



# UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

---

## CÁLCULO INTEGRAL <sup>1</sup>

---

CIENCIAS MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA

*Autores:*

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero

Segundo Cuatrimestre 2025

---

<sup>1</sup>Basado en los apuntes de Jesús Ángel Jaramillo Aguado

# Contents

<b>1 Medida de Lebesgue . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	2
1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
<b>2 Funciones integrables en varias variables . . . . .</b>	<b>18</b>
2.1 Medibilidad de Funciones . . . . .	18
2.2 Integración de Funciones Positivas . . . . .	27
2.3 Funciones Integrables-Lebesgue . . . . .	36
2.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann . . . . .	44
<b>3 Teoremas de Fubini y Tonelli . . . . .</b>	<b>48</b>
3.1 Teorema de Tonelli . . . . .	48
3.2 Teorema de Fubini . . . . .	52
<b>4 Cambio de variables . . . . .</b>	<b>55</b>
4.1 Coordenadas Polares . . . . .	57
4.2 Coordenadas Cilíndricas . . . . .	60
4.3 Coordenadas Esféricas . . . . .	63
4.4 Coordenadas Elípticas . . . . .	64
<b>5 Funciones definidas por integrales . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>6 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales . . . . .</b>	<b>72</b>
6.1 Caminos . . . . .	72
6.2 Campos Escalares . . . . .	75
6.3 Campos Vectoriales . . . . .	78
6.4 Campos Conservativos . . . . .	84
<b>7 Teorema de Green . . . . .</b>	<b>90</b>
7.1 Curva de Jordan . . . . .	90
7.2 Teorema de Green . . . . .	91
<b>8 Superficies Paramétricas . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>9 Integrales de superficie . . . . .</b>	<b>104</b>
9.1 Superficies como Conjuntos . . . . .	104
9.2 Superficies Regulares a Trozos . . . . .	106
9.3 Orientación de Superficies . . . . .	107
<b>10 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss . . . . .</b>	<b>117</b>
10.1 Teorema de Stokes . . . . .	117
10.2 Geometría del Rotacional . . . . .	120

# 1 Medida de Lebesgue

## 1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

### Definición 1.1.1 [n-Réctangulo]

Un n-rectángulo en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Definimos el volumen de  $R$  como:

$$\text{vol}(R) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Consideramos también los n-rectángulos abiertos denotados por  $\overset{\circ}{R}$ , que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

### Observación 1.1.1

Dado  $R$  n-rectángulo cerrado tal que  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , podemos considerar para cada  $\delta > 0$  el n-rectángulo abierto  $R_\delta = \prod_{i=1}^n (a_i - \delta, b_i + \delta)$ . Se tiene que  $R \subset R_\delta$  y

$$\text{vol}(R_\delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2\delta) = \text{vol}(R) + 2n\delta$$

Por tanto

$$\text{vol}(R) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{vol}(R_\delta)$$

### Definición 1.1.2 [Medida exterior de Lebesgue]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos la medida exterior de  $A$  como:

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ n-rectángulos cerrados} \right\}$$

Donde el ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de n-rectángulos que recubren  $A$ . A esta medida la llamamos medida de Lebesgue exterior.

### Observación 1.1.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces:

1.  $m^*(A) = +\infty \iff \forall (R_j)_{j \in J} \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j \in J} R_j \text{ se tiene que } \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) = +\infty$
2.  $m^*(A) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists (R_j)_{j \in J} \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j \in J} R_j \text{ y } \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \varepsilon$
3.  $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \varepsilon > 0 \exists (R_j)_{j \in J} \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j \in J} R_j \text{ y } \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \alpha + \varepsilon$

**Definición 1.1.3** [Conjunto nulo]

Se dice que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto nulo si  $m^*(A) = 0$ .

**Ejemplo**

1. Si  $R$  es un  $n$ -rectángulo degenerado, es decir,  $R$  tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces  $R$  es un conjunto nulo ( $m^*(R) = 0$ ).
2. En  $\mathbb{R}^2$ , sea el conjunto  $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ . Dado  $\varepsilon > 0$  tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m > \frac{1}{\varepsilon}$ . Consideramos  $A \subset \bigcup_{i=1}^m [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ . Se tiene que

$$m^*(A) \leq \sum_{i=1}^m \text{vol}\left(\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right] \times \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]\right) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \varepsilon$$

Por tanto,  $m^*(A) = 0$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.1.1**

La función  $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  satisface:

1.  $m^*(\emptyset) = 0$
2.  $m^*(A) \leq m^*(B)$  si  $A \subset B$
3.  $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

*Demostración.*

1.  $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$  con  $R_j$   $n$ -rectángulos degenerados  $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$ .
2. Sea  $A \subset B$  y sea  $(R_j)_{j \in J}$  tal que  $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ . Entonces  $(R_j)_{j \in J}$  es un recubrimiento de  $A$  y por tanto  $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$ .
3. Si  $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < +\infty$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\exists (R_{j,i})_{i=1}^{\infty}$  tal que  $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ . Entonces  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y por tanto se tiene que

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \varepsilon$$

Como  $\varepsilon$  es arbitrario, se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$ .

□

**Corolario 1.1.1**

La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

*Demostración.* Sea  $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset R^n$  tal que  $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$  entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$ .  $\square$

### Lema 1.1.1

Sea  $A \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ con } Q_i \text{ n-rectángulos abiertos} \right\}$$

*Demostración.* Denotamos por  $\beta$  el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de rectángulos abiertos tal que

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j.$$

De este modo,

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{Q}_j,$$

y como

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\overline{Q}_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j),$$

se concluye  $m^*(A) \leq \beta$ .

Veamos ahora la desigualdad opuesta,  $\beta \leq m^*(A)$ . Si  $m^*(A) = +\infty$ , entonces  $\beta = +\infty$  y no hay nada que demostrar. Supongamos  $m^*(A) < +\infty$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por definición de medida exterior, existe una sucesión  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de n-rectángulos cerrados con

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \quad \text{y} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , consideramos  $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$ . Eligiendo  $\delta_j > 0$  lo suficientemente pequeño, se cumple

$$\text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \text{vol}(R_j) + \varepsilon_j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Aquí,  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j}$  indica el volumen del n-rectángulo abierto  $R_j$  con lados aumentados en  $\delta_j$ . Entonces,

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j},$$

y además,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{vol}(R_j) + \varepsilon_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) + \varepsilon < m^*(A) + 2\varepsilon.$$

Por lo tanto,  $\beta \leq m^*(A)$ .  $\square$

### Definición 1.1.4 [Partición de un conjunto]

Una partición del intervalo  $[a, b]$  es una colección numerable de puntos

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

Dado un n-rectángulo  $R \subset \mathbb{R}^n$ , una partición  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  de  $R$  es una colección particiones  $P_i$  de  $[a_i, b_i]$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  siendo  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

Los subrectángulos de  $P$  son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \prod_{j=1}^n [t_{i_j}^j, t_{i_j+1}^j]$$

Denotamos  $S \in P$  para indicar que  $S$  es un subrectángulo de  $P$ .

### Lema 1.1.2

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -rectángulo y  $P$  una partición de  $R$ . Entonces:

1.  $R = \bigcup_{S \in P} S$
2. Si  $S, S' \in P$  y  $S \neq S'$  entonces  $S \cap S' = \emptyset$
3.  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S)$

### Proposición 1.1.1

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -rectángulo. Entonces  $m^*(R) = \text{vol}(R)$ .

*Demostración.*

- $m^*(R) \leq \text{vol}(R)$

Consideremos la sucesión  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  definida por  $R_1 = R$  y  $R_j$  degenerados para  $j > 1$ . Así,

$$m^*(R) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) = \text{vol}(R).$$

- $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Por definición de medida exterior, existe una sucesión  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $n$ -rectángulos abiertos con

$$R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \quad \text{y} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \varepsilon.$$

Como  $R$  es compacto (cerrado y acotado), el recubrimiento  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  admite un subrecubrimiento finito  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$  que aún cubre  $R$ . Así,

$$R \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{Q}_i.$$

Definimos  $R_j = R \cap \overline{Q}_j$  para  $j = 1, \dots, m$ . Obtenemos entonces

$$R = \bigcup_{j=1}^m R_j.$$

Prolongando los lados, podemos construir una partición  $P$  de  $R$  donde cada subrectángulo de  $P$  quede contenido en algún  $R_j$  con  $1 \leq j \leq m$ . Por tanto,

$$\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, se concluye que  $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$ .

□

## 1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

**Notación:** Para  $A \subset \mathbb{R}^n$  denotamos por  $A^c$  al complementario de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2.1** [Conjunto medible]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue si para todo  $R \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c)$$

**Proposición 1.2.1**

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces son equivalentes:

1.  $A$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .
3.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

*Demostración.*

- (2)  $\implies$  (3)  
Es inmediato.

- (3)  $\implies$  (2)  
Sabemos que  $m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ . Para ver la otra desigualdad, observamos que

$$m^*(E) = m^*((E \cap A) \cup (E \cap A^c)) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$

Así, la igualdad siempre se cumple.

- (2)  $\implies$  (1)  
Basta tomar  $E = R$ , un n-rectángulo.
- (1)  $\implies$  (3)  
Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $m^*(E) = +\infty$ , el resultado es inmediato. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por definición de medida exterior, existe una sucesión  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de n-rectángulos cerrados tal que

$$E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \quad \text{y} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Entonces

$$E \cap A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A, \quad E \cap A^c \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A^c.$$

Por tanto,

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c).$$

Por hipótesis  $A$  es medible, luego  $m^*(R_j) = m^*(R_j \cap A) + m^*(R_j \cap A^c)$  para cada  $j$ , y como  $m^*(R_j) = \text{vol}(R_j)$ :

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Por la arbitrariedad de  $\varepsilon$ , se concluye que  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

□

**Definición 1.2.2** [ $\sigma$ -Álgebra]

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra si:

1.  $X \in \mathcal{A}$
2. Si  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3.  $\forall (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  se tiene que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

**Definición 1.2.3** [Medida]

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra, entonces una medida en  $X$  es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:

$$\mu \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$$

**Teorema 1.2.1** [Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ ]

La familia  $M$  de todos los conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $m = m^*|_M$  es una medida numerablemente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

**Lema 1.2.1**

El conjunto  $\mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Dado cualquier conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ , tenemos:

$$E \cap \mathbb{R}^n = E, \quad \text{y} \quad E \cap (\mathbb{R}^n)^c = E \cap \emptyset = \emptyset.$$

Entonces:

$$m^*(E \cap \mathbb{R}^n) = m^*(E), \quad \text{y} \quad m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(\emptyset) = 0.$$

Sustituyendo en la condición de medibilidad, se tiene:

$$m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + 0 = m^*(E).$$

Por tanto, se cumple para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$  la igualdad requerida, lo que demuestra que  $\mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.  $\square$

**Lema 1.2.2**

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible en el sentido de Lebesgue. Entonces, su complementario  $A^c$  también es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Por hipótesis,  $A$  es medible en el sentido de Lebesgue, lo que significa que para todo conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  se cumple:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$

Observemos que el complementario del complementario de  $A$  es  $A$ , es decir:

$$(A^c)^c = A.$$

Tomemos ahora  $A^c$  y veamos si para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$  se cumple:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c).$$

Sustituyendo la identidad  $(A^c)^c = A$ :

$$m^*(E) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A).$$

Luego  $A^c$  también es medible en el sentido de Lebesgue.  $\square$

**Corolario 1.2.1**

El conjunto vacío  $\emptyset$  es medible en el sentido de Lebesgue.

**Lema 1.2.3**

Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Observemos primero que

$$A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

luego entonces tenemos que

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$$

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto, entonces por la medibilidad de  $A$  se sigue

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

Además, sabemos que  $B$  es medible, luego para los conjuntos  $E \cap A^c$  y  $E \cap E$  se verifica

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A^c) &= m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ m^*(E \cap A) &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c)$$

$$= \underbrace{m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c)}_{\geq m^*(E \cap (A \cup B))} + \underbrace{m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c)}_{m^*(E \cap (A \cup B)^c)}$$

Finalmente, observamos que

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)$$

y por tanto  $A \cup B$  es medible.

Nótese que la medibilidad de la intersección es inmediata, pues  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ , y ya hemos demostrado por el Lema 1.2.2 que el complementario de un conjunto medible es medible.  $\square$

#### Lema 1.2.4

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  una colección numerable de conjuntos disjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y además  $m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$ .

*Demostración.* Definimos la sucesión creciente de conjuntos  $B_k = A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Entonces por el Lema 1.2.3,  $B_k$  es medible en el sentido de Lebesgue. Sean  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Por la medibilidad de  $A_k$ , tenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k^c) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1})$$

Nótese que  $A_k^c = B_{k-1}$  precisamente porque los conjuntos  $A_j$  son disjuntos. Reiterando el proceso, obtenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)$$

Por lo tanto, aplicando la medibilidad de  $B_k$ :

$$m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_k^c) = \left( \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) \right) + m^*(E \cap B_k^c) \geq \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c)$$

Se sigue entonces:

$$m^*(E) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap A_j\right) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$$

Luego,  $B$  es medible.

Tomando  $E = B$  en la desigualdad anterior, obtenemos:

$$m^*\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = m^*(B) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) + m^*(B \cap B^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$

Por otro lado, por el apartado 2 del Teorema 1.1.1 sabemos que la medida exterior de la unión numerable de conjuntos es menor o igual que la suma de las medidas exteriores de los conjuntos:

$$m^*\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$

Por tanto,

$$m^*\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$

$\square$

**Lema 1.2.5**

*La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Sea  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideramos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

Observemos que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  y que para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $A_j$  es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto,  $A_j$  es medible. Además,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$  con  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Por el Lema 1.2.4,  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible  $\Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  es medible.  $\square$

**Proposición 1.2.2**

*Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto nulo, es decir,  $m^*(A) = 0$ .

Tomemos un conjunto arbitrario  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Observemos que:

$$E \cap A \subset A \implies m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0.$$

Además, como la medida exterior siempre es no negativa, tenemos:

$$m^*(E \cap A) \geq 0.$$

Por lo tanto:

$$m^*(E \cap A) = 0.$$

Por otro lado, claramente:

$$E \cap A^c \subset E \implies m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E).$$

Así, sumando las desigualdades obtenidas:

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = 0 + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E).$$

Por la Proposición 1.2.1 se concluye la medibilidad de  $A$ .  $\square$

Con esto, damos por concluida la demostración del Teorema 1.2.1.

**Definición 1.2.4** [Propiedad en casi todo punto]

*Se dice que una propiedad se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.*

**Proposición 1.2.3**

*Todo n-rectángulo cerrado  $R \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Dado  $R \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que  $\forall Q \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado se tiene que  $\text{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ . Consideramos el n-rectángulo  $Q_0 = Q \cap R$ . Nótese que  $Q \cap R^c$  es unión finita de n-rectángulos  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ . Entonces  $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_m$  forman una partición de  $Q$ . Luego  $\text{vol}(Q) = \sum_{i=0}^m \text{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^m m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ .  $\square$

**Observación 1.2.1**

*En  $\mathbb{R}^n$  los rectángulos abiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.*

**Definición 1.2.5 [n-Cubo]**

*Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:*

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j$$

*Análogamente se pueden definir los cubos n-dimensionales semi-abiertos.*

**Observación 1.2.2**

*Denotaremos la norma del supremo en  $\mathbb{R}^n$  como:*

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n \{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

*Llamaremos bola abierta de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:*

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r)$$

*Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:*

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]$$

**Teorema 1.2.2**

*Sea  $G \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Entonces:*

1.  $G$  es la unión numerable de n-cubos cerrados.
2.  $G$  es la unión numerable de n-cubos abiertos.

*Demostración.* Vamos a demostrar la primera parte; la segunda es análoga.

Consideremos la familia de n-cubos cerrados (o bolas en norma infinito):

$$\mathcal{B} = \{\overline{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B}_\infty(q, r) \subset G\}.$$

Queremos ver que:

$$G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

- La inclusión  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset G$  es clara, porque todos los cubos de  $\mathcal{B}$  están contenidos en  $G$  por construcción.
- Veamos la inclusión inversa  $G \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .

Sea  $x \in G$ . Como  $G$  es abierto, existe  $\delta > 0$  tal que:

$$B_\infty(x, \delta) \subset G.$$

Elegimos  $r \in \mathbb{Q}$  con  $0 < r < \frac{\delta}{2}$ . Por la densidad de  $\mathbb{Q}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , existe  $q \in \mathbb{Q}^n$  tal que:

$$\|x - q\|_\infty < r.$$

Ahora, consideremos el cubo cerrado  $\overline{B}_\infty(q, r)$ . Veamos que:

$$\overline{B}_\infty(q, r) \subset B_\infty(x, \delta).$$

En efecto, para todo  $y \in \overline{B}_\infty(q, r)$ :

$$\|y - x\|_\infty \leq \|y - q\|_\infty + \|q - x\|_\infty < r + r = 2r < \delta.$$

Por lo tanto:

$$\overline{B}_\infty(q, r) \subset B_\infty(x, \delta) \subset G.$$

Además,  $q \in \mathbb{Q}^n$  y  $r \in \mathbb{Q}^+$ , por lo que  $\overline{B}_\infty(q, r) \in \mathcal{B}$  y  $x \in \overline{B}_\infty(q, r)$ .

Como  $x \in G$  es arbitrario, se concluye que:

$$G \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Así:

$$G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

La numerabilidad de la familia  $\mathcal{B}$  se debe a cómo se construyen sus elementos. Cada cubo cerrado en  $\mathcal{B}$  está definido por un centro  $q \in \mathbb{Q}^n$  y un radio  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r > 0$ , de manera que  $\overline{B}_\infty(q, r) \subset G$ . Dado que  $\mathbb{Q}^n$  es numerable (ya que es producto finito de conjuntos numerables) y  $\mathbb{Q}$  también lo es, el conjunto de pares  $(q, r)$  donde  $q \in \mathbb{Q}^n$  y  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r > 0$ , es numerable. Esto se debe a que el producto de conjuntos numerables es numerable:

$$\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+ \text{ es numerable.}$$

Por lo tanto, la familia de todos los cubos cerrados con centro racional y radio racional positivo también es numerable:

$$\{\overline{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}.$$

La familia  $\mathcal{B}$  es simplemente un subconjunto de esa colección de cubos cerrados, es decir,  $\mathcal{B} \subset \{\overline{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ , y como todo subconjunto de un conjunto numerable sigue siendo numerable, concluimos que  $\mathcal{B}$  es numerable.  $\square$

### Corolario 1.2.2

*Todos los conjuntos abiertos y cerrados de  $\mathbb{R}^n$  son medibles en el sentido de Lebesgue.*

### Teorema 1.2.3 [Regularidad de la medida]

*Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:*

1. *E es medible en el sentido de Lebesgue.*

2.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists G \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$ .
3.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset \mathbb{R}^n$  cerrado tal que  $F \subset E$  y  $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$ .
4.  $\forall \varepsilon$  existen  $F$  cerrado y  $G$  abierto tales que  $F \subset E \subset G$  y  $m^*(G \setminus F) < \varepsilon$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2)

Distinción de casos:

1. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ : Sea  $\varepsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de n-rectángulos abiertos tales que  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \varepsilon$ . Considerando el abierto  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$ , se tiene que  $G$  es medible por el Corolario 1.2.2, además, como  $E \subset G$  entonces

$$m^*(G) = m^*\underbrace{(G \cap E)}_E + m^*\underbrace{(G \cap E^c)}_{G \setminus E} = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$$

Por tanto,

$$m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) - m^*(E) < \varepsilon$$

2. Supongamos que  $m^*(E) = +\infty$ :  $\forall k \in \mathbb{N}$  sea  $E_k = E \cap [-k, k]^n$ , que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además  $m^*(E_k) < +\infty$  por ser  $E_k$  acotado, y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Luego por el apartado anterior, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  existe  $G_k$  abierto tal que  $E_k \subset G_k$  y  $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ .

Entonces  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$  abierto y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$  por lo que

$$m^*(G \setminus E) \leq m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

- (2)  $\implies$  (1)

Sea  $j \in \mathbb{N}$ . Tomemos  $\varepsilon = \frac{1}{j}$ . Por hipótesis, existe un conjunto abierto  $G_j$  tal que  $E \subset G_j$  y  $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . Consideremos  $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ , que es medible y abierto, y cumple  $E \subset B$ .

Además, para cada  $j \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $B \setminus E \subset G_j \setminus E$ . Así,

$$m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}.$$

Por lo tanto,  $m^*(B \setminus E) = 0$ , lo que implica que  $B \setminus E$  es medible.

Por otro lado, dado que  $B = E \cup (B \setminus E)$ , podemos escribir  $E = B \setminus (B \setminus E)$ . Como tanto  $B$  como  $B \setminus E$  son medibles, se deduce que  $E$  es medible.

Finalmente,  $E$  se puede expresar como la diferencia  $E = B \setminus Z$ , donde  $B$  es la intersección numerable de abiertos y  $Z$  es un conjunto nulo.

- (1)  $\implies$  (3)

Como  $E$  es medible entonces tenemos que  $E^c$  también es medible, por lo que, dado  $\varepsilon > 0$  por (2)  $\exists G$ -abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \varepsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,

$$E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \varepsilon$$

- (3)  $\implies$  (1)

Para todo  $j \in \mathbb{N}$ , existe un conjunto cerrado  $F_j$  tal que  $F_j \subset E$  y  $m(E \setminus F_j) < \frac{1}{j}$ . Sea

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j,$$

que es un conjunto medible y satisface  $A \subset E$ . Además, dado que

$$m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

se concluye que  $m(E \setminus A) = 0$ .

Por lo tanto, se tiene

$$E = A \cup (E \setminus A) = \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \cup (E \setminus A).$$

Dado que  $E \setminus A$  es un conjunto nulo y, por lo tanto, medible, y que  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  es medible por ser la unión numerable de conjuntos cerrados, se concluye que  $E$  es medible.

Observemos que en este caso  $E = A \cup N$ , siendo  $A$  unión numerable de cerrados y  $N = E \cup A$  un conjunto nulo.

□

### Definición 1.2.6 [ $\sigma$ -Álgebra de Borel]

*La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$  se define como la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  (o equivalentemente, la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los cerrados de  $\mathbb{R}^n$ ). Los conjuntos de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Boreelianos.*

### Definición 1.2.7 [Conjuntos $G_\delta$ y $F_\sigma$ ]

*Decimos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es  $G_\delta$  si  $A$  es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  es  $F_\sigma$  si  $B$  es unión numerable de cerrados.*

### Corolario 1.2.3

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $E = A \setminus N$  con  $A$  siendo  $G_\delta$  y  $N$  un conjunto nulo.
3.  $E = B \cup N$  con  $B$  siendo  $F_\sigma$  y  $N$  un conjunto nulo.

### Lema 1.2.6

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces,  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y

$$m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} m^*(A_j).$$

*Demostración.* Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Definimos la sucesión  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  como

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

De esta forma, la unión

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

es una unión disjunta de conjuntos. Por lo tanto, y usando el Lema 1.2.4, se tiene que

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k),$$

donde la última igualdad se debe a que para todo  $j \in \mathbb{N}$  se cumple

$$m^*(A_j) = \sum_{i=1}^j m^*(B_i).$$

□

### Corolario 1.2.4

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible entonces:

1.  $m^*(E) = \inf\{m^*(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}.$
2.  $m^*(E) = \sup\{m^*(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}.$

*Demostración.*

1. Dado  $\varepsilon > 0$  por el Teorema 1.2.3 existe  $G$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $m(G \setminus E) < \varepsilon$ . Entonces usando la medibilidad de  $E$  deducimos:

$$m^*(E) \leq m^*(G) = m^*\underbrace{(G \cap E)}_E + m^*(G \setminus E) < m^*(E) + \varepsilon$$

Por tanto,  $m^*(E) = \inf\{m^*(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}.$

2. Sea  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ , donde definimos  $E_k = E \cap [-k, k]^n$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $(E_k)_k$  es una sucesión creciente de conjuntos medibles y, por el Lema 1.2.6, se cumple que

$$m^*(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k).$$

Además, por el Teorema 1.2.3 existe un conjunto cerrado  $F_k \subset E_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}.$$

Como  $F_k$  es cerrado y está contenido en el cubo compacto  $[-k, k]^n$ , entonces  $F_k$  es compacto. En particular  $F_k$  es medible por ser cerrado (Corolario 1.2.2), luego

$$m^*(E_k) = m^*\underbrace{(E_k \cap F_k)}_{F_k} + m^*(E_k \setminus F_k) \leq m^*(F_k) + \frac{1}{k}$$

Al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$m^*(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(F_k),$$

y finalmente concluimos que

$$m^*(E) = \sup\{m^*(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m^*(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}.$$

□

### Definición 1.2.8 [Cubo diádico]

Se dice que un cubo en  $\mathbb{R}^n$  es diádico si sus lados miden  $2^{-m}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Es decir, si el rectángulo  $Q$  es de la forma:

$$Q = \left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

con  $m \in \mathbb{Z}$  (nivel de escala u orden) y  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$

### Teorema 1.2.4

Todo conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  es unión numerable y disjunta de cubos diádicos.

*Demostración.* Denotemos por  $\mathcal{F}$  la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

donde  $k_i \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ .

Sea  $\mathcal{Q}_1$  la colección de todos los cubos cerrados de la forma

$$[k_1, k_1 + 1] \times \cdots \times [k_n, k_n + 1],$$

con  $k_i \in \mathbb{Z}$ , que además satisfacen  $Q \subset U$ .

Supongamos definida  $\mathcal{Q}_m$ . Construimos  $\mathcal{Q}_{m+1}$  como la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

donde  $k_i \in \mathbb{Z}$ , que están contenidos en  $U$  y que no están incluidos en ningún cubo de  $\mathcal{Q}_j$  para  $j \leq m$ .

Por inducción, hemos definido así las familias  $\mathcal{Q}_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Definimos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Por construcción, los cubos de  $\mathcal{Q}$  tienen interiores disjuntos: si  $Q, Q' \in \mathcal{Q}$  y  $Q \neq Q'$ , entonces  $\text{int}(Q) \cap \text{int}(Q') = \emptyset$ . Además, es claro que

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \subset U.$$

Veamos ahora que en realidad

$$U = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Sea  $x \in U$ . Dado que  $U$  es abierto, existe  $\delta > 0$  tal que la bola  $B(x, \delta) \subset U$ . Como el conjunto de números de la forma  $k/2^m$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , es denso en  $\mathbb{R}$ , podemos encontrar un cubo cerrado  $Q_x \in \mathcal{F}$  que contiene a  $x$  y está contenido en  $B(x, \delta) \subset U$ .

El lado de  $Q_x$  es  $2^{-m_x}$  para algún  $m_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Si  $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$ , entonces  $x$  pertenece a un cubo de  $\mathcal{Q}$ . Si no es así, por definición de  $\mathcal{Q}_{m_x}$ , existe algún  $j < m_x$  y un cubo  $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$  que contiene a  $Q_x$ , y en particular a  $x$ .

En ambos casos, vemos que  $x \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ , lo que muestra que

$$U = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Así,  $U$  es la unión numerable y disjunta de los cubos diádicos de  $\mathcal{Q}$ . □

## 2 Funciones integrables en varias variables

### 2.1 Medibilidad de Funciones

**Definición 2.1.1** [Espacio medible]

Un espacio medible es un par  $(X, \Sigma)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ .

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$ , donde  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto medible y  $M|_E$  es la familia de subconjuntos medibles de  $E$ .
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto boreliano y  $B|_A$  es la familia de subconjuntos boreelianos de  $A$ .

**Definición 2.1.2** [Función medible]

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible. Una función  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es un conjunto medible.

**Proposición 2.1.1**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces son equivalentes

1.  $f$  es medible.
2. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  es un conjunto medible.
3. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  es un conjunto medible.
4. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es un conjunto medible.
5. Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.
6. Para todo  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, los conjuntos  $f^{-1}(G)$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.

*Demostración.* Recordemos que, por definición,  $f$  es medible si para todo  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto  $\{x \in X : f(x) < a\}$  es medible.

Observemos que:

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\}.$$

Dado que  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra cerrada bajo complementarios, tenemos que:

$$(1) \iff (2).$$

De manera análoga:

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq \alpha + \frac{1}{k}\},$$

y

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = X \setminus \{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

Por lo tanto:

$$(3) \iff (2) \quad y \quad (4) \iff (3).$$

De este modo, resulta que:

$$(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4).$$

Veamos más explícitamente las implicaciones clave:

- (1)  $\implies$  (4): Para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}.$$

Cada conjunto de la intersección es medible por la definición de medibilidad de  $f$ . Así, la intersección numerable de conjuntos medibles es medible.

- (4)  $\implies$  (1): Análogamente, para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\}.$$

Cada conjunto en la unión es medible por (4). Por tanto, la unión numerable es medible, y  $f$  es medible.

Con esto, hemos establecido la equivalencia entre (1), (2), (3) y (4).

Ahora, para (5):

- Notemos que para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \beta\} \cap \{x \in X : f(x) < \alpha\}.$$

La intersección de conjuntos medibles es medible por las equivalencias anteriores.

- Además,

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\},$$

y

$$\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < -k\},$$

que son intersecciones numerables de conjuntos medibles, por lo que son medibles.

Así, (1) - (4)  $\implies$  (5). La construcción de los conjuntos muestra que (5)  $\implies$  (2), pues podemos expresar:

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha \leq f(x) < \alpha + m\} \cup \{x \in X : f(x) = +\infty\}.$$

Por lo tanto:

$$(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4) \iff (5).$$

Finalmente, para (6):

- (6)  $\implies$  (5): Sea  $G = (\beta, \alpha)$  un intervalo abierto. Entonces:

$$f^{-1}(G) = \{x \in X : \beta < f(x) < \alpha\} = \{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\},$$

que es medible por (5). Además, (6) ya contiene explícitamente que los conjuntos  $\{x : f(x) = \pm\infty\}$  son medibles.

- (5)  $\implies$  (6): Sea  $G \subset \mathbb{R}$  un abierto cualquiera. Como  $\mathbb{R}$  es segundo contable,  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$  para ciertos intervalos abiertos. Así:

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha_j, \beta_j)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\},$$

que es unión numerable de conjuntos medibles por (5). Además,  $\{x : f(x) = \pm\infty\}$  son medibles por (5).

Por tanto:

$$(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4) \iff (5) \iff (6).$$

□

### Corolario 2.1.1

*Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces  $f$  es medible.*

*Demostración.* Consideremos la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ , que denotamos por  $\mathcal{L}^n$ . Sabemos que  $E$  es medible, es decir,  $E \in \mathcal{L}^n$  y que la restricción de una función continua a un subconjunto es continua en ese subconjunto (con la topología subespacio).

Para ver que  $f$  es medible, recordemos la caracterización equivalente:

$$f \text{ es medible} \iff \forall G \subset \mathbb{R} \text{ abierto, } f^{-1}(G) \in \Sigma.$$

Cabe notar que esta doble implicación es válida porque  $f$  es continua y, por lo tanto, los conjuntos

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} \text{ y } \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

son medibles por ser conjuntos vacíos. Aquí  $\Sigma$  es la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue de  $E$ , es decir:

$$\Sigma = \{A \subset E : \exists B \in \mathcal{L}^n \text{ con } A = E \cap B\}.$$

Tomemos  $G \subset \mathbb{R}$  abierto. Dado que  $f$  es continua y  $G$  es abierto en  $\mathbb{R}$ , se tiene que:

$$f^{-1}(G) = \{x \in E : f(x) \in G\}$$

es un conjunto abierto en la topología subespacio de  $E$ . Por lo tanto, existe un conjunto abierto  $O \subset \mathbb{R}^n$  tal que:

$$f^{-1}(G) = E \cap O.$$

Como  $O$  es abierto (y, por tanto, medible en  $\mathbb{R}^n$ ) y  $E$  es medible, se sigue que:

$$f^{-1}(G) = E \cap O \in \Sigma.$$

Así,  $f^{-1}(G)$  es medible para todo abierto  $G$ , por lo que  $f$  es medible según la caracterización (6) de la proposición anterior. □

**Proposición 2.1.2**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f_1, f_2, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles. Si  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces la función compuesta

$$h = \Phi \circ (f_1, f_2, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbb{R}$$

es medible.

*Demostración.* Para demostrar que  $h$  es medible, probaremos que la preimagen  $h^{-1}(G)$  de cualquier abierto  $G \subset \mathbb{R}$  pertenece a  $\Sigma$ .

Definimos la función vectorial  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)),$$

de modo que  $h = \Phi \circ f$ .

Como cada  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  es medible, la función  $f$  es medible. En efecto, para cualquier rectángulo abierto  $R = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ , se tiene

$$f^{-1}(R) = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}((a_i, b_i)) \in \Sigma,$$

pues cada  $f_i^{-1}((a_i, b_i))$  es medible por al apartado (6) de la Proposición 2.1.1 y  $\Sigma$  es cerrado bajo intersecciones finitas. Dado que los rectángulos abiertos generan la topología de  $\mathbb{R}^n$ , esto implica que  $f$  es medible.

Como  $\Phi$  es continua, para cualquier abierto  $G \subset \mathbb{R}$ , el conjunto

$$U = \Phi^{-1}(G) \subset \mathbb{R}^n$$

es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto,  $U$  puede expresarse como una unión numerable de rectángulos abiertos (Teorema 1.2.2):

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j, \quad \text{donde } R_j = \prod_{i=1}^n (a_i^j, b_i^j).$$

La preimagen de  $U$  bajo  $f$  es

$$h^{-1}(G) = f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(R_j).$$

Como cada  $f^{-1}(R_j)$  es medible, y como  $\Sigma$  es cerrado bajo uniones numerables, se sigue que  $h^{-1}(G) \in \Sigma$ . Hemos demostrado que para todo abierto  $G \subset \mathbb{R}$ ,  $h^{-1}(G) \in \Sigma$ . Por lo tanto,  $h$  es una función medible.  $\square$

**Corolario 2.1.2**

Sean  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles, entonces  $f + g$ ,  $f \circ g$ ,  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f^+ = \max\{f, 0\}$ ,  $f^- = \max\{-f, 0\}$  son funciones medibles.

**Observación 2.1.1**

Dada una función  $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , se puede descomponer como diferencia de sus partes positiva y

negativa:

$$f = f^+ - f^-, \quad y \text{ además } |f| = f^+ + f^-,$$

donde

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Esta descomposición es útil en integración y teoría de la medida, ya que  $f^+, f^- \geq 0$  y son funciones medibles siempre que  $f$  lo sea.

### Teorema 2.1.1

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  una sucesión de funciones medibles. Entonces:

1.  $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$  es una función medible.
2.  $\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j$  es una función medible.
3.  $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$  es una función medible.
4.  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$  es una función medible.
5. Si  $f_j \rightarrow f$  puntualmente, entonces  $f$  es medible.

Demostración.

1. Sea  $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x)$ . Queremos probar que  $h$  es medible. Para ello, tomemos  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Observamos que:

$$\{x \in X : h(x) > \alpha\} = \{x \in X : \sup_j f_j(x) > \alpha\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_j(x) > \alpha\}$$

Como cada  $f_j$  es medible, los conjuntos  $\{f_j > \alpha\}$  son medibles. Por lo tanto, su unión numerable también lo es. Así,  $h$  es medible.

2. Sea  $g(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j(x)$ . Para probar que  $g$  es medible, tomamos  $\alpha \in \mathbb{R}$  y escribimos:

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \{x \in X : \inf_j f_j(x) < \alpha\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_j(x) < \alpha\}$$

o equivalentemente,

$$\{x \in X : g(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_j(x) \geq \alpha\}$$

Como los  $f_j$  son medibles, estos conjuntos también lo son, y su intersección numerable es medible. Así,  $g$  es medible.

3. Por definición,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{k \geq j} f_k(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \left( \sup_{k \geq j} f_k(x) \right)$$

Como hemos probado que  $\sup_{k \geq j} f_k$  es medible para cada  $j$ , y el ínfimo de funciones medibles es medible, se deduce que  $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$  es medible.

4. Análogamente,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{k \geq j} f_k(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left( \inf_{k \geq j} f_k(x) \right)$$

Usando la medibilidad de  $\inf_{k \geq j} f_k$  y que el supremo de funciones medibles es medible, concluimos que  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$  es medible.

5. Si  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  puntualmente, entonces:

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

Como  $\limsup f_j$  y  $\liminf f_j$  son medibles, y coinciden puntualmente con  $f$ , se concluye que  $f$  también es medible.

□

### Proposición 2.1.3

*Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  funciones medibles-Lebesgue tales que  $f = g$  en casi todo punto. Entonces  $g$  es medible-Lebesgue.*

*Demostración.* Como  $f = g$  casi en todo punto, el conjunto

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$$

es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Consideramos el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : g(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$$

Observamos que en  $Z^c$ , como  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in Z^c$ , se tiene:

$$\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z^c : f(x) < \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$$

el cual es medible porque  $f$  es medible.

Por otro lado,  $\{x \in Z : g(x) < \alpha\} \subseteq Z$ , y como  $Z$  es de medida nula, este conjunto también es medible.

Entonces, la unión

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : g(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : f(x) < \alpha\}$$

es la unión de dos conjuntos medibles, por lo tanto es medible.

Como esto ocurre para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se concluye que  $g$  es medible.

□

### Corolario 2.1.3

*Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente a una función  $f$  en casi todo punto. Entonces,  $f$  es medible.*

*Demostración.* Sea

$$Z := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \text{ no existe o es distinto de } f(x) \right\},$$

el cual, por hipótesis, tiene medida de Lebesgue nula.

Definimos la función

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x), & \text{si } x \in Z^c, \\ 0, & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Entonces,  $g = f$  casi en todo punto (ya que  $f_j \rightarrow f$  fuera de  $Z$ ), y definimos también la sucesión

$$g_j(x) := \begin{cases} f_j(x), & \text{si } x \in Z^c, \\ 0, & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Cada función  $g_j$  es medible, ya que se obtiene modificando  $f_j$  en un conjunto de medida nula. Por tanto,  $g_j \rightarrow g$  puntualmente, y como el límite puntual de funciones medibles es medible, se concluye que  $g$  es medible.

Finalmente, dado que  $f = g$  casi en todo punto, y  $g$  es medible, la proposición anterior garantiza que  $f$  también es medible.  $\square$

### Definición 2.1.3 [Función característica]

*Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible. La función característica de un conjunto  $E \in \Sigma$  se define como*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

### Observación 2.1.2

*La función característica  $\chi_E$  es medible si y solo si  $E \in \Sigma$ .*

*Demostración.* Sea  $G \subset \mathbb{R}$  un conjunto abierto. Como  $\chi_E$  solo toma los valores 0 y 1, su preimagen  $\chi_E^{-1}(G)$  solo puede ser uno de los siguientes conjuntos:

$$\chi_E^{-1}(G) = \begin{cases} X, & \text{si } 0 \in G \text{ y } 1 \in G, \\ E^c, & \text{si } 0 \in G \text{ y } 1 \notin G, \\ E, & \text{si } 0 \notin G \text{ y } 1 \in G, \\ \emptyset, & \text{si } 0 \notin G \text{ y } 1 \notin G. \end{cases}$$

En todos los casos,  $\chi_E^{-1}(G)$  es medible si y solo si  $E \in \Sigma$ , ya que tanto  $E$  como su complemento  $E^c$  deben pertenecer a  $\Sigma$ . Por tanto,  $\chi_E$  es medible si y solo si  $E$  es medible.  $\square$

### Observación 2.1.3

*Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  una función. Entonces, son equivalentes:*

1.  *$f$  es medible-Lebesgue.*
2. *La función extendida  $f \circ \chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  definida por*

$$f \circ \chi_E(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

*es medible-Lebesgue.*

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Como  $E^c$  es medible y  $f$  es medible en  $E$ , se tiene que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : 0 > \alpha\}$$

donde ambos conjuntos son medibles: el primero por hipótesis y el segundo por ser subconjunto de  $E^c$  (que es medible). Por tanto, la unión es medible y  $f \circ \chi_E$  es medible.

- (2)  $\implies$  (1): Si  $f \circ \chi_E$  es medible, entonces para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : 0 > \alpha\}$$

y esta unión es medible por hipótesis. Como  $\{x \in E^c : 0 > \alpha\}$  es medible y disjunto de  $E$ , se deduce que  $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible. Por tanto,  $f$  es medible en  $E$ .

□

#### Definición 2.1.4 [Función simple]

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función. Decimos que  $f$  es una función simple si toma un número finito de valores reales no negativos, es decir, si:

$$f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty),$$

para ciertos  $\alpha_i \in [0, +\infty)$ .

Definimos los subconjuntos medibles  $E_i = f^{-1}(\alpha_i)$  para  $i = 1, \dots, n$ , los cuales forman una partición disjunta de  $X$ , es decir,

$$X = \bigsqcup_{i=1}^n E_i.$$

En tal caso,  $f$  puede escribirse como combinación lineal finita de funciones características:

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}.$$

Por lo tanto, una función simple es aquella que puede expresarse como una suma finita de múltiplos escalares de funciones características de conjuntos medibles disjuntos.

#### Observación 2.1.4

Sea  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple tal que  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ . Entonces:

$$f \text{ es medible} \iff E_i \in \Sigma \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Es decir,  $f$  es medible si y sólo si los subconjuntos  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son medibles.

#### Teorema 2.1.2

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que:

- (i)  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots \leq f$  para todo  $n$ .

(ii) Para todo  $x \in X$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

(iii) Si además  $f$  es acotada, entonces la convergencia es uniforme casi en todo punto.

*Demuestra*ción. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos el intervalo  $[0, n]$  y lo dividimos en subintervalos de longitud  $\frac{1}{2^n}$ . Para  $1 \leq i \leq n2^n$ , definimos los conjuntos

$$E_{n,i} := f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) = \{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\}$$

y también

$$E_n := f^{-1}([n, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Todos estos conjuntos son medibles, pues  $f$  es medible.

Definimos entonces la función simple

$$f_n := \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{E_n}$$

Veamos primero la convergencia puntual. Fijemos  $x \in X$ . Tenemos dos casos:

- Si  $f(x) = +\infty$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) \geq n$ , y por definición  $f_n(x) = n$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty = f(x)$$

- Si  $f(x) < +\infty$ , existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $f(x) < n_x$ . Además, existe  $k \in \mathbb{N}$  con

$$\frac{k-1}{2^{n_x}} \leq f(x) < \frac{k}{2^{n_x}}$$

y entonces

$$f_{n_x}(x) = \frac{k-1}{2^{n_x}}$$

Por lo tanto,

$$0 \leq f(x) - f_{n_x}(x) \leq \frac{1}{2^{n_x}}$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Además, si  $f$  está acotada, es decir, si existe  $M > 0$  tal que  $f(x) \leq M$  para todo  $x \in X$ , entonces para todo  $n \geq M$  y todo  $x \in X$ ,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

lo que implica que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente casi en todo punto.

Ahora, veamos que  $f_n$  es monótona creciente. Para todo  $x \in X$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ , por construcción de  $f_n$ , tenemos que:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{si } x \in E_{n,i} \\ n & \text{si } x \in E_n \end{cases}$$

y

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & \text{si } x \in E_{n,i} \\ n+1 & \text{si } x \in E_{n+1} \end{cases}$$

Notemos que para todo  $n$  y  $i$ ,

$$\frac{i-1}{2^n} \leq \frac{2i-2}{2^{n+1}}$$

por lo que

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

para todo  $x \in X$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

## 2.2 Integración de Funciones Positivas

### Definición 2.2.1 [Integral de una función simple]

Sea  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$  el espacio medible con la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}^n$  de los conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$  y la medida de Lebesgue  $m$ . Sea

$$s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty] \quad s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

una función simple, medible y no negativa, donde los conjuntos  $(A_i)_{i=1}^n$  son medibles y forman una unión disjunta que cubre  $\mathbb{R}^n$ , es decir,

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$$

Entonces, definimos la integral de  $s$  respecto a la medida de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(x) dx := \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$$

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible. Definimos la integral de  $s$  sobre  $E$  como:

$$\int_E s(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap E)$$

### Observación 2.2.1

La integral de la función nula sobre  $\mathbb{R}^n$  es cero:

$$\int_{\mathbb{R}^n} 0 dx = 0.$$

Del mismo modo, si  $s$  es una función simple y  $E \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida nula, entonces:

$$\int_E s(x) dx = 0.$$

Esto se deduce directamente de la definición, ya que  $m(A_i \cap E) = 0$  para todo  $i$ .

### Lema 2.2.1

Sea  $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$  una unión disjunta de conjuntos medibles. Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible y no negativa. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s dx.$$

*Demostración.* Sea la representación canónica de  $s$ :

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \text{con } A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ medibles y disjuntos.}$$

Entonces, usando la definición de la integral de funciones simples:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s \, dx = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i).$$

Ahora, para cada  $i$ , tenemos que:

$$A_i = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_i \cap X_k),$$

donde la unión es disjunta porque los  $X_k$  son disjuntos. Como la medida es aditiva sobre uniones disjuntas (Lema 1.2.4):

$$m(A_i) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_i \cap X_k).$$

Por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s \, dx = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} m(A_i \cap X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap X_k).$$

Pero la expresión

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap X_k)$$

es, por la Definición 2.2.1,  $\int_{X_k} s \, dx$ . Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s \, dx.$$

□

### Corolario 2.2.1

Sean  $s, t : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  funciones simples, medibles y no negativas. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} s \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} t \, dx.$$

*Demostración.* Supongamos que las representaciones canónicas de  $s$  y  $t$  son

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}, \quad t = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j},$$

donde los conjuntos  $A_i$  y  $B_j$  son medibles y forman particiones disjuntas de  $\mathbb{R}^n$ , es decir,

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{i=1}^m A_i = \bigsqcup_{j=1}^k B_j$$

Entonces,

$$s + t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j) \cdot \chi_{A_i \cap B_j},$$

ya que en cada conjunto  $A_i \cap B_j$ , se tiene  $s(x) = \alpha_i$ ,  $t(x) = \beta_j$ , y por tanto  $(s + t)(x) = \alpha_i + \beta_j$

Como la familia  $\{A_i \cap B_j\}$  es una partición disjunta de  $\mathbb{R}^n$ , y los conjuntos son medibles, aplicamos la definición de integral de función simple:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j) \cdot m(A_i \cap B_j)$$

Distribuyendo:

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \alpha_i \cdot m(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot m(A_i \cap B_j)$$

Reordenando las sumas:

$$= \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot m(A_i \cap B_j) \right)$$

Pero por el lema de aditividad de la integral sobre uniones disjuntas que partitionan el espacio (Lema 2.2.1), esto es:

$$= \sum_{j=1}^k \int_{B_j} s + \sum_{i=1}^m \int_{A_i} t = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$$

□

### Definición 2.2.2 [Integral de Lebesgue]

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  una función medible y no-negativa. Definimos la integral de Lebesgue de  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}$$

Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty)$  es una función medible y no-negativa, definimos la integral de Lebesgue de  $f$  sobre  $E$  como:

$$\int_E f := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}$$

### Proposición 2.2.1

Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

1. Si  $0 \leq f \leq g$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible  $\Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$
2. Si  $f, g \geq 0$   $\Rightarrow \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$
3. Si  $c \geq 0$ ,  $f \geq 0$   $\Rightarrow \int_E cf = c \int_E f$
4. Si  $m(E) = 0$   $\Rightarrow \int_E f = 0$  (Incluso si  $f = +\infty$ )
5. Si  $f|_E = 0$   $\Rightarrow \int_E f = 0$  (Incluso si  $m(E) = +\infty$ )
6. Si  $A \subset B$  y  $f \geq 0$   $\Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$
7. Si  $A, B$  son conjuntos medibles y disjuntos y  $f \geq 0$   $\Rightarrow \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$
8. Si  $f = g$  en casi todo punto de  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible  $\Rightarrow \int_E f = \int_E g$

1'. Si  $0 \leq f \leq g$  en casi todo punto de  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible, entonces  $\int_E f \leq \int_E g$ .

*Demostración.*

- Sean  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  funciones medibles tales que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , y sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible. Definimos los siguientes conjuntos de funciones simples:

$$\mathcal{S}_f = \{s \text{ simple y medible } | 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E\} \quad \mathcal{S}_g = \{t \text{ simple y medible } | 0 \leq t \leq g \cdot \chi_E\}$$

Como  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$ , se tiene que

$$f(x)\chi_E(x) \leq g(x)\chi_E(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Por lo tanto, cualquier función simple  $s \in \mathcal{S}_f$  también satisface  $0 \leq s \leq g \cdot \chi_E$ , es decir,

$$\mathcal{S}_f \subset \mathcal{S}_g$$

La integral de Lebesgue sobre  $E$  se define como:

$$\int_E f = \sup_{s \in \mathcal{S}_f} \int_{\mathbb{R}^n} s, \quad \int_E g = \sup_{t \in \mathcal{S}_g} \int_{\mathbb{R}^n} t$$

Como el supremo de un conjunto está acotado por el supremo de un conjunto que lo contiene, se concluye que:

$$\int_E f \leq \int_E g$$

- Véase la demostración del Corolario 2.2.2.

- Si  $f = c \cdot 0$ , entonces es trivial. Si  $c > 0$ , tomamos  $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq s \leq f$ .

Entonces,  $c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$ .

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f$$

- Dado  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible tal que  $m(E) = 0$ , y sea  $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$  una función simple tal que  $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$ . Entonces para todo  $i = 1, \dots, m$  se tiene que  $m(A_i \cap E) = 0$  por ser  $E$  de medida nula. Por lo tanto,

$$\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0$$

Esto es cierto para toda función simple  $s$  tal que  $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$ . Por lo tanto, el supremo de dichas integrales también es cero:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\} = 0$$

5. Supongamos que  $f|_E = 0$ , es decir,  $f(x) = 0$  en casi todo punto de  $E$ .

Sea  $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$  una función simple y medible tal que  $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$ . Por definición de restricción, se tiene que

$$s(x) \leq f(x) = 0 \quad \text{para casi todo } x \in E$$

por lo que

$$s(x) = 0 \quad \text{para casi todo } x \in E$$

Luego  $\forall i = 1, \dots, m$  tal que  $\alpha_i > 0$  se tiene que  $m(A_i \cap E) = 0$

entonces,

$$\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0$$

Finalmente, buscando el supremo de las funciones simples obtenemos:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\} = 0$$

6. Dados  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos medibles.

Definimos las funciones:

$$f_1 := f \cdot \chi_A, \quad f_2 := f \cdot \chi_B$$

Como  $f \geq 0$  y  $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  (porque  $A \subset B$ ), se tiene que:

$$f_1(x) = f(x)\chi_A(x) \leq f(x)\chi_B(x) = f_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Es decir,  $f_1 \leq f_2$  en todo  $\mathbb{R}^n$ .

Entonces, por el apartado (1), se sigue que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_2$$

Como  $\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_A = \int_{\mathbb{R}^n} f_1$  y  $\int_B f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_B = \int_{\mathbb{R}^n} f_2$ , concluimos que:

$$\int_A f \leq \int_B f$$

7. Si  $A, B$  son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$$

Así,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B) = \int_{\mathbb{R}^n} (f\chi_A + f\chi_B)$$

Por el apartado (2) se sigue,

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_B = \int_A f + \int_B f$$

Por lo tanto,

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

8. Tenemos  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  funciones medibles tales que  $f(x) = g(x)$  para casi todo  $x \in E$ . Es decir, existe un conjunto  $Z \subset E$  tal que  $m(Z) = 0$  y  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in E \setminus Z$ .

Definimos  $A := E \setminus Z$ , de modo que  $E = A \cup Z$  con  $A \cap Z = \emptyset$  y  $m(Z) = 0$ .

Entonces por (7), podemos descomponer la integral como:

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f \quad \text{y} \quad \int_E g = \int_A g + \int_Z g.$$

Pero sobre  $A$ , se cumple que  $f = g$ , por lo que:

$$\int_A f = \int_A g.$$

Además, como  $m(Z) = 0$ , se sigue por el apartado (4) que:

$$\int_Z f = \int_Z g = 0.$$

Por tanto,

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f = \int_A f + 0 = \int_A g + 0 = \int_A g + \int_Z g = \int_E g.$$

- 1'. Sea  $Z = \{x \in E \mid f(x) > g(x)\}$  el conjunto excepcional donde no se cumple la desigualdad. Por hipótesis,  $m(Z) = 0$ .

Definamos la función  $h = g - f \geq 0$  en  $E \setminus Z$  y  $h = 0$  en  $Z$ . Entonces:

- $h$  es medible pues es suma/resta de funciones medibles en  $E \setminus Z$  y es cero en  $Z$ .
- $h \geq 0$  en todo  $E$  por construcción.

Entonces  $g = f + h$  en casi todo punto de  $E$  (excepto en  $Z$  que tiene medida nula). Luego aplicando primero (8) y después (2) se tiene que:

$$\int_E g = \int_E (f + h) = \int_E f + \int_E h$$

Como  $h \geq 0$ , por la propiedad (1) es evidente que:

$$\int_E h \geq 0$$

Por lo tanto:

$$\int_E g = \int_E f + \int_E h \geq \int_E f$$

□

### Teorema 2.2.1 [Convergencia Monótona]

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una sucesión de funciones medibles tales que:

1.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  (en  $\mathbb{R}^n$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

*Demostración.* La sucesión  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es monótona creciente en  $[0, +\infty)$ . Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k, \in [0, +\infty].$$

Dado que  $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.

Sea  $s$  una función simple y medible en  $\mathbb{R}^n$  con  $0 \leq s \leq f$ , y fijemos un  $c \in (0, 1)$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$ , definimos la sucesión de conjuntos

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$$

Esta sucesión es medible (debido a que tanto  $f_k$  como  $s$  son medibles) y es creciente (debido a que  $f_k \leq f_{k+1}$  y  $c \cdot s \leq c \cdot f \leq f$ ). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f(x) = 0 \implies f_k(x) = c \cdot s(x) = 0 \implies x \in E_k \quad \forall k \\ \text{Si } f(x) > 0 \implies \exists k \in \mathbb{N} : c \cdot s(x) \leq f_k(x) \leq f(x) \implies x \in E_k \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x \in E_k$ . Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que  $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $s^{-1}(\alpha_j) = A_j$  y  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente, entonces, para cada  $j = 1, \dots, m$ , tenemos por el Lema 1.2.6:

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j).$$

Luego:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos que:

$$l \geq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite  $c \rightarrow 1$  obtenemos que:

$$l \geq \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que  $s$  es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad  $\forall s$  función simple, medible y no-negativa (por ser  $0 \leq s \leq f$ ). Por tanto, obtenemos la desigualdad buscada:  $l \geq \int_{\mathbb{R}^n} f$ .  $\square$

**Teorema 2.2.2** [Convergencia Monótona Versión Refinada]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $f_k : E \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de funciones medibles y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  tales que:

1.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  (en casi todo punto de  $E$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (en casi todo punto de  $E$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

*Demostración.* Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que  $m(N) = 0$ . Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E \setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \hat{f} = f \cdot \chi_{E \setminus N}$$

Podemos aplicar el Teorema 2.2.1, lo que nos permite concluir que: 1.  $\hat{f}_k \rightarrow \hat{f}$  puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_E f = \int_{E \setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

□

**Corolario 2.2.2**

1. Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  son medibles y no-negativas se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2. Si  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de funciones medibles  $\forall k \in \mathbb{N}$  se tiene que:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

*Demostración.*

1. Dado que  $f$  y  $g$  son funciones medibles y no negativas, existen sucesiones crecientes de funciones simples y medibles  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  y  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tales que

$$s_j \uparrow f \quad \text{y} \quad t_j \uparrow g \quad \text{puntualmente.}$$

Como la suma de funciones simples es simple,  $s_j + t_j$  es también una sucesión creciente de funciones simples que converge puntualmente a  $f + g$ . Por el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema 2.2.1), se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (s_j + t_j)$$

Como la integral de Lebesgue es aditiva sobre funciones simples, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s_j + t_j) = \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \int_{\mathbb{R}^n} t_j$$

Luego, aplicando el límite,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2. Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles no negativas. Definamos, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$F_m := \sum_{k=1}^m f_k$$

Como cada  $f_k \geq 0$ , la sucesión  $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$  es creciente y converge puntualmente a la serie

$$F := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Por el apartado anterior, tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_m = \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Como  $(F_m)$  converge monótonamente a  $F$ , podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

□

### Lema 2.2.2 [Lema de Fatou]

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{R}^n}$  sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

*Demostración.* Sea

$$f := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \inf_{j \geq k} f_j \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \quad \text{donde} \quad g_k := \inf_{j \geq k} f_j$$

Dado que  $g_k \geq 0$ , la sucesión  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por el Teorema 2.2.1 (TCM), se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$$

Por construcción de la sucesión  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (en particular por ser monótona creciente), se cumple la igualdad:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k$$

Finalmente, dado que  $g_k \leq f_k$ , se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k \implies \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Nótese que para dos sucesiones  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $a_k \leq b_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k$$

□

### Observación 2.2.2

*El resultado análogo con  $\limsup$  no es válido en general. Fijémonos que si intentásemos una demostración análoga, no se podría aplicar el Teorema 2.2.1 (TCM), pues la sucesión de funciones  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definida por  $h_k = \sup_{j \geq k} f_j$  no es creciente, sino decreciente. Podemos tomar de contraejemplo la función  $f_k = k \cdot \chi_{[k, \infty]}$ .*

## 2.3 Funciones Integrables-Lebesgue

### Definición 2.3.1 [Integral de Lebesgue de funciones medibles]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  una función medible. Sean  $f^+ = \max\{f, 0\}$  y  $f^- = \max\{-f, 0\}$  las partes positiva y negativa de  $f$ . Definimos la integral de Lebesgue de  $f$  en  $E$  como:

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \circ \chi_E - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \circ \chi_E$$

### Definición 2.3.2 [Función Integrable]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible y  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  función medible. Se dice que  $f$  es integrable (o absolutamente integrable) en  $E$  cuando

$$\int_E f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

### Observación 2.3.1

Una función  $f$  (no necesariamente no negativa) es integrable en  $E$  si y sólo si  $|f|$  es integrable en  $E$ , lo cual también es equivalente a que sus partes positiva y negativa,  $f^+ = \max\{f, 0\}$  y  $f^- = \max\{-f, 0\}$ , sean ambas integrables en  $E$ :

$$f \in L^1(E) \iff |f| \in L^1(E) \iff f^+, f^- \in L^1(E)$$

### Lema 2.3.1

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f = g - h$  con  $g, h : E \rightarrow [0, +\infty]$  funciones integrables no negativas. Entonces,

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h$$

*Demostración.* Primero probemos que  $f$  es integrable. Como  $f = g - h$ , tenemos:

$$|f| = |g - h| \leq |g| + |h|.$$

Dado que  $g$  y  $h$  son integrables,  $|g|$  y  $|h|$  también lo son, y por lo tanto  $|g| + |h|$  es integrable. La desigualdad anterior implica que  $f$  es integrable.

Por otro lado, expresando  $f$  en términos de sus partes positiva y negativa:

$$f = f^+ - f^- = g - h.$$

Reordenando términos obtenemos:

$$f^+ + h = f^- + g.$$

Al tratarse de funciones no negativas, podemos aplicar la linealidad de la integral de Lebesgue (Corolario 2.2.2)

$$\int_E f^+ + h = \int_E f^+ + \int_E h = \int_E f^- + g = \int_E f^- + \int_E g.$$

Finalmente, restando  $\int_E h$  y  $\int_E f^-$  en ambos lados:

$$\int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h,$$

lo cual es equivalente a:

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h,$$

completando la demostración. □

### Proposición 2.3.1

Para funciones  $f$  y  $g$  integrables en  $E$ , se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si  $f, g$  son integrables en  $E$ , entonces  $f + g$  también es integrable y

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

2. Si  $f$  es integrable en  $E$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $cf$  es integrable en  $E$  y

$$\int_E (cf) = c \int_E f$$

3. Si  $f \leq g$  en casi todo punto de  $E$ , entonces

$$\int_E f \leq \int_E g$$

4. Si  $|f|$  es integrable en  $E$ , entonces  $f$  también es integrable y

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

5. Si  $f = g$  en casi todo punto de  $E$  y  $f$  es integrable en  $E$ , entonces  $g$  también es integrable en  $E$  con,

$$\int_E f = \int_E g$$

6. Si  $m(E) = 0$  y  $f$  es medible, entonces es integrable en  $E$  y

$$\int_E f = 0$$

7. Si  $f$  es integrable en  $E$  entonces  $|f| < \infty$  en casi todo punto de  $E$

8. Si  $\int_E |f| = 0$ , entonces  $f = 0$  en casi todo punto de  $E$ .

*Demostración.*

1. Dado que  $f = f^+ - f^-$  y  $g = g^+ - g^-$ , se sigue que:

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

donde ambos términos  $(f^+ + g^+)$  y  $(f^- + g^-)$  son no negativos. Por el lema de integración de funciones no negativas, tenemos:

$$\int_E (f + g) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-).$$

Aplicando el Corolario 2.2.2 a cada integral y reordenando los términos:

$$= \left( \int_E f^+ + \int_E g^+ \right) - \left( \int_E f^- + \int_E g^- \right) = \left( \int_E f^+ - \int_E f^- \right) + \left( \int_E g^+ - \int_E g^- \right)$$

De nuevo, por el Lema 2.3.1, obtenemos que:

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

2. Consideremos primero el caso  $c > 0$ . Como  $f = f^+ - f^-$ , se tiene que:

$$cf = cf^+ - cf^-,$$

donde tanto  $cf^+$  como  $cf^-$  son funciones no negativas.

Aplicando el apartado (3) de la Proposición 2.2.1, obtenemos:

$$\int_E cf = \int_E cf^+ - \int_E cf^- = c \int_E f^+ - c \int_E f^-.$$

Factorizando la constante  $c$ , concluimos que:

$$\int_E cf = c \left( \int_E f^+ - \int_E f^- \right) = c \int_E f.$$

Para el caso  $c < 0$ , observemos primero que:

$$cf = (-|c|)f = -(|c|f) = -(|c|f^+ - |c|f^-) = |c|f^- - |c|f^+.$$

Integrando ambos lados y por la proposición aplicada anteriormente, tenemos:

$$\int_E cf = \int_E |c|f^- - \int_E |c|f^+ = |c| \int_E f^- - |c| \int_E f^+.$$

Factorizando y teniendo en cuenta que  $c = -|c|$ :

$$\int_E cf = -|c| \left( \int_E f^+ - \int_E f^- \right) = c \int_E f.$$

3. Como  $g - f \geq 0$  en casi todo punto de  $E$ , podemos hacer la descomposición de  $f$  y  $g$  en sus partes positiva y negativa, de forma que  $g - f = (g^+ - g^-) - (f^+ - f^-) = (g^+ + f^-) - (g^- + f^+) \geq 0$  en casi todo punto de  $E$ . Aplicando el apartado (1') de la Proposición 2.2.1, tenemos que:

$$0 \leq g^- + f^+ \leq g^+ + f^- \text{ en casi todo punto de } E \implies \int_E (g^- + f^+) \leq \int_E (g^+ + f^-)$$

Luego haciendo uso de (2) de la Proposición 2.2.1 en cada integral:

$$\int_E g^- + \int_E f^+ \leq \int_E g^+ + \int_E f^-$$

Reordenando los términos, obtenemos:

$$\int_E f^+ - \int_E f^- \leq \int_E g^+ - \int_E g^- \implies \int_E f \leq \int_E g$$

4. Se tiene que  $|f| = f^+ + f^-$ . Usando la linealidad de la integral,

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ + \int_E f^- \right|$$

Como  $f = f^+ - f^-$ , aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|$$

5. Como  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies f^+ = g^+$  y  $f^- = g^-$  en casi todo punto de  $E$ , por lo que sólo queda aplicar el propiedad (8) de la Proposición 2.2.1:

$$\int_E f^+ = \int_E g^+ \text{ y } \int_E f^- = \int_E g^-$$

Así,

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g$$

6. Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto de medida nula, puesto que  $0 \leq |f|$ , entonces por (4) de la Proposición 2.2.1 se cumple que:

$$\int_E |f| = 0$$

Aplicando el apartado anterior se deduce el resultado:

$$0 \leq \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = 0 \implies \int_E f = 0$$

7. Por definición, sabemos que la función  $f$  es integrable en  $E$  si

$$\int_E f < +\infty \iff \int_E |f| < +\infty$$

Sea  $Z \subset E$  el conjunto de puntos de  $E$  donde  $|f| = \infty$ . Entonces tenemos por la propiedad (7) de la Proposición 2.2.1 que:

$$\int_E |f| = \int_{E \setminus Z} |f| + \int_Z |f| < +\infty \implies \int_Z |f| < +\infty \implies m(Z) = 0.$$

Por lo tanto,  $|f| < \infty$  en casi todo punto de  $E$ .

8. Sea

$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

Definimos los conjuntos

$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, evaluamos la medida de  $A_k$  utilizando la integral:

$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \leq \int_{A_k} k \cdot |f| = k \int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} |f| \leq \int_E |f|$$

Tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  (y de la subaditividad) se concluye que

$$m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0.$$

□

### Teorema 2.3.1 [Convergencia Dominada]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $\forall k \in \mathbb{N}, f_k : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones medibles. Supongamos que  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f_k| < g$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Si además suponemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  en casi todo punto de  $E$ , entonces:

1.  $f_k$  y  $f$  son integrables en  $E$
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| = 0$
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$

*Demostración.*

1. Dado que  $|f_k| \leq |g| = g \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , se concluye que  $f_k$  es integrable en  $E$ . Además, como  $|f| \leq g$ , se sigue que  $f$  también es integrable en  $E$ .
2. Observamos que, como  $|f_k| \leq g$  y  $|f| \leq g$  para casi todo  $x \in E$ , entonces:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x)| + |f(x)| \leq g(x) + g(x) = 2g(x) \quad \text{para casi todo } x \in E$$

Por lo tanto, la función  $|f_k - f|$  está acotada superiormente por  $2g$ , que es integrable. Sea ahora:

$$h_k(x) := 2g(x) - |f_k(x) - f(x)| \geq 0$$

Como  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  casi en todo punto de  $E$ , se tiene:

$$|f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0 \implies h_k(x) \rightarrow 2g(x)$$

Aplicamos el Lema de Fatou a la sucesión de funciones no negativas ( $h_k$ ):

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} h_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k$$

Dado que  $h_k(x) \rightarrow 2g(x)$ , entonces:

$$\int_E 2g \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k$$

Pero como  $h_k = 2g - |f_k - f|$ , se tiene:

$$\int_E h_k = \int_E (2g - |f_k - f|) = \int_E 2g - \int_E |f_k - f|$$

Sustituyendo en la desigualdad anterior y utilizando el siguiente lema

**Lema 2.3.2**

Si  $a_k \rightarrow a$ , entonces

$$\liminf_k (a_k + b_k) \geq \liminf_k a_k + \liminf_k b_k$$

se cumple que:

$$\begin{aligned} \int_E 2g &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_E 2g - \int_E |f_k - f| \right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_E 2g \right) + \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( - \int_E |f_k - f| \right) \\ &= \int_E 2g - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| \end{aligned}$$

Restando  $\int_E 2g$  en ambos lados:

$$0 \leq - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| \implies \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| \leq 0$$

Como la integral de una función no negativa también es no negativa:

$$0 \leq \int_E |f_k - f| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| \leq 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| = 0$$

3. Finalmente, aplicamos la propiedad de la integral a la diferencia  $f_k - f$ :

$$\left| \int_E f_k - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_k - f) \right| \leq \int_E |f_k - f| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$$

□

**Definición 2.3.3** [Integral Paramétrica]

Sea  $f$  función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

**Teorema 2.3.2**

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto cualquiera,  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$  y suponemos que:

1.  $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.
2.  $\forall x \in E f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

es una función continua en  $U$ .

*Demostración.* Sea  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U$  tal que  $u_k \rightarrow u_0 \in U$ . ¿Se sigue que  $(F(u_k))_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(u_0)$ ?

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$f_k = f(\cdot, u_k) : E \rightarrow \mathbb{R}$$

que es una función medible. Por la condición (2), se cumple que  $\forall x \in E$ ,

$$f_k(x) = f(x, u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x, u_0).$$

Es decir, la sucesión  $\{f_k\}$  converge puntualmente en  $E$  a

$$f_0(x) = f(x, u_0).$$

Además, se cumple que

$$|f_k(x)| = |f(x, u_k)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Aplicando el Teorema 2.3.1 (TCD), se concluye que  $f_k$  es integrable para todo  $k \in \mathbb{N}$  y

$$\int_E f_k \rightarrow \int_E f.$$

Es decir,

$$F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$F(u_k) = \int_E f(x, u_k) dx \Rightarrow F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

□

**Observación 2.3.2**

$$\forall u_0 \in U \lim_{u \rightarrow u_0} \int_E f(x, u) dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx$$

**Teorema 2.3.3** [Regla de Leibniz]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto y  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Y además supongamos que:

1.  $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .

2.  $\forall x \in E$   $f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $U$ .

3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx$$

es de clase  $C^1$  en  $U$  y  $\forall t \in U$  se cumple que:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

*Demostración.* Fijamos  $t_0 \in (a, b)$  y definimos la función  $h : E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$h(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}, & t \neq t_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

1. Medibilidad de  $h(x, t)$

Queremos ver que  $h(x, t)$  es medible para todo  $t \in (a, b)$ .

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos que:

$$h(x, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_0 + 1/k) - f(x, t_0)}{1/k}$$

lo cual es medible.

2. Continuidad de  $h(x, \cdot)$

Para todo  $x \in E$ , si  $h(x, \cdot)$  es acotada en  $(a, b)$ , entonces es continua.

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos:

$$h(x, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} h(x, t),$$

lo cual prueba la continuidad.

3. Acotación y aplicación de la Regla de Leibniz

$$|h(x, t)| \leq g(x)$$

- Si  $t = t_0$ , es claro. - Si  $t \neq t_0$ , por el Teorema del Valor Medio, existe  $c \in (t, t_0)$  tal que:

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, c) \right| \leq g(x).$$

Por la Regla de Leibniz, obtenemos:

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_E \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx = \\ &\lim_{t \rightarrow t_0} \left( \int_E h(x, t) dx \right) = \int_E \left( \lim_{t \rightarrow t_0} h(x, t) \right) dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como  $F'$  es continua en  $(a, b)$ , se concluye que  $F \in C^1(a, b)$ .

□

## 2.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

### Teorema 2.4.1

Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es integrable Lebesgue en  $[a, b]$  y se cumple que:

$$(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$$

### Observación 2.4.1

Denotamos  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

*Demostración.*  $\forall k \in \mathbb{N}$  sabemos que  $\exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{n(k)}^k = b\} \subset [a, b]$  tal que:  $\bar{S}(f, P_k) - \underline{S}(f, P_k) < \frac{1}{k}$ . Suponemos que  $P_{k+1}$  es mas fina que  $P_k$  y además que

$$\text{diam}(P_k) = \sup_{i \in \{1, \dots, n(k)\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$  denotamos  $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$  y  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$ .

$$\underline{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} m_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \varphi_k \quad \text{con} \quad \varphi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k]}$$

$$\bar{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} M_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \psi_k \quad \text{con} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k]}$$

Es claro que  $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$  en  $[a, b]$ . Además, como  $P_{k+1}$  es más fino que  $P_k \implies (\varphi_k) \uparrow$  y  $(\psi_k) \downarrow$ . Denotamos  $\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \sup \varphi_k$  y  $\psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \inf \psi_k$  que son medibles y cumplen que  $\varphi \leq f \leq \psi$ .

Como  $f$  es integrable-Riemann  $\implies f$  es acotada  $\iff \exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . La función  $g(x) = M$  es integrable en  $[a, b]$  y puesto que  $|\psi_k| \leq g$  y  $|\varphi_k| \leq g$  entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f, P_k) = \int_a^b \varphi_k \rightarrow \int_a^b \varphi \quad \bar{S}(f, P_k) = \int_a^b \psi_k \rightarrow \int_a^b \psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \quad \text{y} \quad \bar{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \implies \int_a^b \varphi = (R) \int_a^b f = \int_a^b \psi$$

Y como  $\int_a^b \psi - \varphi = 0 \implies \psi - \varphi = 0$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Es decir  $\varphi = f = \psi$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Y finalmente obtenemos que:

$$(L) \int_a^b f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi = (R) \int_a^b f$$

□

### Teorema 2.4.2

Sean  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces  $f$  es integrable-Riemann en  $[a, b] \iff$

$D_f = \{x \in [a, b] \mid f \text{ no es continua en } x\}$  tiene medida nula.

### Ejemplo

La función de Dirichlet

$$f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable-Riemann en  $[0, 1]$ . Pero  $f = 0$  en casi todo punto  $\implies f$  es integrable-Lebesgue y ésta vale:  $\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 0 = 0$

### Teorema 2.4.3

Sean  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$  y  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente integrable-Riemann impropia en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Entonces  $f$  es integrable-Lebesgue en  $(\alpha, \beta)$  y se cumple que:

$$(L) \int_{\alpha}^{\beta} f = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f$$

*Demostración.* Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea  $(\alpha, \beta)$ , en este caso trataremos el intervalo  $[\alpha, \infty)$ : Por hipótesis sabemos que:

1.  $\forall k \in \mathbb{N}, f$  es integrable-Riemann en  $[a, b]$
2.  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f| < +\infty$

Tomamos una sucesión  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$  y definimos las sucesiones de funciones:  $f_n = f \cdot \chi_{[a, b_n]}$  y  $g_n = |f| \cdot \chi_{[a, b_n]}$  medibles. De manera que tenemos que  $f_n \uparrow f$  y  $g_n \uparrow |f|$ . Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monótona:

1.  $(L) \int_a^{+\infty} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} |f| = (R) \int_a^{+\infty} |f| < \infty$
2. Esto muestra que  $f$  es integrable-Lebesgue en  $[a, +\infty)$ .

Por otra parte, como  $|f_n| \leq |f| \ \forall n \in \mathbb{N}$  por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

1.  $(L) \int_a^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} f = (R) \int_a^{+\infty} f$

Finalmente obtenemos el resultado de que  $f$  es integrable de Riemann-impropia en  $[a, +\infty)$ .  
 $\forall (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : b_n \rightarrow \infty$  tenemos que  $|\int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f| \leq \varepsilon$

### Ejemplo

(Hoja 3. Ej: 6.a) Calculemos

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando con respecto al parámetro  $t$ . Para ello, aplicamos el Teorema de Leibniz:  
Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , con  $f : E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\forall u \in (a, b), f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .

2. Para casi todo  $x \in E$ , la función  $f(x, \cdot) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $(a, b)$ .
3. Existe  $g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \text{para casi todo } x \in E, \forall u \in (a, b).$$

Entonces,  $F(t)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y se cumple:

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Dado que

$$f(x, t) = \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x},$$

calculamos la derivada parcial con respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \cos(tx)e^{-x}.$$

Verifiquemos cada una de las hipótesis del Teorema de Leibniz:

1.  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, t)$  es integrable en  $[0, +\infty)$ :

$$|f(x, t)| \leq e^{-x} = g(x).$$

Como  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 < +\infty$ , se cumple la integrabilidad.

2.  $\forall x \in E$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \cos(tx)e^{-x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por lo que  $f(x, \cdot)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$ .
3. Se cumple que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = |\cos(tx)e^{-x}| \leq e^{-x} = g(x),$$

que es integrable en  $[0, +\infty)$ .

Por lo tanto,  $F$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x} dx.$$

Ahora calculemos esta integral:

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x} dx.$$

Usando integración por partes con

$$\begin{cases} u = \cos(tx), & dv = e^{-x} dx, \\ du = -t \sin(tx) dx, & v = -e^{-x}, \end{cases}$$

obtenemos:

$$I(t) = [\cos(tx)e^{-x}]_0^{+\infty} - t \int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-x} dx.$$

Evaluando los límites y repitiendo el proceso para  $\sin(tx)e^{-x}$ , obtenemos:

$$I(t)(1 + t^2) = 1.$$

Despejando:

$$I(t) = \frac{1}{1+t^2} = F'(t).$$

Finalmente, integramos:

$$F(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C.$$

Si  $t = 0$ , entonces

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Por lo tanto:

$$F(t) = \arctan(t).$$

### 3 Teoremas de Fubini y Tonelli

#### 3.1 Teorema de Tonelli

Notación:

$$\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \quad (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$$

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces denotamos las funciones:

$$\begin{cases} f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty] & \text{con } f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k \\ f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty] & \text{con } f_y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

#### Teorema 3.1.1 [Teorema de Tonelli]

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [0, +\infty]$  medible. Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , la función  $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dx dy$

Además, de forma análoga se tiene que:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , la función  $f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^k$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} G = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f_y) = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dy dx$

#### Observación 3.1.1

Los siguientes lemas son previos y necesarios para la demostración del Teorema de Tonelli.

#### Lema 3.1.1

Sean  $f, g$  que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $a, b \geq 0 \implies af + bg$  también satisfacen el Teorema de Tonelli

Demostración.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(af + bg)_x = a(f_x) + b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
2.  $H(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (af + bg)_x = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + b(g_x) = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + \int_{\mathbb{R}^k} b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} (af + bg)_x = a \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_x + b \int_{\mathbb{R}^{n+k}} g_x$

□

**Lema 3.1.2**

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $f_j \uparrow f$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  puntualmente  
 $\Rightarrow f$  satisface el Teorema de Tonelli.

*Demostración.*

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $f_j(x, \cdot) = (f_j)_x \uparrow f(x, \cdot) = f_x$
2.  $F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \uparrow \int_{\mathbb{R}^k} f_x = F(x)$  luego  $F$  es medible por el Teorema de la Convergencia Monótona.
3. Nuevamente por el Teorema de la Convergencia aplicado a la sucesión de (2)  $F_j(x) \uparrow F(x)$  tenemos que  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx$

□

**Observación 3.1.2**

El siguiente lema es una versión del lema anterior en el que se usa el teorema de la convergencia dominada en lugar del de la convergencia monótona.

**Lema 3.1.3**

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli. Supongamos que  $(f_j) \rightarrow f$  puntualmente en  $\mathbb{R}^{n+k}$  y  $\exists g : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [0, +\infty]$  integrable, que satisface el Teorema de Tonelli y tal que  $0 \leq f_j \leq g \quad \forall j \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $f$  satisface el Teorema de Tonelli.

*Demostración.*

1.  $(f_j)_x \rightarrow f_x$  medible
2.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} g = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} g_x) < +\infty$  luego  $G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} g_x < +\infty$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  Además, tenemos que  $0 \leq (f_j)_x \leq g_x$  integrable, por lo que podemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada  
 $\Rightarrow F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \rightarrow F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$
3. De nuevo por el Teorema de la Convergencia Dominada  $\int_{\mathbb{R}^n} F = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f$

□

*Demostración del Teorema de Tonelli:*

1. Primero veamos el caso en el que  $f$  es la función indicatriz/característica de un cubo semiabierto.
- (a) Supongamos que  $f = \chi_Q$  donde  $Q$  es un cubo semiabierto en  $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , con  $Q = A \times B$  donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^k$ .

**Observación 3.1.3**

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x} \iff (\chi_E)_x(y) = \chi_E(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases} = \chi_{E_x}(y)$$

Definiendo:

$$f_x = (\chi_Q)_x(y) = \begin{cases} \chi_B(y), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Se concluye que  $f_x$  es medible.

(b) Definimos la función:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (\chi_Q)_x dy = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_B dy, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} m_k(B), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Como resultado,  $F(x) = m_k(B) \cdot \chi_A(x)$  es medible.

(c)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_Q = m_{n+k}(Q) = m_n(A) \cdot m_k(B) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(B) \cdot \chi_A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)$$

2. Ahora supongamos que  $f$  es la función indicatriz de un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}^{n+k}$ .

Dado que  $G$  es abierto, se puede escribir como la unión numerable de cubos semiabiertos disjuntos:

$$G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$$

Definiendo  $G_j = \bigcup_{i=1}^j Q_i$ , se tiene que:

$$(G_j) \uparrow G, \quad \chi_{G_j} \uparrow \chi_G$$

Como cada  $\chi_{G_j} = \sum_{i=1}^j \chi_{Q_i}$  verifica el Teorema de Tonelli por Lema 3.1.2 y Lema 3.1.3, se concluye que  $\chi_G$  también satisface el Teorema de Tonelli.

3. Supongamos ahora que  $f$  es la función indicatriz de un conjunto  $G_\delta$ , es decir, un conjunto resultado de la intersección numerable de conjuntos abiertos, pero bajo mas restricciones:

Supongamos que  $f = \chi_D$  donde  $D$  es un conjunto  $G_\delta$ :

#### Observación 3.1.4

Considerando  $\forall j \in \mathbb{N} D_j = D \cap (j, -j)^{n+k}$  obtenemos que  $(D_j) \uparrow D$  y  $\chi_{D_j} \uparrow \chi_D$  siendo cada  $D_j$  un conjunto  $G_\delta$  y acotado.

Por tanto, como consecuencia del Lema 3.1.2, podemos reducirnos al caso de conjuntos acotados  $D$  es un  $G_\delta$  acotado.

Entonces  $D = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  donde cada  $G_j$  es un conjunto abierto y acotado. Podemos suponer que  $(G_j) \downarrow D$  por tanto  $X_{G_j} \downarrow \chi_D$  y además,  $0 \leq \chi_{G_j} \leq \chi_{G_1}$  que es integrable por ser acotada. Ahora si, podemos usar el Lema 3.1.3 para obtener que  $\chi_D$  satisface el Teorema de Tonelli.

Veamos que el Teorema de Tonelli se verifia cuando  $f = \chi_N : N \subset \mathbb{R}^{n+k}$  es un conjunto de medida nula.

Supongamos entonce que  $m_{n+k}(N) = 0 \implies \forall j \in \mathbb{N}$  por la regularidad  $\exists G_j \subset \mathbb{R}^{n+k}$ -abierto con  $N \subset G_j$  y  $m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j}$ .

Entonces, sea  $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j$  que es un conjunto  $G_\delta$  y  $m_{n+k}(G) \leq m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j} \rightarrow 0$ .

Luego  $N \subset G$  y  $m_{(n+k)}(G) = 0 \implies$  por el apartado anterior  $\chi_G$  satisface el Teorema de Tonelli.  
Por último tenemos que  $0 = m_{(n+k)}(G) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_G = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$ . Sabemos que para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\widehat{F}(x)$  es medible y  $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(x) dx = 0 \implies \widehat{F}(x) = 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $N_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in N\} \subset G_x$  y  $m_k(G_x) = \widehat{R}(x) = 0 \implies N_x$  es un conjunto nulo (luego medible) para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  es decir  $\chi_{N_x}$  es medible. Además  $0 \leq F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{G_x} = 0 \implies F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} = 0$  en casi todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$  en particular  $F$  es medible. Finalmente,  $0 = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_N = \mathbb{R}^\times F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$

4. Veamos que si  $A$  es medible  $\implies f = \chi_A$  verifica el Teorema de Tonelli: Como  $A = D \setminus N$  donde  $\begin{cases} D \text{ es un conjunto } G_\delta \\ N \text{ es un conjunto de medida nula} \end{cases}$  Además tenemos que  $D = A \cup N$  disjunto  $\implies \chi_D = \chi_A + \chi_N \iff \chi_A = \chi_D - \chi_N \implies \chi_{A_x} = \chi_{D_x} - \chi_{N_x}$  y  $\chi_{A_x}$  es medible.  
 $F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_x} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_x}$  es medible para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{D_x} dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_D = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_A$  En este paso hemos aplicado (4).
5. Si  $f$  es una función medible,  $f = \sum_{j=1}^l \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $\begin{cases} \alpha_j \in \mathbb{R} \\ A_j \text{ medible} \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N} \implies$  usando (5) y el Lema 3.1.1, obtenemos el resultado.
6. Sea  $f$  función medible, no negativa en  $\mathbb{R}^{n+k}$  sabemos que  $\exists (S_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones simples, medibles y no-negativas tales que  $(S_j) \uparrow f$ . Entonces por (6) cada  $(S_j)$  verifica el Teorema de Tonelli, luego por el Lema 3.1.2,  $f$  también satisface el Teorema de Tonelli.

□

### Corolario 3.1.1 [Principio de Cavalieri]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  medible entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  el conjunto  $E_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = m(E_x)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^n$
3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m(E_x) dx$

De forma análoga se tiene que:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , el conjunto  $E_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = m(E_y)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^k$
3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m(E_y) dy$

*Demostración.* Aplicando el Teorema de Tonelli, tomando  $f = \chi_E$ .

□

### Corolario 3.1.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  conjunto  $(n+k)$ -nulo. Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E_x$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^k$

2. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ ,  $E_y$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^n$

*Demostración.* Aplicamos el Teorema de Tonelli, tomando  $f = \chi_E$ . □

### 3.2 Teorema de Fubini

**Teorema 3.2.1** [Teorema de Fubini]

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  integrable en  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es integrable en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  definida por:  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy$

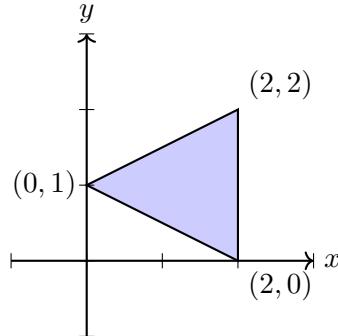
Análogamente se darían los casos tomando  $\mathbb{R}^k$  en lugar de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$   $f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  definida por:  $G(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y$  es integrable en  $\mathbb{R}^k$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} G = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f_y) = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dy dx$

*Demostración.* Recordemos que  $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ f_x = f_x^+ - f_x^- \end{cases}$  □

#### Ejemplo

1. Sea  $D$  el triángulo de vértices  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  y  $(0, 1)$ .



Intentemos calcular

$$\int_D x^2 y \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 y \cdot \chi_D \, dx \, dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \int_{D_x} x^2 \chi_D \, dy \right) \, dx$$

Sabiendo que  $D_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}$ , si  $0 \leq x \leq 2$  entonces  $D_x = \{y : -\frac{1}{2}x+1 \leq y \leq \frac{1}{2}x+1\}$   
Por tanto, podemos plantear la integral como:

$$\begin{aligned} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{y=\frac{1}{2}x+1} x^2 y \, dy \right) \, dx = \int_0^2 x^2 \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2}x + 1 \right)^2 - \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 \right) \right) \, dx \\ &= \int_0^2 x^2(x) \, dx = \int_0^2 x^3 \, dx = \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

También podríamos haberlo planteado así, sabiendo que  $D^y = \{x : (x, y) \in D\}$ :

$$\int_{y=0}^{y=2} \left( \int_{D^y} x^2 y \, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=2(1+y)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy + \int_{y=1}^{y=2} \left( \int_{x=2(y-1)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy.$$

Evaluamos:

$$\int_1^2 y \left( \int_{2(y-1)}^2 x^2 dx \right) dy = \int_1^2 y \left( \frac{8}{3}y^3 - 4y^2 + 4y \right) dy = \frac{1}{3}y^4 - \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 \Big|_1^2 = 4$$

2. Sea  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y\}$  y  $f(x, y) = xe^{-y^3}$ . Calculemos:

$$\int_D f(x, y) dxdy.$$

Dado que  $f \geq 0$ , podemos aplicar el Teorema de Tonelli:

$$\int_D f(x, y) dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_D = \int_{x=0}^{x=+\infty} \left( \int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy \right) dx$$

No obstante, no conocemos el valor de la integral  $\int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy$ , por lo que continuamos el cálculo en el otro sentido:

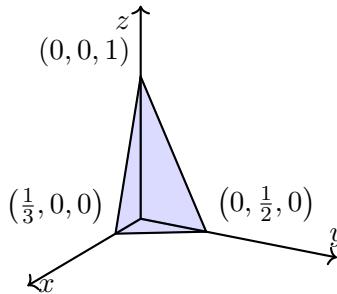
$$\int_{y=0}^{y=+\infty} \left( e^{-y^3} \int_{x=0}^{x=y} x dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y} dy$$

Evaluamos:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \frac{y^2}{2} dy = \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} (-3y^2) dy = -\frac{1}{6} [e^{-y^3}]_{y=0}^{y=+\infty} = \frac{1}{6}$$

3. Sea  $V$  el sólido limitado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $3x + 2y + z = 1$ . Calculemos:

- (a)  $\text{Vol}(V)$
- (b)  $\int_V z^2 dxdydz$



(a) Aplicamos el Lema de Cavalieri:

$$\text{Vol}(V) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_V(x, y, z) dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{V_z} 1 dxdy \right) dz,$$

donde  $V_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in V\} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 1 - z\}$ .

Definimos:

$$\int_{z=0}^{z=1} \text{área}(V_z) dz,$$

donde el área de  $V_z$  es:

$$\text{área}(V_z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-z}{3} \cdot \frac{1-z}{2}.$$

También se podría haber definido como:

$$\int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{1-z}{2}} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dy \right) dz.$$

Otra forma alternativa de orden de integración sería:

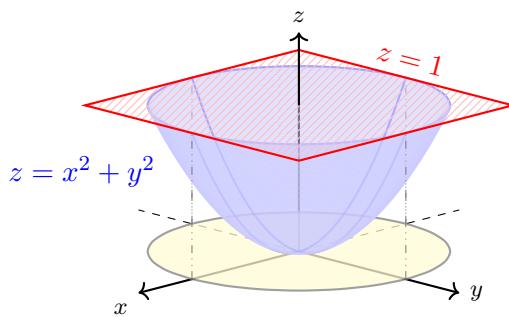
$$\int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} \left( \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dz \right) dy.$$

(b)

$$\int_V z^2 dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} z^2 \left( \int_{V_z} 1 dx dy \right) dz = \int_{z=0}^{z=1} z^2 \cdot \frac{(1-z)^2}{12} dz$$

4. Sea  $V$  el sólido limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y por el plano  $z = 1$ .

Calculemos  $\text{vol}(V)$ .



Donde

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\} \implies$$

$$\text{vol}(V) = \int_{z=0}^{z=1} \text{area}(V_z) dz = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}$$

### Observación 3.2.1

*La diferencia entre el Teorema de Tonelli y el de Fubini, es que el primero pide que las funciones sean no-negativas estrictamente y el segundo pide que las funciones sean integrables absolutamente.*

## 4 Cambio de variables

### Definición 4.0.1 [Conjunto Verticalmente Proyectable]

Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es verticalmente proyectable si es de la forma:

$$E_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

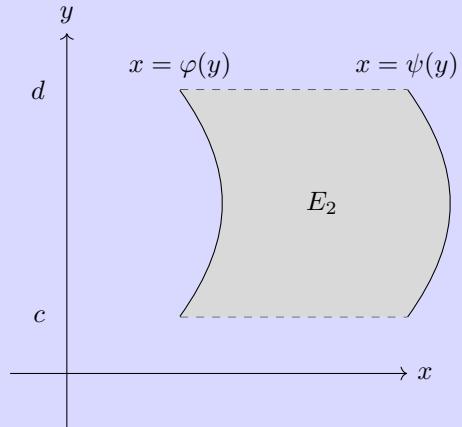
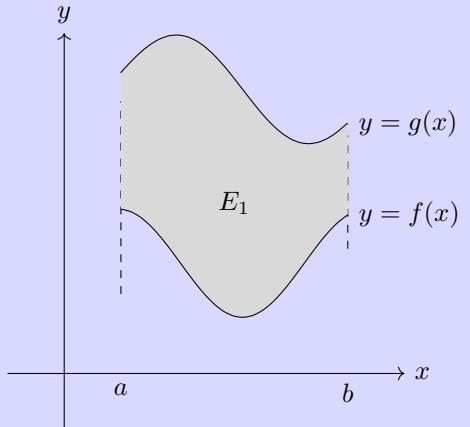
donde  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $f(x) \leq g(x)$ . Análogamente se define un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es horizontalmente proyectable si es de la forma:

$$E_2 = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

donde  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $\varphi(y) \leq \psi(y)$ . En este caso si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  que es integrable en  $E$ :

$$\int_{E_1} h(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} h(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_{E_2} h(x, y) dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} h(x, y) dx \right) dy$$



### Observación 4.0.1

La diferencia entre ambas definiciones es que en la primera se fija  $x$  y se mueve  $y$  y en la segunda se fija  $y$  y se mueve  $x$ . Lo que tiene como consecuencia que en la primera se integra  $dx - dy$  y en la segunda  $dy - dx$ .

### Teorema 4.0.1

Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicación lineal. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible  $\implies T(A)$  es medible y además:

$$m(T(A)) = |\det(T)|m(A)$$

### Definición 4.0.2 [Difeomorfismo]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos se dice que  $\varphi : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de  $U$  a  $V$  si:

1.  $\varphi$  es biyectiva
2.  $\varphi$  es de clase  $C^1$  en  $U$
3.  $\varphi^{-1}$  es de clase  $C^1$  en  $V$

### Observación 4.0.2

Sea  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, y supongamos que  $\det(D\varphi(u)) \neq 0 \quad \forall u \in U \implies V = \varphi(U)$  es abierto. Si  $\varphi$  es inyectiva, tenemos que  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = V$  es un difeomorfismo.

### Teorema 4.0.2

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ . Si  $A \subset U$  es medible, entonces  $\varphi(A)$  es medible y  $m(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi(u))| du$ .

### Teorema 4.0.3 [Teorema del Cambio de Variable]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ . Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Entonces:

1. Si  $f$  es no negativa  $\implies (f \circ \varphi)| \det(D\varphi)|$  es medible y no-negativa.
2. Si  $f$  es integrable  $\implies (f \circ \varphi)| \det(D\varphi)|$  es integrable

En ambos casos se cumple que:

$$\int_{V=\varphi(U)} f(x) dx = \int_U (f \circ \varphi(u)) | \det(D\varphi) | du$$

### Observación 4.0.3

Si  $A \subset U$  es medible  $\implies \varphi(A)$  es medible y

$$\int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A (f \circ \varphi(u)) | \det(D\varphi) | du$$

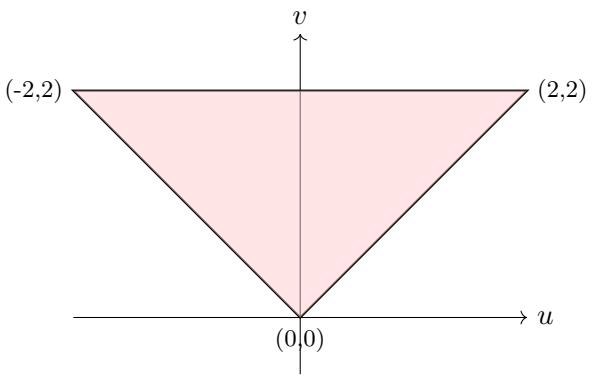
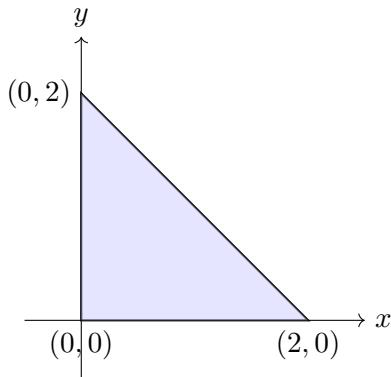
### Ejemplo

Sea  $\int_E e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$  donde  $E$  = triángulo de vértices  $(0,0), (2,0)$  y  $(0,2)$ .

Si tomamos el cambio de variable:

$$\varphi^{-1} \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \implies \varphi \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \implies f(x,y) = f(u,v) = e^{\frac{u}{v}}$$

Si tomamos la representación gráfica del cambio de variable obtenemos que:



Si tomamos  $y = 0 \implies \varphi^{-1} \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases}$  y también tomamos  $x = 0 \implies \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases}$

$$\text{en tenemos que } |\det(D\varphi)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

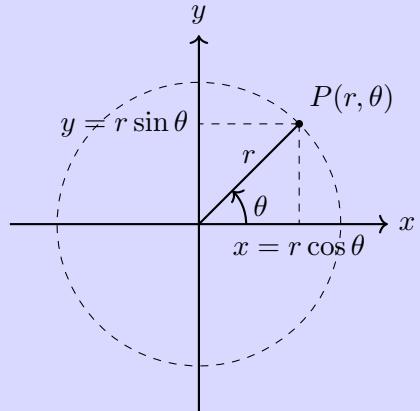
$$\begin{aligned} \int_E f(x,y) dxdy &= \int_D e^{\frac{u}{v}} |\det(D\varphi)| du dv = \int_D \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} \left( \int_{u=-v}^{u=v} e^{\frac{u}{v}} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} \left[ ve^{\frac{u}{v}} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} v(e - \frac{1}{e}) dv = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=2} = e - e^{-1} \end{aligned}$$

## 4.1 Coordenadas Polares

**Definición 4.1.1** [Coordenadas polares]

En el plano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , las **coordenadas polares**  $(r, \theta)$  están definidas en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo medido desde el eje positivo  $x$  en sentido antihorario.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Y su imagen en coordenadas cartesianas es el plano sin el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La transformación  $\varphi : U \rightarrow V$  es un **difeomorfismo de clase  $C^1$** , ya que cumple las siguientes condiciones:

- $\varphi$  es de clase  $C^1$ , es decir, tiene derivadas continuas en  $U$ .
- $\varphi$  es biyectiva entre  $U$  y  $V$ .
- El determinante del Jacobiano es no nulo:

$$\det(D_\varphi)(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \neq 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de área en coordenadas polares es:

$$dA = r dr d\theta.$$

### Ejemplo

- Área del círculo  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  de centro  $(0, 0)$  y radio  $R$ :

$$\text{Área}(D) = \text{Área}(D \cap V) = \int_{\varphi^{-1}(D \cap V)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |\det(D_{\varphi(r, \theta)})| dr d\theta.$$

Evaluando la integral:

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=R} r dr \right) d\theta = \pi R^2.$$

- Para la región  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  con  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left( \int_{r=0}^{r=1} r \cdot r dr \right) d\theta.$$

Resolviendo:

$$\pi \cdot \int_{r=0}^{r=1} r^2 dr = \frac{\pi}{3}.$$

### Ejemplo

Realicemos el cálculo de integrales gaussianas:

1.  $g(t) = e^{-t^2}$ : Es fácil ver que  $g(t) \geq 0$  es integrable en  $\mathbb{R}$ . Para ver dicha integral, sepáremos  $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$ .

- (a) Para  $(0, +\infty)$ : Si  $t \geq 1 \implies t^2 \geq t \implies e^{-t^2} \leq e^{-t}$ . Entonces:

$$\int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{t=0}^{t=1} e^{-t^2} dt + \int_{t=1}^{t=+\infty} e^{-t^2} dt \leq 1 + \int_{t=1}^{t=+\infty} e^{-t^2} dt \leq 1 + e^{-1} < +\infty.$$

(b) Para  $(-\infty, 0)$ : Consideremos la integral:

$$\int_{t=-\infty}^{t=0} e^{-t^2} dt$$

Tomamos el cambio de variable  $s = -t$ , lo que implica  $ds = -dt$ . Entonces, la integral se transforma en:

$$\int_{t=-\infty}^{t=0} e^{-s^2} (-ds) = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-s^2} ds$$

Por lo tanto,

$$\int_{t=-\infty}^{t=0} e^{-t^2} dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-t^2} dt$$

Luego, la integral total es:

$$I = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-t^2} dt$$

2. Para  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ , existen dos maneras de calcular la integral:

(a) Usando coordenadas polares:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta.$$

Separando las integrales:

$$\left( \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r^2} r dr \right).$$

Evaluando la integral en  $r$ :

$$\int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r^2} r dr = \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el resultado final es:

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

(b) Usando el producto de integrales unidimensionales:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx.$$

Como la exponencial es separable, podemos escribir:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{-y^2} dy.$$

Definiendo  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , se tiene que:

$$I^2 = \pi \implies I = \sqrt{\pi}.$$

Así, la integral en  $\mathbb{R}^2$  es:

$$I^2 = \pi.$$

**Ejemplo**

Curvas en coordenadas polares

Calculemos el área encerrada por la curva en coordenadas polares

$$r = a(1 + \cos \theta),$$

la cual describe un cardioide con  $a > 0$ .

Evaluemos  $r$  en algunos valores característicos de  $\theta$ :

$\theta$	$r = a(1 + \cos \theta)$	Comportamiento
0	2a	$r$ decrece ↓
$\frac{\pi}{2}$	a	$r$ decrece ↓
$\pi$	0	$r$ aumenta ↑
$\frac{3\pi}{2}$	a	$r$ aumenta ↑
$2\pi$	2a	$r$ aumenta ↑

Utilizamos la fórmula del área en coordenadas polares:

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)} r dr d\theta.$$

Evaluando la integral interna:

$$\int_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)} r dr = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)} = \frac{a^2}{2} (1 + \cos \theta)^2.$$

Ahora resolvemos la integral en  $\theta$ :

$$A = \frac{a^2}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta.$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

la integral se reescribe como:

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta.$$

Evaluamos término a término:

$$-\int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi. -\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0. -\int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = 0.$$

Por lo tanto el área es:

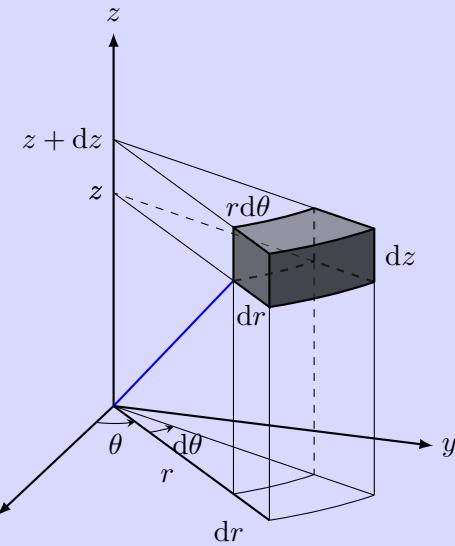
$$A = \frac{a^2}{2} \left( 2\pi + \frac{2\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

## 4.2 Coordenadas Cilíndricas

### Definición 4.2.1 [Coordenadas cilíndricas]

En el espacio tridimensional, las **coordenadas cilíndricas**  $(r, \theta, z)$  están definidas en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el eje  $z$ .
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal, medido desde el eje positivo  $x$  en el plano  $xy$ .
- $z \in \mathbb{R}$  representa la coordenada vertical, la misma que en cartesianas.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta \leq 2\pi\}.$$

Y su imagen es el espacio tridimensional excepto el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det(D\varphi)| = r > 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas es:

$$dV = r dr d\theta dz.$$

### Ejemplo

Sea  $V$  el sólido limitado por  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 2$ , y consideremos la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Evaluamos la integral:

$$\int_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

Cambiamos a coordenadas cilíndricas, donde  $x^2 + y^2 = r^2$ , obteniendo:

$$\int_{z=0}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\sqrt{z}} (r^2 + z^2) \cdot r \, dr \, d\theta \, dz$$

Separando la integral en términos de  $\theta$ :

$$\left( \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 1 \, d\theta \right) \left( \int_{z=0}^{z=2} \left( \int_{r=0}^{r=\sqrt{z}} (r^3 + z^2 r) \, dr \right) dz \right)$$

Resolviendo la integral en  $\theta$ :

$$2\pi \int_{z=0}^{z=2} \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz$$

Sustituyendo  $r = \sqrt{z}$ :

$$2\pi \int_{z=0}^{z=2} \left( \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{2} \right) dz$$

Resolviendo la integral en  $z$ :

$$2\pi \left[ \frac{z^3}{12} + \frac{z^4}{8} \right]_{z=0}^{z=2}$$

Evaluando los límites:

$$2\pi \left( \frac{8}{12} + \frac{16}{8} \right) = 2\pi \left( \frac{2}{3} + 2 \right) = 2\pi \left( \frac{8}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}$$

Por lo tanto, el resultado final es:

$$\frac{16\pi}{3}$$

### Ejemplo

Sea  $V$  la porción de la semiesfera  $0 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  que está fuera del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Queremos calcular la integral

$$I = \int_V z \, dx \, dy \, dz$$

En coordenadas cilíndricas, las variables se expresan como:

$$\varphi(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

donde el jacobiano de la transformación es  $r$ . Los límites en estas coordenadas son:

- $0 \leq z \leq 1$  porque la semiesfera en  $z$  llega hasta  $\sqrt{2 - x^2 - y^2}$ , pero solo consideramos de  $z = 0$  hasta  $z = 1$ , pues los puntos de la esfera donde  $1 \leq z \leq \sqrt{2}$  están dentro del cilindro, luego no los consideramos.
- $1 \leq r \leq \sqrt{2 - z^2}$  porque el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  define el límite inferior y la semiesfera define el superior.
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , ya que se recorre toda la circunferencia.

Así, la integral se reescribe como:

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=1} \int_{r=1}^{r=\sqrt{2-z^2}} zr \, dr \, dz \, d\theta$$

Calculamos la integral iterada:

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=1} z \left( \int_{r=1}^{r=\sqrt{2-z^2}} r \, dr \right) dz \, d\theta$$

La integral en  $r$  es:

$$\int_{r=1}^{r=\sqrt{2-z^2}} r \, dr = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^{r=\sqrt{2-z^2}} = \frac{(2-z^2)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-z^2}{2}$$

Sustituyendo en la integral:

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=1} z \cdot \frac{1-z^2}{2} dz \, d\theta$$

Resolviendo la integral en  $z$ :

$$\frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=1} z(1-z^2) dz = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=1} (z-z^3) dz$$

Calculamos:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Finalmente, integramos en  $\theta$ :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{8} d\theta = 2\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Luego, la integral es:

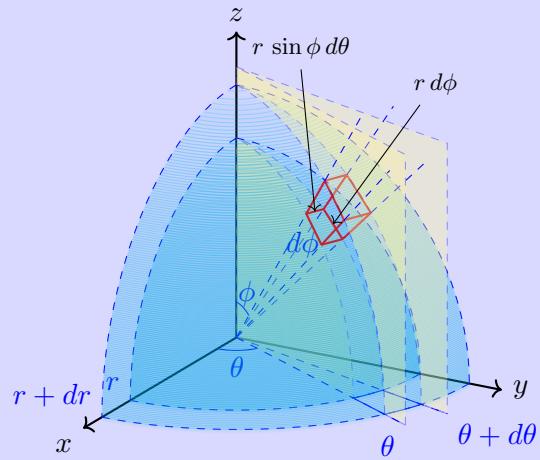
$$I = \frac{\pi}{4}$$

## 4.3 Coordenadas Esféricas

### Definición 4.3.1 [Coordenadas esféricas]

*En el espacio tridimensional, las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  se definen en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:*

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \phi. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal medido en el plano  $xy$  desde el eje positivo  $x$ .
- $\phi \in [0, \pi]$  es el ángulo polar o colatitud, medido desde el eje positivo  $z$ .

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$D_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det D_\varphi| = r^2 \sin \phi.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas es:

$$dV = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi.$$

### Ejemplo

$$B_r = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \implies$$

$$\text{vol}(B_r) = \int_{B_r} 1 dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \left( \int_{r=0}^{r=R} r^2 \sin(\phi) dr \right) d\phi \right) d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$$

## 4.4 Coordenadas Elípticas

### Definición 4.4.1 [Coordenadas elípticas]

En el plano, las coordenadas elípticas  $(r, \theta)$  se definen en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta. \end{cases}$$

Donde:

- $r \geq 0$  es la coordenada radial, que describe la escala de la elipse.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo que mide la posición en la elipse, similar al ángulo en coordenadas polares.
- $a, b > 0$  son constantes que determinan los semiejes de las elipses.

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$D_\varphi = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de área, es:

$$|\det D_\varphi| = abr.$$

Esto implica que el elemento diferencial de área en coordenadas elípticas es:

$$dA = abr dr d\theta.$$

### Ejemplo

Consideremos la región elíptica definida en coordenadas cartesianas como:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

En coordenadas elípticas, esto equivale a:

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D_\varphi = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Su determinante es:

$$\det(D_\varphi) = abr.$$

La integral de área en coordenadas elípticas se expresa como:

$$\text{Área}(E) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} abr dr d\theta.$$

Resolviendo la integral en  $r$ :

$$\int_{r=0}^{r=1} abr dr = ab \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{ab}{2}.$$

Evaluando la integral en  $\theta$ :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Por lo tanto, el área de la elipse es:

$$\text{Área}(E) = 2\pi \cdot \frac{ab}{2} = \pi ab.$$

Así, hemos obtenido el área de la elipse usando coordenadas elípticas.

**Ejemplo**

Volumen comprendido entre los paraboloides:

$$2z = 4 + \frac{x^2}{3} + y^2, \quad 2z = \frac{2x^2}{3} + 3y^2$$

Eliminando  $z$ :

$$4 + \frac{x^2}{3} + y^2 = \frac{2x^2}{3} + 3y^2 \iff \frac{x^2}{3} + 2y^2 = 4$$

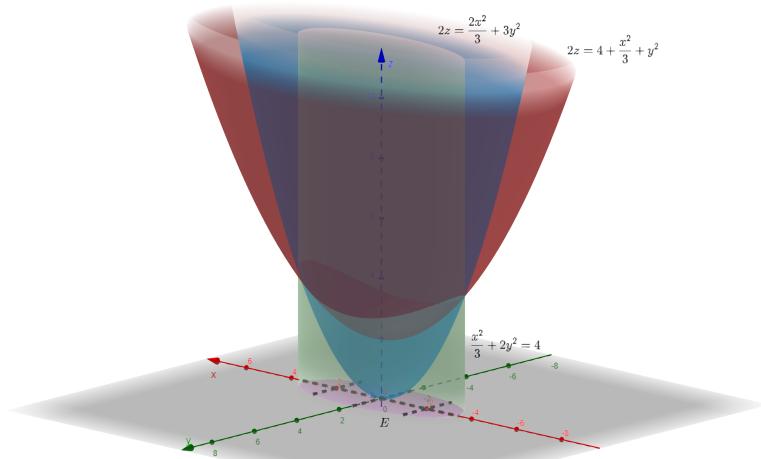
Lo cual es un cilindro elíptico de  $\mathbb{R}^3$ .

Definimos el dominio:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{3} + 2y^2 \leq 4 \right\}$$

Luego, el volumen está dado por:

$$\text{vol} = \int_E \left( 2 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} \right) - \left( \frac{x^2}{3} + \frac{3y^2}{2} \right) dx dy = \int_E \left( 2 - \frac{x^2}{6} - y^2 \right) dx dy$$



Haciendo el cambio de coordenadas elípticas:

$$a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{3}r \cos \theta, \quad y = \sqrt{2}r \sin \theta$$

El jacobiano es:

$$J = 2\sqrt{6}$$

Finalmente, el cambio de variable nos ofrece que el volumen del conjunto es:

$$2\sqrt{6}\pi.$$

**Observación 4.4.1**

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ .

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

Entonces:

$$\det(D_\varphi) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

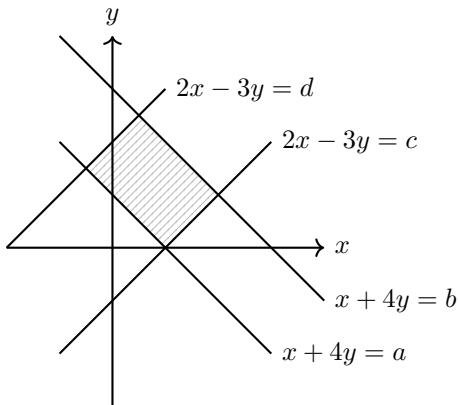
Entonces el Teorema de Cambio de Variable queda como:

$$\begin{aligned} \int_{D=\varphi(E)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n &= \int_{E=\varphi^{-1}(D)} f(x_1(u), \dots, x_n(u)) |\det(D_\varphi)| du_1 \cdots du_n \\ &= \int_{E=\varphi^{-1}(D)} f(x_1(u), \dots, x_n(u)) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

### Ejemplo

Ejercicio 4 (Hoja 4)

Calcula el área del recinto delimitado por las rectas  $\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \\ 2x - 3y = c \\ 2x - 3y = d \end{cases}$  Supongamos que  $a < b, c < d$ .



Para ello tomemos el cambio de variable:  $\varphi^{-1} = \psi = \begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - 3y \end{cases}$

$$\text{area}(D) = \int_{D=\varphi(E)} 1 dx dy = \int_E 1 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Donde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \implies \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{-5}$$

Entonces la integral anterior queda de la forma:

$$\int_E \frac{1}{5} du dv = \frac{1}{5} \cdot \text{area}(E) = \frac{1}{5} (b-a)(d-c)$$

### Ejemplo

Ejercicio 6.b (Hoja 4)

Sea el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$$

queremos calcular la integral

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Para ello consideremos el cambio de variable ("hiperbólico"):

$$\psi(x, y) = \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

Si

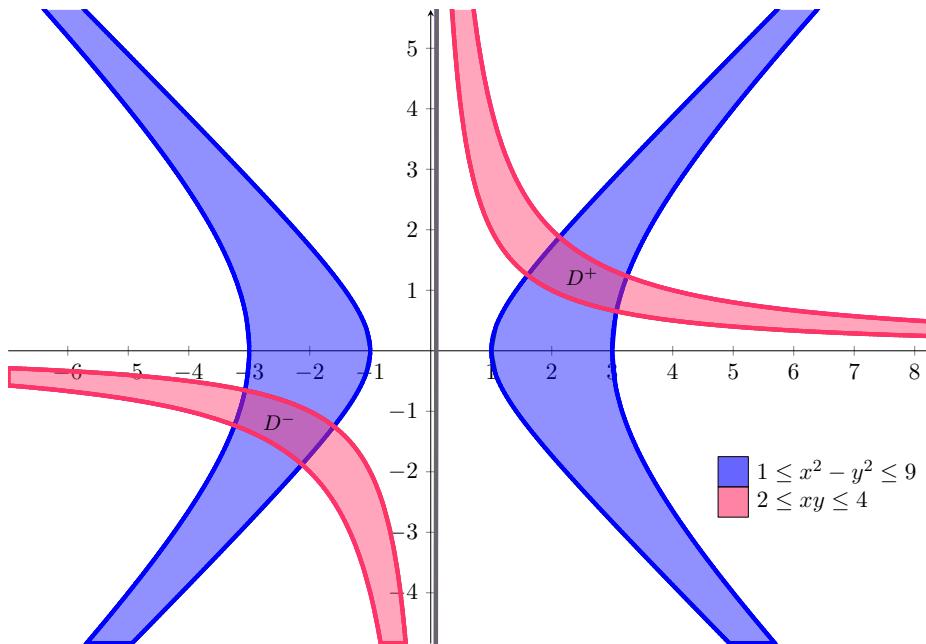
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} u = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos(2\theta) \\ v = r^2 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = r^2 \sin(2\theta) \end{cases}$$

Sean

$$V = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, \quad U = \{(u, v) : v > 0\}$$

Entonces  $\psi : V \rightarrow U$  es biyectiva y existe  $\varphi = \psi^{-1} : U \rightarrow V$ . Además el conjunto transformado es

$$E = \psi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 9, 4 \leq v \leq 8\}$$



Sean

$$D^+ = \{(x, y) \in D : x > 0, y > 0\}, \quad D^- = \{(x, y) \in D : x < 0, y < 0\}$$

Entonces

$$\int_{D^+} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^-} (x^2 + y^2) dx dy$$

Sea entonces el cambio de variable

$$\begin{cases} \bar{x} = -x \\ \bar{y} = -y \end{cases}$$

con el jacobiano igual a 1.

Entonces

$$\int_{D^-} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^+} (-x)^2 + (-y)^2 dx dy = \int_{D^+} x^2 + y^2 dx dy$$

Entonces,

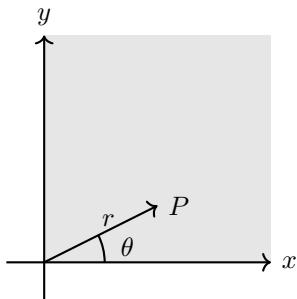
$$\int_D x^2 + y^2 dxdy = 2 \int_{D^+} x^2 + y^2 dxdy = 2 \int_E \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = \int_E \sqrt{u^2 + v^2} dudv$$

Ya que tenemos que

$$x^2 + y^2 = r^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Donde además tenemos que:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2 \implies \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{4x^2 + 4y^2} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$$



Así finalmente la integral da

$$\frac{1}{2} \text{area}(E) = \frac{1}{2} \cdot (9 - 1) \cdot (8 - 4) = 16$$

### Ejemplo

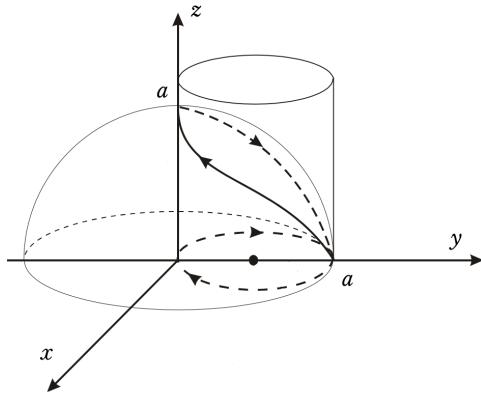
Calcúlese el volumen comprendido entre  $z = f(x, y)$ ,  $z = g(xy)$  sobre  $D$ , con  $D$  la proyección de las funciones sobre el plano  $z$ . Entonces,

$$\text{vol} = \int_D (f(x, y) - g(x, y)) dxdy = \int_D 1 dxdydz = \int_D \left( \int_{z=g(x,y)}^{z=f(x,y)} 1 dz \right) dxdy$$

### Ejemplo

#### Bóveda de Viviani

Calcúlese el volumen comprendido entre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = ay$  con  $a > 0$ .



Donde tomando valores en la esfera podemos obtener:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \iff x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} \\ x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} - ay = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

Si tomamos que  $r^2 = x^2 + y^2$  y  $ay = ar \sin(\theta)$  entonces, La ecuación de la circunferencia es en coordenadas polares es:  $r = a \cos(\theta)$

$$\begin{aligned} vol &= 2 \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=a \sin(\theta)} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=a \sin(\theta)} d\theta = \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} a^3 - (a^2 - a^2 \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}} d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} a^3 - a^3 |\cos^3(\theta)| d\theta = 4 \frac{a^3}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{4a^3}{3} \left[ \theta - \left( \sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right) \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4a^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Todo esto teniendo en cuenta que  $(\cos^3(\theta))^{\frac{3}{2}} = |\cos^3(\theta)|$

## 5 Funciones definidas por integrales

## 6 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales

### 6.1 Caminos

#### Definición 6.1.1 [Camino]

Un camino (o curva paramétrica) en  $\mathbb{R}^n$  es una función continua  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo.

Si  $\gamma$  es diferenciable en un punto  $t \in I$ , entonces el vector velocidad de  $\gamma$  en el punto (instante)  $t$  es el vector tangente a la curva en ese punto, es decir, el vector:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \text{ si } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

#### Definición 6.1.2 [Longitud de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\sigma = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$ . Definimos

$$\Sigma(\gamma, \sigma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Definimos entonces la longitud de  $\gamma$  como:

$$l(\gamma) = \sup\{\Sigma(\gamma, \sigma) \mid \sigma \text{ es una partición de } [a, b]\} \in [0, +\infty]$$

Decimos que  $\gamma$  es **rectificable** si  $l(\gamma) < +\infty$ .

#### Observación 6.1.1

Existen caminos continuos que no son rectificables. Por ejemplo, la curva de Peano, el copo de nieve de Koch o la dada por:

$$l(\gamma) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{luego} \quad l(\gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

#### Definición 6.1.3 [Camino $C^1$ a Trozos]

Decimos que un camino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$  a trozos si:

$$\exists \mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

tal que  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es  $C^1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

#### Observación 6.1.2

En cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  la función  $\gamma$  es  $C^1$ , es decir, en los extremos admite derivadas laterales, aunque puede ocurrir que sean distintas.

**Teorema 6.1.1**

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino  $C^1$  a trozos. Entonces  $\gamma$  es rectificable y su longitud es:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

**Observación 6.1.3**

Tenemos que  $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$  existe, y es continua, salvo quizás en un número finito de puntos, luego en particular es integrable en sentido Riemann y en sentido Lebesgue.

Además, si  $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$  es partición de  $[a, b]$  entonces:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt$$

Para la demostración del teorema anterior, veamos un lema previo:

**Lema 6.1.1**

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino continuo entonces se cumple que:

$$\left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

donde:

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \left( \int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

*Demostración.* Hagamos una distinción de casos:

- Si  $u = \int_a^b \gamma(t) dt = 0$
- Si  $u = \int_a^b \gamma(t) dt \neq 0$ , sea  $u \in \mathbb{R}^n$  con  $\|u\| = 1 \implies$

$$\|v\| = \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^u u_i \int_a^b \gamma_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n u_i \gamma_i(t) dt \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt = \left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\|$$

□

*Demostración.* Veamos ahora la demostración del teorema:

Podemos suponer que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$  en casi todo  $[a, b]$ .

1. Veamos que  $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ :

Sea  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$ . Entonces:

$$\Sigma(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \forall \text{ partición } \mathcal{P}$$

Luego, tomando el supremo de todas las particiones, obtenemos que  $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

2. Como  $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$  es continua en casi todo  $[a, b]$ -compacto, luego es uniformemente continua en  $[a, b]$ . Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $t, s \in [a, b]$  y  $|t - s| < \delta \implies \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \varepsilon$   
 Sea  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$  con  $t_i - t_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) - \gamma'(t_i) + \gamma'(t_i)\| dt \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\|}_{<\varepsilon} dt + \|\gamma'(t_i)\| dt \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t_i)\| + \varepsilon dt = \|\gamma'(t_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Usando que para un vector  $u \in \mathbb{R}^n$  y un escalar  $c \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|$  entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \|\gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_i) dt \right\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t)) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t)) dt \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$$

Por el Lema 6.1.1 se sigue que:

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\|}_{<\varepsilon} dt + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \leq 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \\ &= 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{i=1}^n 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= 2\varepsilon(b - a) + \Sigma(\gamma, \mathcal{P}) \leq 2\varepsilon(b - a) + l(\gamma) \end{aligned}$$

□

### Ejemplo

Sea la curva parametrizada

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Además, se cumple que

$$\gamma(0) = (1, 0) = p.$$

Derivando, obtenemos

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

y en particular,

$$\gamma'(0) = (0, 1) = \vec{v}.$$

Consideremos el cambio de variable  $t = 2\pi s$  con  $0 \leq s \leq 1$ . Definiendo la nueva curva

$$\sigma(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

obtenemos su derivada:

$$\sigma'(s) = (2\pi(-\sin(2\pi s)), 2\pi \cos(2\pi s)).$$

En particular, en  $s = 0$ ,

$$\sigma'(0) = 2\pi(0, 1) = (0, 2\pi).$$

Si realizamos el cambio  $t = -2\pi s$ , obtenemos la curva

$$\alpha(s) = (\cos(2\pi s), -\sin(2\pi s)).$$

Calculamos su derivada:

$$\alpha'(s) = (2\pi(-\sin(2\pi s)), -2\pi \cos(2\pi s)).$$

## 6.2 Campos Escalares

### Definición 6.2.1 [Campo Escalar]

Un campo escalar es una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , donde a cada punto  $x \in A \subset \mathbb{R}^n$  le asigna un número real o escalar  $f(x)$ . Esta función también es conocida como función de punto o simplemente función escalar.

Se dice que un campo escalar es continuo si la función  $f$  es continua en el conjunto  $A$ .

### Definición 6.2.2 [Integral de un Campo Escalar a lo largo de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino  $C^1$  a trozos y sea  $f : Im(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuo sobre  $Im(\gamma)$ . Definimos:

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Notación: Podemos denotar

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f ds$$

Además

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b ds$$

### Definición 6.2.3 [Caminos Equivalentes]

Dos caminos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  son equivalentes si existe  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  homeomorfismo  $C^1$  con  $h' \neq 0$  en  $[c, d]$  tal que

$$\sigma = \gamma \circ h \text{ con } \sigma(s) = \gamma(h(s)) \quad \forall s \in [c, d]$$

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xleftarrow{\sigma} [c, d] \xleftarrow{h} [a, b]$$

Ahora, por el teorema de Bolzano tenemos dos posibilidades:

1. Si  $h' > 0$  es decir,  $h$  es creciente, decimos que  $h$  conserva la orientación (o que  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen la misma orientación)
2. Si  $h' < 0$  es decir,  $h$  es decreciente, decimos que  $h$  invierte la orientación ( $\gamma$  y  $\sigma$  tienen orientación opuesta)

**Observación 6.2.1**

1. Si  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es biyectiva y  $C^1$  con  $h' \neq 0$  entonces aplicando el Teorema de la función inversa obtenemos que  $h$  admite inversa local alrededor de cada punto.

Ademas se cumple que  $(h^{-1})'(h(s)) = \frac{1}{h'(s)} \forall s \in [c, d]$

Como ademas  $h$  es biyectiva la inversa local coincide con la inversa global, luego  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es un difeomorfismo  $C^1$ , es decir,  $\exists h^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d]$  que es  $C^1$

2. Usando esto obtenemos que la equivalencia de caminos es una relación de equivalencia.

**Observación 6.2.2**

Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto y  $h : K \rightarrow H \subset \mathbb{R}^n$  es continua y biyectiva, entonces  $h : K \rightarrow H$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Tenemos que  $h : K \rightarrow H$  es biyectiva, luego  $\exists h^{-1} : H \rightarrow K$ . Veamos que es biyectiva. Dado  $C \subset K$  cerrado  $\implies C$  es compacto  $\implies h(C)$  es compacto  $\implies (h^{-1})^{-1}(C) = h(C)$  que es compacto en  $H$ , luego es cerrado en  $H$ .

□

**Teorema 6.2.1**

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $C^1$  a trozos equivalentes. Sea ademas  $f : \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, entonces:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f$$

**Observación 6.2.3**

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes  $\implies \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma)$

*Demostración.* Tenemos  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  difeomorfismo  $C^1$  con  $\gamma \circ h = \sigma$  con ademas  $\sigma(s) = \gamma(h(s)) \implies \sigma'(s) = \gamma'(h(s))h'(s) = h'(s)\gamma'(h(s))$

1. Caso 1:  $h$  es creciente ( $h' > 0$ )

Haciendo el cambio de variable  $t = h(s)$  y  $dt = h'(s)ds$  obtenemos:

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^{t=b} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = \int_{s=c}^{s=d} f(\underbrace{\gamma(h(s))}_{\sigma(s)})\|\gamma'(h(s))\|h'(s)ds$$

Por ser  $h$  creciente, entonces se tiene que  $h'(s) > 0$ , luego  $\|\gamma'(h(s))\|h'(s) = \|\gamma'(h(s))h'(s)\|$

$$\int_{s=c}^{s=d} f(\sigma(s))\|\gamma'(h(s))h'(s)\|ds = \int_{s=c}^{s=d} f(\sigma(s))\|\underbrace{\gamma'(h(s))h'(s)}_{\sigma'(s)}\|ds = \int_{t=c}^{t=d} f(\sigma(s))\|\sigma'(s)\|ds = \int_{\sigma} f$$

2. Caso 2:  $h$  es decreciente ( $h' < 0$ )

Haciendo el mismo cambio de variable que en el apartado anterior,  $t = h(s)$  y  $dt = h'(s)ds$  obtenemos:

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^{t=b} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{s=d}^{s=c} f(\underbrace{\gamma(h(s))}_{\sigma(s)}) \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds$$

Por ser  $h$  decreciente, entonces se tiene que  $h'(s) < 0$ , luego  $\|\gamma'(h(s))\| h'(s) = -\|\gamma'(h(s))h'(s)\|$

$$\int_{s=d}^{s=c} f(\sigma(s)) \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds = - \int_{s=d}^{s=c} f(\sigma(s)) \underbrace{\|\gamma'(h(s))h'(s)\|}_{\sigma'(s)} ds = \int_{t=c}^{t=d} f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| ds = \int_{\sigma} f$$

□

### Corolario 6.2.1

*Si  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes y  $C^1$  a trozos  $\implies l(\gamma) = l(\sigma)$*

Demostración.

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} 1 = \int_{t=a}^{t=b} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\sigma} 1 = l(\sigma)$$

□

### Definición 6.2.4 [Camino Inverso]

*Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino  $C^1$  a trozos. Definimos el camino inverso como:*

$$(-\gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (-\gamma)(s) = \gamma(a + b - s)$$

### Observación 6.2.4

*De hecho,  $(-\gamma)$  es equivalente a  $\gamma$  con  $(-\gamma)(s) = \gamma(h(s))$  luego  $Im(-\gamma) = Im(\gamma)$*

### Definición 6.2.5 [Concatenación de Caminos]

*Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $C^1$  a trozos con  $\gamma(b) = \sigma(c)$ . Definimos su concatenación como:*

$$\gamma + \sigma : [a, b + (d - c)] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\gamma + \sigma) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma(t - b + c) & \text{si } b \leq t \leq b + (d - c) \end{cases}$$

### Observación 6.2.5

*En este caso, si*

$$f : \text{Im}(\gamma_1) \cup \dots \cup \text{Im}(\gamma_m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua en las curvas, entonces se cumple:

$$\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} f = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f$$

### Ejemplo

Dado el camino  $\gamma$  definido por:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y(t)}, \underbrace{t}_{z(t)})$$

Y la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Entonces, calcular la integral de  $f$  a lo largo de  $\gamma$ .

$$x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad \gamma(0) = (1, 0, 0), \quad \gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2) \sqrt{2} dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} (1+t^2) \sqrt{2} dt = \left[ t + \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{2} = \left( 2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right) \sqrt{2}$$

## 6.3 Campos Vectoriales

### Definición 6.3.1 [Campo Vectorial]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un campo vectorial en  $A$  es una función  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  que asigna a cada punto  $x \in A$  un vector  $\vec{F}(x) \in \mathbb{R}^n$ .

Se dice que un campo vectorial es continuo si la función  $\vec{F}$  es continua en el conjunto  $A$ .

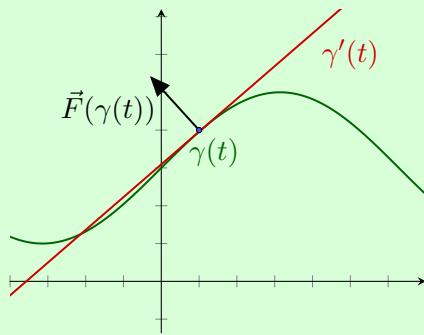
### Definición 6.3.2 [Integral de un Campo Vectorial a lo largo de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino  $C^1$  a trozos y  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo. Se define la integral de  $\vec{F}$  a lo largo de  $\gamma$  como:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

### Observación 6.3.1

El producto escalar  $\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  representa la proyección ortogonal del vector  $\vec{F}(\gamma(t))$  en la dirección de la tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t)$ .

**Notación:**

Si

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad \text{y} \quad \gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b [F_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)] dt = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \end{aligned}$$

donde  $dx_i = \gamma'_i(t)dt$ , para  $i = 1, \dots, n$  y  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ .Fijémonos que  $F_i$  son funciones escalares para todo  $i = 1, \dots, n$ , por lo que no debe confundirse la notación

$$\int_{\gamma} F_i dx_i$$

con la integral de una función escalar sobre un camino, que se denota como

$$\int_{\gamma} f ds.$$

Esta distinción es clave: la expresión  $\int_{\gamma} F_i dx_i$  representa la contribución del campo vectorial  $\vec{F}$  en la dirección del eje  $x_i$  a lo largo del camino  $\gamma$ , y equivale a

$$\int_a^b F_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

En cambio, la integral  $\int_{\gamma} f ds$  se refiere a la integral escalar de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con respecto a la longitud de arco, y se define como

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Ambas integrales involucran funciones escalares, pero su interpretación y significado geométrico son distintos: una está relacionada con trabajo realizado por un campo vectorial, y la otra con la acumulación de una magnitud escalar a lo largo de un camino.

**Teorema 6.3.1**

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $C^1$  a trozos y equivalentes, y sea  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo. Entonces:

$$1. \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\sigma} \vec{F} \quad \text{si } \gamma \text{ y } \sigma \text{ tienen la misma orientación.}$$

$$2. \int_{\gamma} \vec{F} = - \int_{\sigma} \vec{F} \quad \text{si } \gamma \text{ y } \sigma \text{ tienen orientación opuesta.}$$

*Demostración.* Sabemos que existe  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , biyección de clase  $C^1$  con  $h' \neq 0$ , tal que:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{\gamma} & \text{Im}(\sigma) \\ h \uparrow & \nearrow \sigma & \\ [c, d] & & \end{array}$$

Luego

$$\sigma'(s) = \gamma'(h(s))h'(s), \quad \forall s \in [c, d].$$

Distinguimos dos casos según la orientación de los caminos:

- **Caso 1: Misma orientación**

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen la misma orientación, entonces  $h' > 0$  (es decir,  $h$  es creciente). Entonces, haciendo el cambio de variable  $t = h(s)$ ,  $dt = h'(s)ds$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\gamma(h(s))), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds \\ &= \int_{s=c}^{s=d} \langle \underbrace{\vec{F}(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)}, \underbrace{\gamma'(h(s))h'(s)}_{\sigma'(s)} \rangle ds = \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle ds = \int_{\sigma} \vec{F} \end{aligned}$$

- **Caso 2: Orientación opuesta**

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen orientación opuesta, entonces  $h' < 0$  (es decir,  $h$  es decreciente). En este caso, hacemos el mismo cambio de variable  $t = h(s)$ ,  $dt = h'(s)ds$ , y obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{s=d}^{s=c} \langle \vec{F}(\gamma(h(s))), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds \\ &= \int_{s=d}^{s=c} \langle \underbrace{\vec{F}(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)}, \underbrace{\gamma'(h(s))h'(s)}_{\sigma'(s)} \rangle ds = - \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle ds = - \int_{\sigma} \vec{F} \end{aligned}$$

□

### Observación 6.3.2

Dado una camino continuo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  cualesquiera y un campo vectorial continuo  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se cumple que:

$$1. \int_{-\gamma} \vec{F} = - \int_{\gamma} \vec{F}.$$

$$2. \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} \vec{F} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \vec{F}.$$

**Ejemplo**

Un camino puede ser diferenciable ( $\gamma \in C^1$ ) y, sin embargo, su imagen puede presentar "picos". Por ejemplo, el camino  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $\gamma(t) = (t^3, |t^3|)$  es  $C^1$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , pero su imagen presenta un pico en el origen. En efecto,

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \quad \text{con} \quad \gamma'_1(t) = 3t^2 \quad \text{y} \quad \gamma'_2(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ -3t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\gamma'_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2|t| - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t|t| = 0$$

Luego  $\gamma'(0)$  existe y además  $\gamma'(0) = (0, 0)$ . Sin embargo, la imagen de  $\gamma$  en el origen presenta un pico, lo que implica que la curva no es regular en ese punto.

**Definición 6.3.3** [Camino Simple y Regular]

Diremos que una función  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un **camino simple y regular** si:

- $\gamma$  es continua.
- $\gamma$  es inyectiva (simple).
- $\gamma$  es de clase  $C^1$  en  $[a, b]$  y cumple que  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$  (regular).

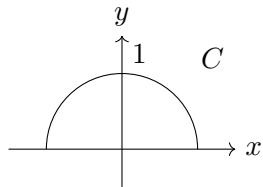
**Observación 6.3.3**

1. En este caso, la función  $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Im}(\gamma)$  es un homeomorfismo sobre su imagen.
2. Diremos que  $C \subset \mathbb{R}^n$  es una **curva simple y regular** si  $C = \text{Im}(\gamma)$ , donde  $\gamma$  es un camino simple y regular. En este caso,  $\gamma$  es una **parametrización simple y regular** de  $C$ .

**Ejemplo**

Consideremos la curva:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0\}.$$



Una posible parametrización es:

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\cos(t) \sin(t))$$

Su derivada es:

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0), \quad \forall t \in (0, \pi).$$

Por lo tanto,  $\text{Im}(\gamma) = C$ , confirmando que  $\gamma$  es una parametrización simple y regular de  $C$ .

**Teorema 6.3.2**

Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva simple y regular y sean  $\gamma$  y  $\sigma$  parametrizaciones simples y regulares de  $C$ . Entonces,  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes.

*Demostración.* A continuación viene la demostración del teorema anterior:

Sean  $\sigma : [c, d] \rightarrow Im(\sigma)$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow Im(\gamma)$  tales que  $Im(\sigma) = C = Im(\gamma)$ . Dado que  $\sigma$  y  $\gamma$  son homeomorfismos sobre  $C$  entonces  $\exists h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  homeomorfismo  $C^1$  tal que  $h = \gamma^{-1} \circ \sigma$ . Entonces falta demostrar que  $h$  es de clase  $C^1$  con  $h' \neq 0$  en  $[c, d]$ . Sea  $s_0 \subset [c, d]$  y denotaremos  $x_0 = \sigma(s_0)$

- Consideramos primero el caso de que  $s_0 \in (c, d)$  y sea  $t_0 \in (a, b)$  tal que  $\gamma(t_0) = x_0$ : Sabemos que

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)) \neq \vec{0}$$

Supongamos que  $\gamma'_1(t_0) \neq 0$  entonces definamos la función  $H : (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$H(t, y_2, \dots, y_n) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) + y_2, \dots, \gamma_n(t) + y_n) \text{ luego } H(t_0, 0, \dots, 0) = (\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_n(t_0)) = \gamma(t)$$

$$D_H(t, 0 \dots 0) = \left( \begin{array}{c|ccc} \gamma'_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ \hline \gamma'_2(t) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma'_n(t) & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \implies \det(D_H(t, 0 \dots 0)) = \gamma'_1(t) \neq 0$$

Entonces por el Teorema de la Función Inversa  $\exists U^{(t_0, 0, \dots, 0)} \subset (a, b)$  y  $\exists V^{x_0}$  tal que  $H : U^{(t_0, 0, \dots, 0)} \rightarrow V^{x_0}$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Definimos  $F : V^{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \pi_1(H^{-1}(x)) \in (a, b)$  donde  $\pi_1$  es la proyección en la primera coordenada.

$$F(\gamma(t)) = \pi_1(H^{-1}(\gamma(t))) = \pi_1(H^{-1} \circ H(t, 0, \dots, 0)) = \pi_1(t, 0, \dots, 0) = t$$

Si  $t = h(s)$  entonces  $F(\gamma(h(s))) = F(\sigma(s))$  luego  $h$  es de clase  $C^1$  alrededor de  $s_0$ . Además,  $\sigma'(s_0) = (\gamma \circ h)'(s_0) = \gamma(t_0) \circ h'(s_0) \implies h'(s_0) \neq 0$

- Para los exteriores de  $c$  y  $d$  se usa que:  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$  entonces  $\exists \bar{\sigma} : (c - \varepsilon, d + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  extensión de clase  $C^1$  y además  $\bar{\sigma}' \neq 0$  en  $(c - \varepsilon, d + \varepsilon)$

□

### Ejemplo

Un segmento en  $\mathbb{R}^n$ : Dados  $p \neq q$  en  $\mathbb{R}^n$ , el segmento  $[p, q]$  se define como:

$$[p, q] = \{(1-t)p + tq : 0 \leq t \leq 1\} = C \text{ es una curva simple regular}$$

$$C = Im(\gamma) \text{ donde } \gamma : [0, 1] \rightarrow [p, q] \text{ con } \gamma(t) = (1-t)p + tq = q + t(p-q)$$

Tenemos que  $\gamma$  es biyectiva y  $\gamma'(t) = p - q \neq 0 \forall t \in [0, 1]$

### Ejemplo

Una gráfica en  $\mathbb{R}^n$ : Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . La gráfica  $G_g = \{(t, g(t)) : a \leq t \leq b\}$  es una curva simple regular en  $\mathbb{R}^2$  con  $G_g = Im(\gamma)$  donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow G_g$  es de clase  $C^1$  y biyectiva con  $\gamma(t) = (t, g(t))$  y  $\gamma'(t) = (1, g'(t)) \neq \vec{0} \forall t \in [a, b]$

### Observación 6.3.4

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva simple regular, entonces  $\gamma$  es un homeomorfismo sobre su imagen, i.e.

$\gamma : [a, b] \rightarrow C = Im(\gamma)$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Falta demostrar que  $\gamma^{-1} : C \rightarrow [a, b]$  es continua.

Supongamos lo contrario. Sea  $x_0 \in C$  tal que  $\gamma^{-1}$  no es continua en  $x_0$ . Entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta = \frac{1}{k} > 0$ , existe  $x_k \in C$  con

$$\|x_k - x_0\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{pero} \quad \|\gamma^{-1}(x_k) - \gamma^{-1}(x_0)\| > \varepsilon.$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , denotemos

$$t_k := \gamma^{-1}(x_k), \quad (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [a, b].$$

Como  $[a, b]$  es compacto, existe una subsucesión  $(t_{k_j})$  que converge a algún  $t_0 \in [a, b]$ .

Dado que  $\gamma$  es continua, se tiene

$$\gamma(t_{k_j}) \rightarrow \gamma(t_0),$$

y como  $\gamma(t_{k_j}) = x_{k_j}$ , resulta que  $x_{k_j} \rightarrow x_0$ .

Por tanto,

$$x_0 = \gamma(t_0) \iff t_0 = \gamma^{-1}(x_0).$$

Sin embargo, por construcción se cumple

$$\|t_{k_j} - t_0\| = \|\gamma^{-1}(x_{k_j}) - \gamma^{-1}(x_0)\| \geq \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción.  $\square$

#### Definición 6.3.4 [Integral de una Función a lo largo de una Curva]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  curva simple regular entonces;

1. Si  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, se define  $\int_C f = \int_\gamma f$  siendo  $\gamma$  una parametrización simple y regular de  $C$ .
2. Una orientación de  $C$  se define como un sentido de recorrido de  $C$ , es decir, señalar un origen y un extremo de  $C$ . Si  $C$  está orientada y  $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial continuo, se define  $\int_C \vec{F} = \int_\gamma \vec{F}$  siendo  $\gamma$  una parametrización simple y regular de  $C$ , que conserva la orientación o que induce en  $C$  la orientación elegida.

#### Observación 6.3.5

Si cambiamos de orientación:  $\int_{C^-} \vec{F} = - \int_C \vec{F}$

#### Definición 6.3.5 [Curva Simple Regular a Trozos]

Diremos que  $C \subset \mathbb{R}^n$  es una curva regular simple a trozos si  $C = Im(\gamma)$  siendo  $\gamma$  camino  $C^1$  a trozos con  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$  y cada  $\gamma_j$  es simple y regular  $\forall j = 1, \dots, k$ .

En este caso si  $C_j = Im(\gamma_j) \forall j = 1, \dots, k$  entonces denotaremos  $C = C_1 + \dots + C_k$  y definimos para  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  continua:  $\int_C f = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} f$

**Observación 6.3.6**

Se puede demostrar que el resultado no depende de la partición de  $C$  en curvas simples y regulares (descomposición).

**Observación 6.3.7**

Si  $C = C_1 + \dots + C_k$  tienen orientaciones coherentes (el extremo de  $C_j$  coincide con  $C_{j+1} \forall j = 1, \dots, k-1$ ) diremos que  $C$  está orientada y definimos para un campo vectorial  $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua:  $\int_C \vec{F} = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} \vec{F}$

**6.4 Campos Conservativos****Definición 6.4.1** [Campo Conservativo]

Sea un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Un campo vectorial- $C^1$  continuo  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que es conservativo (ó campo gradiente) si  $\exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que  $\vec{F} = \nabla \varphi \iff \vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$  donde  $F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$ . Se dice entonces que la función  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ .

**Observación 6.4.1**

Si  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$  entonces también lo es de  $\vec{F} + a \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$  constante.

**Proposición 6.4.1**

Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo conservativo y  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  un camino  $C^1$  a trozos. Entonces:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

donde  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ .

*Demostración.* Distinguimos dos casos:

1. **Caso 1:**  $\gamma$  es  $C^1$  en  $[a, b]$ 

Definimos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $g(t) = \varphi(\gamma(t))$  y aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \gamma \downarrow & \nearrow \varphi & \\ U & & \end{array}$$

En particular tenemos que  $g$  es de clase  $C^1$  y además:

$$g'(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t) = D\varphi(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \langle \nabla \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t=a}^{t=b} g'(t) dt \stackrel{\text{TFC}}{=} g(b) - g(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

**2. Caso 2:**  $\gamma$  es  $C^1$  a trozos

Se aplica el caso 1 a cada trozo.

□

**Lema 6.4.1**

Sea el conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo. Dados los puntos  $p, x \in U$ , entonces existe una poligonal  $\sigma$  de lados paralelos a los ejes coordenados contenida en  $U$ , tal que  $\sigma$  une  $p$  con  $x$ .

*Demostración.* Sea el conjunto

$$A = \{x \in U \mid \text{existe una poligonal } \sigma \subset U \text{ de lados paralelos a los ejes coordenados que une } p \text{ con } x\}.$$

Demostraremos que  $A = U$ , lo que implica la afirmación del lema.

- Primero, observamos que  $p \in A$ , ya que el camino constante  $\sigma(t) = p$  es una poligonal trivial que une  $p$  consigo mismo. Por lo tanto,  $A \neq \emptyset$ .
- Veamos que  $A$  es abierto en  $U$ . Sea  $x \in A$ . Como  $U$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que la bola abierta  $B(x, \varepsilon) \subset U$ . Sea  $y \in B(x, \varepsilon)$ , por la regularidad de la forma de  $B(x, \varepsilon)$ , podemos construir una poligonal  $\sigma_{xy}$  de lados paralelos a los ejes coordenados que une  $x$  con  $y$  y esté contenida en  $B(x, \varepsilon) \subset U$ . Como por hipótesis existe una poligonal  $\sigma_x$  que une  $p$  con  $x$ , concatenando  $\sigma_x$  con  $\sigma_{xy}$  obtenemos una poligonal que une  $p$  con  $y$ , toda contenida en  $U$ , y con lados paralelos a los ejes coordinados. Por lo tanto,  $y \in A$ , lo que implica que  $B(x, \varepsilon) \subset A$ . Así,  $A$  es abierto en  $U$ .
- Ahora veamos que  $A$  es cerrado en  $U$ , es decir, que  $U \setminus A$  es abierto. Sea  $x \in U \setminus A$ . Como  $U$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset U$ . Supongamos que existe  $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$ . Entonces existe una poligonal  $\sigma_{py}$  que une  $p$  con  $y$ , y como  $y \in B(x, \varepsilon)$ , se puede construir una poligonal  $\sigma_{yx}$  dentro de  $B(x, \varepsilon) \subset U$  que une  $y$  con  $x$ . La concatenación de estas dos poligonales daría una poligonal que une  $p$  con  $x$ , lo cual contradice que  $x \in U \setminus A$ . Por lo tanto,  $B(x, \varepsilon) \subset U \setminus A$ , lo que prueba que  $U \setminus A$  es abierto. Así,  $A$  es cerrado en  $U$ .

Como  $A$  es abierto y cerrado en  $U$ , y  $U$  es conexo, se sigue que  $A = U$ .

Por lo tanto, para cualquier  $x \in U$ , existe una poligonal de lados paralelos a los ejes coordinados contenida en  $U$  que une  $p$  con  $x$ . □

**Teorema 6.4.1** [Caracterización de los Campos Conservativos]

Sea el conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo, y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo, entonces son equivalentes:

1. El campo  $\vec{F}$  es conservativo.
2.  $\int_{\gamma} \vec{F} = 0$  para todo  $\gamma$  camino cerrado  $C^1$  a trozos en  $U$ .
3.  $\int_{\gamma} \vec{F}$  solamente depende de los extremos de  $\gamma$  para todo  $\gamma$  camino  $C^1$  a trozos en  $U$ .
4.  $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$  para todo  $\sigma$  poligonal cerrado de lados paralelos a los ejes coordinados en  $U$ .
5.  $\int_{\sigma} \vec{F}$  solamente depende de los extremos de  $\sigma$  para todo  $\sigma$  poligonal cerrado de lados paralelos a

los ejes coordenados en  $U$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Si  $\gamma$  es un camino cerrado, entonces  $\gamma(a) = \gamma(b)$  y por la proposición anterior:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(b)) = 0$$

- (2)  $\implies$  (3): Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  caminos  $C^1$  a trozos con los mismos extremos. Consideramos  $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ , que es un camino cerrado. Por hipótesis,  $\int_{\gamma} \vec{F} = 0$ , y por la proposición anterior:

$$0 = \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \implies \int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}$$

- (3)  $\implies$  (2): Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  un camino cerrado de clase  $C^1$  a trozos. Dado un punto  $c \in (a, b)$ , consideramos los caminos  $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$  y  $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$ . Luego tenemos que  $\gamma_1$  y  $-\gamma_2$  son caminos  $C^1$  a trozos con los mismos extremos, y por hipótesis:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{-\gamma_2} \vec{F} \iff \int_{\gamma_1} \vec{F} - \int_{-\gamma_2} \vec{F} = 0$$

Luego teniendo en cuenta que  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  se sigue que:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} - \int_{-\gamma_2} \vec{F} = 0$$

- (2)  $\implies$  (4) y (3)  $\implies$  (5): trivial
- (4)  $\implies$  (5): es análogo a (2)  $\implies$  (3).
- (5)  $\implies$  (1): Fijado un punto  $p \in U$ , para cada  $x \in U$  definimos la función  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\varphi(x) = \int_{\sigma_{p,x}} \vec{F}$$

donde  $\sigma_{p,x}$  es una poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados que conecta  $p$  con  $x$ . Dicho poligonal siempre existe  $\forall p, x \in U$  por el Lema 6.4.1.

Por la hipótesis (5), esta integral no depende del camino poligonal elegido, sino únicamente de los extremos. Por tanto,  $\varphi(x)$  está bien definida.

Queremos demostrar que  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ , es decir, que  $\nabla \varphi = \vec{F}$ .

Para ello, consideramos un punto  $x \in U$  y un vector unitario  $\vec{e}_i$  en la dirección del eje  $i$ -ésimo. Suponemos que el segmento de recta desde  $x$  a  $x + h\vec{e}_i$  está contenido en  $U$ , lo cual es posible si se escoge  $h$  suficientemente pequeño ya que  $U$  es abierto y conexo.

Entonces:

$$\begin{aligned} \varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x) &= \int_{\sigma_{p,x+h\vec{e}_i}} \vec{F} - \int_{\sigma_{p,x}} \vec{F} = \int_{\sigma_{x,x+h\vec{e}_i}} \vec{F} \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(\sigma(t)), h\vec{e}_i \rangle dt = h \int_{t=0}^{t=1} F_i(\sigma(t)) dt \end{aligned}$$

donde  $\sigma(t) = x + t\vec{e}_i$ ,  $t \in [0, 1]$  es un camino poligonal de lados paralelos a los ejes coordinados que conecta  $x$  con  $x + h\vec{e}_i$ . Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{\varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \int_{t=0}^{t=1} F_i(\sigma(t)) dt$$

Tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t=0}^{t=1} F_i(\sigma(t))dt = \int_{t=0}^{t=1} \lim_{h \rightarrow 0} F_i(\sigma(t))dt \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \lim_{h \rightarrow 0} F_i(x + th\vec{e}_i)dt = \int_{t=0}^{t=1} F_i(x)dt = F_i(x) \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = F_i(x) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema de la convergencia dominada para intercambiar límite e integral al ser  $\vec{F}_i$  continua.

Por tanto, hemos demostrado que  $\nabla \varphi = \vec{F}$  en  $U$ , lo que implica que  $\vec{F}$  es conservativo.

□

### Observación 6.4.2

Un poligonal  $\sigma$  de lados paralelos a los ejes es un camino  $\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$  con  $\gamma_j$  segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados.

Además en este caso, si fijamos un punto  $p \in U$  la función  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} = \int_p^x \vec{F} \quad \text{donde } \gamma_x \text{ es un camino de } p \text{ a } x$$

es un potencial de  $\vec{F}$  en  $U$ .

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\vec{F}(x, y, z) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz))$ , veamos si es conservativo.

Fijamos un punto  $p = (0, 0, 0)$  y definimos  $\sigma_{xyz} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  donde:

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0, 0) & t \in [0, x] \text{ ó } t \in [x, 0] \\ \gamma_2(t) = (x, t, 0) & t \in [0, y] \text{ ó } t \in [y, 0] \\ \gamma_3(t) = (x, y, t) & t \in [0, z] \text{ ó } t \in [z, 0] \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=x} \langle (0, t, 0), (1, 0, 0) \rangle dt = 0$$

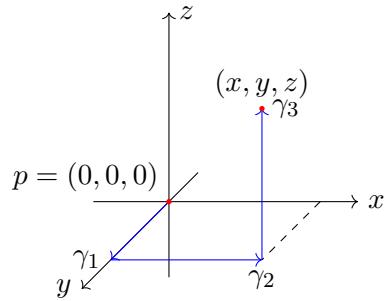
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=y} \langle (t, x, 0), (0, 1, 0) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=y} x dt = xy$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=z} \langle (y, x + t \cos(yt), y \cos(yt)), (0, 0, 1) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=z} y \cos(yt) dt = [\sin(yt)]_{t=0}^{t=z} = \sin(yz)$$

Luego  $\varphi(x, y, z) = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} = xy + \sin(yz)$ .

En efecto, para confirmar que  $\vec{F}$  es conservativo, debemos verificar que  $\nabla \varphi = \vec{F}$ .

$$\nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz)) = \vec{F}$$



Por lo tanto,  $\vec{F}$  es conservativo.

De forma alternativa se podría haber visto que  $\vec{F}$  es un campo conservativo, buscando una función  $\varphi$  tal que  $\vec{F} = \nabla\varphi$ , es decir:

1.  $F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y \implies \varphi = xy + g(y, z)$
  2.  $F_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + z \cos(yz) \implies \frac{\partial g}{\partial y} = z \cos(yz) \implies g = \sin(yz) + h(z)$
  3.  $F_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = y \cos(yz) \implies \frac{\partial h}{\partial z} = y \cos(yz) \implies h = \frac{y}{z} \sin(yz) + c$   
 $\implies$
1.  $\varphi = \int \frac{d\varphi}{dx} dx = \int y dx = xy + H(y, z)$  constante con respecto a  $x$
  2.  $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{dH}{dz} = y \cos(yz) \implies H = \int y \cos(yz) dz = \sin(yz) + G(y)$  constante con respecto a  $z$
  3.  $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d}{dy}(yx + \sin(yz) + G(y)) = x + z \cos(yz) + G'(y) = x + z \cos(yz) \implies G'(y) = 0 \implies G(y) = \text{cte.}$

### Proposición 6.4.2

Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo conservativo de clase  $C^1$  entonces se cumple que:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ en } U$$

*Demostración.* Tomemos  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = F_i \in C^1 \forall i = 1, \dots, n$ . Luego  $\varphi$  es de clase  $C^2$  y por el teorema de las derivadas cruzadas (Schwartz) se tiene que:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Schwartz}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

□

### Corolario 6.4.1

Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$ , entonces, si  $\vec{F}$  es campo

conservativo, se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } U$$

*Demostración.* Puesto que  $\vec{F}$  es conservativo, y  $\vec{F} = (P, Q) = (F_1, F_2)$ , entonces por la proposición anterior se cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

□

#### Observación 6.4.3

En general el recíproco no es cierto, depende de la forma del dominio  $U$ .

#### Observación 6.4.4

Terminología:

- Una forma diferencial de orden 1 en  $U$  es una expresión de la forma  $\omega = Pdx + Qdy$  con  $P, Q$  de clase  $C^1$  en  $U$ .
- $\omega$  es cerrada si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  en  $U$ .
- $\omega$  es exacta si  $\exists \varphi \in C^2(U) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \iff \nabla \varphi = (P, Q)$  en  $U$ .

Hemos visto que  $\omega$  exacta  $\implies \omega$  cerrada.

## 7 Teorema de Green

### 7.1 Curva de Jordan

#### Definición 7.1.1 [Curva de Jordan]

Una curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  es la imagen de un camino cerrado y simple en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $C = \text{Im}(\gamma)$  con  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua, inyectiva en  $[a, b]$  y  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Dicho de otra forma, una curva de Jordan en el plano es una curva cerrada y continua que no se cruza a sí misma. Es como si tomaras un lápiz, dibujaras una línea continua sin levantarla del papel, sin pasar dos veces por el mismo punto (excepto al final), y al final volvieras exactamente al punto de partida.

Más técnicamente, es la imagen de una función continua  $\gamma$  que recorre la curva desde un punto inicial  $\gamma(a)$  hasta un punto final  $\gamma(b)$ , con la condición de que todos los puntos intermedios son distintos (no hay autointersecciones), y solo el inicio y el final coinciden:  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Este tipo de curva encierra una región bien definida del plano, como un lazo o un contorno cerrado limpio.

#### Observación 7.1.1

Se puede demostrar que  $C$  es un homeomorfa a la circunferencia unitaria  $S^1$ .

#### Teorema 7.1.1 [Teorema de la curva de Jordan]

Toda curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  divide al plano en dos regiones o componentes conexas, una acotada, denominada **parte interior a  $C$**  y otra no acotada, denominada **parte exterior a  $C$** , siendo  $C$  la frontera común a ambas regiones. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \text{Int}(C) \cup \text{Ext}(C) \cup C \text{ con } \begin{cases} \text{Int}(C) = \text{abierto conexo acotado} \\ \text{Ext}(C) = \text{abierto conexo no acotado} \\ \text{Fr}(\text{Int}(C)) = C = \text{Fr}(\text{Ext}(C)) \end{cases} \quad \text{unión disjunta}$$

#### Definición 7.1.2 [Conexión Simple]

Un conjunto abierto y conexo  $U \subset \mathbb{R}^2$  se dice que es simplemente conexo si  $\forall C$  curva de Jordan en  $U$  se tiene que  $\text{Int}(C) \subset U$ .

Informalmente, podemos definir un conjunto simplemente conexo como aquel que no tiene agujeros, es decir, toda curva de Jordan que esté dentro del conjunto también encierra completamente una región que pertenece al conjunto. Por ejemplo, el disco abierto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  es simplemente conexo, mientras que el conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  no lo es, porque tiene un agujero en el origen.

#### Definición 7.1.3 [Orientación de una Curva de Jordan]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan de clase  $C^1$  a trozos. Se define la orientación positiva en  $C$  y se denota  $C^+$  como el sentido de recorrido contrario a las agujas del reloj.

Conceptualmente, es el sentido de recorrido que deja la parte interior de  $C$  a la izquierda.

## 7.2 Teorema de Green

### Teorema 7.2.1 [Teorema de Green]

Sean  $C$  curva de Jordan regular a trozos con parte interior  $D = \text{Int}(C)$ ,  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \bar{D} = D \cup C$ . Entonces:

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $C^+$  representa la curva  $C$  con orientación positiva.

*Demostración.* Para el caso de dominios que son a la vez proyectables horizontalmente y verticalmente. Es decir, supongamos que

$$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde las funciones  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ .

Entonces  $C^+ = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$  donde

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, f(t)), & t \in [a, b] \quad \gamma'_1(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0) \\ \gamma_2(t) = (b, t) & t \in [c_2, d_2] \quad \gamma'_2(t) = (0, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, g(t)) & t \in [a, b] \quad \gamma'_3(t) = (1, g'(t)) \neq (0, 0) \\ \gamma_4(t) = (a, t) & t \in [c_4, d_4] \quad \gamma'_4(t) = (0, 1) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \int_{C^+} P dx + Q dy &= \int_{C^+} P dx + \int_{C^+} Q dy \implies \int_{C^+} P dx = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4} (P, 0) \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \langle (P(t, f(t)), 0), (1, f'(t)) \rangle dt + \int_{t=c_2}^{t=d_2} \langle (P(b, t), 0), (0, 1) \rangle dt \\ &\quad - \int_{t=a}^{t=b} \langle (P(t, g(t)), 0), (1, g'(t)) \rangle dt - \int_{t=c_4}^{t=d_4} \langle (P(a, t), 0), (0, 1) \rangle dt \\ &= \int_{t=a}^{t=b} P(t, f(t)) - P(t, g(t)) dt \\ \\ \bullet \quad \int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx = - \int_{x=a}^{x=b} [P(x, y)]_{y=f(x)}^{y=g(x)} dx \\ &= - \int_{x=a}^{x=b} P(x, g(x)) - P(x, f(x)) dx = \int_{x=a}^{x=b} P(x, f(x)) - P(x, g(x)) dx \end{aligned}$$

Usando que  $\bar{D}$  es verticalmente proyectable, hemos obtenido que  $\int_{C^+} P dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ .

Usando que  $\bar{D}$  es horizontalmente proyectable, veamos que  $\int_{C^+} Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$ .

Suponemos entonces que

$$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

donde  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ .

Entonces  $C^+ = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4$  donde

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = (\psi(t), t), & t \in [c, d] \quad \sigma'_1(t) = (\psi'(t), 1) \\ \sigma_2(t) = (t, d), & t \in [a_2, b_2] \quad \sigma'_2(t) = (1, 0) \\ \sigma_3(t) = (\varphi(t), t), & t \in [c, d] \quad \sigma'_3(t) = (\varphi'(t), 1) \\ \sigma_4(t) = (t, c), & t \in [a_4, b_4] \quad \sigma'_4(t) = (1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \int_{C^+} Q dy &= \int_{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4} (0, Q) \\ &= \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\psi(t), t)), (\psi'(t), 1) \rangle dt - \int_{t=a_2}^{t=b_2} \langle (0, Q(t, d)), (1, 0) \rangle dt \\ &\quad - \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\varphi(t), t)), (\varphi'(t), 1) \rangle dt + \int_{t=a_4}^{t=b_4} \langle (0, Q(t, c)), (1, 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=c}^{t=d} Q(\psi(t), t) - Q(\varphi(t), t) dt \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=c}^{y=d} Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y) dy$$

□

El Teorema de Green establece una conexión profunda entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada y una integral doble sobre la región encerrada por esa curva. En esencia, dice que recorrer el campo vectorial a lo largo del borde de una región (lado izquierdo) es equivalente a acumular la rotación o “vorticidad” del campo dentro de esa región (lado derecho).

En términos geométricos, si tienes un campo vectorial  $\vec{F} = (P, Q)$ , el teorema afirma que el trabajo total que realiza ese campo al recorrer la curva cerrada  $C^+$  (es decir, la integral de línea) es igual a la suma de las diferencias entre los cambios de  $Q$  en  $x$  y de  $P$  en  $y$  en el interior de la curva (es decir, una integral de área del rotacional escalar). El teorema es válido siempre que el campo sea suficientemente suave y que la región encerrada no tenga agujeros.

### Observación 7.2.1

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\bar{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

puesto que  $C$  tiene área  $D$ .

### Corolario 7.2.1

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan regular a trozos con parte interior  $D = \text{Int}(C)$ , entonces se tiene que:

$$\text{área}(D) = \int_{C^+} x dy = - \int_{C^+} y dx = \int_{C^+} \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

*Demostración.*

□

**Ejemplo**

Vamos a verificar el Teorema de Green para el campo  $\vec{F} = (x^2, xy)$  y la curva de Jordan  $C$  dada por el borde del cuadrado  $[0, 1]^2$ .

$$\begin{cases} P(x, y) = x^2 \\ Q(x, y) = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0), & t \in [0, 1] & \gamma'_1(t) = (1, 0) \\ \gamma_2(t) = (1, t), & t \in [0, 1] & \gamma'_2(t) = (0, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, 1), & t \in [0, 1] & \gamma'_3(t) = (1, 0) \\ \gamma_4(t) = (0, t), & t \in [0, 1] & \gamma'_4(t) = (0, 1) \end{cases}$$

- $$\int_{C^+} x^2 dx + xy dy = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4} x^2 dx + xy dy$$

$$= \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (t^2, 0), (1, 0) \rangle dt}_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (1, t), (0, 1) \rangle dt}_{\gamma_2} - \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (t^2, t), (1, 0) \rangle dt}_{\gamma_3} - \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (0, 0), (0, 1) \rangle dt}_{\gamma_4}$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt + \int_{t=0}^{t=1} t dt - \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt - 0 = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}$$
- $$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D (y - 0) dx dy = \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=1} y dy \right) dx = \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

**Ejemplo**

Verificar el teorema de Green para la circunferencia de radio 2 y centro en el origen, el campo  $\vec{F} = (x - y, x + y)$ .

$$\begin{cases} \gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), & t \in [0, 2\pi] & \gamma(0) = \gamma(2\pi) \text{ para } \gamma(0) \neq \gamma(t) \forall t \in (0, 2\pi) \\ \gamma'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

- $$\int_{C^+} (x - y) dx + (x + y) dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (2 \cos(t) - 2 \sin(t), 2 \cos(t) + 2 \sin(t)), (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} (-4 \cos(t) \sin(t) + 4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) - 4 \sin(t) \cos(t)) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 4 dt = 8\pi$$
- $$\int_{\overline{D}} (1 + 1) dx dy = 2(\text{área}(\overline{D})) = 2(\pi 2^2) = 8\pi$$

**Ejemplo**

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = (x^2 + y^2, -3xy + xy^3 + y^2)$  sobre la curva definida por el cuadrado  $[0, 1]^2$ . Veamos dos maneras de calcular la integral de camino dada por  $\int_{\gamma} F \cdot dr$ .

1. Podemos describir la curva como producto de una concatenación de curvas:  $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_4$

donde:

$$\begin{cases} \gamma_1 \equiv (4t, 0) : t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \gamma_2 \equiv (1, 4t - 1) : t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}] \\ \gamma_3 \equiv (3 - 4t, 1) : t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}] \\ \gamma_4 \equiv (0, 4 - 4t) : t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \sum_{k=1}^4 \int_{t=\frac{k-1}{4}}^{t=\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma'_k(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^4 \int_{t=\frac{k-1}{4}}^{t=\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma'_k(t) \rangle dt = \\ &= \int_{t=0}^{t=\frac{1}{4}} \langle (4t)^2 + 0, -3 \cdot (4t) \cdot 0 + 4t \cdot 0^3 + 0 \rangle, (4, 0) \rangle dt + \\ &+ \int_{t=\frac{1}{4}}^{t=\frac{2}{4}} \langle (t^2 + (4t-1)^2, -3(4t-1) + (4t-1)^3 + (4t-1)^2), (0, 4) \rangle dt + \\ &+ \int_{t=\frac{2}{4}}^{t=\frac{3}{4}} \langle (3-4t)^2 - 1^2, -3(3-4t) + (3-4t) + 1 \rangle, (-4, 0) \rangle dt + \\ &+ \int_{t=\frac{3}{4}}^{t=1} \langle (4-4t)^2, (4-4t)^2 \rangle, (0, -4) \rangle dt \end{aligned}$$

Y resolveríamos las integrales polinómicas de forma usual.

2. Otra forma de resolverlo es aplicando el teorema de Green:

Para ello veamos que el camino definido anteriormente sea una Curva de Jordan

$$\begin{cases} \text{Simple: } \forall t_1, t_2 \in (a, b) : t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \\ \text{Cerrada: } \gamma(0) = \gamma(1) \\ \text{Regular: } \|\gamma'(t)\| \neq 0 \ \forall t \in [0, 1] \end{cases} \implies \text{es una curva de Jordan}$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -3y + y^3 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \implies$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy \\ &= \int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx = \left[ \frac{-3y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{-3y^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  y el camino dado por:

$$\begin{cases} \gamma(t) = (8 + 3 \cos(2\pi t), 6 + 3 \sin(2\pi t)) \\ \gamma'(t) = 6\pi(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Veamos cómo lo haríamos a través de la definición:

$$\int_{\gamma} F = \int_{t=0}^{t=1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \frac{(-6 - 3 \sin(2\pi t), 8 + 3 \cos(2\pi t))}{109 + 48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t)}, 6\pi (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \right\rangle dt \\
&= \int_{t=0}^{t=1} \frac{6\pi(6 \sin(2\pi t) + 8 \cos(2\pi t) + 3)}{109 + 48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t)} dt = 0
\end{aligned}$$

**Observación 7.2.2**

La integral anterior se resolvería haciendo uso del cambio de variable  $u = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$ , el cual suele usarse para integrales de la forma:

$$\int \frac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))} dt$$

Haciendo uso del Teorema de Green, y verificando en primer lugar que se cumple que  $\gamma$  es una Curva de Jordan:

$$\begin{cases} \gamma(t) \text{ está orientada positivamente} \\ \gamma(0) = \gamma(1) = (11, 6) \\ \|\gamma'(t)\| \neq 0 \forall t \in [0, 1] \\ \begin{cases} 8 + 3 \cos(2\pi t) = 8 + 3 \cos(2\pi t') \\ 6 + 3 \sin(2\pi t) = 6 + 3 \sin(2\pi t') \end{cases} \iff t = 0, t' = 1 \implies \gamma \text{ es simple} \end{cases}$$

$F$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , por lo que podemos aplicar el Teorema de Green:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
&\implies \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} 0 dx dy = 0
\end{aligned}$$

**Ejemplo**

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  y el camino dado por  $\gamma(t) = (\varepsilon \cos(2\pi t), \varepsilon \sin(2\pi t))$  con  $t \in [0, 1]$  y  $\varepsilon > 0$ .

Este caso es un ejemplo de un campo vectorial y un camino en el que no es posible hacer uso del Teorema de Green ya que el origen es un punto de discontinuidad y por tanto  $F$  no es de clase  $C^1$ . No obstante si se puede calcular a través de la definición:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \int_{t=0}^{t=1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \left( \frac{-\varepsilon \sin(2\pi t)}{\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon \cos(2\pi t)}{\varepsilon^2} \right), (-2\pi \varepsilon \sin(2\pi t), 2\pi \varepsilon \cos(2\pi t)) \right\rangle dt \\
&= \int_{t=0}^{t=1} 2\pi dt = 2\pi
\end{aligned}$$

**Ejemplo**

Sea  $\gamma$ -camino simple, cerrado, regular y orientada positivamente con 2 cortes en cada eje y tal que  $(0, 0) \in \text{int}(\gamma)$

**Corolario 7.2.2**

Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto simplemente conexo y el campo vectorial  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\vec{F}$  es conservativo en  $U \iff Pdx + Qdy$  es exacta en  $U$ , es decir,  $\exists \varphi \in C^2(U)$  tal que  $d\varphi = Pdx + Qdy$ .
2.  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  en  $U \iff Pdx + Qdy$  es cerrada en  $U$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Es cierto siempre. Si  $(P, Q) = \nabla\varphi$  con  $\varphi \in C^2(U)$  entonces  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .
- (2)  $\implies$  (1): Sea  $\sigma$  poligonal cerrada en  $U$  de lados paralelos a los ejes coordenados. Veamos que  $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$ . Entonces  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$  donde cada  $\sigma_j$  tiene imagen  $Im(\sigma_j) = C_j$ , curva de Jordan poligonal.

$$\int_{\sigma} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{(\partial D_j)^+} Pdx + Qdy = \sum_{j=1}^n \int_{D_j} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

□

**Ejemplo**

El resultado anterior puede fallar si  $U$  no es simplemente conexo. Sean  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  que es  $C^\infty$  en  $U$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

pero podemos ver que  $\vec{F}$  no es conservativo en  $U$  ya que tomando  $\gamma_r(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$  con  $r > 0$  y  $t \in [0, 2\pi]$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\langle \left( \frac{-r \sin(t)}{r^2}, \frac{r \cos(t)}{r^2} \right), (-r \sin(t), r \cos(t)) \right\rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

luego como  $\gamma_r$  es cerrada y  $\int_{\gamma_r} \vec{F} \neq 0$  entonces  $\vec{F}$  no es conservativo en  $U$ .

Sabemos que  $\vec{F}$  no es conservativo, pero nos podemos preguntar si se puede encontrar un potencial para  $\vec{F}$  en  $U$ .

Buscamos  $\varphi$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} P = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

luego

$$\varphi = \int \frac{-y}{x^2 + y^2} dx = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

Entonces  $\varphi$  es un potencial para  $\vec{F}$  en  $W = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$ .

### Teorema 7.2.2 [Teorema de Green General - Dominios Múltiplemente Conexos]

Sean  $C_0, C_1, \dots, C_m$  curvas de Jordan regulares a trozos en  $\mathbb{R}^2$  tal que:

1.  $C_j \subset \text{Int}(C_0) \forall j = 1, \dots, m$
2.  $C_i \subset \text{Ext}(C_j) \forall i, j = 1, \dots, m$  con  $i \neq j$

Sean  $D = \text{Int}(C_0) \cap (\text{Ext}(C_1) \cup \dots \cup \text{Ext}(C_m))$  y  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \overline{D} = D \cup C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_m$ . Entonces:

$$\int_{(\partial D)^+} P dx + Q dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $(\partial D)^+ = C_0^+ - \sum_{j=1}^m C_j^+$ .

### Definición 7.2.1 [Divergencia de un Campo Vectorial]

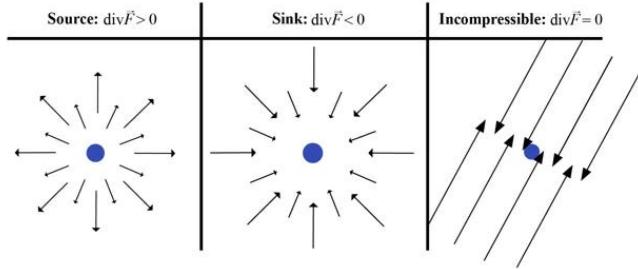
Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define la divergencia de  $\vec{F}$  como:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Más generalmente, si  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  entonces:

$$\text{div}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{F}$$

La divergencia de un campo vectorial mide qué tanto el campo "se expande" o "se contrae" en un punto, es decir, cuánto flujo neto sale o entra de una región infinitesimal alrededor de ese punto. Si imaginas un campo como un flujo de aire o de agua, la divergencia en un punto te dice si ese punto actúa como una fuente (donde el fluido se está generando y sale hacia afuera) o como un sumidero (donde el fluido desaparece y entra hacia dentro). Si no hay ganancia ni pérdida neta de fluido, la divergencia es cero.



Geométricamente, si colocas una pequeña esfera o círculo alrededor de un punto, y el flujo total que sale es mayor que el que entra, la divergencia es positiva; si entra más de lo que sale, es negativa. La divergencia se calcula como una combinación de derivadas parciales que describe cómo cambian las componentes del campo en cada dirección. Así, la divergencia condensa en un número local la idea de densidad de flujo saliente desde un punto del campo.

### Observación 7.2.3

Sea el vector  $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ , entonces tenemos dos vectores ortogonales a  $\vec{u}$  que son  $\vec{v} = (u_2, -u_1)$  y  $\vec{w} = (-u_2, u_1)$ , y que se obtienen rotando  $\vec{u}$  90 grados en sentido horario y antihorario respectivamente.

### Definición 7.2.2 [Vector Normal Unitario Exterior]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan regular a trozos en  $D = \text{Int}(C)$ . Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización regular a trozos de  $C$  que induce la orientación positiva  $C^+$ . Para cada  $t_0 \in [a, b]$ , excepto una cantidad finita de ellos, consideramos el vector tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$ :

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0))$$

Se define entonces el vector normal unitario exterior a  $C$  en  $\gamma(t_0)$  como:

$$\vec{n}(\gamma(t_0)) = \left( \frac{\gamma'_2(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, -\frac{\gamma'_1(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right)$$

El vector normal unitario exterior a una curva cerrada en el plano representa la dirección que apunta hacia fuera del dominio  $D$  delimitado por la curva, y es perpendicular al vector tangente en cada punto regular. Cuando una curva  $C$  está orientada positivamente (es decir, recorriéndola el interior queda a la izquierda), el exterior queda a la derecha del sentido de recorrido. Por tanto, para obtener el vector normal exterior, se toma el vector tangente en ese punto y se rota 90° en sentido horario, apuntando hacia fuera.

### Teorema 7.2.3 [Teorema de la Divergencia]

Supongamos que tenemos  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan regular a trozos con  $D = \text{Int}(C)$  y sea  $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \overline{D} = D \cup C$ . Entonces:

$$\int_D \text{div}(\vec{F}) = \int_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal unitario exterior a  $C^+$ .

*Demostración.* Consideramos el campo vectorial  $\vec{G} = (-F_2, F_1) = (P, Q)$  y aplicamos el Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{C^+} P dx + Q dy \\ \bullet \quad \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy \\ \bullet \quad \int_{C^+} \underbrace{\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle}_{\text{campo escalar}} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \vec{n}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t=a}^{t=b} \langle (F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t))), (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \rangle dt \\ &= \int_{t=a}^{t=b} -F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) dt = \int_{C^+} P dx + Q dy \end{aligned}$$

□

Lo que nos viene a decir el teorema de la divergencia es que la cantidad total de “campo” que se genera o se pierde dentro de una región ( $D$ ) es exactamente igual al flujo neto que atraviesa su frontera ( $C$ ), medido mediante el producto escalar del campo con el vector normal exterior. Este resultado permite traducir una propiedad local del campo —la divergencia, que mide en cada punto si el campo actúa como fuente o sumidero— en una propiedad global, como el flujo total que atraviesa el borde.

En términos más concretos, el lado izquierdo de la igualdad,  $\int_D \operatorname{div}(\vec{F})$ , cuantifica cuánto se “crea” o “destruye” del campo dentro del área: es una suma punto a punto de los nacimientos o desapariciones del flujo. Por su parte, el lado derecho,  $\int_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$ , mide directamente cuánto del campo está atravesando la frontera hacia el exterior. Así, si dentro de la región hay fuentes, el campo tiende a salir; si hay sumideros, tiende a entrar. Este teorema no solo tiene un profundo contenido conceptual —relacionando lo interno con lo externo, lo local con lo global—, sino que también es una herramienta práctica: convierte una integral doble sobre una región (a menudo más complicada) en una integral de línea a lo largo de su frontera (más manejable si se conoce el campo sobre ella).

## 8 Superficies Paramétricas

### Definición 8.0.1 [Superficie Paramétrica]

Una parametrización de una superficie paramétrica  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$  definida en un abierto conexo  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que:

$$Im(\varphi) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in U\} = S$$

Diremos que la parametrización  $\varphi$  es regular cuando la pareja de vectores  $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\}$  es linealmente independiente en todo punto de  $U$ . Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a  $\varphi$  es no nulo en todo punto de  $U$ :

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$$

En este caso, el plano tangente a la superficie en el punto  $\varphi(u_0, v_0)$  tiene como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = \varphi_2(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z = \varphi_3(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

### Ejemplo

Dada la superficie  $z = x^2 + y^2$ , podemos parametrizarla con  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ . Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2y, -2x, 1) \neq (0, 0, 0)$$

### Ejemplo

Superficies explícitas: Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto conexo y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Entonces la gráfica de  $f$  es una superficie regular con parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Veamos que  $\vec{N}_\varphi \neq (0, 0, 0)$ :

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \neq (0, 0, 0)$$

$$Im(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

### Ejemplo

Dado el cilindro de ecuaciones  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 < z < 1$ , buscamos una parametrización de la superficie. Tomando la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, 1)$$

entonces vemos que  $\underbrace{x^2 + y^2}_1 = r^2 \implies r = 1$ .

Por tanto, obtenemos que nuestra parametrización es:

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \neq (0, 0, 0)$$

### Ejemplo

Tomando el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 < z < 1$  del ejemplo anterior, podemos parametrizarlo de otra forma.

Consideramos el siguiente conjunto:

$$U = \{(u, v) : 1 < \sqrt{u^2 + v^2} < 2, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

entonces definimos nuestra parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sobre este conjunto tal que

$$\varphi(u, v) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \sqrt{u^2 + v^2} - 1 \right)$$

### Definición 8.0.2 [Superficies Equivalentes]

*Diremos que dos superficies paramétricas  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definidas respectivamente sobre los conjuntos abiertos conexos  $U, V \subset \mathbb{R}^2$ , son equivalentes si existe una aplicación biyectiva  $h : V \rightarrow U$  de clase  $C^1$  (es decir, un difeomorfismo) tal que:*

$$\psi = \varphi \circ h.$$

### Observación 8.0.1

1. En este caso  $\varphi(U) = \psi(V)$ .
2. En la definición se pide que los conjuntos  $U$  y  $V$  sean conexos. Como  $\forall(s, t) \in V$ ,  $D_h(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un isomorfismo lineal, sabemos que  $\det(D_h(s, t)) \neq 0$ . Por conexión,  $\det(D_h(s, t))$  conserva el signo en todo  $V$ .

### Definición 8.0.3 [Conservación de la Orientación]

1. Se dice que  $h$  conserva la orientación si  $\det(D_h(s, t)) > 0$  para todo  $(s, t) \in V$ , es decir las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  tienen la misma orientación.
2. Se dice que  $h$  cambia la orientación si  $\det(D_h(s, t)) < 0$  para todo  $(s, t) \in V$ , es decir las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  tienen orientaciones opuestas.

### Lema 8.0.1

Sean  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones equivalentes de una superficie  $S$ . Entonces,

para todo  $(s, t) \in V$ , se cumple que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s, t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(s, t))$$

Equivalentemente,

$$\vec{N}_\psi(s, t) = \det(D_h(s, t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s, t))$$

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena a  $\psi = \varphi \circ h$ , obtenemos la siguiente relación entre las matrices jacobianas:

$$D_\psi(s, t) = D_\varphi(h(s, t)) \cdot D_h(s, t).$$

En términos de las derivadas parciales, esto se traduce en:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial t},$$

donde  $h(s, t) = (h_1(s, t), h_2(s, t))$ .

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial como:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot D_h(s, t),$$

donde  $D_h(s, t)$  es la matriz jacobiana de  $h$ :

$$D_h(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos el producto vectorial de las derivadas parciales de  $\psi$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Utilizando las expresiones anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right) \times \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial t} \right).$$

Expandiendo el producto vectorial y usando que  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Notamos que el término entre paréntesis a la derecha es el determinante de la matriz jacobiana  $D_h(s, t)$ :

$$\det(D_h(s, t)) = \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s, t)) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) (h(s, t)).$$

Equivalentemente, para los vectores normales unitarios:

$$\vec{N}_\psi(s, t) = \det(D_h(s, t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s, t)),$$

donde  $\vec{N}_\psi$  y  $\vec{N}_\varphi$  son los vectores normales unitarios asociados a las parametrizaciones  $\psi$  y  $\varphi$ , respectivamente.  $\square$

**Definición 8.0.4** [Orientación de una Superficie]

Asociadas a las parametrizaciones  $\varphi$  y  $\psi$  obtenemos los vectores normales unitarios

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{N}_\varphi}{\|\vec{N}_\varphi\|} \quad y \quad \vec{n}_\psi = \frac{\vec{N}_\psi}{\|\vec{N}_\psi\|}$$

Entonces diremos que  $\varphi$  y  $\psi$  tienen la misma orientación si:

$$\vec{n}_\psi(s, t) = \vec{n}_\varphi(h(s, t)) \text{ o } \vec{n}_\psi(s, t) = -\vec{n}_\varphi(h(s, t))$$

## 9 Integrales de superficie

### 9.1 Superficies como Conjuntos

#### Definición 9.1.1 [Superficie Simple Regular]

Diremos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie simple regular si  $S = \varphi(\overline{D})$  donde  $D = \text{Int}(C)$  siendo  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan regular a trozos, y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de clase  $C^1$  inyectiva y regular en  $\overline{D} \subset U$ .

En este caso, el borde de  $S$  se define como  $\partial S = \varphi(C)$ , que es una curva cerrada y regular a trozos en  $\mathbb{R}^3$ .

#### Definición 9.1.2 [Superficie Casi-Simple Regular]

Diremos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie casi-simple regular si  $S = \varphi(\overline{D})$  donde  $D = \text{Int}(C)$  siendo  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan regular a trozos, y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de clase  $C^1$  inyectiva y regular en  $D$ .

#### Definición 9.1.3 [Área e Integral de una Superficie]

Dada una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  simple regular o casi-simple regular, y una parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$  de  $S$ , definimos:

1. El área de la superficie  $S$  como:

$$a(S) = \int_S 1 dS = \int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv$$

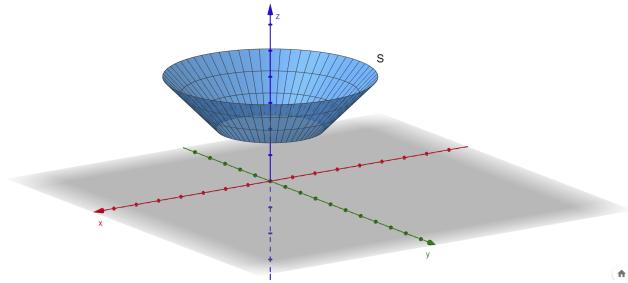
2. Si  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  es:

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv = \int_D f(\varphi(u, v)) \|\vec{N}_\varphi\| du dv$$

#### Ejemplo

Consideramos la superficie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  resultante de acotar un cono por los planos  $z = 1$  y  $z = 2$ .

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 1 < z < 2\}$$



Calculemos el área de la superficie  $S$ :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2 = z^2 \implies r = z \quad \varphi(\theta, z) = \begin{cases} x = z \cos(\theta) \\ y = z \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\overline{D} = [0, 2\pi] \times [1, 2] \quad S = \varphi(D)$$

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z \sin(\theta) & z \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = z^2 \cos^2(\theta) + z^2 \sin^2(\theta) + (-z)^2 = 2z^2 \implies \|\vec{N}_\varphi\| = z\sqrt{2} \neq 0 \quad \forall(0, z) \in D$$

Entonces  $\varphi$  es inyectiva y regular en  $D$  (aunque no en  $\overline{D}$ ), luego  $S$  es una superficie casi-simple regular.

Por último, el área de la superficie  $S$  es:

$$\begin{aligned} a(S) &= \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[ \frac{z^2}{2} \sqrt{2} \right]_{z=1}^{z=2} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \frac{4}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{3}{2} \sqrt{2} d\theta = \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 2\pi = 3\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

### Ejemplo

Dada la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , calculemos la integral de superficie de  $f$  sobre la superficie  $S$  dada por la sección de cono  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $1 < z < 2$  del ejemplo anterior.

Entonces, la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  es:

$$\begin{aligned} \int_S f dS &= \int_D f(\varphi(\theta, z)) \|\vec{N}_\varphi\| d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 \cdot z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} [z^4]_1^2 d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} (16 - 1) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{30\sqrt{2}}{4} d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{15\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot (2\pi) = 15\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

Observemos que  $\int_S f dA = \int_S f dS$ .

### Ejemplo

Área de la esfera en  $\mathbb{R}^3$  de radio  $R$ :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, \phi) = \begin{cases} x = R \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = R \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = R \cos(\phi) \end{cases} \quad \overline{D} = \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Entonces, tenemos que  $D = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  y  $\overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R \sin(\theta) \sin(\phi) & R \cos(\theta) \sin(\phi) & 0 \\ R \cos(\theta) \cos(\phi) & R \sin(\theta) \cos(\phi) & -R \sin(\phi) \end{vmatrix}$$

$$= R^2 \sin(\phi) \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{vmatrix} = -R^2 \sin(\phi) (\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi))$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = R^4 \sin^4(\phi) + R^4 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) = R^4 \sin^2(\phi) (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) = R^4 \sin^2(\phi)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\| = R^2 \sin(\phi)$$

Luego el área de la esfera es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} [-R^2 \cos(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -R^2 ((-1) - 1) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2R^2 d\theta = 2R^2 \cdot (2\pi) = 4\pi R^2$$

## 9.2 Superficies Regulares a Trozos

### Definición 9.2.1 [Suma de Superficies]

Sean  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  dos superficies simples regulares. Se dice que la superficie  $S$  es la suma de  $S_1$  y  $S_2$ , y se denota por  $S = S_1 + S_2$ , si:

1.  $S = S_1 \cup S_2$
2.  $S_1 \cap S_2 \subset \partial S_1 \cap \partial S_2$

En este caso, se define el borde de  $S$  como:

$$\partial S = \overline{(\partial S_1 \cup \partial S_2) \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)}$$

Si  $\partial S = \emptyset$ , entonces se dice que  $S$  no tiene borde y es cerrada.

Análogamente, se define la suma de superficies  $S_1 + S_2 + \dots + S_k$  siendo cada  $S_i$  una superficie simple regular.

### Ejemplo

Consideramos el cubo  $S$  formado por la suma de las superficies de los seis lados del cubo  $S = S_1, S_2, \dots, S_6$ . En particular tenemos que  $\partial S = \emptyset$ .

### Ejemplo

Consideramos ahora el cilindro  $S$  formado por la suma de las superficies de los dos "tapas" del cilindro  $S_1, S_2$  y la superficie lateral dividida en dos partes iguales  $S_3$  y  $S_4$ . En este caso, tenemos que  $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ , y como en el caso anterior,  $\partial S = \emptyset$ .

**Ejemplo**

Quitémosle una de las tapas al cilindro, entonces tenemos que  $S = S_1 + S_2 + S_3$ , y en este caso

$$\begin{cases} \partial(S_1 + S_2) = C_0 \cup C_1 \\ \partial S_3 = C_0 \\ \partial S = \overline{(\partial(S_1 + S_2) \cup \partial S_3)} \setminus (\partial S_1 + S_2) \cap \partial S_3 = \overline{(C_0 \cup C_1 \cup C_0) \setminus (C_0)} = \overline{C_1} = C_1 \end{cases}$$

Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y  $S$  una superficie. Nos preguntamos qué orientación tiene el campo  $\vec{F}$  en la superficie  $S$ .

Necesitamos, por tanto, orientar  $S$  de alguna forma.

### 9.3 Orientación de Superficies

#### Definición 9.3.1 [Normal Unitaria de una Superficie]

Sea  $S$  una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ . Una **normal unitaria** en  $S$  es una función continua

$$\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que, para todo punto  $p \in S$ , se cumple que  $\vec{n}(p)$  es un vector **unitario** y **normal** a la superficie en  $p$ , es decir:

$$\vec{n}(p) \perp T_p(S) \quad y \quad \|\vec{n}(p)\| = 1,$$

donde  $T_p(S)$  denota el plano tangente a  $S$  en el punto  $p$ .

#### Definición 9.3.2 [Superficie Orientada]

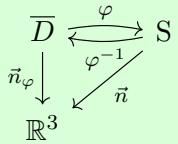
Una **superficie simple regular orientada** es un par  $(S, \vec{n})$ , donde  $S$  es una superficie regular y simple, y  $\vec{n}$  es una normal unitaria que asigna de forma continua a cada punto de  $S$  una orientación consistente.

#### Observación 9.3.1

Una superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones posibles.

Sea  $\varphi : \bar{D} \rightarrow S$  una parametrización simple y regular de  $S$ , según la definición adoptada para  $S$ . Consideramos el siguiente campo normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}.$$



Entonces, la función  $\vec{n} = \vec{N}_\varphi \circ \varphi^{-1}$  define una normal unitaria en  $S$ , ya que  $\varphi : \bar{D} \rightarrow S$  es un homeomorfismo.

Asimismo, la función  $-\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  también es una normal unitaria en  $S$ , lo que muestra que toda superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones opuestas.

Sean ahora  $\vec{n}_1, \vec{n}_2 : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos normales unitarias en  $S$ . Definimos la función

$$h(p) = \langle \vec{n}_1(p), \vec{n}_2(p) \rangle$$

para todo  $p \in S$ . Esta función  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, y como  $\vec{n}_1(p)$  y  $\vec{n}_2(p)$  son vectores unitarios, se cumple que  $|h(p)| = 1$  para todo  $p \in S$ .

Dado que  $S$  es conexa, la imagen de  $h$  debe ser conexa y contenida en el conjunto  $\{-1, 1\}$ . Por tanto,  $h(p) \equiv 1$  o  $h(p) \equiv -1$  en toda la superficie. En consecuencia,  $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$  o  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$  en todo  $S$ .

### Definición 9.3.3 [Área de una Superficie]

Sea  $S$  una superficie simple regular y  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  una parametrización simple regular de  $S$ . Se define el área de  $S$  como:

$$a(S) = \int_S 1 dS = \int_D \|\vec{N}_\varphi(u, v)\| du dv$$

### Definición 9.3.4 [Integral de un Campo Vectorial sobre una Superficie]

Sean  $(S, \vec{n})$  superficie simple regular orientada y  $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo. Se define

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

### Observación 9.3.2

1.  $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$  es un campo escalar continuo en  $S$ .
2. Si  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  es una parametrización simple regular de  $S$  tal que  $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$ ,

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u, v)), \vec{n}_\varphi(u, v) \rangle \|\vec{N}_\varphi(u, v)\| du dv = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u, v)), \vec{N}_\varphi(u, v) \rangle du dv$$

### Ejemplo

Consideremos el paraboloide  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$  y lo orientamos con la normal exterior (la que apunta hacia afuera del vaso).

Sea el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 0)$ , entonces queremos encontrar la integral de  $\vec{F}$  sobre  $S$ .

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \partial D = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Consideramos la parametrización del paraboloide dada por:

$$\varphi : \overline{D} \rightarrow S \quad \varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Nos preguntamos si  $\vec{n}_\varphi$  induce la misma orientación que  $\vec{n}$ .

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{N}_\varphi(0, 0) = (0, 0, 1) \\ \varphi(0, 0) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

que apunta hacia arriba, es decir, hacia dentro del vaso, luego  $\vec{n}_\varphi = -\vec{n}$

$$\begin{aligned}
-\int_D \langle \vec{F}(\varphi(x, y)), \vec{N}_\varphi(x, y) \rangle dx dy &= -\int_D \langle (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2), 0), (-2x, -2y, 1) \rangle dx dy \\
&= \int_D 2x^2(x^2 + y^2) + 2y^2(x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_D (x^2 + y^2)^2 dx dy
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variables a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad dx dy = r dr d\theta \\
2 \int_D (x^2 + y^2)^2 dx dy = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot r dr d\theta = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[ \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{6} d\theta = 2 \frac{1}{6} (2\pi) = 2 \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

### Definición 9.3.5 [Orientación Inducida en el Borde]

Sea  $(S, \vec{n})$  una superficie simple, regular y orientada, y sea  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  una parametrización regular de  $S$  que preserva la orientación inducida por  $\vec{n}$ , es decir,  $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$ . Consideramos el borde de  $S$  denotado por  $\partial S = \varphi(\partial D)$ .

Entonces se define la orientación de  $\partial S$  inducida por  $\vec{n}$  como la que se obtiene al recorrer  $\partial D$  en sentido positivo y proyectar dicho recorrido a  $\partial S$  mediante  $\varphi$ , es decir, haciendo la composición  $\varphi \circ \gamma$ , donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$  es una parametrización de  $\partial D$  que recorre  $\partial D$  en sentido positivo.

### Observación 9.3.3

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$  es una parametrización de  $\partial D$  que recorre esta curva en sentido positivo, entonces la curva  $\varphi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \partial S$  recorre  $\partial S$  con la orientación inducida por  $\vec{n}$ .

Geométricamente, esto significa que  $\partial S$  se recorre de manera que el sacacorchos avanza en la dirección de  $\vec{n}$ , es decir, si imaginamos un sacacorchos girando en el sentido del recorrido de  $\partial S$ , este se desplazará en la dirección de  $\vec{n}$ .

De manera equivalente, si  $\vec{n}$  representa la vertical en el espacio, entonces  $\partial S$  se recorre dejando la superficie  $S$  a la izquierda, lo que coincide con la orientación inducida por  $\vec{n}$ .

### Ejemplo

Dada la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$  del ejemplo anterior, orientada con la normal exterior, y una parametrización  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, -y, x^2 + y^2)$ , donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , veamos que  $\vec{n}_\varphi = \vec{n}$ .

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & -1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, -1)$$

Haciendo la evaluación  $\vec{N}_\varphi(0, 0) = (0, 0, -1)$ , vemos que la normal de  $\varphi$  en el punto  $(0, 0)$  tiene el mismo sentido que  $\vec{n}$ , es decir,  $\vec{n}_\varphi = \vec{n}$ , luego  $\varphi$  preserva la orientación de  $S$ .

Ahora consideraremos una parametrización  $\gamma$  de  $C = \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  en sentido positivo (antihorario en el plano  $xy$ ), definida por:

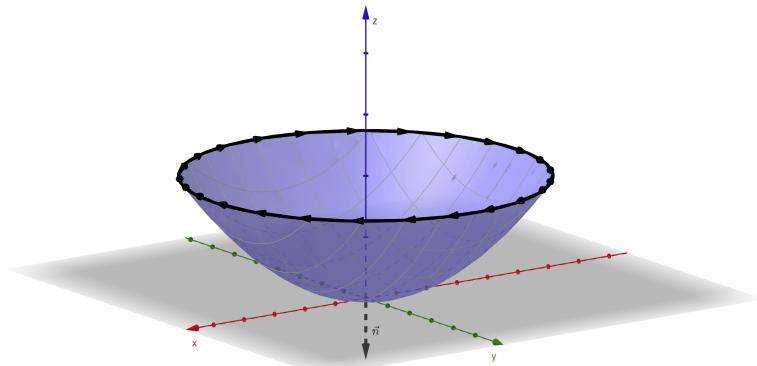
$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \partial D \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Fijémonos que la curva definida por  $\gamma$  es una curva de Jordan- $C^1$  que deja el interior de  $\partial D$  a la izquierda y el exterior a la derecha, es decir, es positiva.

Componiendo con la transformación  $\varphi$ , obtenemos la curva proyectada en  $S$ :

$$\varphi \circ \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \partial S \quad (\varphi \circ \gamma)(t) = (\cos t, -\sin t, \cos^2 t + \sin^2 t) = (\cos t, -\sin t, 1)$$

que tiene sentido horario en el plano  $xy$ , tal y como se indica en la figura



En efecto, vemos que la orientación inducida por  $\vec{n}$  en  $\partial S$  es la que se obtiene por el recorrido  $\varphi \circ \gamma$ , al ser composición de una parametrización que preserva la orientación de  $S$  y otra que recorre  $\partial D$  en sentido positivo.

Además, observamos que se cumple la regla del sacacorchos, pues si giramos el sacacorchos en el sentido del recorrido de  $\partial S$ , este se desplaza hacia abajo, es decir, en la dirección de  $\vec{n}$ .

Nótese que tomando el vector normal  $\vec{n} = (0, 0, -1)$  como referencia de eje vertical, al recorrer  $\partial S$  con  $\varphi \circ \gamma$ , la superficie  $S$  queda a la izquierda.

### Definición 9.3.6 [Orientación Compatible]

Sean  $(S_1, \vec{n}_1)$  y  $(S_2, \vec{n}_2)$  dos superficies simples y regulares de manera que  $S = S_1 + S_2$ , entonces se dice que  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  son compatibles si inducen orientaciones opuestas en  $\partial S_1 \cap \partial S_2$ .

En este caso, se dice que  $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  establece una orientación en  $\partial S$  que se llama orientación inducida por  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ .

Se dice que  $S = S_1 + S_2$  es orientable si  $S_1$  y  $S_2$  admiten orientaciones compatibles. Análogamente, de manera recursiva, si  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$  donde  $(S_i, \vec{n}_i)$  son superficies orientadas, se define  $(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k)$  como compatible si las orientaciones inducidas por  $(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{k-1})$  en  $S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1}$  y  $\vec{n}_k$  en  $S_k$  son opuestas en  $\partial(S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1}) \cap \partial S_k$ .

### Ejemplo

Consideremos el cilindro  $(S, \vec{n}) = (S_1, \vec{n}_1) + (S_2, \vec{n}_2)$  sin tapas con la orientación exterior.

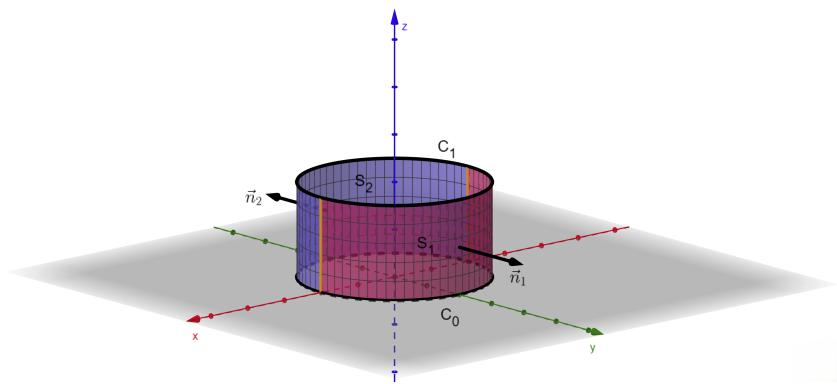
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$$

donde

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq y, z \in [0, 1]\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y \leq 0, z \in [0, 1]\}$$

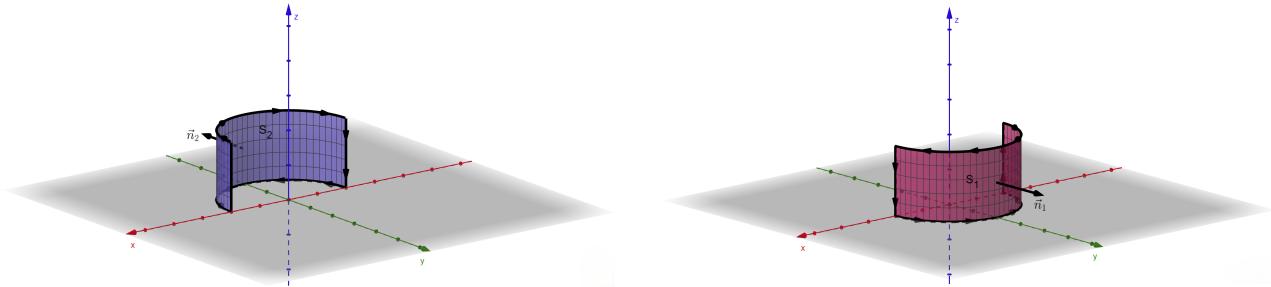
La representación gráfica de  $S$  es la siguiente:



donde  $C_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$  y  $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$  son las tapas del cilindro. En particular tenemos que  $\partial S = C_0 \cup C_1$ .

Veamos que  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  son compatibles y que, por tanto,  $S$  es orientable siendo  $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  la orientación inducida en  $S$ .

Para ello, veamos las orientaciones que inducen  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  en  $\partial S_1$  y  $\partial S_2$  respectivamente. En efecto, por la regla del sacacorchos, las orientaciones inducidas serán las descritas por las siguientes figuras:



Además en la intersección de los bordes  $\partial S_1 \cap \partial S_2$  (parte naranja de la primera figura), las orientaciones inducidas son opuestas, luego  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  son compatibles, es decir,  $S$  es orientable.

Teniendo en cuenta la orientación inducida en el borde de  $S_1$  y  $S_2$ , consideraremos dos parametrizaciones  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  de  $C_0$  y  $C_1$  respectivamente:

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \gamma_1(t) = (-\cos(t), \sin(t), 1) & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

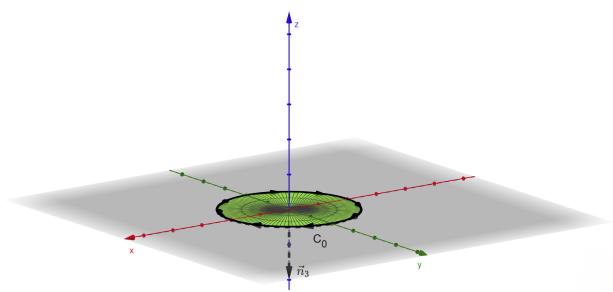
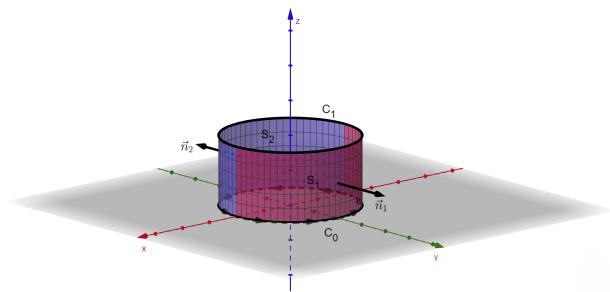
donde  $\gamma_1$  recorre negativamente  $C_1$  y  $\gamma_0$  positivamente  $C_0$ , luego  $\partial S = C_0^+ \cup C_1^-$ .

### Ejemplo

Consideramos ahora el cilindro del ejemplo anterior pero con la tapa de abajo:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$$

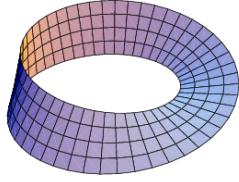
$$S = \underbrace{S_1 + S_3}_{S_0} + S_3 \text{ donde } S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$



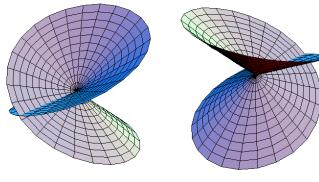
Consideramos  $\vec{n}_3$  normal hacia abajo en  $S_3$  y obtenemos que  $\vec{n}_3$  induce en  $\partial S_3 = C_0$  la orientación opuesta a la de  $S_0$ , luego son compatibles. Lo mismo podemos hacer con la tapa de arriba, y así obtenemos el cilindro completo, que es orientable con  $\partial S = \emptyset$ .

### Superficies no orientables:

1. Banda de Moebius



2. Plano proyectivo



3. Botella de Klein



### Definición 9.3.7 [Integral de Superficie Orientada Regular a Trozos]

Sea  $(S, \vec{n})$  una superficie simple, regular a trozos y orientada, es decir,  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$  donde  $(S_i, \vec{n}_i)$  son superficies simples, regulares y orientadas para  $i = 1, \dots, k$ , con  $(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k)$  orientaciones compatibles.

Sea  $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo. Se define entonces

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \sum_{i=1}^k \int_{(S_i, \vec{n}_i)} \vec{F}$$

### Ejemplo

Sea  $S = S_1 \cup S_2$ , donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, z \in [0, 1]\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

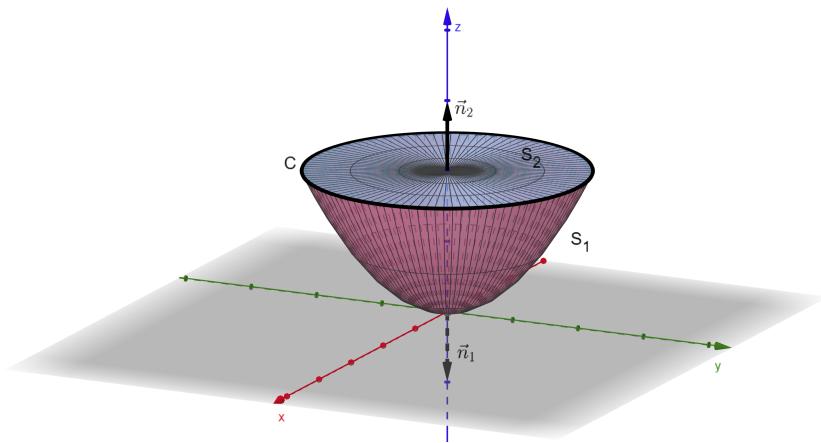
y sea  $\vec{n}$  el campo normal exterior. Consideramos el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 0)$ , y queremos calcular la integral de  $\vec{F}$  sobre la superficie  $S$ :

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Aplicando la regla del sacacorchos (regla de la mano derecha), observamos que las superficies orientadas  $(S_1, \vec{n}_1)$  y  $(S_2, \vec{n}_2)$  inducen sobre la curva

$$C = \partial S_1 \cap \partial S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

orientaciones opuestas.



Por la definición anterior de la integral de superficie orientada, tenemos que

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F}$$

Comenzamos definiendo el dominio para las parametrizaciones de  $S_1$  y  $S_2$ :

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

La parametrización de  $S_1$  es:

$$\varphi_1 : \overline{D} \rightarrow S_1, \quad \varphi_1(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

Evaluando  $\vec{N}_{\varphi_1}$  en el origen obtenemos que  $\vec{N}_{\varphi_1}(0, 0) = (0, 0, 1)$  que apunta hacia arriba, es decir, en sentido opuesto al vector normal  $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$ , luego  $\vec{n}_1 = -\vec{N}_{\varphi_1}$ .

Calculamos la integral del campo vectorial sobre la superficie  $(S_1, \vec{n}_1)$ :

$$\begin{aligned} \int_{(S, \vec{n}_1)} \vec{F} &= \int_D \langle \vec{F}(\varphi_1(x, y)), \vec{N}_{\varphi_1}(x, y) \rangle dx dy = - \int_D \langle (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2), 0), (-2x, -2y, 1) \rangle dx dy \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot r dr d\theta = 4\pi \left[ \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Para la parametrización de  $S_2$  tenemos:

$$\varphi_2 : \overline{D} \rightarrow S_2, \quad \varphi_2(x, y) = (x, y, 1)$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

Al igual que antes, evaluando  $\vec{N}_{\varphi_2}$  en el origen obtenemos que  $\vec{N}_{\varphi_2}(0, 0) = (0, 0, 1)$  que apunta hacia arriba, es decir, en el mismo sentido que el vector normal  $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ , luego  $\vec{n}_2 = \vec{N}_{\varphi_2}$ .

Procedemos a calcular la integral del campo vectorial sobre la superficie  $(S_2, \vec{n}_2)$ :

$$\int_{(S, \vec{n}_2)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{F}(\varphi_2(x, y)), \vec{N}_{\varphi_2}(x, y) \rangle dx dy = \int_D \langle (x, y, 0), (0, 0, 1) \rangle dx dy = \int_D 0 dx dy = 0$$

Por lo tanto, la integral de superficie de  $\vec{F}$  sobre  $S$  es:

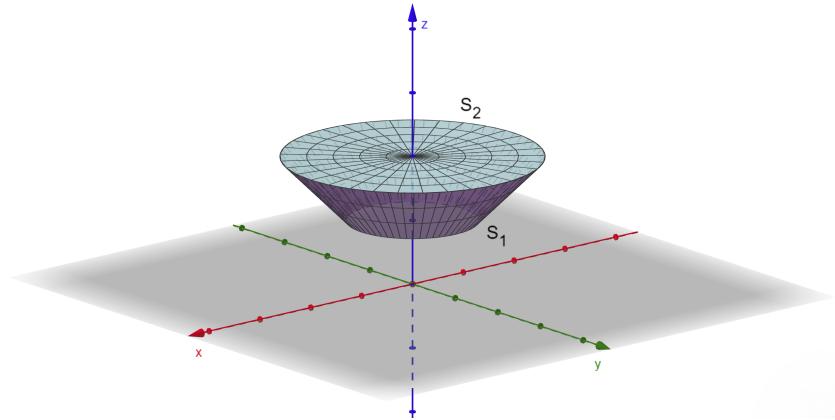
$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \frac{2\pi}{3} + 0 = \frac{2\pi}{3}$$

**Ejemplo**

Sea la superficie  $S = S_1 \cup S_2$ , donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2]\} \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

y el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$ . Queremos calcular  $\int_{(S, \vec{n})} \vec{F}$ , donde  $\vec{n}$  es la normal exterior.



Observemos que  $(S_1, \vec{n}_1)$  y  $(S_2, \vec{n}_2)$  tienen orientaciones compatibles, con lo cual  $(S, \vec{n})$  está bien orientada.

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F}$$

Comenzamos parametrizando la superficie  $S_1$  con la función  $\varphi_1 : D \rightarrow S_1$  dada por:

$$\varphi_1(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \quad \text{donde } D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z \sin(\theta) & z \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z)$$

Teniendo en cuenta la geometría de la figura y que el vector  $\vec{N}_{\varphi_1}$  apunta hacia abajo, entonces es exterior a  $S$ , luego los vectores  $\vec{n}_1$  y  $\vec{N}_{\varphi_1}$  son compatibles.

Entonces la integral de  $\vec{F}$  sobre  $S_1$  es:

$$\begin{aligned} \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} &= \int_D \langle \vec{N}_{\varphi_1}, \vec{F} \circ \varphi_1 \rangle = \int_{z=0}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \langle (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z), (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z) \rangle d\theta dz \\ &= \int_{z=1}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} z^2 + z^2 d\theta dz = 2\pi \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 dz = 4\pi \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=1}^{z=2} = 4\pi \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = 4\pi \cdot \frac{7}{3} = \frac{28\pi}{3} \end{aligned}$$

Ahora consideraremos la parametrización  $\varphi_2 : E \rightarrow S_2$  de  $S_2$  dada por:

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{donde } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

La normal  $\vec{N}_{\varphi_2}$  apunta hacia arriba, es decir, hacia el exterior de  $S$ , luego  $\vec{n}_2$  y  $\vec{N}_{\varphi_2}$  son compatibles. Entonces la integral de  $\vec{F}$  sobre  $S_2$  es:

$$\begin{aligned} \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F} &= \int_E \langle \vec{N}_{\varphi_2}, \vec{F} \circ \varphi_2 \rangle = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi} \langle (0, 0, 1), (x, y, -z) \rangle dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi} -z dy dx = -2\pi \int_{x=0}^{x=2} 2 dx = -4\pi [x]_{x=0}^{x=2} = -4\pi(2 - 0) = -8\pi \end{aligned}$$

Finalmente, la integral de  $\vec{F}$  sobre  $S$  es:

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F} = \frac{28\pi}{3} - 8\pi = \frac{28\pi}{3} - \frac{24\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

### Proposición 9.3.1

Sea  $D = \text{Int}(C)$  la parte interior de una curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  definida en un abierto  $U \supset \overline{D}$ . Consideramos la superficie  $S = G_f$ .

Para cada  $(x, y)$  en  $D$ , sea  $\theta(x, y)$  el ángulo que forma el vector normal  $\vec{n}(x, y)$  a la superficie  $S$  en el punto  $(x, y, f(x, y))$  con el vector vertical  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Entonces se tiene que:

$$a(S) = \int_D \frac{dxdy}{\cos(\theta(x, y))}$$

*Demostración.* Consideramos la parametrización  $\varphi : D \rightarrow S$  de  $S$  dada por:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases} \quad \text{donde } (x, y) \in D$$

Entonces, la normal a la superficie  $S$  es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

Haciendo el producto escalar con el vector vertical  $\vec{e}_3$ :

$$\langle \vec{N}_\varphi, \vec{e}_3 \rangle = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \cdot (0, 0, 1) = 1$$

$$\langle \vec{N}_\varphi, \vec{e}_3 \rangle = \|\vec{N}_\varphi\| \cdot \|\vec{e}_3\| \cdot \cos(\theta(x, y)) = \|\vec{N}_\varphi\| \cdot 1 \cdot \cos(\theta(x, y)) \implies \|\vec{N}_\varphi\| = \frac{1}{\cos(\theta(x, y))}$$

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dxdy = \int_D \frac{1}{\cos(\theta(x, y))} dxdy$$

□

**Observación 9.3.4**

Si  $S$  está contenida en un plado cuyo vector normal es  $\vec{n}$ , entonces tenemos que  $\theta(x, y)$  es el ángulo entre  $\vec{n}$  y el vector vertical  $\vec{e}_3$  para cada  $(x, y) \in D$ .

En este caso, la integral de superficie se puede expresar como:

$$a(S) = \int_D \frac{dxdy}{\cos(\theta(x, y))} = \frac{1}{\cos(\theta(x, y))} \text{area}(D)$$

**Ejemplo**

Sean los vectores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  no nulos, y sea  $S$  el paralelepípedo definido por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Entonces el área de la superficie  $S$  es:

$$a(S) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

En efecto, si consideramos la parametrización  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $S$  dada por:

$$\varphi(\lambda, \mu) = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad D = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$$

entonces tenemos que

$$\varphi(\lambda, \mu) = \begin{cases} x = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \times \vec{v}$$

entonces el área de la superficie  $S$  es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \|\vec{u} \times \vec{v}\| d\lambda d\mu = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\mu = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

**Observación 9.3.5**

En  $\mathbb{R}^3$ , el volumen del paralelepípedo definido por los vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  es el producto mixto:

$$V = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

## 10 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss

### 10.1 Teorema de Stokes

#### Definición 10.1.1 [Rotacional]

Sean  $A \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define el rotacional de  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  como:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

#### Observación 10.1.1

En este caso,  $\text{rot}(\vec{F})$  es un campo vectorial continuo definido en  $A$ .

#### Ejemplo

Sea  $(P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Consideramos  $A = U \times \mathbb{R}$  y el campo vectorial  $\vec{F} = (P, Q, 0)$ . Entonces el rotacional de  $\vec{F}$  es:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad \text{"la derivación del teorema de Green"}$$

#### Teorema 10.1.1 [Teorema de Stokes]

Sea  $(S, \vec{n})$  una superficie orientada y regular a trozos, y sea  $\vec{F}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset S$ . Entonces se cumple la siguiente igualdad:

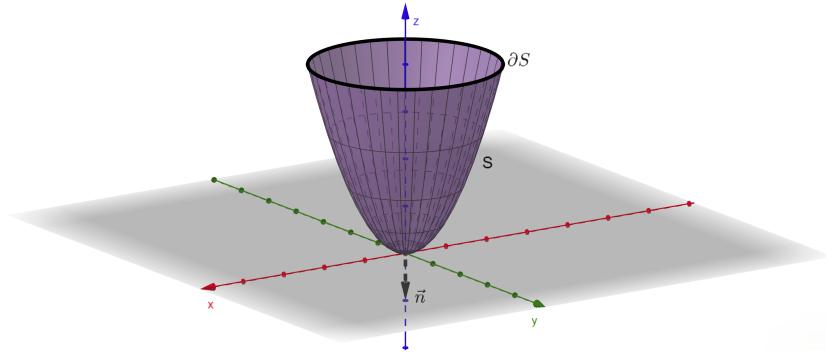
$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F}$$

donde  $\partial S$  tiene la orientación inducida por  $\vec{n}$ .

#### Ejemplo

Sea la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$  con la norma exterior  $\vec{n}$  y el campo vectorial  $\vec{F} = (yz, -xz, z)$ . Verificamos el teorema de Stokes.

Tenemos que  $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 = 4\}$ , que es una circunferencia de radio 2 en el plano  $z = 4$ . Fijémonos que  $\vec{n}$  induce la orientación negativa en la curva  $C^- = \partial S$ .



El rotacional de  $\vec{F}$  es:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Consideramos la parametrización natural  $\varphi : D \rightarrow S$  de  $S$  dada por:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{donde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Entonces la normal a la superficie  $S$  es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

La normal  $\vec{N}_\varphi$  apunta hacia arriba en el punto  $(0, 0, 0)$ , luego tenemos una normal interior.

- Calculamos el rotacional de  $\vec{F}$  en  $S$  por medio de la parametrización  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \int_{(S, \vec{n})} rot(\vec{F}) &= - \int_D \langle \vec{N}_\varphi, rot(\vec{F}) \circ \varphi(x, y) \rangle dx dy = - \int_D \langle (-2x, -2y, 1), (x, y, -2(x^2 + y^2)) \rangle dx dy \\ &= \int_D 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 dx dy = \int_D 4(x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= 4 \cdot 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 4 \cdot 2\pi \cdot 4 = 32\pi \end{aligned}$$

- Consideramos la parametrización positiva  $\gamma$  de la curva  $\partial S$  dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

y calculamos la integral de línea del campo  $\vec{F}$  sobre la curva  $\partial S$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{C^-} \vec{F} = - \int_{\gamma} \vec{F} = - \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= - \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (8 \sin(t), -8 \cos(t), 4), (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} 16 dt = 16 [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 16(2\pi - 0) = 32\pi \end{aligned}$$

En efecto, vemos que las integrales coinciden de acuerdo al teorema de Stokes.

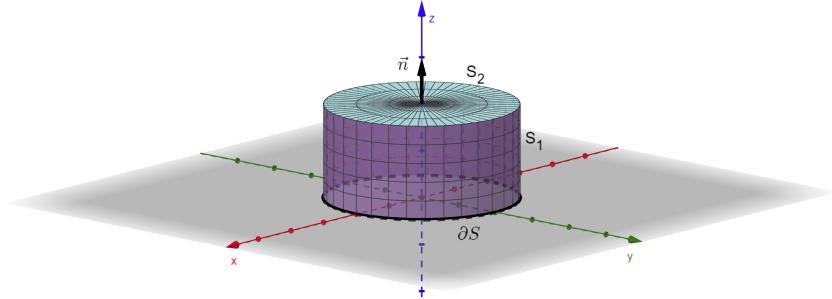
**Ejemplo**

Sea  $S = S_1 \cup S_2$ , donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 2]\} \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con la norma exterior  $\vec{n}$  y el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ . El borde de  $S$  es:

$$\partial S = C_0^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$



Calculamos el rotacional del campo  $\vec{F}$ :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 1) = (0, 0, 0)$$

Consideramos la parametrización  $\gamma$  de la curva  $C_0$  dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

que tiene orientacion positiva. Además,  $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ .

- Calculamos la integral del campo  $\text{rot}(\vec{F})$  sobre la superficie  $S$ :

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{0} = 0$$

- Hacemos la integral de línea del campo  $\vec{F}$  sobre la curva  $C_0^+$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (\sin(t), \cos(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) - \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos(2t) dt = \left[ \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Vemos que el teorema de Stokes se cumple, ya que las integrales son iguales.

**Ejemplo**

Consideramos el campo vectorial  $\vec{F} = (yz, -xz, z)$ . Veamos el rotacional de  $\vec{F}$ :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Supongamos que tenemos una superficie  $S$  cualesquiera cuyo borde  $\partial S$  sea la curva  $C_0^+$  del ejemplo anterior. Entonces tenemos que:

$$\int_{(S,\vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (0, 0, 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt = 0$$

### Observación 10.1.2

*Si  $S$  es una superficie cerrada, es decir,  $\partial S = \emptyset$ , entonces se tiene que:*

$$\int_{(S,\vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F} = 0$$

## 10.2 Geometria del Rotacional

### Ejemplo

Sea  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  el campo de velocidades de un fluido en  $\mathbb{R}^2$ . Las trayectorias son curvas  $\gamma : I \rightarrow U$  con  $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ .

### Ejemplo

Sean  $U \subset \mathbb{R}^3$  abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ .

Consideremos  $p \in U$  y  $r > 0$ , siendo  $D_r$  el circulo de centro  $p$  y radio  $r$ , con frontera  $C_r = \partial D_r$ .

Sea  $\vec{u}$  un vector unitario de  $\mathbb{R}^3$  perpendicular al plano que contiene a  $D_r$ , entonces:

$$\langle \text{rot}(\vec{F})(p), \vec{u} \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r^+} \vec{F}$$

Donde  $C_r^+$  denota a  $C_r$  con la orientación comparativa a la de  $\vec{u}$ , y donde esta igualdad representa la "circulación por unidad de área" del campo  $\vec{F}$ .

*Demostración.*

$$\int_{C_r^+} \vec{F} = \int_{(D_r, \vec{n})} \text{rot} \vec{F} = \int_{D_r} \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle = \int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle + \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle$$

De donde pasamos a:

$$\int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \text{constante} = \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \cdot \text{área}(D_r)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < r < \delta \implies \|\text{rot} \vec{F}(x, y, z) - \text{rot} \vec{F}(p)\| < \varepsilon \quad \forall (x, y, z) \in D_r \implies \\ \implies \left| \int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} |\langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle| \leq \int_{D_r} \|\text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p)\| \leq \varepsilon \cdot \text{área}(D_r) \end{aligned}$$

Luego:

$$\left| \frac{1}{\text{área}(D_r)} \int_{C_r^+} \vec{F} - \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| < \varepsilon \quad \forall 0 < r < \delta$$

□

**Definición 10.2.1**

Sean  $A \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se dice que  $\vec{F}$  es irrotacional en  $A$  si  $\text{rot}(\vec{F}) \equiv 0$  en  $A$ .

**Lema 10.2.1**

Si  $\vec{F}$  es un campo de clase  $C^1$ , y es conservativo en  $A \implies$  es irrotacional en  $A$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $\vec{F} = \nabla\varphi$ , es decir,  $\vec{F} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$ , entonces  $\varphi$  es de clase  $C^2$  en  $A$  y, aplicando el teorema de Schwarz, tenemos que:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \right) = (0, 0, 0)$$

□

**Teorema 10.2.1**

Sea  $U \subset \mathbb{R}^3$  un abierto conexo, y sea  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $\vec{F}$  es conservativo en  $U$ .
2.  $\int_{\sigma} \vec{F} = 0, \forall \sigma$  camino triangular en  $U$ .
3.  $\vec{F}$  es irrotacional en  $U$ , es decir,  $\text{rot}(\vec{F}) \equiv 0$  en  $U$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Ya está probado por la caracterización de los campos conservativos.
- (2)  $\implies$  (1): Fijamos un punto  $P \in U$  y consideramos para cada  $x \in U$  la función

$$\varphi(x) = \int_{[P,x]} \vec{F}$$

Veamos que  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ . Para ello, veamos que  $F_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \forall i = 1, 2, 3$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \underbrace{\int_{[P,x+h\vec{e}_i]} \vec{F}}_{\varphi(x+h\vec{e}_i)} - \underbrace{\int_{[P,x]} \vec{F}}_{\varphi(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x))$$

Por (2), tenemos que el triángulo  $T$  de vértices  $P, x$  y  $x + h\vec{e}_i$  es tal que

$$\int_{[P,x]+[x,x+h\vec{e}_i]+[x+h\vec{e}_i,P]} \vec{F} = 0$$

Luego se sigue entonces que:

$$\int_{[P,x+h\vec{e}_i]} \vec{F} - \int_{[P,x]} \vec{F} = \int_{[x,x+h\vec{e}_i]} \vec{F}$$

por tanto

$$\frac{1}{h} \int_{[x,x+h\vec{e}_i]} \vec{F} = \frac{1}{h} \int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(x + t h \vec{e}_i), h \vec{e}_i \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \vec{F}_i(x + t h \vec{e}_i) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \vec{F}_i(x)$$

donde  $\gamma(t) = x + t h \vec{e}_i$  con  $t \in [0, 1]$ . Así obtenemos que (1)  $\iff$  (2).

- (3)  $\implies$  (2): Sea  $T \subset U$  un triángulo, y sea  $\sigma = \partial T$ :

$$\int_{\sigma} \vec{F} = \int_{(T,\vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = 0$$

□

### Ejemplo

Es importante que  $U$  sea convexo:

Seam  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}$  y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo vectorial dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) = (P, Q, 0)$$

Así tenemos el siguiente rotacional

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$$

El campo  $\vec{F}$  es por tanto irrotacional en  $U$ , pero  $\vec{F}$  no es conservativo. Consideremos la curva cerrada  $\gamma$  dada por:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\langle \left( \frac{-\sin(t)}{1}, \frac{\cos(t)}{1}, 0 \right), (-\sin(t), \cos(t), 0) \right\rangle dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

Demostrando así que  $\vec{F}$  no es conservativo.

### Ejemplo

El ejercicio de Nash:

Encontrar  $X \subset \mathbb{R}^3$  tal que si denotamos por

$$V = \{ \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo } C^1 \mid \text{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \}$$

$$W = \{ \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo } C^1 \mid \vec{F} = \nabla g \text{ para algún } g \}$$

obtengamos que  $\dim(V \setminus W) = 8$ .

Sean  $U \subset \mathbb{R}^3$  un abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Recordamos que se definía la divergencia de  $\vec{F}$  como:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \text{donde} \quad \vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

**Teorema 10.2.2** [Teorema de la Divergencia de Gauss]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y acotado, y denotamos el sólido  $V = \overline{A}$ . Supongamos que  $\partial V = S$  es una superficie cerrada, simple, regular-a-trozos y orientada con la normal exterior  $\vec{n}$  a  $V$ .

Sea  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ , definido en un conjunto abierto  $U \supset V$ . Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}) = \int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(\partial V, \vec{n})} \vec{F}$$

Demostración. Para dominios proyectables:

Supongamos que  $V$  es z-proyectable, es decir,  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, h(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$ , donde  $\overline{D} = D \cup C$  como en el teorema de Green, y  $h, g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones de clase  $C^1$ .

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}) = \int_V \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

siendo  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ . Veamos que

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}) = \int_{\partial V} \vec{F} = \int_{\partial V} (F_1, 0, 0) + \int_{\partial V} (0, F_2, 0) + \int_{\partial V} (0, 0, F_3)$$

Para ellos probaremos que  $\int_V \frac{\partial F_3}{\partial z} = \int_{\partial V} (0, 0, F_3)$ . Suponiendo que  $V$  es además x-proyectable e y-proyectable, obtendremos los resultados análogos para las integrales de  $F_1$  y  $F_2$ .

$\partial V = S_0 \cup S_g \cup S_h$  donde se definen las siguientes superficies:

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial D, h(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

$$S_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = g(x, y)\}$$

$$S_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = h(x, y)\}$$

Considerando las parametrizaciones naturales  $\varphi_g$  y  $\varphi_h$  de  $S_g$  y  $S_h$ , respectivamente, tenemos que:

$$\varphi_g(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = g(x, y) \end{cases} \quad \varphi_h(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = h(x, y) \end{cases}$$

Entonces la normal a la superficie  $S_g$  es:

$$\vec{N}_g = \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_g}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right)$$

que es la norma exterior, pues  $\vec{N}_g$  apunta hacia arriba y la superficie  $S_g$  es la parte superior de  $V$ . Por tanto, la orientación es positiva.

En el caso de  $S_h$ , tenemos que la normal es:

$$\vec{N}_h = \frac{\partial \varphi_h}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_h}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right)$$

que es la norma interior, pues  $\vec{N}_h$  apunta hacia arriba también, pero al ser  $S_h$  la parte inferior de  $V$ , el vector es interior. Por tanto, la orientación es negativa.

En  $S_0$ , el vector normal  $\vec{n}_0 = (n_1, n_2, 0)$  es perpendicular al vector  $(0, 0, 1)$ , y por tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{(S_0, \vec{n}_0)} (0, 0, F_3) &= \int_{S_0} \langle (0, 0, F_3), (n_1, n_2, 0) \rangle = \int_{S_0} 0 = 0 \\ \int_{(\partial V, \vec{n}_0)} (0, 0, F_3) &= \underbrace{\int_{(S_0, \vec{n}_0)} (0, 0, F_3)}_0 + \int_{(S_g, \vec{n}_g)} (0, 0, F_3) + \int_{(S_h, \vec{n}_h)} (0, 0, F_3) \\ &= \int_D \vec{F}_3(x, y, g(x, y)) - \vec{F}_3(x, y, h(x, y)) dx dy\end{aligned}$$

por el teorema de Fubini tenemos

$$= \int_D [F_3(x, y, z)]_{z=h(x, y)}^{z=g(x, y)} dx dy = \int_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dz dy dx$$

□

### Observación 10.2.1

Aquí,  $\partial V = S = Fr(V)$  es la frontera topológica de  $V$ .

### Ejemplo

Verificar el teorema para el siguiente dominio:

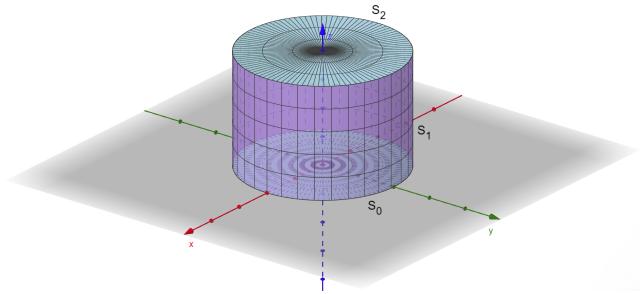
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 2]\}$$

y el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z)$ . Entonces vemos que la frontera de  $V$  viene dada por  $\partial V = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ , donde:

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 2]\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 2\}$$



Entonces se tiene que  $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y^2 + x^2 + 1$ .

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div}(\vec{F}) &= \int_V (y^2 + x^2 + 1) dx dy dz = \int_{z=0}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r(r^2 + 1) dr d\theta dz \\ &= 4\pi \int_{r=0}^{r=1} r^3 + r dr = 4\pi \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} = 4\pi \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = 4\pi \cdot \frac{3}{4} = 3\pi\end{aligned}$$

- 

$$\int_{(\partial V, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_0, \vec{n}_0)} \vec{F} + \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F}$$

$$S_1 \rightarrow \varphi_1(x, y) = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \text{donde } \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]$$

siendo  $D = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]\}$ . Entonces:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

que es una orientacion positiva, luego se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} &= \int_D \langle \vec{F}(\varphi_1(x, y)), \vec{N}_{\varphi_1} \rangle dx dy \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=2} \langle (\cos(\theta) \sin^2(\theta), \cos^2(\theta) \sin(\theta), z), (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \rangle dz d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=2} 2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) dz d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos^2(\theta) (1 - \cos^2(\theta)) d\theta = \pi \\ S_0 \rightarrow \varphi_0(x, y) &= \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{donde } x^2 + y^2 \leq 1 \end{aligned}$$

siendo  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Entonces:

$$\vec{N}_{\varphi_0} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

que es una orientacion negativa, luego se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{(S_0, \vec{n}_0)} \vec{F} &= - \int_E \langle \vec{F}(\varphi_0(x, y)), \vec{N}_{\varphi_0} \rangle dx dy = - \int_E \langle (xy^2, x^2y, 0), (0, 0, 1) \rangle dx dy = 0 \\ S_2 \rightarrow \varphi_2(x, y) &= \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{donde } x^2 + y^2 \leq 1 \end{aligned}$$

siendo  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Entonces:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

que es una orientacion positiva, luego se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F} &= \int_E \langle \vec{F}(\varphi_2(x, y)), \vec{N}_{\varphi_2} \rangle dx dy = \int_E \langle (xy^2, x^2y, 2), (0, 0, 1) \rangle dx dy \\ &= 2 \int_E dx dy = 2 \text{area}(E) = 2 \cdot \pi \end{aligned}$$

- Entonces, sumando las integrales:

$$\int_{(S_0, \vec{n}_0)} \vec{F} + \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F} = 0 + \pi + 2\pi = 3\pi$$

Vemos que las integrales coinciden, por lo que se cumple el teorema de la divergencia de Gauss.

**Teorema 10.2.3** [Teorema de la Divergencia de Gauss]

Sea  $V \subset \mathbb{R}^3$  un sólido cuya frontera  $S = \partial V$  es una superficie simple regular a trozos, que está orientada con la normal exterior  $\vec{n}$  a  $V$ .

Sea  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ , definido en un conjunto abierto  $U \supset V \cup S$ . Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}) = \int_{(S, \vec{n})} \vec{F}$$

Geometría de la Divergencia:

**Corolario 10.2.1**

En las condiciones anteriores, para cada  $p \in U$  sea  $B_r(p)$  la bola de radio  $r$  centrada en  $p$  y denotamos  $S_r(p) = \partial B_r(p)$  la esfera correspondiente orientada con la normal exterior  $\vec{n}$  a  $B_r(p)$ . En este caso, se cumple que:

$$\operatorname{div}(\vec{F})(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B_r(p))} \int_{(S_r(p), \vec{n})} \vec{F}$$

*Demostración.* Denotamos  $f = \operatorname{div}(\vec{F}) : U \rightarrow \mathbb{R}$  que es una función continua en  $U$ .

Entonces  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < r < \delta$  se cumple que:

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon \quad \forall x \in B_r(p)$$

Entonces, por el teorema de la divergencia de Gauss, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| f(p) - \frac{1}{m(B_r(p))} \int_{(S_r(p), \vec{n})} \vec{F} \right| &= \left| f(p) - \frac{1}{m(B_r(p))} \int_{(S_r(p), \vec{n})} f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{m(B_r(p))} \left( \int_{B_r(p)} f(p) - \int_{(S_r(p), \vec{n})} f(x) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{m(B_r(p))} \left| \int_{B_r(p)} |f(p) - f(x)| \right| \leq \frac{1}{m(B_r(p))} m(B_r(p)) \cdot \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Observación 10.2.2**

Si  $\operatorname{div}(\vec{F})(p) = 0$  para todo  $p \in U$ , entonces se dice que  $\vec{F}$  es incompresible en  $U$ .

**Observación 10.2.3**

Sea  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Entonces se cumple que:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) \equiv 0 \quad \text{en } U$$

Demostración.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{F})) = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \equiv 0$$

por ser  $\vec{F}$  de clase  $C^2$ . □

#### Observación 10.2.4

Si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^2$ , entonces se cumple que:

$$\text{rot}(\nabla \varphi) \equiv 0 \quad \text{en } U$$

#### Observación 10.2.5

Si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^2$ , entonces se cumple que:

$$\text{div}(\nabla \varphi) = \text{div}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi$$

que es el operador Laplaciano.

#### Ejemplo

Dada la función  $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2 - 3x + 1$  y el campo vectorial  $\vec{F} = (e^{-xy}, z \sin(y), x^2 - z^2 + y^2)$  y el sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 4z - 3\}$$

Queremos calcular

$$\int_{\partial V} \nabla f + \text{rot}(\vec{F})$$

De la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4z - 3$  analizamos el borde  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ .

$$V = S_0 \cup S_1 \cup S_2$$

$$\int_{\partial V} \vec{G} = \int_V \text{div}(\vec{G}) \text{ donde } \vec{G} = \nabla f + \text{rot}(\vec{F})$$

$$\text{div}(\vec{G}) = \text{div}(\nabla f) + \text{div}(\text{rot}(\vec{F})) = \Delta f + 0 = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 + 0 + 2 = 4$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \vec{G} &= \int_V \text{div}(\vec{G}) = \int_V 4 = 4 \cdot \text{vol}(V) \\ \text{vol}(V) &= \text{vol}(V_1) - \text{vol}(V_2) \end{aligned}$$

donde  $V_1$  es el volumen del parabolóide y  $V_2$  es el volumen de la esfera.

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 3 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$\text{vol}(V_1) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=2} \int_{r=0}^{r=\sqrt{3-z}} r dr dz d\theta = 2\pi \int_{z=0}^{z=2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{3-z}} dz = 2\pi \int_{z=0}^{z=2} \frac{3-z}{2} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left[ 3z - \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2} = \pi (6 - 2) = 4\pi \\
vol(V_2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{2\pi}{3} \\
\int_{\partial V} \vec{G} &= 4 \cdot (vol(V_1) - vol(V_2)) = 4 \left( 4\pi - \frac{2\pi}{3} \right)
\end{aligned}$$

**Ejemplo**

Hoja 6, Ejercicio 9

Sean:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$$

$$C = \partial S$$

Calculemos primero el area de  $S$ :

$$S \rightarrow \varphi \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \quad (x, y) \in D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, y \geq 0\}$$

Por tanto, la normal es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

Cuyo modulo vale:

$$\|\vec{N}_\varphi\| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

Asi el area de  $S$  es:

$$\begin{aligned}
\text{área}(S) &= \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dx dy = \int D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} \int_{r=0}^{r=1} 8r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{8} \frac{2}{3} \left[ (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{24} \left( 5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{\pi}{24} (5\sqrt{5} - 1)
\end{aligned}$$

Ahora calculemos el volumen de  $V$ , pasando a coordenadas cilindricas:

$$V \rightarrow \varphi \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad V \equiv \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - r^2; \quad 0 \leq r \leq 1; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}, \quad J = r$$

$$\text{vol}(V) = \int_V 1 dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=1} \int_{z=0}^{z=1-r^2} r dz dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{r=1} r(1 - r^2) dr = \frac{\pi}{8}$$

De otra forma, reordenando las integrales:

$$\text{vol}(V) = \int_{z=0}^{z=1} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=\sqrt{1-z}} r dr d\theta dz = \frac{\pi}{8}$$

Ahora definamos el siguiente campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = (1 - 2z, 0, 2y)$$

Y entonces calculemos la integral en el borde de  $S$ , el cual es:

$$\partial S = C_0 + C_1 + C_2$$

Vamos a aplicar el teorema de Stokes, por lo que tenemos que calcular el rotacional de  $\vec{F}$ :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 - 2z & 0 & 2y \end{vmatrix} = (2, -2, 0)$$

Notese que el campo es constante, y que la normal que obtubimos antes es exterior, por lo que podemos tomar  $\partial S$  en sentido antihorario.

Entonces calculemos la integral de  $\vec{F}$  el borde  $\partial S$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} = \int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) &= \int_{(S, \vec{n})} \langle \text{rot}(\vec{F}), \vec{N} \varphi \rangle = \int D \langle (2, -2, 0), (2x, 2y, 1) \rangle dx dy = \int_D (4x - 4y) dx dy = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=1} r^2 (4 \cos(\theta) - 4 \sin(\theta)) dr d\theta = \left( \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) - \sin(\theta) d\theta \right) \cdot \left( \int_{r=0}^{r=1} 4r^2 dr \right) = \\ &= [\sin(\theta) + \cos(\theta)] \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \frac{4r^3}{3} \right] \Big|_{r=0}^{r=1} = 0 \end{aligned}$$

### Ejemplo

Hoja 6, Ejercicio 10

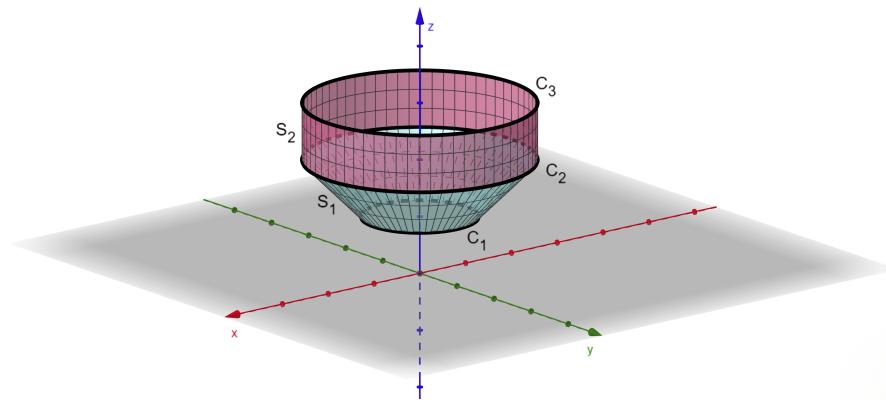
Sean las siguientes superficies, y el siguiente campo vectorial:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2; \quad 1 \leq z \leq 2\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4; \quad 2 \leq z \leq 3\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \quad S_1 \cap S_2 = \partial S_1 \cap \partial S_2 = C_2 \quad \partial S = \partial S_1 \Delta \partial S_2 = C_1 \cup C_3$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, x + y + z)$$



Primero calculemos las parametrizaciones de las superficies, comprobemos que inducen orientaciones compatibles, y calculemos la orientación en el borde:

$$S_1 \rightarrow \varphi_1(\theta, z) = \begin{cases} x = z \cos(\theta) \\ y = z \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} 1 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right) \equiv D$$

Donde su normal es:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z \sin(\theta) & z \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z)$$

Siendo esta una normal exterior, al ser  $z$  negativo, y  $x, y$  iguales a los del propio punto, por lo que el vector va hacia afuera.

Ahora vayamos a  $S_2$ :

$$S_2 \rightarrow \varphi_2(\theta, z) = \begin{cases} x = 2 \cos(\theta) \\ y = 2 \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \left( \begin{array}{c} 2 \leq z \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right) \equiv E$$

Donde su normal es:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 \sin(\theta) & 2 \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 0)$$

Siendo esta una normal exterior, como se aprecia ya que  $x, y$  mantienen el mismo signo que el punto, y  $z$  es 0.

Por tanto son compatibles.

Notese que el cilindro  $S_2$  induce en  $\partial S_1 \cap \partial S_2$  una horientacion antihoraria, y el cono  $S_1$  induce una orientacion horaria, es decir, inducen orientaciones opuestas, lo cual confirma que son compatibles. Tenemos ahora que el borde se descompone en  $\partial S = C_1^+ \cup C_3^-$ , donde  $C_1^+$  es la parte inferior del cono, y  $C_3^+$  es la parte superior del cilindro, con orientaciones antihoraria y horaria respectivamente.

Ahora calculemos el rotacional de  $\vec{F}$ :

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & x + y + z \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$$

Por loq que la integral de  $rot(\vec{F})$  en la superficie  $S$  es:

$$\int_{(S, \vec{n})} rot(\vec{F})$$

Separaremos la integral en dos partes en  $S_1$  y  $S_2$ :

$$\begin{aligned} \int_{(S_1, \vec{n})} rot(\vec{F}) &= \int_{(D, \vec{N}_{\varphi_1})} \langle rot(\vec{F}) \circ \varphi_1, \vec{N}_{\varphi_1} \rangle = \int_D \langle (1, -1, -2), (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z) \rangle = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z(\cos(\theta) - \sin(\theta) + 2) dz d\theta = 6\pi \\ \int_{(S_2, \vec{n})} rot(\vec{F}) &= \int_{(E, \vec{N}_{\varphi_2})} \langle rot(\vec{F}) \circ \varphi_2, \vec{N}_{\varphi_2} \rangle = \int_E \langle (1, -1, -2), (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 0) \rangle = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=2}^{z=3} (2 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta)) dz d\theta = 0 \end{aligned}$$

Asi finalmente tenemos que:

$$\int_{(S, \vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{(S_1, \vec{n})} rot(\vec{F}) + \int_{(S_2, \vec{n})} rot(\vec{F}) = 6\pi + 0 = 6\pi$$

Finalmente calculemos la integral usando el teorema de Stokes:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F}$$

Para ello parametricemos los caminos, con las siguientes funciones:

$$C_1^+ \rightarrow \gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 1), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \gamma'_1(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$C_3^+ \rightarrow \gamma_3(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 3), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \gamma'_3(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 0)$$

Notese que hemos parametrizado  $C_3$  en sentido positivo, es decir, en sentido antihorario, cuando en  $\partial S$  es en sentido horario, por lo que la integral de  $C_3$  es negativa.

Ahora si calculemos ambas integrales:

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{F} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma_1(t)), \gamma'_1(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (\sin(t), -\cos(t), 1 + \sin(t) + \cos(t)), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt = \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} -\sin^2(t) - \cos^2(t) = -2\pi \\ \int_{C_3^+} \vec{F} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma_3(t)), \gamma'_3(t) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (2\sin(t), -2\cos(t), 3 + 2\sin(t) + 2\cos(t)), (-2\sin(t), 2\cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} -4\sin^2(t) - 4\cos^2(t) = -4 \int_{t=0}^{t=2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t) dt = -8\pi \end{aligned}$$

Y asi finalmente tenemos que, como hemos calculado la integral de  $C_3^+$  que es opuesta a la de  $C_3^-$ , la cual es la que nos interesa:

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_{C_1^+} \vec{F} - \int_{C_3^+} \vec{F} = -2\pi - (-8\pi) = 6\pi$$