

# Cálculo Integral<sup>1</sup>

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero  
*Ciencias Matemáticas e  
Ingeniería Informática*

---

<sup>1</sup>basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

# Contents

<b>1</b>	<b>Medida de Lebesgue</b>	<b>2</b>
1.1	Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	2
1.2	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	5
<b>2</b>	<b>Funciones integrables en varias variables</b>	<b>14</b>
2.1	Medibilidad de Funciones	14
2.2	Integración de Funciones Positivas	18
2.3	Funciones Integrables-Lebesgue	25
2.4	Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann	31
<b>3</b>	<b>Teoremas de Fubini y Tonelli</b>	<b>35</b>
3.1	Teorema de Tonelli	35
3.2	Teorema de Fubini	39
<b>4</b>	<b>Cambio de variables</b>	<b>42</b>
4.1	Coordenadas Polares	44
4.2	Coordenadas Cilíndricas	47
4.3	Coordenadas Esféricas	50
4.4	Coordenadas Elípticas	51
<b>5</b>	<b>Funciones definidas por integrales</b>	<b>58</b>
<b>6</b>	<b>Integrales de línea: campos escalares y vectoriales</b>	<b>59</b>
6.1	Caminos	59
6.2	Campos Escalares	62
6.3	Campos Vectoriales	65
6.4	Campos Conservativos	70
<b>7</b>	<b>Teorema de Green</b>	<b>76</b>
<b>8</b>	<b>Superficies Paramétricas</b>	<b>84</b>
8.1	Superficies como Conjuntos	87
<b>9</b>	<b>Integrales de superficie</b>	<b>89</b>
<b>10</b>	<b>Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss</b>	<b>90</b>

# 1 Medida de Lebesgue

## 1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

### Definición 1.1.1 [n-Réctangulo]

Un  $n$ -rectángulo en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i \ \forall i \quad (1)$$

Definimos el volúmen de  $R$  como:

$$\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (2)$$

Consideramos también los  $n$ -rectángulos abiertos denotados por  $\overset{\circ}{R}$ , que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

### Observación 1.1.1

Dado  $R$   $n$ -rectángulo cerrado tal que  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , podemos considerar para cada  $\delta > 0$  el  $n$ -rectángulo abierto  $R_\delta = \prod_{i=1}^n (a_i - \delta, b_i + \delta)$ . Se tiene que  $R \subset R_\delta$  y  $\text{vol}(R_\delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2\delta) = \text{vol}(R) + 2n\delta$ . Por tanto:

$$\text{vol}(R) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{vol}(R_\delta) \quad (3)$$

### Definición 1.1.2 [Medida Exterior de Lebesgue]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos la medida exterior de  $A$  como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ } n\text{-rectángulos cerrados} \right\} \quad (4)$$

Donde el ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de  $n$ -rectángulos que recubren  $A$ . A esta medida exterior la llamamos medida de Lebesgue exterior.

### Observación 1.1.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces:

1.  $m^*(A) = +\infty \iff \forall (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  se tiene que  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) = +\infty$
2.  $m^*(A) = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  y  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \epsilon$
3.  $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \epsilon > 0 \exists (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  y  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \alpha + \epsilon$

### Definición 1.1.3 [Conjunto Nulo]

Se dice que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto nulo si  $m^*(A) = 0$ .

**Ejemplo**

1. Si  $R$  es un  $n$ -rectángulo degenerado, es decir,  $R$  tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces  $R$  es un conjunto nulo ( $m^*(R) = 0$ ).
2. En  $\mathbb{R}^2$ , sea el conjunto  $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ . Dado  $\epsilon > 0$  tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m > \frac{1}{\epsilon}$ . Consideramos  $A \subset \bigcup_{i=1}^m [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ . Se tiene que  $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^m \text{vol}([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(A) = 0$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.1.1**

La función  $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  satisface:

1.  $m^*(\emptyset) = 0$
2.  $m^*(A) \leq m^*(B)$  si  $A \subset B$
3.  $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

*Demostración.*

1.  $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$  con  $R_j$   $n$ -rectángulos degenerados  $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$ .
2. Sea  $A \subset B$  y sea  $(R_j)_{j \in J}$  tal que  $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ . Entonces  $(R_j)_{j \in J}$  es un recubrimiento de  $A$  y por tanto  $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$ .
3. Si  $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\exists (R_{j,i})_{i=1}^{\infty}$  tal que  $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$ . Entonces  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y por tanto se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario, se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$ .

□

**Corolario 1.1.1**

La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

*Demostración.* Sea  $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$  entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$ . □

**Lema 1.1.1**

Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  entonces  $m^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ con } Q_i \text{ } n\text{-rectángulos abiertos} \}$

*Demostración.* Denotamos por  $\beta$  el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de rectángulos abiertos tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ . Tenemos entonces que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bar{Q}_j$  y puesto que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\bar{Q}_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j)$ , se tiene que  $m^*(A) \leq \beta$ . Veamos ahora la otra desigualdad  $\beta \leq m^*(A)$ . Si  $m^*(A) = +\infty$  entonces  $\beta = +\infty$  y no hay nada que demostrar. Supongamos que  $m^*(A) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos cerrados tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(A) + \epsilon$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$  consideramos  $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^j}$ . Escogiendo  $\delta_j > 0$  lo suficientemente

pequeño, se tiene que  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \text{vol}(R_j) + \epsilon_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Nótese que aquí  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j}$  denota el volumen del  $n$ -rectángulo abierto  $R_j$  con lados aumentados en  $\delta_j$ . Entonces  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j}$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{vol}(R_j) + \epsilon_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(A) + 2\epsilon$ . Por tanto,  $\beta \leq m^*(A)$ .  $\square$

#### Definición 1.1.4 [Partición de un Conjunto]

Una partición del intervalo  $[a, b]$  es una colección numerable de puntos  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ . Dado un  $n$ -rectángulo  $R \subset \mathbb{R}^n$ , una partición  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  de  $R$  es una colección de particiones  $P_i$  de  $[a_i, b_i]$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  siendo  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

Los subrectángulos de  $P$  son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \prod_{j=1}^n [t_{i_j}^j, t_{i_j+1}^j] \quad (5)$$

Denotamos  $S \in P$  para indicar que  $S$  es un subrectángulo de  $P$ .

#### Lema 1.1.2

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -rectángulo y  $P$  una partición de  $R$ . Entonces:

1.  $R = \bigcup_{S \in P} S$
2. Si  $S, S' \in P$  y  $S \neq S'$  entonces  $S \cap S' = \emptyset$
3.  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S)$

#### Proposición 1.1.1

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -rectángulo entonces  $m^*(R) = \text{vol}(R)$ .

*Demostración.*

- $m^*(R) \leq \text{vol}(R)$   
Sea  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  con  $R_1 = R$  y  $R_j$  degenerados para  $j > 1$ . Entonces:

$$m^*(R) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) = \text{vol}(R).$$

- $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$   
Dado  $\epsilon > 0$  existe  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos abiertos tal que  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Sabemos que  $R$  es compacto al ser cerrado y acotado y, por tanto, al ser  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  un recubrimiento abierto de  $R$ , existe un subrecubrimiento finito  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$  de  $R$ . Entonces  $R \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{Q_i}$ . Consideramos  $R_j = R \cap \overline{Q_j}$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ . Tenemos entonces que  $R = \bigcup_{j=1}^m \overline{Q_j}$  y además prolongando los lados podemos obtener una partición  $P$  de  $R$  tal que cada subrectángulo de  $P$  está contenido en algún  $R_j$  para  $1 \leq j \leq m$ . Por tanto,  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$ .

$\square$

## 1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

**Notación:** Para  $A \subset \mathbb{R}^n$  denotamos por  $A^c$  al complementario de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ .

### Definición 1.2.1 [Conjunto Medible]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue si para todo  $R \subset \mathbb{R}^n$   $n$ -rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c) \quad (6)$$

### Proposición 1.2.1

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces son equivalentes:

1.  $A$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .
3.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

*Demostración.*

- (2)  $\implies$  (3)  
Trivial.
- (3)  $\implies$  (2)  
Sabemos que  $m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ . Veamos que la otra desigualdad se cumple siempre:  
 $m^*(E) = m^*((E \cap A) \cup (E \cap A^c)) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .
- (2)  $\implies$  (1)  
Inmediato, tomando  $E = R$ .
- (1)  $\implies$  (3)  
Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto, si  $m^*(E) = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos cerrados tal que  $E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Entonces  $E \cap A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A$  y  $E \cap A^c \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A^c$ . Por tanto,  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

□

### Definición 1.2.2 [ $\sigma$ -Álgebra]

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra si:

1.  $X \in \mathcal{A}$
2. Si  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3.  $\forall (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  se tiene que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

**Definición 1.2.3** [Medida]

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra, entonces una medida en  $X$  es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$$

**Teorema 1.2.1** [Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ ]

La familia  $M$  de todos los conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $m = m^* \upharpoonright_M$  es una medida numéricamente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

**Lema 1.2.1**

$\mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E) = m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + m^*(\emptyset) = m^*(E) + 0 = m^*(E)$ .  $\square$

**Lema 1.2.2**

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A^c$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A) = m^*(E)$ .  $\square$

Con los dos lemas anteriores obtenemos como corolario que  $\emptyset$  es medible en el sentido de Lebesgue.

**Lema 1.2.3**

Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Observemos primero que

$$A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

luego entonces tenemos que

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$$

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto, entonces por la medibilidad de  $A$  tenemos que

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

Además, sabemos que  $B$  es medible, luego para los conjuntos  $E \cap A^c$  y  $E \cap B$  se verifica

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A^c) &= m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ m^*(E \cap A) &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &= \underbrace{m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) + m^*(E \cap A^c \cap B)}_{\geq m^*(E \cap (A \cup B))} + \underbrace{m^*(E \cap A^c \cap B^c)}_{m^*(E \cap (A \cup B)^c)} \end{aligned}$$

Finalmente, observamos que

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)$$

y por tanto  $A \cup B$  es medible.

Nótese que la medibilidad de la intersección es inmediata, pues  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ , y ya hemos demostrado que el complementario de un conjunto medible es medible.  $\square$

#### Lema 1.2.4

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  una colección numerable de conjuntos disjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y además  $m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$ .

*Demostración.* Definimos la sucesión creciente de conjuntos  $B_k = A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Entonces por el Lema 1.2.3,  $B_k$  es medible en el sentido de Lebesgue. Sean  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Por la medibilidad de  $A_k$ , tenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k^c) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1})$$

Nótese que  $A_k^c = B_{k-1}$  precisamente porque los conjuntos  $A_j$  son disjuntos. Reiterando el proceso, obtenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)$$

Por lo tanto, aplicando la medibilidad de  $B_k$ :

$$m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_k^c) = \left( \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) \right) + m^*(E \cap B_k^c) \geq \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c)$$

Se sigue entonces:

$$m^*(E) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap A_j \right) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$$

Luego,  $B$  es medible.

Tomando  $E = B$  en la desigualdad anterior, obtenemos:

$$m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = m^*(B) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) + m^*(B \cap B^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$



Por otro lado, por el apartado 2 del Teorema 1.1.1 sabemos que la medida exterior de la union numerable de conjuntos es menor o igual que la suma de las medidas exteriores de los conjuntos:

$$m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$

Por tanto,

$$m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$

□

### Lema 1.2.5

*La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Sea  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideremos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

Observemos que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  y que para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $A_j$  es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto,  $A_j$  es medible. Además,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$  con  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Por el Lema 1.2.4,  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible  $\implies \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  es medible. □

### Proposición 1.2.2

*Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  nulo, entonces  $m^*(A) = 0$ .  $\forall E \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $E \cap A \subset A \implies 0 \leq m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0 \implies m^*(E \cap A) = 0$ . Análogamente,  $E \cap A^c \subset E \implies m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$ . Luego  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$  y por tanto  $A$  es medible en el sentido de Lebesgue. □

### Definición 1.2.4 [Propiedad en casi todo punto]

*Se dice que una propiedad se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.*

### Proposición 1.2.3

*Todo  $n$ -rectángulo cerrado  $R \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Dado  $R \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que  $\forall Q \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado se tiene que  $\text{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ . Consideramos el n-rectángulo  $Q_0 = Q \cap R$ . Nótese que  $Q \cap R^c$  es unión finita de n-rectángulos  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ . Entonces  $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_m$  forman una partición de  $Q$ . Luego  $\text{vol}(Q) = \sum_{i=0}^m \text{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^m m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ .  $\square$

### Observación 1.2.1

*En  $\mathbb{R}^n$  los rectángulos abiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.*

### Definición 1.2.5 [n-Cubo]

*Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:*

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \quad (7)$$

*Análogamente se pueden definir los cubos n-dimensionales semi-abiertos.*

### Observación 1.2.2

*Denotaremos la norma del supremo en  $\mathbb{R}^n$  como:*

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n \{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

*Llamaremos bola abierta de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:*

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r) \quad (9)$$

*Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:*

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r] \quad (10)$$

### Teorema 1.2.2

*Sea  $G \subset \mathbb{R}^n$  abierto entonces se tiene:*

1.  *$G$  es unión numerable de n-cubos cerrados.*
2.  *$G$  es unión numerable de n-cubos abiertos.*

*Demostración.* Consideremos la familia de n-cubos  $\mathcal{B} = \{\overline{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B}_\infty(q, r) \subset G\}$ . Veamos que  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ . Dado que  $B \in G \quad \forall B \in \mathcal{B}$  entonces es inmediato ver que  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset G$ . Por ser  $G$  abierto,  $\exists \delta > 0$  tal que  $B_\infty(x, \delta) \subset G$ . Sea  $r \in \mathbb{Q}$  con  $0 < r < \frac{\delta}{2}$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , sabemos que  $\exists q \in \mathbb{Q}^n$  tal que  $\|x - q\|_\infty < r$ . Veamos entonces que  $x \in B_\infty(q, r) \subset B_\infty(x, \delta) \subset G$ . Dado  $y \in \mathbb{R}^n$  con  $\|y - q\|_\infty < r$  se sigue:

$$\|y - x\|_\infty \leq \|y - q\|_\infty + \|q - x\|_\infty < r + r = 2r < \delta$$

Por tanto  $y \in B_\infty(x, \delta) \implies x \in \overline{B}_\infty(q, r) \subset G$ . Luego  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .

Nótese que numerabilidad de la familia  $\mathcal{B}$  es inmediata por la numerabilidad de  $\mathbb{Q}^n$  que, a su vez, es numerable por ser  $\mathbb{Q}$  numerable.

La segunda parte del teorema es análoga a la primera.  $\square$

### Corolario 1.2.1

Todos los conjuntos abiertos y cerrados de  $\mathbb{R}^n$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

### Teorema 1.2.3 [Regularidad de la Medida]

Sea  $E \in \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists G \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $m^*(G \setminus E) < \epsilon$ .
3.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists F \subset \mathbb{R}^n$  cerrado tal que  $F \subset E$  y  $m^*(E \setminus F) < \epsilon$ .
4.  $\forall \epsilon$  existen  $F$  cerrado y  $G$  abierto tales que  $F \subset E \subset G$  y  $m^*(G \setminus F) < \epsilon$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2)

Distinción de casos:

1. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ : Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos abiertos tales que  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Considerando el abierto  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$ , se tiene que  $G$  es medible por el Corolario 1.2.1, además, como  $E \subset G$  entonces

$$m^*(G) = m^*(\underbrace{G \cap E}_E) + m^*(\underbrace{G \cap E^c}_{G \setminus E}) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$$

Por tanto,

$$m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) - m^*(E) < \epsilon$$

2. Supongamos que  $m^*(E) = +\infty$ :  $\forall k \in \mathbb{N}$  sea  $E_k = E \cap [-k, k]^n$ , que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además  $m^*(E_k) < +\infty$  por ser  $E_k$  acotado, y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  existe  $G_k$  abierto tal que  $E_k \subset G_k$  y  $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$ . Entonces  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$  abierto y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$  por lo que  $m^*(G \setminus E) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$ .

- (2)  $\implies$  (1)

$\forall j \in \mathbb{N}$  tomando  $\epsilon = \frac{1}{j}$  entonces  $\exists G_j$  abierto tal que  $E \subset G_j$  y  $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . Entonces considerando  $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  que es medible y abierto se tiene que  $E \subset B$ . Luego  $B \setminus E \subset G_j \setminus E$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . En consecuencia  $m^*(B \setminus E) = 0 \implies B \setminus E$  es medible. Por otro lado,  $B = E \cup (B \setminus E)$  o que es lo mismo  $E = B \setminus (B \setminus E)$ . Tanto  $B$  como  $(B \setminus E)$  son medibles, luego  $E$  es medible.

*Observación:* Además,  $E = B \setminus Z$ , donde  $B$  es intersección numerable de abiertos o  $Z$  es un conjunto nulo.

- (1)  $\implies$  (3)

Como  $E$  es medible entonces tenemos que  $E^c$  también es medible, por lo que, dado  $\epsilon > 0$  por (2)  $\exists G$ -abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,  $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ .

- (3)  $\implies$  (1)

$\forall j \in \mathbb{N} \exists F_j$  cerrado tal que  $F_j \subset E$ ,  $m(E \setminus F_j) < 1/j$ . Sea  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  conjunto medible y  $A \subset E$ .

Además,  $m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < 1/j \ \forall j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $E = A \cup (E \setminus A) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \cup (E \setminus A)$ . Entonces dado que  $E \setminus A$  es un conjunto medible por ser nulo y  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  es medible por ser unión numerable de conjuntos cerrados, entonces  $E$  es medible. □

### Definición 1.2.6 [ $\sigma$ -Álgebra de Borel]

La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  (o equivalentemente, la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los cerrados de  $\mathbb{R}^n$ ). Los conjuntos de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.

### Definición 1.2.7 [Conjuntos $G_\delta$ y $F_\sigma$ ]

Decimos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es  $G_\delta$  si  $A$  es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  es  $F_\sigma$  si  $B$  es unión numerable de cerrados.

### Corolario 1.2.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $E = A \setminus N$  con  $A$  siendo  $G_\delta$  y  $N$  un conjunto nulo.
3.  $E = B \cup N$  con  $B$  siendo  $F_\sigma$  y  $N$  un conjunto nulo.

### Lema 1.2.6

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y  $m(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j)$ .

*Demostración.* Sea  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideremos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$  y que  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión disjunta de conjuntos. Entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$ . Dado que  $m^*(A_j) = m(B_1) + m(B_2) + \dots + m(B_j) \ \forall j \geq 1$  □

### Corolario 1.2.3

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible entonces:

1.  $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$ .

$$2. m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}.$$

*Demostración.*

1. Dado  $\epsilon > 0$  por el Teorema 1.2.3  $\exists G$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $m(G \setminus E) < \epsilon$ . Entonces  $m(E) \leq m(G) = m(E) + m(G \setminus E) < m(E) + \epsilon$ . Por tanto,  $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$ .
2.  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k : E_k = E \cap [-k, k]^n \forall k \in \mathbb{N}$  Entonces  $(E_k)_k \in \mathbb{N}$  es una sucesión creciente de conjuntos medibles y por el lema anterior tenemos que  $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$  Además,  $\forall k \in \mathbb{N} \exists F_k \subset E_k$  cerrado tal que  $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$  Entonces como  $F_k$  es un conjunto cerrado y acotado, tenemos que el conjunto es compacto. Por tanto  $m(E_k) = m(E_k \setminus F_k) + m(F_k) \geq m(F_k) + \frac{1}{k}$  y por tanto  $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(F_k)$  y finalmente obtenemos que  $m(E) = \sup\{m(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$

□

### Definición 1.2.8 [Cubo Diádico]

Se dice que un cubo en  $\mathbb{R}^n$  es diádico si sus lados miden  $2^{-m}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Es decir, si el rectángulo  $Q$  es de la forma:

$$Q = \left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

con  $m \in \mathbb{Z}$  (nivel de escala u orden) y  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$

### Teorema 1.2.4

Todo conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  es unión numerable y disjunta de  $n$ -cubos semiabiertos, que son cubos diádicos.

*Demostración.* Denotemos por  $\mathcal{F}$  la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

con  $k_i \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $\mathcal{Q}_1$  la familia de todos los cubos cerrados  $Q$  de la forma  $[k_1, k_1 + 1] \times \cdots \times [k_n, k_n + 1]$ , donde los  $k_i \in \mathbb{Z}$ , y tales que  $Q \subset U$ . Supuesto definida  $\mathcal{Q}_m$ , sea  $\mathcal{Q}_{m+1}$  la familia de todos los cubos  $Q$  de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

donde  $k_i \in \mathbb{Z}$ , tales que no están contenidos en ningún cubo  $Q' \in \mathcal{Q}_j$  para  $j \leq m$ , y tales que  $Q \subset U$ . Por inducción queda definida  $\mathcal{Q}_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , y ponemos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Es obvio por construcción que si  $Q, Q' \in \mathcal{Q}$  y  $Q \neq Q'$ , entonces  $Q$  y  $Q'$  tienen interiores disjuntos. También es claro que  $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \subset U$ . Veamos que de hecho

$$U = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Dado  $x \in U$ , usando que  $U$  es abierto y que el conjunto  $\{k/2^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , es fácil ver que existe algún cubo  $Q_x \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in Q_x$  y  $Q \subset U$ . El lado de  $Q_x$  mide  $2^{-m_x}$  para algún  $m_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Si  $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$  ya hemos terminado. En otro caso, por definición de  $\mathcal{Q}_{m_x}$ , existe algún  $j < m_x$  tal que  $Q_x$  está contenido en algún cubo  $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$ , y por tanto  $x$  pertenece a este cubo. En cualquier caso se ve que  $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ .  $\square$

## 2 Funciones integrables en varias variables

### 2.1 Medibilidad de Funciones

#### **Definición 2.1.1** [Espacio Medible]

Un espacio medible es un par  $(X, \Sigma)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ .

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$ , donde  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto medible y  $M|_E$  es la familia de subconjuntos medibles de  $E$ .
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto boreliano y  $B|_A$  es la familia de subconjuntos borelianos de  $A$ .

#### **Definición 2.1.2** [Función Medible]

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible. Una función  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es un conjunto medible.

#### **Proposición 2.1.1**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces son equivalentes

1.  $f$  es medible.
2. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  es un conjunto medible.
3. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  es un conjunto medible.
4. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es un conjunto medible.
5. Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.
6. Para todo  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, los conjuntos  $f^{-1}(G)$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  dado que las  $\sigma$ -álgebras son cerradas bajo complementarios, obtenemos que (1)  $\iff$  (2) y (3)  $\iff$  (4).

Veamos ahora la relación (1)  $\iff$  (4):

- (1)  $\implies$  (4): Podemos tomar el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}$  que es una intersección numerable de conjuntos medibles por (1). Por tanto al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es medible.
- (4)  $\implies$  (1): Equivalentemente al apartado anterior podemos obtener que el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\}$  es medible por (4). Por tanto, también al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es medible.

De forma análoga a esta equivalencia podemos obtener que (2)  $\iff$  (3). Y también las equivalencias de (5)  $\iff$  (6) son inmediatas, pues podemos tomar los conjuntos acotados  $x \in X : \alpha \leq f(x) < \beta = x \in X : f(x) \geq \alpha \cap x \in X : f(x) < \beta$  los cuales son conjuntos medibles por los apartados anteriores. De forma similar podemos obtener que el conjunto  $x \in X : f(x) = +\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\}$  es medible por los apartados anteriores. De forma análoga se demuestra el caso de (6). Por último veamos la equivalencia de (6)  $\iff$  (7):

1. (7)  $\implies$  (6): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos tomarlo como  $G = (\alpha, \beta)$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\} = \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\}$  y asimismo, los conjuntos  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son medibles por las equivalencias anteriores.
2. (6)  $\implies$  (7): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos reescribir  $G$  como  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$  donde  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  es un conjunto abierto. Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\alpha_j, \beta_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\}$  es medible por las equivalencias anteriores.

□

### Corolario 2.1.1

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces  $f$  es medible.

### Proposición 2.1.2

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces la función  $\Phi \circ (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.

*Demostración.* Sean  $(f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y continua respectivamente. Denotemos por  $h = (f_1, f_2, \dots, f_n) \circ \Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $G \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto, entonces, denotemos por  $U = \Phi^{-1}(G)$  al conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces sea  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de rectángulos  $n$ -dimensionales tales que  $(R_j) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i^j, \beta_i^j) \forall j \in \mathbb{N} \iff \forall j \in \mathbb{N} f^{-1}(R_j) = \prod_{i=1}^n \{x \in X : \alpha_i^j < f_i(x) < \beta_i^j\}$  es medible. Por tanto, la función  $h$  es medible. □

### Corolario 2.1.2

Sean  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles, entonces  $f + g$ ,  $f \circ g$ ,  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f^+ = \max\{f, 0\}$ ,  $f^- = \min\{f, 0\}$  son todas funciones medibles.

### Observación 2.1.1

$f = f^+ - f^-$  y  $|f| = f^+ + f^-$ .

### Teorema 2.1.1

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : X \rightarrow [+\infty, -\infty]$  una sucesión de funciones medibles, entonces:

1.  $\sup_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$  es una función medible.
2.  $\inf_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$  es una función medible.



3.  $\limsup_{j \rightarrow \infty} \{f_j\}$  es una función medible.
4.  $\liminf_{j \rightarrow \infty} \{f_j\}$  es una función medible.
5.  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$  es una función medible.

*Demostración.*

1. Denotemos  $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : h(x) > \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha \iff \exists j \in \mathbb{N} : f_j(x) > \alpha \Rightarrow x \in X : h(x) > \alpha = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.
2. Denotemos  $g(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : g(x) < \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j \geq \alpha \iff \forall j \in \mathbb{N} : f_j(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in X : g(x) \geq \alpha = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} x \in X : f_j \geq \alpha$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.
3. Recordemos que  $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq j} f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j, f_{j+1}, \dots$ . Entonces como el límite de una sucesión decreciente y acotada siempre existe tenemos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{k \geq j} f_k = \inf_{j \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
4. Recordemos que  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq j} f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf f_j, f_{j+1}, \dots = \sup_{j \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
5. Si  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$  (puntualmente) entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ . Entonces por los apartados anteriores obtenemos que  $f$  es una función medible.

□

### Proposición 2.1.3

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  funciones medibles-Lebesgue tales que  $f = g$  en casi todo punto. Entonces  $g$  es medible-Lebesgue.

*Demostración.* Dado que  $f = g$  en casi todo punto, entonces  $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$  es un conjunto de medida nula. Entonces, dado un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : f(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible dado que  $\{x \in Z : f(x) < \alpha\}$  es medible por ser un conjunto de medida nula y  $\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible por ser  $g$  medible. Por tanto,  $g$  es medible. □

### Corolario 2.1.3

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  sucesión de funciones medibles tales que  $f_j \rightarrow f$  en casi todo punto, entonces  $f$  es medible.

*Demostración.* Sea  $Z = \{x \in X : f_j(x) \not\rightarrow f(x)\}$  el cual tiene medida nula por hipótesis. Entonces definimos la función  $g(x) = \begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$  en casi todo punto. Asimismo podemos definir la sucesión de funciones  $g_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases}$  que converge a  $g$  puntualmente, por tanto, por la proposición anterior tenemos que  $g$  es medible  $\Rightarrow f$  es medible. □

**Definición 2.1.3** [Función Característica]

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible. Definimos la función característica de un conjunto  $E \in \Sigma$  como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in E^c \end{cases}$$

**Observación 2.1.2**

$\chi_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$

*Demostración.* Sea  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, podemos definir el conjunto

$$\chi_E^{-1}(G) = \{x \in X : \chi_E(x) \in G\} = \begin{cases} X & 0 \in G \quad 1 \in G \\ E & 0 \notin G \quad 1 \in G \\ E^c & 0 \in G \quad 1 \notin G \\ \emptyset & 0 \notin G \quad 1 \notin G \end{cases}$$

por tanto,  $\chi_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$ . □

**Observación 2.1.3**

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Entonces son equivalentes:

1.  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.
2.  $f \circ \chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.

*Demostración.*

- $(1 \implies 2) : E^c$  es medible y  $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$  es medible.
  - $(2 \implies 1) : \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible.
- 

**Definición 2.1.4** [Función Simple]

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ . Se dice que  $f$  es una función simple si toma un valor finito de valores. Es decir si:  $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty]$ . Además denotamos a  $f^{-1}(\alpha_i) = E_i$  y  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ . Asimismo obtenemos que  $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$ -unión disjunta de conjuntos. De este modo podemos decir que  $f$  es una combinación lineal finita de funciones simples.

**Observación 2.1.4**

$f$  es medible  $\iff \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  es medible.

### Teorema 2.1.2

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible. Entonces existen funciones simples  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que:

- $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$ .
- $\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .
- Si además,  $f$  acotada  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en casi todo punto.

*Demostración.* Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos el segmento  $[0, n]$  y lo dividimos en intervalos de longitud  $\frac{1}{2^n}$ . Sea  $1 \leq i \leq n2^n$  definimos los conjuntos:

$$E_{n,i} = f^{-1} \left( \left[ \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right] \right) = \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$
$$E_n = f^{-1}([n, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Los cuales son medibles porque por hipótesis la función  $f$  es medible. Sea entonces

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{E_n}$$

la cual es una sucesión de función simples. Analicemos la convergencia (puntual)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Dado  $x \in X$  fijo, entonces tenemos dos casos:

- Si  $f(x) = +\infty \implies f(x) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f_n(x) = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = +\infty$ .
- Si  $f(x) < +\infty \implies \exists n_x \in \mathbb{N} : 0 \leq f(x) < n_x \implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{k-1}{2^{n_x}} \leq f(x) < \frac{k}{2^{n_x}}$  y tal que  $f_{n_x}(x) = \frac{k-1}{2^{n_x}} \implies 0 \leq |f(x) - f_{n_x}(x)| \leq \frac{1}{2^{n_x}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .  
Además, cuando  $f$  está acotada, es decir, si  $\exists M \in \mathbb{N} : f(x) \leq M \quad \forall x \in X$  entonces se tiene que  $\forall n \geq M, \quad \forall x \in X \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  (uniformemente).

Ahora veamos que  $f_n(x)$  es creciente:  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & x \in E_{n,i} \\ n & x \in E_n \end{cases} \implies f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & x \in E_{n,i} \\ n+1 & x \in E_{n+1} \end{cases} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $1 \leq i \leq n2^n \implies 1 \leq i \leq 2^{n+1} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 2.2 Integración de Funciones Positivas

### Definición 2.2.1 [Integral de una función simple]

Consideremos en  $\mathbb{R}^n$  la  $\sigma$ -álgebra  $M$  de los conjuntos medibles y la medida-Lebesgue  $m$ . Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible, no negativa y con representación canónica  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  donde  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m A_i$ -unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces definimos la integral de  $s$  como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s \, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$$

### Observación 2.2.1

$$\int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0$$

*Demostración.* Dado  $E \subset \mathbb{R}^n$  mdible definimos  $\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \circ X_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap E)$ . □

### Lema 2.2.1

Sea  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$  unión disjunta de conjuntos medibles. Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible y no negativa. Entonces  $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s$ .

*Demostración.* Supongamos que

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

(forma canónica), entonces

$$s(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}.$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $\beta_k \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ . Definimos para cada  $j = 1, \dots, m$  el conjunto

$$Y_j = \{k \in \mathbb{N} : \beta_k = \alpha_j\}.$$

Así,  $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^m Y_j$  es una unión disjunta. Además,

$$s^{-1}(\alpha_j) = A_j = \bigcup_{k \in Y_j} X_k,$$

una unión disjunta.

Entonces, usando la propiedad de la medida en una unión disjunta, tenemos

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k \in Y_j} X_k\right) = \sum_{k \in Y_j} m(X_k).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k).$$

Intercambiando el orden de la suma,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k) = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

□

### Corolario 2.2.1

Sean  $s, t : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  funciones simples, medibles y no negativas. Entonces:  $\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$ .

*Demostración.* Sea  $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$  y  $t = \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot \chi_{B_j}$ . Dado que  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^k (A_i \cap B_j)$ , donde la unión es disjunta y los conjuntos  $A_i, B_j$  son medibles, se tiene que en  $A_i \cap B_j : s + t = \alpha_i + \beta_j$ . Aplicando el lema de integración para funciones simples:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (s + t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \alpha_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \beta_j m(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{B_j} s + \sum_{i=1}^m \int_{A_i} t = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t \end{aligned}$$

por el Lema 2.2.1. □

### Definición 2.2.2 [Integral de Lebesgue]

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  una función medible. Definimos la integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty)$ , definimos:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}.$$

### Proposición 2.2.1

Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

1. Si  $0 \leq f \leq g$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible entonces  $\int_E f \leq \int_E g$ .
2. Si  $f, g \geq 0 \implies \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .
3. Si  $c \geq 0, f \geq 0 \implies \int_E cf = c \int_E f$ .
4. Si  $m(E) = 0 \implies \int_E f = 0$ . (Incluso si  $f = +\infty$ )
5. Si  $f|_E = 0 \implies \int_E f = 0$ . (Incluso si  $m(E) = +\infty$ )
6. Si  $A \subset B$  y  $f \geq 0 \implies \int_A f \leq \int_B f$ .
7. Si  $A, B$  son conjuntos medibles y disjuntos y  $f \geq 0 \implies \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ .
8. Si  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies \int_E f = \int_E g$ .

*Demostración.*

1. Por definición de la integral de Lebesgue, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_E f &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}. \\ \int_E g &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} t \cdot \chi_E \mid t \text{ es simple, medible y } 0 \leq t \leq g \cdot \chi_E \right\}. \end{aligned}$$

Dado que  $f \leq g$ , cualquier función simple  $s$  tal que  $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$  también satisface  $0 \leq s \leq g \cdot \chi_E$ , lo que implica que el conjunto de funciones simples consideradas para  $f$  está contenido en el conjunto considerado para  $g$ .

Como el supremo se toma sobre un conjunto más grande en el caso de  $g$ , se sigue que:

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

2. Consideremos funciones simples  $s, t$  tales que  $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$  y  $0 \leq t \leq g \cdot \chi_E$ . Como  $s + t$  es también una función simple y satisface  $0 \leq s + t \leq (f + g) \cdot \chi_E$ , tenemos por el Corolario 2.2.1:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) \cdot \chi_E = \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E + \int_{\mathbb{R}^n} t \cdot \chi_E$$

Tomando el supremo sobre todas las funciones simples  $s$  y  $t$ , obtenemos:

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (s + t) \cdot \chi_E \right\} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \right\} + \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} t \cdot \chi_E \right\}.$$

Es decir,

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

3. Si  $f = c \cdot 0$ , entonces es trivial. Si  $c > 0$ , tomamos  $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq s \leq f$ . Entonces,  $c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$ .

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

4. Si  $m(E) = 0$ , entonces para toda  $s$  simple y medible tal que  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}.$$

De donde,

$$\int_E s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \right\} = 0.$$

5. Para toda  $s$  simple con  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que  $s(x) = 0$  para casi todo  $x \in E$ .

Luego,

$$f \cdot \chi_E = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \int_E s = 0, \quad \forall s.$$

Tomando el supremo,

$$\sup \left\{ \int_E s \right\} = 0 = \int_E f.$$

6. Si  $f$  es simple y medible con  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que

$$\text{si } A \subset B, \quad \chi_A \leq \chi_B \Rightarrow 0 \leq s \cdot \chi_B.$$

7. Si  $A, B$  son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B.$$

Así,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B).$$

Por linealidad de la integral,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

Por lo tanto,

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

8. Si  $E = A \cup Z$ , con  $A$  y  $Z$  disjuntos y tales que  $x \in E \Rightarrow f(x) = g(x)$ , entonces

$$Z = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Si  $m(Z) = 0$ , se tiene que

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f = \int_A g + 0 = \int_A g.$$

□

### **Teorema 2.2.1** [Convergencia Monótona]

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una sucesión de funciones medibles tales que:

1.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  (en  $\mathbb{R}^n$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

*Demostración.* La sucesión  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es monótona creciente en  $[0, +\infty)$ . Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k, \in [0, +\infty].$$

Dado que  $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.

Sea  $s$  una función simple y medible en  $\mathbb{R}^n$  con  $0 \leq s \leq f$ , y fijemos un  $c \in (0, 1)$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$ , definimos la sucesión de conjuntos

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$$

Esta sucesión es medible (debido a que tanto  $f_k$  como  $s$  son medibles) y es creciente (debido a que  $f_k \leq f_{k+1}$  y  $c \cdot s \leq c \cdot f \leq f$ ). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f(x) = 0 \implies f_k(x) = c \cdot s(x) = 0 \implies x \in E_k & \forall k \\ \text{Si } f(x) > 0 \implies \exists k \in \mathbb{N} : c \cdot s(x) \leq f_k(x) \leq f(x) \implies x \in E_k \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x \in E_k$ . Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que  $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $s^{-1}(\alpha_j) = A_j$  y  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente, entonces, para cada  $j = 1, \dots, m$ , tenemos por el Lema 1.2.6:

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j).$$

Luego:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos que:

$$l \geq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite  $c \rightarrow 1$  obtenemos que:

$$l \geq \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que  $s$  es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad  $\forall s$  función simple, medible y no-negativa (por ser  $0 \leq s \leq f$ ). Por tanto, obtenemos la ansiada desigualdad:  $l \geq \int_{\mathbb{R}^n} f$ .  $\square$

### **Teorema 2.2.2** [Convergencia Monótona Versión Refinada]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $f_k : E \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de función medibles y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  tales que:

1.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  (en casi todo punto de  $E$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (en casi todo punto de  $E$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f.$$



*Demostración.* Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que  $m(N) = 0$ . Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E \setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \hat{f} = f \cdot \chi_{E \setminus N}$$

Podemos aplicar el Teorema 2.2.1, lo que nos permite concluir que: 1.  $\hat{f}_k \rightarrow f$  puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_E f = \int_{E \setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

□

### Corolario 2.2.2

1. Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  son medibles y no-negativas se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2. Si  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de funciones medibles  $\forall k \in \mathbb{N}$  se tiene que:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

*Demostración.*

1. Sabemos que existen sucesiones crecientes  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  y  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de funciones simples medibles no negativas tales que  $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = f$  y  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = g$ . Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.2.1 obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + t_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

2. Por el apartado anterior obtenemos que:  $\sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m f_k \implies$  podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona, dado que la sucesión  $\sum_{k=1}^m f_k$  converge de forma creciente a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ . Entonces finalmente obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

□

### Lema 2.2.2 [de Fatou]

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

*Demostración.* Sea

$$f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \inf_{j \geq k} f_j \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$$

Dado que  $g_k \geq 0$ , la sucesión  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema 2.2.1 (TCM), se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k.$$

Por construcción de la sucesión  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , se cumple la igualdad:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k$$

Finalmente, dado que  $g_k \leq f_k$ , se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k \implies \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Nótese que para dos sucesiones  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $a_k \leq b_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k$$

□

### Observación 2.2.2

*El resultado análogo con  $\limsup$  no es válido en general. Fijémonos que si intentásemos una demostración análoga, no se podría aplicar el Teorema 2.2.1 (TCM), pues la sucesión de funciones  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definida por  $h_k = \sup_{j \geq k} f_j$  no es creciente, sino decreciente. Podemos tomar de contraejemplo la función  $f_k = k \cdot \chi_{[k, \infty]}$ .*

## 2.3 Funciones Integrables-Lebesgue

### Definición 2.3.1 [Función Integrable]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  función medible. Se dice que  $f$  es integrable (o absolutamente integrable) cuando

$$\int_E f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

### Observación 2.3.1

$f$  es integrable en  $E \iff |f|$  es integrable en  $E \iff f^+$  y  $f^-$  son integrables en  $E$ , donde  $f^+ = \max\{f, 0\}$  y  $f^- = \max\{-f, 0\}$ .

**Lema 2.3.1**

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f = g - h$  con  $g, h : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones integrables. Entonces,

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h.$$

*Demostración.* Si  $f = g - h \implies |f| = |g - h| \leq g + h \implies f$  es integrable.  $f = f^+ - f^- = g - h \implies f^+ + h = f^- + g \implies \int_E f^+ + h = \int_E f^- + g \implies \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h.$   $\square$

**Proposición 2.3.1**

Para funciones  $f$  y  $g$  integrables en  $E$ , se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si  $f, g$  son integrables en  $E$ , entonces  $f + g$  también es integrable y

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

2. Si  $f$  es integrable en  $E$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $cf$  es integrable en  $E$  y

$$\int_E (cf) = c \int_E f.$$

3. Si  $f \leq g$  en casi todo punto de  $E$ , entonces

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4. Si  $|f|$  es integrable en  $E$ , entonces  $f$  también es integrable y

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

5. Si  $f = g$  en casi todo punto de  $E$  y  $f$  es integrable en  $E$ , entonces  $g$  también es integrable en  $E$  con,

$$\int_E f = \int_E g.$$

6. Si  $m(E) = 0$  y  $f$  es medible, entonces es integrable en  $E$  y

$$\int_E f = 0$$

7. Si  $f$  es integrable en  $E$  entonces  $|f| < \infty$  en casi todo punto de  $E$

8. Si  $\int_E |f| = 0$ , entonces  $f = 0$  en casi todo punto de  $E$ .

*Demostración.*

(1) Dado que  $f = f^+ - f^-$  y  $g = g^+ - g^- \implies f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ , con ambas partes  $\geq 0$ .

Entonces, por el lema de la integral de funciones no negativas,

$$\int_E (f + g) = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-.$$

Reagrupando términos,

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

(2) Si  $c > 0$ . Como  $cf = cf^+ - cf^- \implies$ ,

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^- = c \int_E f^+ - c \int_E f^- = c \int_E f.$$

Si  $c < 0$ , usando  $cf = cf^+ - cf^- = (-c)f^+ - (-c)f^-$ . Entonces aplicamos el apartado anterior y obtenemos que:

$$\int_E cf = c \int_E f.$$

(3) Como  $g - f \geq 0$  en casi todo punto de  $E$ , se cumple que:  $(g - f) \cdot \chi_E \geq 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies$

$$\int_E (g - f) \geq 0.$$

Aplicando la linealidad de la integral,

$$\int_E g - \int_E f \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

(4) Se tiene que  $|f| = f^+ + f^-$ . Usando la linealidad de la integral,

$$|\int_E f| = |\int_E f^+ + \int_E f^-|$$

Como  $f = f^+ - f^-$ , aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|.$$

(5) Como  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies f^+ = g^+ \quad f^- = g^-$  en casi todo punto de  $E$  por lo que sólo queda aplicar el apartado anterior.

$$\int_E f = \int_E g$$

(6)  $|f| \cdot \chi_E \geq 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies \int_E |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \cdot \chi_E = 0 \implies$

$$|\int_E f| \leq \int_E |f| = 0$$

(7) No se qué hace la demostracion

(8) Sea

$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

Definimos los conjuntos

$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, evaluamos la medida de  $A_k$  utilizando la integral:

$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \leq \int_{A_k} k \cdot |f| = k \int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} |f| \leq \int_E |f|$$

Tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  (y de la subaditividad) se concluye que

$$m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0.$$

□

### Teorema 2.3.1 [Convergencia Dominada]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $\forall k \in \mathbb{N}, f_k : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones medibles. Supongamos que  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f_k| < g$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Si además suponemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  en casi todo punto de  $E$ , entonces:

1.  $f_k$  y  $f$  son integrables en  $E$
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| = 0$
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$

*Demostración.*

1. Dado que  $|f_k| \leq |g| = g \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , se concluye que  $f_k$  es integrable en  $E$ . Además, como  $|f| \leq g$ , se sigue que  $f$  también es integrable en  $E$ .
2. Observamos que  $0 \leq |f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq g + g = 2g$ , lo que implica que  $0 \leq 2g - |f_k - f| = h_k$ . Además, la sucesión de funciones  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge en casi todo punto de  $E$  a  $2g - 0 = 2g$ . Aplicando el lema de Fatou a  $\hat{f}_k = h_k \chi_E$ , obtenemos que:

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k$$

A partir de esto, se deduce la siguiente igualdad:

$$\int_E 2g = \liminf_k \left( \int_E 2g - \int_E |f_k - f| \right) = \lim_k \int_E 2g + \liminf_k \left( - \int_E |f_k - f| \right) = \int_E 2g - \limsup_k \int_E |f_k - f|$$

Utilizando el siguiente **lema**: si  $a_k \rightarrow a$ , entonces

$$\liminf_k (a_k + b_k) \geq \liminf_k a_k + \liminf_k b_k$$

se concluye que:

$$\limsup_k \int_E |f_k - f| \leq \int_E 2g - \int_E 2g = 0 \Rightarrow \lim_k \int_E |f_k - f| = 0$$

3. Finalmente, aplicamos la propiedad de la integral a la diferencia  $f_k - f$ :

$$\left| \int_E f_k - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_k - f) \right| \leq \int_E |f_k - f| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$$

□

### Definición 2.3.2 [Integral Paramétrica]

Sea  $f$  función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

### Teorema 2.3.2

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto cualquiera,  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$  y suponemos que:

1.  $\forall u \in U$   $f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.
2.  $\forall x \in E$   $f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

es una función continua en  $U$ .

*Demostración.* Sea  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U$  tal que  $u_k \rightarrow u_0 \in U$ . ¿Se sigue que  $(F(u_k))_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(u_0)$  ?

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$f_k = f(\cdot, u_k) : E \rightarrow \mathbb{R}$$

que es una función medible. Por la condición (2), se cumple que  $\forall x \in E$ ,

$$f_k(x) = f(x, u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x, u_0).$$

Es decir, la sucesión  $\{f_k\}$  converge puntualmente en  $E$  a

$$f_0(x) = f(x, u_0).$$

Además, se cumple que

$$|f_k(x)| = |f(x, u_k)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Aplicando el Teorema 2.3.1 (TCD), se concluye que  $f_k$  es integrable para todo  $k \in \mathbb{N}$  y

$$\int_E f_k \rightarrow \int_E f.$$

Es decir,

$$F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$F(u_k) = \int_E f(x, u_k) dx \Rightarrow F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

□

### Observación 2.3.2

$$\forall u_0 \in U \lim_{u \rightarrow u_0} \int_E f(x, u) dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx$$

### Teorema 2.3.3 [Regla de Leibniz]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto y  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Y además supongamos que:

1.  $\forall u \in U$   $f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .
2.  $\forall x \in E$   $f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $U$ .
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx$$

es de clase  $C^1$  en  $U$  y  $\forall t \in U$  se cumple que:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

*Demostración.* Fijamos  $t_0 \in (a, b)$  y definimos la función  $h : E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$h(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}, & t \neq t_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

1. Medibilidad de  $h(x, t)$

Queremos ver que  $h(x, t)$  es medible para todo  $t \in (a, b)$ .

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos que:

$$h(x, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_0 + 1/k) - f(x, t_0)}{1/k}$$

lo cual es medible.

2. Continuidad de  $h(x, \cdot)$

Para todo  $x \in E$ , si  $h(x, \cdot)$  es acotada en  $(a, b)$ , entonces es continua.

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos:

$$h(x, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} h(x, t),$$

lo cual prueba la continuidad.

### 3. Acotación y aplicación de la Regla de Leibniz

$$|h(x, t)| \leq g(x)$$

- Si  $t = t_0$ , es claro. - Si  $t \neq t_0$ , por el Teorema del Valor Medio, existe  $c \in (t, t_0)$  tal que:

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, s) \right| \leq g(x).$$

Por la Regla de Leibniz, obtenemos:

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_E \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx = \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \int_E h(x, t) dx \right) &= \int_E \left( \lim_{t \rightarrow t_0} h(x, t) \right) dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como  $F'$  es continua en  $(a, b)$ , se concluye que  $F \in C^1(a, b)$ .

□

## 2.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

### Teorema 2.4.1

Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es integrable Lebesgue en  $[a, b]$  y se cumple que:

$$(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$$

### Observación 2.4.1

Denotamos  $\int_a^b f = \int_{[a, b]} f$

*Demostración.*  $\forall k \in \mathbb{N}$  sabemos que  $\exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{n(k)}^k = b\} \subset [a, b]$  tal que:  $\bar{S}(f, P_k) - \underline{S}(f, P_k) < \frac{1}{k}$ . Suponemos que  $P_{k+1}$  es mas fina que  $P_k$  y además que

$$\text{diam}(P_k) = \sup_{i \in \{1, \dots, n(k)\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$  denotamos  $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$  y  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$ .

$$\underline{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} m_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \varphi_k \quad \text{con} \quad \varphi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

$$\bar{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} M_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \psi_k \quad \text{con} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

Es claro que  $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$  en  $[a, b]$ . Además, como  $P_{k+1}$  es más fino que  $P_k \implies (\varphi_k) \uparrow$  y  $(\psi_k) \downarrow$ . Denotamos  $\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \sup \varphi_k$  y  $\psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \inf \psi_k$  que son medibles y cumplen que  $\varphi \leq f \leq \psi$ .

Como  $f$  es integrable-Riemann  $\implies f$  es acotada  $\iff \exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ . La



función  $g(x) = M$  es integrable en  $[a, b]$  y puesto que  $|\psi_k| \leq g$  y  $|\varphi_k| \leq g$  entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f, P_k) = \int_a^b \varphi_k \rightarrow \int_a^b \varphi \quad \bar{S}(f, P_k) = \int_a^b \psi_k \rightarrow \int_a^b \psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \quad \text{y} \quad \bar{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \implies \int_a^b \varphi = (R) \int_a^b f = \int_a^b \psi$$

Y como  $\int_a^b \psi - \varphi = 0 \implies \psi - \varphi = 0$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Es decir  $\varphi = f = \psi$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Y finalmente obtenemos que:

$$(L) \int_a^b f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi = (R) \int_a^b f$$

□

### Teorema 2.4.2

Sean  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces  $f$  es integrable-Riemann en  $[a, b] \iff D_f = \{x \in [a, b] \mid f \text{ no es continua en } x\}$  tiene medida nula.

### Ejemplo

La función de Dirichlet

$$f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable-Riemann en  $[0, 1]$ . Pero  $f = 0$  en casi todo punto  $\implies f$  es integrable-Lebesgue y ésta vale:  $\int_{[0, 1]} f = \int_{[0, 1]} 0 = 0$

### Teorema 2.4.3

Sean  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$  y  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente integrable-Riemann impropia en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Entonces  $f$  es integrable-Lebesgue en  $(\alpha, \beta)$  y se cumple que:

$$(L) \int_{\alpha}^{\beta} f = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f$$

*Demostración.* Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea  $(\alpha, \beta)$ , en este caso trataremos el intervalo  $[\alpha, \infty)$ : Por hipótesis sabemos que:

1.  $\forall k \in \mathbb{N}, f$  es integrable-Riemann en  $[a, b]$
2.  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f| < +\infty$

Tomamos una sucesión  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$  y definimos las sucesiones de funciones:  $f_n = f \cdot \chi_{[a, b_n]}$  y  $g_n = |f| \cdot \chi_{[a, b_n]}$  medibles. De manera que tenemos que  $f_n \uparrow f$  y  $g_n \uparrow |f|$ . Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monótona:

1.  $(L) \int_a^{+\infty} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} |f| = (R) \int_a^{+\infty} |f| < \infty$
2. Esto muestra que  $f$  es integrable-Lebesgue en  $[a, +\infty)$ .

Por otra parte, como  $|f_n| \leq |f| \forall n \in \mathbb{N}$  por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

$$1. (L) \int_a^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} f = (R) \int_a^{+\infty} f$$

Finalmente obtenemos el resultado de que  $f$  es integrable de Riemann-impropia en  $[a, +\infty)$ .

$\forall (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : b_n \rightarrow \infty$  tenemos que  $|\int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f| \leq \epsilon$

□

### Ejemplo

(Hoja 3. Ej: 6.a) Calculemos

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando con respecto al parámetro  $t$ . Para ello, aplicamos el **\*\*Teorema de Leibniz\*\***:

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , con  $f : E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\forall u \in (a, b), f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .
2. Para casi todo  $x \in E$ , la función  $f(x, \cdot) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $(a, b)$ .
3. Existe  $g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \text{para casi todo } x \in E, \forall u \in (a, b).$$

Entonces,  $F(t)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y se cumple:

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Dado que

$$f(x, t) = \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x},$$

calculamos la derivada parcial con respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \cos(tx) e^{-x}.$$

Verifiquemos cada una de las hipótesis del Teorema de Leibniz:

1.  $\forall t \in \mathbb{R}, f(x, t)$  es integrable en  $[0, +\infty)$ :

$$|f(x, t)| \leq e^{-x} = g(x).$$

Como  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 < +\infty$ , se cumple la integrabilidad.

2.  $\forall x \in E, \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \cos(tx) e^{-x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por lo que  $f(x, \cdot)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$ .
3. Se cumple que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = |\cos(tx) e^{-x}| \leq e^{-x} = g(x),$$

que es integrable en  $[0, +\infty)$ .

Por lo tanto,  $F$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x} dx.$$

Ahora calculemos esta integral:

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x} dx.$$

Usando integración por partes con

$$\begin{cases} u = \cos(tx), & dv = e^{-x}dx, \\ du = -t \sin(tx)dx, & v = -e^{-x}, \end{cases}$$

obtenemos:

$$I(t) = [\cos(tx)e^{-x}]_0^{+\infty} - t \int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-x} dx.$$

Evaluando los límites y repitiendo el proceso para  $\sin(tx)e^{-x}$ , obtenemos:

$$I(t)(1 + t^2) = 1.$$

Despejando:

$$I(t) = \frac{1}{1 + t^2} = F'(t).$$

Finalmente, integramos:

$$F(t) = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan(t) + C.$$

Si  $t = 0$ , entonces

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Por lo tanto:

$$F(t) = \arctan(t).$$

### 3 Teoremas de Fubini y Tonelli

#### 3.1 Teorema de Tonelli

Notación:

$$\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \quad (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$$

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces denotamos las funciones:

$$\begin{cases} f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty] & \text{con } f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k \\ f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty] & \text{con } f_y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

##### **Teorema 3.1.1** [Teorema de Tonelli]

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [0, +\infty]$  medible. Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , la función  $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dx dy$

Además, de forma análoga se tiene que:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , la función  $f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^k$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} G = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f_y) = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dy dx$

##### **Observación 3.1.1**

Los siguientes lemas son previos y necesarios para la demostración del Teorema de Tonelli.

##### **Lema 3.1.1**

Sean  $f, g$  que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $a, b \geq 0 \implies af + bg$  también satisfacen el Teorema de Tonelli

*Demostración.*

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(af + bg)_x = a(f_x) + b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
2.  $H(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (af + bg)_x = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + b(g_x) = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + \int_{\mathbb{R}^k} b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} (af + bg)_x = a \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_x + b \int_{\mathbb{R}^{n+k}} g_x$

□

**Lema 3.1.2**

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $f_j \uparrow f$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  puntualmente  $\implies f$  satisface el Teorema de Tonelli.

*Demostración.*

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $f_j(x, \cdot) = (f_j)_x \uparrow f(x, \cdot) = f_x$
2.  $F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \uparrow \int_{\mathbb{R}^k} f_x = F(x)$  luego  $F$  es medible por el Teorema de la Convergencia Monótona.
3. Nuevamente por el Teorema de la Convergencia aplicado a la sucesión de (2)  $F_j(x) \uparrow F(x)$  tenemos que  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx$

□

**Observación 3.1.2**

El siguiente lema es una versión del lema anterior en el que se usa el teorema de la convergencia dominada en lugar del de la convergencia monótona.

**Lema 3.1.3**

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli. Supongamos que  $(f_j) \rightarrow f$  puntualmente en  $\mathbb{R}^{n+k}$  y  $\exists g : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [0, +\infty]$  integrable, que satisface el Teorema de Tonelli y tal que  $0 \leq f_j \leq g \quad \forall j \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $f$  satisface el Teorema de Tonelli.

*Demostración.*

1.  $(f_j)_x \rightarrow f_x$  medible
2.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} g = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} g_x) < +\infty$  luego  $G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} g_x < +\infty$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Además, tenemos que  $0 \leq (f_j)_x \leq g_x$  integrable, por lo que podemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada  $\implies F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \rightarrow F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$
3. De nuevo por el Teorema de la Convergencia Dominada  $\int_{\mathbb{R}^n} F = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f$

□

*Demostración del Teorema de Tonelli:*

1. Primero veamos el caso en el que  $f$  es la función indicatriz/característica de un cubo semiabierto.
  - (a) Supongamos que  $f = \chi_Q$  donde  $Q$  es un cubo semiabierto en  $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , con  $Q = A \times B$  donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^k$ .

**Observación 3.1.3**

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x} \iff (\chi_E)_x(y) = \chi_E(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases} = \chi_{E_x}(y)$$

Definiendo:

$$f_x = (\chi_Q)_x(y) = \begin{cases} \chi_B(y), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Se concluye que  $f_x$  es medible.

(b) Definimos la función:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (\chi_Q)_x dy = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_B dy, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} m_k(B), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Como resultado,  $F(x) = m_k(B) \cdot \chi_A(x)$  es medible.

(c)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_Q = m_{n+k}(Q) = m_n(A) \cdot m_k(B) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(B) \cdot \chi_A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)$$

2. Ahora supongamos que  $f$  es la función indicatriz de un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}^{n+k}$ .

Dado que  $G$  es abierto, se puede escribir como la unión numerable de cubos semiabiertos disjuntos:

$$G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$$

Definiendo  $G_j = \bigcup_{i=1}^j Q_i$ , se tiene que:

$$(G_j) \uparrow G, \quad \chi_{G_j} \uparrow \chi_G$$

Como cada  $\chi_{G_j} = \sum_{i=1}^j \chi_{Q_i}$  verifica el Teorema de Tonelli por los Lemas 1.4.2 y 1.4.3, se concluye que  $\chi_G$  también satisface el Teorema de Tonelli.

3. Supongamos ahora que  $f$  es la función indicatriz de un conjunto  $G_\delta$ , es decir, un conjunto resultado de la intersección numerable de conjuntos abiertos, pero bajo mas restricciones:

Supongamos que  $f = \chi_D$  donde  $D$  es un conjunto  $G_\delta$ :

#### Observación 3.1.4

Considerando  $\forall j \in \mathbb{N} D_j = D \cap (j, -j)^{n+k}$  obtenemos que  $(D_j) \uparrow D$  y  $\chi_{D_j} \uparrow \chi_D$  siendo cada  $D_j$  un conjunto  $G_\delta$  y acotado.

Por tanto, como consecuencia del Lema 1.4.2, podemos reducirnos al caso de conjuntos acotados  $D$  es un  $G_\delta$  acotado.

Entonces  $D = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  donde cada  $G_j$  es un conjunto abierto y acotado. Podemos suponer que  $(G_j) \downarrow D$  por tanto  $\chi_{G_j} \downarrow \chi_D$  y además,  $0 \leq \chi_{G_j} \leq \chi_{G_1}$  que es integrable por ser acotada. Ahora si, podemos usar el Lema 1.4.3 para obtener que  $\chi_D$  satisface el Teorema de Tonelli.

Veamos que el Teorema de Tonelli se verifica cuando  $f = \chi_N : N \subset \mathbb{R}^{n+k}$  es un conjunto de medida nula.

Supongamos entonces que  $m_{n+k}(N) = 0 \implies \forall j \in \mathbb{N}$  por la regularidad  $\exists G_j \subset \mathbb{R}^{n+k}$ -abierto con  $N \subset G_j$  y  $m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j}$ .

Entonces, sea  $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j$  que es un conjunto  $G_\delta$  y  $m_{n+k}(G) \leq m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j} \rightarrow 0$ .

Luego  $N \subset G$  y  $m_{(n+k)}(G) = 0 \implies$  por el apartado anterior  $\chi_G$  satisface el Teorema de Tonelli.

Por último tenemos que  $0 = m_{(n+k)}(G) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_G = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$ . Sabemos que para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\widehat{F}(x)$  es medible y  $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(x) dx = 0 \implies \widehat{F}(x) = 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $N_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in N\} \subset G_x$  y  $m_k(G_x) = \widehat{R}(x) = 0 \implies N_x$  es un conjunto nulo (luego medible) para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  es decir  $\chi_{N_x}$  es medible. Además  $0 \leq F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{G_x} = 0 \implies F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} = 0$  en casi todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$  en particular  $F$  es medible. Finalmente,  $0 = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_N = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$

4. Veamos que si  $A$  es medible  $\implies f = \chi_A$  verifica el Teorema de Tonelli: Como  $A = D \setminus N$  donde  $\begin{cases} D \text{ es un conjunto } G_\delta \\ N \text{ es un conjunto de medida nula} \end{cases}$  Además tenemos que  $D = A \cup N$  disjuncto  $\implies \chi_D = \chi_A + \chi_N \iff \chi_A = \chi_D - \chi_N \implies \chi_{A_x} = \chi_{D_x} - \chi_{N_x}$  y  $\chi_{A_x}$  es medible.

$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_x} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_x} - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x}$  es medible para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{D_x} dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_D = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_A$  En este paso hemos aplicado (4).

5. Si  $f$  es una función medible,  $f = \sum_{j=1}^l \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $\begin{cases} \alpha_j \in \mathbb{R} \\ A_j \text{ medible} \end{cases} \forall j \in \mathbb{N} \implies$  usando (5) y el lema 1.5.1, obtenemos el resultado.
6. Sea  $f$  función medible, no negativa en  $\mathbb{R}^{n+k}$  sabemos que  $\exists (S_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones simples, medibles y no-negativas tales que  $(S_j) \uparrow f$ . Entonces por (6) cada  $(S_j)$  verifica el Teorema de Tonelli, luego por el Lema 1.5.2,  $f$  también satisface el Teorema de Tonelli.

□

### Corolario 3.1.1 [Principio de Cavalieri]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  medible entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  el conjunto  $E_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = m(E_x)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^n$
3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m(E_x) dx$

De forma análoga se tiene que:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , el conjunto  $E_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = m(E_y)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^k$
3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m(E_y) dy$

*Demostración.* Aplicando el Teorema de Tonelli, tomando  $f = \chi_E$ .

□

### Corolario 3.1.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  conjunto  $(n+k)$ -nulo. Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E_x$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^k$
2. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ ,  $E_y$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^n$

*Demostración.* Aplicamos el Teorema de Tonelli, tomand  $f = \chi_E$ . □

### 3.2 Teorema de Fubini

#### Teorema 3.2.1 [Teorema de Fubini]

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  integrable en  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Entonces:

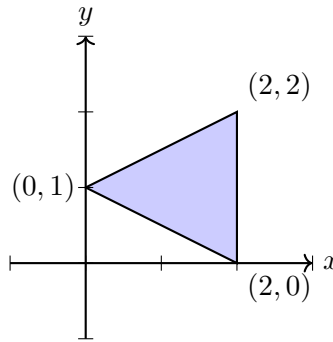
1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es integrable en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  definida por:  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy$

Análogamente se darían los casos tomando  $\mathbb{R}^k$  en lugar de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Recordemos que  $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ f_x = f_x^+ - f_x^- \end{cases}$  □

#### Ejemplo

1. Sea  $D$  el triángulo de vértices  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  y  $(0, 1)$ .



Intentemos calcular

$$\int_D x^2 y \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 y \cdot \chi_D \, dx \, dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \int_{D_x} x^2 \chi_D \, dy \right) dx$$

Sabiendo que  $D_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}$ , si  $0 \leq x \leq 2$  entonces  $D_x = \{y : -\frac{1}{2}x + 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 1\}$ . Por tanto, podemos plantear la integral como:

$$\begin{aligned} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{y=\frac{1}{2}x+1} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2}x + 1 \right)^2 - \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 \right) \right) dx \\ &= \int_0^2 x^2(x) \, dx = \int_0^2 x^3 \, dx = \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

También podríamos haberlo planteado así, sabiendo que  $D^y = \{x : (x, y) \in D\}$ :

$$\int_{y=0}^{y=2} \left( \int_{D^y} x^2 y \, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=2(1+y)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy + \int_{y=1}^{y=2} \left( \int_{x=2(y-1)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy.$$



Evaluamos:

$$\int_1^2 y \left( \int_{2(y-1)}^2 x^2 dx \right) dy = \int_1^2 y \left( \frac{8}{3} y^3 - 4y^2 + 4y \right) dy = \frac{1}{3} y^4 - \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 \Big|_1^2 = 4$$

2. Sea  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y\}$  y  $f(x, y) = xe^{-y^3}$ . Calculemos:

$$\int_D f(x, y) dx dy.$$

Dado que  $f \geq 0$ , podemos aplicar el Teorema de Tonelli:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_D = \int_{x=0}^{x=+\infty} \left( \int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy \right) dx$$

No obstante, no conocemos el valor de la integral  $\int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy$ , por lo que continuamos el cálculo en el otro sentido:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} \left( e^{-y^3} \int_{x=0}^{x=y} x dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y} dy$$

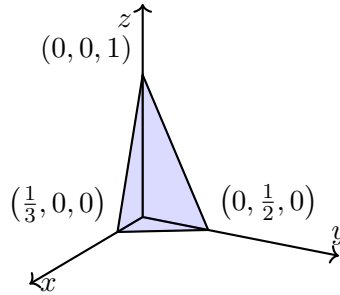
Evaluamos:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \frac{y^2}{2} dy = \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} (-3y^2) dy = -\frac{1}{6} [e^{-y^3}]_{y=0}^{y=+\infty} = \frac{1}{6}$$

3. Sea  $V$  el sólido limitado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $3x + 2y + z = 1$ . Calculemos:

(a)  $\text{Vol}(V)$

(b)  $\int_V z^2 dx dy dz$



(a) Aplicamos el Lema de Cavalieri:

$$\text{Vol}(V) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_V(x, y, z) dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{V_z} 1 dx dy \right) dz,$$

donde  $V_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in V\} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 1 - z\}$ .

Definimos:

$$\int_{z=0}^{z=1} \text{área}(V_z) dz,$$

donde el área de  $V_z$  es:

$$\text{área}(V_z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-z}{3} \cdot \frac{1-z}{2}.$$

También se podría haber definido como:

$$\int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{1-z}{2}} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dy \right) dz.$$

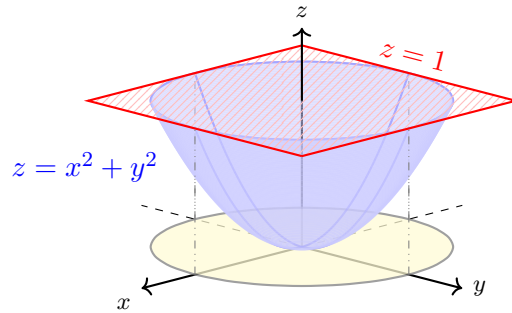
Otra forma alternativa de orden de integración sería:

$$\int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} \left( \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dz \right) dy.$$

(b)

$$\int_V z^2 dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} z^2 \left( \int_{V_z} 1 dx dy \right) dz = \int_{z=0}^{z=1} z^2 \cdot \frac{(1-z)^2}{12} dz$$

4. Sea  $V$  el sólido limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y por el plano  $z = 1$ .  
Calculemos  $\text{vol}(V)$ .



Donde

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\} \implies$$

$$\text{vol}(v) = \int_{z=0}^{z=1} \text{area}(V_z) dz = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}$$

.

### Observación 3.2.1

*La diferencia entre el Teorema de Tonelli y el de Fubini, es que el primero pide que las funciones sean no-negativas estrictamente y el segundo pide que las funciones sean integrables absolutamente.*

## 4 Cambio de variables

### Definición 4.0.1 [Conjunto Verticalmente Proyectable]

Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es verticalmente proyectable si es de la forma:

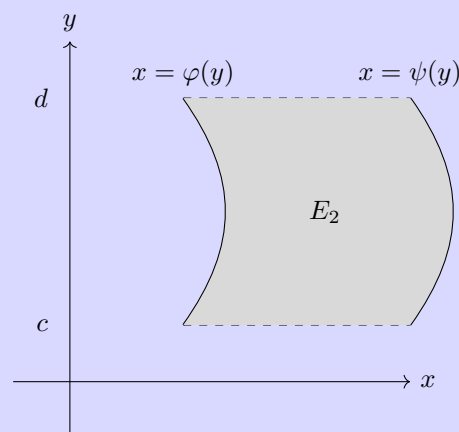
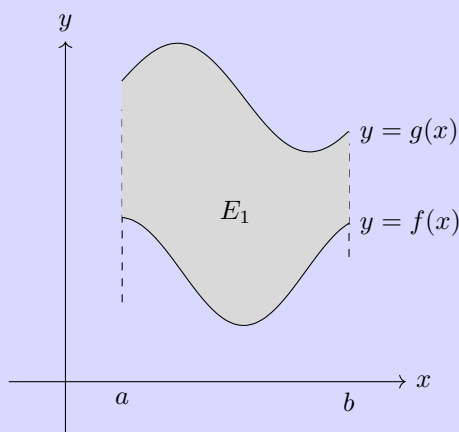
$$E_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $f(x) \leq g(x)$ . Análogamente se define un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es horizontalmente proyectable si es de la forma:

$$E_2 = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

donde  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $\varphi(y) \leq \psi(y)$ . En este caso si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  que es integrable en  $E$ :

$$\begin{aligned} \int_{E_1} h(x, y) dx dy &= \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy \right) dx \\ \int_{E_2} h(x, y) dx dy &= \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} h(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$



### Observación 4.0.1

La diferencia entre ambas definiciones es que en la primera se fija  $x$  y se mueve  $y$  y en la segunda se fija  $y$  y se mueve  $x$ . Lo que tiene como consecuencia que en la primera se integra  $dx - dy$  y en la segunda  $dy - dx$ .

### Teorema 4.0.1

Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicación lineal. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible  $\implies T(A)$  es medible y además:

$$m(T(A)) = |\det(T)|m(A)$$

### Definición 4.0.2 [Difeomorfismo]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos se dice que  $\varphi : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de  $U$  a  $V$  si:

1.  $\varphi$  es biyectiva
2.  $\varphi$  es de clase  $C^1$  en  $U$
3.  $\varphi^{-1}$  es de clase  $C^1$  en  $V$

#### Observación 4.0.2

Sea  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, y supongamos que  $\det(D\varphi(u)) \neq 0 \quad \forall u \in U \implies V = \varphi(U)$  es abierto. Si  $\varphi$  es inyectiva, tenemos que  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = V$  es un difeomorfismo.

#### Teorema 4.0.2

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ . Si  $A \subset U$  es medible, entonces  $\varphi(A)$  es medible y  $m(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi(u))| du$ .

#### Teorema 4.0.3 [Teorema del Cambio de Variable]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ . Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Entonces:

1. Si  $f$  es no negativa  $\implies (f \circ \varphi)|\det(D\varphi)|$  es medible y no-negativa.
2. Si  $f$  es integrable  $\implies (f \circ \varphi)|\det(D\varphi)|$  es integrable

En ambos casos se cumple que:

$$\int_{V=\varphi(U)} f(x) dx = \int_U (f \circ \varphi(u)) |\det(D\varphi)| du$$

#### Observación 4.0.3

Si  $A \subset U$  es medible  $\implies \varphi(A)$  es medible y

$$\int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A (f \circ \varphi(u)) |\det(D\varphi)| du$$

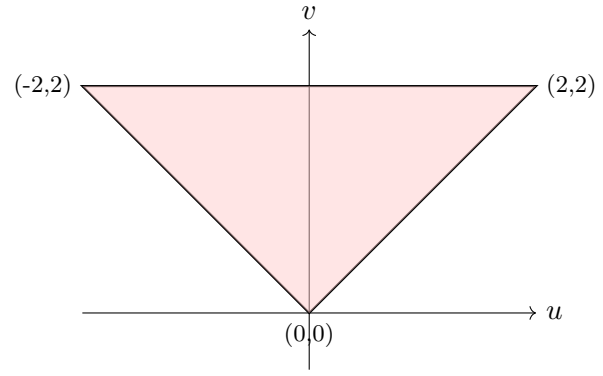
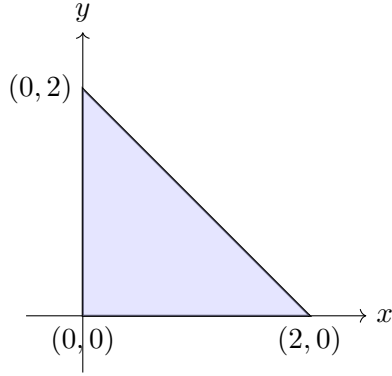
#### Ejemplo

Sea  $\int_E e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$  donde  $E =$  triángulo de vértices  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  y  $(0,2)$ .

Si tomamos el cambio de variable:

$$\varphi^{-1} \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \implies \varphi \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \implies f(x, y) = f(u, v) = e^{\frac{u}{v}}$$

Si tomamos la representación gráfica del cambio de variable obtenemos que:



Si tomamos  $y = 0 \Rightarrow \varphi^{-1} \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases}$  y también tomamos  $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases}$

en tenemos que  $|\det(D\varphi)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

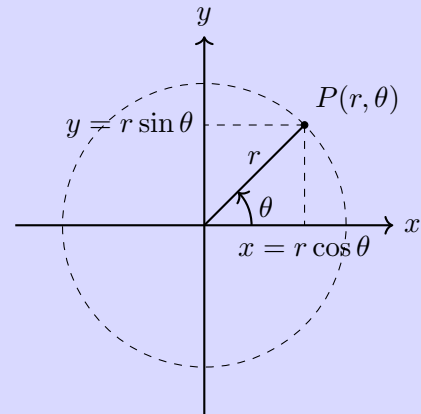
$$\begin{aligned} \int_E f(x, y) dx dy &= \int_D e^{\frac{u}{v}} |\det(D\varphi)| du dv = \int_D \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} \left( \int_{u=-v}^{u=v} e^{\frac{u}{v}} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} \left[ v e^{\frac{u}{v}} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} v \left( e - \frac{1}{e} \right) dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=2} = e - e^{-1} \end{aligned}$$

## 4.1 Coordenadas Polares

### Definición 4.1.1 [Coordenadas polares]

En el plano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , las **coordenadas polares**  $(r, \theta)$  están definidas en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo medido desde el eje positivo  $x$  en sentido antihorario.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Y su imagen en coordenadas cartesianas es el plano sin el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La transformación  $\varphi : U \rightarrow V$  es un **difeomorfismo de clase  $C^1$** , ya que cumple las siguientes condiciones:

- $\varphi$  es de clase  $C^1$ , es decir, tiene derivadas continuas en  $U$ .
- $\varphi$  es biyectiva entre  $U$  y  $V$ .
- El determinante del Jacobiano es no nulo:

$$\det(D_\varphi)(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \neq 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de área en coordenadas polares es:

$$dA = r \, dr \, d\theta.$$

### Ejemplo

- Área del círculo  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  de centro  $(0, 0)$  y radio  $R$ :

$$\text{Área}(D) = \text{Área}(D \cap V) = \int_{\varphi^{-1}(D \cap V)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |\det(D_{\varphi(r, \theta)})| \, dr \, d\theta.$$

Evalutando la integral:

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r \, dr \right) d\theta = \pi R^2.$$

- Para la región  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  con  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\int_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left( \int_{r=0}^{r=1} r \cdot r \, dr \right) d\theta.$$

Resolviendo:

$$\pi \cdot \int_{r=0}^{r=1} r^2 \, dr = \frac{\pi}{3}.$$

### Ejemplo

Realicemos el cálculo de integrales gaussianas:

1.  $g(t) = e^{-t^2}$ : Es fácil ver que  $g(t) \geq 0$  es integrable en  $\mathbb{R}$ . Para ver dicha integral, separemos  $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$ .

(a) Para  $(0, +\infty)$ : Si  $t \geq 1 \implies t^2 \geq t \implies e^{-t^2} \leq e^{-t}$ . Entonces:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \int_0^1 e^{-t^2} \, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \leq 1 + \int_1^{+\infty} e^{-t} \, dt \leq 1 + e^{-1} < +\infty.$$

(b) Para  $(-\infty, 0)$ : Consideremos la integral:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt.$$

Tomamos el cambio de variable  $s = -t$ , lo que implica  $ds = -dt$ . Entonces, la integral se transforma en:

$$\int_{\infty}^0 e^{-s^2} (-ds) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Luego, la integral total es:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. Para  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ , existen dos maneras de calcular la integral:

(a) \*\*Usando coordenadas polares:\*\*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta.$$

Separando las integrales:

$$\left( \int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right).$$

Evalutando la integral en  $r$ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el resultado final es:

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

(b) \*\*Usando el producto de integrales unidimensionales:\*\*

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx.$$

Como la exponencial es separable, podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

Definiendo  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , se tiene que:

$$I^2 = \pi \implies I = \sqrt{\pi}.$$

Así, la integral en  $\mathbb{R}^2$  es:

$$I^2 = \pi.$$

### Ejemplo

#### Curvas en coordenadas polares

Calculemos el área encerrada por la curva en coordenadas polares

$$r = a(1 + \cos \theta),$$

la cual describe un **cardioide** con  $a > 0$ .

**Análisis del comportamiento de  $r$ :** Evaluemos  $r$  en algunos valores característicos de  $\theta$ :

$\theta$	$r = a(1 + \cos \theta)$	Comportamiento
0	$2a$	$r$ decrece ↓
$\frac{\pi}{2}$	$a$	$r$ decrece ↓
$\pi$	0	$r$ aumenta ↑
$\frac{3\pi}{2}$	$a$	$r$ aumenta ↑
$2\pi$	$2a$	$r$ aumenta ↑

**Cálculo del área encerrada:** Utilizamos la fórmula del área en coordenadas polares:

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=a(1+\cos \theta)} r \, dr \, d\theta.$$

Evaluando la integral interna:

$$\int_0^{a(1+\cos \theta)} r \, dr = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{a(1+\cos \theta)} = \frac{a^2}{2} (1 + \cos \theta)^2.$$

Ahora resolvemos la integral en  $\theta$ :

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta.$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

la integral se reescribe como:

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta.$$

Evaluamos término a término:

$$- \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\pi. \quad - \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0. \quad - \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta = 0.$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{a^2}{2} \left( 2\pi + \frac{2\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

**Conclusión:** El área encerrada por el cardioide es:

$$A = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

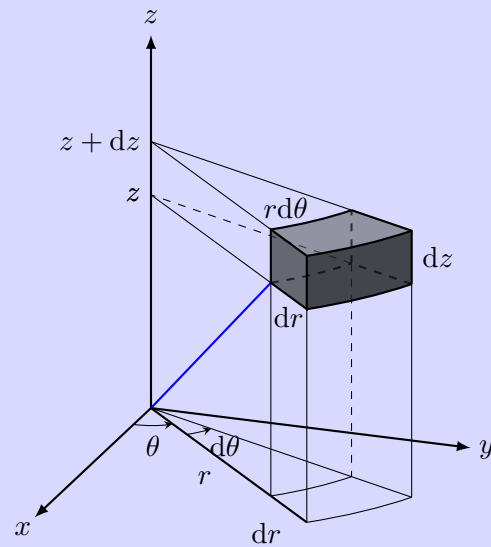
## 4.2 Coordenadas Cilíndricas

### Definición 4.2.1 [Coordenadas cilíndricas]



En el espacio tridimensional, las **coordenadas cilíndricas**  $(r, \theta, z)$  están definidas en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el eje  $z$ .
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal, medido desde el eje positivo  $x$  en el plano  $xy$ .
- $z \in \mathbb{R}$  representa la coordenada vertical, la misma que en cartesianas.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta \leq 2\pi\}.$$

Y su imagen es el espacio tridimensional excepto el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det(D\varphi)| = r > 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas es:

$$dV = r dr d\theta dz.$$

### Ejemplo

Sea  $V$  el sólido limitado por  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 2$ , y consideremos la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Evaluamos la integral:

$$\int_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Cambiamos a coordenadas cilíndricas, donde  $x^2 + y^2 = r^2$ , obteniendo:

$$\int_{z=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{z}} (r^2 + z^2) \cdot r dr d\theta dz.$$

Separando la integral en términos de  $\theta$ :

$$\left( \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_{z=0}^2 \left( \int_{r=0}^{\sqrt{z}} (r^3 + z^2 r) dr \right) dz \right).$$

Resolviendo la integral en  $\theta$ :

$$2\pi \int_{z=0}^2 \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz.$$

Sustituyendo  $r = \sqrt{z}$ :

$$2\pi \int_{z=0}^2 \left( \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{2} \right) dz.$$

Resolviendo la integral en  $z$ :

$$2\pi \left[ \frac{z^3}{12} + \frac{z^4}{8} \right]_{z=0}^{z=2}.$$

Evaluando los límites:

$$2\pi \left( \frac{8}{12} + \frac{16}{8} \right) = 2\pi \left( \frac{2}{3} + 2 \right) = 2\pi \left( \frac{8}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}.$$

Por lo tanto, el resultado final es:

$$\frac{16\pi}{3}.$$

### Ejemplo

Sea  $V$  la porción de la semiesfera  $0 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  que está fuera del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Queremos calcular la integral

$$I = \int_V z dx dy dz$$

En coordenadas cilíndricas, las variables se expresan como:

$$\varphi(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

donde el jacobiano de la transformación es  $r$ . Los límites en estas coordenadas son:

- $0 \leq z \leq 1$  porque la semiesfera en  $z$  llega hasta  $\sqrt{2 - x^2 - y^2}$ , pero solo consideramos de  $z = 0$  hasta  $z = 1$ , pues los puntos de la esfera donde  $1 \leq z \leq \sqrt{2}$  están dentro del cilindro, luego no los consideramos.
- $1 \leq r \leq \sqrt{2 - z^2}$  porque el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  define el límite inferior y la semiesfera define el superior.

- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , ya que se recorre toda la circunferencia.

Así, la integral se reescribe como:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-z^2}} zr \, dr \, dz \, d\theta.$$

Calculamos la integral iterada:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \left( \int_1^{\sqrt{2-z^2}} r \, dr \right) dz \, d\theta.$$

La integral en  $r$  es:

$$\int_1^{\sqrt{2-z^2}} r \, dr = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2-z^2}} = \frac{(2-z^2)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-z^2}{2}.$$

Sustituyendo en la integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \cdot \frac{1-z^2}{2} dz \, d\theta.$$

Resolviendo la integral en  $z$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 z(1-z^2) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (z - z^3) dz.$$

Calculamos:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Finalmente, integramos en  $\theta$ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{8} d\theta = 2\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Luego, la integral es:

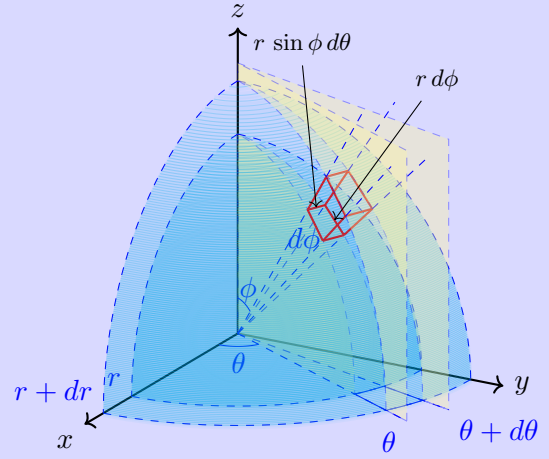
$$I = \frac{\pi}{4}.$$

### 4.3 Coordenadas Esféricas

#### **Definición 4.3.1** [Coordenadas esféricas]

*En el espacio tridimensional, las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  se definen en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:*

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \phi. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal medido en el plano  $xy$  desde el eje positivo  $x$ .
- $\phi \in [0, \pi]$  es el ángulo polar o colatitud, medido desde el eje positivo  $z$ .

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$D_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det D_\varphi| = r^2 \sin \phi.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas es:

$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

### Ejemplo

$$B_r = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \implies$$

$$\text{vol}(B_r) = \int_{B_r} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^R r^2 \sin(\phi) \, dr \right) d\phi \right) d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3$$

## 4.4 Coordenadas Elípticas

### Definición 4.4.1 [Coordenadas elípticas]

En el plano, las coordenadas elípticas  $(r, \theta)$  se definen en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta. \end{cases}$$

Donde:

- $r \geq 0$  es la coordenada radial, que describe la escala de la elipse.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo que mide la posición en la elipse, similar al ángulo en coordenadas polares.
- $a, b > 0$  son constantes que determinan los semiejes de las elipses.

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de área, es:

$$|\det D\varphi| = abr.$$

Esto implica que el elemento diferencial de área en coordenadas elípticas es:

$$dA = abr \, dr \, d\theta.$$

### Ejemplo

Consideremos la región elíptica definida en coordenadas cartesianas como:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

En coordenadas elípticas, esto equivale a:

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

**Cálculo del jacobiano:** La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Su determinante es:

$$\det(D\varphi) = abr.$$

**Cálculo del área de la elipse:** La integral de área en coordenadas elípticas se expresa como:

$$\text{Área}(E) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} abr \, dr \, d\theta.$$

Resolviendo la integral en  $r$ :

$$\int_{r=0}^{r=1} abr \, dr = ab \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{ab}{2}.$$

Evalutando la integral en  $\theta$ :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Por lo tanto, el área de la elipse es:

$$\text{Área}(E) = 2\pi \cdot \frac{ab}{2} = \pi ab.$$

Así, hemos obtenido el área de la elipse usando coordenadas elípticas.

### Ejemplo

Volumen comprendido entre los paraboloides:

$$2z = 4 + \frac{x^2}{3} + y^2, \quad 2z = \frac{2x^2}{3} + 3y^2$$

Eliminando  $z$ :

$$4 + \frac{x^2}{3} + y^2 = \frac{2x^2}{3} + 3y^2 \iff \frac{x^2}{3} + 2y^2 = 4$$

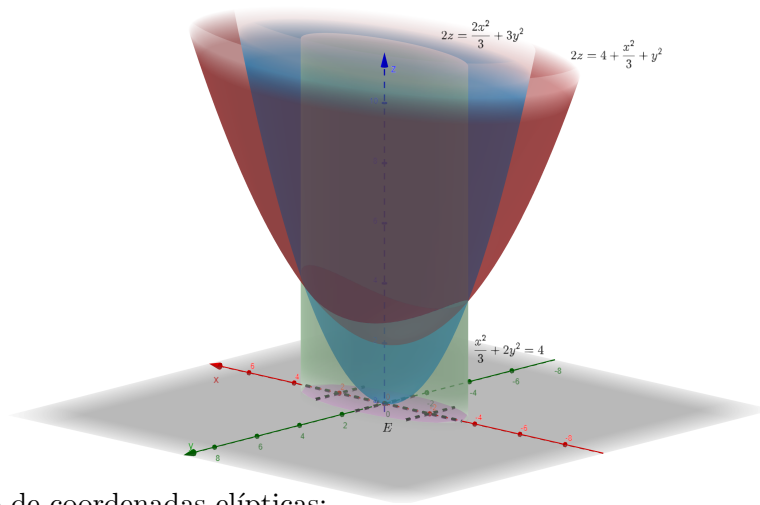
Lo cual es un cilindro elíptico de  $\mathbb{R}^3$ .

Definimos el dominio:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{3} + 2y^2 \leq 4 \right\}$$

Luego, el volumen está dado por:

$$\text{vol} = \int_E \left( 2 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} \right) - \left( \frac{x^2}{3} + \frac{3y^2}{2} \right) dx dy = \int_E \left( 2 - \frac{x^2}{6} - y^2 \right) dx dy$$



Haciendo el cambio de coordenadas elípticas:

$$a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{3}r \cos \theta, \quad y = \sqrt{2}r \sin \theta$$

El jacobiano es:

$$J = 2\sqrt{6}$$

Finalmente, el cambio de variable nos ofrece que el volumen del conjunto es:

$$2\sqrt{6}\pi.$$

### Observación 4.4.1

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ .

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

Entonces:

$$\det(D_\varphi) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

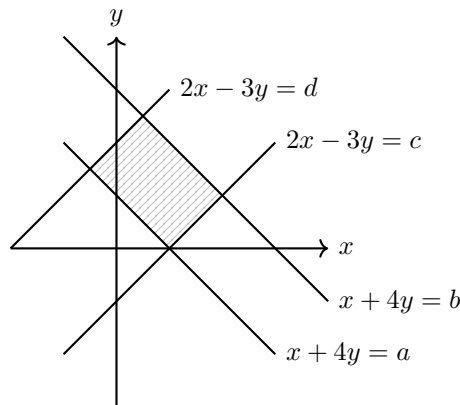
Entonces el Teorema de Cambio de Variable queda como:

$$\begin{aligned} \int_{D=\varphi(E)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n &= \int_{E=\varphi^{-1}(D)} f(x_1(u), \dots, x_n(u)) |\det(D_\varphi)| du_1 \cdots du_n \\ &= \int_{E=\varphi^{-1}(D)} f(x_1(u), \dots, x_n(u)) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

### Ejemplo

Ejercicio 4 (Hoja 4)

Calcula el área del recinto delimitado por las rectas  $\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \\ 2x - 3y = c \\ 2x - 3y = d \end{cases}$  Supongamos que  $a < b, c < d$ .



Para ello tomemos el cambio de variable:  $\varphi^{-1} = \psi = \begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - 3y \end{cases}$

$$\text{area}(D) = \int_{D=\varphi(E)} 1 dx dy = \int_E 1 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Donde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \implies \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{-5}$$

Entonces la integral anterior queda de la forma:

$$\int_E \frac{1}{5} du dv = \frac{1}{5} \cdot \text{area}(E) = \frac{1}{5} (b - a)(d - c)$$

### Ejemplo

Ejercicio 6.b (Hoja 4)

Sea el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$$

queremos calcular la integral

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Para ello consideremos el cambio de variable ("hiperbólico"):

$$\psi(x, y) = \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

Si

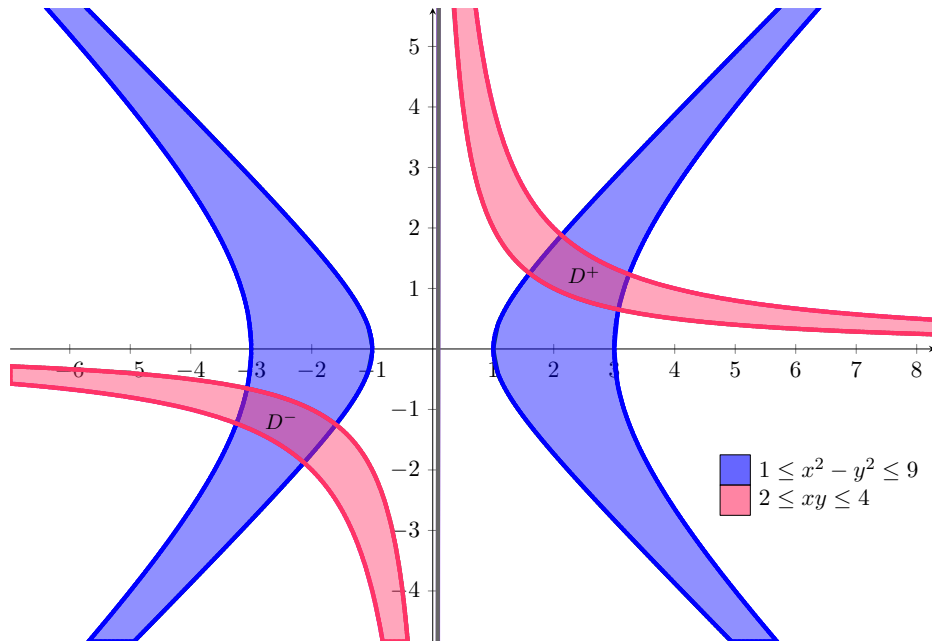
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} u = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos(2\theta) \\ v = r^2 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = r^2 \sin(2\theta) \end{cases}$$

Sean

$$V = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, \quad U = \{(u, v) : v > 0\}$$

Entonces  $\psi : V \rightarrow U$  es biyectiva y existe  $\varphi = \psi^{-1} : U \rightarrow V$ . Además el conjunto transformado es

$$E = \psi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 9, 4 \leq v \leq 8\}$$



Sean

$$D^+ = \{(x, y) \in D : x > 0, y > 0\}, \quad D^- = \{(x, y) \in D : x < 0, y < 0\}$$

Entonces

$$\int_{D^+} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^-} (x^2 + y^2) dx dy$$

Sea entonces el cambio de variable

$$\begin{cases} \bar{x} = -x \\ \bar{y} = -y \end{cases}$$

con el jacobiano igual a 1.

Entonces

$$\int_{D^-} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^+} (-x)^2 + (-y)^2 dx dy = \int_{D^+} x^2 + y^2 dx dy$$



Entonces,

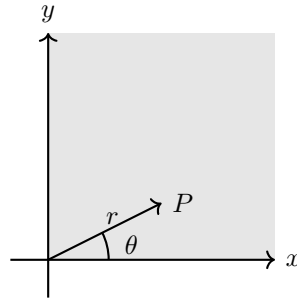
$$\int_D x^2 + y^2 dx dy = 2 \int_{D^+} x^2 + y^2 dx dy = 2 \int_E \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \int_E \sqrt{u^2 + v^2} du dv$$

Ya que tenemos que

$$x^2 + y^2 = r^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Donde además tenemos que:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2 \implies \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{4x^2 + 4y^2} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$$



Así finalmente la integral da

$$\frac{1}{2} \text{area}(E) = \frac{1}{2} \cdot (9 - 1) \cdot (8 - 4) = 16$$

### Ejemplo

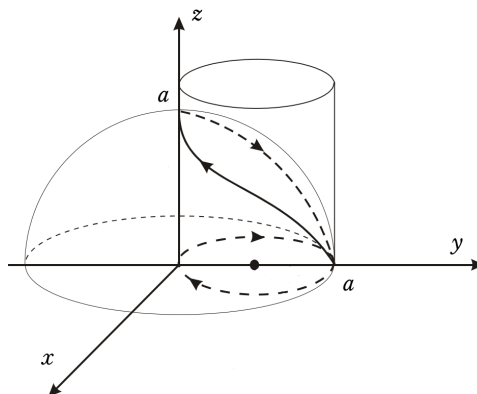
Calcúlese el volumen comprendido entre  $z = f(x, y)$ ,  $z = g(x, y)$  sobre D, con D la proyección de las funciones sobre el plano z. Entonces,

$$\text{vol} = \int_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy = \int_D 1 dx dy dz = \int_D \left[ \int_{z=g(x, y)}^{z=f(x, y)} 1 dz \right] dx dy$$

### Ejemplo

Bóveda de Viviani

Calcúlese el volumen comprendido entre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = ay$  con  $a > 0$ .



Donde tomando valores en la esfera podemos obtener:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \iff x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} \\ x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} - ay = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

Si tomamos que  $r^2 = x^2 + y^2$  y  $ay = ar \sin(\theta)$  entonces, La ecuación de la circunferencia es en coordenadas polares es:  $r = a \cos(\theta)$

$$\begin{aligned} vol &= 2 \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=a \sin(\theta)} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=a \sin(\theta)} d\theta = \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} a^3 - (a^2 - a^2 \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}} d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} a^3 - a^3 |\cos^3(\theta)| d\theta = 4 \frac{a^3}{3} \int_0^{\theta=\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{4a^3}{3} \left[ \theta - \left( \sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right) \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4a^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Todo esto teniendo en cuenta que  $(\cos^3(\theta))^{\frac{3}{2}} = |\cos^3(\theta)|$

## 5 Funciones definidas por integrales

## 6 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales

### 6.1 Caminos

#### Definición 6.1.1 [Camino]

Un camino (o curva paramétrica) en  $\mathbb{R}^n$  es una función continua  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo.

Si  $\gamma$  es diferenciable en un punto  $t \in I$ , entonces el vector velocidad de  $\gamma$  en el punto (instante)  $t$  es el vector tangente a la curva en ese punto, es decir, el vector:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \text{ si } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

#### Definición 6.1.2 [Longitud de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\sigma = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$ . Definimos

$$\Sigma(\gamma, \sigma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Definimos entonces la longitud de  $\gamma$  como:

$$L(\gamma) = \sup\{\Sigma(\gamma, \sigma) \mid \sigma \text{ es una partición de } [a, b]\} \in [0, +\infty]$$

Decimos que  $\gamma$  es **rectificable** si  $L(\gamma) < +\infty$ .

#### Observación 6.1.1

Existen caminos continuos que no son rectificables. Por ejemplo, la curva de Peano, el copo de nieve de Koch o la dada por:

$$l(\gamma) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{luego} \quad l(\gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

#### Definición 6.1.3 [Camino $C^1$ a Trozos]

Decimos que un camino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$  a trozos si:

$$\exists \mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

tal que  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es  $C^1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

#### Observación 6.1.2

En cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  la función  $\gamma$  es  $C^1$ , es decir, en los extremos admite derivadas laterales, aunque puede ocurrir que sean distintas.

**Teorema 6.1.1**

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino  $C^1$  a trozos. Entonces  $\gamma$  es rectificable y su longitud es:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

**Observación 6.1.3**

Tenemos que  $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$  existe, y es continua, salvo quiza en un número finito de puntos, luego en particular es integrable en sentido Riemann y en sentido Lebesgue.

Además, si  $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$  es partición de  $[a, b]$  entonces:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt$$

Para la demostración del teorema anterior, veamos un lema previo:

**Lema 6.1.1**

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino continuo entonces se cumple que:

$$\left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

donde:

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \left( \int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

*Demostración.* Hagamos una distinción de casos:

- Si  $u = \int_a^b \gamma(t) dt = 0$
- Si  $u = \int_a^b \gamma(t) dt \neq 0$ , sea  $u \in \mathbb{R}^n$  con  $\|u\| = 1 \implies$

$$\|v\| = \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \int_a^b \gamma_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n u_i \gamma_i(t) dt \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt = \left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\|$$

□

*Demostración.* Veamos ahora la demostración del teorema:

Podemos suponer que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$  en casi todo  $[a, b]$ .

1. Veamos que  $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ :

Sea  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$ . Entonces:

$$\Sigma(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \forall \text{ partición } \mathcal{P}$$

Luego, tomando el supremo de todas las particiones, obtenemos que  $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

2. Como  $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$  es continua en casi todo  $[a, b]$ -compacto, luego es uniformemente continua en  $[a, b]$ .

Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $t, s \in [a, b]$  y  $|t - s| < \delta \implies \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \epsilon$

Sea  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$  con  $t_i - t_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t_i)\| + \epsilon dt = \|\gamma(t_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) = \|(\gamma'_1(t_i), \dots, \gamma'_n(t_i))\| \cdot (t_i - t_{i-1}) + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t)) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\| dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \leq 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) \cdot \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{i=1}^n 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = 2\epsilon(b-a) + \Sigma(\gamma, \mathcal{P}) \leq 2\epsilon(b-a) + l(\gamma)$$

Todo esto está sacado del libro de Facenda, Fremiche.

□

### Ejemplo

Sea la curva parametrizada

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Además, se cumple que

$$\gamma(0) = (1, 0) = p.$$

Derivando, obtenemos

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

y en particular,

$$\gamma'(0) = (0, 1) = \vec{v}.$$

### Cambio de parámetro

Consideremos el cambio de variable  $t = 2\pi s$  con  $0 \leq s \leq 1$ . Definiendo la nueva curva

$$\sigma(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

obtenemos su derivada:

$$\sigma'(s) = (2\pi(-\sin(2\pi s)), 2\pi \cos(2\pi s)).$$

En particular, en  $s = 0$ ,

$$\sigma'(0) = 2\pi(0, 1) = (0, 2\pi).$$

### Otro cambio de parámetro

Si realizamos el cambio  $t = -2\pi s$ , obtenemos la curva

$$\alpha(s) = (\cos(2\pi s), -\sin(2\pi s)).$$

Calculamos su derivada:

$$\alpha'(s) = (2\pi(-\sin(2\pi s)), -2\pi \cos(2\pi s)).$$

## 6.2 Campos Escalares

### Definición 6.2.1 [Campo Escalar]

Un campo escalar es una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , donde a cada punto  $x \in A \subset \mathbb{R}^n$  le asigna un número real o escalar  $f(x)$ . Esta función también es conocida como función de punto o simplemente función escalar.

### Definición 6.2.2 [Integral de un Campo Escalar a lo largo de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino  $C^1$  a trozos y sea  $f : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuo sobre  $\text{Im}(\gamma)$ . Definimos:

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Notacion: Podemos denotar

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f ds$$

Además

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b ds$$

### Definición 6.2.3 [Caminos Equivalentes]

Dos caminos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  son equivalentes si existe  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  homeomorfismo  $C^1$  que cumple además que  $h' \neq 0$  en  $[c, d]$ , y que además

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xleftarrow{\sigma} [c, d] \xrightarrow{h} [a, b]$$

Asimismo, tenemos que

$$\sigma = \gamma \circ h \text{ con } \sigma(s) = \gamma(h(s)) \quad \forall s \in [c, d]$$

Ahora, por el teorema de Bolzano tenemos dos posibilidades:

1. Si  $h' > 0$  es decir,  $h$  es creciente, decimos que  $h$  conserva la orientación (o que  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen la misma orientación)
2. Si  $h' < 0$  es decir,  $h$  es decreciente, decimos que  $h$  invierte la orientación ( $\gamma$  y  $\sigma$  tienen orientación opuesta)

### Observación 6.2.1

1. Si  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es biyectiva y  $C^1$  con  $h' \neq 0$  entonces aplicando el Teorema de la función inversa obtenemos que  $h$  admite inversa local alrededor de cada punto. Además se cumple que  $(h^{-1})'(h(s)) = \frac{1}{h'(s)} \quad \forall s \in [c, d]$ . Como además  $h$  es biyectiva la inversa local coincide con la inversa global, luego  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es un difeomorfismo  $C^1$ , es decir,  $\exists h^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d]$  que es  $C^1$ .
2. Usando esto obtenemos que la equivalencia de caminos es una relación de equivalencia.

### Observación 6.2.2

Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto y  $h : K \rightarrow H \subset \mathbb{R}^n$  es continua y biyectiva, entonces  $h : K \rightarrow H$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Tenemos que  $h : K \rightarrow H$  es biyectiva, luego  $\exists h^{-1} : H \rightarrow K$ . Veamos que es biyectiva. Dado  $C \subset K$  cerrado  $\implies C$  es compacto  $\implies h(C)$  es compacto  $\implies (h^{-1})^{-1}(C) = h(C)$  que es compacto en  $H$ , luego es cerrado en  $H$  □

### Teorema 6.2.1

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $C^1$  a trozos equivalentes. Sea además  $f : \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, entonces:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f$$

### Observación 6.2.3

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes  $\implies \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma)$

*Demostración.* Tenemos  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  difeomorfismo  $C^1$  con  $\gamma \circ h = \sigma$  con además  $\sigma(s) = \gamma(h(s)) \implies \sigma'(s) = \gamma'(h(s))h'(s) = h'(s)\gamma'(h(s))$

1. Caso 1:  $h$  es creciente ( $h' > 0$ )

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^{t=b} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{s=c}^{s=d} f(\gamma(h(s))) \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds$$

Haciendo ahora el cambio  $t = h(s)$  y  $dt = h'(s)ds$  obtenemos:

$$\int_{s=c}^{s=d} f(\sigma(h(s))) \|\sigma'(s)\| ds = \int_{\sigma} f$$

2. Caso 2:  $h$  es decreciente ( $h' < 0$ )

Tenemos

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^{t=b} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{s=d}^{s=c} f(\gamma(h(s))) \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds$$

Haciendo ahora el cambio  $t = h(s)$  y  $dt = h'(s)ds$  obtenemos:

$$\int_{s=c}^{s=d} f(\gamma(h(s))) \|\gamma'(h(s))\| (-h'(s)) ds = \int_{\sigma} f$$

□

### Corolario 6.2.1

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes y  $C^1$  a trozos  $\implies l(\gamma) = l(\sigma)$



Demostración.

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} 1 = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\sigma} 1 = l(\sigma)$$

□

#### Definición 6.2.4

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino  $C^1$  a trozos. Definimos el camino inverso como:

$$(-\gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (-\gamma)(s) = \gamma(a + b - s)$$

#### Observación 6.2.4

De hecho,  $(-\gamma)$  es equivalente a  $\gamma$  con  $(-\gamma)(s) = \gamma(h(s))$  luego  $Im(-\gamma) = Im(\gamma)$

#### Definición 6.2.5 [Concatenación de Caminos]

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $C^1$  a trozos con  $\gamma(b) = \sigma(c)$ . Definimos su concatenación como:

$$\gamma + \sigma : [a, b + (d - c)] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\gamma + \sigma) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma(t - b + c), & \text{si } b \leq t \leq b + (d - c) \end{cases}$$

#### Observación 6.2.5

En este caso, si

$$f : Im(\gamma_1) \cup \dots \cup Im(\gamma_m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua en las curvas, entonces se cumple:

$$\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} f = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f$$

#### Ejemplo

Dado el camino  $\gamma$  definido por:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y(t)}, \underbrace{t}_{z(t)})$$

Y la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Entonces, calcular la integral de  $f$  a lo largo de  $\gamma$ .

$$x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad \gamma(0) = (1, 0, 0), \quad \gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2) \sqrt{2} dt = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt = \left[ t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} \sqrt{2} = \left( 2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right) \sqrt{2}$$

## 6.3 Campos Vectoriales

### Definición 6.3.1 [Campo Vectorial]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un campo vectorial continuo en  $A$  es una función continua  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  que asigna a cada punto  $x \in A$  un vector  $\vec{F}(x) \in \mathbb{R}^n$ .

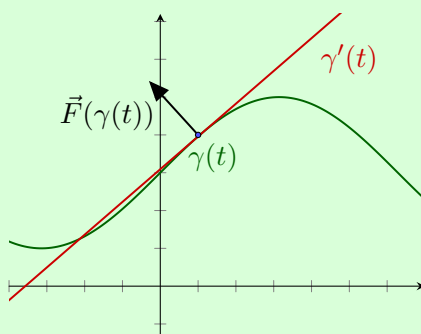
### Definición 6.3.2 [Integral de un Campo Vectorial a lo largo de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino  $\mathcal{C}^1$  a trozos y  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo. Se define la integral de  $\vec{F}$  a lo largo de  $\gamma$  como:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

### Observación 6.3.1

El producto escalar  $\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  representa la proyección ortogonal del vector  $\vec{F}(\gamma(t))$  en la dirección de la tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t)$ .



### Notación:

Si

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad \text{y} \quad \gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_a^b \langle \vec{F}(x_1(t), \dots, x_n(t)), (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b [F_1(\gamma(t))x'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t))x'_n(t)] dt = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \end{aligned}$$

donde  $dx_i = x'_i(t)dt$ , para  $i = 1, \dots, n$  y  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ .

**Teorema 6.3.1**

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $\mathcal{C}^1$  a trozos y equivalentes, y sea  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo. Entonces:

1.  $\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\sigma} \vec{F}$  si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen la misma orientación.
2.  $\int_{\gamma} \vec{F} = - \int_{\sigma} \vec{F}$  si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen orientación opuesta.

*Demostración.* Sabemos que existe  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , biyección de clase  $C^1$  con  $h' \neq 0$ , tal que:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{\gamma} & \text{Im}(\sigma) \\ h \uparrow & \nearrow \sigma & \\ [c, d] & & \end{array}$$

Luego

$$\sigma'(s) = \gamma'(h(s))h'(s), \quad \forall s \in [c, d].$$

Distinguimos dos casos según la orientación de los caminos:

- **Caso 1: Misma orientación**

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen la misma orientación, entonces  $h' > 0$  (es decir,  $h$  es creciente). Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\gamma(h(s))), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds \\ &= \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle ds = \int_{\sigma} \vec{F} \end{aligned}$$

Donde el cambio de variable viene dado por:

$$\begin{cases} t = h(s) \\ dt = h'(s) ds \end{cases}$$

- **Caso 2: Orientación opuesta**

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen orientación opuesta, entonces  $h' < 0$  (es decir,  $h$  es decreciente). En este caso:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{s=d}^{s=c} \langle \vec{F}(\gamma(h(s))), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds \\ &= - \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle ds = - \int_{\sigma} \vec{F} \end{aligned}$$

□

**Observación 6.3.2**

Dado un camino continuo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  cualesquiera y un campo vectorial continuo  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se cumple que:

1.  $\int_{-\gamma} \vec{F} = - \int_{\gamma} \vec{F}$ .

$$2. \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_2} \vec{F} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \vec{F}.$$

### Ejemplo

Un camino puede ser diferenciable (ó  $C^1$ ) y, sin embargo, su imagen puede presentar "picos". Por ejemplo, el camino  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $\gamma(t) = (t^3, |t^3|)$  es  $C^1$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , pero su imagen presenta un pico en el origen. En efecto,

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \quad \text{con} \quad \gamma'_1(t) = 3t^2 \quad \text{y} \quad \gamma'_2(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ -3t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\gamma'_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2|t| - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t|t| = 0$$

Luego  $\gamma'(0)$  existe y además  $\gamma'(0) = (0, 0)$ . Sin embargo, la imagen de  $\gamma$  en el origen presenta un pico, lo que implica que la curva no es regular en ese punto.

### Definición 6.3.3 [Camino Simple y Regular]

Diremos que una función  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un **camino simple y regular** si:

- $\gamma$  es continua.
- $\gamma$  es inyectiva (simple).
- $\gamma$  es de clase  $C^1$  en  $[a, b]$  y cumple que  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ .

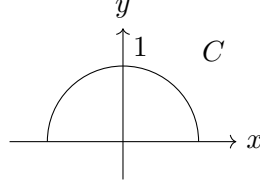
### Observación 6.3.3

1. En este caso, la función  $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Im}(\gamma)$  es un homeomorfismo sobre su imagen.
2. Diremos que  $C \subset \mathbb{R}^n$  es una **curva simple y regular** si  $C = \text{Im}(\gamma)$ , donde  $\gamma$  es un camino simple y regular. En este caso,  $\gamma$  es una **parametrización simple y regular** de  $C$ .

### Ejemplo

Consideremos la curva:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0\}.$$



Una posible parametrización es:

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Su derivada es:

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0), \quad \forall t \in (0, \pi).$$

Por lo tanto,  $\text{Im}(\gamma) = C$ , confirmando que  $\gamma$  es una parametrización simple y regular de  $C$ .

### Teorema 6.3.2

Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva simple y regular y sean  $\gamma$  y  $\sigma$  parametrizaciones simples y regulares de  $C$ . Entonces,  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes.

*Demostración.* A continuación viene la demostración del teorema anterior:

Sean  $\sigma : [c, d] \rightarrow \text{Im}(\sigma)$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Im}(\gamma)$  tales que  $\text{Im}(\sigma) = C = \text{Im}(\gamma)$ . Dado que  $\sigma$  y  $\gamma$  son homeomorfismos sobre  $C$  entonces  $\exists h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  homeomorfismo  $C^1$  tal que  $h = \gamma^{-1} \circ \sigma$ . Entonces falta demostrar que  $h$  es de clase  $C^1$  con  $h' \neq 0$  en  $[c, d]$ . Sea  $s_0 \in [c, d]$  y denotaremos  $x_0 = \sigma(s_0)$

- Consideramos primero el caso de que  $s_0 \in (c, d)$  y sea  $t_0 \in (a, b)$  tal que  $\gamma(t_0) = x_0$ : Sabemos que

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)) \neq \vec{0}$$

Supongamos que  $\gamma'_1(t_0) \neq 0$  entonces definamos la función  $H : (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$H(t, y_2, \dots, y_n) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) + y_2, \dots, \gamma_n(t) + y_n) \text{ luego } H(t_0, 0, \dots, 0) = (\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_n(t_0)) = \gamma(t_0)$$

$$D_H(t, 0 \dots 0) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ \gamma'_2(t) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma'_n(t) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \implies \det(D_H(t, 0 \dots 0)) = \gamma'_1(t) \neq 0$$

Entonces por el Teorema de la Función Inversa  $\exists U^{(t_0, 0, \dots, 0)} \subset (a, b)$  y  $\exists V^{x_0}$  tal que  $H : U^{(t_0, 0, \dots, 0)} \rightarrow V^{x_0}$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Definimos  $F : V^{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \pi_1(H^{-1}(x)) \in (a, b)$  donde  $\pi_1$  es la proyección en la primera coordenada.

$$F(\gamma(t)) = \pi_1(H^{-1}(\gamma(t))) = \pi_1(H^{-1} \circ H(t, 0, \dots, 0)) = \pi_1(t, 0, \dots, 0) = t$$

Si  $t = h(s)$  entonces  $F(\gamma(h(s))) = F(\sigma(s))$  luego  $h$  es de clase  $C^1$  alrededor de  $s_0$ . Además,  $\sigma'(s_0) = (\gamma \circ h)'(s_0) = \gamma(t_0) \circ h'(s_0) \implies h'(s_0) \neq 0$

- Para los exteriores de  $c$  y  $d$  se usa que:  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$  entonces  $\exists \bar{\sigma} : (c - \epsilon, d + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  extensión de clase  $C^1$  y además  $\bar{\sigma}' \neq 0$  en  $(c - \epsilon, d + \epsilon)$

**Ejemplo**

Un segmento en  $\mathbb{R}^n$ : Dados  $p \neq q$  en  $\mathbb{R}^n$ , el segmento  $[p, q]$  se define como:

$$[p, q] = \{(1-t)p + tq \mid 0 \leq t \leq 1\} = C \text{ es una curva simple regular}$$

$$C = \text{Im}(\gamma) \text{ donde } \gamma : [0, 1] \rightarrow [p, q] \text{ con } \gamma(t) = (1-t)p + tq = q + t(p-q)$$

Tenemos que  $\gamma$  es biyectiva y  $\gamma'(t) = p - q \neq 0 \forall t \in [0, 1]$

**Ejemplo**

Una gráfica en  $\mathbb{R}^n$ : Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . La gráfica  $G_g = \{(t, g(t)) : a \leq t \leq b\}$  es una curva simple regular en  $\mathbb{R}^2$  con  $G_g = \text{Im}(\gamma)$  donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow G_g$  es de clase  $C^1$  y biyectiva con  $\gamma(t) = (t, g(t))$  y  $\gamma'(t) = (1, g'(t)) \neq \vec{0} \forall t \in [a, b]$

**Observación 6.3.4**

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva simple regular, entonces  $\gamma$  es un homeomorfismo sobre su imagen, i.e.  $\gamma : [a, b] \rightarrow C = \text{Im}(\gamma)$  es un homeomorfismo.

Falta demostrar que  $\gamma^{-1} : C \rightarrow [a, b]$  es continua.

Si no fuera así: Sea  $x_0 \in C$  tal que  $\gamma^{-1}$  no es continua en  $x_0$  entonces  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $\forall \delta = \frac{1}{k} > 0, \exists x_k \in C$  con  $\|x_k - x_0\| \leq \frac{1}{k}$  pero  $\|\gamma^{-1}(x_k) - \gamma^{-1}(x_0)\| > \epsilon$

$\forall k \in \mathbb{N}$ , denotemos  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\gamma^{-1}(x_k)) \subset [a, b]$ -compacto  $\implies \exists (t_{k_j}) \rightarrow t_0 \in [a, b]$  y como  $\gamma$  es continua  $\implies \gamma(t_{k_j}) \rightarrow \gamma(t_0) \equiv (x_{k_j}) \rightarrow x_0$

Luego  $x_0 = \gamma(t_0) \iff t_0 = \gamma^{-1}(x_0)$ . Pero  $t_{k_j} = \gamma^{-1}(x_{k_j})$  satisface que  $\|t_{k_j} - t_0\| \geq \epsilon \iff \|\gamma^{-1}(x_{k_j}) - \gamma^{-1}(x_0)\| \geq \epsilon$  lo cual es una contradicción.

**Definición 6.3.4** [Integral de una Función a lo largo de una Curva]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  curva simple regular entonces;

1. Si  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, se define  $\int_C f = \int_\gamma f$  siendo  $\gamma$  una parametrización simple y regular de  $C$ .
2. Una orientación de  $C$  se define como un sentido de recorrido de  $C$ , es decir, señalar un origen y un extremo de  $C$ . Si  $C$  está orientada y  $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial continuo, se define  $\int_C \vec{F} = \int_\gamma \vec{F}$  siendo  $\gamma$  una parametrización simple y regular de  $C$ , que conserva la orientación o que induce en  $C$  la orientación elegida.

**Observación 6.3.5**

Si cambiamos de orientación:  $\int_{C^-} \vec{F} = - \int_C \vec{F}$

**Definición 6.3.5** [Curva Simple Regular a Trozos]

Diremos que  $C \subset \mathbb{R}^n$  es una curva regular simple a trozos si  $C = \text{Im}(\gamma)$  siendo  $\gamma$  camino  $C^1$  a trozos con  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$  y cada  $\gamma_j$  es simple y regular  $\forall j = 1, \dots, k$ .

En este caso si  $C_j = \text{Im}(\gamma_j) \forall j = 1, \dots, k$  entonces denotaremos  $C = C_1 + \dots + C_k$  y definimos para

$f : C \rightarrow \mathbb{R}$  continua:  $\int_C f = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} f$

### Observación 6.3.6

Se puede demostrar que el resultado no depende de la partición de  $C$  en curvas simples y regulares (descomposición).

### Observación 6.3.7

Si  $C = C_1 + \dots + C_k$  tienen orientaciones coherentes (el extremo de  $C_j$  coincide con  $C_{j+1} \forall j = 1, \dots, k-1$ ) diremos que  $C$  está orientada y definimos para un campo vectorial  $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua:  $\int_C \vec{F} = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} \vec{F}$

## 6.4 Campos Conservativos

### Definición 6.4.1 [Campo Conservativo]

Sea un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Un campo vectorial- $C^1$  continuo  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que es conservativo (ó campo gradiente) si  $\exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que  $\vec{F} = \nabla \varphi \iff \vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$  donde  $F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$ . Se dice entonces que la función  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ .

### Observación 6.4.1

Si  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$  entonces también lo es de  $\vec{F} + a \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$  constante.

### Proposición 6.4.1

Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo conservativo y  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  un camino  $C^1$  a trozos. Entonces:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

donde  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ .

*Demostración.* Distinguimos dos casos:

#### 1. Caso 1: $\gamma$ es $C^1$ en $[a, b]$

Definimos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $g(t) = \varphi(\gamma(t))$  y aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \gamma \downarrow & \nearrow \varphi & \\ U & & \end{array}$$

En particular tenemos que  $g$  es de clase  $C^1$  y además:

$$g'(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t) = D\varphi(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \langle \nabla \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b g'(t) dt \stackrel{\text{TFC}}{=} g(b) - g(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

## 2. Caso 2: $\gamma$ es $C^1$ a trozos

Se aplica el caso 1 a cada trozo.

□

### Teorema 6.4.1 [Caracterización de los Campos Conservativos]

Sea el conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo, y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo, entonces son equivalentes:

1. El campo  $\vec{F}$  es conservativo.
2.  $\int_{\gamma} \vec{F} = 0$  para todo  $\gamma$  camino cerrado  $C^1$  a trozos en  $U$ .
3.  $\int_{\gamma} \vec{F}$  solamente depende de los extremos de  $\gamma$  para todo  $\gamma$  camino  $C^1$  a trozos en  $U$ .
4.  $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$  para todo  $\sigma$  poligonal cerrado de lados paralelos a los ejes coordenados en  $U$ .
5.  $\int_{\sigma} \vec{F}$  solamente depende de los extremos de  $\sigma$  para todo  $\sigma$  poligonal cerrado de lados paralelos a los ejes coordenados en  $U$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Si  $\gamma$  es un camino cerrado, entonces  $\gamma(a) = \gamma(b)$  y por la proposición anterior:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(b)) = 0$$

- (2)  $\implies$  (3): Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  caminos  $C^1$  a trozos con los mismos extremos. Consideramos  $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ , que es un camino cerrado. Por hipótesis,  $\int_{\gamma} \vec{F} = 0$ , y por la proposición anterior:

$$0 = \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \implies \int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}$$

- (2)  $\implies$  (4) y (3)  $\implies$  (5): trivial
- (4)  $\implies$  (5) : es análogo a (2)  $\implies$  (3).
- (5)  $\implies$  (1) : Consideramos un punto  $x \in U$  y un vector unitario  $e_i$  en la dirección del eje  $i$ -ésimo. Tomamos un segmento de línea recta  $\gamma$  que va de  $x$  a  $x + he_i$ , donde  $h$  es un número real pequeño. La integral de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$  es:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(x + he_i) - \varphi(x)$$

Dividiendo ambos lados por  $h$  y tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

Por otro lado, la integral de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$  también se puede expresar como:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h \vec{F}(x + te_i) \cdot e_i dt$$



Tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \vec{F}(x + te_i) \cdot e_i dt = \vec{F}(x) \cdot e_i = F_i(x)$$

Luego

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \implies \nabla \varphi = \vec{F}$$

□

### Observación 6.4.2

Un poligonal  $\sigma$  de lados paralelos a los ejes es un camino  $\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$  con  $\gamma_j$  segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados.

Además en este caso, si fijamos un punto  $p \in U$  la función  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} = \int_p^x \vec{F} \quad \text{donde } \gamma_x \text{ es un camino de } p \text{ a } x$$

es un potencial de  $\vec{F}$  en  $U$ .

### Lema 6.4.1

Sea el conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo. Dados los puntos  $p, x \in U$ , entonces existe  $\sigma$  poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados en  $U$  tal que  $\sigma$  une  $p$  con  $x$ .

*Demostración.* Sea el conjunto

$$A = \{x \in U \mid \text{existe } \sigma \text{ poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados que une } p \text{ con } x\}$$

- $p \in A \neq \emptyset$ .
- $A$  es abierto. Si  $x \in A$  entonces  $x \in U$  abierto, luego  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U$ . Además,  $B(x, \epsilon) \subset A$ . Si  $y \in B(x, \epsilon)$  entonces  $\exists \sigma_{xy}$  poligonal que une  $x$  con  $y$  y también existe  $\sigma_x$  poligonal que une  $p$  con  $x$ . Por lo tanto,  $\sigma_x + \sigma_{xy}$  es un poligonal que une  $p$  con  $y$ .
- $A$  es cerrado en  $U$ .  $U \setminus A$  es abierto. Si  $x \in U \setminus A$  entonces  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U$ . Como antes, se tiene que  $B(x, \epsilon) \subset U \setminus A$ .

Por lo tanto,  $A$  es abierto y cerrado en  $U$  y como  $U$  es conexo,  $A = U$ .

Podemos definir  $\varphi(x) = \int_{\sigma_x} \vec{F}$  donde  $\sigma_x$  es un poligonal de  $U$  de lados paralelos a los ejes coordenados que une  $p$  con  $x$ .

Veamos que  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$  en  $U$ , es decir,  $\nabla \varphi = \vec{F}$ , o que es lo mismo:

$$\vec{F} = (F_1, \dots, F_n) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)$$

Por tanto nos preguntamos si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+he_i) - \varphi(x)}{h} = F_i(x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .

$$\varphi(x + he_i) - \varphi(x) = \int_p^{x+he_i} \vec{F} - \int_p^x \vec{F} = \int_x^{x+he_i} \vec{F}$$

$$= \int_0^1 \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \underbrace{\langle \vec{F}(\sigma(t)), h e_i \rangle}_{(F_1, \dots, F_n)} dt = \int_0^1 h F_i(\sigma(t)) dt$$

donde

$$\begin{cases} \sigma(t) = x + t h e_i, & t \in [0, 1] \\ \sigma(0) = x, & \sigma(1) = x + h e_i \\ \sigma'(t) = h e_i \end{cases}$$

$$\frac{\varphi(x + h e_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 h F_i(x + t h e_i) dt$$

Expresando  $G(t, h) = F_i(x + t h e_i)$  en términos de  $t$  y  $h$ , entonces obtenemos que  $G$  es continua en  $h$  y  $t$ , por lo tanto, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para intercambiar el límite y la integral.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h e_i) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F_i(x + t h e_i) dt = \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} F_i(x + t h e_i) dt = \int_0^1 F_i(x) dt = F_i(x)$$

□

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\vec{F}(x, y, z) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz))$ , veamos si es conservativo.

Fijamos un punto  $p = (0, 0, 0)$  y definimos  $\sigma_{xyz} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  donde:

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0, 0) & t \in [0, x] \text{ ó } t \in [x, 0] \\ \gamma_2(t) = (x, t, 0) & t \in [0, y] \text{ ó } t \in [y, 0] \\ \gamma_3(t) = (x, y, t) & t \in [0, z] \text{ ó } t \in [z, 0] \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^x \langle (0, t, 0), (1, 0, 0) \rangle dt = 0$$

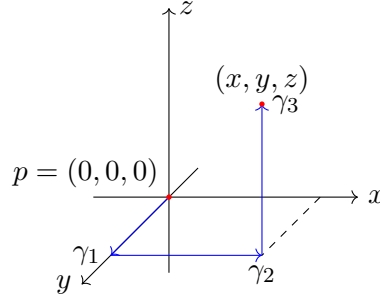
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^y \langle (t, x, t), (0, 1, 0) \rangle dt = \int_0^y x dt = xy$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \int_0^z \langle (y, x + t \cos(yt), y \cos(yt)), (0, 0, 1) \rangle dt = \int_0^z y \cos(yt) dt = [\sin(yt)]_0^z = \sin(yz)$$

Luego  $\varphi(x, y, z) = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} = xy + \sin(yz)$ .

En efecto, para confirmar que  $\vec{F}$  es conservativo, debemos verificar que  $\nabla \varphi = \vec{F}$ .

$$\nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz)) = \vec{F}$$



Por lo tanto,  $\vec{F}$  es conservativo.

De forma alternativa se podría haber visto que  $\vec{F}$  es un campo conservativo, buscando una función  $\varphi$  tal que  $\vec{F} = \nabla\varphi$ , es decir:

$$1. F_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = y \implies \varphi = xy + g(y, z)$$

$$2. F_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x + z \cos(yz) \implies \frac{\partial g}{\partial y} = z \cos(yz) \implies g = \sin(yz) + h(z)$$

$$3. F_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = y \cos(yz) \implies \frac{\partial h}{\partial z} = y \cos(yz) \implies h = \frac{y}{z} \sin(yz) + c$$

$\implies$

$$1. \varphi = \int \frac{d\varphi}{dx} dx = \int y dx = xy + H(y, z) \text{ constante con respecto a } x$$

$$2. \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dH}{dz} = y \cos(yz) \implies H = \int y \cos(yz) dz = \sin(yz) + G(y) \text{ constante con respecto a } z$$

$$3. \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d}{dy}(yx + \sin(yz) + G(y)) = x + z \cos(yz) + G'(y) = x + z \cos(yz) \implies G'(y) = 0 \implies G(y) = cte.$$

### Proposición 6.4.2

Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo conservativo de clase  $C^1 \implies$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ en } U$$

*Demostración.* Tomemos  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = F_i \in C^1 \forall i = 1, \dots, n$ . Luego  $\varphi$  es de clase  $C^2$  y por el teorema de las derivadas cruzadas (Schwartz) se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F_j) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(F_i)$$

□

### Corolario 6.4.1

Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$ , entonces, si  $\vec{F}$  es campo conservativo, se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } U$$

$$(Si (P, Q) = \nabla \varphi \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } U)$$

*Demostración.*

$$\begin{cases} F_1 = P \\ F_2 = Q \end{cases}$$

□

### Observación 6.4.3

*En general el recíproco no es cierto, depende de la forma del dominio  $(U)$ .*

### Observación 6.4.4

Terminología:

- Una forma diferencial de orden 1 en  $U$  es una expresión de la forma  $\omega = Pdx + Qdy$  con  $P, Q$  de clase  $C^1$  en  $U$ .
- $\omega$  es cerrada si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  en  $U$ .
- $\omega$  es exacta si  $\exists \varphi \in C^2(U) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \iff \nabla \varphi = (P, Q)$  en  $U$ .

*Hemos visto que  $\omega$  exacta  $\implies \omega$  cerrada.*

## 7 Teorema de Green

### Definición 7.0.1 [Curva de Jordan]

Una curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  es la imagen de un camino cerrado y simple en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $C = \text{Im}(\gamma)$  con  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua, inyectiva en  $[a, b)$  y  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

### Observación 7.0.1

Se puede demostrar que  $C$  es un homeomorfo a la circunferencia unitaria  $S^1$ .

### Teorema 7.0.1 [Teorema de la curva de Jordan]

Toda curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  divide al plano en dos regiones o componentes conexas, una acotada, denominada parte interior a  $C$  y otra no acotada, denominada parte exterior a  $C$ , siendo  $C$  la frontera común a ambas regiones. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \text{Int}(C) \cup \text{Ext}(C) \cup C \text{ con } \begin{cases} \text{Int}(C) = \text{abierto conexo acotado} \\ \text{Ext}(C) = \text{abierto conexo no acotado} \\ \text{Fr}(\text{Int}(C)) = C = \text{Fr}(\text{Ext}(C)) \end{cases} \quad \text{unión disjunta}$$

### Definición 7.0.2 [Conexión Simple]

Un conjunto abierto y conexo  $U \subset \mathbb{R}^2$  se dice que es simplemente conexo si  $\forall C$  curva de Jordan en  $U$  se tiene que  $\text{Int}(C) \subset U$ . Conceptualmente, esto se ve como que  $U$  no tiene agujeros.

### Definición 7.0.3 [Orientación de una Curva de Jordan]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan de clase  $C^1$  a trozos. Se define la orientación positiva en  $C$  y se denota  $C^+$  como el sentido de recorrido contrario a las agujas del reloj. Conceptualmente, es el sentido de recorrido que deja la parte interior de  $C$  a la izquierda.

### Teorema 7.0.2 [Teorema de Green]

Sean  $C$  curva de Jordan regular a trozos con parte interior  $D = \text{Int}(C)$ ,  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \overline{D} = D \cup C$ . Entonces:

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $C^+$  representa la curva  $C$  con orientación positiva.

*Demostración.* Para el caso de dominios que son a la vez proyectables horizontalmente y verticalmente. Es decir, supongamos que

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde las funciones  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ .

Entonces  $C^+ = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$  donde

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, f(t)), & t \in [a, b] & \gamma'_1(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0) \\ \gamma_2(t) = (b, t) & t \in [c_2, d_2] & \gamma'_2(t) = (0, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, g(t)) & t \in [a, b] & \gamma'_3(t) = (1, g'(t)) \neq (0, 0) \\ \gamma_4(t) = (a, t) & t \in [c_4, d_4] & \gamma'_4(t) = (0, 1) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{C^+} Pdx + Qdy &= \int_{C^+} Pdx + \int_{C^+} Qdy \implies \int_{C^+} Pdx = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4} (P, 0) \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \langle (P(t, f(t)), 0), (1, f'(t)) \rangle dt + \int_{t=c_2}^{t=d_2} \langle (P(b, t), 0), (0, 1) \rangle dt \\ &\quad - \int_{t=a}^{t=b} \langle (P(t, g(t)), 0), (1, g'(t)) \rangle dt - \int_{t=c_4}^{t=d_4} \langle (P(a, t), 0), (0, 1) \rangle dt \\ &= \int_{t=a}^{t=b} P(t, f(t)) - P(t, g(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx = - \int_{x=a}^{x=b} [P(x, y)]_{y=f(x)}^{y=g(x)} dx \\ &= - \int_{x=a}^{x=b} P(x, g(x)) - P(x, f(x)) dx = \int_{x=a}^{x=b} P(x, f(x)) - P(x, g(x)) dx \end{aligned}$$

Usando que  $\overline{D}$  es verticalmente proyectable, hemos obtenido que  $\int_{C^+} Pdx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ .

Usando que  $\overline{D}$  es horizontalmente proyectable, veamos que  $\int_{C^+} Qdy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$ .

Suponemos entonces que

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

donde  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ .

Entonces  $C^+ = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4$  donde

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = (\psi(t), t), & t \in [c, d] & \sigma'_1(t) = (\psi'(t), 1) \\ \sigma_2(t) = (t, d), & t \in [a_2, b_2] & \sigma'_2(t) = (1, 0) \\ \sigma_3(t) = (\varphi(t), t), & t \in [c, d] & \sigma'_3(t) = (\varphi'(t), 1) \\ \sigma_4(t) = (t, c), & t \in [a_4, b_4] & \sigma'_4(t) = (1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{C^+} Qdy &= \int_{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4} (0, Q) \\ &= \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\psi(t), t)), (\psi'(t), 1) \rangle dt - \int_{t=a_2}^{t=b_2} \langle (0, Q(t, d)), (1, 0) \rangle dt \\ &\quad - \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\varphi(t), t)), (\varphi'(t), 1) \rangle dt + \int_{t=a_4}^{t=b_4} \langle (0, Q(t, c)), (1, 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=c}^{t=d} Q(\psi(t), t) - Q(\varphi(t), t) dt \end{aligned}$$

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=c}^{y=d} Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y) dy$$

□

### Observación 7.0.2

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\bar{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

puesto que  $C$  tiene área  $D$ .

### Ejemplo

Vamos a verificar el Teorema de Green para el campo  $\vec{F} = (x^2, xy)$  y la curva de Jordan  $C$  dada por el borde del cuadrado  $[0, 1]^2$ .

$$\begin{cases} P(x, y) = x^2 \\ Q(x, y) = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0), & t \in [0, 1] & \gamma'_1(t) = (1, 0) \\ \gamma_2(t) = (1, t), & t \in [0, 1] & \gamma'_2(t) = (0, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, 1), & t \in [0, 1] & \gamma'_3(t) = (-1, 0) \\ \gamma_4(t) = (0, t), & t \in [0, 1] & \gamma'_4(t) = (0, 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{C^+} x^2 dx + xy dy &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} x^2 dx + xy dy \\ &= \underbrace{\int_0^1 \langle (t^2, 0), (1, 0) \rangle dt}_{\gamma_1} + \underbrace{\int_0^1 \langle (1, t), (0, 1) \rangle dt}_{\gamma_2} - \underbrace{\int_0^1 \langle (t^2, t), (1, 0) \rangle dt}_{\gamma_3} - \underbrace{\int_0^1 \langle (0, 0), (0, 1) \rangle dt}_{\gamma_4} \\ &= \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt + \int_{t=0}^{t=1} t dt - \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt - 0 = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D (y - 0) dx dy = \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=1} y dy \right) dx = \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

### Ejemplo

Verificar el teorema de Green para la circunferencia de radio 2 y centro en el origen, el campo  $\vec{F} = (x - y, x + y)$ .

$$\begin{cases} \gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), & t \in [0, 2\pi] & \gamma(0) = \gamma(2\pi) \text{ para } \gamma(0) \neq \gamma(t) \forall t \in (0, 2\pi) \\ \gamma'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$\bar{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\int_{C^+} (x - y) dx + (x + y) dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (2 \cos(t) - 2 \sin(t), 2 \cos(t) + 2 \sin(t)), (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} (-4 \cos(t) \sin(t) + 4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) - 4 \sin(t) \cos(t)) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 4 dt = 8\pi$$

•

$$\int_{\overline{D}} (1+1) dx dy = 2(\text{área}(\overline{D})) = 2(\pi 2^2) = 8\pi$$

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = (x^2 + y^2, -3xy + xy^3 + y^2)$  sobre la curva definida por el cuadrado  $[0, 1]^2$ . Veamos dos maneras de calcular la integral de camino dada por  $\int_{\gamma} F \cdot dr$ .

- Podemos describir la curva como producto de una concatenación de curvas:  $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_4$  donde:

$$\begin{cases} \gamma_1 \equiv (4t, 0) : t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \gamma_2 \equiv (1, 4t - 1) : t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}) \\ \gamma_3 \equiv (3 - 4t, 1) : t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}) \\ \gamma_4 \equiv (0, 4 - 4t) : t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \sum_{k=1}^4 \int_{\frac{k-1}{4}}^{\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma'_k(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^4 \int_{\frac{k-1}{4}}^{\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma'_k(t) \rangle dt = \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} \langle (4t)^2 + 0, -3 \cdot (4t) \cdot 0 + 4t \cdot 0^3 + 0 \rangle, (4, 0) \rangle dt + \\ &+ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} \langle (t^2 + (4t - 1)^2, -3(4t - 1) + (4t - 1)^3 + (4t - 1)^2) \rangle, (0, 4) \rangle dt + \\ &+ \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} \langle (3 - 4t)^2 - 1^2, -3(3 - 4t) + (3 - 4t) + 1 \rangle, (-4, 0) \rangle dt + \\ &+ \int_{\frac{3}{4}}^1 \langle (4 - 4t)^2, (4 - 4t)^2 \rangle, (0, -4) \rangle dt \end{aligned}$$

Y resolveríamos las integrales polinómicas de forma usual.

- Otra forma de resolverlo es aplicando el teorema de Green:

Para ello veamos que el camino definido anteriormente sea una Curva de Jordan

$$\begin{cases} \text{Simple: } \forall t_1, t_2 \in (a, b) : t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \\ \text{Cerrada: } \gamma(0) = \gamma(1) \\ \text{Regular: } \|\gamma'(t)\| \neq 0 \forall t \in [0, 1] \end{cases} \implies \text{ es una curva de Jordan}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= -3y + y^3 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \implies \\ \int_{\gamma} F &= \int_0^1 \left( \int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx = \left[ \frac{-3y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{-3y^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$



### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  y el camino dado por:

$$\gamma(t) = (8 + 3 \cos(2\pi t), 6 + 3 \sin(2\pi t))$$

con  $t \in [0, 1]$ .

Veamos cómo lo haríamos a través de la definición:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \left( \frac{-6 - 3 \sin(2\pi t)}{200 + 48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t)}, \frac{8 + 3 \cos(2\pi t)}{48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t) + 99} \right), (-6 \sin(2\pi t), 6 \cos(2\pi t)) \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \frac{18 + 36\pi \sin(2\pi t) + 48\pi \cos(2\pi t)}{48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t) + 99} dt = \dots = 0. \end{aligned}$$

### Observación 7.0.3

La integral anterior se resolvería haciendo uso del cambio de variable  $u = tg(\frac{t}{2})$ , el cual suele usarse para integrales de la forma:

$$\int \frac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))} dt$$

Haciendo uso del Teorema de Green, y verificando en primer lugar que se cumple que  $\gamma$  es una Curva de Jordan:

$$\begin{cases} \gamma(t) \text{ está orientada positivamente} \\ \gamma(0) = \gamma(1) = (11, 6) \\ \|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \\ \begin{cases} 8 + 3 \cos(2\pi t) = 8 + 3 \cos(2\pi t') \\ 6 + 3 \sin(2\pi t) = 6 + 3 \sin(2\pi t') \end{cases} \iff t = 0, t' = 1 \implies \gamma \text{ es simple} \end{cases}$$

$F$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , por lo que podemos aplicar el Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\implies \int \int_{int(\gamma)} 0 dx dy = 0 \end{aligned}$$

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  y el camino dado por  $\gamma(t) = (\epsilon \cos(2\pi t), \epsilon \sin(2\pi t))$  con  $t \in [0, 1]$  y  $\epsilon > 0$ .

Este caso es un ejemplo de un campo vectorial y un camino en el que no es posible hacer uso del Teorema de Green ya que el origen es un punto de discontinuidad y por tanto  $F$  no es de clase  $C^1$ .

No obstante si se puede calcular a través de la definición:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \left( \frac{-\epsilon \sin(2\pi t)}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon \cos(2\pi t)}{\epsilon^2} \right), (-2\pi \epsilon \sin(2\pi t), 2\pi \epsilon \cos(2\pi t)) \right\rangle dt = \\ &= \int_0^1 2\pi dt = 2\pi\end{aligned}$$

### Ejemplo

Sea  $\gamma$ -camino simple, cerrado, regular y orientada positivamente con 2 cortes en cada eje y tal que  $(0,0) \in \text{int}(\gamma)$

### Corolario 7.0.1

Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto simplemente conexo y el campo vectorial  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\vec{F}$  es conservativo en  $U \iff Pdx + Qdy$  es exacta en  $U$ , es decir,  $\exists \varphi \in C^2(U)$  tal que  $d\varphi = Pdx + Qdy$ .
2.  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  en  $U \iff Pdx + Qdy$  es cerrada en  $U$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Es cierto siempre. Si  $(P, Q) = \nabla \varphi$  con  $\varphi \in C^2(U)$  entonces  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .
- (2)  $\implies$  (1): Sea  $\sigma$  poligonal cerrada en  $U$  de lados paralelos a los ejes coordenados. Veamos que  $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$ .  
Entonces  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$  donde cada  $\sigma_j$  tiene imagen  $\text{Im}(\sigma_j) = C_j$ , curva de Jordan poligonal.

$$\int_{\sigma} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{(\partial D_j)^+} Pdx + Qdy = \sum_{j=1}^n \int_{D_j} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

□

### Ejemplo

El resultado anterior puede fallar si  $U$  no es simplemente conexo. Sean  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  que es  $C^\infty$  en  $U$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

pero podemos ver que  $\vec{F}$  no es conservativo en  $U$  ya que tomando  $\gamma_r(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$  con  $r > 0$  y  $t \in [0, 2\pi]$  tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left( \frac{-r \sin(t)}{r^2}, \frac{r \cos(t)}{r^2} \right), (-r \sin(t), r \cos(t)) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0\end{aligned}$$

luego como  $\gamma_r$  es cerrada y  $\int_{\gamma_r} \vec{F} \neq 0$  entonces  $\vec{F}$  no es conservativo en  $U$ .

Sabemos que  $\vec{F}$  no es conservativo, pero nos podemos preguntar si se puede encontrar un potencial para  $\vec{F}$  en  $U$ .

Buscamos  $\varphi$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} P = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) &= \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Entonces  $\varphi$  es un potencial para  $\vec{F}$  en  $W = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$ .

### **Teorema 7.0.3** [Teorema de Green General - Dominios Múltiplemente Conexos]

Sean  $C_0, C_1, \dots, C_m$  curvas de Jordan regulares a trozos en  $\mathbb{R}^2$  tal que:

1.  $C_j \subset \text{Int}(C_0) \forall j = 1, \dots, m$
2.  $C_i \subset \text{Ext}(C_j) \forall i, j = 1, \dots, m$  con  $i \neq j$

Sean  $D = \text{Int}(C_0) \cap (\text{Ext}(C_1) \cup \dots \cup \text{Ext}(C_m))$  y  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \overline{D} = D \cup C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_m$ . Entonces:

$$\int_{(\partial D)^+} P dx + Q dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $(\partial D)^+ = C_0^+ - \sum_{j=1}^m C_j^+$ .

### **Definición 7.0.4** [Divergencia de un Campo Vectorial]

Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define la divergencia de  $\vec{F}$  como:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

### **Observación 7.0.4**

Sea el vector  $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ , entonces tenemos dos vectores ortogonales a  $\vec{u}$  que son  $\vec{v} = (u_2, -u_1)$  y  $\vec{w} = (-u_2, u_1)$ , y que se obtienen rotando  $\vec{u}$  90 grados en sentido horario y antihorario respectivamente.

### **Definición 7.0.5** [Vector Normal Unitario Exterior]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan regular a trozos en  $D = \text{Int}(C)$ . Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización

regular a trozos de  $C$  que induce la orientación positiva  $C^+$ . Para cada  $t_0 \in [a, b]$ , excepto una cantidad finita de ellos, consideramos el vector tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$ :

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0))$$

Se define entonces el vector normal unitario exterior a  $C$  en  $\gamma(t_0)$  como:

$$\vec{n}(\gamma(t_0)) = \left( \frac{\gamma'_2(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, -\frac{\gamma'_1(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right)$$

#### Teorema 7.0.4 [Teorema de la Divergencia]

Supongamos que tenemos  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan regular a trozos con  $D = \text{Int}(C)$  y sea  $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \overline{D} = D \cup C$ . Entonces:

$$\int_D \text{div}(\vec{F}) = \int_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal unitario exterior a  $C^+$ .

*Demostración.* Consideramos el campo vectorial  $\vec{G} = (-F_2, F_1) = (P, Q)$  y aplicamos el Teorema de Green:

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C^+} P dx + Q dy$$

•

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \text{div}(\vec{F}) dx dy$$

•

$$\int_{C^+} \underbrace{\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle}_{\text{campo escalar}} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \vec{n}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle (F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t))), (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \rangle dt$$

$$= \int_a^b -F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) dt = \int_{C^+} P dx + Q dy$$

□

## 8 Superficies Paramétricas

### Definición 8.0.1 [Superficie Paramétrica]

Una parametrización de una superficie paramétrica  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$  definida en un abierto conexo  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que:

$$Im(\varphi) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in U\} = S$$

Diremos que la parametrización  $\varphi$  es regular cuando la pareja de vectores  $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\}$  es linealmente independiente en todo punto de  $U$ . Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a  $\varphi$  es no nulo en todo punto de  $U$ :

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$$

En este caso, el plano tangente a la superficie en el punto  $\varphi(u_0, v_0)$  tiene como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = \varphi_2(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z = \varphi_3(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

### Ejemplo

Dada la superficie  $z = x^2 + y^2$ , podemos parametrizarla con  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ . Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2x\vec{e}_3 + 2y\vec{e}_2 \neq (0, 0, 0)$$

### Ejemplo

Superficies explícitas: Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto conexo y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Entonces la gráfica de  $f$  es una superficie regular con parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Veamos que  $\vec{N}_\varphi \neq (0, 0, 0)$ :

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_3 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_2 \neq (0, 0, 0)$$

$$Im(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

### Ejemplo

Dado el cilindro de ecuaciones  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 < z < 1$ , busquemos una parametrización de la superficie. Tomando la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, 1)$$

entonces vemos que  $\underbrace{x^2 + y^2}_1 = r^2 \implies r = 1$ .

Por tanto, obtenemos que nuestra parametrización es:

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \neq (0, 0, 0)$$

### Ejemplo

Tomando el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 < z < 1$  del ejemplo anterior, podemos parametrizarlo de otra forma.

Consideramos el siguiente conjunto:

$$U = \{(u, v) : 1 < \sqrt{u^2 + v^2} < 2, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

entonces definimos nuestra parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sobre este conjunto tal que

$$\varphi(u, v) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \sqrt{u^2 + v^2} - 1 \right)$$

### Definición 8.0.2 [Superficies Equivalentes]

Diremos que dos superficies paramétricas  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definidas respectivamente sobre los conjuntos abiertos conexos  $U, V \subset \mathbb{R}^2$ , son equivalentes si existe una aplicación biyectiva  $h : V \rightarrow U$  de clase  $C^1$  (es decir, un difeomorfismo) tal que:

$$\psi = \varphi \circ h.$$

### Observación 8.0.1

1. En este caso  $\varphi(U) = \psi(V)$ .
2. En la definición se pide que los conjuntos  $U$  y  $V$  sean conexos. Como  $\forall (s, t) \in V$ ,  $D_h(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un isomorfismo lineal, sabemos que  $\det(D_h(s, t)) \neq 0$ . Por conexión,  $\det(D_h(s, t))$  conserva el signo en todo  $V$ .

### Definición 8.0.3 [Conservación de la Orientación]

1. Se dice que  $h$  conserva la orientación si  $\det(D_h(s, t)) > 0$  para todo  $(s, t) \in V$ , es decir las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  tienen la misma orientación.
2. Se dice que  $h$  cambia la orientación si  $\det(D_h(s, t)) < 0$  para todo  $(s, t) \in V$ , es decir las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  tienen orientaciones opuestas.

### Lema 8.0.1

Sean  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones equivalentes de una superficie  $S$ . Entonces,

para todo  $(s, t) \in V$ , se cumple que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s, t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(s, t))$$

Equivalentemente,

$$\vec{N}_\psi(s, t) = \det(D_h(s, t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s, t))$$

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena a  $\psi = \varphi \circ h$ , obtenemos la siguiente relación entre las matrices jacobianas:

$$D_\psi(s, t) = D_\varphi(h(s, t)) \cdot D_h(s, t).$$

En términos de las derivadas parciales, esto se traduce en:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial t},$$

donde  $h(s, t) = (h_1(s, t), h_2(s, t))$ .

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial como:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot D_h(s, t),$$

donde  $D_h(s, t)$  es la matriz jacobiana de  $h$ :

$$D_h(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos el producto vectorial de las derivadas parciales de  $\psi$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Utilizando las expresiones anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right) \times \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial t} \right).$$

Expandiendo el producto vectorial y usando que  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Notamos que el término entre paréntesis a la derecha es el determinante de la matriz jacobiana  $D_h(s, t)$ :

$$\det(D_h(s, t)) = \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s, t)) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)(h(s, t)).$$

Equivalentemente, para los vectores normales unitarios:

$$\vec{N}_\psi(s, t) = \det(D_h(s, t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s, t)),$$

donde  $\vec{N}_\psi$  y  $\vec{N}_\varphi$  son los vectores normales unitarios asociados a las parametrizaciones  $\psi$  y  $\varphi$ , respectivamente.  $\square$

**Definición 8.0.4** [Orientación de una Superficie]

Asociadas a las parametrizaciones  $\varphi$  y  $\psi$  obtenemos los vectores normales unitarios

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{N}_\varphi}{\|\vec{N}_\varphi\|} \quad y \quad \vec{n}_\psi = \frac{\vec{N}_\psi}{\|\vec{N}_\psi\|}$$

Entonces diremos que  $\varphi$  y  $\psi$  tienen la misma orientación si:

$$\vec{n}_\psi(s, t) = \vec{n}_\varphi(h(s, t)) \quad o \quad \vec{n}_\psi(s, t) = -\vec{n}_\varphi(h(s, t))$$

**8.1 Superficies como Conjuntos****Definición 8.1.1** [Superficie Simple Regular]

Diremos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie simple regular si  $S = \varphi(\overline{D})$  donde  $\overline{D} = \text{Int}(C)$  siendo  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan regular a trozos, y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de clase  $C^1$  inyectiva y regular en  $\overline{D}$ .

En este caso, se dice que la curva  $\varphi(C)$  es el borde de  $S$ . Así,  $\gamma = \varphi(C)$  es una curva cerrada y regular a trozos en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 8.1.2** [Superficie Casi-Simple Regular]

Diremos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie casi-simple regular si  $S = \varphi(\overline{D})$  donde  $\overline{D} = \text{Int}(C)$  siendo  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan regular a trozos, y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de clase  $C^1$  inyectiva y regular en  $D$ .

**Definición 8.1.3**

Dada una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  simple regular o casi-simple regular, y una parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$  de  $S$ , definimos:

1. El área de la superficie  $S$  como:

$$a(S) = \int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

2. Si  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  es:

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

**Ejemplo**

Consideramos la superficie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  resultante de acotar un cono por dos planos paralelos al plano  $XY$ , y dada por las ecuaciones:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 1 < z < 2\}$$

Calculemos el área de la superficie  $S$ :



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2 = z^2 \implies r = z \quad \varphi(\theta, z) = \begin{cases} x = z \cos(\theta) \\ y = z \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\overline{D} = [0, 2\pi] \times [1, 2] \quad S = \varphi(D)$$

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z \sin(\theta) & z \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = z^2 \cos^2(\theta) + z^2 \sin^2(\theta) + (-z)^2 = 2z^2 \implies \|\vec{N}_\varphi\| = z\sqrt{2} \neq 0 \quad \forall (0, z) \in D$$

Entonces  $\varphi$  es inyectiva y regular en  $D$  (aunque no en  $\overline{D}$ ), luego  $S$  es una superficie casi-simple regular.

Por último, el área de la superficie  $S$  es:

$$\begin{aligned} a(S) &= \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[ \frac{z^2}{2} \sqrt{2} \right]_1^2 d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \frac{4}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{3}{2} \sqrt{2} d\theta = \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 2\pi = 3\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

### Ejemplo

Dada la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , calculemos la integral de superficie de  $f$  sobre la superficie  $S$  dada por la sección de cono  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $1 < z < 2$  del ejemplo anterior.

Entonces, la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  es:

$$\begin{aligned} \int_S f dS &= \int_D f(\varphi(\theta, z)) \|\vec{N}_\varphi\| d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 \cdot z\sqrt{2} dz d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} [z^4]_1^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} (16 - 1) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{30\sqrt{2}}{4} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{15\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot (2\pi) = 15\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

Observemos que  $\int_S f dA = \int_S f dS$ .

## 9 Integrales de superficie

## 10 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss