一、填空题

1. $\cos\left[iLn\left(2i\right)\right]=$______________，$\mathrm{Re}[(2i)^{i}]=$_____________。

2. 已知 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$，则 $z^{100}+z^{50}+1=$______________。

3. $\sin^{2}(4+7i)+\cos^{2}(4+7i)=$_____________。

4. 要使复变函数 $f(z)=x^{2}+2xy+ay^{2}+i(-x^{2}+bxy+y^{2})$ 在复平面上处处解析，则 a,b 的取值分别为___________。

5. 计算积分 $\oint\limits_{|z-4|=3}\dfrac{1-\sin z}{z^{2}(z-4)}dz=$________________。

6. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b^{n}z^{n}$（$0<a<b$）的收敛半径为__________。

7. 将函数 $f(z)=e^{z}$ 以 $z_{0}=5$ 为中心展开为级数形式为 $f(z)=$______________。

8. 复变函数 $f(z)=\dfrac{z^{2}+1}{z^{3}(z-2)}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),2]=$______，$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=$______。

二、选择题

1、方程 $z^{2}=2z\,\mathrm{Re}(z)-1$ 在复平面上表示的几何形状为（　　　）

A. 圆形　　B. 直线　　C. 椭圆　　D. 双曲线

2、设 $f(z)=\sin z$ ，则以下命题中，不正确的是（　　　）

A. $f(z)$ 在复平面上处处解析　B. $f(z)$ 的周期为 2π　C. $\left|f(z)\right|\le 1$

D. $f(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

3、$z=i$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z^{2}+1}{(z-i)(z-2i)^{5}}$ 的（　　　）

A. 可去奇点　　B. 单极点　　C. 本性奇点　　D. 5 阶极点

4、若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{n}z^{n}$ 在 $z=1+2i$ 处收敛，则该级数在 $z_{0}=2i$ 处（　　　）

A. 一定是收敛的　　B. 有条件收敛　　C. 一定是发散的　　D. 不能确定敛散性

5、设 $z=\alpha$ 分别是函数 $f(z)$、$g(z)$ 的本性奇点和 m 阶极点，则 $z=\alpha$ 是函数 $f(z)g(z)$ 的（　　）

A．可去奇点　　B．本性起点　　C．m 阶极点　　D．小于 m 阶的极点

三、判断题

1. 等式 $Lnz^n = nLnz$ 一定成立。（　）
2. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 点处满足柯西-黎曼条件，则 $f(z)$ 在 z_0 处解析。（　）
3. 若级数 $\{z_n\}$ 绝对收敛，则 $\{\operatorname{Re} z_n\}$ 与 $\{\operatorname{Im} z_n\}$ 都绝对收敛。（　）
4. 若 z_0 分别是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的 m,n 阶极点（m>n），则 z_0 是 $f(z)/g(z)$ 的 $m-n$ 阶极点。（　）
5. 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则对 D 内任一简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)dz=0$。（　）
6. 若函数 $f(z)$ 是单连通区域 D 内的每一点均可导，则它在 D 内有任意阶导数。（　）
7. 若无穷远点是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname{Re}s\left[f(z),\infty\right]$ 必为零。（　）
8. 若函数 $f(z)$ 在复平面上解析，且对于任意 z 有 $|f(z)|\le M<\infty$，则 $f(z)$ 必为常数。（　）
9. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析，则将 $f(z)$ 在 z_0 处展开成级数必为泰勒级数。（　）
10. 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在，则函数 $f(z)$ 在 z_0 处可展开为罗朗级数，且其主要部分为有限多项。（　）

四、计算题

1、 求解析函数 $f(z)=\left(2xy-2y\right)+iv(x,y)$ 的完整表达式，并使 $f(2)=-i$。

2、 已知 $f(z)=\oint\limits_{|\lambda|=4}\dfrac{\lambda^2-3\lambda+1}{\lambda-z}d\lambda$ （z 为复数），求 $f'(3)$；

3、 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}$ 分别在指定区域内展开为级数形式。

（1）$1<|z|<4$　　　　（2）$0<|z-1|<3$

4、 计算积分 $I=\int\limits_{|z-1|=2}\dfrac{e^z}{z^2(z^2-4)}dz$ 。

5、计算积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+9}dx\ (m>0)$

五、证明题

1、利用积分 $\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z+2}dz$ 的值，证明 $\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos x}{5+4\cos x}dx=0$

2、若函数$\varphi(z)$在$z=\alpha$处解析，$z=\alpha$为函数$f(z)$的一阶极点且$\operatorname{Res}\left[f(z),\alpha\right]=A$，

证明：$\operatorname{Res}\left[f(z)\cdot\varphi(z),\alpha\right]=A\cdot\varphi(\alpha)$。