

# Cálculo Integral<sup>1</sup>

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero  
*Ciencias Matemáticas e*  
*Ingeniería Informática*

---

<sup>1</sup>basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

# Contents

<b>1</b>	<b>Medida de Lebesgue</b>	<b>2</b>
1.1	Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	2
1.2	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	4
1.3	Medibilidad de Funciones	11
<b>2</b>	<b>Funciones integrables en varias variables</b>	<b>26</b>
<b>3</b>	<b>Teorema de Fubini</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>Cambio de variables</b>	<b>28</b>
<b>5</b>	<b>Funciones definidas por integrales</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>Integrales de línea: campos escalares y vectoriales</b>	<b>30</b>
<b>7</b>	<b>Teorema de Green</b>	<b>31</b>
<b>8</b>	<b>Superficies paramétricas</b>	<b>32</b>
<b>9</b>	<b>Integrales de superficie</b>	<b>33</b>
<b>10</b>	<b>Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss</b>	<b>34</b>

# 1 Medida de Lebesgue

## 1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

**Definición 1.1.1.** Un n-rectángulo en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i \ \forall i \quad (1)$$

Definimos el volúmen de  $R$  como:

$$\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (2)$$

Consideramos también los n-rectángulos abiertos denotados por  $\overset{\circ}{R}$ , que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

**Observación 1.1.1.** Dado  $R$  n-rectángulo cerrado tal que  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , podemos considerar para cada  $\delta > 0$  el n-rectángulo abierto  $R_\delta = \prod_{i=1}^n (a_i - \delta, b_i + \delta)$ . Se tiene que  $R \subset R_\delta$  y  $\text{vol}(R_\delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2\delta) = \text{vol}(R) + 2n\delta$ . Por tanto:

$$\text{vol}(R) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{vol}(R_\delta) \quad (3)$$

**Definición 1.1.2.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos la medida exterior de  $A$  como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ n-rectángulos cerrados} \right\} \quad (4)$$

Donde la ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de n-rectángulos que recubren  $A$ . A esta medida exterior la llamamos medida de Lebesgue exterior.

**Observación 1.1.2.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$

1.  $m^*(A) = +\infty \iff \forall \{R_j\}_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  se tiene que  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) = +\infty$
2.  $m^*(A) = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists \{R_j\}_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  y  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \epsilon$
3.  $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \epsilon > 0 \exists \{R_j\}_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  y  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \alpha + \epsilon$

**Definición 1.1.3.** Se dice que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto nulo si  $m^*(A) = 0$ .

1. Si  $R$  es un n-rectángulo degenerado, es decir,  $R$  tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces  $R$  es un conjunto nulo ( $m^*(R) = 0$ ).
2. En  $\mathbb{R}^2$ , sea el conjunto  $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ . Dado  $\epsilon > 0$  tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m > \frac{1}{\epsilon}$ . Consideramos  $A \subset \bigcup_{i=1}^m [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ . Se tiene que  $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^m \text{vol}([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(A) = 0$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.1.1.** Sea  $m^* \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  una función que cumple:

1.  $m^*(\emptyset) = 0$
2.  $m^*(A) \leq m^*(B)$  si  $A \subset B$
3.  $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

Entonces  $m^*$  es una medida exterior en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.*

1.  $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$  con  $R_j$  n-rectángulos degenerados  $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$ .
2. Sea  $A \subset B$  y sea  $\{R_j\}_{j \in J}$  tal que  $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ . Entonces  $\{R_j\}_{j \in J}$  es un recubrimiento de  $A$  y por tanto  $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$ .
3. Si  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\exists \{R_{j,i}\}_{i=1}^{\infty}$  tal que  $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$ . Entonces  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y por tanto se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario, se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$ .

□

**Corolario 1.1.1.** La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

*Demostración.* Sea  $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$  entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$ . □

**Lema 1.1.1.** Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  entonces  $m^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ con } Q_i \text{ n-rectángulos abiertos} \}$

*Demostración.* Denotamos por  $\beta$  el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea  $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de rectángulos abiertos tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ . Tenemos entonces que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bar{Q}_j$  y puesto que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\bar{Q}_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j)$ , se tiene que  $m^*(A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\bar{Q}_j) \leq \beta$ . Por tanto,  $m^*(A) \leq \beta$ . Veamos ahora la otra desigualdad  $\beta \leq m^*(A)$ . Si  $m^*(A) = +\infty$  entonces  $\beta = +\infty$  y no hay nada que demostrar. Supongamos que  $m^*(A) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de n-rectángulos cerrados tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(A) + \epsilon$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$  consideramos  $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^j}$ . Escogiendo  $\delta_j > 0$  lo suficientemente pequeño, se tiene que  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \text{vol}(R_j) + \epsilon_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Nótese que aquí  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j}$  denota el volumen del n-rectángulo abierto  $R_j$  con lados aumentados en  $\delta_j$ . Entonces  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j}$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{vol}(R_j) + \epsilon_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(A) + 2\epsilon$ . Por tanto,  $\beta \leq m^*(A)$ . □

**Definición 1.1.4.** Una partición del intervalo  $[a, b]$  es una colección numerable de puntos  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ . Dado un n-rectángulo  $R \subset \mathbb{R}^n$ , una partición  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  de  $R$  es una colección particiones  $P_i$  de  $[a_i, b_i]$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  siendo  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

Los subrectángulos de  $P$  son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \prod_{j=1}^n [t_{i_j}^j, t_{i_j+1}^j] \quad (5)$$

Denotamos  $S \in P$  para indicar que  $S$  es un subrectángulo de  $P$ .

**Lema 1.1.2.** Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un n-rectángulo y  $P$  una partición de  $R$ . Entonces:

1.  $R = \bigcup_{S \in P} S$
2. Si  $S, S' \in P$  y  $S \neq S'$  entonces  $S \cap S' = \emptyset$
3.  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S)$

**Proposición 1.1.1.** Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un n-rectángulo entonces  $m^*(R) = \text{vol}(R)$ .

*Demostración.*

"  $\leq$  "

Sea  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  con  $R_1 = R$  y  $R_j$  degenerados para  $j > 1$ . Entonces:

$$m^*(R) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) = \text{vol}(R).$$

"  $\geq$  "

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de n-rectángulos abiertos tal que  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Sabemos que  $R$  es compacto al ser cerrado y acotado y, por tanto, al ser  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  un recubrimiento abierto de  $R$ , existe un subrecubrimiento finito  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$  de  $R$ . Entonces  $R \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{Q_i}$ . Consideramos  $R_j = R \cap \overline{Q_j}$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ . Tenemos entonces que  $R = \bigcup_{j=1}^m \overline{Q_j}$  y además prolongando los lados podemos obtener una partición  $P$  de  $R$  tal que cada subrectángulo de  $P$  está contenido en algún  $R_j$  para  $1 \leq j \leq m$ . Por tanto,  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$ .  $\square$

## 1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

**Notación:** Para  $A \subset \mathbb{R}^n$  denotamos por  $A^c$  al complementario de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2.1.** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue si para todo  $R \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c) \quad (6)$$

**Proposición 1.2.1.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces son equivalentes:

1.  $A$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .
3.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

*Demostración.*

"2  $\implies$  3"

Trivial

"3  $\implies$  2"

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A \cap A^c) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

"2  $\implies$  1"

Inmediato, tomando  $E = R$ .

"1  $\implies$  3"

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto, si  $m^*(E) = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos cerrados tal que  $E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Entonces  $E \cap A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A$  y  $E \cap A^c \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A^c$ . Por tanto,  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .  $\square$

**Definición 1.2.2.** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra si:

1.  $X \in \mathcal{A}$
2. Si  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3.  $\forall \{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  se tiene que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

**Definición 1.2.3.** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra, entonces una medida en  $X$  es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$$

**Teorema 1.2.1.** La familia  $M$  de todos los conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $m = m^* \upharpoonright_M$  es una medida numerablemente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

**Lema 1.2.1.**  $\mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E) = m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + m^*(\emptyset) = m^*(E) + 0 = m^*(E)$ .  $\square$

**Lema 1.2.2.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A^c$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A) = m^*(E)$   $\square$

Con los dos lemas anteriores obtenemos como corolario que  $\emptyset$  es medible en el sentido de Lebesgue.

**Lema 1.2.3.** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Observemos primero que  $A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$  luego entonces tenemos que  $m^*(A \cup B) \leq m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$ . Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) = m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)$ .  $\square$

**Lema 1.2.4.** Sea  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y además  $m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$ .

*Demostración.* Definimos la sucesión creciente de conjuntos  $B_k = A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Entonces  $B_k$  es medible en el sentido de Lebesgue por el lema anterior. Sean  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  y  $E \in \mathbb{R}^n$  tenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k^c) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1}) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1})$$

Reiterando el proceso obtenemos  $m^*(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)$ . Por lo tanto,  $m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_k^c) = \left( \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) \right) + m^*(E \cap B_k^c) \geq \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c)$ . Se sigue entonces  $m^*(E) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$ . Luego  $B$  es medible.

Tomando  $E = B$  en la desigualdad anterior obtenemos  $m^*(B) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) + m^*(B \cap B^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j)$ . Por otro lado,  $m^*(B) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j)$  por definición de medida exterior. Por tanto,  $m^*(B) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j) \implies m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$ .  $\square$

**Lema 1.2.5.** La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideremos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

Observemos que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  y que para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $A_j$  es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto,  $A_j$  es medible. Además,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$  con  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Por el lema anterior,  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible  $\implies \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  es medible.  $\square$

**Proposición 1.2.2.** Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  nulo, entonces  $m^*(A) = 0$ .  $\forall E \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $E \cap A \subset A \implies 0 \leq m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0 \implies m^*(E \cap A) = 0$ . Análogamente,  $E \cap A^c \subset E \implies 0 \leq m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E) \implies m^*(E \cap A^c) = 0$ . Por tanto,  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$ . Para la otra desigualdad,  $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \implies m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ . Y por tanto obtenemos la igualdad  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .  $\square$

**Definición 1.2.4.** Se dice que una *propiedad* se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.

**Proposición 1.2.3.** Todo n-rectángulo cerrado  $R \in \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Dado  $R \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que  $\forall Q \in \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado se tiene que  $\text{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ . Consideramos el n-rectángulo  $Q_0 = Q \cap R$ . Nótese que  $Q \cap R^c$  es unión finita de n-rectángulos  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ . Entonces  $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_m$  forman una partición de  $Q$ . Luego  $\text{vol}(Q) = \sum_{i=0}^m \text{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^m m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ .  $\square$

**Observación 1.2.1.** En  $\mathbb{R}^n$  los rectángulos abiertos o se<sup>0</sup>miabiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.

**Definición 1.2.5.** Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \quad (7)$$

Análogamente se pueden definir los cubos n-dimensionales semi-abiertos.

**Observación 1.2.2.** Denotaremos la norma del supremo en  $\mathbb{R}^n$  como:

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n \{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

Llamaremos bola abierta de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r) \quad (9)$$

Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r] \quad (10)$$

**Teorema 1.2.2.** Sea  $G \in \mathbb{R}^n$  abierto entonces se tiene:

1.  $G$  es unión numerable de n-cubos cerrados.



2.  $G$  es unión numerable de  $n$ -cubos abiertos.

*Demostración.* Consideremos la familia de  $n$ -cubos  $\mathcal{B} = \{\bar{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \bar{B}_\infty(q, r) \subset G\}$ . Veamos que  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ . Dado que  $B \in G \quad \forall B \in \mathcal{B}$  entonces es inmediato ver que  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset G$ . Por ser  $G$  abierto,  $\exists \delta > 0$  tal que  $B_\infty(x, \delta) \subset G$ . Sea  $r \in \mathbb{Q}$  con  $0 < r < \frac{\delta}{2}$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , sabemos que  $\exists q \in \mathbb{Q}^n$  tal que  $\|x - q\|_\infty < r$ . Veamos entonces que  $x \in B_\infty(q, r) \subset B_\infty(x, \delta) \subset G$ . Dado  $y \in \mathbb{R}^n$  con  $\|y - q\|_\infty < r$  se sigue:

$$\|y - x\|_\infty \leq \|y - q\|_\infty + \|q - x\|_\infty < r + r = 2r < \delta$$

Por tanto  $y \in B_\infty(x, \delta) \implies x \in \bar{B}_\infty(q, r) \subset G$ . Luego  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .

Nótese que numerabilidad de la familia  $\mathcal{B}$  es inmediata por la numerabilidad de  $\mathbb{Q}^n$  que, a su vez, es numerable por ser  $\mathbb{Q}$  numerable.

La segunda parte del teorema es análoga a la primera. □

**Corolario 1.2.1.** Todos los conjuntos abiertos y cerrados de  $\mathbb{R}^n$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

**Teorema 1.2.3.** Sea  $E \in \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists G \in \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $m^*(G \setminus E) < \epsilon$ .
3.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists F \in \mathbb{R}^n$  cerrado tal que  $F \subset E$  y  $m^*(E \setminus F) < \epsilon$ .
4.  $\forall \epsilon$  existen  $F$  cerrado y  $G$  abierto tales que  $F \subset E \subset G$  y  $m^*(G \setminus F) < \epsilon$ .

*Demostración.*

"1  $\implies$  2" Distinción de casos:

1. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ : Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos abiertos tales que  $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty (R_j)$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Considerando el abierto  $G = \bigcup_{j=1}^\infty (R_j)$ , se tiene que  $G$  es medible por el corolario anterior y  $m^*(G) = m^*(E \cap G) + m^*(E \cap G^c) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$ . Por tanto,  $m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) - m^*(E) < \epsilon$ .
2. Supongamos que  $m^*(E) = +\infty$ :  $\forall k \in \mathbb{N}$  sea  $E_k = E \cap [-k, k]^n$ , que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además  $m^*(E_k) < +\infty$  por ser  $E_k$  acotado, y  $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ . Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  existe  $G_k$  abierto tal que  $E_k \subset G_k$  y  $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$ . Entonces  $G = \bigcup_{k=1}^\infty G_k$  abierto y  $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty G_k = G$  por lo que  $m^*(G \setminus E) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^\infty (G_k \setminus E_k)) \leq \sum_{k=1}^\infty m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$ .

"2  $\implies$  1"

$\forall j \in \mathbb{N}$  tomando  $\epsilon = \frac{1}{j}$  entonces  $\exists G_j$  abierto tal que  $E \subset G_j$  y  $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . Entonces considerando  $B = \bigcap_{j=1}^\infty G_j$  que es medible y abierto se tiene que  $E \subset B$ . Luego  $B \setminus E \subset G_j \setminus E$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . En consecuencia  $m^*(B \setminus E) = 0 \implies B \setminus E$  es medible. Por otro lado,  $B = E \cup (B \setminus E)$  o que es lo mismo  $E = B \setminus (B \setminus E)$ . Tanto  $B$  como  $(B \setminus E)$  son medibles, luego  $E$  es medible.

*Observación:* Además,  $E = B \setminus Z$ , donde  $B$  es intersección numerable de abiertos o  $Z$  es un conjunto nulo.

"1  $\implies$  3"

Como  $E$  es medible entonces  $E^c$  también lo es. Por (2), dado  $\epsilon > 0$  existe  $G$  abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,  $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies$

$$m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon.$$

"1  $\implies$  3"

Como  $E$  es medible entonces tenemos que  $E^c$  también es medible, por lo que, dado  $\epsilon > 0$  por (2)  $\exists G$ -abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,  $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ .

"3  $\implies$  1"

$\forall j \in \mathbb{N} \exists F_j$  cerrado tal que  $F_j \subset E$ ,  $m(E \setminus F_j) < 1/j$ . Sea  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  conjunto medible y  $A \subset E$ . Además,  $m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < 1/j \forall j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $E = A \cup (E \setminus A) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \cup (E \setminus A)$  Entonces dado que  $E \setminus A$  es un conjunto medible por ser nulo y  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  es medible por ser unión numerable de conjuntos cerrados, entonces  $E$  es medible.

□

**Definición 1.2.6.** La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  (o equivalentemente, la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los cerrados de  $\mathbb{R}^n$ ). Los conjuntos de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.

Decimos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es  $G_\delta$  si  $A$  es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  es  $F_\sigma$  si  $A$  es unión numerable de cerrados.

**Corolario 1.2.2.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $E = A \setminus N$  con  $A$  siendo  $G_\delta$  y  $N$  un conjunto nulo.
3.  $E = B \cup N$  con  $B$  siendo  $F_\sigma$  y  $N$  un conjunto nulo.

**Corolario 1.2.3.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$ .
3.  $m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$ .

**Lema 1.2.6.** Sea  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y  $m(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j)$ .

*Demostración.* Sea  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideremos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$  y que  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión disjunta de conjuntos. Entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k m(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$ . Dado que  $m^*(A_j) = m(B_1) + m(B_2) + \dots + m(B_j) \forall j \geq 1$  □

*Demostración.* Demostración del Corolario 4.

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k : E_k = E \cap [-k, k]^n \forall k \in \mathbb{N}$  Entonces  $(E_k)_k \in \mathbb{N}$  es una sucesión creciente de conjuntos medibles y por el lema anterior tenemos que  $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$  Además,  $\forall k \in \mathbb{N} \exists F_k \subset E_k$  cerrado tal que  $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$  Entonces como  $F_k$  es un conjunto cerrado y acotado, tenemos que el conjunto es compacto. Por tanto  $m(E_k) = m(E_k \setminus F_k) + m(F_k) \geq m(F_k) + 1/k$  y por tanto  $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(F_k)$  y finalmente obtenemos que  $m(E) = \sup\{m(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$   $\square$

**Definición 1.2.7.** Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \quad (11)$$

**Definición 1.2.8.** Se dice que un cubo en  $\mathbb{R}^n$  es diádico si sus lados miden  $2^{-m}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Es decir, si el rectángulo  $Q$  es de la forma:

$$Q = \left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \dots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

con  $m \in \mathbb{Z}$  (nivel de escala u orden) y  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$

**Teorema 1.2.4.** Todo conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  es unión numerable y disjunta n-cubos semiabiertos, que son cubos diádicos.

*Demostración.* Denotemos por  $\mathcal{F}$  la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \dots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

con  $k_i \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $\mathcal{Q}_1$  la familia de todos los cubos cerrados  $Q$  de la forma  $[k_1, k_1 + 1] \times \dots \times [k_n, k_n + 1]$ , donde los  $k_i \in \mathbb{Z}$ , y tales que  $Q \subset U$ . Supuesto definida  $\mathcal{Q}_m$ , sea  $\mathcal{Q}_{m+1}$  la familia de todos los cubos  $Q$  de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right] \times \dots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right],$$

donde  $k_i \in \mathbb{Z}$ , tales que no están contenidos en ningún cubo  $Q' \in \mathcal{Q}_j$  para  $j \leq m$ , y tales que  $Q \subset U$ . Por inducción queda definida  $\mathcal{Q}_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , y ponemos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Es obvio por construcción que si  $Q, Q' \in \mathcal{Q}$  y  $Q \neq Q'$ , entonces  $Q$  y  $Q'$  tienen interiores disjuntos. También es claro que  $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \subset U$ . Veamos que de hecho

$$U = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Dado  $x \in U$ , usando que  $U$  es abierto y que el conjunto  $\{k/2^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , es fácil ver que existe algún cubo  $Q_x \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in Q_x$  y  $Q_x \subset U$ . El lado de  $Q_x$  mide  $2^{-m_x}$  para algún  $m_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Si  $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$  ya hemos terminado. En otro caso, por definición de  $\mathcal{Q}_{m_x}$ , existe algún  $j < m_x$  tal que  $Q_x$  está contenido en algún cubo  $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$ , y por tanto  $x$  pertenece a este cubo. En cualquier caso se ve que  $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{Q}_i$ .  $\square$

### 1.3 Medibilidad de Funciones

**Definición 1.3.1.** Un espacio medible es un par  $(X, \Sigma)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ .

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$ , donde  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto medible y  $M|_E$  es la familia de subconjuntos medibles de  $E$ .
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto boreliano y  $B|_A$  es la familia de subconjuntos borelianos de  $A$ .

**Definición 1.3.2.** Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible. Una función  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es un conjunto medible.

**Proposición 1.3.1.** Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces son equivalentes

1.  $f$  es medible.
2. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  es un conjunto medible.
3. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  es un conjunto medible.
4. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es un conjunto medible.
5. Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.
6. Para todo  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, los conjuntos  $f^{-1}(G)$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  dado que las  $\sigma$ -álgebras son cerradas bajo complementarios, obtenemos que (1)  $\iff$  (2) y (3)  $\iff$  (4).

Veamos ahora la relación (1)  $\iff$  (4):

- (1)  $\implies$  (4): Podemos tomar el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}$  que es una intersección numerable de conjuntos medibles por (1). Por tanto al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es medible.
- (4)  $\implies$  (1): Equivalentemente al apartado anterior podemos obtener que el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\}$  es medible por (4). Por tanto, también al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es medible.

De forma análoga a esta equivalencia podemos obtener que (2)  $\iff$  (3). Y también las equivalencias de (5)  $\iff$  (6) son inmediatas, pues podemos tomar los conjuntos acotados  $x \in X : \alpha \leq f(x) < \beta = x \in X : f(x) \geq \alpha \cap x \in X : f(x) < \beta$  los cuales son conjuntos medibles por los apartados anteriores. De forma similar podemos obtener que el conjunto  $x \in X : f(x) = +\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\}$  es medible por los apartados anteriores. De forma análoga se demuestra el caso de (6). Por último veamos la equivalencia de (6)  $\iff$  (7):

1. (7)  $\implies$  (6): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos tomarlo como  $G = (\alpha, \beta)$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\} = \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\}$  y asimismo, los conjuntos  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son medibles por las equivalencias anteriores.
2. (6)  $\implies$  (7): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos reescribir  $G$  como  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$  donde  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  es un conjunto abierto. Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\alpha_j, \beta_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\}$  es medible por las equivalencias anteriores.

□

**Corolario 1.3.1.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces  $f$  es medible.

**Proposición 1.3.2.** Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces la función  $\Phi \circ (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.

*Demostración.* Sean  $(f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y continua respectivamente. Denotemos por  $h = (f_1, f_2, \dots, f_n) \circ \Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $G \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto, entonces, denotemos por  $U = \Phi^{-1}(G)$  al conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces sea  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de rectángulos  $n$ -dimensionales tales que  $(R_j) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i^j, \beta_i^j) \forall j \in \mathbb{N} \iff \forall j \in \mathbb{N} f^{-1}(R_j) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i^j, \beta_i^j)$  es medible. Por tanto, la función  $h$  es medible. □

**Corolario 1.3.2.** Sean  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles, entonces  $f + g, f \circ g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \min\{f, 0\}$  son todas funciones medibles.

**Observación 1.3.1.**  $f = f^+ - f^-$  y  $|f| = f^+ + f^-$ .

**Teorema 1.3.1.** Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : X \rightarrow [+\infty, -\infty]$  una sucesión de funciones medibles, entonces:

1.  $\sup_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$  es una función medible.
2.  $\inf_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$  es una función medible.
3.  $\limsup_{j \rightarrow \infty} \{f_j\}$  es una función medible.
4.  $\liminf_{j \rightarrow \infty} \{f_j\}$  es una función medible.
5.  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$  es una función medible.

*Demostración.* 1. Denotemos  $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : h(x) > \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha \iff \exists j \in \mathbb{N} : f_j(x) > \alpha \Rightarrow x \in X : h(x) > \alpha = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_j(x) > \alpha\}$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

2. Denotemos  $g(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : g(x) < \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j \geq \alpha \iff \forall j \in \mathbb{N} : f_j(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in X : g(x) \geq \alpha = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_j(x) \geq \alpha\}$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

3. Recordemos que  $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq j} f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j, f_{j+1}, \dots$ . Entonces como el límite de una sucesión decreciente y acotada siempre existe tenemos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{k \geq j} f_k = \inf_{j \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
4. Recordemos que  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq j} f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf f_j, f_{j+1}, \dots = \sup_{j \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
5. Si  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$  (puntualmente) entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ . Entonces por los apartados anteriores obtenemos que  $f$  es una función medible.

□

**Proposición 1.3.3.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  funciones medibles-Lebesgue tales que  $f = g$  en casi todo punto. Entonces  $g$  es medible-Lebesgue.

*Demostración.* Dado que  $f = g$  en casi todo punto, entonces  $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$  es un conjunto de medida nula. Entonces, dado un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : f(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible dado que  $\{x \in Z : f(x) < \alpha\}$  es medible por ser un conjunto de medida nula y  $\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible por ser  $g$  medible. Por tanto,  $g$  es medible. □

**Corolario 1.3.3.** Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  sucesión de funciones medibles tales que  $f_j \rightarrow f$  en casi todo punto, entonces  $f$  es medible.

*Demostración.* Sea  $Z = \{x \in X : f_j(x) \not\rightarrow f(x)\}$  el cual tiene medida nula por hipótesis. Entonces definimos la función  $g(x) = \begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$  en casi todo punto. Asimismo podemos definir la sucesión de funciones  $g_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases}$  que converge a  $g$  puntualmente, por tanto, por la proposición anterior tenemos que  $g$  es medible  $\Rightarrow f$  es medible. □

**Definición 1.3.3.** Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible. Definimos la función característica de un conjunto  $E \in \Sigma$  como:  $X_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in E^c \end{cases}$

**Observación 1.3.2.**  $X_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$

*Demostración.* Sea  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, podemos definir el conjunto  $X_E^{-1}(G) = \{x \in X : X_E(x) \in G\} = \begin{cases} X & 0 \in G, 1 \in G \\ E & 0 \notin G, 1 \in G \\ E^c & 0 \in G, 1 \notin G \\ \emptyset & 0 \notin G, 1 \notin G \end{cases}$ , por tanto,  $X_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$ . □

**Observación 1.3.3.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Entonces son equivalentes:

1.  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.
2.  $f \circ X_E : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.

*Demostración.* •  $(1 \implies 2) : E^c$  es medible y  $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ X_E(x) > \alpha\}$  es medible.

- $(2 \implies 1) : \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ X_E(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible.

□

**Definición 1.3.4.** Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ . Se dice que  $f$  es una función simple si toma un valor finito de valores. Es decir si:  $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty]$ . Además denotamos a  $f^{-1}(\alpha_i) = E_i$  y  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{E_i}$ . Asimismo obtenemos que  $X = \text{bigcup}_{i=1}^n E_i$ -unión disjunta de conjuntos. De este modo podemos decir que  $f$  es una combinación lineal finita de funciones simples.

**Observación 1.3.4.**  $f$  es medible  $\iff \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  es medible.

**Teorema 1.3.2.** Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible. Entonces existen funciones simples  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que:

- $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$ .
- $\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .
- Si además,  $f$  acotada  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en casi todo punto.

*Demostración.*  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n2^n$  definimos:  $E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]) = \{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\}$  y  $F_n = f^{-1}([n, +\infty]) = \{x \in X : f(x) \geq n\}$ . Los cuales son conjuntos medibles por ser preimágenes de conjuntos medibles. Sea entonces  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} X_{E_{n,i}} + n X_{F_n}$ , la cual es una sucesión de funciones simples. Analicemos la convergencia (puntual)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ :

- Si  $f(x) = +\infty \implies f(x) \geq m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies f_n(x) = m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = +\infty$ .
- Si  $f(x) < +\infty \implies \exists m(x) \in \mathbb{N} : 0 \leq f(x) \leq m(x) \implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) \leq \frac{k}{2^m}$  y  $f_n = \frac{k-1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies 0 \leq |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Además, cuando  $\exists M \in \mathbb{N} : f(x) \leq M \quad \forall x \in X \implies 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  (uniformemente).

Ahora veamos que  $f_n(x)$  es creciente:  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & x \in E_{n,i} \\ n & x \in F_n \end{cases} \implies f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & x \in E_{n,i} \\ n+1 & x \in F_{n+1} \end{cases} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $1 \leq i \leq n2^n \implies 1 \leq i \leq 2^{n+1} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . □

**Definición 1.3.5.** Consideremos en  $\mathbb{R}^n$  la  $\sigma$ -álgebra  $M$  de los conjuntos medibles y la medida-Lebesgue  $m$ . Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible, no negativa y con representación canónica  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  donde  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^n A_i$  unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces definimos la integral de  $s$  como:  $\int_{\mathbb{R}^n} s \, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$ .

**Observación 1.3.5.**  $\int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0$

*Demostración.* Dado  $E \subset \mathbb{R}^n$  mdible definimos  $\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \circ \chi_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap E)$ . □

**Lema 1.3.1.** Sea  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$  unión disjunta de conjuntos medibles. Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible y no negativa. Entonces  $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s$ .

*Demostración.* Supongamos que

$$s = \sum_{i=1}^m d_i \cdot \chi_{A_i}$$

(forma canónica), entonces

$$s(\mathbb{R}^n) = \{d_1, \dots, d_m\}.$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $B_k \in \{d_1, \dots, d_m\}$ . Definimos para cada  $j = 1, \dots, m$  el conjunto

$$Y_j = \{k \in \mathbb{N} : \beta_k = d_j\}.$$

Así,  $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^m Y_j$  es una unión disjunta. Además,

$$s^{-1}(\alpha_j) = A_j = \bigcup_{k \in Y_j} X_k,$$

una unión disjunta.

Entonces, usando la propiedad de la medida en una unión disjunta, tenemos

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k \in Y_j} X_k\right) = \sum_{k \in Y_j} m(X_k).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k).$$

Intercambiando el orden de la suma,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k) = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

□



**Corolario 1.3.4.** Sean  $s, t : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  funciones simples, medibles y no negativas. Entonces:  
 $\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$ .

*Demostración.* Sea  $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$  y  $t = \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot \chi_{B_j}$ . Dado que  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^k (A_i \cap B_j)$ , donde la unión es disjunta y los conjuntos  $A_i, B_j$  son medibles, se tiene que en  $A_i \cap B_j : s + t = \alpha_i + \beta_j$ . Aplicando el lema de integración para funciones simples:  $\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i m(A_i) + \sum_{j=1}^k \beta_j m(B_j) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$  (por el lema).  $\square$

**Definición 1.3.6.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  una función medible. Definimos la integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty)$ , definimos:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}.$$

**Proposición 1.3.4.** Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

1. si  $0 \leq f \leq g$  y  $E \subset F$  entonces  $\int_E f \leq \int_F g$ .
2. si  $f, g \geq 0 \implies \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .
3. si  $c \geq 0, f \geq 0 \implies \int_E cf = c \int_E f$ .
4. si  $m(E) = 0 \implies \int_E f = 0$ . (Incluso si  $f = +\infty$ )
5. si  $f|_E = 0 \implies \int_E f = 0$ . (Incluso si  $m(E) = +\infty$ )
6. si  $A \subset B$  y  $f \geq 0 \implies \int_A f \leq \int_B f$ .
7. si  $A, B$  son conjuntos medibles y disjuntos y  $f \geq 0 \implies \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ .
8. si  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies \int_E f = \int_E g$ .

*Demostración.* 1. Si  $f = c \cdot 0$ , entonces es trivial.

Si  $c > 0$ , tomamos  $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq s \leq f$ .

Entonces,  $c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$ .

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

2. Si  $m(E) = 0$ , entonces para toda  $s$  simple y medible tal que  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}.$$

De donde,

$$\int_E s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \right\} = 0.$$

3. Para toda  $s$  simple con  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que  $s(x) = 0$  para casi todo  $x \in E$ .

Luego,

$$f \cdot \chi_E = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \int_E s = 0, \quad \forall s.$$

Tomando el supremo,

$$\sup \left\{ \int_E s \right\} = 0 = \int_E f.$$

4. Si  $f$  es simple y medible con  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que

$$\text{si } A \subset B, \quad \chi_A \leq \chi_B \Rightarrow 0 \leq s \cdot \chi_B.$$

5. Si  $A, B$  son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B.$$

Así,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B).$$

Por linealidad de la integral,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

Por lo tanto,

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

8. Si  $E = A \cup Z$ , con  $A$  y  $Z$  disjuntos y tales que  $x \in E \Rightarrow f(x) = g(x)$ , entonces

$$Z = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Si  $m(Z) = 0$ , se tiene que

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f = \int_A g + 0 = \int_A g.$$

□

**Teorema 1.3.3.** Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una sucesión de funciones medibles tales que:

1.  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$  (puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

*Demostración.* La sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es monótona creciente en  $[0, +\infty)$ . Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k, \in [0, +\infty].$$

Dado que  $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.// Sea  $s$  una función simple y medible en  $\mathbb{R}^n$  con  $0 \leq s \leq f$ , y fijemos un  $c \in (0, 1)$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$ , definimos la sucesión de conjuntos  $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$ . Esta sucesión es medible (debido a que tanto  $f_k$  como  $s$  son medibles) y es creciente (debido a que  $f_k \leq f_{k+1}$  y  $c \cdot s \leq c \cdot f \leq f$ ). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f_k(x) = 0, \Rightarrow s(x) = 0 \Rightarrow 0 = f_k(x) \Rightarrow 0 = s(x) \Rightarrow x \in E_k & \forall k. \\ \text{Si } f_k(x) > 0, \Rightarrow c \cdot s(x) \leq f_k(x) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, & c \cdot s(x) \leq f_k(x). \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que  $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $s^{-1}(\alpha_j) = A_j$  tenemos:

$$m(A_j) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j).$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos que:

$$l \geq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite  $c \rightarrow 1$  obtenemos que:

$$l \geq \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que  $s$  es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad  $\forall s$  función simple, medible y no-negativa (por ser  $0 \leq s \leq f$ ). Por tanto, obtenemos la ansiada desigualdad:  $l \geq \int_{\mathbb{R}^n} f$ .  $\square$

**Teorema 1.3.4.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $f_k : E \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de función medibles y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  tales que:

1.  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$  (en casi todo punto de  $E$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (en casi todo punto de  $E$ )

*Demostración.* Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que  $m(N) = 0$ . Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E \setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \hat{f} = f \cdot \chi_{E \setminus N}$$

Podemos aplicar el **\*\*Teorema de la Convergencia Monótona\*\***, lo que nos permite concluir que: 1.  $\hat{f}_k \rightarrow \hat{f}$  puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_E f = \int_{E \setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

□

**Corolario 1.3.5.** 1. si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  son medibles, medibles y no-negativas  $\implies$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2. si  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de funciones mediles  $\forall k \in \mathbb{N} \implies$

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

*Demostración.* 1. Sabemos que existen sucesiones crecientes  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  y  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de funciones simples medibles no negativas tales que  $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = f$  y  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = g$ . Por lo tanto, aplicando el **\*\*Teorema de la Convergencia Monótona\*\*** obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + t_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

2. Por el apartado anterior obtenemos que:  $\sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m f_k \implies$  podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona, dado que la sucesión  $\sum_{k=1}^m f_k$  converge de forma creciente a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ . Entonces finalmente obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

□

**Lema 1.3.2.** Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones medibles, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

*Demostración.* Sea

$$f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} f_j = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$$

Dado que  $g_k \geq 0$ , la sucesión  $(g_k)$  está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el **\*\*Teorema de la Convergencia Monótona\*\***, se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k.$$

Por definición del  $\liminf$ , se cumple la desigualdad:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k.$$

Finalmente, dado que  $g_k \leq f$ , se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

□

**Observación 1.3.6.** El resultado análogo con  $\limsup$  no es válido en general. Podemos tomar de contraejemplo la función  $f_k = k \cdot \chi_{[k, \infty]}$ .

**Definición 1.3.7.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  función medible. Se dice que  $f$  es integrable (o absolutamente integrable) cuando

$$\int_E f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

**Observación 1.3.7.**  $f$  es integrable en  $E \iff |f|$  es integrable en  $E \iff f^+$  y  $f^-$  son integrables en  $E$ .

**Lema 1.3.3.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f = g - h$  con  $g, h : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones integrables. Entonces,

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h.$$

*Demostración.* Si  $f = g - h \implies |f| = |g - h| \leq g + h \implies f$  es integrable.  $f = f^+ - f^- = g - h \implies f^+ + h = f^- + g \implies \int_E f^+ + h = \int_E f^- + g \implies \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h$ .  $\square$

**Proposición 1.3.5.** Para funciones  $f$  y  $g$  integrables en  $E$ , se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si  $f, g$  son integrables en  $E$ , entonces  $f + g$  también es integrable y

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

2. Si  $f$  es integrable en  $E$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $cf$  es integrable en  $E$  y

$$\int_E (cf) = c \int_E f.$$

3. Si  $f \leq g$  en casi todo punto de  $E$ , entonces

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4. Si  $|f|$  es integrable en  $E$ , entonces  $f$  también es integrable y

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

5. Si  $f = g$  en casi todo punto de  $E$  y  $f$  es integrable en  $E$ , entonces  $g$  también es integrable en  $E$  con,

$$\int_E f = \int_E g.$$

6. Si  $m(E) = 0$  y  $f$  es medible, entonces es integrable en  $E$  y

$$\int_E f = 0$$

7. Si  $f$  es integrable en  $E$  entonces  $|f| < \infty$  en casi todo punto de  $E$

8. Si  $\int_E |f| = 0$ , entonces  $f = 0$  en casi todo punto de  $E$ .

*Demostración.* (1) Dado que  $f = f^+ - f^-$  y  $g = g^+ - g^- \implies f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ , con ambas partes  $\geq 0$ . Entonces, por el lema de la integral de funciones no negativas,

$$\int_E (f + g) = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-.$$

Reagrupando términos,

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

- (2) Si  $c > 0$ . Como  $cf = cf^+ - cf^- \implies$ ,

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^- = c \int_E f^+ - c \int_E f^- = c \int_E f.$$

Si  $c < 0$ , usando  $cf = cf^+ - cf^- = (-c)f^+ - (-c)f^-$ . Entonces aplicamos el apartado anterior y obtenemos que:

$$\int_E cf = c \int_E f.$$

- (3) Como  $g - f \geq 0$  en casi todo punto de  $E$ , se cumple que:  $(g - f) \cdot \chi_E \geq 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies$

$$\int_E (g - f) \geq 0.$$

Aplicando la linealidad de la integral,

$$\int_E g - \int_E f \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

- (4) Se tiene que  $|f| = f^+ + f^-$ . Usando la linealidad de la integral,

$$|\int_E f| = |\int_E f^+ + \int_E f^-|$$

Como  $f = f^+ - f^-$ , aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|.$$

- (5) Como  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies f^+ = g^+ \quad f^- = g^-$  en casi todo punto de  $E$  por lo que sólo queda aplicar el apartado anterior.

$$\int_E f = \int_E g$$

- (6)  $|f| \cdot \chi_E \geq 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies \int_E |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \cdot \chi_E = 0 \implies$

$$|\int_E f| \leq \int_E |f| = 0$$

- (7) No se qué hace la demostracion

- (8) Sea

$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

Definimos los conjuntos

$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, evaluamos la medida de  $A_k$  utilizando la integral:

$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \leq \int_{A_k} k \cdot |f| = k \int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} |f| \leq \int_E |f|$$

Tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  (y de la subaditividad) se concluye que

$$m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0.$$

□

**Teorema 1.3.5.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones medibles. Supongamos que  $\exists g : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f_k| < g$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Si además suponemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  en casi todo punto de  $E$ , entonces:

1.

$f_k$  y  $f$  son integrables en  $E$

2.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| = 0$$

3.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$$

*Demostración.* FALTA LA DEMOSTRACION □

**Definición 1.3.8.** Sea  $f$  función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

**Teorema 1.3.6.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto cualquiera,  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$  y suponemos que:

1.  $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.
2.  $\forall x \in E f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

es una función continua en  $U$ .

*Demostración.* FALTA LA DEMOSTRACION □

**Observación 1.3.8.**  $\forall u_0 \in U \lim_{u \rightarrow u_0} \int_E f(x, u) dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx$

**Teorema 1.3.7.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto y  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Y además supongamos que:

1.  $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .
2.  $\forall x \in E f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $U$ .
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .



Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx$$

es de clase  $C^1$  en  $U$  y  $\forall t \in U$  se cumple que:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(x, t) dx$$

*Demostración.* FALTA LA DEMOSTRACION □

**Teorema 1.3.8.** Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es integrable Lebesgue en  $[a, b]$  y se cumple que:

$$(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$$

**Observación 1.3.9.** Denotamos  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

*Demostración.*  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \dots < x_n^k = b\} \subset [a, b]$  tal que:  $\bar{S}(f, P_k) - \underline{S}(f, P_k) < \frac{1}{k}$ . Sabemos que  $P_{k+1}$  es mas fina que  $P_k$  y además que  $\text{diam}(P_k) = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$  denotamos  $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$  y  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$ .

$$\underline{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n_k} m_k(x_i^k - x_{i-1}^k) \geq \sum_{i=1}^{n_k} m_k = \int_a^b \Phi_k \quad \text{con} \quad \Phi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{x_{i-1}^k, x_i^k}$$

$$\bar{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n_k} M_k(x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \Psi_k \quad \text{con} \quad \Psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{x_{i-1}^k, x_i^k}$$

Es claro que  $\Phi_k \leq f \leq \Psi_k$ . Además, como  $P_{k+1}$  es más fino que  $P_k \implies (\Phi_k) \uparrow$  y  $(\Psi_k) \downarrow$  Denotamos  $\Phi = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k = \sup \Phi_k$  y  $\Psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k = \inf \Psi_k$ .  $f$  es integrable-Riemann  $\implies f$  es actoda  $\iff \exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ . La función  $g(x) = M$  es integrable en  $[a, b]$  y puesto que  $|\Psi_k| \leq g$  entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f, P_k) = \int_a^b \Phi_k \rightarrow \int_a^b \Phi \quad \bar{S}(f, P_k) = \int_a^b \Psi_k \rightarrow \int_a^b \Psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \quad \bar{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \implies \int_a^b \Phi = (R) \int_a^b f = \int_a^b \Psi$$

Y como  $\int_a^b \Psi - \Phi = 0 \implies \Psi - \Phi = 0$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Es decir  $\Phi = f = \Psi$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Y finalmente obtenemos que:

$$(L) \int_a^b f = \int_a^b \Phi = \int_a^b \Psi = (R) \int_a^b f$$

□

**Teorema 1.3.9.** Sean  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces  $f$  es integrable-Riemann en  $[a, b] \iff D_f = \{x \in [a, b] \mid f \text{ no es continua en } x\}$  tiene medida nula.

**Observación 1.3.10.** Ejemplo: La función de Dirichlet  $f = \chi_{\mathbb{R}^n \cup [0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  no es integrable-Riemann en  $[0, 1]$ . Pero  $f = 0$  en casi todo punto  $\implies f$  es integrable-Lebesgue y ésta vale:  $\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 0 = 0$

**Teorema 1.3.10.** Sean  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$  y  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente integrable-Riemann en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Entonces  $f$  es integrable-Lebesgue en  $(\alpha, \beta)$  y se cumple que:

$$(L) \int_{\alpha}^{\beta} f = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f$$

*Demostración.* Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea  $(\alpha, \beta)$ , en este caso trataremos el intervalo  $[\alpha, \infty)$ : Por hipótesis sabemos que:

1.  $\forall k \in \mathbb{N}, f$  es integrable-Riemann en  $[a, b]$
2.  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f| < +\infty$

Tenemos una sucesión  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y definimos las sucesiones de funciones:  $f_n = f \cdot \chi_{[a, b_n]}$  y  $g_n = |f| \cdot \chi_{[a, b_n]}$ . De manera que tenemos que  $f_n \uparrow f$  y  $g_n \uparrow |f|$ . Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monótona:

1.  $(L) \int_a^{+\infty} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} |f| = (R) \int_a^{+\infty} |f| < \infty$
2. Esto muestra que  $f$  es integrable-Lebesgue en  $[a, +\infty)$ .

Por otra parte, como  $|f_n| \leq |f| \forall n \in \mathbb{N}$  por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

1.  $(L) \int_a^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} f = (R) \int_a^{+\infty} f$

Finalmente obtenemos el resultado de que  $f$  es integrable de Riemann-impropia en  $[a, +\infty)$ .

$\forall (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : b_n \rightarrow \infty$  tenemos que  $|\int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f| \leq \epsilon$

□

## 2 Funciones integrables en varias variables

### 3 Teorema de Fubini

## 4 Cambio de variables

## 5 Funciones definidas por integrales

## 6 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales

## 7 Teorema de Green



## 8 Superficies paramétricas

## 9 Integrales de superficie

## 10 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss