随机过程的定义及分类

一、简答题

1. 请给出随机过程的定义，一般通过什么工具或手段可以确定和研究随机过程？

解：设给定概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$和指标集T，若对每个$t\in T$，有定义在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量$X_t(\omega),\omega\in\Omega$与之对应．称依赖于$t$的随机变量族$X_t$为**随机过程**(随机函数)，记为$\{X_t(\omega),t\in T\}$，或记为$X_t,t\in T$及$X(t),t\in T$．

根据柯尔莫哥罗夫存在定理，我们可以通过随机过程的有限维分布函数族。
随机过程的均值函数、方差函数、自相关函数等数字特征研究确定一个随机过程。

2. 在你所学过的随机过程中，哪个（些）随机机过程同时具有马尔可夫性，平稳性，均方遍历性？请简要说明理由。

如何理解马氏过程的马氏性？马氏过程的分布有什么特点？

答：马氏性即知道“当前状态”的情况下，过去信息对推断将来的概率分布不起作用。马氏过程的有限维分布函数由转移分布函数与初始分布函数确定.

1、请分别说明平稳随机过程均值的均方遍历性，齐次马尔可夫链的遍历性与状态的遍历性（遍历态）的含义.

解：平稳随机过程均值均方遍历的含义是指：可认为过程的一条样本函数就经历了状态空间的所有状态，故可用时间均值来代替统计均值；3

齐次马尔可夫链为遍历的是指：随着转移步数的无限增大，马氏链转移到状态空间各个状态的概率会逐步稳定于某个极限概率，且此极限概率与初始状态无关；2

遍历态则是指齐次马尔可夫链从该种状态出发，几乎一定会在有限步返回，且每一步均有返回的可能.

定义：正常返 非周期 2

随机过程的定义及分类

2．随机过程 $X(t)=X+Yt,-\infty<t<+\infty$，其中 $X\sim B(1,0.4),Y\sim U\left(0,2\pi\right)$，且相互独立，请画出两条样本函数简图，并给出均值函数 $m_X(t)$

3．(张)随机过程 $X(t)=\cos\left(t+A\right),-\infty<t<+\infty$，其中 A 是随机变量，其分布律为 $P\{A=i\}=\frac{1}{3}(i=0,\frac{\pi}{2},\pi)$，求：（1）画出样本函数简图；（2）求均值函数 $m_X(t)$．

2. 随机过程 $X_t=At^2+B,-\infty<t<+\infty$，其中 $A\sim B(1,0.4)$(即 0-1 分布)，$B\sim U(0,2\pi)$（即均匀分布），且 A 与 B 相互独立，请画出该随机过程 X_t 两条样本函数简图，并求均值函数 $m_X(t)$ 和 $R_X(s,t)$

$$m_X(t)=E(X_t)=E(At^2+B)=E(A)t^2+E(B)=0.4t^2+\pi$$

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E(X_sX_t)=E((As^2+B)(At^2+B))=E(A^2s^2t^2+AB(s^2+t^2)+B^2)\\&=E(A^2)s^2t^2+E(AB)(s^2+t^2)+E(B^2)\\&=0.16s^2t^2+0.4\pi(s^2+t^2)+\frac{4}{3}\pi^2\end{aligned}$$

设随机过程 $X(t)=Y\cdot t+c, t\in(0,\infty), c$ 为常数，Y 服从[0,1]区间上的均匀分布。

（1）请画出 $X(t)$ 的任意三条样本函数；

（2）求 $X(t)$ 的一维概率密度和一维分布函数；

（3）求 $X(t)$ 的均值函数、相关函数和协方差函数。

（2）求 $X(t)$ 的一维特征函数

解：$X(t)$ 的一维概率密度为 $f(x;t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t} & c<x<t+c\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$X(t)$ 的一维特征函数为 $\varphi(u;t)=E(e^{iuX(t)})=\int_c^{t+c}e^{iux}\dfrac{1}{t}dx=\dfrac{e^{iut}(e^{iuc}-1)}{iut}$

$X(t)$ 的一维分布函数为 $F(x;t)=\begin{cases}0 & x<c\\ \dfrac{x-c}{t} & c\le x<t+c\\ 1 & t+c\le x\end{cases}$

设随机过程 $X(t)=Y\cdot t+c, t\in(0,\infty), c$ 为常数，Y 服从[0,1]区间上的均匀分布。

（1）请画出 $X(t)$ 的任意三条样本函数；

（2）求 $X(t)$ 的一维概率密度和一维分布函数；

（3）求 $X(t)$ 的均值函数、相关函数和协方差函数。

$X(t)=\xi t+W(t)$，其中 $\xi\sim N(0,1)$，$W(t)$ 是参数为 σ^2 的维纳过程且与 ξ 相互独立。

（1）$X(t)$ 是正态过程吗？

（2）$X(t)$ 是平稳独立增量过程吗？

（3）求 $R_X(s,t)$。

（4）求 $X(t)$ 的 n 维分布的协方差矩阵

（1）$X(t)$ 是正态过程。

分布，或者 $X(t)$ 的任意

（2）不是。由于

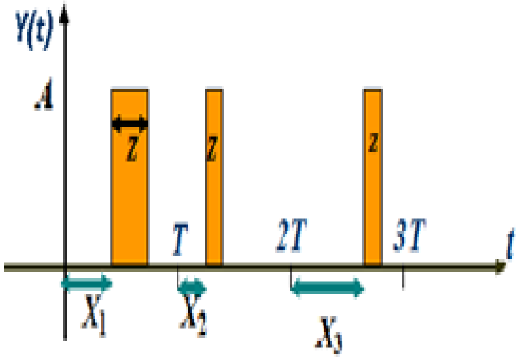
2. 设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是一个零均值的平稳过程，问$X(t)+X(0),t\in(-\infty,\infty)$是否仍是平稳过程.

答：当$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$恒等于一个随机变量时，$X(t)+X(0),t\in(-\infty,\infty)$是平稳过程.

当$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$不恒等于一个随机变量时，$X(t)+X(0),t\in(-\infty,\infty)$不是平稳过程.

2、设质点M在一直线上移动，每单位时间移动一次，且只能在整数点上移动，每次移动一个单位，质点M的移动是随机的。试建立描述这一随机现象的随机过程（包括相应的参数空间与状态空间）。

5. 一通讯系统，每隔 T 秒输出一个脉冲宽度为 $Z\sim U(0,T/3)$，幅度为 A 的脉冲。第 j 次脉冲开始时间为 X_j，j=1, 2, 3 …，X_j 相互独立同分布，$X_1\sim U(0,2T/3)$，X_j 与 Z 相互独立。其中一个样本函数如图，这个通讯系统传输的信号称为脉冲位置调制信号 $Y(t)$。求 $Y(t)$的一维概率分布.



$$P\{Y(t)=A\}=P\{0\le X_1\le t，\ X_1+Z\ge t\}$$

$$=\begin{cases} 0\le t\le \dfrac{1}{3}T, & P\{0\le X_1\le t，\ X_1+Z\ge t\}=\dfrac{6tT-9t^2}{4T^2} \\ \dfrac{1}{3}T\le X_1\le \dfrac{2}{3}T, & P\{t-Z\le X_1\le t\}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{2}{3}T\le t\le T, & P\{t-Z\le X_1\le \dfrac{2}{3}T\}=\dfrac{9(T-t)^2}{4T^2} \end{cases}$$

随机过程的定义及分类

二、(10 分)设 $\{X(n), n=1,2,\cdots,100\}$ 是独立同分布的随机序列，其中 $X(k)$ 的分布律为

$P\{X(k)=1\}=P\{X(k)=-1\}=\frac{1}{2}, k=1,2,\cdots,100$，设 $Y(n)=\sum_{k=n}^{100}X(k), \quad n=1,2,\cdots,100$.

(1) 求 $Y(n)$ 的特征函数 $\varphi_n(u)$；(2) 求 $Y(n)$ 的分布律；(3) 计算相关函数 $R_Y(m,n)$.

$$(\frac{1}{2})^{101-n}\sum_{k=0}^{101-n}C_{101-n}^{k}e^{jt(2k+n-101)}.$$

$$P\{Y(n)=2k+n-101\}=C_{101-n}^{k}(\frac{1}{2})^{101-n}$$

即 $P\{Y(n)=j\}=C_{101-n}^{\frac{2k-(101-n)}{2}}(\frac{1}{2})^{101-n}$，

其中 $j=-(101-n),-(101-n)+2,\cdots,101-n-2,101-n$.

$$\sum_{i=\max(m,n)}^{100}E[X(i)^2]=101-\max(m,n)$$

随机过程的定义及分类

5.设$\{X(t),t\in T\}$为平稳独立增量过程，其中$T=[a,b\}$,$P\{X(a)=0\}=1$.已知$X(t)$的分布函数为$F(x;t)$,试写出$\{X(t_1),X(t_2),X(t_3)\}$的联合分布函数$F(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3)$.

解：设$a\le t_1<t_2<t_3\le b$，$\{X(t_1),X(t_2),X(t_3)\}$的联合分布律为

$$p(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3)=P\{X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,X(t_3)=x_3\}$$

$$=P\{X(t_1)=x_1,X(t_2)-X(t_1)=x_2-x_1,X(t_3)-X(t_2)=x_3-x_2\}$$
$$=P\{X(t_1)=x_1\}P\{X(t_2)-X(t_1)=x_2-x_1\}P\{X(t_3)-X(t_2)=x_3-x_2\}$$
$$=P\{X(t_1)=x_1\}P\{X(t_2-t_1)=x_2-x_1\}P\{X(t_3-t_2)=x_3-x_2\}$$
$$=p(x_1;t_1)p(x_2-x_1;t_2-t_1)p(x_3-x_2;t_3-t_2)$$

$$\begin{pmatrix}X(t_1)\\X(t_2)\\X(t_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X(t_1)-X(a)\\X(t_2)-X(t_1)\\X(t_3)-X(t_2)\end{pmatrix}$$

$$F(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3)=P\{X\le x^T\}$$
$$=P\{Y\le x^TB^{-1}\}$$

$$X=B\cdot Y,x=(x_1,x_2,x_3)$$

随机过程的定义及分类

设某保险公司在$[0,t]$这段时间内接到的索赔次数服从参数为λ的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$，第k次

索赔发生时的索赔额为X_k，有$X_1,X_2,\cdots$相互独立同服从于区间$[a,b]$上的均匀分布$(0<a<b)$，且与泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$相互独立。

（1）求该保险公司在t时刻之前需要支付的累计索赔的期望值；

（2）由于资金具有时间价值，如果无风险利率为r，那么在0时刻产生的索赔额大小为x的资金在t时刻的净现值为xe^{-rt}。求保险公司在t时刻之前需要支付的索赔的累计期望净现值。

解：由题意，保险公司在t时刻之前需要支付的累加索赔服从复合泊松分布$\sum_{k=1}^{N(t)}X_k$。其数学期望为$E[\sum_{k=1}^{N(t)}X_k]=E[N(t)]E[X_1]=\lambda t\dfrac{a+b}{2}$。

（2）考虑资金的时间价值，保险公司在t时刻之前需要支付的索赔的累加净现值为

$\sum_{k=1}^{N(t)}X_k e^{-rW_k}$，其中$W_k,k=1,2,\cdots$为第$k$次索赔发生的时刻。在$N(t)=n$的条件下，$W_1,W_2,\cdots W_n$可视为由相互独立在$[0,t]$上均匀分布随机变量$U_1,U_2,\cdots U_n$构成的顺序统计量$U_{(1)},U_{(2)},\cdots U_{(n)}$。据此，由全数学期望公式我们有

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}X_k e^{-rW_k}]=E[E[\sum_{k=1}^{N(t)}X_k e^{-rW_k}]\mid N(t)]。$$

设某保险公司在$[0,t]$这段时间内接到的索赔次数服从参数为λ的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$，第k次索赔发生时的索赔额为X_k，有$X_1,X_2,\cdots$相互独立同服从于区间$[a,b]$上的均匀分布$(0<a<b)$，且与泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$相互独立。

（1）求该保险公司在t时刻之前需要支付的累计索赔的期望值；

（2）由于资金具有时间价值，如果无风险利率为r，那么在0时刻产生的索赔额大小为x的资金在t时刻的净现值为xe^{-rt}。求保险公司在t时刻之前需要支付的索赔的累计期望净现值。

对任意正整数n，有

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}X_k e^{-rW_k}]|N(t)=n]=E[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{-rW_k}\,|\,N(t)=n]$$

$$=E[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{-rU_{(k)}}]$$

$$=E[X_1]E[\sum_{k=1}^{n}e^{-rU_k}]$$

$$=nE[X_1]E[e^{-rU_1}]=n\frac{a+b}{2}\frac{1-e^{-rt}}{rt},$$

则有

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}X_k e^{-rW_k}]=\frac{a+b}{2}\frac{1-e^{-rt}}{rt}E[N(t)]=\frac{a+b}{2}\frac{1-e^{-rt}}{r}\lambda$$

三：设某保险公司在$[0,t]$这段时间内接到的索赔次数服从参数为λ的泊松过程$\{N(t),t\ge 0\}$，第k次索赔发生时的索赔额为X_k，有$X_1,X_2,\cdots$相互独立同服从于区间$[a,b]$上的均匀分布$(0<a<b)$，且与泊松过程$\{N(t),t\ge 0\}$相互独立。

（1）求该保险公司在t时刻之前需要支付的累计索赔的期望值；

（2）由于资金具有时间价值，如果无风险利率为r，那么在0时刻产生的索赔额大小为x的资金在t时刻的净现值为xe^{-rt}。求保险公司在t时刻之前需要支付的索赔的累计期望净现值。

解：由题意，保险公司在t时刻之前需要支付的累加索赔服从复合泊松分布$\sum_{k=1}^{N(t)} X_k$。其数学期望为$E[\sum_{k=1}^{N(t)} X_k]=E[N(t)]E[X_1]=\lambda t\dfrac{a+b}{2}$。

（2）考虑资金的时间价值，保险公司在t时刻之前需要支付的索赔的累加净现值为

$\sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-rW_k}$，其中$W_k,k=1,2,\cdots$为第$k$次索赔发生的时刻。在$N(t)=n$的条件下，$W_1,W_2,\cdots W_n$

可视为由相互独立在$[0,t]$上均匀分布随机变量$U_1,U_2,\cdots U_n$构成的顺序统计量$U_{(1)},U_{(2)},\cdots U_{(n)}$。据此，由全数学期望公式我们有

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-rW_k}]=E[E[\sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-rW_k}]\mid N(t)]$$

对任意正整数 n，有

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-rW_k}] \mid N(t)=n] = E[\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-rW_k} \mid N(t)=n]$$

$$= E[\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-rU_{(k)}}]$$

$$= E[X_1]E[\sum_{k=1}^{n} e^{-rU_k}] = nE[X_1]E[e^{-rU_1}] = n\frac{a+b}{2}\frac{1-e^{-rt}}{rt},$$

则有

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-rW_k}] = \frac{a+b}{2}\frac{1-e^{-rt}}{rt}E[N(t)] = \frac{a+b}{2}\frac{1-e^{-rt}}{r}\lambda \text{。}$$

3. 根据统计数据，从成都双流机场乘飞机到国内、港澳、欧洲、美洲旅游的人数之比为 4:3:2:1；设每位游客到国内、港澳、欧洲、美洲所支付的平均旅游费用分别为 3000 元、6000 元、10000 元、15000 元。假设从成都双流机场乘飞机到这四个地区旅游的人数是一泊松过程，每天平均人数为 1000 人，求 1 周内从成都双流机场出发到国内、港澳、欧洲、美洲旅游的乘客总花费的数学期望和方差。

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$$

该过程是一个复合泊松过程，所以有

$\tau_n \sim \Gamma$分布

3、设顾客在$[0,t)$时段内进入百货大楼的人数是一泊松过程，平均每 10 分钟进入 25 人。再设每位顾客购物的概率为 0.2，而每位顾客是否购物相互独立，且与进入大楼的顾客数相互独立。令$Y(t)$表示$[0,t)$内购物的顾客人数。

（1） 试问$\{Y(t),t\geq 0\}$是否为泊松过程，为什么？

（2） 试求第 20 位购物顾客的等待时间不超过 20 分钟的概率；

（3） 试求相邻两购物顾客的购物时间间隔的分布。

解：（1）是， $Y(t) \sim N(0.5t), t\geq 0$

（2）

$$f_{\tau_{20}}(t)=\begin{cases}\dfrac{0.5(0.5t)^{19}}{19!} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

$$P\{\tau_{20}\leq 20\}=P\{N(t)\geq 20\}=\sum_{n=20}^{+\infty}P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=20}^{+\infty}\frac{(0.5t)^n}{n!}e^{-0.5t}$$

0.5、

(3) $T_n=\tau_n-\tau_{n-1}$服从参数为 0.5 的指数分布，即

$$f_{T_n}(t)=\begin{cases}0.5e^{-0.5t} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

4. $\{N(t),t\geq 0\}$ 为一个零初值且具有独立增量的计数过程，已知其一维分布为泊松分布 $N(t)\sim P(\lambda t)$，能否确定过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是泊松过程？如果不能的话还需在此基础上添加一个什么条件？

解：不能！泊松过程定义一个计数过程必需满足零初值、独立增量、增量 $N(t)-N(s)\sim P(\lambda(t-s))$。一维分布为泊松分布不能说明增量为泊松分布，需添加一条“平稳增量”。

这样“$N(t)\sim P(\lambda t)$”＋“平稳增量”等价于“$N(t)-N(s)\sim P(\lambda(t-s))$”。

3. 设在$[0,t)$时段内乘客到达某售票处的数目是强度为$\lambda=3$（人/分）的泊松过程，试求：

(1) 在 4 分钟内有 8 位乘客到达售票处的概率p_1；

(2) 在 4 分钟内有 8 位乘客到达的条件下，前 2 分钟内有 3 个乘客到达的概率p_2；

(3) 相邻两乘客到达售票处的平均时间间隔.

解： 记泊松过程为$\{N(t),t\geq 0\}$

（1）$p_1=P\{N(4)=8\}=\dfrac{(4\times 3)^8}{8!}e^{-4\times 3}=\dfrac{12^8}{8!}e^{-12}$

（2）$p_2=P\{N(2)=3\mid N(4)=8\}=C_8^3(\dfrac{1}{2})^3(1-\dfrac{1}{2})^{8-3}=56\times(\dfrac{1}{2})^8=\dfrac{7}{32}$

（3）设T是两位顾客到达间隔时间，因参数为λ的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$的间隔时间序列相互独立同服从参数为λ的指数分布，故两位顾客到达的平均间隔时间$E\{T\}=1/\lambda=1/3$分钟。

随机过程的定义及分类

四、(10 分)设 $[0,t)$ 时间段内到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是参数为 λ 的泊松过程，每位顾客购买商品的概率为 p，且与其他顾客是否购买商品无关，与顾客人数无关。令 $Y(t)$ 表示 $[0,t)$ 内购物的顾客人数。

（1）试确定 $\{Y(t),t>0\}$ 是什么类型的随机过程？（2）试求 $\{Y(t),t>0\}$ 的一维、二维概率分布。

设在$[0, t)$时段内乘客到达某售票处的数目是强度为 $\lambda=2.5$（人/分）的泊松过程 $\{N(t),t\geq 0\}$，试求

(1) 在 5 分钟内有 10 位乘客到达售票处的概率 p_1；

(2) 在第 5 分钟有 10 位顾客到达，第 1 分钟内无顾客到达的概率 p_2.

(3) 在第 5 分钟有 10 位顾客到达，第 1 分钟内有顾客到达的概率 p_3.

四、(14 分)设 X，Y_1，Y_2，……为相互独立的随机变量序列，其中 X 服从参数为 10 的泊松分布，Y_1，Y_2，……同服从参数为 5 的指数分布．令

$$X(t)=\sum_{k=1}^{X}\mathrm{I}_{[0,t]}(Y_k),\quad t\in[0,+\infty]$$

其中示性函数定义为

$$\mathrm{I}_{[s,t]}(Y_k)=\begin{cases}1, & s\le Y_k\le t;\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

试计算过程$\{X(t)\}$的均值函数 $E\{X(t)\}$.

解 由全期望公式有

$$E\{X(t)\}=E\{E[X(t)|X]\}=\sum_{n=0}^{\infty}\{E[X(t)|X=n]\}P\{X=n\},$$

因 X，Y_1，Y_2，……为相互独立的随机变量序列，所以有

$$E\{X(t)|X=n\}=E\{\sum_{k=1}^{n}I_{[0,t]}(Y_k)\}=\sum_{k=1}^{n}E\{I_{[0,t]}(Y_k)\}$$

当 $t\ge 0$ 时,有

$$P\{\mathrm{I}_{[0,t]}(Y_k)=1\}=P\{0<Y_k<t\}=1-e^{-5t},$$

$$P\{\mathrm{I}_{[0,t]}(Y_k)=0\}=1-P\{\mathrm{I}_{[0,t]}(Y_k)=1\}$$

$$E\{I_{[0,t]}(Y_k)\}=1-e^{-5t}$$

故对 $n=1$，2，…，有 $E\{X(t)|X=n\}=n(1-e^{-5t})$,

从而有

$$E[X(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}\{E[X(t)|X=n]\}P\{X=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^n}{n!}e^{-10}n(1-e^{-5t})$$

$$=(1-e^{-5t})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n-1)!}e^{-10}=10(1-e^{-5t})$$

四、(10 分)设 Y_1，Y_2，……为相互独立的随机变量序列，且都服从柯西分布，其概率密度为 $f(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},y\in R$。$X(t)$ 服从速率为 3 的的齐次泊松过程，与 Y_1，Y_2，……相互独立。

令 $Z(t)=\sum_{k=1}^{X(t)}I_{[0,t]}(Y_k)$，$t\in[0,+\infty]$。其中示性函数定义为 $I_{[s,t]}(Y_k)=\begin{cases}1, & s\le Y_k\le t;\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$

试计算随机过程 $\{Z(t)\}$ 的均值函数 $m_Z(t)$.

解：$E\left(I_{[s,t]}(Y_k)\right)=P\{s\le Y_k\le t\}=\int_s^t\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dy=\frac{1}{\pi}(\arctan t-\arctan s)$

由全期望公式有

$$m_Z(t)=E\{Z(t)\}=E\{E[X(t)|X(t)]\}=\sum_{n=0}^{\infty}\{E[Z(t)|X(t)=n]\}P\{X(t)=n\}$$

二、（10 分）某大型系统在一个周期运行期间出现故障的总数 $X\sim P(\lambda)$，一个故障致整个系统停止运行的概率为 $p(0<p<1)$。设系统在一个周期内停止运行的次数为 Y，试写出 $E(Y|X)$的分布律。

随机过程的定义及分类

三、（10 分）设随机过程$\{X(t),t\in T\}$的协方差函数为

$$C_X(t_1,t_2)=t_1t_2$$

试求过程$Y(s)=\int_0^s X(t)dt,\ s\in T$的协方差函数和方差函数.

$$\frac{1}{4}s_1^2s_2^2.$$

方差函数为…… $D_Y(s)=C_Y(s,s)=\frac{1}{4}s^4$.

五、（10 分）已知随机过程$\{X(t),t\in R\}$的均值函数$m_X(t)=0$，看相关函数为$R_X(\tau)=\exp(-\tau^2)$，若$Y(t)=X(t)+\dfrac{dX(t)}{dt}$，求$m_Y(t)$，$R_Y(\tau)$，

解: $\boldsymbol{m_Y(t)=E(Y(t))=E(X(t)+\dfrac{dX(t)}{dt})=m_X(t)+\dfrac{dm_X(t)}{dt}=0}$

$$=e^{-\tau^2}-\frac{dR_X(\tau)}{d\tau}+\frac{dR_X(\tau)}{d\tau}-\frac{d^2R_X(\tau)}{d\tau^2}$$

$$=e^{-\tau^2}+2e^{-\tau^2}-4\tau^2e^{-\tau^2}$$

$$=(3-4\tau^2)e^{-\tau^2}$$

设 X_n(n 为自然数)是相互独立随机变量序列，其分布律为

$$X_n \sim \begin{bmatrix} n & 0 \\ \frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}, \quad n = 1,2,\ldots$$

试问该随机变量序列是否依概率收敛？是否均方收敛？说明理由

$E[|X_n|^2] = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n < \infty$, 所以该序列为二阶矩随机变量序列

由于

$$\|X_m - X_n\|^2 = E(X_m^2 - 2X_m X_n + X_n^2) = n - 2\cdot 1\cdot 1 + m = (n-m) - 2$$

故$\{X_n\}$不均方收敛。

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是标准维纳过程，常数 $a>0$，令

$$X(t)=W(t+a)-W(a), t \geq 0,$$

: 当 $t \to +\infty$ 时，$\dfrac{X(t)}{t}$ 是否存在均方极限？若存在，请给出均方极限。

$$\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{X(t)}{t}-0\right)^2=\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{W(t)}{t}-0\right)^2=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0.$$

设 $\boldsymbol{X(t)}$ 是均方可导的实平稳正态过程，求 $\boldsymbol{E[X(s)X'(t)]}$.

. 过程 $X(t)=\cos(\omega t+\Theta), t\in(-\infty,+\infty), \omega$ 是常数， Θ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。

（1）试求过程的均值函数和相关函数；（2）判断过程是否均方连续，是否均方可微。

$$= \frac{1}{2}\cos\omega\tau, \tau=t-s.$$

处连续，故过程均方连续。

，故过程均方可微。

随机过程的定义及分类

四、(15 分)设 $\{Y(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是实正交增量过程，$E[Y(t)]=0$，且 $E\{[Y(t)-Y(s)]^2\}=|t-s|$，$-\infty<s,t<+\infty$，令 $X(t)=Y(t)-Y(t-1),t\in(-\infty,+\infty)$，求其自相关函数和对应的谱密度函数。并判断随机过程 $\{Y(t),t\in R\}$ 是否是均值均方遍历的？

解： $\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是平稳过程，其自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2}(|\tau-1|+|\tau+1|-2|\tau|)$$

$$=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|\le 1\\ 0, & |\tau|>1\end{cases}$$

$$|\tau|>1: t-1<t<t+\tau-1<t+\tau$$

$$|\tau|<1: t-1<t+\tau-1<t<t+\tau$$

其谱密度函数为 $S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}R_X(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\int_{-1}^{1}(1-|\tau|)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2}=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$$

随机过程的定义及分类

（15 分）$X(t)$ 是一个平稳的零均值的正态随机过程，其功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\begin{cases}1,|\omega|\le 5\\ 0,\text{其他}\end{cases},$$

（1）求 $X(t)$ 的一维概率密度。

（2）求 $X(t)$ 的二维联合概率密度，当 t_1,t_2 是什么关系时 $X(t_1),X(t_2)$ 相互独立。

所以 $X(t)$ 的二维概率密度为

$$f_X(x_1,x_2;\tau)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1,x_2]C^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}$$

因为 $X(t_1),X(t_2)$ 相互独立等价于 $X(t_1),X(t_2)$ 互不相关。

因此 $C_{12}=C_{21}=0$，即 $\frac{\sin 5\tau}{\tau}=0$。

所以 $5\tau=k\pi,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，即 t_1,t_2 应满足 $t_2-t_1=\frac{k\pi}{5},(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 的条件时 $X(t_1),X(t_2)$ 相互独立。

三、(10 分) 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为参数 σ^2 的维纳过程，

（1） 证明 $\{W(t), t \geq 0\}$ 的均方可积性。

（2） 求其均方积分过程 $\{X(t) = \int_0^t W(s)ds, t \geq 0\}$ 的均值函数和方差函数。

（3） 写出 $X(t)$ 的一维概率密度。

3. 试阐述随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 均方连续、均方可导、均方可积的充要条件,这些条件成立的主要理论依据是什么?

平稳过程的？并分别给出例子。

已知随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的自相关函数 $R_X(\tau) = e^{-\tau^2}$，试求 $\{X(t), t \in T\}$ 与其

导数过程的互相关函数 $R_{X\dot{X}}(s,t)$.

五、（15 分）已知随机相位正弦波 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta), t\in R$（$\omega$ 为常数，$A\sim U(1,2)$，$\Theta\sim U(0,2\pi)$），且 A 与 Θ 相互独立。

（1）证明 $X(t)$ 是平稳过程；

（2）讨论 $\{X(t), t\in R\}$ 的均方连续性，均方可积性和均方可导性；

（3）判断 $\{X(t), t\in R\}$ 均值的均方遍历性；

（4）若 $X(t)$ 均方可导，求导数过程 $\{X'(t), t\in R\}$ 的自相关函数及二者的互相关函数。

已知 $R_X(\tau)=\exp(-\tau^2)$，若 $Y(t)=X(t)+\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$，求 $R_Y(\tau)$.

$\{X(t), t\in T\}$ 为定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的平稳过程，请给出均值均方遍历的

数学定义，并请阐述其工程意义.

1. 关于随机过程有三处出现“遍历性”概念，请简述“平稳过程的均值均方遍历”、“马氏链具有遍历性”以及“遍历状态”的概念，并至少阐述其中一种“遍历性”的工程意义.

并举例说明遍历过程的均值和自相关函数的估计。

六：设$\{W(t), t\geq 0\}$是标准维纳过程，常数$a>0$，令$X(t)=W(t+a)-W(t), t\geq 0$,
请证明下述结论：

（1）$\{X(t), t\geq 0\}$是正态过程；

（2）$\{X(t), t\geq 0\}$是宽平稳过程且是严平稳过程；

（3）$\{X(t), t\geq 0\}$满足均方连续，均方可微，均方可积；

（4）$\{X(t), t\geq 0\}$具有均方遍历性。

$\tau)$在$\tau=0$处连续，故均方连续且均方可积；但

--

说明$X(t)$均方不可微。

$\{X(t), t\geq 0\}$的均值具有均方遍历性。

随机过程的定义及分类

设 $\{W(t), t\ge 0\}$ 是 $\sigma^2=1$ 的维纳过程，令 $X(t)=W(t+1)-W(t)$. (1) 证明 $\{X(t), t\ge 0\}$ 是宽平稳过程; (2) 判断过程 $\{X(t), t\ge 0\}$ 的均值是否具有均方遍历性.

设 $\{W(t), t\ge 0\}$ 是 $\sigma^2=1$ 的维纳过程, 令 $X(t)=e^{-\frac{t}{2}}W(e^t)$(称为 Ornstein-Uhlenbeck 过程). (1) 证明: $\{X(t), t\ge 0\}$ 是一个严平稳过程;

(2) 判断过程 $\{X(t), t\ge 0\}$ 的均方连续性，均方可积性，均方可导性.

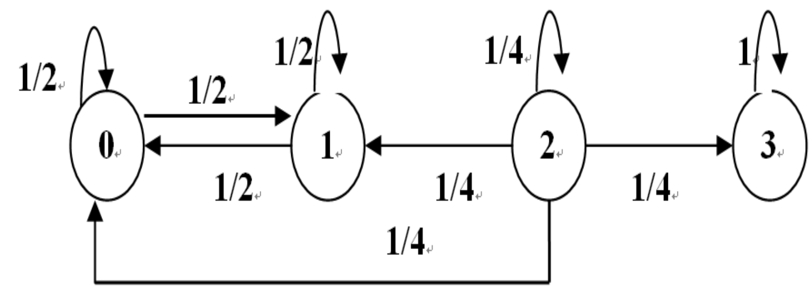
设随机过程 $X(t)=\xi\cos(\beta t+\eta), t\in R$，其中 $\xi\sim N(0,1)$，$\eta\sim U(0,2\pi)$，ξ 与 η 相互独立，β 为正常数. 试证: 随机过程 $\{X(t), t\in R\}$ 为平稳过程, 且具有关于均值的均方遍历性.

若 $\{X(t), t\ge 0\}$ 和 $\{Y(t), t\ge \tau_1\}$ 是联合平稳的平稳过程，求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$;

15 分）设有四个状态 $I=\{0,1,2,3\}$ 的马氏链，它的一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：（1）状态转移图为



（1）画出状态转移图；

（2）对状态进行分类；

（3）对状态空间 I 进行分解。

（4）该马氏链是否有平稳分布？如果有，请求出其平稳分布。

0，1 两个状态互通，且它们不能到达其它状态，它们构成一个闭集，记 $C_2=\{0,1\}$，且它们都是正常返非周期状态；

由于状态 2 可达 C_1，C_2 中的状态，而 C_1，C_2 中的状态不可能达到它，故状态 2 为非常返态，记 $D=\{2\}$。

（3）状态空间 I 可分解为：$E=D\cup C_1\cup C_2$

（4）该马氏链的平稳分布为 $(k,k,0,1-2k)$，其中 $0\le k\le \dfrac{1}{2}$。

设马氏链$\{X(n), n \geq 0\}$的状态空间$E = \{1,2,3\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

证明此链具有遍历性，并求其平稳分布。（10 分

（1）若当前状态为 1，求第 3 步后的状态为 1 的概率；

证：因$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 4/9 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 \\ 1/9 & 2/9 & 2/3 \end{pmatrix}$，故存在 n=2,使得对任意 I,j，有$p_{ij}^2 > 0$，因此该链具有遍历

设其平稳分布为$\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$,则由$\Pi P = \Pi$, 以及$\sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1$，有

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

计算可得平稳分布为$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$

设齐次马尔科夫链的状态空间为 $E=\{0,1,2\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}，其中 0<p<1$$

（1）试讨论此马氏是否存在平稳分布，存在则求出；（2）讨论该齐次马尔科夫链是否是遍历的，平稳分布是否为极限分布.

设齐次马氏链 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1)画出状态转移图；(2)讨论各状态性质；(3)分解状态空间.

随机过程的定义及分类

设齐次马尔科夫链的状态空间为 $E=\{0,1,2\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

是否存在极限分布？若存在则求出，并讨论该极限分布是否为平稳分布.

设马氏链$\{X(n), n \geq 0\}$的状态空间$E=\{1,2,3\}$，其一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

证明此链具有遍历性，并求其平稳分布。（

随机过程的定义及分类

设齐次马氏链$\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$的状态空间 $E=\{0,1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(1) 画出状态转移图； (2)讨论各状态性质； (3)分解状态空间.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

求 $P\{X_0=1, X_1=1, X_2=2\}$；

$$P\{X_0=1, X_1=3, X_2=2\}=P\{X_0=1\}p_{13}p_{32}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$$

求 $P\{X_2=i\}, i=0,1,2.$

$$\pi(2)=\pi(0)P^2$$

设齐次马氏链$\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$的状态空间$E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 画出状态转移图； (2)讨论各状态性质； (3)分解状态空间.

在传送数字 0 和 1 的通信系统中，每个传送数字必须经过若干级，而每一级中数字正确传送的概率为 p $(0<p<1)$，设 $X(0)$表示进入系统的数字，$X(n)$表示离开系统第 n 级的数字.已知$\{X(n), n=1,2,\cdots\}$是齐次马氏链. 试讨论经多级传送后，数字传输的准确可靠程度如何？

随机过程的定义及分类

另解：设电容器上的电荷在 n 时刻以概率 p 增加一个单位量，增加到 N 次后则保持不变，其中 $N\sim P(\lambda)$，且与增加过程统计独立。$Y(n)$是时刻 n 电容器上的电荷，证明：当$n\to\infty$时，随机序列$\{Y(n),n\geq 0\}$均方收敛。

设 n 时刻电荷为$Y(n)$，，有

$$Y(n)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}X(k), & n\leq N;\\ \sum_{k=1}^{N}X(k), & n>N.\end{cases}$$

其中$X(k)\sim B(1,p),k=0,1,2,\cdots$,相互独立。需证明$\{Y(n),n=1,2,\}$是科西列，即

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\left\|Y(n)-Y(m)\right\|^2=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}E\{[Y(n)-Y(m)]^2\}=0$$

不妨设 $n>m$, 当 $N=r$ 时

若$n>m>r$，有

$$Y(n)-Y(m)=\sum_{k=0}^{r}X(k)-\sum_{k=0}^{r}X(k)=0\ ,$$

若 $r>n>m$，有 $Y(n)-Y(m)\sim B(n-m,p)$

若 $n>r>m$，有

$$\boldsymbol{Y(n)-Y(m)=\sum_{k=0}^{r}X(k)-\sum_{k=0}^{m}X(k)\sim B(r-m,p)}$$

$$\Rightarrow\quad E\{[Y(n)-Y(m)]^2\big|N=r\}$$

$$=\begin{cases}0, & n>m>r;\\(n-m)^2p^2+(n-m)p(1-p), & r\ge n>m;\\(r-m)^2p^2+(r-m)p(1-p), & n\ge r>m.\end{cases}$$

$$\le \boldsymbol{r(r-1)p}$$

$$=(\boldsymbol{r-m})\boldsymbol{p}[1+(\boldsymbol{r-m-1})\boldsymbol{p}]$$

$$\le(\boldsymbol{r-1})\boldsymbol{p}$$

$\Rightarrow$ 对任意的 $N=r$，取 $\min(n,m)>r$，都有

$$E\{[Y(n)-Y(m)]^2\big|N=r\}=0,$$

$$\Rightarrow\quad E\{[Y(n)-Y(m)]^2\}=E\{E\{[Y(n)-Y(m)]^2\big|N\}\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}E\{[Y(n)-Y(m)]\big|N=r\}P\{N=r\}$$

$$E\{[Y(n)-Y(m)]^2\}=E\{E\{[Y(n)-Y(m)]^2|N\}\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}E\{[Y(n)-Y(m)]|N=r\}P\{N=r\}$$

$$=\sum_{r=0}^{m}0\times P\{N=r\}+\sum_{r=m+1}^{n}[(r-m)^2p^2+(r-m)p(1-p)]P\{N=r\}$$

$$+\sum_{r=n+1}^{\infty}[(n-m)^2p^2+(n-m)p(1-p)]P\{N=r\}$$

$$\le[(n-m)^2p^2+(n-m)p(1-p)]\sum_{r=m+1}^{\infty}P\{N=r\}$$

$$\le\sum_{r=m+1}^{n}\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}r(r-1)p+\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}r(r-1)p$$

$$=e^{-\lambda}\lambda^2p\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{\lambda^{r-2}}{(r-2)!}=e^{-\lambda}\lambda^2p\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}\xrightarrow{m,n\to 0}0$$

随机过程的定义及分类

5、设电容器上的电荷在随机时间 N 以前是随参数 p（$0<p<1$）的二项过程增加，即 $\{\xi_n \mid \xi_n \sim B(n,p), n\text{为非负整数}\}$。在 N 以后，电容器上有电荷保持常数。其中 N 是参数 λ 为泊松分布的随机变量，且与二项过程相互独立。若 X_n 是电容器在时刻的电荷。试说明随机变量序列 $\{X_n \mid n\in Z, n\geq 0\}$ 是均方收敛的。

解：　题意有

$$X_n=\begin{cases}\xi_n & n\leq N\\ C & n>N\end{cases}$$

其中是 C 为常数。则

$$E[(X_n-C)^2]=E\{E[(X_n-C)^2|N]\}$$

$$=E[(\xi_n-C)^2|N\geq n]P\{N\geq n\}+E[(C-C)^2|N<n]P\{N<n\}$$

$$=[np(1-p)+(np-C)^2]\sum_{i=n}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}E[(X_n-C)^2]=\lim\limits_{n\to\infty}[np(1-p)+(np-C)^2]\sum\limits_{i=n}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=0$，$\leq \lambda^2\sum\limits_{r=n}^{\infty}\frac{\lambda^{r-2}}{(r-2)!}e^{-\lambda}p \xrightarrow{n\to 0} 0$

故随机变量序列 $\{X_n \mid n\in Z, n\geq 0\}$ 是均方收敛的。

随机过程的定义及分类

设$N(t), t \geq 0$是参数为5 (个/分钟)的泊松过程，$X(t) = [N(t)]^3$. 试讨论随机过程$X(t)$是否为马尔可夫过程，是否是齐次的马尔可夫过程.

设$\{X(t), t \in R\}$为一随机过程，已知其有限维分布函数族为
$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$
$P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \cdots, X(t_n) \leq x_n\} | \forall n \geq 1, t_1, t_2, \cdots, t_n \in R,$
$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R\}.$
对给定的实数a,定义随机过程$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \leq a \\ 0, & X(t) > a \end{cases}$.求
（1）$Y(t)$的均值函数、自相关函数;
（2）现取n个时刻$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，在这n个时刻观察随机过程$Y(t)$，求在t_1时刻观察到0，后面$n-1$个时刻都观察到1 的概率.

设是$\{W(t), t \geq 0\}$参数为4的维纳过程，令

$$X(t) = \frac{1}{t}\int_0^t sW(s)ds.$$

求：$\{X(t), t \geq 0\}$的均值函数和协方差函数, 并讨论$\mathbf{l \cdot i \cdot m}_{t\to 0}X(t)$ 的均方收敛性.