# Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
*Ciencias Matemáticas e*
*Ingeniería Informática*

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

# Contents

# 1 Superficies Paramétricas

**Definición 1.0.1** [Superficie Paramétrica]

*Una parametrización de una superficie paramétrica $S$ en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase $C^1$ definida en un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que:*

$$Im(\varphi) = \{\varphi(u,v) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in U\} = S$$

*Diremos que la parametrización $\varphi$ es regular cuando la pareja de vectores $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\}$ es linealmente independiente en todo punto de $U$. Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a $\varphi$ es no nulo en todo punto de $U$:*

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$$

*En este caso, el plano tangente a la superficie en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ tiene como ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u_0,v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ y = \varphi_2(u_0,v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0,v_0) \\ z = \varphi_3(u_0,v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo**

Dada la superficie $z = x^2 + y^2$, podemos parametrizarla con $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2x\vec{e}_3 + 2y\vec{e}_2 \neq (0,0,0)$$

**Ejemplo**

<u>Superficies explícitas:</u> Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$. Entonces la gráfica de $f$ es una superficie regular con parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.
Veamos que $\vec{N}_\varphi \neq (0,0,0)$:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_3 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_2 \neq (0,0,0)$$

$$Im(\varphi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in U, z = f(x,y)\}$$

**Ejemplo**

Dado el cilindro de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1$, buscamos una parametrización de la superficie. Tomando la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}, \quad z \in (0,1)$$

entonces vemos que $\underbrace{x^2 + y^2}_{1} = r^2 \implies r = 1$.

Por tanto, obtenemos que nuestra parametrización es:

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \neq (0,0,0)$$

**Ejemplo**

Tomando el cilindro $x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1$ del ejemplo anterior, podemos parametrizarlo de otra forma.
Consideramos el siguiente conjunto:

$$U = \{(u,v) : 1 < \sqrt{u^2+v^2} < 2, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

entonces definimos nuestra parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ sobre este conjunto tal que

$$\varphi(u,v) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sqrt{u^2+v^2} - 1 \right)$$

**Definición 1.0.2** [Superficies Equivalentes]

*Diremos que dos superficies paramétricas $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^3$, definidas respectivamente sobre los conjuntos abiertos conexos $U, V \subset \mathbb{R}^2$, son equivalentes si existe una aplicación biyectiva $h : V \to U$ de clase $C^1$ (es decir, un difeomorfismo) tal que:*

$$\psi = \varphi \circ h.$$

**Observación 1.0.1**

1. *En este caso $\varphi(U) = \psi(V)$.*
2. *En la definición se pide que los conjuntos $U$ y $V$ sean conexos. Como $\forall (s,t) \in V$, $D_h(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo lineal, sabemos que $det(D_h(s,t)) \neq 0$. Por conexión, $det(D_h(s,t))$ conserva el signo en todo $V$.*

**Definición 1.0.3** [Conservación de la Orientación]

1. *Se dice que $h$ conserva la orientación si $det(D_h(s,t)) > 0$ para todo $(s,t) \in V$, es decir las funciones $\varphi$ y $\psi$ tienen la misma orientación.*
2. *Se dice que $h$ cambia la orientación si $det(D_h(s,t)) < 0$ para todo $(s,t) \in V$, es decir las funciones $\varphi$ y $\psi$ tienen orientaciones opuestas.*

**Lema 1.0.1**

*Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones equivalentes de una superficie $S$. Entonces,* *para todo $(s,t) \in V$, se cumple que:*

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} \times \frac{\partial\psi}{\partial t} = det(D_h(s,t)) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(h(s,t))$$

*Equivalentemente,*

$$\vec{N}_\psi(s,t) = det(D_h(s,t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s,t))$$

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena a $\psi = \varphi \circ h$, obtenemos la siguiente relación entre las matrices jacobianas:

$$D_\psi(s,t) = D_\varphi(h(s,t)) \cdot D_h(s,t).$$

En términos de las derivadas parciales, esto se traduce en:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial t},$$

donde $h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$.

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial como:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \cdot D_h(s,t),$$

donde $D_h(s,t)$ es la matriz jacobiana de $h$:

$$D_h(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos el producto vectorial de las derivadas parciales de $\psi$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} \times \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Utilizando las expresiones anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} \times \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial t}\right).$$

Expandiendo el producto vectorial y usando que $\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial v} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} \times \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

Notamos que el término entre paréntesis a la derecha es el determinante de la matriz jacobiana $D_h(s,t)$:

$$\det(D_h(s,t)) = \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} \times \frac{\partial\psi}{\partial t} = \det(D_h(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)(h(s,t)).$$

Equivalentemente, para los vectores normales unitarios:

$$\vec{N}_\psi(s,t) = \det(D_h(s,t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s,t)),$$

donde $\vec{N}_\psi$ y $\vec{N}_\varphi$ son los vectores normales unitarios asociados a las parametrizaciones $\psi$ y $\varphi$, respectivamente. □

**Definición 1.0.4** [Orientación de una Superficie]

*Asociadas a las parametrizaciones $\varphi$ y $\psi$ obtenemos lso vectores normales unitarios*

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{N}_\varphi}{||\vec{N}_\varphi||} \quad y \quad \vec{n}_\psi = \frac{\vec{N}_\psi}{||\vec{N}_\psi||}$$

*Entonces diremos que $\varphi$ y $\psi$ tienen la misma orientación si:*

$$\vec{n}_\psi(s,t) = \vec{n}_\varphi(h(s,t)) \text{ o } \vec{n}_\psi(s,t) = -\vec{n}_\varphi(h(s,t))$$

## 1.1 Superficies como Conjuntos

**Definición 1.1.1** [Superficie Simple Regular]

*Diremos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie simple regular si $S = \varphi(\overline{D})$ donde $D = Int(C)$ siendo $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase $C^1$ inyectiva y regular en $\overline{D} \subset U$.*
*En este caso, el borde de $S$ de define como $\partial S = \varphi(C)$, que es una curva cerrada y regular a trozos en $\mathbb{R}^3$.*

**Definición 1.1.2** [Superficie Casi-Simple Regular]

*Diremos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie casi-simple regular si $S = \varphi(\overline{D})$ donde $D = Int(C)$ siendo $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase $C^1$ inyectiva y regular en $D$.*

**Definición 1.1.3** [Área e Integral de una Superficie]

*Dada una superficie $S$ en $\mathbb{R}^3$ simple regular o casi-simple regular, y una parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase $C^1$ de $S$, definimos:*

1. *El área de la superficie $S$ como:*

$$a(S) = \int_S 1dS = \int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv$$

2. *Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral de superficie de $f$ sobre $S$ es:*

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_D f(\varphi(u,v)) \|\vec{N}_\varphi\| dudv$$

**Ejemplo**

Consideramos la superficie $S$ de $\mathbb{R}^3$ resultante de acotar un cono por dos planos paralelos al plano $XY$, y dada por las ecuaciones:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, \ 1 < z < 2\}$$

Calculemos el área de la superficie $S$:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \qquad r^2 = x^2 + y^2 = z^2 \implies r = z \qquad \varphi(\theta, z) = \begin{cases} x = z\cos(\theta) \\ y = z\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\overline{D} = [0, 2\pi] \times [1, 2] \qquad S = \varphi(D)$$

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z\sin(\theta) & z\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = z^2\cos^2(\theta) + z^2\sin^2(\theta) + (-z)^2 = 2z^2 \implies \|\vec{N}_\varphi\| = z\sqrt{2} \neq 0 \quad \forall (0, z) \in D$$

Entonces $\varphi$ es inyectiva y regular en $D$ (aunque no en $\overline{D}$), luego $S$ es una superficie casi-simple regular.
Por último, el área de la superficie $S$ es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\sqrt{2}\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\frac{4}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{3}{2}\sqrt{2} d\theta = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot 2\pi = 3\pi\sqrt{2}$$

**Ejemplo**

Dada la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calculemos la integral de superficie de $f$ sobre la superficie $S$ dada por la sección de cono $x^2 + y^2 = z^2,\ 1 < z < 2$ del ejemplo anterior.
Entonces, la integral de superficie de $f$ sobre $S$ es:

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(\theta, z)) \|\vec{N}_\varphi\| d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 \cdot z\sqrt{2} dz d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} \left[z^4\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} (16 - 1)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{30\sqrt{2}}{4} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{15\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot (2\pi) = 15\pi\sqrt{2}$$

Observemos que $\int_S f dA = \int_S f dS$.

**Ejemplo**

Área de la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio $R$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(\theta, \phi) = \begin{cases} x = R\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y = R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = R\cos(\phi) \end{cases} \qquad \overline{D} = \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Entonces, tenemos que $D = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ y $\overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R\sin(\theta)\sin(\phi) & R\cos(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ R\cos(\theta)\cos(\phi) & R\sin(\theta)\cos(\phi) & -R\sin(\phi) \end{vmatrix}$$

$$= R^2\sin(\phi)\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{vmatrix} = -R^2\sin(\phi)\left(\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi)\right)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = R^4\sin^4(\phi) + R^4\sin^2(\phi)\cos^2(\phi) = R^4\sin^2(\phi)\left(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)\right) = R^4\sin^2(\phi)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\| = R^2\sin(\phi)$$

Luego el área de la esfera es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} R^2\sin(\phi)d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[-R^2\cos(\phi)\right]_0^\pi d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -R^2\left((-1)-1\right)d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2R^2 d\theta = 2R^2\cdot(2\pi) = 4\pi R^2$$

## 1.2 Superficies Regulares a Trozos

**Definición 1.2.1** [Suma de Superficies]

*Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies simples regulares. Se dice que la superficie $S$ es la suma de $S_1$ y $S_2$, y se denota por $S = S_1 + S_2$, si:*

1. $S = S_1 \cup S_2$
2. $S_1 \cap S_2 \subset \partial S_1 \cap \partial S_2$

*En este caso, se define el borde de $S$ como:*

$$\partial S = \overline{(\partial S_1 \cup \partial S_2) \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)}$$

*Si $\partial S = \emptyset$, entonces se dice que $S$ no tiene borde y es cerrada.*

*Análogamente, se define la suma de superficies $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ siendo cada $S_i$ una superficie simple regular.*

**Ejemplo**

Consideramos el cubo $S$ formado por la suma de las superficies de los seis lados del cubo $S = S_1, S_2, \ldots, S_6$. En particular tenemos que $\partial S = \emptyset$.

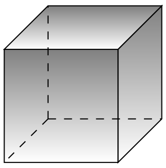
**Ejemplo**

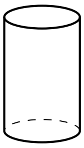
Consideramos ahora el cilindro $S$ formado por la suma de las superficies de los dos "tapas" del cilindro $S_1, S_2$ y la superficie lateral dividida en dos partes iguales $S_3$ y $S_4$. En este caso, tenemos que $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, y como en el caso anterior, $\partial S = \emptyset$.

**Ejemplo**

Quitémosle una de las tapas al cilindro, entonces tenemos que $S = S_1 + S_2 + S_3$, y en este caso

$$\begin{cases} \partial(S_1 + S_2) = C_0 \cup C_1 \\ \partial S_3 = C_0 \\ \partial S = \overline{(\partial(S_1 + S_2) \cup \partial S_3) \setminus (\partial S_1 + S_2) \cap \partial S_3} = \overline{(C_0 \cup C_1 \cup C_0) \setminus (C_0)} = \overline{C_1} = C_1 \end{cases}$$





Sea $\vec{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y $S$ una superficie. Nos preguntamos qué orientación tiene el campo $\vec{F}$ en la superficie $S$.
Necesitamos, por tanto, orientar $S$ de alguna forma.

## 1.3 Orientación de Superficies

**Definición 1.3.1** [Normal Unitaria de una Superficie]

*Sea $S$ una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Una **normal unitaria** en $S$ es una función continua*

$$\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$$

*tal que, para todo punto $p \in S$, se cumple que $\vec{n}(p)$ es un vector **unitario** y **normal** a la superficie en $p$, es decir:*

$$\vec{n}(p) \perp T_p(S) \quad y \quad \|\vec{n}(p)\| = 1,$$

*donde $T_p(S)$ denota el plano tangente a $S$ en el punto $p$.*

**Definición 1.3.2** [Superficie Orientada]

*Una **superficie simple regular orientada** es un par $(S, \vec{n})$, donde $S$ es una superficie regular y simple, y $\vec{n}$ es una normal unitaria que asigna de forma continua a cada punto de $S$ una orientación consistente.*

**Observación 1.3.1**

*Una superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones posibles.*

*Sea $\varphi : \overline{D} \to S$ una parametrización simple y regular de $S$, según la definición adoptada para $S$. Consideramos el siguiente campo normal:*

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}.$$

*Entonces, la función $\vec{n} = \vec{N}_\varphi \circ \varphi^{-1}$ define una normal unitaria en $S$, ya que $\varphi : \overline{D} \to S$ es un homeomorfismo.*

*Asimismo, la función $-\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$ también es una normal unitaria en $S$, lo que muestra que toda superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones opuestas.*

*Sean ahora $\vec{n}_1, \vec{n}_2 : S \to \mathbb{R}^3$ dos normales unitarias en $S$. Definimos la función*

$$h(p) = \langle \vec{n}_1(p), \vec{n}_2(p) \rangle$$

*para todo $p \in S$. Esta función $h : S \to \mathbb{R}$ es continua, y como $\vec{n}_1(p)$ y $\vec{n}_2(p)$ son vectores unitarios, se cumple que $|h(p)| = 1$ para todo $p \in S$.*

*Dado que $S$ es conexa, la imagen de $h$ debe ser conexa y contenida en el conjunto $\{-1, 1\}$. Por tanto, $h(p) \equiv 1$ o $h(p) \equiv -1$ en toda la superficie. En consecuencia, $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ o $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ en todo $S$.*

**Definición 1.3.3** [Integral de un Campo Vectorial sobre una Superficie]

*Sean $(S, \vec{n})$ superficie simple regular orientada y $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Se define*

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

**Observación 1.3.2**

1. *$\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$ es un campo escalar continuo en $S$.*
2. *Si $\varphi : \overline{D} \to S$ es una parametrización simple regular de $S$ tal que $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$,*

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u,v)), \vec{n}_\varphi(u,v) \rangle \|\vec{N}_\varphi(u,v)\| dudv = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u,v)), \vec{N}_\varphi(u,v) \rangle dudv$$

**Ejemplo**

Consideremos el paraboloide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$ y lo orientamos con la normal exterior (la que apunta hacia afuera del vaso).
Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (xz, yz, 0)$, entonces queremos encontrar la integral de $\vec{F}$ sobre $S$.

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \partial D = C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Consideramos la parametrización del paraboloide dada por:

$$\varphi : \overline{D} \to S \qquad \varphi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Nos preguntamos si $\vec{n}_\varphi$ induce la misma orientación que $\vec{n}$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

$\begin{cases} \vec{N}_\varphi(0,0) = (0,0,1) \\ \varphi(0,0) = (0,0,0) \end{cases}$ que apunta hacia arriba, es decir, hacia dentro del vaso, luego $\vec{n}_\varphi = -\vec{n}$

$$-\int_D \langle \vec{F}(\varphi(x,y)), \vec{N}_\varphi(x,y) \rangle dxdy = -\int_D \langle (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), 0), (-2x, -2y, 1) \rangle dxdy$$

$$= \int_D 2x^2(x^2+y^2) + 2y^2(x^2+y^2)dxdy = 2\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy$$

Hacemos el cambio de variables a coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta) \qquad dxdy = rdrd\theta$$

$$2\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot rdrd\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{1}{6}d\theta = 2\frac{1}{6}(2\pi) = 2\frac{\pi}{3}$$

**Definición 1.3.4** [Orientación Inducida en el Borde]

*Sea $(S,\vec{n})$ una superficie simple, regular y orientada, y sea $\varphi : \overline{D} \to S$ una parametrización regular de $S$ que preserva la orientación inducida por $\vec{n}$, es decir, $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$. Consideramos el borde de $S$ denotado por $\partial S = \varphi(\partial D)$.*
*Entonces se define la orientación de $\partial S$ inducida por $\vec{n}$ como la que se obtiene al recorrer $\partial D$ en sentido positivo y proyectar dicho recorrido a $\partial S$ mediante $\varphi$, es decir, haciendo la composición $\varphi \circ \gamma$, donde $\gamma : [a,b] \to \partial D$ es una parametrización de $\partial D$ que recorre $\partial D$ en sentido positivo.*

**Observación 1.3.3**

*Si $\gamma : [a,b] \to \partial D$ es una parametrización de $\partial D$ que recorre esta curva en sentido positivo, entonces la curva $\varphi \circ \gamma : [a,b] \to \partial S$ recorre $\partial S$ con la orientación inducida por $\vec{n}$.*

*Geométricamente, esto significa que $\partial S$ se recorre de manera que el sacacorchos avanza en la dirección de $\vec{n}$, es decir, si imaginamos un sacacorchos girando en el sentido del recorrido de $\partial S$, este se desplazará en la dirección de $\vec{n}$.*

*De manera equivalente, si $\vec{n}$ representa la vertical en el espacio, entonces $\partial S$ se recorre dejando la superficie $S$ a la izquierda, lo que coincide con la orientación inducida por $\vec{n}$.*

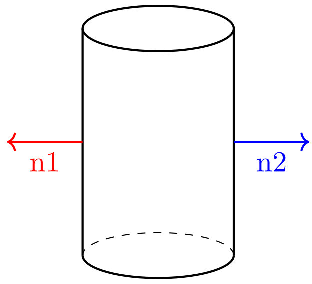
**Definición 1.3.5** [Orientaciones compatibles]

*Sean $(S_1,\vec{n}_1)$ y $(S_2,\vec{n}_2)$ dos superficies simples regulares, tales que $S = S_1 + S_2$.*
*Se dice que $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son compatibles si inducen orientaciones opuestas en $\partial S_1 \cap \partial S_2$.*
*En este caso, se dice que $\vec{n} = (\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ es una orientación en $\partial S$ que se llama **orientación inducida** por $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.*
*Se dice que $S = S_1 + S_2$ es una superficie orientable si $S_1$ y $S_2$ admiten orientaciones compatibles.*
*Analogamente, de manera recursiva, si $S = S_1 + \ldots + S_k$ donde $(S_1,\vec{n}_1),\ldots,(S_k,\vec{n}_k)$ son superficies orientadas, se define $(\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_k)$ como compatible si las orientaciones inducidas por $(\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_{k-1})$ en $S_1 + \ldots + S_{k-1}$ y $\vec{n}_k$ en $S_k$ son opuestas en $\partial(S_1 + \ldots + S_{k-1}) \cap \partial S_k$.*

**Ejemplo**

Tengamos un cilindro sin tapas, con orientacion "exterior", y sea:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1; \quad 0 \le z \le 1\}$$




Asi $S_1 + S_2 = S_0$, ademas $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son compatibles en $\partial S_1 \cap \partial S_2$. Ademas si tomamos $C_0$ y $C_1$ como las tapas, con caminos:

$$\gamma_0(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad +$$

$$\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Tenemos que $\partial S_0 = C_0^+ \cup C_1^-$.

**Ejemplo**

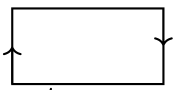
Ciliendro con la tapa de "abajo".
Tenemos que $S = (S_1 + S_2) + S_3 = S_0 + S_3$, donde:

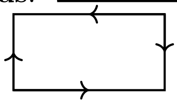
$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; \quad z = 0\}$$

Considerando $\vec{n}_3$ normal hacia abajo en $S_3$, obtenemos que $\vec{n}_3$ induce en $\partial S_3 = C_0$ la orientacion opuesta a la de $S_0$, luego no son compatibles.

**Ejemplo**

Sean las superficies no medibles:

**Banda de Moevius**: 

**Banda de Klein**: 

**Definición 1.3.6** [Integral de Superficie a Trozos]

*Sea $(S, \vec{n})$ una superficie regular a trozos orientada, es decir, $S = S_1 + \ldots + S_k$ donde $(S_1, \vec{n}_1), \ldots, (S_k, \vec{n}_k)$ son superficies simples regulares orientadas y $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k)$ son orientaciones compatibles.*
*Sea $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo, definimos la siguiente integral de superficie:*

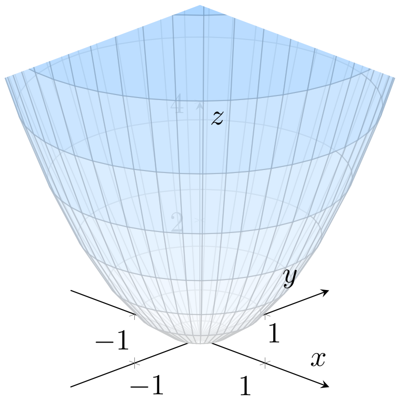
$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \sum_{i=1}^{k} \int_{(S_i,\vec{n}_i)} \vec{F}$$

**Ejemplo**

Sea $S = S_1 + S_2$ y $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 0)$, con

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z; \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; \quad z = 1\}$$




Con $S_1$ la parabola y $S_2$ la tapa.

En $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; \quad z = 1\}$, se ubducen orientaciones opuestas.
Podemos tomar la siguiente parametrización:

$$\varphi_1 : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \ \overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

Asi finalmente tenemos la integral:

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = -\int_D \langle \vec{F} \circ \varphi_1, \vec{N}_{\varphi_1} \rangle = -\int_D \langle (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2), 0), (-2x, -2y, 1) \rangle =$$

$$= 2\int_D (x^2 + y^2)^2 dxdy = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot rdrd\theta = 4\pi \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

Y la de $S_2$:

$$\int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F} = -\int_D \langle \vec{F} \circ \varphi_2, \vec{N}_{\varphi_2} \rangle = -\int_D \langle (x, y, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0$$

Y finalmente en $S_1 + S_2 = S$:

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F} = -\frac{2\pi}{3} + 0 = -\frac{2\pi}{3}$$