Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero

Ciencias Matemáticas e

Ingeniería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Superficies Paramétricas

Definición 1.0.1 [Superficie Paramétrica]

Una parametrización de una superficie paramétrica S en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 definida en un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

$$Im(\varphi) = \{\varphi(u,v) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in U\} = S$$

Diremos que la parametrización φ es regular cuando la pareja de vectores $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\}$ es linealmente independiente en todo punto de U. Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a φ es no nulo en todo punto de U:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$$

En este caso, el plano tangente a la superficie en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ tiene como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u_0,v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ y = \varphi_2(u_0,v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0,v_0) \\ z = \varphi_3(u_0,v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Dada la superficie $z = x^2 + y^2$, podemos parametrizarla con $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2x\vec{e}_3 + 2y\vec{e}_2 \neq (0,0,0)$$

Ejemplo

Superficies explícitas: Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces la gráfica de f es una superficie regular con parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.
Veamos que $\vec{N}_\varphi \neq (0,0,0)$:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_3 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_2 \neq (0,0,0)$$

$$Im(\varphi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in U, z = f(x,y)\}$$

Ejemplo

Dado el cilindro de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1$, buscamos una parametrización de la superficie. Tomando la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}, \quad z \in (0,1)$$

entonces vemos que $\underbrace{x^2 + y^2}_{1} = r^2 \implies r = 1$.

Por tanto, obtenemos que nuestra parametrización es:

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \neq (0,0,0)$$

Ejemplo

Tomando el cilindro $x^2 + y^2 = 1, \ 0 < z < 1$ del ejemplo anterior, podemos parametrizarlo de otra forma.
Consideramos el siguiente conjunto:

$$U = \{(u,v) : 1 < \sqrt{u^2 + v^2} < 2, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

entonces definimos nuestra parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ sobre este conjunto tal que

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sqrt{u^2+v^2} - 1 \right)$$

Definición 1.0.2 [Superficies Equivalentes]

Diremos que dos superficies paramétricas $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^3$, definidas respectivamente sobre los conjuntos abiertos conexos $U, V \subset \mathbb{R}^2$, son equivalentes si existe una aplicación biyectiva $h : V \to U$ de clase C^1 (es decir, un difeomorfismo) tal que:

$$\psi = \varphi \circ h.$$

Observación 1.0.1

1. *En este caso $\varphi(U) = \psi(V)$.*
2. *En la definición se pide que los conjuntos U y V sean conexos. Como $\forall (s,t) \in V$, $D_h(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo lineal, sabemos que $det(D_h(s,t)) \neq 0$. Por conexión, $det(D_h(s,t))$ conserva el signo en todo V.*

Definición 1.0.3 [Conservación de la Orientación]

1. *Se dice que h conserva la orientación si $det(D_h(s,t)) > 0$ para todo $(s,t) \in V$, es decir las funciones φ y ψ tienen la misma orientación.*
2. *Se dice que h cambia la orientación si $det(D_h(s,t)) < 0$ para todo $(s,t) \in V$, es decir las funciones φ y ψ tienen orientaciones opuestas.*

Lema 1.0.1

Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones equivalentes de una superficie S. Entonces, *para todo $(s,t) \in V$, se cumple que:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = det(D_h(s,t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(s,t))$$

Equivalentemente,

$$\vec{N}_\psi(s,t) = det(D_h(s,t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s,t))$$

Demostración. Aplicando la regla de la cadena a $\psi = \varphi \circ h$, obtenemos la siguiente relación entre las matrices jacobianas:

$$D_\psi(s,t) = D_\varphi(h(s,t)) \cdot D_h(s,t).$$

En términos de las derivadas parciales, esto se traduce en:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial t},$$

donde $h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$.

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial como:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \cdot D_h(s,t),$$

donde $D_h(s,t)$ es la matriz jacobiana de h:

$$D_h(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos el producto vectorial de las derivadas parciales de ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Utilizando las expresiones anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial h_2}{\partial t}\right).$$

Expandiendo el producto vectorial y usando que $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right).$$

Notamos que el término entre paréntesis a la derecha es el determinante de la matriz jacobiana $D_h(s,t)$:

$$\det(D_h(s,t)) = \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)(h(s,t)).$$

Equivalentemente, para los vectores normales unitarios:

$$\vec{N}_\psi(s,t) = \det(D_h(s,t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s,t)),$$

donde $\vec{N}_\psi$ y $\vec{N}_\varphi$ son los vectores normales unitarios asociados a las parametrizaciones ψ y φ, respectivamente. $\square$

Definición 1.0.4 [Orientación de una Superficie]

Asociadas a las parametrizaciones φ y ψ obtenemos lso vectores normales unitarios

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{N}_\varphi}{||\vec{N}_\varphi||} \quad y \quad \vec{n}_\psi = \frac{\vec{N}_\psi}{||\vec{N}_\psi||}$$

Entonces diremos que φ y ψ tienen la misma orientación si:

$$\vec{n}_\psi(s,t) = \vec{n}_\varphi(h(s,t)) \text{ o } \vec{n}_\psi(s,t) = -\vec{n}_\varphi(h(s,t))$$

1.1 Superficies como Conjuntos

Definición 1.1.1 [Superficie Simple Regular]

Diremos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie simple regular si $S = \varphi(\overline{D})$ donde $D = Int(C)$ siendo $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase C^1 inyectiva y regular en $\overline{D} \subset U$.
En este caso, el borde de S de define como $\partial S = \varphi(C)$, que es una curva cerrada y regular a trozos en $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.1.2 [Superficie Casi-Simple Regular]

Diremos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie casi-simple regular si $S = \varphi(\overline{D})$ donde $D = Int(C)$ siendo $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, y $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase C^1 inyectiva y regular en D.

Definición 1.1.3 [Área e Integral de una Superficie]

Dada una superficie S en $\mathbb{R}^3$ simple regular o casi-simple regular, y una parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 de S, definimos:

1. *El área de la superficie S como:*

$$a(S) = \int_S 1dS = \int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv$$

2. *Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral de superficie de f sobre S es:*

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_D f(\varphi(u,v)) \|\vec{N}_\varphi\| dudv$$

Ejemplo

Consideramos la superficie S de $\mathbb{R}^3$ resultante de acotar un cono por dos planos paralelos al plano XY, y dada por las ecuaciones:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, \ 1 < z < 2\}$$

Calculemos el área de la superficie S:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \qquad r^2 = x^2 + y^2 = z^2 \implies r = z \qquad \varphi(\theta, z) = \begin{cases} x = z\cos(\theta) \\ y = z\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\overline{D} = [0, 2\pi] \times [1, 2] \qquad S = \varphi(D)$$

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z\sin(\theta) & z\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = z^2\cos^2(\theta) + z^2\sin^2(\theta) + (-z)^2 = 2z^2 \implies \|\vec{N}_\varphi\| = z\sqrt{2} \neq 0 \quad \forall (0, z) \in D$$

Entonces φ es inyectiva y regular en D (aunque no en $\overline{D}$), luego S es una superficie casi-simple regular.
Por último, el área de la superficie S es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\sqrt{2}\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\frac{4}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{3}{2}\sqrt{2} d\theta = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot 2\pi = 3\pi\sqrt{2}$$

Ejemplo

Dada la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calculemos la integral de superficie de f sobre la superficie S dada por la sección de cono $x^2 + y^2 = z^2,\ 1 < z < 2$ del ejemplo anterior.
Entonces, la integral de superficie de f sobre S es:

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(\theta, z)) \|\vec{N}_\varphi\| d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 \cdot z\sqrt{2} dz d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} \left[z^4\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4}(16 - 1)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{30\sqrt{2}}{4} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{15\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot (2\pi) = 15\pi\sqrt{2}$$

Observemos que $\int_S f dA = \int_S f dS$.

Ejemplo

Área de la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio R:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(\theta, \phi) = \begin{cases} x = R\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y = R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = R\cos(\phi) \end{cases} \qquad \overline{D} = \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Entonces, tenemos que $D = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ y $\overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R\sin(\theta)\sin(\phi) & R\cos(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ R\cos(\theta)\cos(\phi) & R\sin(\theta)\cos(\phi) & -R\sin(\phi) \end{vmatrix}$$

$$= R^2\sin(\phi)\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{vmatrix} = -R^2\sin(\phi)\left(\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi)\right)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = R^4\sin^4(\phi) + R^4\sin^2(\phi)\cos^2(\phi) = R^4\sin^2(\phi)\left(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)\right) = R^4\sin^2(\phi)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\| = R^2\sin(\phi)$$

Luego el área de la esfera es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} R^2\sin(\phi)d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[-R^2\cos(\phi)\right]_0^\pi d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -R^2\left((-1)-1\right)d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2R^2 d\theta = 2R^2\cdot(2\pi) = 4\pi R^2$$

1.2 Superficies Regulares a Trozos

Definición 1.2.1 [Suma de Superficies]

Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies simples regulares. Se dice que la superficie S es la suma de S_1 y S_2, y se denota por $S = S_1 + S_2$, si:

1. $S = S_1 \cup S_2$
2. $S_1 \cap S_2 \subset \partial S_1 \cap \partial S_2$

En este caso, se define el borde de S como:

$$\partial S = \overline{(\partial S_1 \cup \partial S_2) \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)}$$

Si $\partial S = \emptyset$, entonces se dice que S no tiene borde y es cerrada.

Análogamente, se define la suma de superficies $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ siendo cada S_i una superficie simple regular.

Ejemplo

Consideramos el cubo S formado por la suma de las superficies de los seis lados del cubo $S = S_1, S_2, \ldots, S_6$. En particular tenemos que $\partial S = \emptyset$.

Ejemplo

Consideramos ahora el cilindro S formado por la suma de las superficies de los dos "tapas" del cilindro S_1, S_2 y la superficie lateral dividida en dos partes iguales S_3 y S_4. En este caso, tenemos que $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, y como en el caso anterior, $\partial S = \emptyset$.

Ejemplo

Quitémosle una de las tapas al cilindro, entonces tenemos que $S = S_1 + S_2 + S_3$, y en este caso

$$\begin{cases} \partial(S_1 + S_2) = C_0 \cup C_1 \\ \partial S_3 = C_0 \\ \partial S = \overline{(\partial(S_1 + S_2) \cup \partial S_3) \setminus (\partial S_1 + S_2) \cap \partial S_3} = \overline{(C_0 \cup C_1 \cup C_0) \setminus (C_0)} = \overline{C_1} = C_1 \end{cases}$$