Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Superficies Paramétricas

Definición 1.0.1 [Superficie Paramétrica]

Una parametrización de una superficie paramétrica S en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 definida en un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

$$Im(\varphi) = \{\varphi(u,v) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in U\} = S$$

Diremos que la parametrización φ es regular cuando la pareja de vectores $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\}$ es linealmente independiente en todo punto de U. Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a φ es no nulo en todo punto de U:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$$

En este caso, el plano tangente a la superficie en el punto $\varphi(u_0,v_0)$ tiene como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u_0,v_0) + \lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ y = \varphi_2(u_0,v_0) + \lambda\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u_0,v_0) \\ z = \varphi_3(u_0,v_0) + \lambda\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Dada la superficie $z = x^2 + y^2$, podemos parametrizarla con $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$. Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2x\vec{e}_3 + 2y\vec{e}_2 \neq (0,0,0)$$

Ejemplo

Superficies explícitas: Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces la gráfica de f es una superficie regular con parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.
Veamos que $\vec{N}_\varphi \neq (0,0,0)$:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_3 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_2 \neq (0,0,0)$$

$$Im(\varphi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in U, z = f(x,y)\}$$

Ejemplo

Dado el cilindro de ecuaciones $x^2+y^2 = 1,\ 0 < z < 1$, buscamos una parametrización de la superficie. Tomando la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}, \quad z \in (0,1)$$

entonces vemos que $\underbrace{x^2+y^2}_{1} = r^2 \implies r = 1$.

Por tanto, obtenemos que nuestra parametrización es:

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \neq (0,0,0)$$

Ejemplo

Tomando el cilindro $x^2 + y^2 = 1, \; 0 < z < 1$ del ejemplo anterior, podemos parametrizarlo de otra forma.
Consideramos el siguiente conjunto:

$$U = \{(u,v) : 1 < \sqrt{u^2+v^2} < 2, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

entonces definimos nuestra parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ sobre este conjunto tal que

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sqrt{u^2+v^2} - 1 \right)$$

Definición 1.0.2 [Superficies Equivalentes]

Diremos que dos superficies paramétricas $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^3$, definidas respectivamente sobre los conjuntos abiertos conexos $U, V \subset \mathbb{R}^2$, son equivalentes si existe una aplicación biyectiva $h : V \to U$ de clase C^1 (es decir, un difeomorfismo) tal que:

$$\psi = \varphi \circ h.$$

Observación 1.0.1

1. *En este caso $\varphi(U) = \psi(V)$.*
2. *En la definición se pide que los conjuntos U y V sean conexos. Como $\forall (s,t) \in V$, $D_h(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo lineal, sabemos que $det(D_h(s,t)) \neq 0$. Por conexión, $det(D_h(s,t))$ conserva el signo en todo V.*

Definición 1.0.3 [Conservación de la Orientación]

1. *Se dice que h conserva la orientación si $det(D_h(s,t)) > 0$ para todo $(s,t) \in V$, es decir las funciones φ y ψ tienen la misma orientación.*
2. *Se dice que h cambia la orientación si $det(D_h(s,t)) < 0$ para todo $(s,t) \in V$, es decir las funciones φ y ψ tienen orientaciones opuestas.*

Lema 1.0.1

Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones equivalentes de una superficie S. Entonces, *para todo $(s,t) \in V$, se cumple que:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = det(D_h(s,t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(s,t))$$

Equivalentemente,

$$\vec{N}_\psi(s,t) = det(D_h(s,t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s,t))$$

Demostración. Aplicando la regla de la cadena a $\psi = \varphi \circ h$, obtenemos la siguiente relación entre las matrices jacobianas:

$$D_\psi(s,t) = D_\varphi(h(s,t)) \cdot D_h(s,t).$$

En términos de las derivadas parciales, esto se traduce en:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial t},$$

donde $h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$.

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial como:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \cdot D_h(s,t),$$

donde $D_h(s,t)$ es la matriz jacobiana de h:

$$D_h(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos el producto vectorial de las derivadas parciales de ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Utilizando las expresiones anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial t}\right).$$

Expandiendo el producto vectorial y usando que $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right).$$

Notamos que el término entre paréntesis a la derecha es el determinante de la matriz jacobiana $D_h(s,t)$:

$$\det(D_h(s,t)) = \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)(h(s,t)).$$

Equivalentemente, para los vectores normales unitarios:

$$\vec{N}_\psi(s,t) = \det(D_h(s,t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s,t)),$$

donde $\vec{N}_\psi$ y $\vec{N}_\varphi$ son los vectores normales unitarios asociados a las parametrizaciones ψ y φ, respectivamente. $\square$

Definición 1.0.4 [Orientación de una Superficie]

Asociadas a las parametrizaciones φ y ψ obtenemos lso vectores normales unitarios

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{N}_\varphi}{||\vec{N}_\varphi||} \quad y \quad \vec{n}_\psi = \frac{\vec{N}_\psi}{||\vec{N}_\psi||}$$

Entonces diremos que φ y ψ tienen la misma orientación si:

$$\vec{n}_\psi(s,t) = \vec{n}_\varphi(h(s,t)) \ o \ \vec{n}_\psi(s,t) = -\vec{n}_\varphi(h(s,t))$$

2 Integrales de superficie

2.1 Superficies como Conjuntos

Definición 2.1.1 [Superficie Simple Regular]

Diremos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie simple regular si $S = \varphi(\overline{D})$ donde $D = Int(C)$ siendo $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase C^1 inyectiva y regular en $\overline{D} \subset U$.
En este caso, el borde de S de define como $\partial S = \varphi(C)$, que es una curva cerrada y regular a trozos en $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.1.2 [Superficie Casi-Simple Regular]

Diremos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie casi-simple regular si $S = \varphi(\overline{D})$ donde $D = Int(C)$ siendo $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase C^1 inyectiva y regular en D.

Definición 2.1.3 [Área e Integral de una Superficie]

Dada una superficie S en $\mathbb{R}^3$ simple regular o casi-simple regular, y una parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 de S, definimos:

1. *El área de la superficie S como:*

$$a(S) = \int_S 1dS = \int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv$$

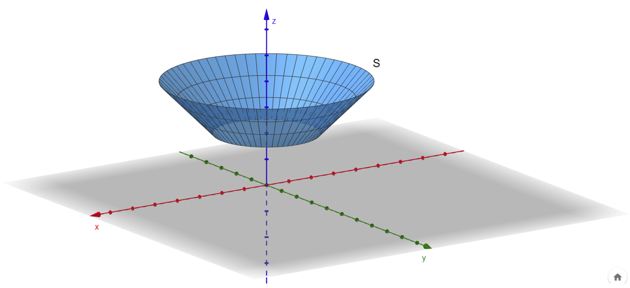
2. *Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral de superficie de f sobre S es:*

$$\int_S fdS = \int_D f(\varphi(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_D f(\varphi(u,v)) \|\vec{N}_\varphi\| dudv$$

Ejemplo

Consideramos la superficie S de $\mathbb{R}^3$ resultante de acotar un cono por los planos $z = 1$ y $z = 2$.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ 1 < z < 2\}$$



Calculemos el área de la superficie S:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \qquad r^2 = x^2 + y^2 = z^2 \implies r = z \qquad \varphi(\theta, z) = \begin{cases} x = z\cos(\theta) \\ y = z\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\overline{D} = [0, 2\pi] \times [1, 2] \qquad S = \varphi(D)$$

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z\sin(\theta) & z\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = z^2\cos^2(\theta) + z^2\sin^2(\theta) + (-z)^2 = 2z^2 \implies \|\vec{N}_\varphi\| = z\sqrt{2} \neq 0 \quad \forall (0, z) \in D$$

Entonces φ es inyectiva y regular en D (aunque no en $\overline{D}$), luego S es una superficie casi-simple regular.
Por último, el área de la superficie S es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\sqrt{2}\right]_{z=1}^{z=2} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\frac{4}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{3}{2}\sqrt{2} d\theta = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot 2\pi = 3\pi\sqrt{2}$$

Ejemplo

Dada la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calculemos la integral de superficie de f sobre la superficie S dada por la sección de cono $x^2 + y^2 = z^2,\ 1 < z < 2$ del ejemplo anterior.
Entonces, la integral de superficie de f sobre S es:

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(\theta, z)) \|\vec{N}_\varphi\| d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 \cdot z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} \left[z^4\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4}(16 - 1)\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{30\sqrt{2}}{4} d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{15\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot (2\pi) = 15\pi\sqrt{2}$$

Observemos que $\int_S f dA = \int_S f dS$.

Ejemplo

Área de la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio R:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(\theta, \phi) = \begin{cases} x = R\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y = R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = R\cos(\phi) \end{cases} \qquad \overline{D} = \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Entonces, tenemos que $D = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ y $\overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R\sin(\theta)\sin(\phi) & R\cos(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ R\cos(\theta)\cos(\phi) & R\sin(\theta)\cos(\phi) & -R\sin(\phi) \end{vmatrix}$$

$$= R^2\sin(\phi)\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi)\end{vmatrix} = -R^2\sin(\phi)\left(\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi)\right)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = R^4\sin^4(\phi) + R^4\sin^2(\phi)\cos^2(\phi) = R^4\sin^2(\phi)\left(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)\right) = R^4\sin^2(\phi)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\| = R^2\sin(\phi)$$

Luego el área de la esfera es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} R^2\sin(\phi) d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[-R^2\cos(\phi)\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -R^2\left((-1)-1\right)d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2R^2 d\theta = 2R^2\cdot(2\pi) = 4\pi R^2$$

2.2 Superficies Regulares a Trozos

Definición 2.2.1 [Suma de Superficies]

Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies simples regulares. Se dice que la superficie S es la suma de S_1 y S_2, y se denota por $S = S_1 + S_2$, si:

1. $S = S_1 \cup S_2$
2. $S_1 \cap S_2 \subset \partial S_1 \cap \partial S_2$

En este caso, se define el borde de S como:

$$\partial S = \overline{(\partial S_1 \cup \partial S_2) \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)}$$

Si $\partial S = \emptyset$, entonces se dice que S no tiene borde y es cerrada.

Análogamente, se define la suma de superficies $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ siendo cada S_i una superficie simple regular.

Ejemplo

Consideramos el cubo S formado por la suma de las superficies de los seis lados del cubo $S = S_1, S_2, \ldots, S_6$. En particular tenemos que $\partial S = \emptyset$.

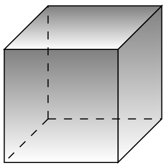
Ejemplo

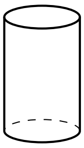
Consideramos ahora el cilindro S formado por la suma de las superficies de los dos "tapas" del cilindro S_1, S_2 y la superficie lateral dividida en dos partes iguales S_3 y S_4. En este caso, tenemos que $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, y como en el caso anterior, $\partial S = \emptyset$.

Ejemplo

Quitémosle una de las tapas al cilindro, entonces tenemos que $S = S_1 + S_2 + S_3$, y en este caso

$$\begin{cases} \partial(S_1 + S_2) = C_0 \cup C_1 \\ \partial S_3 = C_0 \\ \partial S = \overline{(\partial(S_1 + S_2) \cup \partial S_3) \setminus (\partial S_1 + S_2) \cap \partial S_3} = \overline{(C_0 \cup C_1 \cup C_0) \setminus (C_0)} = \overline{C_1} = C_1 \end{cases}$$





Sea $\vec{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y S una superficie. Nos preguntamos qué orientación tiene el campo $\vec{F}$ en la superficie S.
Necesitamos, por tanto, orientar S de alguna forma.

2.3 Orientación de Superficies

Definición 2.3.1 [Normal Unitaria de una Superficie]

*Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Una **normal unitaria** en S es una función continua*

$$\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$$

*tal que, para todo punto $p \in S$, se cumple que $\vec{n}(p)$ es un vector **unitario** y **normal** a la superficie en p, es decir:*

$$\vec{n}(p) \perp T_p(S) \quad y \quad \|\vec{n}(p)\| = 1,$$

donde $T_p(S)$ denota el plano tangente a S en el punto p.

Definición 2.3.2 [Superficie Orientada]

*Una **superficie simple regular orientada** es un par $(S, \vec{n})$, donde S es una superficie regular y simple, y $\vec{n}$ es una normal unitaria que asigna de forma continua a cada punto de S una orientación consistente.*

Observación 2.3.1

Una superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones posibles.

Sea $\varphi : \overline{D} \to S$ una parametrización simple y regular de S, según la definición adoptada para S. Consideramos el siguiente campo normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}.$$

$$\begin{tikzcd} \overline{D} \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[d, "\vec{n}_\varphi"'] & S \arrow[l, bend left, "\varphi^{-1}"] \arrow[dl, "\vec{n}"] \\ \mathbb{R}^3 & \end{tikzcd}$$

Entonces, la función $\vec{n} = \vec{N}_\varphi \circ \varphi^{-1}$ define una normal unitaria en S, ya que $\varphi : \overline{D} \to S$ es un homeomorfismo.

Asimismo, la función $-\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$ también es una normal unitaria en S, lo que muestra que toda superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones opuestas.

Sean ahora $\vec{n}_1, \vec{n}_2 : S \to \mathbb{R}^3$ dos normales unitarias en S. Definimos la función

$$h(p) = \langle \vec{n}_1(p), \vec{n}_2(p) \rangle$$

para todo $p \in S$. Esta función $h : S \to \mathbb{R}$ es continua, y como $\vec{n}_1(p)$ y $\vec{n}_2(p)$ son vectores unitarios, se cumple que $|h(p)| = 1$ para todo $p \in S$.

Dado que S es conexa, la imagen de h debe ser conexa y contenida en el conjunto $\{-1, 1\}$. Por tanto, $h(p) \equiv 1$ o $h(p) \equiv -1$ en toda la superficie. En consecuencia, $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ o $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ en todo S.

Definición 2.3.3 [Integral de un Campo Vectorial sobre una Superficie]

Sean $(S, \vec{n})$ superficie simple regular orientada y $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Se define

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

Observación 2.3.2

1. *$\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$ es un campo escalar continuo en S.*
2. *Si $\varphi : \overline{D} \to S$ es una parametrización simple regular de S tal que $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$,*

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u,v)), \vec{n}_\varphi(u,v) \rangle \|\vec{N}_\varphi(u,v)\| dudv = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u,v)), \vec{N}_\varphi(u,v) \rangle dudv$$

Ejemplo

Consideremos el paraboloide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$ y lo orientamos con la normal exterior (la que apunta hacia afuera del vaso).
Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (xz, yz, 0)$, entonces queremos encontrar la integral de $\vec{F}$ sobre S.

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \partial D = C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Consideramos la parametrización del paraboloide dada por:

$$\varphi : \overline{D} \to S \qquad \varphi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Nos preguntamos si $\vec{n}_\varphi$ induce la misma orientación que $\vec{n}$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{N}_\varphi(0,0) = (0,0,1) \\ \varphi(0,0) = (0,0,0) \end{cases} \qquad \text{que apunta hacia arriba, es decir, hacia dentro del vaso, luego } \vec{n}_\varphi = -\vec{n}$$

$$-\int_D \langle \vec{F}(\varphi(x,y)), \vec{N}_\varphi(x,y)\rangle dxdy = -\int_D \langle (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), 0), (-2x,-2y,1)\rangle dxdy$$
$$= \int_D 2x^2(x^2+y^2) + 2y^2(x^2+y^2) dxdy = 2\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy$$

Hacemos el cambio de variables a coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta) \qquad dxdy = rdrd\theta$$

$$2\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot rdrd\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{1}{6}d\theta = 2\frac{1}{6}(2\pi) = 2\frac{\pi}{3}$$

Definición 2.3.4 [Orientación Inducida en el Borde]

Sea $(S, \vec{n})$ una superficie simple, regular y orientada, y sea $\varphi : \overline{D} \to S$ una parametrización regular de S que preserva la orientación inducida por $\vec{n}$, es decir, $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$. Consideramos el borde de S denotado por $\partial S = \varphi(\partial D)$.
Entonces se define la orientación de ∂S inducida por $\vec{n}$ como la que se obtiene al recorrer ∂D en sentido positivo y proyectar dicho recorrido a ∂S mediante φ, es decir, haciendo la composición $\varphi \circ \gamma$, donde $\gamma : [a,b] \to \partial D$ es una parametrización de ∂D que recorre ∂D en sentido positivo.

Observación 2.3.3

Si $\gamma : [a,b] \to \partial D$ es una parametrización de ∂D que recorre esta curva en sentido positivo, entonces la curva $\varphi \circ \gamma : [a,b] \to \partial S$ recorre ∂S con la orientación inducida por $\vec{n}$.

Geométricamente, esto significa que ∂S se recorre de manera que el sacacorchos avanza en la dirección de $\vec{n}$, es decir, si imaginamos un sacacorchos girando en el sentido del recorrido de ∂S, este se desplazará en la dirección de $\vec{n}$.

De manera equivalente, si $\vec{n}$ representa la vertical en el espacio, entonces ∂S se recorre dejando la superficie S a la izquierda, lo que coincide con la orientación inducida por $\vec{n}$.

Ejemplo

Dada la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2 \leq 1\}$ del ejemplo anterior, orientada con la normal exterior, y una parametrización $\varphi : \overline{D} \to S$ dada por $\varphi(x,y) = (x,-y,x^2+y^2)$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, veamos que $\vec{n}_\varphi = \vec{n}$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & -1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x,-2y,-1)$$

Haciendo la evaluación $\vec{N}_\varphi(0,0) = (0,0,-1)$, vemos que la normal de φ en el punto $(0,0)$ tiene el mismo sentido que $\vec{n}$, es decir, $\vec{n}_\varphi = \vec{n}$, luego φ preserva la orientación de S.
Ahora consideremos una parametrización γ de $C = \partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ en sentido

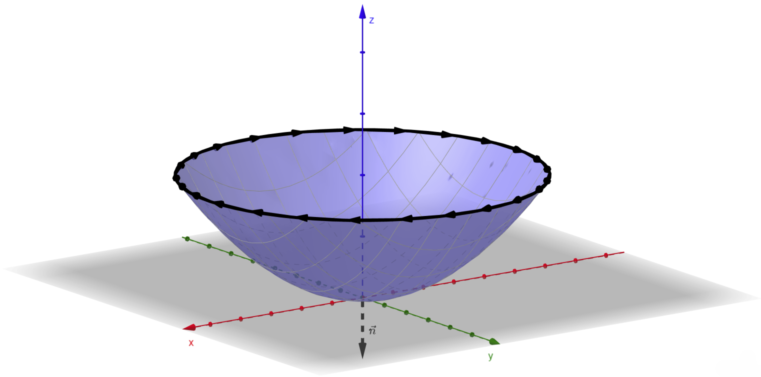
positivo (antihorario en el plano xy), definida por:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \partial D \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Fijémonos que la curva definida por γ es una curva de Jordan-C^1 que deja el interior de ∂D a la izquierda y el exterior a la derecha, es decir, es positiva.
Componiendo con la transformación φ, obtenemos la curva proyectada en S:

$$\varphi \circ \gamma : [0, 2\pi] \to \partial S \qquad (\varphi \circ \gamma)(t) = (\cos t, -\sin t, \cos^2 t + \sin^2 t) = (\cos t, -\sin t, 1)$$

que tiene sentido horario en el plano xy, tal y como se indica en la figura



En efecto, vemos que la orientación inducida por $\vec{n}$ en ∂S es la que se obtiene por el recorrido $\varphi \circ \gamma$, al ser composición de una parametrización que preserva la orientación de S y otra que recorre ∂D en sentido positivo.
Además, observamos que se cumple la regla del sacacorchos, pues si giramos el sacacorchos en el sentido del recorrido de ∂S, este se desplaza hacia abajo, es decir, en la dirección de $\vec{n}$.
Nótese que tomando el vector normal $\vec{n} = (0, 0, -1)$ como referencia de eje vertical, al recorrer ∂S con $\varphi \circ \gamma$, la superficie S queda a la izquierda.

Definición 2.3.5 [Orientación Compatible]

Sean $(S_1, \vec{n}_1)$ y $(S_2, \vec{n}_2)$ dos superficies simples y regulares de manera que $S = S_1 + S_2$, entonces se dice que $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son compatibles si inducen orientaciones opuestas en $\partial S_1 \cap \partial S_2$.
En este caso, se dice que $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ establece una orientación en ∂S que se llama orientación inducida por $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$.
Se dice que $S = S_1 + S_2$ es orientable si S_1 y S_2 admiten orientaciones compatibles. Análogamente, de manera recursiva, si $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ donde $(S_i, \vec{n}_i)$ son superficies orientadas, se define $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k)$ como compatible si las orientaciones inducidas por $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_{k-1})$ en $S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1}$ y $\vec{n}_k$ en S_k son opuestas en $\partial(S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1}) \cap \partial S_k$.

Ejemplo

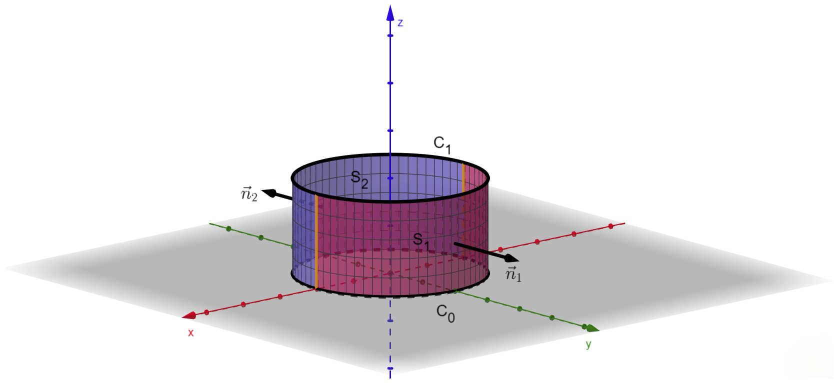
Consideremos el cilindro $(S, \vec{n}) = (S_1, \vec{n}_1) + (S_2, \vec{n}_2)$ sin tapas con la orientación exterior.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \ z \in [0, 1]\}$$

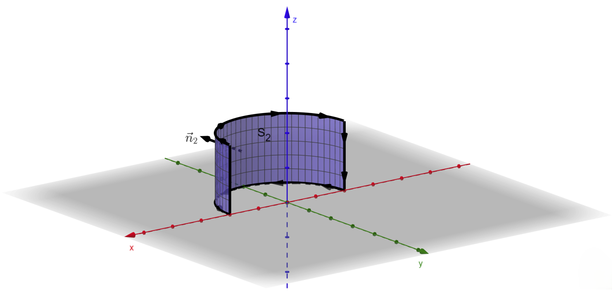
donde

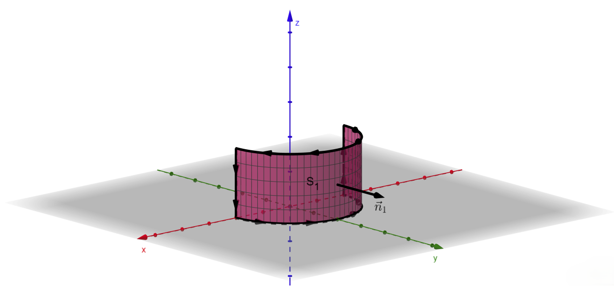
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leq y, \ z \in [0, 1]\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \ y \leq 0, \ z \in [0, 1]\}$$

La representación gráfica de S es la siguiente:



donde $C_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}$ y $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = 1\}$ son las tapas del cilindro. En particular tenemos que $\partial S = C_0 \cup C_1$.
Veamos que $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son compatibles y que, por tanto, S es orientable siendo $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ la orientación inducida en S.
Para ello, veamos las orientaciones que inducen $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ en ∂S_1 y ∂S_2 respectivamente. En efecto, por la regla del sacacorchos, las orientaciones inducidas serán las descritas por las siguientes figuras:





Además en la intersección de los bordes $\partial S_1 \cap \partial S_2$ (parte naranja de la primera figura), las orientaciones inducidas son opuestas, luego $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son compatibles, es decir, S es orientable.
Teniendo en cuenta la orientación inducida en el borde de S_1 y S_2, consideramos dos parametrizaciones γ_0 y γ_1 de C_0 y C_1 respectivamente:

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \gamma_1(t) = (-\cos(t), \sin(t), 1) & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

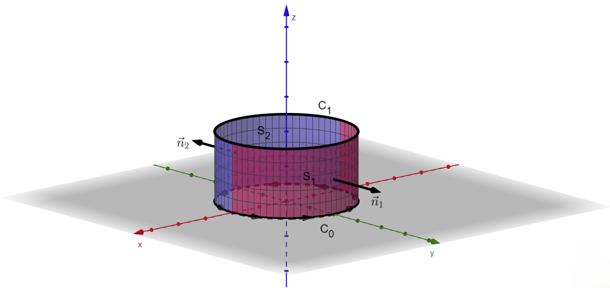
donde γ_1 recorre negativamente C_1 y γ_0 positivamente C_0, luego $\partial S = C_0^+ \cup C_1^-$.

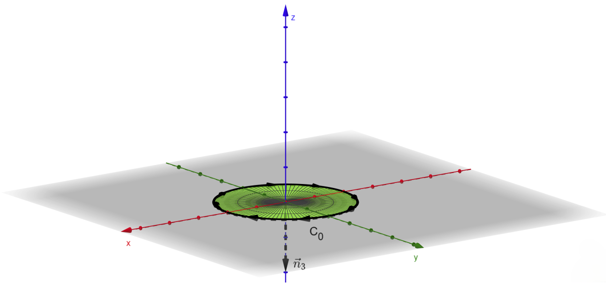
Ejemplo

Consideramos ahora el cilindro del ejemplo anterior pero con la tapa de abajo:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z \in [0,1]\}$$

$$S = \underbrace{S_1 + S_3}_{S_0} + S_3 \text{ donde } S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0\}$$

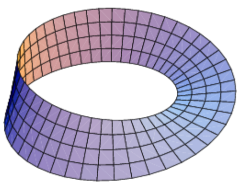


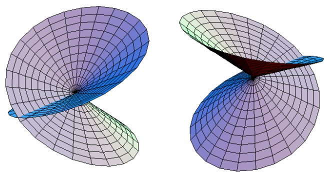


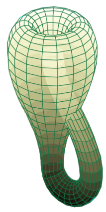
Consideramos $\vec{n}_3$ normal hacia abajo en S_3 y obtenemos que $\vec{n}_3$ induce en $\partial S_3 = C_0$ la orientación opuesta a la de S_0, luego son compatibles. Lo mismo podemos hacer con la tapa de arriba, y así obtenemos el cilindro completo, que es orientable con $\partial S = \emptyset$.

Superficies no orientables:

1. Banda de Moebius
2. Plano proyectivo
3. Botella de Klein







Definición 2.3.6 [Integral de Superficie Orientada Regular a Trozos]

Sea $(S, \vec{n})$ una superficie simple, regular a trozos y orientada, es decir, $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ donde $(S_i, \vec{n}_i)$ son superficies simples , regulares y orientadas para $i = 1, \ldots, k$, con $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k)$ orientaciones compatibles.
Sea $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Se define entonces

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \sum_{i=1}^{k} \int_{(S_i,\vec{n}_i)} \vec{F}$$

Ejemplo

Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z,\ z \in [0, 1]\right\}, \quad S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1\right\}$$

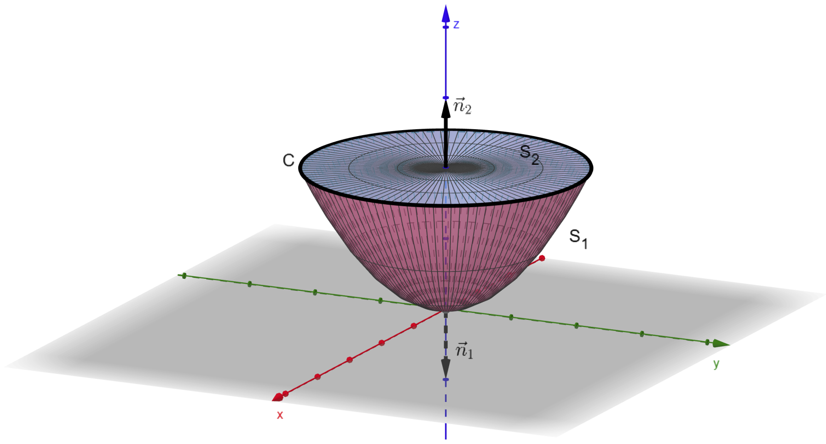
y sea $\vec{n}$ el campo normal exterior. Consideramos el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xz,\ yz,\ 0)$, y queremos calcular la integral de $\vec{F}$ sobre la superficie S:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Aplicando la regla del sacacorchos (regla de la mano derecha), observamos que las superficies orientadas $(S_1, \vec{n}_1)$ y $(S_2, \vec{n}_2)$ inducen sobre la curva

$$C = \partial S_1 \cap \partial S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\right\}$$

orientaciones opuestas.



Por la definición anterior de la integral de superficie orientada, tenemos que

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F}$$

Comenzamos definiendo el dominio para las parametrizaciones de S_1 y S_2:

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

La parametrización de S_1 es:

$$\varphi_1 : \overline{D} \to S_1, \quad \varphi_1(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

Evaluando la función φ_1 en el origen obtenemos que $\varphi_1(0, 0) = (0, 0, 1)$ que apunta hacia arriba, es decir, en sentido opuesto al vector normal $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$, luego $\vec{n}_1 = -\vec{N}_{\varphi_1}$.
Calculamos la integral del campo vectorial sobre la superficie $(S_1, \vec{n}_1)$:

$$\int_{(S,\vec{n}_1)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{F}(\varphi_1(x, y)), \vec{N}_{\varphi_1}(x, y)\rangle dxdy = -\int_D \langle (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2), 0), (-2x, -2y, 1)\rangle dxdy$$

$$= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot r\, dr\, d\theta = 4\pi \left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

Para la parametrización de S_2 tenemos:

$$\varphi_2 : \overline{D} \to S_2, \quad \varphi_2(x, y) = (x, y, 1)$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

Al igual que antes, evaluando la función φ_2 en el origen obtenemos que $\varphi_2(0, 0) = (0, 0, 1)$ que apunta hacia arriba, es decir, en el mismo sentido que el vector normal $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, luego $\vec{n}_2 = \vec{N}_{\varphi_2}$.
Procedemos a calcular la integral del campo vectorial sobre la superficie $(S_2, \vec{n}_2)$:

$$\int_{(S,\vec{n}_2)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{F}(\varphi_2(x, y)), \vec{N}_{\varphi_2}(x, y)\rangle dxdy = \int_D \langle (x, y, 0), (0, 0, 1)\rangle dxdy = \int_D 0\, dxdy = 0$$

Por lo tanto, la integral de superficie de $\vec{F}$ sobre S es:

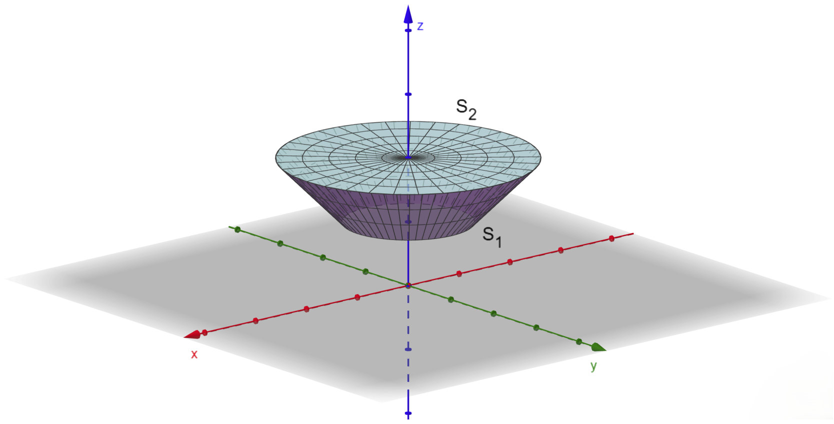
$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \frac{2\pi}{3} + 0 = \frac{2\pi}{3}$$

Ejemplo

Sea la superficie $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2,\ z \in [1,2]\} \qquad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2,\ x^2+y^2 \leq 4\}$$

y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,-z)$. Queremos calcular $\int_{(S,\vec{n})} \vec{F}$, donde $\vec{n}$ es la normal exterior.



Observemos que $(S_1, \vec{n}_1)$ y $(S_2, \vec{n}_2)$ tienen orientaciones compatibles, con lo cual $(S, \vec{n})$ está bien orientada.

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F}$$

Comenzamos parametrizando la superficie S_1 con la función $\varphi_1 : D \to S_1$ dada por:

$$\varphi_1(r,\theta) = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \qquad \text{donde } D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z\sin(\theta) & z\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z)$$

Teniendo en cuenta la geometría de la figura y que el vector $\vec{N}_{\varphi_1}$ apunta hacia abajo, entonces es exterior a S, luego los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{N}_{\varphi_1}$ son compatibles.
Entonces la integral de $\vec{F}$ sobre S_1 es:

$$\int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{N}_{\varphi_1}, \vec{F} \circ \varphi_1 \rangle = \int_{z=0}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \langle (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z), (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z) \rangle d\theta dz$$

$$= \int_{z=1}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} z^2 + z^2 d\theta dz = 2\pi \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 dz = 4\pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=2} = 4\pi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 4\pi \cdot \frac{7}{3} = \frac{28\pi}{3}$$

Ahora consideramos la parametrización $\varphi_2 : E \to S_2$ de S_2 dada por:

$$\varphi_2(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 \end{cases} \qquad \text{donde } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

La normal $\vec{N}_{\varphi_2}$ apunta hacia arriba, es decir, hacia el exterior de S, luego $\vec{n}_2$ y $\vec{N}_{\varphi_2}$ son compatibles. Entonces la integral de $\vec{F}$ sobre S_2 es:

$$\int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F} = \int_E \langle \vec{N}_{\varphi_2}, \vec{F} \circ \varphi_2 \rangle = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi} \langle (0,0,1), (x,y,-z) \rangle dydx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi} -zdydx = -2\pi \int_{x=0}^{x=2} 2dx = -4\pi \left[x\right]_{x=0}^{x=2} = -4\pi(2-0) = -8\pi$$

Finalmente, la integral de $\vec{F}$ sobre S es:

$$\int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F} = \frac{28\pi}{3} - 8\pi = \frac{28\pi}{3} - \frac{24\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Proposición 2.3.1

Sea $D = Int(C)$ la parte interior de una curva de Jordan C en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en un abierto $U \supset \overline{D}$. Consideramos la superficie $S = G_f$.
Para cada (x,y) en D, sea $\theta(x,y)$ el ángulo que forma el vector normal $\vec{n}(x,y)$ a la superficie S en el punto $(x,y,f(x,y))$ con el vector vertical $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Entonces se tiene que:

$$a(S) = \int_D \frac{dxdy}{\cos(\theta(x,y))}$$

Demostración. Consideramos la parametrización $\varphi : D \to S$ de S dada por:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad \text{donde } (x,y) \in D$$

Entonces, la normal a la superficie S es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

Haciendo el producto escalar con el vector vertical $\vec{e}_3$:

$$\langle \vec{N}_\varphi, \vec{e}_3 \rangle = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \cdot (0,0,1) = 1$$

$$\langle \vec{N}_\varphi, \vec{e}_3 \rangle = ||\vec{N}_\varphi|| \cdot ||\vec{e}_3|| \cdot \cos(\theta(x,y)) = ||\vec{N}_\varphi|| \cdot 1 \cdot \cos(\theta(x,y)) \implies \|\vec{N}_\varphi\| = \frac{1}{\cos(\theta(x,y))}$$

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dxdy = \int_D \frac{1}{\cos(\theta(x,y))} dxdy$$

□

Observación 2.3.4

Si S está contenida en un plado cuyo vector normal es $\vec{n}$, entonces tenemos que $\theta(x,y)$ es el ángulo entre $\vec{n}$ y el vector vertical $\vec{e}_3$ para cada $(x,y) \in D$.
En este caso, la integral de superficie se puede expresar como:

$$a(S) = \int_D \frac{dxdy}{\cos(\theta(x,y))} = \frac{1}{\cos(\theta(x,y))} area(D)$$

Ejemplo

Sean los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ no nulos, y sea S el paralepípedo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Entonces el área de la superficie S es:

$$a(S) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
En efecto, si consideramos la parametrización $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ de S dada por:

$$\varphi(\lambda, \mu) = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \qquad D = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$$

entonces tenemos que

$$\varphi(\lambda, \mu) = \begin{cases} x = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \times \vec{v}$$

entonces el área de la superficie S es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \|\vec{u} \times \vec{v}\| d\lambda d\mu = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\mu = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

Observación 2.3.5

En $\mathbb{R}^3$, el volumen del paralepípedo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ es el producto mixto:

$$V = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

3 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss

3.1 Teorema de Stokes

Definición 3.1.1 [Rotacional]

Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Se define el rotacional de $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ como:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Observación 3.1.1

En este caso, $rot(\vec{F})$ es un campo vectorial continuo definido en A.

Ejemplo

Sea $(P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Consideramos $A = U \times \mathbb{R}$ y el campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, 0)$. Entonces el rotacional de $\vec{F}$ es:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \qquad \text{"la derivación del toerema de Green"}$$

Teorema 3.1.1 [Teorema de Stokes]

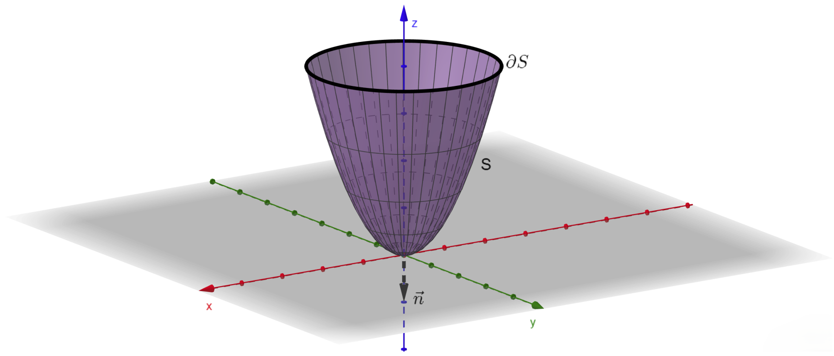
Sea $(S, \vec{n})$ una superficie orientada y regular a trozos, y sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset S$. Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F}$$

donde ∂S tiene la orientación inducida por $\vec{n}$.

Ejemplo

Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$ con la norma exterior $\vec{n}$ y el campo vectorial $\vec{F} = (yz, -xz, z)$. Verificamos el teorema de Stokes.
Tenemos que $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 = 4\}$, que es una circunferencia de radio 2 en el plano $z = 4$. Fijémonos que $\vec{n}$ induce la orientación negativa en la curva $C^- = \partial S$.



El rotacional de $\vec{F}$ es:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Consideramos la parametrización natural $\varphi : D \to S$ de S dada por:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \qquad \text{donde } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Entonces la normal a la superficie S es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

La normal $\vec{N}_\varphi$ apunta hacia arriba en el punto $(0,0,0)$, luego tenemos una normal interior.

- Calculamos el rotacional de $\vec{F}$ en S por medio de la parametrización φ:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = -\int_D \langle \vec{N}_\varphi, rot(\vec{F}) \circ \varphi(x,y) \rangle dxdy = -\int_D \langle (-2x, -2y, 1), (x, y, -2(x^2+y^2)) \rangle dxdy$$

$$= \int_D 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 dxdy = \int_D 4(x^2+y^2) dxdy = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= 4 \cdot 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 4 \cdot 2\pi \cdot 4 = 32\pi$$

- Consideramos la parametrización positiva γ de la curva ∂S dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \\ z = 4 \end{cases} \qquad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

  y calculamos la integral de línea del campo $\vec{F}$ sobre la curva ∂S:

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_{C^-} \vec{F} = -\int_\gamma \vec{F} = -\int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (8\sin(t), -8\cos(t), 4), (-2\sin(t), 2\cos(t), 0) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} 16 dt = 16 \, [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 16(2\pi - 0) = 32\pi$$

En efecto, vemos que las integrales coinciden de acorde al teorema de Stokes.

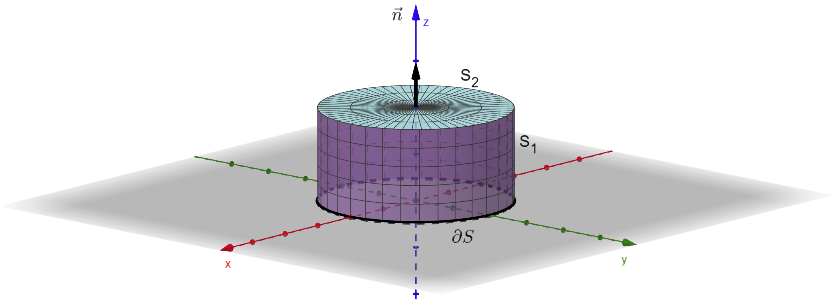
Ejemplo

Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0,2]\} \qquad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con la norma exterior $\vec{n}$ y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z)$. El borde de S es:

$$\partial S = C_0^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$$



Calculamos el rotacional del campo $\vec{F}$:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = (0,0,1-1) = (0,0,0)$$

Consideramos la parametrización γ de la curva C_0 dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

que tiene orientacion positiva. Además, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$.

- Calculamos la integral del campo $rot(\vec{F})$ sobre la superficie S:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{0} = 0$$

- Hacemos la integral de línea del campo $\vec{F}$ sobre la curva C_0^+:

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (\sin(t), \cos(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) - \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos(2t) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

Vemos que el teorema de Stokes se cumple, ya que las integrales son iguales.

Ejemplo

Consideramos el campo vectorial $\vec{F} = (yz, -xz, z)$. Veamos el rotacional de $\vec{F}$:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Supongamos que tenemos una superficie S cualesquiera cuyo borde ∂S sea la curva C_0^+ del ejemplo anterior. Entonces tenemos que:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (0,0,0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt = 0$$

Observación 3.1.2

Si S es una superficie cerrada, es decir, $\partial S = \emptyset$, entonces se tiene que:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F} = 0$$