学院__________姓名 __________ 学号____________任课老师________考场教室_________选课号/座位号_________

………密………封………线………以………内………答………题………无………效……

得 分

一、填空题（共 30 分，共 6 题，每空 2 分）

1. 拉普拉斯方程在球坐标系下可表示为 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$，分离变量时，令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，其中 $R(r)$ 满足____欧拉____方程；$Y(\theta,\varphi)$ 满足球函数____方程；将变量 θ，φ 进一步分离，令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，则 $\Theta(\theta)$ 满足____连带勒让德____方程，$\Phi(\varphi)$ 满足方程__ $\Phi''+\lambda\Phi=0$ __。（方程写名称或形式均可）

2. 在 $[-1,1]$ 的区间内将 x^2 按勒让德多项式展开，可得____ $\frac{2}{3}P_2+\frac{1}{3}P_0$ ________。

3. 贝塞尔方程有两个特解 $J_v(x)$ 和 $J_{-v}(x)$，当 v 为整数时，两者____线性相关（或 $J_{-v}(x)=(-1)^v J_v(x)$ ）________；当 v 不等于 0 或整数时，第二类柱函数的定义 $N_v=$__ $\frac{J_v(x)\cos v\pi-J_{-v}(x)}{\sin v\pi}$ _____；第三类柱函数的定义 $H_v^{(1)}=$______ $J_v(x)+iN_v(x)$ ____________，$H_v^{(2)}=$______ $J_v(x)-iN_v(x)$ ___。

4. 第一类修正（虚宗量）贝塞尔函数 $I_v(x)$ 与贝塞尔函数 $J_v(x)$ 的关系是_______ $I_v(x)=i^{-v}J_v(ix)$ _______，当 $x\to 0$ 时：$I_0(0)=$___1___，$I_v(0)=$___0____ $(v\neq 0)$。

5. 0 阶球贝塞尔函数函数的初等函数可以表示为 $j_0(x)=$ $\frac{1}{x}\sin x$ 。

得 分

二、写出下列定解问题的本征值问题。求出本征函数和本征值，并给出问题的通解（不要求积分确定系数的值）。（共 24 分）

1. 球坐标系下定解问题 $\begin{cases}\nabla^2 u=0 \quad (r<r_0)\\ u|_{r=r_0}=f(\theta)\\ u|_{r=0}\text{ 有限}\end{cases}$ （8 分）

解： 本征值问题 $\begin{cases}(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0\\ x=\pm1\text{解有限}\end{cases}$ -----3分

$$\begin{cases}\text{本征函数} & P_l(x) \\ \text{本征值} & l=0,1,2\ldots\end{cases}$$ -----2分

通解：$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)$$

球内问题：$u|_{r=0}$ 有限 $\Rightarrow B_l=0$

$$\therefore u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)$$ -----3分

2. 半圆形薄膜的振动问题 $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u=0 & 0\le\rho<R,0\le\varphi\le\pi \\ u|_{\rho=R}=0 & u|_{\rho=0}\ \text{有限} \\ u|_{\varphi=0}=u|_{\varphi=\pi}=0 & \\ u|_{t=0}=f_1(\rho,\varphi) & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=f_2(\rho,\varphi)\end{cases}$$ （10 分）

解：本征值问题1 $$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0 \\ \Phi|_{\varphi=\pi}=0,\ \Phi|_{\varphi=0}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{本征函数}:\sin m\varphi \\ \text{本征值：}\lambda=m^2 \quad m=1,2\ldots\end{cases}$$ ----2+1分

本征值问题2 $$\begin{cases}R''+\dfrac{1}{\rho}R'+(k^2-\dfrac{m^2}{\rho^2})R=0 \\ R|_{\rho=R}=0, \quad R(0)\text{有限}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{本征函数：}J_m(k_i^{(m)}\rho) \\ \text{本征值：}k_i^{(m)}=\dfrac{p_i^{(m)}}{l}(i=1,2\ldots)\end{cases}$$ $p_i^{(m)}$为m阶贝塞尔函数的第i个零点 ------2+2分

通解：$$u(\rho,\varphi,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_{mi}\cos(k_i^{(m)}at)+B_{mi}\sin(k_i^{(m)}at)\right)J_m(k_i^{(m)}\rho)\sin m\varphi$$

------3分

3. $$\begin{cases}\nabla^2 u=0, \quad (0<z<h,\rho<l) \\ k\left.\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=l}=q_0,\ u|_{\rho=0}\ \text{有限} \\ u|_{z=0}=0, \quad u|_{z=h}=0\end{cases}$$ （6 分）

本征值问题 $\begin{cases} Z'' - \mu Z = 0 \\ Z|_{z=0} = 0, \quad Z|_{z=h} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 本征函数：\sin\sqrt{-\mu}z \\ 本征值：\sqrt{-\mu} = \dfrac{n\pi}{h} \ (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$ ------2+1 分

通解 $u(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0(\frac{n\pi}{h}\rho)\sin\frac{n\pi}{h}z$ ------3 分

得 分

三、证明题（共 16 分）

1. $\int_{-1}^{1} P_l(x)dx = 0 \quad (l = 1,2,3\ldots)$ （8 分）

证明：$\because P_0(x)=1$

原式 $= \int_{-1}^{1} P_0(x)P_l(x)dx = 0 \ (n \neq 0)$

2. 证明 $x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$ 。(8 分)

证明：$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = -x^2 J_1'(x) - xJ_1(x) + x^2 J_0(x)$

根据递推公式 $Z_\nu'(x) + \frac{\nu}{x} Z_\nu(x) = Z_{\nu-1}(x)$

左边 $= -x^2\left[J_0(x) - \frac{1}{x}J_1(x)\right] - xJ_1(x) + x^2 J_0(x) = 0$

得证。

得 分

四、计算题（ 共 30 分）

1. 在球坐标系下利用分离变量法求解下列定解问题。

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \quad (r > a, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi) \\ u\big|_{r=r_0} = \sin^2\theta\cos^2\varphi \end{cases}$$ （15 分）

解：通解为

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(A_l^m r^l+B_l^m r^{-(l+1)})\left[C_l^m\cos m\varphi+D_l^m\sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)$$

---------5 分

考虑$u|_{r\to\infty}$有限值$\Rightarrow A_l^m=0$　即：$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^{-(l+1)}\left[C_l^m\cos m\varphi+D_l^m\sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)$

---------2 分

代入球面边值条件：

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r_0^{l+1}}\left[C_l^m\cos m\varphi+D_l^m\sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)=\sin^2\theta\cos^2\varphi=\frac{1}{3}P_0-\frac{1}{3}P_2+\frac{1}{6}P_2^2\cos2\varphi$$

--------5 分

$D_l^m=0$

$C_0^0=\frac{1}{3}r_0,C_2^0=-\frac{1}{3}r_0^3,C_2^2=\frac{1}{6}r_0^3,C_l^m=0\ (l\neq0,2,m\neq0,2\ )$

$$\therefore u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{3}\cdot\frac{r_0}{r}P_0(\cos\theta)-\frac{1}{3}\cdot\frac{r_0^3}{r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{6}\cdot\frac{r_0^3}{r^3}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$$

---------3 分

2. 在柱坐标系下利用分离变量法求解下列定解问题。

$$\begin{cases}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0\\ u|_{\rho=a}=0,\quad u|_{\rho=0}\text{解有限}\\ u|_{z=0}=0,\quad u\ |_{z=h}=A\end{cases}$$

（15 分）

[提示:第一类齐次边界条件下，贝塞尔函数的模$N_i^{(m)}$满足$\left[N_i^{(m)}\right]_1^2=\int_0^l\rho\left[J_m(\frac{p_i^{(m)}}{l}\rho)\right]^2d\rho=\frac{1}{2}l^2\left[J_{m+1}(p_i^{(m)})\right]^2$]

解：

定解问题与φ无关，$\Phi=A$，$m=0$　-----------2分

通解：$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_i ch(\sqrt{\mu_i^0}z)+B_i sh(\sqrt{\mu_i^0}z)\right)J_0(\sqrt{\mu_i^0}\rho)$--------------5分

其中 $\sqrt{\mu_i^0}=\frac{p_i^{(0)}}{a}(i=1,2\ldots)$------------------2分

代入边界条件，确定系数A_i=0 -----------------------------------2 分

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i sh(\sqrt{\mu_i^0} h) J_0(\sqrt{\mu_i^0}\rho) = A \Rightarrow B_i = \frac{2A}{p_i^0 J_1(\sqrt{\mu_i^0} a) sh\left(\sqrt{\mu_i^0} h\right)}$$ ------------------------2 分

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2A}{p_i^0 J_1(\sqrt{\mu_i^0} a) sh\left(\sqrt{\mu_i^0} h\right)} sh(\sqrt{\mu_i^0} z) J_0(\sqrt{\mu_i^0}\rho)$$ ------------2 分