Cáclulo Integral[1]

Fall 2023

Pau Frangi Mahiques
Ciencias Matemáticas e
Ingenería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Medida de Lebesgue

1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición 1. Un n-rectángulo en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^{n} [a_i,\ b_i] = [a_1,\ b_1] \times [a_2,\ b_2] \times ... \times [a_n,\ b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i\ \forall i \tag{1}$$

Definimos el volúmen de R como:

$$\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \tag{2}$$

Consideramos también los n-rectángulos abiertos denotados por $\mathring{R}$, que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

Observación 1. Dado R n-rectángulo cerrado tal que $R = \prod_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i]$, podemos considerar para cada $\delta > 0$ el n-rectángulo abierto $R_\delta = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \delta,\ b_i + \delta)$. Se tiene que $R \subset R_\delta$ y $\text{vol}(R_\delta) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i + 2\delta) = \text{vol}(R) + 2n\delta$. Por tanto:

$$\text{vol}(R) = \lim_{\delta \to 0} \text{vol}(R_\delta) \tag{3}$$

Definición 2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la medida exterior de A como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ n-rectángulos cerrados} \right\} \tag{4}$$

Donde la ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de n-rectángulos que recubren A. A esta medida exterior la llamamos medida de Lebesgue exterior.

Observación 2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$

1. $m^*(A) = +\infty \iff \forall \{R_j\}_{j\in J}$ tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ se tiene que $\sum_{j\in J} \text{vol}(R_j) = +\infty$
2. $m^*(A) = 0 \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \{R_j\}_{j\in J}$ tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ y $\sum_{j\in J} \text{vol}(R_j) < \epsilon$
3. $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \{R_j\}_{j\in J}$ tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ y $\sum_{j\in J} \text{vol}(R_j) < \alpha + \epsilon$

Definición 3. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo si $m^*(A) = 0$.

1. Si R es un n-rectángulo degenerado, es decir, R tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces R es un conjunto nulo ($m^*(R) = 0$).
2. En $\mathbb{R}^2$, sea el conjunto $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$. Dado $\epsilon > 0$ tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \frac{1}{\epsilon}$. Consideramos $A \subset \bigcup_{i=1}^{m}[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$. Se tiene que $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{vol}([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \epsilon$. Por tanto, $m^*(A) = 0$.

Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1. Sea $m^* \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ una función que cumple:

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. $m^*(A) \leq m^*(B)$ si $A \subset B$
3. $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

Entonces m^* es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$.

Proof.

1. $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$ con R_j n-rectángulos degenerados $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$.
2. Sea $A \subset B$ y sea $\{R_j\}_{j \in J}$ tal que $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$. Entonces $\{R_j\}_{j \in J}$ es un recubrimiento de A y por tanto $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$.
3. Si $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = +\infty$ entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\exists \{R_{j,i}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$ y por tanto se tiene que $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, se tiene que $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$.

$\square$

Corolario 1. La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

Proof. Sea $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset R^n$ tal que $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ entonces $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$. $\square$

Lema 1. Sea $A \in \mathbb{R}^n$ entonces $m^*(A) = \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ con Q_i n-rectángulos abiertos$\}$

Proof. Denotamos por β el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de rectángulos abiertos tal que $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$. Tenemos entonces que $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{Q}_j$ y puesto que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\overline{Q}_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j)$, se tiene que $m^*(A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\overline{Q}_j) \leq \beta$. Por tanto, $m^*(A) \leq \beta$. Veamos ahora la otra desigualdad $\beta \leq m^*(A)$. Si $m^*(A) = +\infty$ entonces $\beta = +\infty$ y no hay nada que demostrar. Supongamos que $m^*(A) < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos cerrados tal que $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$ y $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(A) + \epsilon$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideramos $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^j}$. Escogiendo $\delta_j > 0$ lo suficientemente pequeño, se tiene que $\text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \text{vol}(R_j) + \epsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Nótese que aquí $\text{vol}(R_j)_{\delta_j}$ denota el volumen del n-rectángulo abierto R_j con lados aumentados en δ_j. Entonces $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j}$ y $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{vol}(R_j) + \epsilon_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(A) + 2\epsilon$. Por tanto, $\beta \leq m^*(A)$. $\square$

Definición 4. Una partición del intervalo $[a, b]$ es una colección numerable de puntos $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$. Dado un n-rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, una partición $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ de R es una colección particiones P_i de $[a_i, b_i]$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ siendo $R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

Los subrectángulos de P son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1,i_2,...,i_n} = \prod_{j=1}^{n}[t^j_{i_j}, t^j_{i_j+1}] \tag{5}$$

Denotamos $S \in P$ para indicar que S es un subrectángulo de P.

Lema 2. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo y P una partición de R. Entonces:

1. $R = \bigcup_{S\in P} S$
2. Si $S, S' \in P$ y $S \neq S'$ entonces $S \cap S' = \emptyset$
3. $\text{vol}(R) = \sum_{S\in P} \text{vol}(S)$

Proposición 1. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo entonces $m^*(R) = \text{vol}(R)$.

Proof.
" $\leq$ "
Sea $R \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j$ con $R_1 = R$ y R_j degenerados para $j > 1$. Entonces:

$$m^*(R) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) = \text{vol}(R).$$

" $\geq$ "
Dado $\epsilon > 0$ existe $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos abiertos tal que $R \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(Q_j) < m^*(R)+\epsilon$. Sabemos que R es compacto al ser cerrado y acotado y, por tanto, al ser $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ un recubrimiento abierto de R, existe un subrecubrimiento finito $\{Q_1, Q_2, ..., Q_m\}$ de R. Entonces $R \subset \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{Q}_i$. Consideramos $R_j = R \cap \overline{Q}_j$ para $j = 1, 2, ..., m$. Tenemos entonces que $R = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{Q}_j$ y además prolongando los lados podemos obtener una partición P de R tal que cada subrectángulo de P está contenido el algún R_j para $1 \leq j \leq m$. Por tanto, $\text{vol}(R) = \sum_{S\in P} \text{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^{m} \text{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \text{vol}(Q_j) < m^*(R)+\epsilon$. Por tanto, $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$. □

1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Notación: Para $A \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por A^c al complementario de A en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue si para todo $R \subset \mathbb{R}^n$ n-rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c) \tag{6}$$

Proposición 2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces son equivalentes:

1. A es medible en el sentido de Lebesgue.
2. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto se tiene que $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.
3. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto se tiene que $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.

Proof.
"2 $\implies$ 3"
Trivial
"3 $\implies$ 2"
$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A \cap A^c) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$
"2 $\implies$ 1"
Inmediato, tomando $E = R$.
"1 $\implies$ 3"
Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto, si $m^*(E) = +\infty$ entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $m^*(E) < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos cerrados tal que $E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$. Entonces $E \cap A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \cap A$ y $E \cap A^c \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \cap A^c$. Por tanto, $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$. Por tanto, $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$. □

Definición 6. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3. $\forall\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ se tiene que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

Definición 7. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra, entonces una medida en X es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:

$$\mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$$

Teorema 2. La familia M de todos los conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ es una σ-álgebra y $m = m^* \restriction_M$ es una medida numerablemente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

Lema 3. $\mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Proof. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E) = m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + m^*(\emptyset) = m^*(E) + 0 = m^*(E)$. □

Lema 4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible en el sentido de Lebesgue. Entonces A^c es medible en el sentido de Lebesgue.

Proof. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A) = m^*(E)$ $\square$

Con los dos lemas anteriores obtenemos como colorario que $\emptyset$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Lema 5. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

Proof. Observemos primero que $A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ luego entonces tenemos que $m^*(A \cup B) \leq m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) = m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)$. $\square$

Lema 6. Sea $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ es medible en el sentido de Lebesgue y además $m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$.

Proof. Definimos la sucesión creciente de conjuntos $B_k = A_1 \cup \ldots \cup A_k$. Entonces B_k es medible en el sentido de Lebesgue por el lema anterior. Sean $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ y $E \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k^c) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1}) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1})$$

Reiterando el proceso obtenemos $m^*(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap A_j)$. Por lo tanto, $m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_k^c) = \left(\sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap A_j)\right) + m^*(E \cap B_k^c) \geq \sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c)$. Se sigue entonces $m^*(E) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$
Luego B es medible.
Tomando $E = B$ en la desigualdad anterior obtenemos $m^*(B) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) + m^*(B \cap B^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j)$. Por otro lado, $m^*(B) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j)$ por definición de medida exterior. Por tanto, $m^*(B) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j) \implies m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$. $\square$

Lema 7. La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.

Proof. Sea $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Considermos:

$$\begin{gathered} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \cap B_1^c \\ A_3 = B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ \vdots \\ A_j = B_j \cap B_{j-1}^c \cap \ldots \cap B_1^c \end{gathered}$$

Observemos que $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ y que para todo $j \in \mathbb{N}$, A_j es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto, A_j es medible. Además, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Por el lema anterior, $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ es medible $\implies \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ es medible. $\square$

Proposición 3. Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.

Proof. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ nulo, entonces $m^*(A) = 0$. $\forall E \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $E \cap A \subset A \implies 0 \leq m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0 \implies m^*(E \cap A) = 0$. Análogamente, $E \cap A^c \subset E \implies 0 \leq m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E) \implies m^*(E \cap A^c) = 0$. Por tanto, $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$. Para la otra desigualdad, $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \implies m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$. Y por tanto obtenemos la igualdad $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$. □

Definición 8. Se dice que una *propiedad* se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.

Proposición 4. Todo n-rectángulo cerrado $R \in \mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Proof. Dado $R \subset \mathbb{R}^n$ n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que $\forall Q \in \mathbb{R}^n$ n-rectángulo cerrado se tiene que $\text{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$. Consideramos el n-rectángulo $Q_0 = Q \cap R$. Nótese que $Q \cap R^c$ es unión finita de n-rectángulos $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Entonces $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$ forman una partición de Q. Luego $\text{vol}(Q) = \sum_{i=0}^{m} \text{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^{m} m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$. □

Observación 3. En $\mathbb{R}^n$ los rectángulos abiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.

Definición 9. Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \tag{7}$$

Observación 4. Denotaremos la norma del supremo en $\mathbb{R}^n$ como:

$$||x||_\infty = \sup_{i=1}^{n}\{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

Llamaremos bola abierta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x||_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \ldots \times (x_n - r, x_n + r) \tag{9}$$

Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x||_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r] \tag{10}$$

Teorema 3. Sea $G \in \mathbb{R}^n$ abierto entonces se tiene:

1. G es unión numerable de n-cubos cerrados.
2. G es unión numerable de n-cubos abiertos.

Proof. Consideremos la familia de n-cubos $\mathcal{B} = \{\overline{B}_\infty(q,r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B}_\infty(q,r) \subset G\}$. Veamos que $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Dado que $B \in G \quad \forall B \in \mathcal{B}$ entonces es inmediato ver que $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset G$. Por ser G abierto, $\exists \delta > 0$ tal que $B_\infty(x,\delta) \subset G$. Sea $r \in \mathbb{Q}$ con $0 < r < \frac{\delta}{2}$, por la densidad de $\mathbb{Q}^n$ en $\mathbb{R}^n$, sabemos que $\exists q \in \mathbb{Q}^n$ tal que $||x-q||_\infty < r$. Veamos entonces que $x \in B_\infty(q,r) \subset B_\infty(x,\delta) \subset G$.
Dado $y \in \mathbb{R}^n$ con $||y-q||_\infty < r$ se sigue:

$$||y-x||_\infty \leq ||y-q||_\infty + ||q-x||_\infty < r + r = 2r < \delta$$

Por tanto $y \in B_\infty(x,\delta) \implies x \in \overline{B}_\infty(q,r) \subset G$. Luego $G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.
Nótese que numerabilidad de la familia $\mathcal{B}$ es inmediata por la numerabilidad de $\mathbb{Q}^n$ que, a su vez, es numerable por ser $\mathbb{Q}$ numerable.
La segunda parte del teorema es análoga a la primera. □

Corolario 2. Todos los conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

Teorema 4. Sea $E \in \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. E es medible en el sentido de Lebesgue.
2. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists G \in \mathbb{R}^n$ abierto tal que $E \subset G$ y $m^*(G \setminus E) < \epsilon$.
3. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists F \in \mathbb{R}^n$ cerrado tal que $F \subset E$ y $m^*(E \setminus F) < \epsilon$.
4. $\forall \epsilon$ existen F cerrado y G abierto tales que $F \subset E \subset G$ y $m^*(G \setminus F) < \epsilon$.

Proof.
"1 $\implies$ 2"
Supongamos que $m^*(E) < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists \{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos abiertos tal que $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty (R_j)$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$. Considerando el abierto $G = \bigcup_{j=1}^\infty (R_j)$, se tiene que G es medible por el colorario anterior y $m^*(G) = m^*(E \cap G) + m^*(E \cap G^c) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$. Por tanto, $m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) - m^*(E) < \epsilon$.
Ahora supongamos que $m^*(E) = +\infty$. $\forall k \in \mathbb{N}$ sea $E_k = E \cap [-k,k]^n$, que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además $m^*(E_k) < +\infty$ por ser E_k acotado, y $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Dado $\epsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ existe G_k abierto tal que $E_k \subset G_k$ y $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Entonces $G = \bigcup_{k=1}^\infty G_k$ abierto y $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty G_k = G$ por lo que $m^*(G \setminus E) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^\infty (G_k \setminus E_k)) \leq \sum_{k=1}^\infty m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$.
"2 $\implies$ 1"
$\forall j \in \mathbb{N}$ tomando $\epsilon = \frac{1}{j}$ entonces $\exists G_j$ abierto tal que $E \subset G_j$ y $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$. Entonces considerando $B = \bigcap_{j=1}^\infty G_j$ que es medible y abierto se tiene que $E \subset B$. Luego $B \setminus E \subset G_j \setminus E$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por tanto, $m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$. En consecuencia $m^*(B \setminus E) = 0 \implies B \setminus E$ es medible.
Por otro lado, $B = E \cup (B \setminus E)$ o que es lo mismo $E = B \setminus (B \setminus E)$. Tanto B como $(B \setminus E)$ son medibles, luego E es medible.
Observación: Además, $E = B \setminus Z$, donde B es intersección numerable de abiertos o Z es un conjunto nulo.
"1 $\implies$ 3"
Como E es medible entonces E^c también los es. Por (2), dado $\epsilon > 0$ existe G abierto tal que $E^c \subset G$ y $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$. Entonces $F = G^c$ es cerrado y $F \subset E$. Además, $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$.
"3 $\implies$ 1"

□

Definición 10. La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ es la menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$ (o equivalentemente, la menor σ-álgebra que contiene a todos los cerrados de $\mathbb{R}^n$). Los conjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.
Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es G_δ si A es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ es F_σ si A es unión numerable de cerrados.

Corolario 3. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. E es medible en el sentido de Lebesgue.
2. $E = A \setminus N$ con A siendo G_δ y N un conjunto nulo.
3. $E = B \cup N$ con B siendo F_σ y N un conjunto nulo.

Corolario 4. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. E es medible en el sentido de Lebesgue.
2. $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$.
3. $m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$.

Lema 8. Sea $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ es medible en el sentido de Lebesgue y $m(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \lim_{j\to\infty} m(A_j)$.

Teorema 5. Todo conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ es unión numerable y disjunta n-cubos semiabiertos, que son cubos diádicos.

Proof. Denotemos por $\mathcal{F}$ la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

con $k_i \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{Q}_1$ la familia de todos los cubos cerrados Q de la forma $[k_1, k_1+1] \times \cdots \times [k_n, k_n+1]$, donde los $k_i \in \mathbb{Z}$, y tales que $Q \subset U$. Supuesto definida $\mathcal{Q}_m$, sea $\mathcal{Q}_{m+1}$ la familia de todos los cubos Q de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

donde $k_i \in \mathbb{Z}$, tales que no están contenidos en ningún cubo $Q' \in \mathcal{Q}_j$ para $j \leq m$, y tales que $Q \subset U$. Por inducción queda definida $\mathcal{Q}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y ponemos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Es obvio por construcción que si $Q, Q' \in \mathcal{Q}$ y $Q \neq Q'$, entonces Q y Q' tienen interiores disjuntos. También es claro que que $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q \subset U$. Veamos que de hecho

$$U = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q.$$

Dado $x \in U$, usando que U es abierto y que el conjunto $\{k/2^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es denso en $\mathbb{R}$, es fácil ver que existe algún cubo $Q_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \in Q_x$ y $Q \subset U$. El lado de Q_x mide 2^{-m_x} para algún $m_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$ ya hemos terminado. En otro caso, por definición de $\mathcal{Q}_{m_x}$, existe algún $j < m_x$ tal que Q_x está contenido en algún cubo $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$, y por tanto x pertenece a este cubo. En cualquier caso se ve que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$. $\square$

2 Funciones Medibles

2.1 Medibilidad de Funciones

Definición 11. Un espacio medible es un par (X, Σ) donde X es un conjunto y Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible y $M|_E$ es la familia de subconjuntos medibles de E.
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$, donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto boreliano y $B|_A$ es la familia de subconjuntos borelianos de A.

Definición 12. Sea (X, Σ) un espacio medible. Una función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es medible si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ es un conjunto medible.

Proposición 5. Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to [-\infty, +\infty]$, entonces son equivalentes

1. f es medible.
2. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto medible.
3. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto medible.
4. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto medible.
5. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son conjuntos medibles.
6. Para todo $G \subset \mathbb{R}$ abierto, los conjuntos $f^{-1}(G)$, $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son conjuntos medibles.

Corolario 5. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es medible.