# Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
*Ciencias Matemáticas e*
*Ingeniería Informática*

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

# Contents

**1 Superficies Paramétricas** . . . . . . . . . . **2**
1.1 Superficies como Conjuntos . . . . . . . . . . 5
1.2 Superficies Regulares a Trozos . . . . . . . . . . 7
1.3 Orientación de Superficies . . . . . . . . . . 8

# 1 Superficies Paramétricas

**Definición 1.0.1** [Superficie Paramétrica]

*Una parametrización de una superficie paramétrica $S$ en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase $C^1$ definida en un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que:*

$$Im(\varphi) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in U\} = S$$

*Diremos que la parametrización $\varphi$ es regular cuando la pareja de vectores $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\}$ es linealmente independiente en todo punto de $U$. Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a $\varphi$ es no nulo en todo punto de $U$:*

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$$

*En este caso, el plano tangente a la superficie en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ tiene como ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = \varphi_2(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z = \varphi_3(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo**

Dada la superficie $z = x^2 + y^2$, podemos parametrizarla con $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2x\vec{e}_3 + 2y\vec{e}_2 \neq (0, 0, 0)$$

**Ejemplo**

Superficies explícitas: Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$. Entonces la gráfica de $f$ es una superficie regular con parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$.
Veamos que $\vec{N}_\varphi \neq (0, 0, 0)$:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_3 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_2 \neq (0, 0, 0)$$

$$Im(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

**Ejemplo**

Dado el cilindro de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1$, buscamos una parametrización de la superficie. Tomando la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, 1)$$

entonces vemos que $\underbrace{x^2 + y^2}_{1} = r^2 \implies r = 1$.

Por tanto, obtenemos que nuestra parametrización es:

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \neq (0,0,0)$$

**Ejemplo**

Tomando el cilindro $x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1$ del ejemplo anterior, podemos parametrizarlo de otra forma.
Consideramos el siguiente conjunto:

$$U = \{(u,v) : 1 < \sqrt{u^2 + v^2} < 2, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

entonces definimos nuestra parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ sobre este conjunto tal que

$$\varphi(u,v) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sqrt{u^2+v^2} - 1 \right)$$

**Definición 1.0.2** [Superficies Equivalentes]

*Diremos que dos superficies paramétricas $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^3$, definidas respectivamente sobre los conjuntos abiertos conexos $U, V \subset \mathbb{R}^2$, son equivalentes si existe una aplicación biyectiva $h : V \to U$ de clase $C^1$ (es decir, un difeomorfismo) tal que:*

$$\psi = \varphi \circ h.$$

**Observación 1.0.1**

1. *En este caso $\varphi(U) = \psi(V)$.*
2. *En la definición se pide que los conjuntos $U$ y $V$ sean conexos. Como $\forall (s,t) \in V$, $D_h(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo lineal, sabemos que $det(D_h(s,t)) \neq 0$. Por conexión, $det(D_h(s,t))$ conserva el signo en todo $V$.*

**Definición 1.0.3** [Conservación de la Orientación]

1. *Se dice que $h$ conserva la orientación si $det(D_h(s,t)) > 0$ para todo $(s,t) \in V$, es decir las funciones $\varphi$ y $\psi$ tienen la misma orientación.*
2. *Se dice que $h$ cambia la orientación si $det(D_h(s,t)) < 0$ para todo $(s,t) \in V$, es decir las funciones $\varphi$ y $\psi$ tienen orientaciones opuestas.*

**Lema 1.0.1**

*Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones equivalentes de una superficie $S$. Entonces,* *para todo $(s,t) \in V$, se cumple que:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = det(D_h(s,t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(s,t))$$

*Equivalentemente,*

$$\vec{N}_\psi(s,t) = det(D_h(s,t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s,t))$$

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena a $\psi = \varphi \circ h$, obtenemos la siguiente relación entre las matrices jacobianas:

$$D_\psi(s,t) = D_\varphi(h(s,t)) \cdot D_h(s,t).$$

En términos de las derivadas parciales, esto se traduce en:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial t},$$

donde $h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$.

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial como:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \cdot D_h(s,t),$$

donde $D_h(s,t)$ es la matriz jacobiana de $h$:

$$D_h(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos el producto vectorial de las derivadas parciales de $\psi$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Utilizando las expresiones anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial t}\right).$$

Expandiendo el producto vectorial y usando que $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right).$$

Notamos que el término entre paréntesis a la derecha es el determinante de la matriz jacobiana $D_h(s,t)$:

$$\det(D_h(s,t)) = \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)(h(s,t)).$$

Equivalentemente, para los vectores normales unitarios:

$$\vec{N}_\psi(s,t) = \det(D_h(s,t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s,t)),$$

donde $\vec{N}_\psi$ y $\vec{N}_\varphi$ son los vectores normales unitarios asociados a las parametrizaciones $\psi$ y $\varphi$, respectivamente. $\square$

**Definición 1.0.4** [Orientación de una Superficie]

*Asociadas a las parametrizaciones $\varphi$ y $\psi$ obtenemos lso vectores normales unitarios*

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{N}_\varphi}{||\vec{N}_\varphi||} \quad y \quad \vec{n}_\psi = \frac{\vec{N}_\psi}{||\vec{N}_\psi||}$$

*Entonces diremos que $\varphi$ y $\psi$ tienen la misma orientación si:*

$$\vec{n}_\psi(s,t) = \vec{n}_\varphi(h(s,t)) \ o \ \vec{n}_\psi(s,t) = -\vec{n}_\varphi(h(s,t))$$

## 1.1 Superficies como Conjuntos

**Definición 1.1.1** [Superficie Simple Regular]

*Diremos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie simple regular si $S = \varphi(\overline{D})$ donde $D = Int(C)$ siendo $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase $C^1$ inyectiva y regular en $\overline{D} \subset U$.*
*En este caso, el borde de $S$ de define como $\partial S = \varphi(C)$, que es una curva cerrada y regular a trozos en $\mathbb{R}^3$.*

**Definición 1.1.2** [Superficie Casi-Simple Regular]

*Diremos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie casi-simple regular si $S = \varphi(\overline{D})$ donde $D = Int(C)$ siendo $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase $C^1$ inyectiva y regular en $D$.*

**Definición 1.1.3** [Área e Integral de una Superficie]

*Dada una superficie $S$ en $\mathbb{R}^3$ simple regular o casi-simple regular, y una parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase $C^1$ de $S$, definimos:*

1. *El área de la superficie $S$ como:*

$$a(S) = \int_S 1 dS = \int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv$$

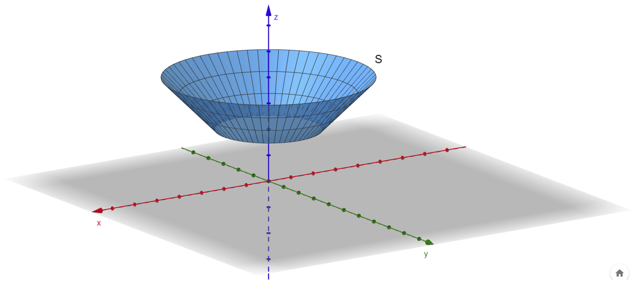
2. *Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral de superficie de $f$ sobre $S$ es:*

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_D f(\varphi(u,v)) \|\vec{N}_\varphi\| dudv$$

**Ejemplo**

Consideramos la superficie $S$ de $\mathbb{R}^3$ resultante de acotar un cono por los planos $z = 1$ y $z = 2$.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, \ 1 < z < 2\}$$



Calculemos el área de la superficie $S$:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \qquad r^2 = x^2 + y^2 = z^2 \implies r = z \qquad \varphi(\theta, z) = \begin{cases} x = z\cos(\theta) \\ y = z\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\overline{D} = [0, 2\pi] \times [1, 2] \qquad S = \varphi(D)$$

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z\sin(\theta) & z\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = z^2\cos^2(\theta) + z^2\sin^2(\theta) + (-z)^2 = 2z^2 \implies \|\vec{N}_\varphi\| = z\sqrt{2} \neq 0 \quad \forall (0, z) \in D$$

Entonces $\varphi$ es inyectiva y regular en $D$ (aunque no en $\overline{D}$), luego $S$ es una superficie casi-simple regular.
Por último, el área de la superficie $S$ es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\sqrt{2}\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\frac{4}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{3}{2}\sqrt{2} d\theta = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot 2\pi = 3\pi\sqrt{2}$$

**Ejemplo**

Dada la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calculemos la integral de superficie de $f$ sobre la superficie $S$ dada por la sección de cono $x^2 + y^2 = z^2,\ 1 < z < 2$ del ejemplo anterior.
Entonces, la integral de superficie de $f$ sobre $S$ es:

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(\theta, z)) \|\vec{N}_\varphi\| d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 \cdot z\sqrt{2} dz d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} \left[z^4\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4}(16 - 1)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{30\sqrt{2}}{4} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{15\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot (2\pi) = 15\pi\sqrt{2}$$

Observemos que $\int_S f dA = \int_S f dS$.

**Ejemplo**

Área de la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio $R$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(\theta, \phi) = \begin{cases} x = R\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y = R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = R\cos(\phi) \end{cases} \qquad \overline{D} = \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Entonces, tenemos que $D = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ y $\overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R\sin(\theta)\sin(\phi) & R\cos(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ R\cos(\theta)\cos(\phi) & R\sin(\theta)\cos(\phi) & -R\sin(\phi) \end{vmatrix}$$

$$= R^2\sin(\phi) \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{vmatrix} = -R^2\sin(\phi)\left(\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi)\right)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = R^4\sin^4(\phi) + R^4\sin^2(\phi)\cos^2(\phi) = R^4\sin^2(\phi)\left(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right) = R^4\sin^2(\phi)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\| = R^2\sin(\phi)$$

Luego el área de la esfera es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} R^2\sin(\phi) d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[-R^2\cos(\phi)\right]_0^\pi d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -R^2\left((-1) - 1\right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2R^2 d\theta = 2R^2 \cdot (2\pi) = 4\pi R^2$$

## 1.2 Superficies Regulares a Trozos

**Definición 1.2.1** [Suma de Superficies]

*Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies simples regulares. Se dice que la superficie $S$ es la suma de $S_1$ y $S_2$, y se denota por $S = S_1 + S_2$, si:*

1. $S = S_1 \cup S_2$
2. $S_1 \cap S_2 \subset \partial S_1 \cap \partial S_2$

*En este caso, se define el borde de $S$ como:*

$$\partial S = \overline{(\partial S_1 \cup \partial S_2) \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)}$$

*Si $\partial S = \emptyset$, entonces se dice que $S$ no tiene borde y es cerrada.*

*Análogamente, se define la suma de superficies $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ siendo cada $S_i$ una superficie simple regular.*

**Ejemplo**

Consideramos el cubo $S$ formado por la suma de las superficies de los seis lados del cubo $S = S_1, S_2, \ldots, S_6$. En particular tenemos que $\partial S = \emptyset$.

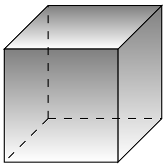
**Ejemplo**

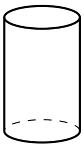
Consideramos ahora el cilindro $S$ formado por la suma de las superficies de los dos ”tapas” del cilindro $S_1, S_2$ y la superficie lateral dividida en dos partes iguales $S_3$ y $S_4$. En este caso, tenemos que $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, y como en el caso anterior, $\partial S = \emptyset$.

**Ejemplo**

Quitémosle una de las tapas al cilindro, entonces tenemos que $S = S_1 + S_2 + S_3$, y en este caso

$$\begin{cases} \partial(S_1 + S_2) = C_0 \cup C_1 \\ \partial S_3 = C_0 \\ \partial S = \overline{(\partial(S_1 + S_2) \cup \partial S_3) \setminus (\partial S_1 + S_2) \cap \partial S_3} = \overline{(C_0 \cup C_1 \cup C_0) \setminus (C_0)} = \overline{C_1} = C_1 \end{cases}$$





Sea $\vec{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y $S$ una superficie. Nos preguntamos qué orientación tiene el campo $\vec{F}$ en la superficie $S$.
Necesitamos, por tanto, orientar $S$ de alguna forma.

## 1.3 Orientación de Superficies

**Definición 1.3.1** [Normal Unitaria de una Superficie]

*Sea $S$ una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Una **normal unitaria** en $S$ es una función continua*

$$\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$$

*tal que, para todo punto $p \in S$, se cumple que $\vec{n}(p)$ es un vector **unitario** y **normal** a la superficie en $p$, es decir:*

$$\vec{n}(p) \perp T_p(S) \quad y \quad \|\vec{n}(p)\| = 1,$$

*donde $T_p(S)$ denota el plano tangente a $S$ en el punto $p$.*

**Definición 1.3.2** [Superficie Orientada]

*Una **superficie simple regular orientada** es un par $(S, \vec{n})$, donde $S$ es una superficie regular y simple, y $\vec{n}$ es una normal unitaria que asigna de forma continua a cada punto de $S$ una orientación consistente.*

**Observación 1.3.1**

*Una superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones posibles.*

*Sea $\varphi : \overline{D} \to S$ una parametrización simple y regular de $S$, según la definición adoptada para $S$.*

*Consideramos el siguiente campo normal:*

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\|}.$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{D} \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[d, "\vec{n}_\varphi"'] & S \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[dl, "\vec{n}"] \\
\mathbb{R}^3 &
\end{tikzcd}$$

*Entonces, la función* $\vec{n} = \vec{N}_\varphi \circ \varphi^{-1}$ *define una normal unitaria en* $S$*, ya que* $\varphi : \overline{D} \to S$ *es un homeomorfismo.*

*Asimismo, la función* $-\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$ *también es una normal unitaria en* $S$*, lo que muestra que toda superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones opuestas.*

*Sean ahora* $\vec{n}_1, \vec{n}_2 : S \to \mathbb{R}^3$ *dos normales unitarias en* $S$*. Definimos la función*

$$h(p) = \langle \vec{n}_1(p), \vec{n}_2(p) \rangle$$

*para todo* $p \in S$*. Esta función* $h : S \to \mathbb{R}$ *es continua, y como* $\vec{n}_1(p)$ *y* $\vec{n}_2(p)$ *son vectores unitarios, se cumple que* $|h(p)| = 1$ *para todo* $p \in S$*.*

*Dado que* $S$ *es conexa, la imagen de* $h$ *debe ser conexa y contenida en el conjunto* $\{-1, 1\}$*. Por tanto,* $h(p) \equiv 1$ *o* $h(p) \equiv -1$ *en toda la superficie. En consecuencia,* $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ *o* $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ *en todo* $S$*.*

**Definición 1.3.3** [Integral de un Campo Vectorial sobre una Superficie]

*Sean* $(S, \vec{n})$ *superficie simple regular orientada y* $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial continuo. Se define*

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

**Observación 1.3.2**

1. $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$ *es un campo escalar continuo en* $S$*.*
2. *Si* $\varphi : \overline{D} \to S$ *es una parametrización simple regular de* $S$ *tal que* $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$*,*

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u,v)), \vec{n}_\varphi(u,v) \rangle \|\vec{N}_\varphi(u,v)\| dudv = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u,v)), \vec{N}_\varphi(u,v) \rangle dudv$$

**Ejemplo**

Consideremos el paraboloide $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$ y lo orientamos con la normal exterior (la que apunta hacia afuera del vaso).
Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 0)$, entonces queremos encontrar la integral de $\vec{F}$ sobre $S$.

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \partial D = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Consideramos la parametrización del paraboloide dada por:

$$\varphi : \overline{D} \to S \qquad \varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Nos preguntamos si $\vec{n}_\varphi$ induce la misma orientación que $\vec{n}$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

$\begin{cases} \vec{N}_\varphi(0,0) = (0,0,1) \\ \varphi(0,0) = (0,0,0) \end{cases}$ que apunta hacia arriba, es decir, hacia dentro del vaso, luego $\vec{n}_\varphi = -\vec{n}$

$$-\int_D \langle \vec{F}(\varphi(x,y)), \vec{N}_\varphi(x,y)\rangle dxdy = -\int_D \langle (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), 0), (-2x, -2y, 1)\rangle dxdy$$
$$= \int_D 2x^2(x^2+y^2) + 2y^2(x^2+y^2) dxdy = 2\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy$$

Hacemos el cambio de variables a coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta) \qquad dxdy = rdrd\theta$$

$$2\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot rdrd\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{1}{6}d\theta = 2\frac{1}{6}(2\pi) = 2\frac{\pi}{3}$$

**Definición 1.3.4** [Orientación Inducida en el Borde]

*Sea $(S, \vec{n})$ una superficie simple, regular y orientada, y sea $\varphi : \overline{D} \to S$ una parametrización regular de $S$ que preserva la orientación inducida por $\vec{n}$, es decir, $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$. Consideramos el borde de $S$ denotado por $\partial S = \varphi(\partial D)$.*
*Entonces se define la orientación de $\partial S$ inducida por $\vec{n}$ como la que se obtiene al recorrer $\partial D$ en sentido positivo y proyectar dicho recorrido a $\partial S$ mediante $\varphi$, es decir, haciendo la composición $\varphi \circ \gamma$, donde $\gamma : [a,b] \to \partial D$ es una parametrización de $\partial D$ que recorre $\partial D$ en sentido positivo.*

**Observación 1.3.3**

*Si $\gamma : [a,b] \to \partial D$ es una parametrización de $\partial D$ que recorre esta curva en sentido positivo, entonces la curva $\varphi \circ \gamma : [a,b] \to \partial S$ recorre $\partial S$ con la orientación inducida por $\vec{n}$.*

*Geométricamente, esto significa que $\partial S$ se recorre de manera que el sacacorchos avanza en la dirección de $\vec{n}$, es decir, si imaginamos un sacacorchos girando en el sentido del recorrido de $\partial S$, este se desplazará en la dirección de $\vec{n}$.*

*De manera equivalente, si $\vec{n}$ representa la vertical en el espacio, entonces $\partial S$ se recorre dejando la superficie $S$ a la izquierda, lo que coincide con la orientación inducida por $\vec{n}$.*

**Ejemplo**

Dada la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$ del ejemplo anterior, orientada con la normal exterior, y una parametrización $\varphi : \overline{D} \to S$ dada por $\varphi(x,y) = (x, -y, x^2+y^2)$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, veamos que $\vec{n}_\varphi = \vec{n}$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & -1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, -1)$$

Haciendo la evaluación $\vec{N}_\varphi(0,0) = (0,0,-1)$, vemos que la normal de $\varphi$ en el punto $(0,0)$ tiene el

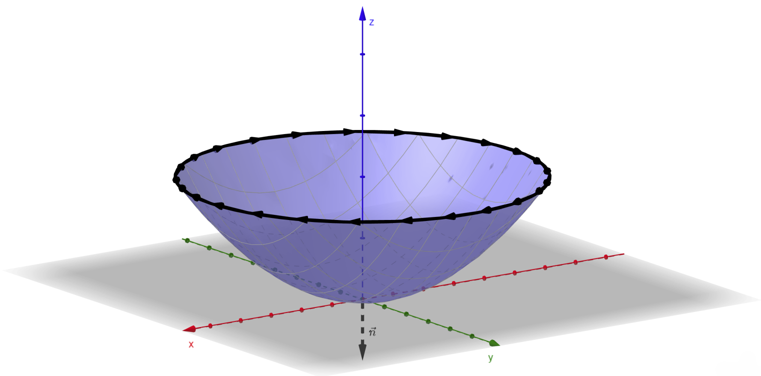
mismo sentido que $\vec{n}$, es decir, $\vec{n}_\varphi = \vec{n}$, luego $\varphi$ preserva la orientación de $S$.
Ahora consideremos una parametrización $\gamma$ de $C = \partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ en sentido positivo (antihorario en el plano $xy$), definida por:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \partial D \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Fijémonos que la curva definida por $\gamma$ es una curva de Jordan-$C^1$ que deja el interior de $\partial D$ a la izquierda y el exterior a la derecha, es decir, es positiva.
Componiendo con la transformación $\varphi$, obtenemos la curva proyectada en $S$:

$$\varphi \circ \gamma : [0, 2\pi] \to \partial S \qquad (\varphi \circ \gamma)(t) = (\cos t, -\sin t, \cos^2 t + \sin^2 t) = (\cos t, -\sin t, 1)$$

que tiene sentido horario en el plano $xy$, tal y como se indica en la figura




En efecto, vemos que la orientación inducida por $\vec{n}$ en $\partial S$ es la que se obtiene por el recorrido $\varphi \circ \gamma$, al ser composición de una parametrización que preserva la orientación de $S$ y otra que recorre $\partial D$ en sentido positivo.
Además, observamos que se cumple la regla del sacacorchos, pues si giramos el sacacorchos en el sentido del recorrido de $\partial S$, este se desplaza hacia abajo, es decir, en la dirección de $\vec{n}$.
Nótese que tomando el vector normal $\vec{n} = (0, 0, -1)$ como referencia de eje vertical, al recorrer $\partial S$ con $\varphi \circ \gamma$, la superficie $S$ queda a la izquierda.

**Definición 1.3.5** [Orientación Compatible]

*Sean $(S_1, \vec{n}_1)$ y $(S_2, \vec{n}_2)$ dos superficies simples y regulares de manera que $S = S_1 + S_2$, entonces se dice que $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son compatibles si inducen orientaciones opuestas en $\partial S_1 \cap \partial S_2$.*
*En este caso, se dice que $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ establece una orientación en $\partial S$ que se llama orientación inducida por $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$.*
*Se dice que $S = S_1 + S_2$ es orientable si $S_1$ y $S_2$ admiten orientaciones compatibles. Análogamente, de manera recursiva, si $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ donde $(S_i, \vec{n}_i)$ son superficies orientadas, se define $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k)$ como compatible si las orientaciones inducidas por $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_{k-1})$ en $S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1}$ y $\vec{n}_k$ en $S_k$ son opuestas en $\partial(S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1}) \cap \partial S_k$.*

**Ejemplo**

Consideremos el cilindro $(S, \vec{n}) = (S_1, \vec{n}_1) + (S_2, \vec{n}_2)$ sin tapas con la orientación exterior.

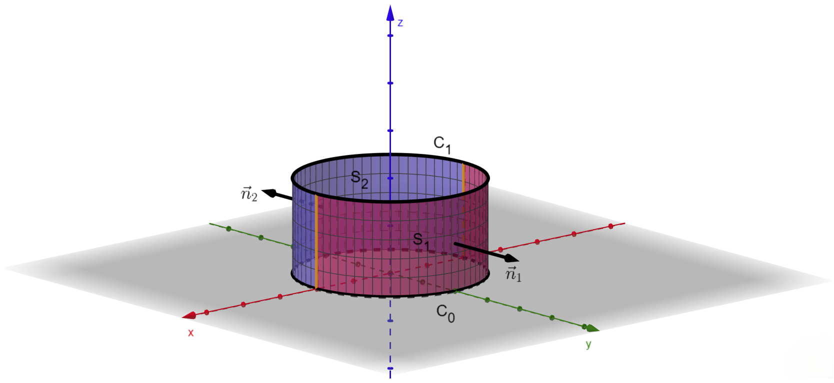
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0,1]\}$$

donde

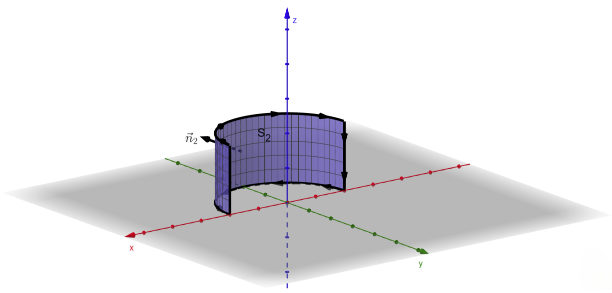
$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le y,\ z \in [0,1]\}$$

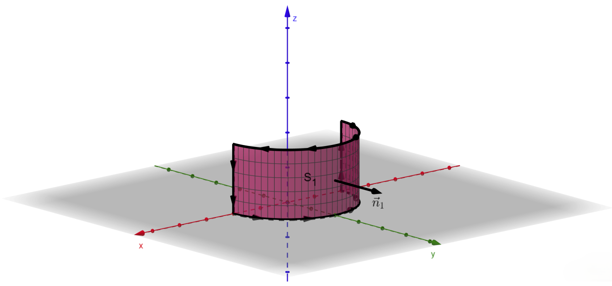
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ y \le 0,\ z \in [0,1]\}$$

La representación gráfica de $S$ es la siguiente:




donde $C_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ y $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\}$ son las tapas del cilindro. En particular tenemos que $\partial S = C_0 \cup C_1$.
Veamos que $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son compatibles y que, por tanto, $S$ es orientable siendo $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ la orientación inducida en $S$.
Para ello, veamos las orientaciones que inducen $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ en $\partial S_1$ y $\partial S_2$ respectivamente. En efecto, por la regla del sacacorchos, las orientaciones inducidas serán las descritas por las siguientes figuras:




Además en la intersección de los bordes $\partial S_1 \cap \partial S_2$ (parte naranja de la primera figura), las orientaciones inducidas son opuestas, luego $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son compatibles, es decir, $S$ es orientable.
Teniendo en cuenta la orientación inducida en el borde de $S_1$ y $S_2$, consideramos dos parametrizaciones $\gamma_0$ y $\gamma_1$ de $C_0$ y $C_1$ respectivamente:

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) & 0 \le t \le 2\pi \\ \gamma_1(t) = (-\cos(t), \sin(t), 1) & 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

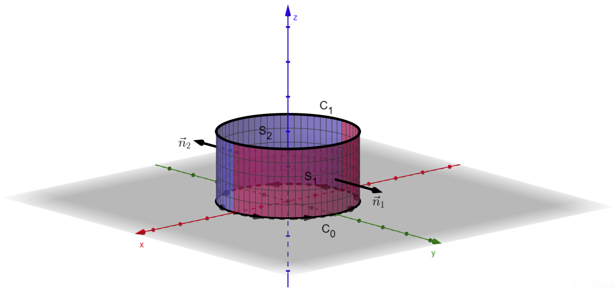
donde $\gamma_1$ recorre negativamente $C_1$ y $\gamma_0$ positivamente $C_0$, luego $\partial S = C_0^+ \cup C_1^-$.

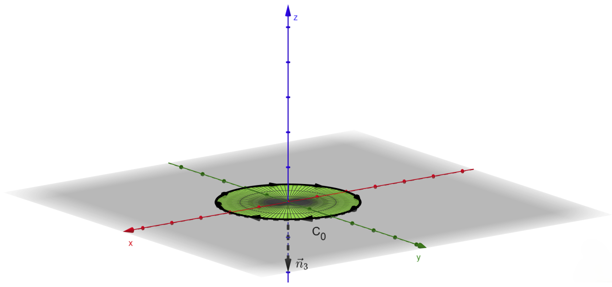
**Ejemplo**

Consideramos ahora el cilindro del ejemplo anterior pero con la tapa de abajo:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0,1]\}$$

$$S = \underbrace{S_1 + S_3}_{S_0} + S_3 \text{ donde } S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0\}$$

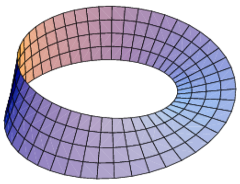


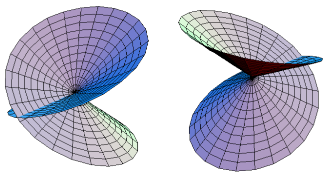



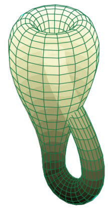

Consideramos $\vec{n}_3$ normal hacia abajo en $S_3$ y obtenemos que $\vec{n}_3$ induce en $\partial S_3 = C_0$ la orientación opuesta a la de $S_0$, luego son compatibles. Lo mismo podemos hacer con la tapa de arriba, y así obtenemos el cilindro completo, que es orientable con $\partial S = \emptyset$.

**Superficies no orientables:**

1. Banda de Moebius
2. Plano proyectivo
3. Botella de Klein







**Definición 1.3.6** [Integral de Superficie Orientada Regular a Trozos]

*Sea $(S, \vec{n})$ una superficie simple, regular a trozos y orientada, es decir, $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ donde $(S_i, \vec{n}_i)$ son superficies simples , regulares y orientadas para $i = 1, \ldots, k$, con $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k)$ orientaciones compatibles.*
*Sea $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Se define entonces*

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \sum_{i=1}^{k} \int_{(S_i,\vec{n}_i)} \vec{F}$$

**Ejemplo**

Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z,\ z \in [0,1]\right\}, \quad S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1\right\}$$

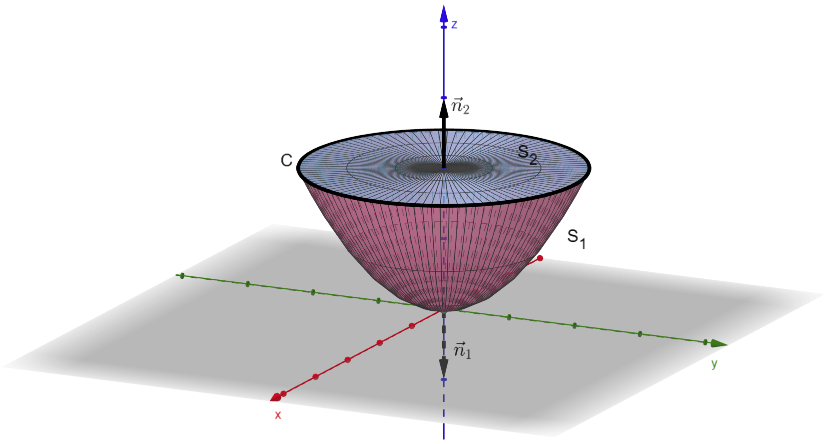
y sea $\vec{n}$ el campo normal exterior. Consideramos el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (xz,\ yz,\ 0)$, y queremos calcular la integral de $\vec{F}$ sobre la superficie $S$:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Aplicando la regla del sacacorchos (regla de la mano derecha), observamos que las superficies orientadas $(S_1, \vec{n}_1)$ y $(S_2, \vec{n}_2)$ inducen sobre la curva

$$C = \partial S_1 \cap \partial S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\right\}$$

orientaciones opuestas.




Por la definición anterior de la integral de superficie orientada, tenemos que

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F}$$

Comenzamos definiendo el dominio para las parametrizaciones de $S_1$ y $S_2$:

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

La parametrización de $S_1$ es:

$$\varphi_1 : \overline{D} \to S_1, \quad \varphi_1(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

Evaluando la función $\varphi_1$ en el origen obtenemos que $\varphi_1(0,0) = (0,0,1)$ que apunta hacia arriba, es decir, en sentido opuesto al vector normal $\vec{n}_1 = (0,0,-1)$, luego $\vec{n}_1 = -\vec{N}_{\varphi_1}$.
Calculamos la integral del campo vectorial sobre la superficie $(S_1, \vec{n}_1)$:

$$\int_{(S,\vec{n}_1)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{F}(\varphi_1(x,y)), \vec{N}_{\varphi_1}(x,y) \rangle dxdy = -\int_D \langle (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), 0), (-2x, -2y, 1) \rangle dxdy$$

$$= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot r \, dr \, d\theta = 4\pi \left[ \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

Para la parametrización de $S_2$ tenemos:

$$\varphi_2 : \overline{D} \to S_2, \quad \varphi_2(x,y) = (x, y, 1)$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

Al igual que antes, evaluando la función $\varphi_2$ en el origen obtenemos que $\varphi_2(0,0) = (0,0,1)$ que apunta hacia arriba, es decir, en el mismo sentido que el vector normal $\vec{n}_2 = (0,0,1)$, luego $\vec{n}_2 = \vec{N}_{\varphi_2}$.
Procedemos a calcular la integral del campo vectorial sobre la superficie $(S_2, \vec{n}_2)$:

$$\int_{(S,\vec{n}_2)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{F}(\varphi_2(x,y)), \vec{N}_{\varphi_2}(x,y) \rangle dxdy = \int_D \langle (x, y, 0), (0,0,1) \rangle dxdy = \int_D 0 \, dxdy = 0$$

Por lo tanto, la integral de superficie de $\vec{F}$ sobre $S$ es:

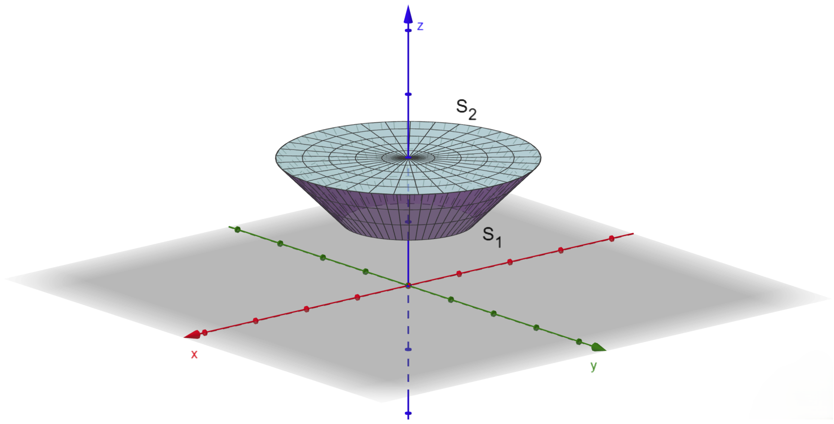
$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \frac{2\pi}{3} + 0 = \frac{2\pi}{3}$$

**Ejemplo**

Sea la superficie $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ z \in [1,2]\} \qquad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$$

y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, -z)$. Queremos calcular $\int_{(S,\vec{n})} \vec{F}$, donde $\vec{n}$ es la normal exterior.




Observemos que $(S_1, \vec{n}_1)$ y $(S_2, \vec{n}_2)$ tienen orientaciones compatibles, con lo cual $(S, \vec{n})$ está bien orientada.

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F}$$

Comenzamos parametrizando la superficie $S_1$:

$$\varphi_1(r,\theta) = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \qquad \text{donde } 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z\sin(\theta) & z\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z) < 0$$

Teniendo en cuenta la geometría de la figura y que el vector $\vec{N}_{\varphi_1}$ apunta hacia abajo, entonces es exterior a $S$, luego los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{N}_{\varphi_1}$ son compatibles.
Sea el conjunto $D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$, entonces la integral de $\vec{F}$ sobre $S_1$ es:

$$\int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{N}_{\varphi_1}, \vec{F} \circ \varphi_1 \rangle = \int_{z=0}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \langle (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z), (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z) \rangle d\theta dz$$

$$= \int_{z=1}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} z^2 + z^2 d\theta dz = 2\pi \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 dz = 4\pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=2} = 4\pi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 4\pi \cdot \frac{7}{3} = \frac{28\pi}{3}$$

Ahora consideramos la parametrización de $S_2$:

$$\varphi_2(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

La normal $\vec{N}_{\varphi_2}$ apunta hacia arriba, es decir, hacia el exterior de $S$, luego $\vec{n}_2$ y $\vec{N}_{\varphi_2}$ son compatibles. Consideramos el conjunto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, entonces la integral de $\vec{F}$ sobre $S_2$ es:

$$\int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F} = \int_E \langle \vec{N}_{\varphi_2}, \vec{F} \circ \varphi_2 \rangle = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi} \langle (0,0,1), (x,y,-z) \rangle dydx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi} -zdydx = -2\pi \int_{x=0}^{x=2} 2dx = -4\pi \left[x\right]_{x=0}^{x=2} = -4\pi(2-0) = -8\pi$$

Finalmente, la integral de $\vec{F}$ sobre $S$ es:

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F} = \frac{28\pi}{3} - 8\pi = \frac{28\pi}{3} - \frac{24\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

**Proposición 1.3.1**

*Sea $D = Int(C)$ la parte interior de una curva de Jordan $C$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$ definida en un abierto $U \supset \overline{D}$. Consideramos la superficie $S = G_f$.*
*Para cada (x,y) en D, sea $\theta(x,y)$ el ángulo que forma el vector normal $\vec{n}(x,y)$ a la superficie $S$ en el punto $(x,y,f(x,y))$ con el vector vertical $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Entonces se tiene que:*

$$a(S) = \int_D \frac{dxdy}{\cos(\theta(x,y))}$$

*Demostración.* Consideramos la parametrización $\varphi : D \to S$ de $S$ dada por:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad \text{donde } (x,y) \in D$$

Entonces, la normal a la superficie $S$ es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

Haciendo el producto escalar con el vector vertical $\vec{e}_3$:

$$\langle \vec{N}_\varphi, \vec{e}_3 \rangle = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \cdot (0,0,1) = 1$$

$$\langle \vec{N}_\varphi, \vec{e}_3 \rangle = ||\vec{N}_\varphi|| \cdot ||\vec{e}_3|| \cdot \cos(\theta(x,y)) = ||\vec{N}_\varphi|| \cdot 1 \cdot \cos(\theta(x,y)) \implies \|\vec{N}_\varphi\| = \frac{1}{\cos(\theta(x,y))}$$

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dxdy = \int_D \frac{1}{\cos(\theta(x,y))} dxdy$$

□

**Observación 1.3.4**

*Si $S$ está contenida en un plado cuyo vector normal es $\vec{n}$, entonces tenemos que $\theta(x,y)$ es el ángulo entre $\vec{n}$ y el vector vertical $\vec{e}_3$ para cada $(x,y) \in D$.*

*En este caso, la integral de superficie se puede expresar como:*

$$a(S) = \int_D \frac{dxdy}{\cos(\theta(x,y))} = \frac{1}{\cos(\theta(x,y))} area(D)$$

**Ejemplo**

Sean los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ no nulos, y sea $S$ el paralepípedo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Entonces el área de la superficie $S$ es:

$$a(S) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$$

donde $\theta$ es el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
En efecto, si consideramos la parametrización $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ de $S$ dada por:

$$\varphi(\lambda, \mu) = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \qquad D = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$$

entonces tenemos que

$$\varphi(\lambda, \mu) = \begin{cases} x = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \times \vec{v}$$

entonces el área de la superficie $S$ es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \|\vec{u} \times \vec{v}\| d\lambda d\mu = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\mu = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

**Observación 1.3.5**

*En $\mathbb{R}^3$, el volumen del paralepípedo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ es el producto mixto:*

$$V = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$