left[P_{n-1}(x)\cdot P_n'(x)+P_n(x)\cdot P_{n-1}'(x)\right]dx-n^2\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[P_{n-1}(x)\cdot P_n(x)\right]'dx-\frac{2n^2}{2n+1}=n\,P_{n-1}(x)\cdot P_n(x)\Big|_{-1}^{1}-\frac{2n^2}{2n+1}$$

$$=n\left[P_n(1)\cdot P_{n\text{-}1}(1)-P_n(-1)\cdot P_{n\text{-}1}(-1)\right]-\frac{2n^2}{2n+1}$$

$$=n\left[1-(-1)^n(-1)^{n-1}\right]-\frac{2n^2}{2n+1}=2n-\frac{2n^2}{2n+1}$$

$$=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

第11章习题解答

16.8、解： $(1) I=\int_{-1}^{1} xP_n(x)dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)\right]dx$

$$=\frac{n+1}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)\cdot P_0(x)dx+\frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}(x)\cdot P_0(x)dx$$

$$=\frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}(x)\cdot P_0(x)dx$$

$$(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)$$

当n=1时， I=2/3；

当n≠1时， I=0;

$2P_0(x)$

$$(2) I=\int_{-1}^{1}(2+3x)P_n(x)dx=\int_{-1}^{1}\left[3P_1(x)+2P_0(x)\right]\bullet P_n(x)dx$$

$$=3\int_{-1}^{1}P_1(x)\bullet P_n(x)dx+2\int_{-1}^{1}P_0(x)\bullet P_n(x)dx$$

当n=0时， I=4；

当n=1时， I=3*2/(2*1+1)=2;

当n>1时， I=0

第11章习题解答

16.9、解：定解问题为
$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, (r<1), \\ u|_{r=1} = \cos^2\theta \\ u|_{r=0} \text{ 有限}\end{cases}$$

轴对称问题。由分离变量法，其通解形式为：

$$u = \sum_{l=0}^{\infty}\left[C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)$$

由 $u|_{r\to 0}$ 有限 $\Rightarrow D_l = 0 \Rightarrow u = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta)$

由 $u|_{r=1} = \cos^2\theta \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} C_l 1^l P_l(\cos\theta) = \cos^2\theta$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{3}P_2(\cos\theta) + \frac{1}{3}P_0(\cos\theta)$$

比较系数，得

$$C_0 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}, C_l = 0 (l \neq 0,2)$$

$$\therefore u = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r^2 P_2(\cos\theta)$$

第11章习题解答

16.10、解：定解问题为 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0, (r<1) \\ u|_{r=1} = \cos^2\theta + 2\cos\theta \\ u|_{r=0} \text{ 有限} \end{cases}$

轴对称问题。由分离变量法，其通解形式为：

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \left[C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta)$$

由 $u|_{r\to 0}$ 有限 $\Rightarrow D_l = 0 \Rightarrow u = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta)$

由 $u|_{r=a} = \cos^2\theta + 2\cos\theta \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} C_l 1^l P_l(\cos\theta) = \cos^2\theta + 2\cos\theta$

$P_2(x) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$

$$= \frac{2}{3} P_2(\cos\theta) + 2P_1(\cos\theta) + \frac{1}{3} P_0(\cos\theta)$$

比较系数，得

$$C_0 = \frac{1}{3}, C_1 = 2, C_2 = \frac{2}{3}, C_l = 0 (l>2)$$

$$\therefore u = \frac{1}{3} + 2rP_1(\cos\theta) + \frac{2}{3} r^2 P_2(\cos\theta)$$

第11章习题解答

16.12、解：定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, (r > 1) \\ u|_{r=1} = \cos^2\theta \\ u|_{r\to\infty} \text{有限} \end{cases}$$

轴对称问题。由分离变量法，其通解形式为：

$$u = \sum_{l=0}^{\infty}\left[C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

由 $u|_{r\to\infty}$ 有限 $\Rightarrow C_l = 0 \Rightarrow u = \sum_{l=0}^{\infty} D_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$

由 $u|_{r=1} = \cos^2\theta \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} D_l 1^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = \cos^2\theta = \frac{2}{3}P_2(\cos\theta) + \frac{1}{3}P_0(\cos\theta)$

比较系数，得

$$C_0 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}, C_l = 0 (l \neq 0,2)$$

$$\therefore u = \frac{1}{3} + \frac{2}{3r^3} P_2(\cos\theta)$$

第11章习题解答

16.12、解：定解问题为
$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0,(r>1)\\ u|_{r=1} = \cos^2\theta \\ u|_{r\to\infty}\ \text{有限}\end{cases}$$

轴对称问题。由分离变量法，其通解形式为：

$$u = \sum_{l=0}^{\infty}\left[C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

由 $u|_{r\to\infty}$ 有限 $\Rightarrow C_l = 0 \Rightarrow u = \sum_{l=0}^{\infty} D_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$

由 $u|_{r=1} = \cos^2\theta \ \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} D_l 1^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = \cos^2\theta = \frac{2}{3}P_2(\cos\theta) + \frac{1}{3}P_0(\cos\theta)$

比较系数，得

$$C_0 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}, C_l = 0(l \neq 0,2)$$

$$\therefore u = \frac{1}{3} + \frac{2}{3r^3}P_2(\cos\theta)$$

第12章 习题解答

17.1、证明： $J_0'(x)=-J_1(x)$

由递推公式

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

当阶数v=0时，即可得：

$$\frac{d}{dx}\left[x^0J_0(x)\right]=-x^0J_{0+1}(x)\ \Rightarrow J_0'(x)=-J_1(x)$$

17.4、解： $\int x^4J_1(x)dx=\int x^2x^2J_1(x)dx=\int x^2\left[x^2J_2(x)\right]'dx$

$$\left[x^nJ_n(x)\right]'=x^nJ_{n-1}(x)$$

$$=\int x^2d\left[x^2J_2(x)\right]$$

$$=x^4J_2(x)-\int\left[x^2J_2(x)\right]dx^2$$

$$=x^4J_2(x)-2\int\left[x^3J_2(x)\right]dx$$

$$=x^4J_2(x)-2\int\left[x^3J_3(x)\right]'dx$$

$$=x^4J_2(x)-2x^3J_3(x)+c$$

第12章　习题解答

17.7、(1)证明： $\frac{d}{dx}[xJ_0(x)J_1(x)]=x\left[J_0^2(x)-J_1^2(x)\right]$

由递推公式 $\frac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right]=x^nJ_{n-1}(x)$ n=1时有：$[xJ_1(x)]'=xJ_0(x)$

由递推公式 $\frac{d}{dx}\left[x^{-v}J_v(x)\right]=-x^{-v}J_{v+1}(x)$ v=0时有：$J_0'(x)=-J_1(x)$

$$\frac{d}{dx}[xJ_0(x)J_1(x)]=J_0(x)[xJ_1(x)]'+[xJ_1(x)]J_0'(x)$$

$$=J_0(x)\cdot xJ_0(x)+[xJ_1(x)](-J_1(x))$$

$$=x\left[J_0^2(x)-J_1^2(x)\right]$$

(2)证明： $\int x^2J_1(x)dx=2xJ_1(x)-x^2J_0(x)+c$

$$\int x^2J_1(x)dx=-\int x^2J_0'(x)dx=-\int x^2dJ_0(x)$$

$$=-x^2J_0(x)+\int J_0(x)dx^2=-x^2J_0(x)+\int 2xJ_0(x)dx$$

$$=-x^2J_0(x)+2\int[xJ_1(x)]'dx$$

$$=2xJ_1(x)-x^2J_0(x)+c$$

第12章 习题解答

17.9解：定解问题为：

由
$$\begin{cases}\nabla^2 u(\rho,\varphi,z)=0 \quad (0\le\rho\le b, 0\le z\le h)\\ u\big|_{\rho=b}=0,\ u\big|_{\rho=0}\text{有限}\\ u\big|_{z=0}=0,\ u\big|_{z=h}=\rho^2\end{cases}$$

令$u(\rho,t)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$，本题为第一类齐次边界条件下的轴对称问题，其本征值和本征函数分别为

$$\sqrt{u}=\frac{x_n^{(0)}}{b} \qquad R(\rho)=J_0(\sqrt{u}\rho)=J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)$$

其中，$x_n^{(0)}$ 为$J_0(x)$ 的第n个零点。

定解问题通解为：

$$\mu(\rho,\varphi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n ch(\frac{x_n^{(0)}}{b}z)+B_n sh(\frac{x_n^{(0)}}{b}z)\right]J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)$$

由边界条件 $u\big|_{z=0}=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}A_n J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)=0 \Rightarrow A_n=0$

$$\mu(\rho,\varphi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sh(\frac{x_n^{(0)}}{b}z)J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)$$

17.9解（续）：

由 $u\big|_{z=h}=\rho^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n sh(\frac{x_n^{(0)}}{b}h)J_0(\frac{x_n^{(0)}}{l}\rho)=\rho^2$

$[N_n^{(0)}]^2=\frac{1}{2}l^2\left[J_1(x_n^{(0)})\right]^2$

$$\Rightarrow B_n sh(\frac{x_n^{(0)}}{b}h)=\frac{1}{\left[N_n^{(0)}\right]^2}\int_0^b \rho^2 J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)\rho d\rho$$

$\int x^3 J_0(x)dx=x^3J_1(x)-2x^2J_2(x)+C$

$$=\frac{2}{b^2\left[J_1(x_n^{(0)})\right]^2}\left(\frac{b}{x_n^{(0)}}\right)^4\int_0^b\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)^3 J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)d\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)$$

$$=\frac{2}{b^2\left[J_1(x_n^{(0)})\right]^2}\left(\frac{b}{x_n^{(0)}}\right)^4\left[\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)^3 J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)-2\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)^2 J_2(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)\right]\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{2b^2}{\left[J_1(x_n^{(0)})\right]^2}\left[\frac{J_0(x_n^{(0)})}{x_n^{(0)}}-2\frac{J_2(x_n^{(0)})}{\left(x_n^{(0)}\right)^2}\right]=\frac{-4b^2J_2(x_n^{(0)})}{\left[x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})\right]^2}$$

$$\therefore \mu(\rho,\varphi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4b^2J_2(x_n^{(0)})}{\left[x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})\right]^2}\frac{sh(\frac{x_n^{(0)}}{b}z)}{sh(\frac{x_n^{(0)}}{b}h)}J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho)$$

第12章　习题解答

【补充】 设有静电场的圆柱域(半径为 a)的上、下底接地，侧面电位为U_0，求域内电位分布。

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho+u_{zz}=0 \quad (\rho<a,0<z<h) \\ u\big|_{z=0}=u\big|_{z=h}=0 \\ u\big|_{\rho=a}=U_0 \end{cases}$$

解：令$u=R(\rho)Z(z)$，**由分离变量法：**

$$\begin{cases} Z''-\mu Z=0 & (1) \\ \rho^2R''+\rho R'+\mu\rho^2=0 & (2) \end{cases}$$

由 $u\big|_{z=0}=u\big|_{z=h}=0 \Rightarrow \mu=-(\frac{n\pi}{h})^2, Z(z)=\sin(\frac{n\pi}{h}z)\ (n=1,2,3\cdots)$

定解问题通解为 $u=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_nI_0(\frac{n\pi}{h}\rho)+D_nK_0(\frac{n\pi}{h}\rho)\right]\sin(\frac{n\pi}{h}z)$

由 $u\big|_{\rho=0}$ 有限 $\Longrightarrow$ $D_n=0$

$$\Rightarrow u=\sum_{n=1}^{\infty}C_nI_0(\frac{n\pi}{h}\rho)\sin(\frac{n\pi}{h}z)$$

（续）

$$\text{由}\ u\big|_{\rho=a}=U_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0(\frac{n\pi}{h}a)\sin(\frac{n\pi}{h}z)=U_0$$

$$\Rightarrow C_n I_0(\frac{n\pi}{h}a)=\frac{2}{h}\int_0^h U_0\sin(\frac{n\pi}{h}z)dz$$

$$=\frac{2}{n\pi}U_0\left[-\cos(\frac{n\pi}{h}z)\right]\Big|_0^h$$

$$=\left[-(-1)^n-1\right]\frac{2}{n\pi}U_0=\begin{cases}-\dfrac{4}{n\pi}U_0 & (n=2k)\\ 0 & (n=2k+1)\end{cases}$$

$$\therefore u=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2U_0}{k\pi}\frac{I_0(\frac{2k\pi}{h}\rho)}{I_0(\frac{2k\pi}{h}a)}\sin(\frac{2k\pi}{h}z)$$