

# Cálculo Integral<sup>1</sup>

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero  
*Ciencias Matemáticas e*  
*Ingeniería Informática*

---

<sup>1</sup>basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

# Contents

<b>1</b>	<b>Medida de Lebesgue</b>	<b>2</b>
1.1	Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	2
1.2	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	5
1.3	Medibilidad de Funciones	11
1.4	Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann	27
1.5	Teoremas de Tonelli y Fubini	31

# 1 Medida de Lebesgue

## 1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

### Definición 1.1.1 [n-Réctangulo]

Un  $n$ -rectángulo en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i \ \forall i \quad (1)$$

Definimos el volúmen de  $R$  como:

$$\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (2)$$

Consideramos también los  $n$ -rectángulos abiertos denotados por  $\overset{\circ}{R}$ , que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

### Observación 1.1.1

Dado  $R$   $n$ -rectángulo cerrado tal que  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , podemos considerar para cada  $\delta > 0$  el  $n$ -rectángulo abierto  $R_\delta = \prod_{i=1}^n (a_i - \delta, b_i + \delta)$ . Se tiene que  $R \subset R_\delta$  y  $\text{vol}(R_\delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2\delta) = \text{vol}(R) + 2n\delta$ . Por tanto:

$$\text{vol}(R) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{vol}(R_\delta) \quad (3)$$

### Definición 1.1.2 [Medida Exterior de Lebesgue]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos la medida exterior de  $A$  como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ } n\text{-rectángulos cerrados} \right\} \quad (4)$$

Donde la ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de  $n$ -rectángulos que recubren  $A$ . A esta medida exterior la llamamos medida de Lebesgue exterior.

### Observación 1.1.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces:

1.  $m^*(A) = +\infty \iff \forall (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  se tiene que  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) = +\infty$
2.  $m^*(A) = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  y  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \epsilon$
3.  $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \epsilon > 0 \exists (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  y  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \alpha + \epsilon$

### Definición 1.1.3 [Conjunto Nulo]

Se dice que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto nulo si  $m^*(A) = 0$ .

### Ejemplo

1. Si  $R$  es un  $n$ -rectángulo degenerado, es decir,  $R$  tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces  $R$  es un conjunto nulo ( $m^*(R) = 0$ ).
2. En  $\mathbb{R}^2$ , sea el conjunto  $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ . Dado  $\epsilon > 0$  tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m > \frac{1}{\epsilon}$ . Consideramos  $A \subset \bigcup_{i=1}^m [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ . Se tiene que  $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^m \text{vol}([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(A) = 0$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

### Teorema 1.1.1

Sea  $m^* \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  una función que cumple:

1.  $m^*(\emptyset) = 0$
2.  $m^*(A) \leq m^*(B)$  si  $A \subset B$
3.  $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

Entonces  $m^*$  es una medida exterior en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.*

1.  $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$  con  $R_j$   $n$ -rectángulos degenerados  $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$ .
2. Sea  $A \subset B$  y sea  $(R_j)_{j \in J}$  tal que  $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ . Entonces  $(R_j)_{j \in J}$  es un recubrimiento de  $A$  y por tanto  $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$ .
3. Si  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\exists (R_{j,i})_{i=1}^{\infty}$  tal que  $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$ . Entonces  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y por tanto se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario, se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$ .

□

### Corolario 1.1.1

La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

*Demostración.* Sea  $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$  entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$ . □

### Lema 1.1.1

Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  entonces  $m^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ con } Q_i \text{ } n\text{-rectángulos abiertos} \}$

*Demostración.* Denotamos por  $\beta$  el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de rectángulos abiertos tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ . Tenemos entonces que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bar{Q}_j$  y puesto que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\bar{Q}_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j)$ , se tiene que  $m^*(A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\bar{Q}_j) \leq \beta$ . Por tanto,  $m^*(A) \leq \beta$ . Veamos ahora la otra desigualdad  $\beta \leq m^*(A)$ . Si  $m^*(A) = +\infty$  entonces  $\beta = +\infty$  y no hay nada que demostrar. Supongamos que  $m^*(A) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de

$n$ -rectángulos cerrados tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(A) + \epsilon$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$  consideramos  $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^j}$ . Escogiendo  $\delta_j > 0$  lo suficientemente pequeño, se tiene que  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \text{vol}(R_j) + \epsilon_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Nótese que aquí  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j}$  denota el volumen del  $n$ -rectángulo abierto  $R_j$  con lados aumentados en  $\delta_j$ . Entonces  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j}$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{vol}(R_j) + \epsilon_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(A) + 2\epsilon$ . Por tanto,  $\beta \leq m^*(A)$ .  $\square$

**Definición 1.1.4** [Partición de un Conjunto]

Una partición del intervalo  $[a, b]$  es una colección numerable de puntos  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ . Dado un  $n$ -rectángulo  $R \subset \mathbb{R}^n$ , una partición  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  de  $R$  es una colección de particiones  $P_i$  de  $[a_i, b_i]$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  siendo  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

Los subrectángulos de  $P$  son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \prod_{j=1}^n [t_{i_j}^j, t_{i_j+1}^j] \quad (5)$$

Denotamos  $S \in P$  para indicar que  $S$  es un subrectángulo de  $P$ .

**Lema 1.1.2**

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -rectángulo y  $P$  una partición de  $R$ . Entonces:

1.  $R = \bigcup_{S \in P} S$
2. Si  $S, S' \in P$  y  $S \neq S'$  entonces  $S \cap S' = \emptyset$
3.  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S)$

**Proposición 1.1.1**

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -rectángulo entonces  $m^*(R) = \text{vol}(R)$ .

*Demostración.*

"  $\subseteq$  "

Sea  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  con  $R_1 = R$  y  $R_j$  degenerados para  $j > 1$ . Entonces:

$$m^*(R) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) = \text{vol}(R).$$

"  $\supseteq$  "

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos abiertos tal que  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Sabemos que  $R$  es compacto al ser cerrado y acotado y, por tanto, al ser  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  un recubrimiento abierto de  $R$ , existe un subrecubrimiento finito  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$  de  $R$ . Entonces  $R \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{Q_i}$ . Consideramos  $R_j = R \cap \overline{Q_j}$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ . Tenemos entonces que  $R = \bigcup_{j=1}^m \overline{Q_j}$  y además prolongando los lados podemos obtener una partición  $P$  de  $R$  tal que cada subrectángulo de  $P$  está contenido en algún  $R_j$  para  $1 \leq j \leq m$ . Por tanto,  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$ .  $\square$

## 1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

**Notación:** Para  $A \subset \mathbb{R}^n$  denotamos por  $A^c$  al complementario de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ .

### Definición 1.2.1 [Conjunto Medible]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue si para todo  $R \subset \mathbb{R}^n$   $n$ -rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c) \quad (6)$$

### Proposición 1.2.1

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces son equivalentes:

1.  $A$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .
3.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

*Demostración.*

"2  $\implies$  3"

Trivial

"3  $\implies$  2"

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A \cap A^c) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

"2  $\implies$  1"

Inmediato, tomando  $E = R$ .

"1  $\implies$  3"

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto, si  $m^*(E) = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos cerrados tal que  $E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Entonces  $E \cap A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A$  y  $E \cap A^c \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A^c$ . Por tanto,  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .  $\square$

### Definición 1.2.2 [ $\sigma$ -Álgebra]

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra si:

1.  $X \in \mathcal{A}$
2. Si  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3.  $\forall (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  se tiene que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

### Definición 1.2.3 [Medida]

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra, entonces una medida en  $X$  es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$

2. Si  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$$

**Teorema 1.2.1** [Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ ]

La familia  $M$  de todos los conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $m = m^* \upharpoonright_M$  es una medida numerablemente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

**Lema 1.2.1**

$\mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E) = m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + m^*(\emptyset) = m^*(E) + 0 = m^*(E)$ .  $\square$

**Lema 1.2.2**

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A^c$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A) = m^*(E)$   $\square$

Con los dos lemas anteriores obtenemos como corolario que  $\emptyset$  es medible en el sentido de Lebesgue.

**Lema 1.2.3**

Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Observemos primero que  $A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$  luego entonces tenemos que  $m^*(A \cup B) \leq m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$ . Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) = m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)$ .  $\square$

**Lema 1.2.4**

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y además  $m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$ .

*Demostración.* Definimos la sucesión creciente de conjuntos  $B_k = A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Entonces  $B_k$  es medible en el sentido de Lebesgue por el lema anterior. Sean  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  y  $E \in \mathbb{R}^n$  tenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k^c) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1}) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1})$$

Reiterando el proceso obtenemos  $m^*(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)$ . Por lo tanto,  $m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_k^c) = \left( \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) \right) + m^*(E \cap B_k^c) \geq \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c)$ . Se sigue entonces  $m^*(E) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$ . Luego  $B$  es medible.

Tomando  $E = B$  en la desigualdad anterior obtenemos  $m^*(B) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) + m^*(B \cap B^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j)$ . Por otro lado,  $m^*(B) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j)$  por definición de medida exterior. Por tanto,  $m^*(B) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j) \implies m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$ .  $\square$

### Lema 1.2.5

*La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Sea  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideremos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

Observemos que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  y que para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $A_j$  es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto,  $A_j$  es medible. Además,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$  con  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Por el lema anterior,  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible  $\implies \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  es medible.  $\square$

### Proposición 1.2.2

*Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  nulo, entonces  $m^*(A) = 0$ .  $\forall E \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $E \cap A \subset A \implies 0 \leq m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0 \implies m^*(E \cap A) = 0$ . Análogamente,  $E \cap A^c \subset E \implies 0 \leq m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E) \implies m^*(E \cap A^c) = 0$ . Por tanto,  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$ . Para la otra desigualdad,  $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \implies m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ . Y por tanto obtenemos la igualdad  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .  $\square$

### Definición 1.2.4 [Propiedad en casi todo punto]

*Se dice que una propiedad se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.*

### Proposición 1.2.3

*Todo  $n$ -rectángulo cerrado  $R \in \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Dado  $R \subset \mathbb{R}^n$   $n$ -rectángulo cerrado, tenemos que ver que  $\forall Q \in \mathbb{R}^n$   $n$ -rectángulo cerrado se tiene que  $\text{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ . Consideramos el  $n$ -rectángulo  $Q_0 = Q \cap R$ . Nótese que  $Q \cap R^c$  es unión finita de  $n$ -rectángulos  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ . Entonces  $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_m$  forman una partición de  $Q$ . Luego  $\text{vol}(Q) = \sum_{i=0}^m \text{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^m m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ .  $\square$



### Observación 1.2.1

En  $\mathbb{R}^n$  los rectángulos abiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.

### Definición 1.2.5 [n-Cubo]

Un  $n$ -cubo cerrado (respectivamente abierto) en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \quad (7)$$

Análogamente se pueden definir los cubos  $n$ -dimensionales semi-abiertos.

### Observación 1.2.2

Denotaremos la norma del supremo en  $\mathbb{R}^n$  como:

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n \{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

Llamaremos bola abierta de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r) \quad (9)$$

Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r] \quad (10)$$

### Teorema 1.2.2

Sea  $G \in \mathbb{R}^n$  abierto entonces se tiene:

1.  $G$  es unión numerable de  $n$ -cubos cerrados.
2.  $G$  es unión numerable de  $n$ -cubos abiertos.

*Demostración.* Consideremos la familia de  $n$ -cubos  $\mathcal{B} = \{\overline{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B}_\infty(q, r) \subset G\}$ . Veamos que  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ . Dado que  $B \in G \quad \forall B \in \mathcal{B}$  entonces es inmediato ver que  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset G$ . Por ser  $G$  abierto,  $\exists \delta > 0$  tal que  $B_\infty(x, \delta) \subset G$ . Sea  $r \in \mathbb{Q}$  con  $0 < r < \frac{\delta}{2}$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , sabemos que  $\exists q \in \mathbb{Q}^n$  tal que  $\|x - q\|_\infty < r$ . Veamos entonces que  $x \in B_\infty(q, r) \subset B_\infty(x, \delta) \subset G$ . Dado  $y \in \mathbb{R}^n$  con  $\|y - q\|_\infty < r$  se sigue:

$$\|y - x\|_\infty \leq \|y - q\|_\infty + \|q - x\|_\infty < r + r = 2r < \delta$$

Por tanto  $y \in B_\infty(x, \delta) \implies x \in \overline{B}_\infty(q, r) \subset G$ . Luego  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .

Nótese que numerabilidad de la familia  $\mathcal{B}$  es inmediata por la numerabilidad de  $\mathbb{Q}^n$  que, a su vez, es numerable por ser  $\mathbb{Q}$  numerable.

La segunda parte del teorema es análoga a la primera. □

### Corolario 1.2.1

Todos los conjuntos abiertos y cerrados de  $\mathbb{R}^n$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

**Teorema 1.2.3** [Regularidad de la Medida]

Sea  $E \in \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists G \in \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $m^*(G \setminus E) < \epsilon$ .
3.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists F \in \mathbb{R}^n$  cerrado tal que  $F \subset E$  y  $m^*(E \setminus F) < \epsilon$ .
4.  $\forall \epsilon$  existen  $F$  cerrado y  $G$  abierto tales que  $F \subset E \subset G$  y  $m^*(G \setminus F) < \epsilon$ .

*Demostración.*

"1  $\implies$  2" Distinción de casos:

1. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ : Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos abiertos tales que  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Considerando el abierto  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$ , se tiene que  $G$  es medible por el colorario anterior y  $m^*(G) = m^*(E \cap G) + m^*(E \cap G^c) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$ . Por tanto,  $m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) - m^*(E) < \epsilon$ .
2. Supongamos que  $m^*(E) = +\infty$ :  $\forall k \in \mathbb{N}$  sea  $E_k = E \cap [-k, k]^n$ , que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además  $m^*(E_k) < +\infty$  por ser  $E_k$  acotado, y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  existe  $G_k$  abierto tal que  $E_k \subset G_k$  y  $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$ . Entonces  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$  abierto y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$  por lo que  $m^*(G \setminus E) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$ .

"2  $\implies$  1"

$\forall j \in \mathbb{N}$  tomando  $\epsilon = \frac{1}{j}$  entonces  $\exists G_j$  abierto tal que  $E \subset G_j$  y  $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . Entonces considerando  $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  que es medible y abierto se tiene que  $E \subset B$ . Luego  $B \setminus E \subset G_j \setminus E$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . En consecuencia  $m^*(B \setminus E) = 0 \implies B \setminus E$  es medible.

Por otro lado,  $B = E \cup (B \setminus E)$  o que es lo mismo  $E = B \setminus (B \setminus E)$ . Tanto  $B$  como  $(B \setminus E)$  son medibles, luego  $E$  es medible.

*Observación:* Además,  $E = B \setminus Z$ , donde  $B$  es intersección numerable de abiertos o  $Z$  es un conjunto nulo.

"1  $\implies$  3"

Como  $E$  es medible entonces  $E^c$  también lo es. Por (2), dado  $\epsilon > 0$  existe  $G$  abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,  $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ .

"1  $\implies$  3"

Como  $E$  es medible entonces tenemos que  $E^c$  también es medible, por lo que, dado  $\epsilon > 0$  por (2)  $\exists G$ -abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,  $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ .

"3  $\implies$  1"

$\forall j \in \mathbb{N} \exists F_j$  cerrado tal que  $F_j \subset E$ ,  $m(E \setminus F_j) < 1/j$ . Sea  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  conjunto medible y  $A \subset E$ . Además,  $m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < 1/j \forall j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $E = A \cup (E \setminus A) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \cup (E \setminus A)$  Entonces dado que  $E \setminus A$  es un conjunto medible por ser nulo y  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  es medible por ser unión numerable de conjuntos cerrados, entonces  $E$  es medible.

□

**Definición 1.2.6** [ $\sigma$ -Álgebra de Borel]

La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  (o equivalentemente, la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los cerrados de  $\mathbb{R}^n$ ). Los conjuntos de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.

Decimos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es  $G_\delta$  si  $A$  es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  es  $F_\sigma$  si  $A$  es unión numerable de cerrados.

### Corolario 1.2.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $E = A \setminus N$  con  $A$  siendo  $G_\delta$  y  $N$  un conjunto nulo.
3.  $E = B \cup N$  con  $B$  siendo  $F_\sigma$  y  $N$  un conjunto nulo.

### Lema 1.2.6

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y  $m(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j)$ .

*Demostración.* Sea  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideremos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$  y que  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión disjunta de conjuntos. Entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$ . Dado que  $m^*(A_j) = m(B_1) + m(B_2) + \dots + m(B_j) \forall j \geq 1$   $\square$

### Corolario 1.2.3

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible entonces:

1.  $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$ .
2.  $m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$ .

*Demostración.*  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k : E_k = E \cap [-k, k]^n \forall k \in \mathbb{N}$  Entonces  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente de conjuntos medibles y por el lema anterior tenemos que  $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$ . Además,  $\forall k \in \mathbb{N} \exists F_k \subset E_k$  cerrado tal que  $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$ . Entonces como  $F_k$  es un conjunto cerrado y acotado, tenemos que el conjunto es compacto. Por tanto  $m(E_k) = m(E_k \setminus F_k) + m(F_k) \geq m(F_k) + 1/k$  y por tanto  $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(F_k)$  y finalmente obtenemos que  $m(E) = \sup\{m(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$   $\square$

### Definición 1.2.7 [Cubo Diádico]

Se dice que un cubo en  $\mathbb{R}^n$  es diádico si sus lados miden  $2^{-m}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Es decir, si el

rectángulo  $Q$  es de la forma:

$$Q = \left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m} \right],$$

con  $m \in \mathbb{Z}$  (nivel de escala u orden) y  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$

### Teorema 1.2.4

Todo conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  es unión numerable y disjunta  $n$ -cubos semiabiertos, que son cubos diádicos.

*Demostración.* Denotemos por  $\mathcal{F}$  la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m} \right],$$

con  $k_i \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $\mathcal{Q}_1$  la familia de todos los cubos cerrados  $Q$  de la forma  $[k_1, k_1+1] \times \cdots \times [k_n, k_n+1]$ , donde los  $k_i \in \mathbb{Z}$ , y tales que  $Q \subset U$ . Supuesto definida  $\mathcal{Q}_m$ , sea  $\mathcal{Q}_{m+1}$  la familia de todos los cubos  $Q$  de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m} \right],$$

donde  $k_i \in \mathbb{Z}$ , tales que no están contenidos en ningún cubo  $Q' \in \mathcal{Q}_j$  para  $j \leq m$ , y tales que  $Q \subset U$ . Por inducción queda definida  $\mathcal{Q}_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , y ponemos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Es obvio por construcción que si  $Q, Q' \in \mathcal{Q}$  y  $Q \neq Q'$ , entonces  $Q$  y  $Q'$  tienen interiores disjuntos. También es claro que que  $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \subset U$ . Veamos que de hecho

$$U = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Dado  $x \in U$ , usando que  $U$  es abierto y que el conjunto  $\{k/2^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , es fácil ver que existe algún cubo  $Q_x \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in Q_x$  y  $Q_x \subset U$ . El lado de  $Q_x$  mide  $2^{-m_x}$  para algún  $m_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Si  $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$  ya hemos terminado. En otro caso, por definición de  $\mathcal{Q}_{m_x}$ , existe algún  $j < m_x$  tal que  $Q_x$  está contenido en algún cubo  $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$ , y por tanto  $x$  pertenece a este cubo. En cualquier caso se ve que  $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ .  $\square$

## 1.3 Medibilidad de Funciones

### Definición 1.3.1 [Espacio Medible]

Un espacio medible es un par  $(X, \Sigma)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ .

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$ , donde  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto medible y  $M|_E$  es la familia de subconjuntos medibles de  $E$ .
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto boreliano y  $B|_A$  es la familia de subconjuntos borelianos de  $A$ .

**Definición 1.3.2** [Función Medible]

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible. Una función  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es un conjunto medible.

**Proposición 1.3.1**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces son equivalentes

1.  $f$  es medible.
2. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  es un conjunto medible.
3. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  es un conjunto medible.
4. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es un conjunto medible.
5. Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.
6. Para todo  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, los conjuntos  $f^{-1}(G)$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  dado que las  $\sigma$ -álgebras son cerradas bajo complementarios, obtenemos que (1)  $\iff$  (2) y (3)  $\iff$  (4).

Veamos ahora la relación (1)  $\iff$  (4):

- (1)  $\implies$  (4): Podemos tomar el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}$  que es una intersección numerable de conjuntos medibles por (1). Por tanto al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es medible.
- (4)  $\implies$  (1): Equivalentemente al apartado anterior podemos obtener que el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\}$  es medible por (4). Por tanto, también al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es medible.

De forma análoga a esta equivalencia podemos obtener que (2)  $\iff$  (3). Y también las equivalencias de (5)  $\iff$  (6) son inmediatas, pues podemos tomar los conjuntos acotados  $x \in X : \alpha \leq f(x) < \beta = x \in X : f(x) \geq \alpha \cap x \in X : f(x) < \beta$  los cuales son conjuntos medibles por los apartados anteriores. De forma similar podemos obtener que el conjunto  $x \in X : f(x) = +\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\}$  es medible por los apartados anteriores. De forma análoga se demuestra el caso de (6). Por último veamos la equivalencia de (6)  $\iff$  (7):

1. (7)  $\implies$  (6): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos tomarlo como  $G = (\alpha, \beta)$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\} = \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\}$  y asimismo, los conjuntos  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son medibles por las equivalencias anteriores.
2. (6)  $\implies$  (7): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos reescribir  $G$  como  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$  donde  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  es un conjunto abierto. Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\alpha_j, \beta_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\}$  es medible por las equivalencias anteriores.

□

### Corolario 1.3.1

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces  $f$  es medible.

### Proposición 1.3.2

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces la función  $\Phi \circ (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.

*Demostración.* Sean  $(f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y continua respectivamente. Denotemos por  $h = (f_1, f_2, \dots, f_n) \circ \Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $G \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto, entonces, denotemos por  $U = \Phi^{-1}(G)$  al conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces sea  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de rectángulos  $n$ -dimensionales tales que  $(R_j) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i^j, \beta_i^j) \forall j \in \mathbb{N} \iff \forall j \in \mathbb{N} f^{-1}(R_j) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i^j, \beta_i^j)$  es medible. Por tanto, la función  $h$  es medible.  $\square$

### Corolario 1.3.2

Sean  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles, entonces  $f + g$ ,  $f \circ g$ ,  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f^+ = \max\{f, 0\}$ ,  $f^- = \min\{f, 0\}$  son todas funciones medibles.

### Observación 1.3.1

$$f = f^+ - f^- \text{ y } |f| = f^+ + f^-.$$

### Teorema 1.3.1

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : X \rightarrow [+\infty, -\infty]$  una sucesión de funciones medibles, entonces:

1.  $\sup_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$  es una función medible.
2.  $\inf_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$  es una función medible.
3.  $\limsup_{j \rightarrow \infty} \{f_j\}$  es una función medible.
4.  $\liminf_{j \rightarrow \infty} \{f_j\}$  es una función medible.
5.  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$  es una función medible.

*Demostración.* 1. Denotemos  $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : h(x) > \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha \iff \exists j \in \mathbb{N} : f_j(x) > \alpha \Rightarrow x \in X : h(x) > \alpha = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

2. Denotemos  $g(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : g(x) < \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j \geq \alpha \iff \forall j \in \mathbb{N} : f_j(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in X : g(x) \geq \alpha = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} x \in X : f_j \geq \alpha$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

3. Recordemos que  $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq j} f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j, f_{j+1}, \dots$ . Entonces como el límite de una sucesión decreciente y acotada siempre existe tenemos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{k \geq j} f_k = \inf_{j \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.

4. Recordemos que  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq j} f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf f_j, f_{j+1}, \dots = \sup_{j \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
5. Si  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$  (puntualmente) entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ . Entonces por los apartados anteriores obtenemos que  $f$  es una función medible.

□

### Proposición 1.3.3

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  funciones medibles-Lebesgue tales que  $f = g$  en casi todo punto. Entonces  $g$  es medible-Lebesgue.

*Demostración.* Dado que  $f = g$  en casi todo punto, entonces  $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$  es un conjunto de medida nula. Entonces, dado un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : f(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible dado que  $\{x \in Z : f(x) < \alpha\}$  es medible por ser un conjunto de medida nula y  $\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible por ser  $g$  medible. Por tanto,  $g$  es medible. □

### Corolario 1.3.3

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  sucesión de funciones medibles tales que  $f_j \rightarrow f$  en casi todo punto, entonces  $f$  es medible.

*Demostración.* Sea  $Z = \{x \in X : f_j(x) \not\rightarrow f(x)\}$  el cual tiene medida nula por hipótesis. Entonces definimos la función  $g(x) = \begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$  en casi todo punto. Asimismo podemos definir la sucesión de funciones  $g_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases}$  que converge a  $g$  puntualmente, por tanto, por la proposición anterior tenemos que  $g$  es medible  $\Rightarrow f$  es medible. □

### Definición 1.3.3 [Función Característica]

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible. Definimos la función característica de un conjunto  $E \in \Sigma$  como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in E^c \end{cases}$$

### Observación 1.3.2

$\chi_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$

*Demostración.* Sea  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, podemos definir el conjunto

$$\chi_E^{-1}(G) = \{x \in X : \chi_E(x) \in G\} = \begin{cases} X & 0 \in G \quad 1 \in G \\ E & 0 \notin G \quad 1 \in G \\ E^c & 0 \in G \quad 1 \notin G \\ \emptyset & 0 \notin G \quad 1 \notin G \end{cases}$$

por tanto,  $\chi_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$ . □

### Observación 1.3.3

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Entonces son equivalentes:

1.  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.
2.  $f \circ \chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.

*Demostración.*

- $(1 \implies 2) : E^c$  es medible y  $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$  es medible.
- $(2 \implies 1) : \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible.

□

### Definición 1.3.4 [Función Simple]

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ . Se dice que  $f$  es una función simple si toma un valor finito de valores. Es decir si:  $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty]$ . Además denotamos a  $f^{-1}(\alpha_i) = E_i$  y  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ . Asimismo obtenemos que  $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$ -unión disjunta de conjuntos. De este modo podemos decir que  $f$  es una combinación lineal finita de funciones simples.

### Observación 1.3.4

$f$  es medible  $\iff \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  es medible.

### Teorema 1.3.2

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible. Entonces existen funciones simples  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que:

- $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$ .
- $\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .
- Si además,  $f$  acotada  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en casi todo punto.

*Demostración.*  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n2^n$  definimos:  $E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]) = \{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\}$  y  $F_n = f^{-1}([n, +\infty]) = \{x \in X : f(x) \geq n\}$ . Los cuales son conjuntos medibles por ser preimágenes de conjuntos medibles. Sea entonces  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{F_n}$ , la cual es una sucesión de funciones simples. Analicemos la convergencia (puntual)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ :

- Si  $f(x) = +\infty \implies f(x) \geq m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies f_n(x) = m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = +\infty$ .
- Si  $f(x) < +\infty \implies \exists m(x) \in \mathbb{N} : 0 \leq f(x) \leq m(x) \implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{k}{2^m}$  y  $f_n = \frac{k-1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies 0 \leq |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Además, cuando  $\exists M \in \mathbb{N} : f(x) \leq M \quad \forall x \in X \implies 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  (uniformemente).



Ahora veamos que  $f_n(x)$  es creciente:  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & x \in E_{n,i} \\ n & x \in F_n \end{cases} \implies f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & x \in E_{n,i} \\ n+1 & x \in F_{n+1} \end{cases} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $1 \leq i \leq n2^n \implies 1 \leq i \leq 2^{n+1} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Definición 1.3.5** [Integral de una función simple]

Consideremos en  $\mathbb{R}^n$  la  $\sigma$ -álgebra  $M$  de los conjuntos medibles y la medida-Lebesgue  $m$ . Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible, no negativa y con representación canónica  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  donde  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ -unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces definimos la integral de  $s$  como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s \, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$$

**Observación 1.3.5**

$$\int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0$$

*Demostración.* Dado  $E \subset \mathbb{R}^n$  mdible definimos  $\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \circ X_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap E)$ .  $\square$

**Lema 1.3.1**

Sea  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$  unión disjunta de conjuntos medibles. Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible y no negativa. Entonces  $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s$ .

*Demostración.* Supongamos que

$$s = \sum_{i=1}^m d_i \cdot \chi_{A_i}$$

(forma canónica), entonces

$$s(\mathbb{R}^n) = \{d_1, \dots, d_m\}.$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $B_k \in \{d_1, \dots, d_m\}$ . Definimos para cada  $j = 1, \dots, m$  el conjunto

$$Y_j = \{k \in \mathbb{N} : \beta_k = d_j\}.$$

Así,  $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^m Y_j$  es una unión disjunta. Además,

$$s^{-1}(\alpha_j) = A_j = \bigcup_{k \in Y_j} X_k,$$

una unión disjunta.

Entonces, usando la propiedad de la medida en una unión disjunta, tenemos

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k \in Y_j} X_k\right) = \sum_{k \in Y_j} m(X_k).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k).$$

Intercambiando el orden de la suma,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k) = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

□

### Corolario 1.3.4

Sean  $s, t : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  funciones simples, medibles y no negativas. Entonces:  $\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$ .

*Demostración.* Sea  $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$  y  $t = \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot \chi_{B_j}$ . Dado que  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^k (A_i \cap B_j)$ , donde la unión es disjunta y los conjuntos  $A_i, B_j$  son medibles, se tiene que en  $A_i \cap B_j : s + t = \alpha_i + \beta_j$ . Aplicando el lema de integración para funciones simples:  $\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^k \beta_j m(A_i \cap B_j) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$  (por el lema). □

### Definición 1.3.6 [Integral de Lebesgue]

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  una función medible. Definimos la integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty)$ , definimos:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}.$$

### Proposición 1.3.4

Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

1. si  $0 \leq f \leq g$  y  $E \subset F$  entonces  $\int_E f \leq \int_F g$ .
2. si  $f, g \geq 0 \implies \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .
3. si  $c \geq 0, f \geq 0 \implies \int_E cf = c \int_E f$ .
4. si  $m(E) = 0 \implies \int_E f = 0$ . (Incluso si  $f = +\infty$ )
5. si  $f|_E = 0 \implies \int_E f = 0$ . (Incluso si  $m(E) = +\infty$ )
6. si  $A \subset B$  y  $f \geq 0 \implies \int_A f \leq \int_B f$ .
7. si  $A, B$  son conjuntos medibles y disjuntos y  $f \geq 0 \implies \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ .
8. si  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies \int_E f = \int_E g$ .

*Demostración.* 1. Si  $f = c \cdot 0$ , entonces es trivial.

Si  $c > 0$ , tomamos  $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq s \leq f$ .

Entonces,  $c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$ .

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

2. Si  $m(E) = 0$ , entonces para toda  $s$  simple y medible tal que  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}.$$

De donde,

$$\int_E s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \right\} = 0.$$

3. Para toda  $s$  simple con  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que  $s(x) = 0$  para casi todo  $x \in E$ .

Luego,

$$f \cdot \chi_E = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \int_E s = 0, \quad \forall s.$$

Tomando el supremo,

$$\sup \left\{ \int_E s \right\} = 0 = \int_E f.$$

4. Si  $f$  es simple y medible con  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que

$$\text{si } A \subset B, \quad \chi_A \leq \chi_B \Rightarrow 0 \leq s \cdot \chi_B.$$

5. Si  $A, B$  son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B.$$

Así,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B).$$

Por linealidad de la integral,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

Por lo tanto,

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

8. Si  $E = A \cup Z$ , con  $A$  y  $Z$  disjuntos y tales que  $x \in E \Rightarrow f(x) = g(x)$ , entonces

$$Z = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Si  $m(Z) = 0$ , se tiene que

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f = \int_A g + 0 = \int_A g.$$

□

### Teorema 1.3.3 [Convergencia Monótona]

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una sucesión de funciones medibles tales que:

1.  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$  (en  $\mathbb{R}^n$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

*Demostración.* La sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es monótona creciente en  $[0, +\infty)$ . Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k, \in [0, +\infty].$$

Dado que  $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.// Sea  $s$  una función simple y medible en  $\mathbb{R}^n$  con  $0 \leq s \leq f$ , y fijemos un  $c \in (0, 1)$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$ , definimos la sucesión de conjuntos  $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$ . Esta sucesión es medible (debido a que tanto  $f_k$  como  $s$  son medibles) y es creciente (debido a que  $f_k \leq f_{k+1}$  y  $c \cdot s \leq c \cdot f \leq f$ ). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f_k(x) = 0, \Rightarrow s(x) = 0 \Rightarrow 0 = f_k(x) \Rightarrow 0 = s(x) \Rightarrow x \in E_k \quad \forall k. \\ \text{Si } f_k(x) > 0, \Rightarrow c \cdot s(x) \leq f_k(x) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad c \cdot s(x) \leq f_k(x). \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que  $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $s^{-1}(\alpha_j) = A_j$  tenemos:

$$m(A_j) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j).$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos que:

$$l \geq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite  $c \rightarrow 1$  obtenemos que:

$$l \geq \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que  $s$  es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad  $\forall s$  función simple, medible y no-negativa (por ser  $0 \leq s \leq f$ ). Por tanto, obtenemos la ansiada desigualdad:  $l \geq \int_{\mathbb{R}^n} f$ .  $\square$

#### **Teorema 1.3.4** [Convergencia Monótona Versión Refinada]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $f_k : E \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de función medibles y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  tales que:

1.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  (en casi todo punto de  $E$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (en casi todo punto de  $E$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

*Demostración.* Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que  $m(N) = 0$ . Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E \setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \hat{f} = f \cdot \chi_{E \setminus N}$$

Podemos aplicar el Teorema 1.3.3, lo que nos permite concluir que: 1.  $\hat{f}_k \rightarrow \hat{f}$  puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_E f = \int_{E \setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

$\square$

#### **Corolario 1.3.5**

1. Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  son medibles, medibles y no-negativas se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2. Si  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de funciones medibles  $\forall k \in \mathbb{N}$  se tiene que:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

*Demostración.*

1. Sabemos que existen sucesiones crecientes  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  y  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de funciones simples medibles no negativas tales que  $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = f$  y  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = g$ . Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.3.3 obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + t_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

2. Por el apartado anterior obtenemos que:  $\sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m f_k \implies$  podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona, dado que la sucesión  $\sum_{k=1}^m f_k$  converge de forma creciente a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ . Entonces finalmente obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

□

### Lema 1.3.2

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones medibles, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

*Demostración.* Sea

$$f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} f_j = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$$

Dado que  $g_k \geq 0$ , la sucesión  $(g_k)$  está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema 1.3.3, se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k.$$

Por definición del  $\liminf$ , se cumple la desigualdad:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

Finalmente, dado que  $g_k \leq f$ , se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

□

### Observación 1.3.6

El resultado análogo con  $\limsup$  no es válido en general. Podemos tomar de contraejemplo la función  $f_k = k \cdot \chi_{[k, \infty]}$ .

### Definición 1.3.7 [Función Integrable]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  función medible. Se dice que  $f$  es integrable (o absolutamente integrable) cuando

$$\int_E f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

### Observación 1.3.7

$f$  es integrable en  $E \iff |f|$  es integrable en  $E \iff f^+$  y  $f^-$  son integrables en  $E$ .

### Lema 1.3.3

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f = g - h$  con  $g, h : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones integrables. Entonces,

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h.$$

*Demostración.* Si  $f = g - h \implies |f| = |g - h| \leq g + h \implies f$  es integrable.  $f = f^+ - f^- = g - h \implies f^+ + h = f^- + g \implies \int_E f^+ + h = \int_E f^- + g \implies \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h$ .  $\square$

### Proposición 1.3.5

Para funciones  $f$  y  $g$  integrables en  $E$ , se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si  $f, g$  son integrables en  $E$ , entonces  $f + g$  también es integrable y

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

2. Si  $f$  es integrable en  $E$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $cf$  es integrable en  $E$  y

$$\int_E (cf) = c \int_E f.$$

3. Si  $f \leq g$  en casi todo punto de  $E$ , entonces

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4. Si  $|f|$  es integrable en  $E$ , entonces  $f$  también es integrable y

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

5. Si  $f = g$  en casi todo punto de  $E$  y  $f$  es integrable en  $E$ , entonces  $g$  también es integrable en  $E$  con,

$$\int_E f = \int_E g.$$

6. Si  $m(E) = 0$  y  $f$  es medible, entonces es integrable en  $E$  y

$$\int_E f = 0$$

7. Si  $f$  es integrable en  $E$  entonces  $|f| < \infty$  en casi todo punto de  $E$

8. Si  $\int_E |f| = 0$ , entonces  $f = 0$  en casi todo punto de  $E$ .

*Demostración.*

(1) Dado que  $f = f^+ - f^-$  y  $g = g^+ - g^- \implies f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ , con ambas partes  $\geq 0$ . Entonces, por el lema de la integral de funciones no negativas,

$$\int_E (f + g) = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-.$$

Reagrupando términos,

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

(2) Si  $c > 0$ . Como  $cf = cf^+ - cf^- \implies$ ,

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^- = c \int_E f^+ - c \int_E f^- = c \int_E f.$$

Si  $c < 0$ , usando  $cf = cf^+ - cf^- = (-c)f^+ - (-c)f^-$ . Entonces aplicamos el apartado anterior y obtenemos que:

$$\int_E cf = c \int_E f.$$

(3) Como  $g - f \geq 0$  en casi todo punto de  $E$ , se cumple que:  $(g - f) \cdot \chi_E \geq 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies$

$$\int_E (g - f) \geq 0.$$

Aplicando la linealidad de la integral,

$$\int_E g - \int_E f \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

(4) Se tiene que  $|f| = f^+ + f^-$ . Usando la linealidad de la integral,

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ + \int_E f^- \right|$$



Como  $f = f^+ - f^-$ , aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|.$$

- (5) Como  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies f^+ = g^+ \quad f^- = g^-$  en casi todo punto de  $E$  por lo que sólo queda aplicar el apartado anterior.

$$\int_E f = \int_E g$$

- (6)  $|f| \cdot \chi_E \geq 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies \int_E |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \cdot \chi_E = 0 \implies$

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = 0$$

- (7) No se qué hace la demostración

- (8) Sea

$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

Definimos los conjuntos

$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, evaluamos la medida de  $A_k$  utilizando la integral:

$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \leq \int_{A_k} k \cdot |f| = k \int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} |f| \leq \int_E |f|$$

Tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  (y de la subaditividad) se concluye que

$$m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0.$$

□

### **Teorema 1.3.5** [Convergencia Dominada]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $\forall k \in \mathbb{N}, f_k : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones medibles. Supongamos que  $\exists g : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f_k| < g$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Si además suponemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  en casi todo punto de  $E$ , entonces:

1.  $f_k$  y  $f$  son integrables en  $E$
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| = 0$
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$

*Demostración.*

1. Dado que  $|f_k| \leq |g| = g \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , se concluye que  $f_k$  es integrable en  $E$ . Además, como  $|f| \leq g$ , se sigue que  $f$  también es integrable en  $E$ .

2. Observamos que  $|f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq g + g = 2g \geq 0$ , lo que implica que  $2g - |f_k - f| \geq 0$ . Además, la sucesión de funciones  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge casi en todo punto de  $E$  a  $2g - 0 = 2g$ . Aplicando el **\*\*lema de Fatou\*\*** a  $\hat{f}_k = h_k \chi_E$ , obtenemos que:

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k$$

A partir de esto, se deduce la siguiente igualdad:

$$\int_E 2g = \liminf_k \left( \int_E 2g - \int_E |f_k - f| \right) = \lim_k \int_E 2g + \liminf_k \left( - \int_E |f_k - f| \right) = \int_E 2g - \limsup_k \int_E |f_k - f|$$

Utilizando el siguiente **lema**: si  $a_k \rightarrow a$ , entonces

$$\liminf_k (a_k + b_k) \geq \liminf_k a_k + \liminf_k b_k$$

se concluye que:

$$\limsup_k \int_E |f_k - f| \leq \int_E 2g - \int_E 2g = 0 \Rightarrow \lim_k \int_E |f_k - f| = 0$$

3. Finalmente, aplicamos la propiedad de la integral a la diferencia  $f_k - f$ :

$$\left| \int_E f_k - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_k - f) \right| \leq \int_E |f_k - f| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$$

□

### Definición 1.3.8 [Integral Paramétrica]

Sea  $f$  función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

### Teorema 1.3.6

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto cualquiera,  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$  y suponemos que:

1.  $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.
2.  $\forall x \in E f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

es una función continua en  $U$ .

*Demostración.* Sea  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset U$  tal que  $u_k \rightarrow u_0 \in U$ . ¿Se sigue que  $\{F(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(u_0)$  ?

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$f_k = f(\cdot, u_k) : E \rightarrow \mathbb{R}$$

que es una función medible. Por la condición (2), se cumple que  $\forall x \in E$ ,

$$f_k(x) = f(x, u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x, u_0).$$

Es decir, la sucesión  $\{f_k\}$  converge puntualmente en  $E$  a

$$f_0(x) = f(x, u_0).$$

Además, se cumple que

$$|f_k(x)| = |f(x, u_k)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Aplicando el Teorema 1.3.5 (TCD), se concluye que  $f_k$  es integrable para todo  $k \in \mathbb{N}$  y

$$\int_E f_k \rightarrow \int_E f.$$

Es decir,

$$F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$F(u_k) = \int_E f(x, u_k) dx \Rightarrow F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

□

### Observación 1.3.8

$$\forall u_0 \in U \quad \lim_{u \rightarrow u_0} \int_E f(x, u) dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx$$

### Teorema 1.3.7 [Regla de Leibniz]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto y  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Y además supongamos que:

1.  $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .
2.  $\forall x \in E f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $U$ .
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx$$

es de clase  $C^1$  en  $U$  y  $\forall t \in U$  se cumple que:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

*Demostración.* Fijamos  $t_0 \in (a, b)$  y definimos la función  $h : E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$h(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}, & t \neq t_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

### 1. Medibilidad de $h(x, t)$

Queremos ver que  $h(x, t)$  es medible para todo  $t \in (a, b)$ .

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos que:

$$h(x, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_0 + 1/k) - f(x, t_0)}{1/k}$$

lo cual es medible.

### 2. Continuidad de $h(x, \cdot)$

Para todo  $x \in E$ , si  $h(x, \cdot)$  es acotada en  $(a, b)$ , entonces es continua.

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos:

$$h(x, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} h(x, t),$$

lo cual prueba la continuidad.

### 3. Acotación y aplicación de la Regla de Leibniz

$$|h(x, t)| \leq g(x)$$

- Si  $t = t_0$ , es claro. - Si  $t \neq t_0$ , por el Teorema del Valor Medio, existe  $c \in (t, t_0)$  tal que:

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, s) \right| \leq g(x).$$

Por la Regla de Leibniz, obtenemos:

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_E \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \int_E h(x, t) dx \right) = \int_E \left( \lim_{t \rightarrow t_0} h(x, t) \right) dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como  $F'$  es continua en  $(a, b)$ , se concluye que  $F \in C^1(a, b)$ .

□

## 1.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

### Teorema 1.4.1

Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es integrable Lebesgue en  $[a, b]$  y se cumple que:

$$(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$$

### Observación 1.4.1

Denotamos  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

*Demostración.*  $\forall k \in \mathbb{N}$  sabemos que  $\exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{n(k)}^k = b\} \subset [a, b]$  tal que:  $\bar{S}(f, P_k) - \underline{S}(f, P_k) < \frac{1}{k}$ . Suponemos que  $P_{k+1}$  es mas fina que  $P_k$  y además que

$$\text{diam}(P_k) = \sup_{i \in \{1, \dots, n(k)\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$  denotamos  $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$  y  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$ .

$$\underline{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} m_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \varphi_k \quad \text{con} \quad \varphi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

$$\bar{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} M_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \psi_k \quad \text{con} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

Es claro que  $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$  en  $[a, b]$ . Además, como  $P_{k+1}$  es más fino que  $P_k \implies (\varphi_k) \uparrow$  y  $(\psi_k) \downarrow$ . Denotamos  $\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \sup \varphi_k$  y  $\psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \inf \psi_k$  que son medibles y cumplen que  $\varphi \leq f \leq \psi$ .

Como  $f$  es integrable-Riemann  $\implies f$  es acotada  $\iff \exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ . La función  $g(x) = M$  es integrable en  $[a, b]$  y puesto que  $|\psi_k| \leq g$  y  $|\varphi_k| \leq g$  entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f, P_k) = \int_a^b \varphi_k \rightarrow \int_a^b \varphi \quad \bar{S}(f, P_k) = \int_a^b \psi_k \rightarrow \int_a^b \psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \quad \bar{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \implies \int_a^b \varphi = (R) \int_a^b f = \int_a^b \psi$$

Y como  $\int_a^b \psi - \varphi = 0 \implies \psi - \varphi = 0$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Es decir  $\varphi = f = \psi$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Y finalmente obtenemos que:

$$(L) \int_a^b f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi = (R) \int_a^b f$$

□

### Teorema 1.4.2

Sean  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces  $f$  es integrable-Riemann en  $[a, b] \iff D_f = \{x \in [a, b] \mid f \text{ no es continua en } x\}$  tiene medida nula.

### Ejemplo

La función de Dirichlet

$$f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable-Riemann en  $[0, 1]$ . Pero  $f = 0$  en casi todo punto  $\implies f$  es integrable-Lebesgue y ésta vale:  $\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 0 = 0$

### Teorema 1.4.3

Sean  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$  y  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente integrable-Riemann impropia en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Entonces  $f$  es integrable-Lebesgue en  $(\alpha, \beta)$  y se cumple que:

$$(L) \int_{\alpha}^{\beta} f = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f$$

*Demostración.* Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea  $(\alpha, \beta)$ , en este caso trataremos el intervalo  $[\alpha, \infty)$ : Por hipótesis sabemos que:

1.  $\forall k \in \mathbb{N}, f$  es integrable-Riemann en  $[a, b]$
2.  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f| < +\infty$

Tomamos una sucesión  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$  y definimos las sucesiones de funciones:  $f_n = f \cdot \chi_{[a, b_n]}$  y  $g_n = |f| \cdot \chi_{[a, b_n]}$  medibles. De manera que tenemos que  $f_n \uparrow f$  y  $g_n \uparrow |f|$ . Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monótona:

1.  $(L) \int_a^{+\infty} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} |f| = (R) \int_a^{+\infty} |f| < \infty$
2. Esto muestra que  $f$  es integrable-Lebesgue en  $[a, +\infty)$ .

Por otra parte, como  $|f_n| \leq |f| \forall n \in \mathbb{N}$  por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

1.  $(L) \int_a^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} f = (R) \int_a^{+\infty} f$

Finalmente obtenemos el resultado de que  $f$  es integrable de Riemann-impropia en  $[a, +\infty)$ .

$\forall (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : b_n \rightarrow \infty$  tenemos que  $|\int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f| \leq \epsilon$

□

### Ejemplo

(Hoja 3. Ej: 6.a) Calculemos

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando con respecto al parámetro  $t$ . Para ello, aplicamos el **Teorema de Leibniz**:

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , con  $f : E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\forall u \in (a, b), f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .
2. Para casi todo  $x \in E$ , la función  $f(x, \cdot) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $(a, b)$ .
3. Existe  $g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \text{para casi todo } x \in E, \forall u \in (a, b).$$

Entonces,  $F(t)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y se cumple:

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Dado que

$$f(x, t) = \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x},$$

calculamos la derivada parcial con respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \cos(tx) e^{-x}.$$

Verifiquemos cada una de las hipótesis del Teorema de Leibniz:

1.  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, t)$  es integrable en  $[0, +\infty)$ :

$$|f(x, t)| \leq e^{-x} = g(x).$$

Como  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 < +\infty$ , se cumple la integrabilidad.

2.  $\forall x \in E$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \cos(tx) e^{-x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por lo que  $f(x, \cdot)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$ .

3. Se cumple que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = |\cos(tx) e^{-x}| \leq e^{-x} = g(x),$$

que es integrable en  $[0, +\infty)$ .

Por lo tanto,  $F$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-x} dx.$$

Ahora calculemos esta integral:

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-x} dx.$$

Usando integración por partes con

$$\begin{cases} u = \cos(tx), & dv = e^{-x} dx, \\ du = -t \sin(tx) dx, & v = -e^{-x}, \end{cases}$$

obtenemos:

$$I(t) = [\cos(tx) e^{-x}]_0^{+\infty} - t \int_0^{+\infty} \sin(tx) e^{-x} dx.$$

Evaluando los límites y repitiendo el proceso para  $\sin(tx) e^{-x}$ , obtenemos:

$$I(t)(1 + t^2) = 1.$$

Despejando:

$$I(t) = \frac{1}{1 + t^2} = F'(t).$$

Finalmente, integramos:

$$F(t) = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan(t) + C.$$

Si  $t = 0$ , entonces

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Por lo tanto:

$$F(t) = \arctan(t).$$

## 1.5 Teoremas de Tonelli y Fubini

Notación:

$$\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \quad (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$$

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces denotamos las funciones:

$$\begin{cases} f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty] & \text{con } f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k \\ f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty] & \text{con } f_y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

### Teorema 1.5.1 [Teorema de Tonelli]

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [0, +\infty]$  medible. Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , la función  $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dx dy$

Además, de forma análoga se tiene que:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , la función  $f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^k$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} G = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f_y) = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dy dx$

### Observación 1.5.1

Los siguientes lemas son previos y necesarios para la demostración del Teorema de Tonelli.

### Lema 1.5.1

Sean  $f, g$  que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $a, b \geq 0 \implies af + bg$  también satisfacen el Teorema de Tonelli

*Demostración.*

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(af + bg)_x = a(f_x) + b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
2.  $H(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (af + bg)_x = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + b(g_x) = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + \int_{\mathbb{R}^k} b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} (af + bg)_x = a \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_x + b \int_{\mathbb{R}^{n+k}} g_x$

□

### Lema 1.5.2

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $f_j \uparrow f$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  puntalmente



$\implies f$  satisface el Teorema de Tonelli.

*Demostración.*

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $f_j(x, \cdot) = (f_j)_x \uparrow f(x, \cdot) = f_x$
2.  $F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \uparrow \int_{\mathbb{R}^k} f_x = F(x)$  luego  $F$  es medible por el Teorema de la Convergencia Monótona.
3. Nuevamente por el Teorema de la Convergencia aplicado a la sucesión de (2)  $F_j(x) \uparrow F(x)$  tenemos que  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx$

□

### Observación 1.5.2

*El siguiente lema es una versión de lema anterior en el que se usa el teorema de la convergencia dominada en lugar del de la convergencia monótona.*

### Lema 1.5.3

*Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli. Supongamos que  $(f_j) \rightarrow f$  puntualmente en  $\mathbb{R}^{n+k}$  y  $\exists g : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [0, +\infty]$  integrable, que satisface el Teorema de Tonelli y tal que  $0 \leq f_j \leq g \quad \forall j \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $f$  satisface el Teorema de Tonelli.*

*Demostración.*

1.  $(f_j)_x \rightarrow f_x$  medible
2.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} g = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} g_x) < +\infty$  luego  $G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} g_x < +\infty$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Además, tenemos que  $0 \leq (f_j)_x \leq g_x$  integrable, por lo que podemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada  $\implies F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \rightarrow F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$
3. De nuevo por el Teorema de la Convergencia Dominada  $\int_{\mathbb{R}^n} F = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f$

□

*Demostración del Teorema de Tonelli:*

1. Primero veamos el caso en el que  $f$  es la función indicatriz/característica de un cubo semiabierto.
  - (a) Supongamos que  $f = \chi_Q$  donde  $Q$  es un cubo semiabierto en  $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , con  $Q = A \times B$  donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^k$ .

### Observación 1.5.3

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x} \iff (\chi_E)_x(y) = \chi_E(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases} = \chi_{E_x}(y)$$

Definiendo:

$$f_x = (\chi_Q)_x(y) = \begin{cases} \chi_B(y), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Se concluye que  $f_x$  es medible.

(b) Definimos la función:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (\chi_Q)_x dy = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_B dy, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} m_k(B), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Como resultado,  $F(x) = m_k(B) \cdot \chi_A(x)$  es medible.

(c)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_Q = m_{n+k}(Q) = m_n(A) \cdot m_k(B) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(B) \cdot \chi_A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)$$

2. Ahora supongamos que  $f$  es la función indicatriz de un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}^{n+k}$ .

Dado que  $G$  es abierto, se puede escribir como la unión numerable de cubos semiabiertos disjuntos:

$$G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$$

Definiendo  $G_j = \bigcup_{i=1}^j Q_i$ , se tiene que:

$$(G_j) \uparrow G, \quad \chi_{G_j} \uparrow \chi_G$$

Como cada  $\chi_{G_j} = \sum_{i=1}^j \chi_{Q_i}$  verifica el Teorema de Tonelli por los Lemas 1.4.2 y 1.4.3, se concluye que  $\chi_G$  también satisface el Teorema de Tonelli.

3. Supongamos ahora que  $f$  es la función indicatriz de un conjunto  $G_\delta$ , es decir, un conjunto resultado de la intersección numerable de conjuntos abiertos, pero bajo mas restricciones:  
Supongamos que  $f = \chi_D$  donde  $D$  es un conjunto  $G_\delta$ :

#### Observación 1.5.4

Considerando  $\forall j \in \mathbb{N} D_j = D \cap (j, -j)^{n+k}$  obtenemos que  $(D_j) \uparrow D$  y  $\chi_{D_j} \uparrow \chi_D$  siendo cada  $D_j$  un conjunto  $G_\delta$  y acotado.

Por tanto, como consecuencia del Lema 1.4.2, podemos reducirnos al caso de conjuntos acotados  $D$  es un  $G_\delta$  acotado.

Entonces  $D = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  donde cada  $G_j$  es un conjunto abierto y acotado. Podemos suponer que  $(G_j) \downarrow D$  por tanto  $\chi_{G_j} \downarrow \chi_D$  y además,  $0 \leq \chi_{G_j} \leq \chi_{G_1}$  que es integrable por ser acotada. Ahora si, podemos usar el Lema 1.4.3 para obtener que  $\chi_D$  satisface el Teorema de Tonelli.

Veamos que el Teorema de Tonelli se verifica cuando  $f = \chi_N : N \subset \mathbb{R}^{n+k}$  es un conjunto de medida nula.

Supongamos entonces que  $m_{n+k}(N) = 0 \implies \forall j \in \mathbb{N}$  por la regularidad  $\exists G_j \subset \mathbb{R}^{n+k}$ -abierto con  $N \subset G_j$  y  $m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j}$ .

Entonces, sea  $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j$  que es un conjunto  $G_\delta$  y  $m_{n+k}(G) \leq m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j} \rightarrow 0$ .

Luego  $N \subset G$  y  $m_{(n+k)}(G) = 0 \implies$  por el apartado anterior  $\chi_G$  satisface el Teorema de Tonelli.

Por último tenemos que  $0 = m_{(n+k)}(G) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_G = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$ . Sabemos que para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\hat{F}(x)$  es medible y  $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(x) dx = 0 \implies \hat{F}(x) = 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $N_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in N\} \subset G_x$  y  $m_k(G_x) = \hat{R}(x) = 0 \implies N_x$  es un conjunto nulo (luego

medible) para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  es decir  $\chi_{N_x}$  es medible. Además  $0 \leq F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{G_x} = 0 \implies F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} = 0$  en casi todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$  en particular  $F$  es medible. Finalmente,  $0 = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_N = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$

4. Veamos que si  $A$  es medible  $\implies f = \chi_A$  verifica el Teorema de Tonelli: Como  $A = D \setminus N$  donde  $\begin{cases} D \text{ es un conjunto } G_\delta \\ N \text{ es un conjunto de medida nula} \end{cases}$  Además tenemos que  $D = A \cup N$  disjunto  $\implies \chi_D = \chi_A + \chi_N \iff \chi_A = \chi_D - \chi_N \implies \chi_{A_x} = \chi_{D_x} - \chi_{N_x}$  y  $\chi_{A_x}$  es medible.  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_x} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_x} - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x}$  es medible para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{D_x} dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_D = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_A$  En este paso hemos aplicado (4).
5. Si  $f$  es una función medible,  $f = \sum_{j=1}^l \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $\begin{cases} \alpha_j \in \mathbb{R} \\ A_j \text{ medible} \end{cases} \forall j \in \mathbb{N} \implies$  usando (5) y el lema 1.5.1, obtenemos el resultado.
6. Sea  $f$  función medible, no negativa en  $\mathbb{R}^{n+k}$  sabemos que  $\exists (S_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones simples, medibles y no-negativas tales que  $(S_j) \uparrow f$ . Entonces por (6) cada  $(S_j)$  verifica el Teorema de Tonelli, luego por el Lema 1.5.2,  $f$  también satisface el Teorema de Tonelli.

□

### Corolario 1.5.1 [Principio de Cavalieri]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  medible entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  el conjunto  $E_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = m(E_x)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^n$
3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m(E_x) dx$

De forma análoga se tiene que:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , el conjunto  $E_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = m(E_y)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^k$
3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m(E_y) dy$

*Demostración.* Aplicando el Teorema de Tonelli, tomando  $f = \chi_E$ .

□

### Corolario 1.5.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  conjunto  $(n+k)$ -nulo. Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E_x$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^k$
2. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ ,  $E_y$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^n$

*Demostración.* Aplicamos el Teorema de Tonelli, tomand  $f = \chi_E$ .

□

**Teorema 1.5.2** [Teorema de Fubini]

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  integrable en  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es integrable en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  definida por:  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy$

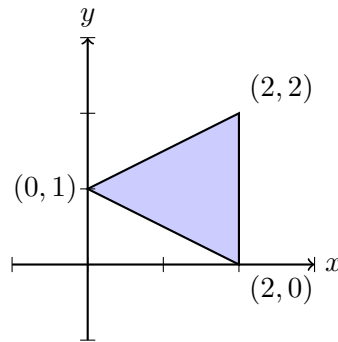
Análogamente se darían los casos tomando  $\mathbb{R}^k$  en lugar de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Recordemos que  $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ f_x = f_x^+ - f_x^- \end{cases}$

□

**Ejemplo**

1. Sea  $D$  el triángulo de vértices  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  y  $(0, 1)$ .



Intentemos calcular

$$\int_D x^2 y \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 y \cdot \chi_D \, dx \, dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \int_{D_x} x^2 \chi_D dy \right) dx =$$

Sabiendo que  $D_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}$ , si  $0 \leq x \leq 2$  entonces  $D_x = \{y : -\frac{1}{2}x + 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 1\}$ . Por tanto, podemos plantear la integral como:

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{y=\frac{1}{2}x+1} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left( \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}x - 1 \right) dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{16}{4} = 4.$$

También podríamos haberlo planteado así, sabiendo que  $D^y = \{x : (x, y) \in D\}$ :

$$\int_{y=0}^{y=2} \left( \int_{D^y} x^2 y \, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=2(1+y)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy + \int_{y=1}^{y=2} \left( \int_{x=2(y-1)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy.$$

Evaluamos:

$$\int_1^2 y \left( \int_{2(y-1)}^2 x^2 dx \right) dy = \int_1^2 y \left( \frac{8}{3} y^3 - 4y^2 + 4y \right) dy = \frac{1}{3} y^4 - \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 \Big|_1^2 = 4.$$

2. Sea  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y\}$  y  $f(x, y) = xe^{-y^3}$ . Calculemos:

$$\int_D f(x, y) dx dy.$$

Dado que  $f \geq 0$ , podemos aplicar el Teorema de Tonelli:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_D = \int_{x=0}^{x=+\infty} \left( \int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy \right) dx.$$

No obstante, no conocemos el valor de la integral  $\int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy$ , por lo que continuamos el cálculo en el otro sentido:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} \left( e^{-y^3} \int_{x=0}^{x=y} x dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y} dy.$$

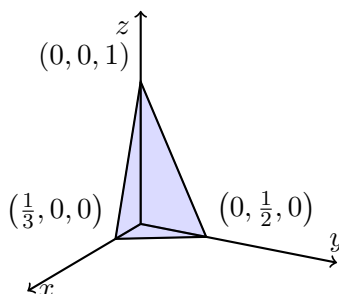
Evaluamos:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \frac{y^2}{2} dy = \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} (-3y^2) dy = -\frac{1}{6} [e^{-y^3}]_{y=0}^{y=+\infty}.$$

3. Sea  $V$  el sólido limitado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $3x + 2y + z = 1$ . Calculemos:

(a)  $\text{Vol}(V)$

(b)  $\int_V z^2 dx dy dz$



(a) Aplicamos el Lema de Cavalieri:

$$\text{Vol}(V) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_V(x, y, z) dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{V_z} 1 dx dy \right) dz,$$

donde  $V_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in V\} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 1 - z\}$ .

Definimos:

$$\int_{z=0}^{z=1} \text{área}(V_z) dz,$$

donde el área de  $V_z$  es:

$$\text{área}(V_z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-z}{3} \cdot \frac{1-z}{2}.$$

También se podría haber definido como:

$$\int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{1-z}{2}} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dy \right) dz.$$

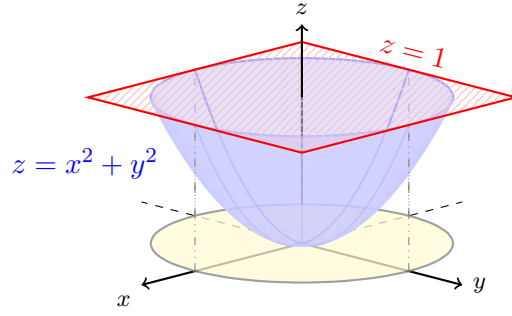
Otra forma alternativa de orden de integración sería:

$$\int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} \left( \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dz \right) dy.$$

(b)

$$\int_V z^2 dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} z^2 \left( \int_{V_z} 1 dx dy \right) dz = \int_{z=0}^{z=1} z^2 \cdot \frac{(1-z)^2}{12} dz$$

4. Sea  $V$  el sólido limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y por el plano  $z = 1$ . Calculemos  $\text{vol}(V)$ .



Donde

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\} \implies$$

$$\text{vol}(v) = \int_{z=0}^{z=1} \text{area}(V_z) dz = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}$$

### Observación 1.5.5

*La diferencia entre el Teorema de Tonelli y el de Fubini, es que el primero pide que las funciones sean no-negativas estrictamente y el segundo pide que las funciones sean integrables absolutamente.*

### Definición 1.5.1 [Conjunto Verticalmente Proyectable]

Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es verticalmente proyectable si es de la forma:

$$E_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

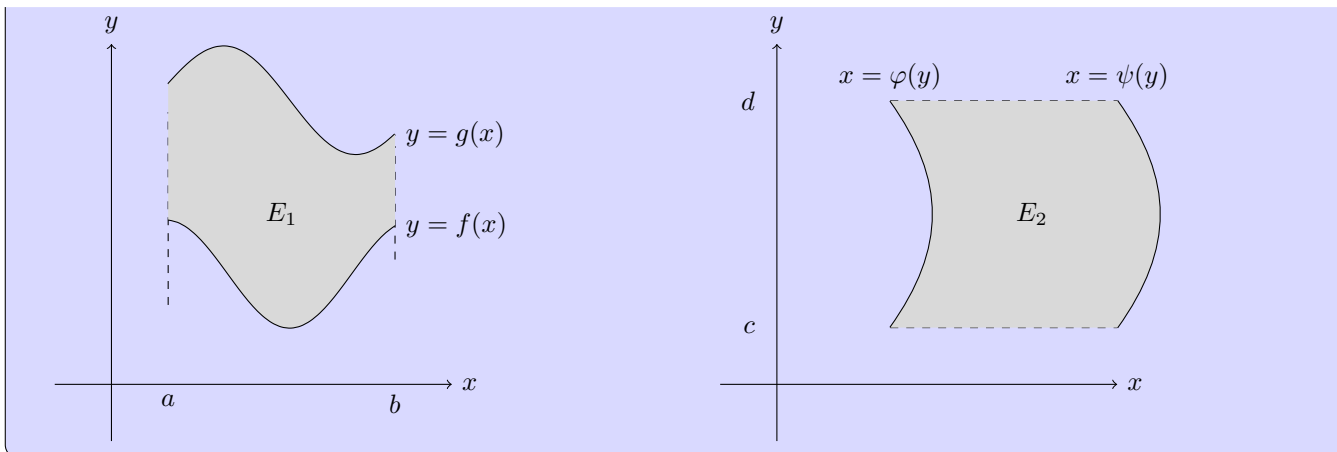
donde  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $f(x) \leq g(x)$ . Análogamente se define un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es horizontalmente proyectable si es de la forma:

$$E_2 = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

donde  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $\varphi(y) \leq \psi(y)$ . En este caso si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  que es integrable en  $E$ :

$$\int_{E_1} h(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_{E_2} h(x, y) dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} h(x, y) dx \right) dy$$



### Observación 1.5.6

La diferencia entre ambas definiciones es que en la primera se fija  $x$  y se mueve  $y$  y en la segunda se fija  $y$  y se mueve  $x$ . Lo que tiene como consecuencia que en la primera se integra  $dx - dy$  y en la segunda  $dy - dx$ .

### Teorema 1.5.3

Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicación lineal. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible  $\implies T(A)$  es medible y además:

$$m(T(A)) = |\det(T)|m(A)$$

### Definición 1.5.2 [Difeomorfismo]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos se dice que  $\varphi : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de  $U$  a  $V$  si:

1.  $\varphi$  es biyectiva
2.  $\varphi$  es de clase  $C^1$  en  $U$
3.  $\varphi^{-1}$  es de clase  $C^1$  en  $V$

### Observación 1.5.7

Sea  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, y supongamos que  $\det(D\varphi(u)) \neq 0 \quad \forall u \in U \implies V = \varphi(U)$  es abierto. Si  $\varphi$  es inyectiva, tenemos que  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = V$  es un difeomorfismo.

### Teorema 1.5.4

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ . Si  $A \subset U$  es medible, entonces  $\varphi(A)$  es medible y  $m(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi(u))| du$ .

### Teorema 1.5.5 [Teorema del Cambio de Variable]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ . Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Entonces:

1. Si  $f$  es no negativa  $\implies (f \circ \varphi)|\det(D\varphi)|$  es medible y no-negativa.

2. Si  $f$  es integrable  $\implies (f \circ \varphi)|\det(D\varphi)|$  es integrable

En ambos casos se cumple que:

$$\int_{V=\varphi(U)} f(x)dx = \int_U (f \circ \phi(u))|\det(D\varphi)|du$$

### Observación 1.5.8

Si  $A \subset U$  es medible  $\implies \varphi(A)$  es medible y

$$\int_{\varphi(A)} f(x)dx = \int_A (f \circ \varphi(u))|\det(D\varphi)|du$$

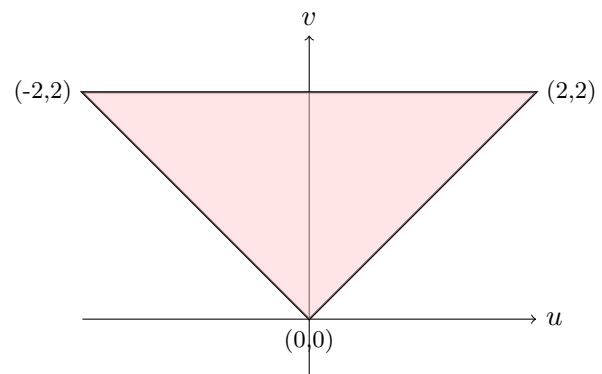
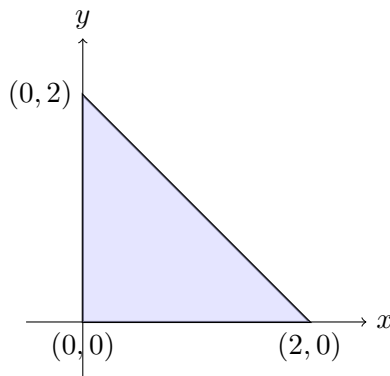
### Ejemplo

Sea  $\int_E e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$  donde  $E =$  triángulo de vértices  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  y  $(0,2)$ .

Si tomamos el cambio de variable:

$$\varphi^{-1} \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \implies \varphi \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \implies f(x,y) = f(u,v) = e^{\frac{u}{v}}$$

Si tomamos la representación gráfica del cambio de variable obtenemos que:



Si tomamos  $y = 0 \implies \varphi^{-1} \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases}$  y también tomamos  $x = 0 \implies \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases}$

entonces tenemos que  $|\det(D\varphi)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \int_E f(x,y) dx dy &= \int_D e^{\frac{u}{v}} |\det(D\varphi)| du dv = \int_D \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} \left( \int_{u=-v}^{u=v} e^{\frac{u}{v}} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} \left[ v e^{\frac{u}{v}} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} v \left( e - \frac{1}{e} \right) dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=2} = e - e^{-1} \end{aligned}$$

### Definición 1.5.3 [Coordenadas polares]

En el plano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , las **coordenadas polares**  $(r, \theta)$  están definidas en términos de las



coordenadas cartesianas  $(x, y)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo medido desde el eje positivo  $x$  en sentido antihorario.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Y su imagen en coordenadas cartesianas es el plano sin el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La transformación  $\varphi : U \rightarrow V$  es un **difeomorfismo de clase  $C^1$** , ya que cumple las siguientes condiciones:

- $\varphi$  es de clase  $C^1$ , es decir, tiene derivadas continuas en  $U$ .
- $\varphi$  es biyectiva entre  $U$  y  $V$ .
- El determinante del Jacobiano es no nulo:

$$\det(D_\varphi)(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \neq 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de área en coordenadas polares es:

$$dA = r \, dr \, d\theta.$$

### Ejemplo

- Área del círculo  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  de centro  $(0, 0)$  y radio  $R$ :

$$\text{Área}(D) = \text{Área}(D \cup V) = \int_{\varphi^{-1}(D \cup V)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |\det(D_{\varphi(r, \theta)})| \, dr \, d\theta.$$

Evaluando la integral:

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r \, dr \right) d\theta = \pi R^2.$$

- Para la región  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  con  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\int_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left( \int_{r=0}^{r=1} r \cdot r \, (\text{Jacobiano}) \, dr \right) d\theta.$$

Resolviendo:

$$\pi \cdot \int_{r=0}^{r=1} r^2 \, dr = \frac{\pi}{3}.$$

**Definición 1.5.4** [Coordenadas cilíndricas]

En el espacio tridimensional, las **coordenadas cilíndricas**  $(r, \theta, z)$  están definidas en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:

$$\varphi : \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el eje  $z$ .
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal, medido desde el eje positivo  $x$  en el plano  $xy$ .
- $z \in \mathbb{R}$  representa la coordenada vertical, la misma que en cartesianas.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta \leq 2\pi\}.$$

Y su imagen es el espacio tridimensional excepto el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det(D\varphi)| = r > 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas es:

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

**Ejemplo**

Sea  $V$  el sólido limitado por  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 2$ , y consideremos la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Evalúamos la integral:

$$\int_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Cambiamos a coordenadas cilíndricas, donde  $x^2 + y^2 = r^2$ , obteniendo:

$$\int_{z=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{z}} (r^2 + z^2) \cdot r \, dr \, d\theta \, dz.$$

Separando la integral en términos de  $\theta$ :

$$\left( \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \left( \int_{z=0}^2 \left( \int_{r=0}^{\sqrt{z}} (r^3 + z^2 r) \, dr \right) dz \right).$$

Resolviendo la integral en  $\theta$ :

$$2\pi \int_{z=0}^2 \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz.$$

Sustituyendo  $r = \sqrt{z}$ :

$$2\pi \int_{z=0}^2 \left( \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{2} \right) dz.$$

Resolviendo la integral en  $z$ :

$$2\pi \left[ \frac{z^3}{12} + \frac{z^4}{8} \right]_{z=0}^{z=2}.$$

Evalutando los límites:

$$2\pi \left( \frac{8}{12} + \frac{16}{8} \right) = 2\pi \left( \frac{2}{3} + 2 \right) = 2\pi \left( \frac{8}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}.$$

Por lo tanto, el resultado final es:

$$\frac{16\pi}{3}.$$

### Definición 1.5.5 [Coordenadas esféricas]

En el espacio tridimensional, las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  se definen en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:

$$\psi : \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \phi. \end{cases}$$

Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal medido en el plano  $xy$  desde el eje positivo  $x$ .
- $\phi \in [0, \pi]$  es el ángulo polar o colatitud, medido desde el eje positivo  $z$ .

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$D_\psi = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det D_\psi| = r^2 \sin \phi.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas es:

$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

**Ejemplo**

$$B_r = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \implies$$

$$\text{vol}(B_r) = \int_{B_r} 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^R r^2 \sin(\phi) dr \right) d\phi \right) d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$$

**Ejemplo**

Realicemos el cálculo de integrales gaussianas:

1.  $g(t) = e^{-t^2}$ : Es fácil ver que  $g(t) \geq 0$  es integrable en  $\mathbb{R}$ . Para ver dicha integral, separemos  $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$ .

- (a) Para  $(0, +\infty)$ : Si  $t \geq 1 \implies t^2 \geq t \implies e^{-t^2} \leq e^{-t}$ . Entonces:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq 1 + \int_1^{+\infty} e^{-t} dt \leq 1 + e^{-1} < +\infty.$$

- (b) Para  $(-\infty, 0)$ : Consideremos la integral:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt.$$

Tomamos el cambio de variable  $s = -t$ , lo que implica  $ds = -dt$ . Entonces, la integral se transforma en:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} (-ds) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Luego, la integral total es:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. Para  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ , existen dos maneras de calcular la integral:

- (a) \*\*Usando coordenadas polares.\*\*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta.$$

Separando las integrales:

$$\left( \int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right).$$

Evaluyendo la integral en  $r$ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el resultado final es:

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

(b) **\*\*Usando el producto de integrales unidimensionales:\*\***

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx.$$

Como la exponencial es separable, podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

Definiendo  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , se tiene que:

$$I^2 = \pi \implies I = \sqrt{\pi}.$$

Así, la integral en  $\mathbb{R}^2$  es:

$$I^2 = \pi.$$

### Ejemplo

Curvas en coordenadas polares

Calculemos el área encerrada por la curva en coordenadas polares

$$r = a(1 + \cos \theta),$$

la cual describe un **\*\*cardioide\*\*** con  $a > 0$ .

**Análisis del comportamiento de  $r$ :** Evaluemos  $r$  en algunos valores característicos de  $\theta$ :

$\theta$	$r = a(1 + \cos \theta)$	Comportamiento
0	$2a$	$r$ decrece ↓
$\frac{\pi}{2}$	$a$	$r$ decrece ↓
$\pi$	0	$r$ aumenta ↑
$\frac{3\pi}{2}$	$a$	$r$ aumenta ↑
$2\pi$	$2a$	$r$ aumenta ↑

**Cálculo del área encerrada:** Utilizamos la fórmula del área en coordenadas polares:

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=a(1+\cos \theta)} r \, dr \, d\theta.$$

Evaluando la integral interna:

$$\int_0^{a(1+\cos \theta)} r \, dr = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{a(1+\cos \theta)} = \frac{a^2}{2} (1 + \cos \theta)^2.$$

Ahora resolvemos la integral en  $\theta$ :

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta.$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

la integral se reescribe como:

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta.$$

Evaluamos término a término:

$$- \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\pi. \quad - \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0. \quad - \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta = 0.$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{a^2}{2} \left( 2\pi + \frac{2\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

**Conclusión:** El área encerrada por el cardioide es:

$$A = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

### Definición 1.5.6 [Coordenadas cilíndricas]

En el espacio tridimensional, las **coordenadas cilíndricas**  $(r, \theta, z)$  están definidas en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:

$$\varphi : \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el eje  $z$ .
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal, medido desde el eje positivo  $x$  en el plano  $xy$ .
- $z \in \mathbb{R}$  representa la coordenada vertical, la misma que en cartesianas.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta \leq 2\pi\}.$$

Y su imagen es el espacio tridimensional excepto el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det(D\varphi)| = r > 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas es:

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

**Ejemplo**

Sea  $V$  el sólido limitado por  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 2$ , y consideremos la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Evalúamos la integral:

$$\int_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Cambiamos a coordenadas cilíndricas, donde  $x^2 + y^2 = r^2$ , obteniendo:

$$\int_{z=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{z}} (r^2 + z^2) \cdot r dr d\theta dz.$$

Separando la integral en términos de  $\theta$ :

$$\left( \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_{z=0}^2 \left( \int_{r=0}^{\sqrt{z}} (r^3 + z^2 r) dr \right) dz \right).$$

Resolviendo la integral en  $\theta$ :

$$2\pi \int_{z=0}^2 \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz.$$

Sustituyendo  $r = \sqrt{z}$ :

$$2\pi \int_{z=0}^2 \left( \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{2} \right) dz.$$

Resolviendo la integral en  $z$ :

$$2\pi \left[ \frac{z^3}{12} + \frac{z^4}{8} \right]_{z=0}^{z=2}.$$

Evalutando los límites:

$$2\pi \left( \frac{8}{12} + \frac{16}{8} \right) = 2\pi \left( \frac{2}{3} + 2 \right) = 2\pi \left( \frac{8}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}.$$

Por lo tanto, el resultado final es:

$$\frac{16\pi}{3}.$$

**Definición 1.5.7** [Coordenadas esféricas]

En el espacio tridimensional, las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  se definen en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:

$$\psi : \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \phi. \end{cases}$$

Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal medido en el plano  $xy$  desde el eje positivo  $x$ .
- $\phi \in [0, \pi]$  es el ángulo polar o colatitud, medido desde el eje positivo  $z$ .

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$D_\psi = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det D_\psi| = r^2 \sin \phi.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas es:

$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

### Ejemplo

$$B_r = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \implies$$

$$\text{vol}(B_r) = \int_{B_r} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^R r^2 \sin(\phi) \, dr \right) d\phi \right) d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3$$

### Definición 1.5.8 [Coordenadas elípticas]

Fijemos  $a, b > 0$  y consideremos la transformación:

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta. \end{cases}$$

donde  $r \geq 0$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Elevando al cuadrado y sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2.$$

De aquí, podemos despejar  $r$  en función de  $x$  y  $y$ :

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Estas coordenadas permiten describir puntos en el plano  $(x, y)$  de forma natural para regiones con simetría elíptica.

### Ejemplo

Consideremos la región elíptica definida en coordenadas cartesianas como:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

En coordenadas elípticas, esto equivale a:

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$



**Cálculo del jacobiano:** La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Su determinante es:

$$\det(D\varphi) = abr.$$

**Cálculo del área de la elipse:** La integral de área en coordenadas elípticas se expresa como:

$$\text{Área}(E) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 abr \, dr \, d\theta.$$

Resolviendo la integral en  $r$ :

$$\int_0^1 abr \, dr = ab \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{ab}{2}.$$

Evaluando la integral en  $\theta$ :

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Por lo tanto, el área de la elipse es:

$$\text{Área}(E) = 2\pi \cdot \frac{ab}{2} = \pi ab.$$

Así, hemos obtenido el área de la elipse usando coordenadas elípticas.

### Ejemplo

Volumen comprendido entre los paraboloides:

$$2z = 4 + \frac{x^2}{3} + y^2, \quad 2z = \frac{2x^2}{3} + 3y^2$$

Eliminando  $z$ :

$$4 + \frac{x^2}{3} + y^2 = \frac{2x^2}{3} + 3y^2 \iff \frac{x^2}{3} + 2y^2 = 4$$

Lo cual es un cilindro elíptico de  $\mathbb{R}^3$ .

Definimos el dominio:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{3} + 2y^2 \leq 4 \right\}$$

Luego, el volumen está dado por:

$$\text{vol} = \int_E \left( 2 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} \right) - \left( \frac{x^2}{3} + \frac{3y^2}{2} \right) dx \, dy = \int_E \left( 2 - \frac{x^2}{6} - y^2 \right) dx \, dy$$

Haciendo el cambio de coordenadas elípticas:

$$a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{3}r \cos \theta, \quad y = \sqrt{2}r \sin \theta$$

El jacobiano es:

$$J = 2\sqrt{6}$$

Finalmente, el cambio de variable nos ofrece que el volumen del conjunto es:

$$2\sqrt{6}\pi.$$

### Observación 1.5.9

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ .

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

Entonces:

$$\det(D_\varphi) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

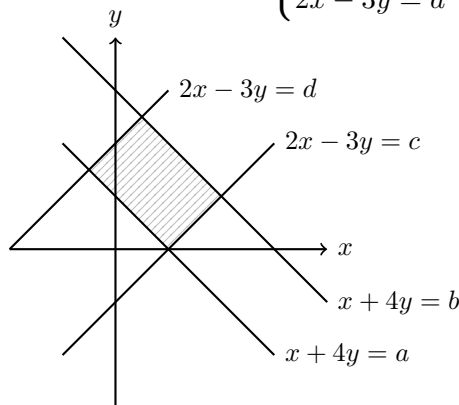
Entonces el Teorema de Cambio de Variable queda como:

$$\begin{aligned} \int_{D=\varphi(E)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n &= \int_{E=\varphi^{-1}(D)} f(x_1(u), \dots, x_n(u)) |\det(D_\varphi)| du_1 \cdots du_n = \\ &= \int_{E=\varphi^{-1}(D)} f(x_1(u), \dots, x_n(u)) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

### Ejemplo

Ejercicio 4 (Hoja 4)

Calcula el área del recinto delimitado por las rectas  $\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \\ 2x - 3y = c \\ 2x - 3y = d \end{cases}$  Supongamos que  $a < b, c < d$ .



Para ello tomemos el cambio de variable:  $\varphi^{-1} = \psi = \begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - 3y \end{cases}$

$$\text{area}(D) = \int_{D=\varphi(E)} 1 dx dy = \int_E 1 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Donde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \implies \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{-5}$$

Entonces la integral anterior queda de la forma:

$$\int_E \frac{1}{5} du dv = \frac{1}{5} \cdot \text{area}(E) = \frac{1}{5} (b - a)(d - c)$$

## Ejemplo

Ejercicio 6.b (Hoja 4)

Sea el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$$

queremos calcular la integral

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Para ello consideremos el cambio de variable ("hiperbólico"):

$$\psi = \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

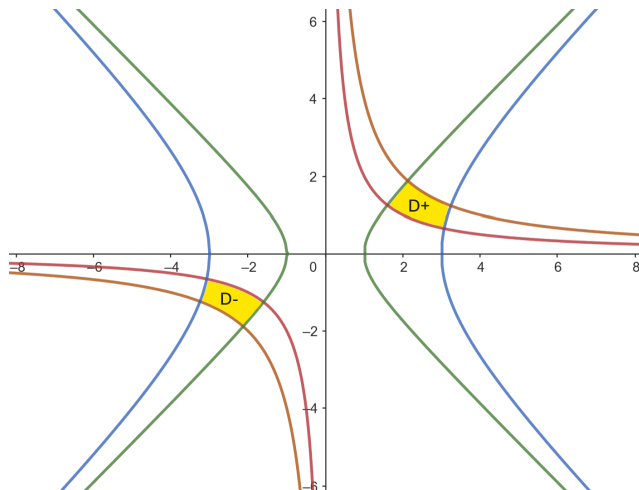
Si

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} u = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos(2\theta) \\ v = r^2 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = r^2 \sin(2\theta) \end{cases}$$

Sean

$$V = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, \quad U = \{(u, v) : v > 0\}$$

Entonces  $\psi : V \rightarrow U$  es biyectiva y existe  $\varphi = \psi^{-1} : U \rightarrow V$ .



Sean

$$D^+ = \{(x, y) \in D : x > 0, y > 0\}, \quad D^- = \{(x, y) \in D : x < 0, y < 0\}$$

Entonces

$$\int_{D^+} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^-} (x^2 + y^2) dx dy$$

Sea entonces el cambio de variable

$$\begin{cases} \bar{x} = -x \\ \bar{y} = -y \end{cases}$$

con el jacobiano igual a 1.

Entonces

$$\int_{D^-} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^+} (-x)^2 + (-y)^2 dx dy = \int_{D^+} x^2 + y^2 dx dy$$

Entonces,

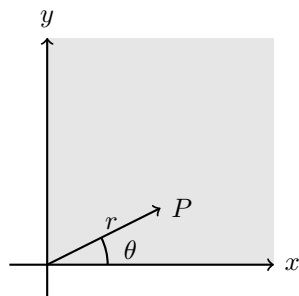
$$\int_D x^2 + y^2 dx dy = 2 \int_{D^+} x^2 + y^2 dx dy = 2 \int_E \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \int_E \sqrt{u^2 + v^2} du dv$$

Ya que tenemos que

$$x^2 + y^2 = r^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Donde además tenemos que:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2 \implies \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{4x^2 + 4y^2} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$$



Así finalmente la integral da

$$\frac{1}{2} \text{area}(E) = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$$

### Ejemplo

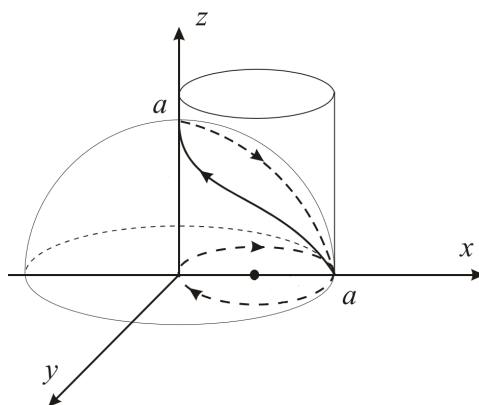
Calcúlese el volumen comprendido entre  $z = f(x, y)$ ,  $z = g(x, y)$  sobre D, con D la proyección de las funciones sobre el plano xy. Entonces,

$$\text{vol} = \int_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy = \int_D \int_D 1 dx dy dz = \int_D \left[ \int_{z=g(x,y)}^{z=f(x,y)} 1 dz \right] dx dy$$

### Ejemplo

#### Bóveda de Viviani

Calcúlese el volumen comprendido entre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = ay$  con  $a > 0$ .



Donde tomando valores en la esfera podemos obtener:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \iff x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} \\ x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} - ay = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

Si tomamos que  $r^2 = x^2 + y^2$  y  $ay = ar \sin(\theta)$  entonces, La ecuación de la circunferencia es en coordenadas polares es:  $r = a \cos(\theta)$

$$\begin{aligned}
vol &= 2 \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{ra \sin(\theta)} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=a \sin(\theta)} d\theta = \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (a^3 - (a^2 - a^2 \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}) d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (a^3 - a^3 |\cos^3(\theta)|) d\theta = 4 \frac{a^3}{3} \int_0^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3(\theta)) d\theta = \frac{4\pi a^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)
\end{aligned}$$

Todo esto teniendo en cuenta que  $(\cos^3(\theta))^{\frac{3}{2}} = |\cos^3(\theta)|$