

# Étude analytique de la propagation d'ondes en conduites déformables

Fatima CHIRAZI, Jaâfar KHALID NACIRI, Mohamed OUZZANI TOUHAMI

Laboratoire de mécanique, faculté des sciences, Aïn Chok, BP 5366, Mâarif, Casablanca, Maroc  
E-mail : ouazzani@facsc-achok.ac.ma

(Reçu le 2 mai 1998, accepté le 11 juin 1998)

---

**Résumé.** On présente dans cette étude une résolution analytique complète de l'équation de propagation d'un signal périodique pour l'écoulement unidimensionnel d'un fluide non visqueux dans une conduite déformable. La solution proposée permet d'isoler, pour un signal émis à l'extrémité de la conduite et à un endroit donné de celle-ci, la part liée à ce signal et celle qui existerait en son absence. L'étude de l'évolution de ce signal d'extrémité nous permet, dans le cas particulier d'une onde solitaire, de déterminer à partir de l'analyse des réflexions en un site donné, la longueur du tube considéré.  
© Académie des Sciences/Elsevier, Paris

*écoulement pulsé / propagation d'ondes / conduite souple*

## *Analytical study of wave propagation in elastic conduits*

**Abstract.** *In this paper, an analytical resolution of a periodic signal propagation equation is presented. At a given site of the conduit, the proposed solution allows one to isolate the part linked to the signal emitted at the extremity of the conduit and the part that would exist in its absence. The investigation of the evolution of this signal located at the extremity allows us to determine the length of the tube (in the particular case of a solitary wave) using the analysis of reflections at a given site. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris*

*pulsatile flow / wave propagation / elastic conduits*

---

## *Abridged English Version*

Wave propagation analysis is a successful investigative technique for obtaining information about the propagation set. As a signal travels through a network of elastic conduits, it is subject to modifications, causing changes in its behaviour. An understanding of the its propagation makes possible a rigorous interpretation of the information transported by the signal. For this purpose, Pythoud [6] proposed a method for estimating the location of wave reflection sites, based on the separation of signal into forward and backward waves. Despite the assumptions made, it is not always easy to deduce a pertinent interpretation of the information contained in the signal. In the present study, we propose an analytical resolution of a periodic signal propagation equation. The mathematical model is based on the one-dimensional flow

---

Note présentée par Michel COMBARNOUS.

equations resulting from the integration of the continuity and momentum equations over the cross-section of the conduit [equations (1)]. If the friction and convective acceleration terms are neglected and the wall mechanical behaviour [equation (2)] is taken into account, the system (1) reduces to the propagation equation of section [equation (3)]. The solution of this equation is given by equation 8, where the functions  $f$  and  $g$  are determined from the compatible boundary and initial conditions [equations (4)–(7)]. These functions given by expression (9) depend on the perturbation introduced at the extremity of the conduit and the imposed initialization. This express a wave superposition and the apparition of reflection phenomenon at the initial time and at the origin ( $f(0) \neq 0$ ) (figure 1). Therefore, it appears that an elimination of this imposed initialization, in the particular case of a solitary wave, allows one a better interpretation of the information transported by the signal (figure 2). At a given site in the conduit, the mesure of the duration that separates the successive crossings of the signal is sufficient to determine the length of the conduit. The method proposed in this paper is promising in terms of potential application, notably for the localization of stenoses in the arterial system.

## 1. Introduction

En mécanique des fluides, la description du phénomène de propagation d'ondes dans un réseau de conduites déformables est souvent génératrice d'informations sur les anomalies de type géométrique ou mécanique dans ce réseau. Il est donc intéressant de maîtriser la propagation de ce signal afin de dégager une interprétation rigoureuse de l'information qu'il transporte. Cette démarche est prometteuse en terme d'application, notamment en biomécanique cardio-vasculaire, où elle peut permettre la définition de procédures de diagnostics atraumatiques. Dans ce cadre, de nombreux travaux furent menés tant sur l'analyse du phénomène de propagation des ondes de pression et de débit dans les conduites souples [1, 2], que sur la détermination des techniques de séparation de ces ondes en parties incidente et réfléchi [3–5]. Pour ces différentes études, il n'est pas toujours aisé de déduire, à partir de l'analyse des changements de l'allure du signal lors de son évolution, une interprétation pertinente de l'information qu'il contient [6].

Dans ce travail, on propose une résolution analytique complète de l'équation de propagation d'un signal périodique pour l'écoulement unidimensionnel d'un fluide non visqueux en conduite souple. Dans le cadre de cette résolution, la loi de tube prise en compte permet d'éviter l'introduction d'hypothèses simplificatrices pour la linéarisation du terme de gradient de pression. La solution analytique obtenue nous permet essentiellement d'isoler, en un site donné, la part liée au signal émis à l'extrémité de la conduite à partir de l'analyse des réflexions et celle qui existerait en son absence. L'étude de l'évolution de ce signal d'extrémité qui dépend, dans le cas général, des caractéristiques du milieu de propagation, se trouve ainsi simplifiée, ce qui nous permet de suggérer une méthodologie pour l'évaluation de la longueur du tube considéré dans le cas particulier d'une onde solitaire.

## 2. Formulation

Les équations traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour l'écoulement instationnaire d'un fluide newtonien incompressible dans une conduite à parois souples axisymétrique de longueur  $L$  et d'axe  $(z)$ , s'écrivent sous la forme unidimensionnelle globale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{Q^2(z, t)}{A(z, t)} \right) = -\frac{A(z, t)}{\rho} \frac{\partial P(z, t)}{\partial z} + F(z, t) \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{Q^2(z, t)}{A(z, t)} \right) = -\frac{A(z, t)}{\rho} \frac{\partial P(z, t)}{\partial z} + F(z, t) \end{array} \right. \quad (1b)$$

où  $Q$  est le débit,  $A$  la section,  $P$  la pression,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $F$  la contrainte de cisaillement à la paroi et  $\alpha$  le facteur de correction du débit de quantité du mouvement [7].

Le comportement mécanique de la paroi est pris en compte à travers la relation pression-section :

$$A(z, t) = A_0 \exp[C(P(z, t) - P_0)/A_0] \quad (2)$$

où  $A_0$  et  $P_0$  sont respectivement une section et une pression de référence et  $C$  une constante qui caractérise la rigidité de la conduite. Cette relation, déjà utilisée pour la modélisation du comportement rhéologique des parois artérielles [8], nous permet d'éviter l'introduction d'hypothèses restrictives pour la linéarisation du terme de gradient de pression. En effet, en tenant compte de cette loi de tube et en négligeant les termes convectifs et de frottement, le système d'équations (1) se ramène à l'équation de propagation écrite en terme de section suivante :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - V_0^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

pour laquelle  $V_0 = \sqrt{A_0/\rho C}$  est la vitesse de propagation.

Pour notre problème, les conditions aux limites considérées sont celles qui fixent les valeurs des sections aux extrémités amont et aval du tube ; elles s'expriment par :

$$A(z=0, t) = A_0 + \varepsilon_0 H(t) \quad \text{et} \quad A(z=L, t) = A_0 + \varepsilon_1 B(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

où  $H$  et  $B$  sont des fonctions connues du temps et où  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  sont respectivement les amplitudes de la partie oscillatoire des signaux d'entrée et de sortie.

Par ailleurs, les conditions initiales fixent la section et le débit à l'instant  $t = 0$  ; nous posons alors :

$$A(z, t=0) = A_0 \quad \text{et} \quad Q(z, t=0) = E(z) \quad \forall z \in [0, L] \quad (5)$$

où  $E$  est une fonction quelconque de  $z$ .

Compte tenu du fait que la résolution analytique de l'équation (3) nécessite la donnée de deux conditions initiales sur la section  $A(z, t)$ , nous utilisons l'équation (1a) pour transformer la condition initiale sur le débit en une condition initiale supplémentaire sur la section ; celle-ci s'écrit alors :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(z, t=0) = -E'(z) \quad \forall z \in [0, L] \quad (6)$$

La compatibilité des conditions initiales avec les conditions aux limites est assurée à travers les relations suivantes :

$$H(0) = B(0) = 0, \quad E'(0) = -\varepsilon_0 H'(0), \quad E'(L) = -\varepsilon_1 B'(0) \quad (7)$$

### 3. Résolution analytique

L'équation (3) admet une solution générale de la forme :

$$A(z, t) = f(z + V_0 t) + g(z - V_0 t) \quad (8)$$

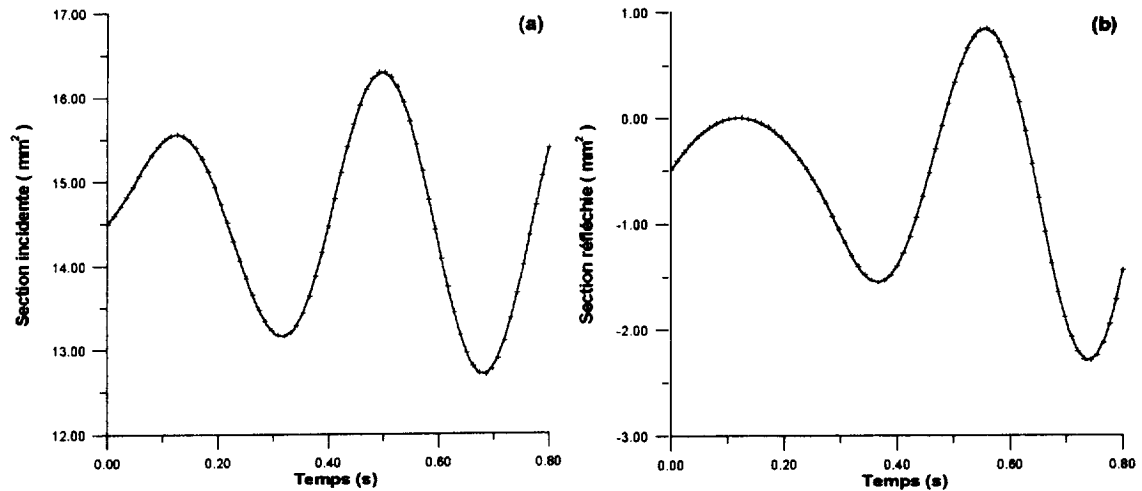
où  $f$  et  $g$  sont des fonctions que nous déterminons en tenant compte des conditions initiales et aux limites définies précédemment. On obtient après calculs :

$$f(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2V_0} E[s - 2kL] + \sum_{\substack{m=0 \\ k > m}}^{k-1} \varepsilon_1 B\left[\frac{s - (2m+1)L}{V_0}\right] - \sum_{\substack{m=1 \\ k \geq m}}^k \varepsilon_0 H\left[\frac{s - 2mL}{V_0}\right] + C_0 \\ \forall s \in [2kL, (2k+1)L], k, m \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{2V_0} E[(2k+2)L - s] + \sum_{m=0}^k \varepsilon_1 B\left[\frac{s - (2m+1)L}{V_0}\right] - \sum_{\substack{m=1 \\ k \geq m}}^k \varepsilon_0 H\left[\frac{s - 2mL}{V_0}\right] + C_0 \\ \forall s \in [(2k+1)L, (2k+2)L], k, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} A_0 - f(-s) + \varepsilon_0 H\left(-\frac{s}{V_0}\right), & \forall s \leq 0 \\ A_0 - f(s), & \forall s \in [0, L] \end{cases} \quad (9)$$

où  $s$  est un argument et  $C_0$  une constante arbitraire.

Nous constatons, d'une part, que les fonctions  $f$  et  $g$  dépendent des perturbations introduites aux extrémités de la conduite ainsi que de l'état initial de celle-ci et, d'autre part, que chaque composante représente, en un endroit donné de cette conduite, une superposition d'ondes qui proviennent des multiples réflexions de l'onde incidente ou des re-réflexions de l'onde réfléchie. Par ailleurs et tout en notant que ces expressions permettent d'accéder à des résultats identiques à ceux déterminés numériquement à partir de la technique de séparation SCM (*Split Coefficient Matrix*) [5] (*figure 1*), il nous paraît essentiel de signaler, à partir de cette même figure, l'apparition, dès l'instant initial, d'un phénomène de réflexion ( $f(0) \neq 0$ ). Cette réalité, souvent ignorée dans les approches classiques



**Figure 1.** Évolution de la section incidente (a) et de la section réfléchie (b) en fonction du temps.  
(—) Solution analytique, (+ +) solution numérique.

**Figure 1.** A comparison of the composite (a) forward and (b) backward running section wave.  
Analytical solution (—), numerical solution (+ +).

portant sur l'étude du phénomène de propagation de fluides incompressibles en conduite souple, est significative à plus d'un titre ; elle permet en particulier de traduire l'influence de l'initialisation imposée, couplée avec la déformabilité de la paroi, sur le phénomène de propagation.

#### 4. Résultats et conclusion

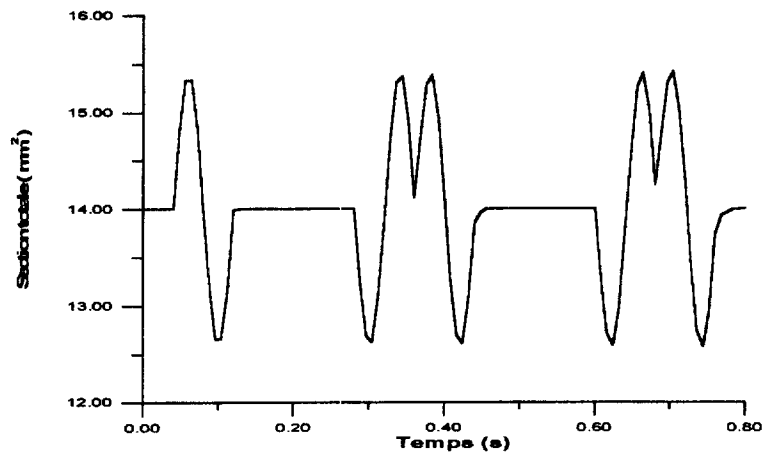
À partir du paragraphe précédent, il apparaît donc clairement qu'une distinction, dans le signal total, de l'influence des conditions initiales est de nature à permettre une meilleure interprétation de l'information transportée par ce signal. Dans ces conditions, et compte tenu de la nature élastique de la paroi d'une part et de l'absence de la viscosité pour le fluide d'autre part, tout signal émis à l'une des extrémités de la conduite se propagera tout au long de celle-ci sans aucune modification au niveau de son amplitude, mais uniquement avec des inversions au niveau de sa forme suivant qu'il s'agisse de sa partie incidente ou de sa partie réfléchie (*figure 2*). Pour ce faire, on procède tout simplement à une soustraction des termes qui traduisent cette influence de l'expression de  $f$ . Par ailleurs, et pour distinguer clairement l'aller et le retour de l'onde et afin d'éviter le phénomène de superposition des parties incidente et réfléchie, on se place dans le cas particulier d'une onde solitaire pour lequel les conditions aux limites sont définies par :

$$A(z=0, t) = \begin{cases} A_0 + \varepsilon_0 H(t), & 0 \leq t \leq T_0 ; \\ A_0, & t \geq T_0 ; \end{cases} \quad \text{et} \quad A(z=L, t) = A_0, \quad t \geq 0$$

et où le temps caractéristique  $T_0$  est supposé faible par rapport à  $L/V_0$ .

Figure 2. Évolution de la section totale en fonction du temps.

Figure 2. The total section wave.



Dans ces conditions, la mesure de la durée qui sépare les passages successifs du signal en un site donné du tube est alors suffisante pour déterminer sa longueur. Cette démarche est prometteuse en terme d'application, notamment pour la localisation des sténoses dans le réseau artériel.

#### Références bibliographiques

- [1] Reuderink P.J., Hoogstraten H.W., Sipkema P., Hillen B., Westerhof N., Linear and non-linear one-dimensional models of pulse wave transmission at high Womersley numbers, J. Biomech. 22 (1989) 819-827.

**F. Chirazi et al.**

- [2] Belardinelli E., Cavalcanti S., Theoretical analysis of pressure pulse propagation in arterial vessels, *J. Biomech.* 25 (1992) 1337–1349.
- [3] Parker K.H., Jones J.H., Forward and backward running waves in arteries : analysis using the method of characteristics, *J. Biomech. Eng.* 112 (1990) 322–326.
- [4] Stergiopulos N., Tardy Y., Meister J.J., Nonlinear separation of forward and backward running waves in elastic conduits, *J. Biomech.* 26 (1993) 201–209.
- [5] Ghouli A., Naciri J.K., Zagzoule M., Ouazzani M.T., Méthode de séparation d'ondes périodiques pour les écoulements de fluide visqueux en conduite souple cas non linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris, série IIb* 325 (1997) 61–68.
- [6] Pythoud F., Stergiopulos N., Westerhof N., Meister J.J., A method for determining the distribution of wave reflecting sites in the arterial system, *Am. J. Physiol.* 271 (1996) H1807–H1813.
- [7] Bretteville J., Khalid Naciri J., Mauss J., Zagzoule M., Expression de la contrainte pariétale pour un écoulement instationnaire dans une conduite déformable, *C. R. Acad. Sci. Paris, série II* 303 (17) (1986) 1525–1528.
- [8] Rochwell R.L., Nonlinear analysis of pressure and shock waves in blood vessels, thèse, Stanford University, 1969.