

# Cálculo Integral<sup>1</sup>

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero  
*Ciencias Matemáticas e  
Ingeniería Informática*

---

<sup>1</sup>basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

# Contents

<b>1</b>	<b>Medida de Lebesgue</b>	<b>2</b>
1.1	Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	2
1.2	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	5
<b>2</b>	<b>Funciones integrables en varias variables</b>	<b>14</b>
2.1	Medibilidad de Funciones	14
2.2	Integración de Funciones Positivas	18
2.3	Funciones Integrables-Lebesgue	25
2.4	Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann	31
<b>3</b>	<b>Teoremas de Fubini y Tonelli</b>	<b>35</b>
3.1	Teorema de Tonelli	35
3.2	Teorema de Fubini	39
<b>4</b>	<b>Cambio de variables</b>	<b>42</b>
4.1	Coordenadas Polares	44
4.2	Coordenadas Cilíndricas	47
4.3	Coordenadas Esféricas	50
4.4	Coordenadas Elípticas	51
<b>5</b>	<b>Funciones definidas por integrales</b>	<b>58</b>
<b>6</b>	<b>Integrales de línea: campos escalares y vectoriales</b>	<b>59</b>
6.1	Caminos	59
6.2	Campos Escalares	62
6.3	Campos Vectoriales	65
6.4	Campos Conservativos	70
<b>7</b>	<b>Teorema de Green</b>	<b>76</b>
<b>8</b>	<b>Superficies Paramétricas</b>	<b>86</b>
<b>9</b>	<b>Integrales de superficie</b>	<b>90</b>
9.1	Superficies como Conjuntos	90
9.2	Superficies Regulares a Trozos	92
9.3	Orientación de Superficies	93
<b>10</b>	<b>Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss</b>	<b>103</b>
10.1	Teorema de Stokes	103
10.2	Geometría del Rotacional	106

# 1 Medida de Lebesgue

## 1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

### Definición 1.1.1 [n-Réctangulo]

Un  $n$ -rectángulo en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i \ \forall i \quad (1)$$

Definimos el volúmen de  $R$  como:

$$\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (2)$$

Consideramos también los  $n$ -rectángulos abiertos denotados por  $\overset{\circ}{R}$ , que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

### Observación 1.1.1

Dado  $R$   $n$ -rectángulo cerrado tal que  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , podemos considerar para cada  $\delta > 0$  el  $n$ -rectángulo abierto  $R_\delta = \prod_{i=1}^n (a_i - \delta, b_i + \delta)$ . Se tiene que  $R \subset R_\delta$  y  $\text{vol}(R_\delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2\delta) = \text{vol}(R) + 2n\delta$ . Por tanto:

$$\text{vol}(R) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{vol}(R_\delta) \quad (3)$$

### Definición 1.1.2 [Medida Exterior de Lebesgue]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos la medida exterior de  $A$  como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ } n\text{-rectángulos cerrados} \right\} \quad (4)$$

Donde el ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de  $n$ -rectángulos que recubren  $A$ . A esta medida exterior la llamamos medida de Lebesgue exterior.

### Observación 1.1.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces:

1.  $m^*(A) = +\infty \iff \forall (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  se tiene que  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) = +\infty$
2.  $m^*(A) = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  y  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \epsilon$
3.  $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \epsilon > 0 \exists (R_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$  y  $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \alpha + \epsilon$

### Definición 1.1.3 [Conjunto Nulo]

Se dice que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto nulo si  $m^*(A) = 0$ .

### Ejemplo

1. Si  $R$  es un  $n$ -rectángulo degenerado, es decir,  $R$  tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces  $R$  es un conjunto nulo ( $m^*(R) = 0$ ).
2. En  $\mathbb{R}^2$ , sea el conjunto  $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ . Dado  $\epsilon > 0$  tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m > \frac{1}{\epsilon}$ . Consideramos  $A \subset \bigcup_{i=1}^m [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ . Se tiene que  $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^m \text{vol}([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(A) = 0$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

### Teorema 1.1.1

La función  $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  satisface:

1.  $m^*(\emptyset) = 0$
2.  $m^*(A) \leq m^*(B)$  si  $A \subset B$
3.  $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

*Demostración.*

1.  $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$  con  $R_j$   $n$ -rectángulos degenerados  $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$ .
2. Sea  $A \subset B$  y sea  $(R_j)_{j \in J}$  tal que  $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ . Entonces  $(R_j)_{j \in J}$  es un recubrimiento de  $A$  y por tanto  $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$ .
3. Si  $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\exists (R_{j,i})_{i=1}^{\infty}$  tal que  $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$ . Entonces  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y por tanto se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario, se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$ .

□

### Corolario 1.1.1

La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

*Demostración.* Sea  $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$  entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$ . □

### Lema 1.1.1

Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  entonces  $m^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ con } Q_i \text{ } n\text{-rectángulos abiertos} \}$

*Demostración.* Denotamos por  $\beta$  el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de rectángulos abiertos tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ . Tenemos entonces que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bar{Q}_j$  y puesto que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\bar{Q}_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j)$ , se tiene que  $m^*(A) \leq \beta$ . Veamos ahora la otra desigualdad  $\beta \leq m^*(A)$ . Si  $m^*(A) = +\infty$  entonces  $\beta = +\infty$  y no hay nada que demostrar. Supongamos que  $m^*(A) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos cerrados tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(A) + \epsilon$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$  consideramos  $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^j}$ . Escogiendo  $\delta_j > 0$  lo suficientemente

pequeño, se tiene que  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \text{vol}(R_j) + \epsilon_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Nótese que aquí  $\text{vol}(R_j)_{\delta_j}$  denota el volumen del  $n$ -rectángulo abierto  $R_j$  con lados aumentados en  $\delta_j$ . Entonces  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j}$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{vol}(R_j) + \epsilon_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(A) + 2\epsilon$ . Por tanto,  $\beta \leq m^*(A)$ .  $\square$

#### Definición 1.1.4 [Partición de un Conjunto]

Una partición del intervalo  $[a, b]$  es una colección numerable de puntos  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ . Dado un  $n$ -rectángulo  $R \subset \mathbb{R}^n$ , una partición  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  de  $R$  es una colección de particiones  $P_i$  de  $[a_i, b_i]$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  siendo  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

Los subrectángulos de  $P$  son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \prod_{j=1}^n [t_{i_j}^j, t_{i_j+1}^j] \quad (5)$$

Denotamos  $S \in P$  para indicar que  $S$  es un subrectángulo de  $P$ .

#### Lema 1.1.2

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -rectángulo y  $P$  una partición de  $R$ . Entonces:

1.  $R = \bigcup_{S \in P} S$
2. Si  $S, S' \in P$  y  $S \neq S'$  entonces  $S \cap S' = \emptyset$
3.  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S)$

#### Proposición 1.1.1

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -rectángulo entonces  $m^*(R) = \text{vol}(R)$ .

*Demostración.*

- $m^*(R) \leq \text{vol}(R)$   
Sea  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  con  $R_1 = R$  y  $R_j$  degenerados para  $j > 1$ . Entonces:

$$m^*(R) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) = \text{vol}(R).$$

- $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$   
Dado  $\epsilon > 0$  existe  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos abiertos tal que  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Sabemos que  $R$  es compacto al ser cerrado y acotado y, por tanto, al ser  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  un recubrimiento abierto de  $R$ , existe un subrecubrimiento finito  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$  de  $R$ . Entonces  $R \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{Q_i}$ . Consideramos  $R_j = R \cap \overline{Q_j}$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ . Tenemos entonces que  $R = \bigcup_{j=1}^m \overline{Q_j}$  y además prolongando los lados podemos obtener una partición  $P$  de  $R$  tal que cada subrectángulo de  $P$  está contenido en algún  $R_j$  para  $1 \leq j \leq m$ . Por tanto,  $\text{vol}(R) = \sum_{S \in P} \text{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(R) \geq \text{vol}(R)$ .

$\square$

## 1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

**Notación:** Para  $A \subset \mathbb{R}^n$  denotamos por  $A^c$  al complementario de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ .

### Definición 1.2.1 [Conjunto Medible]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue si para todo  $R \subset \mathbb{R}^n$   $n$ -rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c) \quad (6)$$

### Proposición 1.2.1

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces son equivalentes:

1.  $A$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .
3.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

*Demostración.*

- (2)  $\implies$  (3)  
Trivial.
- (3)  $\implies$  (2)  
Sabemos que  $m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ . Veamos que la otra desigualdad se cumple siempre:  
 $m^*(E) = m^*((E \cap A) \cup (E \cap A^c)) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .
- (2)  $\implies$  (1)  
Inmediato, tomando  $E = R$ .
- (1)  $\implies$  (3)  
Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto, si  $m^*(E) = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos cerrados tal que  $E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Entonces  $E \cap A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A$  y  $E \cap A^c \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A^c$ . Por tanto,  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

□

### Definición 1.2.2 [ $\sigma$ -Álgebra]

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra si:

1.  $X \in \mathcal{A}$
2. Si  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3.  $\forall (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  se tiene que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

**Definición 1.2.3** [Medida]

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra, entonces una medida en  $X$  es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$$

**Teorema 1.2.1** [Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ ]

La familia  $M$  de todos los conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $m = m^* \upharpoonright_M$  es una medida numéricamente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

**Lema 1.2.1**

$\mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E) = m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + m^*(\emptyset) = m^*(E) + 0 = m^*(E)$ .  $\square$

**Lema 1.2.2**

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A^c$  es medible en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A) = m^*(E)$ .  $\square$

Con los dos lemas anteriores obtenemos como corolario que  $\emptyset$  es medible en el sentido de Lebesgue.

**Lema 1.2.3**

Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

*Demostración.* Observemos primero que

$$A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

luego entonces tenemos que

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$$

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto, entonces por la medibilidad de  $A$  tenemos que

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

Además, sabemos que  $B$  es medible, luego para los conjuntos  $E \cap A^c$  y  $E \cap B$  se verifica

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A^c) &= m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ m^*(E \cap A) &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &= \underbrace{m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) + m^*(E \cap A^c \cap B)}_{\geq m^*(E \cap (A \cup B))} + \underbrace{m^*(E \cap A^c \cap B^c)}_{m^*(E \cap (A \cup B)^c)} \end{aligned}$$

Finalmente, observamos que

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)$$

y por tanto  $A \cup B$  es medible.

Nótese que la medibilidad de la intersección es inmediata, pues  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ , y ya hemos demostrado que el complementario de un conjunto medible es medible.  $\square$

#### Lema 1.2.4

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  una colección numerable de conjuntos disjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y además  $m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$ .

*Demostración.* Definimos la sucesión creciente de conjuntos  $B_k = A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Entonces por el Lema 1.2.3,  $B_k$  es medible en el sentido de Lebesgue. Sean  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Por la medibilidad de  $A_k$ , tenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k^c) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1})$$

Nótese que  $A_k^c = B_{k-1}$  precisamente porque los conjuntos  $A_j$  son disjuntos. Reiterando el proceso, obtenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)$$

Por lo tanto, aplicando la medibilidad de  $B_k$ :

$$m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_k^c) = \left( \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) \right) + m^*(E \cap B_k^c) \geq \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c)$$

Se sigue entonces:

$$m^*(E) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap A_j \right) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$$

Luego,  $B$  es medible.

Tomando  $E = B$  en la desigualdad anterior, obtenemos:

$$m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = m^*(B) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) + m^*(B \cap B^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$



Por otro lado, por el apartado 2 del Teorema 1.1.1 sabemos que la medida exterior de la union numerable de conjuntos es menor o igual que la suma de las medidas exteriores de los conjuntos:

$$m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$

Por tanto,

$$m^* \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$$

□

### Lema 1.2.5

*La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Sea  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideremos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

Observemos que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  y que para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $A_j$  es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto,  $A_j$  es medible. Además,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$  con  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Por el Lema 1.2.4,  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible  $\implies \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$  es medible. □

### Proposición 1.2.2

*Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  nulo, entonces  $m^*(A) = 0$ .  $\forall E \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $E \cap A \subset A \implies 0 \leq m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0 \implies m^*(E \cap A) = 0$ . Análogamente,  $E \cap A^c \subset E \implies m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$ . Luego  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$  y por tanto  $A$  es medible en el sentido de Lebesgue. □

### Definición 1.2.4 [Propiedad en casi todo punto]

*Se dice que una propiedad se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.*

### Proposición 1.2.3

*Todo  $n$ -rectángulo cerrado  $R \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.*

*Demostración.* Dado  $R \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que  $\forall Q \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado se tiene que  $\text{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ . Consideramos el n-rectángulo  $Q_0 = Q \cap R$ . Nótese que  $Q \cap R^c$  es unión finita de n-rectángulos  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ . Entonces  $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_m$  forman una partición de  $Q$ . Luego  $\text{vol}(Q) = \sum_{i=0}^m \text{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^m m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ .  $\square$

### Observación 1.2.1

*En  $\mathbb{R}^n$  los rectángulos abiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.*

### Definición 1.2.5 [n-Cubo]

*Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:*

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \quad (7)$$

*Análogamente se pueden definir los cubos n-dimensionales semi-abiertos.*

### Observación 1.2.2

*Denotaremos la norma del supremo en  $\mathbb{R}^n$  como:*

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n \{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

*Llamaremos bola abierta de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:*

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r) \quad (9)$$

*Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  al conjunto:*

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r] \quad (10)$$

### Teorema 1.2.2

*Sea  $G \subset \mathbb{R}^n$  abierto entonces se tiene:*

1.  *$G$  es unión numerable de n-cubos cerrados.*
2.  *$G$  es unión numerable de n-cubos abiertos.*

*Demostración.* Consideremos la familia de n-cubos  $\mathcal{B} = \{\overline{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B}_\infty(q, r) \subset G\}$ . Veamos que  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ . Dado que  $B \in G \quad \forall B \in \mathcal{B}$  entonces es inmediato ver que  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset G$ . Por ser  $G$  abierto,  $\exists \delta > 0$  tal que  $B_\infty(x, \delta) \subset G$ . Sea  $r \in \mathbb{Q}$  con  $0 < r < \frac{\delta}{2}$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , sabemos que  $\exists q \in \mathbb{Q}^n$  tal que  $\|x - q\|_\infty < r$ . Veamos entonces que  $x \in B_\infty(q, r) \subset B_\infty(x, \delta) \subset G$ . Dado  $y \in \mathbb{R}^n$  con  $\|y - q\|_\infty < r$  se sigue:

$$\|y - x\|_\infty \leq \|y - q\|_\infty + \|q - x\|_\infty < r + r = 2r < \delta$$

Por tanto  $y \in B_\infty(x, \delta) \implies x \in \overline{B}_\infty(q, r) \subset G$ . Luego  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .

Nótese que numerabilidad de la familia  $\mathcal{B}$  es inmediata por la numerabilidad de  $\mathbb{Q}^n$  que, a su vez, es numerable por ser  $\mathbb{Q}$  numerable.

La segunda parte del teorema es análoga a la primera.  $\square$

### Corolario 1.2.1

Todos los conjuntos abiertos y cerrados de  $\mathbb{R}^n$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

### Teorema 1.2.3 [Regularidad de la Medida]

Sea  $E \in \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists G \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $m^*(G \setminus E) < \epsilon$ .
3.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists F \subset \mathbb{R}^n$  cerrado tal que  $F \subset E$  y  $m^*(E \setminus F) < \epsilon$ .
4.  $\forall \epsilon$  existen  $F$  cerrado y  $G$  abierto tales que  $F \subset E \subset G$  y  $m^*(G \setminus F) < \epsilon$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2)

Distinción de casos:

1. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ : Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de  $n$ -rectángulos abiertos tales que  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Considerando el abierto  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$ , se tiene que  $G$  es medible por el Corolario 1.2.1, además, como  $E \subset G$  entonces

$$m^*(G) = m^*(\underbrace{G \cap E}_E) + m^*(\underbrace{G \cap E^c}_{G \setminus E}) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$$

Por tanto,

$$m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) - m^*(E) < \epsilon$$

2. Supongamos que  $m^*(E) = +\infty$ :  $\forall k \in \mathbb{N}$  sea  $E_k = E \cap [-k, k]^n$ , que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además  $m^*(E_k) < +\infty$  por ser  $E_k$  acotado, y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  existe  $G_k$  abierto tal que  $E_k \subset G_k$  y  $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$ . Entonces  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$  abierto y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$  por lo que  $m^*(G \setminus E) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$ .

- (2)  $\implies$  (1)

$\forall j \in \mathbb{N}$  tomando  $\epsilon = \frac{1}{j}$  entonces  $\exists G_j$  abierto tal que  $E \subset G_j$  y  $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . Entonces considerando  $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  que es medible y abierto se tiene que  $E \subset B$ . Luego  $B \setminus E \subset G_j \setminus E$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . En consecuencia  $m^*(B \setminus E) = 0 \implies B \setminus E$  es medible. Por otro lado,  $B = E \cup (B \setminus E)$  o que es lo mismo  $E = B \setminus (B \setminus E)$ . Tanto  $B$  como  $(B \setminus E)$  son medibles, luego  $E$  es medible.

*Observación:* Además,  $E = B \setminus Z$ , donde  $B$  es intersección numerable de abiertos o  $Z$  es un conjunto nulo.

- (1)  $\implies$  (3)

Como  $E$  es medible entonces tenemos que  $E^c$  también es medible, por lo que, dado  $\epsilon > 0$  por (2)  $\exists G$ -abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,  $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ .

- (3)  $\implies$  (1)

$\forall j \in \mathbb{N} \exists F_j$  cerrado tal que  $F_j \subset E$ ,  $m(E \setminus F_j) < 1/j$ . Sea  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  conjunto medible y  $A \subset E$ .

Además,  $m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < 1/j \ \forall j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $E = A \cup (E \setminus A) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \cup (E \setminus A)$ . Entonces dado que  $E \setminus A$  es un conjunto medible por ser nulo y  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  es medible por ser unión numerable de conjuntos cerrados, entonces  $E$  es medible.

□

### Definición 1.2.6 [ $\sigma$ -Álgebra de Borel]

La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  (o equivalentemente, la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los cerrados de  $\mathbb{R}^n$ ). Los conjuntos de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.

### Definición 1.2.7 [Conjuntos $G_\delta$ y $F_\sigma$ ]

Decimos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es  $G_\delta$  si  $A$  es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  es  $F_\sigma$  si  $B$  es unión numerable de cerrados.

### Corolario 1.2.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

1.  $E$  es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $E = A \setminus N$  con  $A$  siendo  $G_\delta$  y  $N$  un conjunto nulo.
3.  $E = B \cup N$  con  $B$  siendo  $F_\sigma$  y  $N$  un conjunto nulo.

### Lema 1.2.6

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y  $m(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j)$ .

*Demostración.* Sea  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideremos:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \cap B_1^c \\ A_3 &= B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ &\vdots \\ A_j &= B_j \cap B_{j-1}^c \cap \dots \cap B_1^c \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$  y que  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión disjunta de conjuntos. Entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$ . Dado que  $m^*(A_j) = m(B_1) + m(B_2) + \dots + m(B_j) \ \forall j \geq 1$  □

### Corolario 1.2.3

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible entonces:

1.  $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$ .

$$2. m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}.$$

*Demostración.*

1. Dado  $\epsilon > 0$  por el Teorema 1.2.3  $\exists G$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $m(G \setminus E) < \epsilon$ . Entonces  $m(E) \leq m(G) = m(E) + m(G \setminus E) < m(E) + \epsilon$ . Por tanto,  $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$ .
2.  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k : E_k = E \cap [-k, k]^n \forall k \in \mathbb{N}$  Entonces  $(E_k)_k \in \mathbb{N}$  es una sucesión creciente de conjuntos medibles y por el lema anterior tenemos que  $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$  Además,  $\forall k \in \mathbb{N} \exists F_k \subset E_k$  cerrado tal que  $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$  Entonces como  $F_k$  es un conjunto cerrado y acotado, tenemos que el conjunto es compacto. Por tanto  $m(E_k) = m(E_k \setminus F_k) + m(F_k) \geq m(F_k) + \frac{1}{k}$  y por tanto  $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(F_k)$  y finalmente obtenemos que  $m(E) = \sup\{m(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$

□

### Definición 1.2.8 [Cubo Diádico]

Se dice que un cubo en  $\mathbb{R}^n$  es diádico si sus lados miden  $2^{-m}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Es decir, si el rectángulo  $Q$  es de la forma:

$$Q = \left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m} \right],$$

con  $m \in \mathbb{Z}$  (nivel de escala u orden) y  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$

### Teorema 1.2.4

Todo conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  es unión numerable y disjunta de  $n$ -cubos semiabiertos, que son cubos diádicos.

*Demostración.* Denotemos por  $\mathcal{F}$  la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m} \right],$$

con  $k_i \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $\mathcal{Q}_1$  la familia de todos los cubos cerrados  $Q$  de la forma  $[k_1, k_1+1] \times \cdots \times [k_n, k_n+1]$ , donde los  $k_i \in \mathbb{Z}$ , y tales que  $Q \subset U$ . Supuesto definida  $\mathcal{Q}_m$ , sea  $\mathcal{Q}_{m+1}$  la familia de todos los cubos  $Q$  de la forma

$$\left[ \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m} \right] \times \cdots \times \left[ \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m} \right],$$

donde  $k_i \in \mathbb{Z}$ , tales que no están contenidos en ningún cubo  $Q' \in \mathcal{Q}_j$  para  $j \leq m$ , y tales que  $Q \subset U$ . Por inducción queda definida  $\mathcal{Q}_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , y ponemos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Es obvio por construcción que si  $Q, Q' \in \mathcal{Q}$  y  $Q \neq Q'$ , entonces  $Q$  y  $Q'$  tienen interiores disjuntos. También es claro que  $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \subset U$ . Veamos que de hecho

$$U = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Dado  $x \in U$ , usando que  $U$  es abierto y que el conjunto  $\{k/2^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , es fácil ver que existe algún cubo  $Q_x \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in Q_x$  y  $Q \subset U$ . El lado de  $Q_x$  mide  $2^{-m_x}$  para algún  $m_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Si  $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$  ya hemos terminado. En otro caso, por definición de  $\mathcal{Q}_{m_x}$ , existe algún  $j < m_x$  tal que  $Q_x$  está contenido en algún cubo  $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$ , y por tanto  $x$  pertenece a este cubo. En cualquier caso se ve que  $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ .  $\square$

## 2 Funciones integrables en varias variables

### 2.1 Medibilidad de Funciones

#### **Definición 2.1.1** [Espacio Medible]

Un espacio medible es un par  $(X, \Sigma)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ .

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$ , donde  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto medible y  $M|_E$  es la familia de subconjuntos medibles de  $E$ .
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto boreliano y  $B|_A$  es la familia de subconjuntos borelianos de  $A$ .

#### **Definición 2.1.2** [Función Medible]

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible. Una función  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es un conjunto medible.

#### **Proposición 2.1.1**

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces son equivalentes

1.  $f$  es medible.
2. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  es un conjunto medible.
3. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  es un conjunto medible.
4. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es un conjunto medible.
5. Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.
6. Para todo  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, los conjuntos  $f^{-1}(G)$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  dado que las  $\sigma$ -álgebras son cerradas bajo complementarios, obtenemos que (1)  $\iff$  (2) y (3)  $\iff$  (4).

Veamos ahora la relación (1)  $\iff$  (4):

- (1)  $\implies$  (4): Podemos tomar el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}$  que es una intersección numerable de conjuntos medibles por (1). Por tanto al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es medible.
- (4)  $\implies$  (1): Equivalentemente al apartado anterior podemos obtener que el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\}$  es medible por (4). Por tanto, también al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es medible.

De forma análoga a esta equivalencia podemos obtener que (2)  $\iff$  (3). Y también las equivalencias de (5)  $\iff$  (6) son inmediatas, pues podemos tomar los conjuntos acotados  $x \in X : \alpha \leq f(x) < \beta = x \in X : f(x) \geq \alpha \cap x \in X : f(x) < \beta$  los cuales son conjuntos medibles por los apartados anteriores. De forma similar podemos obtener que el conjunto  $x \in X : f(x) = +\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\}$  es medible por los apartados anteriores. De forma análoga se demuestra el caso de (6). Por último veamos la equivalencia de (6)  $\iff$  (7):

1. (7)  $\implies$  (6): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos tomarlo como  $G = (\alpha, \beta)$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\} = \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\}$  y asimismo, los conjuntos  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son medibles por las equivalencias anteriores.
2. (6)  $\implies$  (7): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos reescribir  $G$  como  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$  donde  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  es un conjunto abierto. Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\alpha_j, \beta_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\}$  es medible por las equivalencias anteriores.

□

### Corolario 2.1.1

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces  $f$  es medible.

### Proposición 2.1.2

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces la función  $\Phi \circ (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.

*Demostración.* Sean  $(f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y continua respectivamente. Denotemos por  $h = (f_1, f_2, \dots, f_n) \circ \Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $G \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto, entonces, denotemos por  $U = \Phi^{-1}(G)$  al conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces sea  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de rectángulos  $n$ -dimensionales tales que  $(R_j) = \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^j, \beta_i^j) \forall j \in \mathbb{N} \iff \forall j \in \mathbb{N} f^{-1}(R_j) = \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^j, \beta_i^j)$  es medible. Por tanto, la función  $h$  es medible. □

### Corolario 2.1.2

Sean  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles, entonces  $f + g, f \circ g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \min\{f, 0\}$  son todas funciones medibles.

### Observación 2.1.1

$f = f^+ - f^-$  y  $|f| = f^+ + f^-$ .

### Teorema 2.1.1

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : X \rightarrow [+\infty, -\infty]$  una sucesión de funciones medibles, entonces:

1.  $\sup_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$  es una función medible.
2.  $\inf_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$  es una función medible.



3.  $\limsup_{j \rightarrow \infty} \{f_j\}$  es una función medible.
4.  $\liminf_{j \rightarrow \infty} \{f_j\}$  es una función medible.
5.  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$  es una función medible.

*Demostración.*

1. Denotemos  $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : h(x) > \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha \iff \exists j \in \mathbb{N} : f_j(x) > \alpha \Rightarrow x \in X : h(x) > \alpha = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.
2. Denotemos  $g(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : g(x) < \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j \geq \alpha \iff \forall j \in \mathbb{N} : f_j(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in X : g(x) \geq \alpha = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} x \in X : f_j \geq \alpha$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.
3. Recordemos que  $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq j} f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j, f_{j+1}, \dots$ . Entonces como el límite de una sucesión decreciente y acotada siempre existe tenemos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{k \geq j} f_k = \inf_{j \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
4. Recordemos que  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq j} f_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf f_j, f_{j+1}, \dots = \sup_{j \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
5. Si  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$  (puntualmente) entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ . Entonces por los apartados anteriores obtenemos que  $f$  es una función medible.

□

### Proposición 2.1.3

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  funciones medibles-Lebesgue tales que  $f = g$  en casi todo punto. Entonces  $g$  es medible-Lebesgue.

*Demostración.* Dado que  $f = g$  en casi todo punto, entonces  $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$  es un conjunto de medida nula. Entonces, dado un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : f(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible dado que  $\{x \in Z : f(x) < \alpha\}$  es medible por ser un conjunto de medida nula y  $\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible por ser  $g$  medible. Por tanto,  $g$  es medible. □

### Corolario 2.1.3

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [+\infty, -\infty]$  sucesión de funciones medibles tales que  $f_j \rightarrow f$  en casi todo punto, entonces  $f$  es medible.

*Demostración.* Sea  $Z = \{x \in X : f_j(x) \not\rightarrow f(x)\}$  el cual tiene medida nula por hipótesis. Entonces definimos la función  $g(x) = \begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$  en casi todo punto. Asimismo podemos definir la sucesión de funciones  $g_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases}$  que converge a  $g$  puntualmente, por tanto, por la proposición anterior tenemos que  $g$  es medible  $\Rightarrow f$  es medible. □

**Definición 2.1.3** [Función Característica]

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible. Definimos la función característica de un conjunto  $E \in \Sigma$  como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in E^c \end{cases}$$

**Observación 2.1.2**

$\chi_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$

*Demostración.* Sea  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, podemos definir el conjunto

$$\chi_E^{-1}(G) = \{x \in X : \chi_E(x) \in G\} = \begin{cases} X & 0 \in G \quad 1 \in G \\ E & 0 \notin G \quad 1 \in G \\ E^c & 0 \in G \quad 1 \notin G \\ \emptyset & 0 \notin G \quad 1 \notin G \end{cases}$$

por tanto,  $\chi_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$ . □

**Observación 2.1.3**

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Entonces son equivalentes:

1.  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.
2.  $f \circ \chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2) :  $E^c$  es medible y  $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$  es medible.
- (2)  $\implies$  (1) :  $\{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible. □

**Definición 2.1.4** [Función Simple]

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ . Se dice que  $f$  es una función simple si toma un valor finito de valores. Es decir si:  $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty]$ . Además denotamos a  $f^{-1}(\alpha_i) = E_i$  y  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ . Asimismo obtenemos que  $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$ -unión disjunta de conjuntos. De este modo podemos decir que  $f$  es una combinación lineal finita de funciones simples.

**Observación 2.1.4**

$f$  es medible  $\iff \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  es medible.

### Teorema 2.1.2

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible. Entonces existen funciones simples  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que:

- $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$ .
- $\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .
- Si además,  $f$  acotada  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en casi todo punto.

*Demostración.* Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos el segmento  $[0, n]$  y lo dividimos en intervalos de longitud  $\frac{1}{2^n}$ . Sea  $1 \leq i \leq n2^n$  definimos los conjuntos:

$$E_{n,i} = f^{-1} \left( \left[ \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right] \right) = \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$
$$E_n = f^{-1}([n, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Los cuales son medibles porque por hipótesis la función  $f$  es medible. Sea entonces

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{E_n}$$

la cual es una sucesión de funciones simples. Analicemos la convergencia (puntual)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Dado  $x \in X$  fijo, entonces tenemos dos casos:

- Si  $f(x) = +\infty \implies f(x) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f_n(x) = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = +\infty$ .
- Si  $f(x) < +\infty \implies \exists n_x \in \mathbb{N} : 0 \leq f(x) < n_x \implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{k-1}{2^{n_x}} \leq f(x) < \frac{k}{2^{n_x}}$  y tal que  $f_{n_x}(x) = \frac{k-1}{2^{n_x}} \implies 0 \leq |f(x) - f_{n_x}(x)| \leq \frac{1}{2^{n_x}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .  
Además, cuando  $f$  está acotada, es decir, si  $\exists M \in \mathbb{N} : f(x) \leq M \quad \forall x \in X$  entonces se tiene que  $\forall n \geq M, \quad \forall x \in X \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  (uniformemente).

Ahora veamos que  $f_n(x)$  es creciente:  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & x \in E_{n,i} \\ n & x \in E_n \end{cases} \implies f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & x \in E_{n,i} \\ n+1 & x \in E_{n+1} \end{cases} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $1 \leq i \leq n2^n \implies 1 \leq i \leq 2^{n+1} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 2.2 Integración de Funciones Positivas

### Definición 2.2.1 [Integral de una función simple]

Consideremos en  $\mathbb{R}^n$  la  $\sigma$ -álgebra  $M$  de los conjuntos medibles y la medida-Lebesgue  $m$ . Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible, no negativa y con representación canónica  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  donde  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m A_i$ -unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces definimos la integral de  $s$  como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s \, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$$

### Observación 2.2.1

$$\int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0$$

*Demostración.* Dado  $E \subset \mathbb{R}^n$  mdible definimos  $\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \circ X_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap E)$ . □

### Lema 2.2.1

Sea  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$  unión disjunta de conjuntos medibles. Sea  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función simple, medible y no negativa. Entonces  $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s$ .

*Demostración.* Supongamos que

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

(forma canónica), entonces

$$s(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}.$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $\beta_k \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ . Definimos para cada  $j = 1, \dots, m$  el conjunto

$$Y_j = \{k \in \mathbb{N} : \beta_k = \alpha_j\}.$$

Así,  $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^m Y_j$  es una unión disjunta. Además,

$$s^{-1}(\alpha_j) = A_j = \bigcup_{k \in Y_j} X_k,$$

una unión disjunta.

Entonces, usando la propiedad de la medida en una unión disjunta, tenemos

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k \in Y_j} X_k\right) = \sum_{k \in Y_j} m(X_k).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k).$$

Intercambiando el orden de la suma,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k) = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

□

### Corolario 2.2.1

Sean  $s, t : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  funciones simples, medibles y no negativas. Entonces:  $\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$ .

*Demostración.* Sea  $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$  y  $t = \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot \chi_{B_j}$ . Dado que  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^k (A_i \cap B_j)$ , donde la unión es disjunta y los conjuntos  $A_i, B_j$  son medibles, se tiene que en  $A_i \cap B_j : s + t = \alpha_i + \beta_j$ . Aplicando el lema de integración para funciones simples:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (s + t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \alpha_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \beta_j m(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{B_j} s + \sum_{i=1}^m \int_{A_i} t = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t \end{aligned}$$

por el Lema 2.2.1. □

### Definición 2.2.2 [Integral de Lebesgue]

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  una función medible. Definimos la integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty)$ , definimos:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}.$$

### Proposición 2.2.1

Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

1. Si  $0 \leq f \leq g$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible entonces  $\int_E f \leq \int_E g$ .
2. Si  $f, g \geq 0 \implies \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .
3. Si  $c \geq 0, f \geq 0 \implies \int_E cf = c \int_E f$ .
4. Si  $m(E) = 0 \implies \int_E f = 0$ . (Incluso si  $f = +\infty$ )
5. Si  $f|_E = 0 \implies \int_E f = 0$ . (Incluso si  $m(E) = +\infty$ )
6. Si  $A \subset B$  y  $f \geq 0 \implies \int_A f \leq \int_B f$ .
7. Si  $A, B$  son conjuntos medibles y disjuntos y  $f \geq 0 \implies \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ .
8. Si  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies \int_E f = \int_E g$ .

*Demostración.*

1. Por definición de la integral de Lebesgue, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_E f &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}. \\ \int_E g &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} t \cdot \chi_E \mid t \text{ es simple, medible y } 0 \leq t \leq g \cdot \chi_E \right\}. \end{aligned}$$

Dado que  $f \leq g$ , cualquier función simple  $s$  tal que  $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$  también satisface  $0 \leq s \leq g \cdot \chi_E$ , lo que implica que el conjunto de funciones simples consideradas para  $f$  está contenido en el conjunto considerado para  $g$ .

Como el supremo se toma sobre un conjunto más grande en el caso de  $g$ , se sigue que:

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

2. Consideremos funciones simples  $s, t$  tales que  $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$  y  $0 \leq t \leq g \cdot \chi_E$ . Como  $s + t$  es también una función simple y satisface  $0 \leq s + t \leq (f + g) \cdot \chi_E$ , tenemos por el Corolario 2.2.1:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s + t) \cdot \chi_E = \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E + \int_{\mathbb{R}^n} t \cdot \chi_E$$

Tomando el supremo sobre todas las funciones simples  $s$  y  $t$ , obtenemos:

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (s + t) \cdot \chi_E \right\} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \right\} + \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} t \cdot \chi_E \right\}.$$

Es decir,

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

3. Si  $f = c \cdot 0$ , entonces es trivial. Si  $c > 0$ , tomamos  $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq s \leq f$ . Entonces,  $c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$ .

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

4. Si  $m(E) = 0$ , entonces para toda  $s$  simple y medible tal que  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}.$$

De donde,

$$\int_E s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \right\} = 0.$$

5. Para toda  $s$  simple con  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que  $s(x) = 0$  para casi todo  $x \in E$ .

Luego,

$$f \cdot \chi_E = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \int_E s = 0, \quad \forall s.$$

Tomando el supremo,

$$\sup \left\{ \int_E s \right\} = 0 = \int_E f.$$

6. Si  $f$  es simple y medible con  $0 \leq s \leq f$ , se tiene que

$$\text{si } A \subset B, \quad \chi_A \leq \chi_B \Rightarrow 0 \leq s \cdot \chi_B.$$

7. Si  $A, B$  son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B.$$

Así,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B).$$

Por linealidad de la integral,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

Por lo tanto,

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

8. Si  $E = A \cup Z$ , con  $A$  y  $Z$  disjuntos y tales que  $x \in E \Rightarrow f(x) = g(x)$ , entonces

$$Z = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Si  $m(Z) = 0$ , se tiene que

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f = \int_A g + 0 = \int_A g.$$

□

### Teorema 2.2.1 [Convergencia Monótona]

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una sucesión de funciones medibles tales que:

1.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  (en  $\mathbb{R}^n$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

*Demostración.* La sucesión  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es monótona creciente en  $[0, +\infty)$ . Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k, \in [0, +\infty].$$

Dado que  $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.

Sea  $s$  una función simple y medible en  $\mathbb{R}^n$  con  $0 \leq s \leq f$ , y fijemos un  $c \in (0, 1)$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$ , definimos la sucesión de conjuntos

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$$

Esta sucesión es medible (debido a que tanto  $f_k$  como  $s$  son medibles) y es creciente (debido a que  $f_k \leq f_{k+1}$  y  $c \cdot s \leq c \cdot f \leq f$ ). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f(x) = 0 \implies f_k(x) = c \cdot s(x) = 0 \implies x \in E_k & \forall k \\ \text{Si } f(x) > 0 \implies \exists k \in \mathbb{N} : c \cdot s(x) \leq f_k(x) \leq f(x) \implies x \in E_k \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x \in E_k$ . Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que  $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $s^{-1}(\alpha_j) = A_j$  y  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente, entonces, para cada  $j = 1, \dots, m$ , tenemos por el Lema 1.2.6:

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j).$$

Luego:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} s$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos que:

$$l \geq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite  $c \rightarrow 1$  obtenemos que:

$$l \geq \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que  $s$  es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad  $\forall s$  función simple, medible y no-negativa (por ser  $0 \leq s \leq f$ ). Por tanto, obtenemos la ansiada desigualdad:  $l \geq \int_{\mathbb{R}^n} f$ .  $\square$

### **Teorema 2.2.2** [Convergencia Monótona Versión Refinada]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $f_k : E \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de función medibles y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  tales que:

1.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  (en casi todo punto de  $E$ )
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  (en casi todo punto de  $E$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f.$$



*Demostración.* Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que  $m(N) = 0$ . Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E \setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \hat{f} = f \cdot \chi_{E \setminus N}$$

Podemos aplicar el Teorema 2.2.1, lo que nos permite concluir que: 1.  $\hat{f}_k \rightarrow f$  puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_E f = \int_{E \setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

□

### Corolario 2.2.2

1. Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  son medibles y no-negativas se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2. Si  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  sucesión de funciones medibles  $\forall k \in \mathbb{N}$  se tiene que:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

*Demostración.*

1. Sabemos que existen sucesiones crecientes  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  y  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de funciones simples medibles no negativas tales que  $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = f$  y  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = g$ . Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.2.1 obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + t_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

2. Por el apartado anterior obtenemos que:  $\sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m f_k \implies$  podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona, dado que la sucesión  $\sum_{k=1}^m f_k$  converge de forma creciente a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ . Entonces finalmente obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

□

### Lema 2.2.2 [de Fatou]

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

*Demostración.* Sea

$$f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \inf_{j \geq k} f_j \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$$

Dado que  $g_k \geq 0$ , la sucesión  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema 2.2.1 (TCM), se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k.$$

Por construcción de la sucesión  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , se cumple la igualdad:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k$$

Finalmente, dado que  $g_k \leq f_k$ , se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k \implies \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Nótese que para dos sucesiones  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $a_k \leq b_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k$$

□

### Observación 2.2.2

*El resultado análogo con  $\limsup$  no es válido en general. Fijémonos que si intentásemos una demostración análoga, no se podría aplicar el Teorema 2.2.1 (TCM), pues la sucesión de funciones  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definida por  $h_k = \sup_{j \geq k} f_j$  no es creciente, sino decreciente. Podemos tomar de contraejemplo la función  $f_k = k \cdot \chi_{[k, \infty]}$ .*

## 2.3 Funciones Integrables-Lebesgue

### Definición 2.3.1 [Función Integrable]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible y  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  función medible. Se dice que  $f$  es integrable (o absolutamente integrable) cuando

$$\int_E f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

### Observación 2.3.1

$f$  es integrable en  $E \iff |f|$  es integrable en  $E \iff f^+$  y  $f^-$  son integrables en  $E$ , donde  $f^+ = \max\{f, 0\}$  y  $f^- = \max\{-f, 0\}$ .

**Lema 2.3.1**

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f = g - h$  con  $g, h : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones integrables. Entonces,

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h.$$

*Demostración.* Si  $f = g - h \implies |f| = |g - h| \leq g + h \implies f$  es integrable.  $f = f^+ - f^- = g - h \implies f^+ + h = f^- + g \implies \int_E f^+ + h = \int_E f^- + g \implies \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h.$   $\square$

**Proposición 2.3.1**

Para funciones  $f$  y  $g$  integrables en  $E$ , se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si  $f, g$  son integrables en  $E$ , entonces  $f + g$  también es integrable y

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

2. Si  $f$  es integrable en  $E$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $cf$  es integrable en  $E$  y

$$\int_E (cf) = c \int_E f.$$

3. Si  $f \leq g$  en casi todo punto de  $E$ , entonces

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4. Si  $|f|$  es integrable en  $E$ , entonces  $f$  también es integrable y

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

5. Si  $f = g$  en casi todo punto de  $E$  y  $f$  es integrable en  $E$ , entonces  $g$  también es integrable en  $E$  con,

$$\int_E f = \int_E g.$$

6. Si  $m(E) = 0$  y  $f$  es medible, entonces es integrable en  $E$  y

$$\int_E f = 0$$

7. Si  $f$  es integrable en  $E$  entonces  $|f| < \infty$  en casi todo punto de  $E$

8. Si  $\int_E |f| = 0$ , entonces  $f = 0$  en casi todo punto de  $E$ .

*Demostración.*

1. Dado que  $f = f^+ - f^-$  y  $g = g^+ - g^- \implies f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ , con ambas partes  $\geq 0$ .

Entonces, por el lema de la integral de funciones no negativas,

$$\int_E (f + g) = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-.$$

Reagrupando términos,

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

2. Si  $c > 0$ . Como  $cf = cf^+ - cf^- \implies$ ,

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^- = c \int_E f^+ - c \int_E f^- = c \int_E f.$$

Si  $c < 0$ , usando  $cf = cf^+ - cf^- = (-c)f^+ - (-c)f^-$ . Entonces aplicamos el apartado anterior y obtenemos que:

$$\int_E cf = c \int_E f.$$

3. Como  $g - f \geq 0$  en casi todo punto de  $E$ , se cumple que:  $(g - f) \cdot \chi_E \geq 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies$

$$\int_E (g - f) \geq 0.$$

Aplicando la linealidad de la integral,

$$\int_E g - \int_E f \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4. Se tiene que  $|f| = f^+ + f^-$ . Usando la linealidad de la integral,

$$|\int_E f| = |\int_E f^+ + \int_E f^-|$$

Como  $f = f^+ - f^-$ , aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|.$$

5. Como  $f = g$  en casi todo punto de  $E \implies f^+ = g^+ \quad f^- = g^-$  en casi todo punto de  $E$  por lo que sólo queda aplicar el apartado anterior.

$$\int_E f = \int_E g$$

6.  $|f| \cdot \chi_E \geq 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies \int_E |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \cdot \chi_E = 0 \implies$

$$|\int_E f| \leq \int_E |f| = 0$$

7. Por definición, sabemos que la función  $f$  es integrable en  $E$  si

$$\int_E < +\infty \iff \int_E |f| < +\infty$$

Sea  $A \subset E$  el conjunto de puntos de  $E$  donde  $|f| = \infty$ . Entonces tenemos que

$$\int_E |f| = \int_{E \setminus A} |f| + \int_A |f| < +\infty \implies \int_A |f| < +\infty \implies m(A) = 0.$$

Por lo tanto,  $|f| < \infty$  en casi todo punto de  $E$ .

8. Sea

$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

Definimos los conjuntos

$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, evaluamos la medida de  $A_k$  utilizando la integral:

$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \leq \int_{A_k} k \cdot |f| = k \int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} |f| \leq \int_E |f|$$

Tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  (y de la subaditividad) se concluye que

$$m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0.$$

□

### Teorema 2.3.1 [Convergencia Dominada]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $\forall k \in \mathbb{N}, f_k : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funciones medibles. Supongamos que  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f_k| < g$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Si además suponemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  en casi todo punto de  $E$ , entonces:

1.  $f_k$  y  $f$  son integrables en  $E$
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| = 0$
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$

*Demostración.*

1. Dado que  $|f_k| \leq |g| = g \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , se concluye que  $f_k$  es integrable en  $E$ . Además, como  $|f| \leq g$ , se sigue que  $f$  también es integrable en  $E$ .
2. Observamos que  $0 \leq |f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq g + g = 2g$ , lo que implica que  $0 \leq 2g - |f_k - f| = h_k$ . Además, la sucesión de funciones  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge en casi todo punto de  $E$  a  $2g - 0 = 2g$ . Aplicando el lema de Fatou a  $\hat{f}_k = h_k \chi_E$ , obtenemos que:

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k$$

A partir de esto, se deduce la siguiente igualdad:

$$\int_E 2g = \liminf_k \left( \int_E 2g - \int_E |f_k - f| \right) = \lim_k \int_E 2g + \liminf_k \left( - \int_E |f_k - f| \right) = \int_E 2g - \limsup_k \int_E |f_k - f|$$

Utilizando el siguiente **lema**: si  $a_k \rightarrow a$ , entonces

$$\liminf_k (a_k + b_k) \geq \liminf_k a_k + \liminf_k b_k$$

se concluye que:

$$\limsup_k \int_E |f_k - f| \leq \int_E 2g - \int_E 2g = 0 \Rightarrow \lim_k \int_E |f_k - f| = 0$$

3. Finalmente, aplicamos la propiedad de la integral a la diferencia  $f_k - f$ :

$$\left| \int_E f_k - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_k - f) \right| \leq \int_E |f_k - f| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$$

□

### Definición 2.3.2 [Integral Paramétrica]

Sea  $f$  función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

### Teorema 2.3.2

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto cualquiera,  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$  y suponemos que:

1.  $\forall u \in U$   $f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.
2.  $\forall x \in E$   $f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|f(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

es una función continua en  $U$ .

*Demostración.* Sea  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U$  tal que  $u_k \rightarrow u_0 \in U$ . ¿Se sigue que  $(F(u_k))_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(u_0)$  ?

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$f_k = f(\cdot, u_k) : E \rightarrow \mathbb{R}$$

que es una función medible. Por la condición (2), se cumple que  $\forall x \in E$ ,

$$f_k(x) = f(x, u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x, u_0).$$

Es decir, la sucesión  $\{f_k\}$  converge puntualmente en  $E$  a

$$f_0(x) = f(x, u_0).$$

Además, se cumple que

$$|f_k(x)| = |f(x, u_k)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Aplicando el Teorema 2.3.1 (TCD), se concluye que  $f_k$  es integrable para todo  $k \in \mathbb{N}$  y

$$\int_E f_k \rightarrow \int_E f.$$

Es decir,

$$F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$F(u_k) = \int_E f(x, u_k) dx \Rightarrow F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

□

### Observación 2.3.2

$$\forall u_0 \in U \lim_{u \rightarrow u_0} \int_E f(x, u) dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx$$

### Teorema 2.3.3 [Regla de Leibniz]

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto y  $f : E \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Y además supongamos que:

1.  $\forall u \in U$   $f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .
2.  $\forall x \in E$   $f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $U$ .
3.  $\exists g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que  $|\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de  $E$  y  $\forall u \in U$ .

Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx$$

es de clase  $C^1$  en  $U$  y  $\forall t \in U$  se cumple que:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

*Demostración.* Fijamos  $t_0 \in (a, b)$  y definimos la función  $h : E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$h(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}, & t \neq t_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

1. Medibilidad de  $h(x, t)$

Queremos ver que  $h(x, t)$  es medible para todo  $t \in (a, b)$ .

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos que:

$$h(x, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_0 + 1/k) - f(x, t_0)}{1/k}$$

lo cual es medible.

2. Continuidad de  $h(x, \cdot)$

Para todo  $x \in E$ , si  $h(x, \cdot)$  es acotada en  $(a, b)$ , entonces es continua.

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos:

$$h(x, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} h(x, t),$$

lo cual prueba la continuidad.

### 3. Acotación y aplicación de la Regla de Leibniz

$$|h(x, t)| \leq g(x)$$

- Si  $t = t_0$ , es claro. - Si  $t \neq t_0$ , por el Teorema del Valor Medio, existe  $c \in (t, t_0)$  tal que:

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, s) \right| \leq g(x).$$

Por la Regla de Leibniz, obtenemos:

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_E \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx = \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \int_E h(x, t) dx \right) &= \int_E \left( \lim_{t \rightarrow t_0} h(x, t) \right) dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como  $F'$  es continua en  $(a, b)$ , se concluye que  $F \in C^1(a, b)$ .

□

## 2.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

### Teorema 2.4.1

Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es integrable Lebesgue en  $[a, b]$  y se cumple que:

$$(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$$

### Observación 2.4.1

Denotamos  $\int_a^b f = \int_{[a, b]} f$

*Demostración.*  $\forall k \in \mathbb{N}$  sabemos que  $\exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{n(k)}^k = b\} \subset [a, b]$  tal que:  $\bar{S}(f, P_k) - \underline{S}(f, P_k) < \frac{1}{k}$ . Suponemos que  $P_{k+1}$  es mas fina que  $P_k$  y además que

$$\text{diam}(P_k) = \sup_{i \in \{1, \dots, n(k)\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$  denotamos  $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$  y  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$ .

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P_k) &= \sum_{i=1}^{n(k)} m_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \varphi_k \quad \text{con} \quad \varphi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)} \\ \bar{S}(f, P_k) &= \sum_{i=1}^{n(k)} M_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \psi_k \quad \text{con} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)} \end{aligned}$$

Es claro que  $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$  en  $[a, b]$ . Además, como  $P_{k+1}$  es más fino que  $P_k \implies (\varphi_k) \uparrow$  y  $(\psi_k) \downarrow$ . Denotamos  $\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \sup \varphi_k$  y  $\psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \inf \psi_k$  que son medibles y cumplen que  $\varphi \leq f \leq \psi$ .

Como  $f$  es integrable-Riemann  $\implies f$  es acotada  $\iff \exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . La



función  $g(x) = M$  es integrable en  $[a, b]$  y puesto que  $|\psi_k| \leq g$  y  $|\varphi_k| \leq g$  entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f, P_k) = \int_a^b \varphi_k \rightarrow \int_a^b \varphi \quad \bar{S}(f, P_k) = \int_a^b \psi_k \rightarrow \int_a^b \psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \quad \text{y} \quad \bar{S}(f, P_k) \rightarrow (R) \int_a^b f \implies \int_a^b \varphi = (R) \int_a^b f = \int_a^b \psi$$

Y como  $\int_a^b \psi - \varphi = 0 \implies \psi - \varphi = 0$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Es decir  $\varphi = f = \psi$  en casi todo punto de  $[a, b]$ . Y finalmente obtenemos que:

$$(L) \int_a^b f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi = (R) \int_a^b f$$

□

### Teorema 2.4.2

Sean  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces  $f$  es integrable-Riemann en  $[a, b] \iff D_f = \{x \in [a, b] \mid f \text{ no es continua en } x\}$  tiene medida nula.

### Ejemplo

La función de Dirichlet

$$f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable-Riemann en  $[0, 1]$ . Pero  $f = 0$  en casi todo punto  $\implies f$  es integrable-Lebesgue y ésta vale:  $\int_{[0, 1]} f = \int_{[0, 1]} 0 = 0$

### Teorema 2.4.3

Sean  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$  y  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente integrable-Riemann impropia en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Entonces  $f$  es integrable-Lebesgue en  $(\alpha, \beta)$  y se cumple que:

$$(L) \int_{\alpha}^{\beta} f = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f$$

*Demostración.* Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea  $(\alpha, \beta)$ , en este caso trataremos el intervalo  $[\alpha, \infty)$ : Por hipótesis sabemos que:

1.  $\forall k \in \mathbb{N}, f$  es integrable-Riemann en  $[a, b]$
2.  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f| < +\infty$

Tomamos una sucesión  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$  y definimos las sucesiones de funciones:  $f_n = f \cdot \chi_{[a, b_n]}$  y  $g_n = |f| \cdot \chi_{[a, b_n]}$  medibles. De manera que tenemos que  $f_n \uparrow f$  y  $g_n \uparrow |f|$ . Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monótona:

1.  $(L) \int_a^{+\infty} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} |f| = (R) \int_a^{+\infty} |f| < \infty$
2. Esto muestra que  $f$  es integrable-Lebesgue en  $[a, +\infty)$ .

Por otra parte, como  $|f_n| \leq |f| \forall n \in \mathbb{N}$  por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

$$1. (L) \int_a^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^{b_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^{b_n} f = (R) \int_a^{+\infty} f$$

Finalmente obtenemos el resultado de que  $f$  es integrable de Riemann-impropia en  $[a, +\infty)$ .

$\forall (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : b_n \rightarrow \infty$  tenemos que  $|\int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f| \leq \epsilon$

□

### Ejemplo

(Hoja 3. Ej: 6.a) Calculemos

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando con respecto al parámetro  $t$ . Para ello, aplicamos el Teorema de Leibniz:

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , con  $f : E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\forall u \in (a, b), f(\cdot, u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ .
2. Para casi todo  $x \in E$ , la función  $f(x, \cdot) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $(a, b)$ .
3. Existe  $g : E \rightarrow [0, +\infty]$  integrable en  $E$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \text{para casi todo } x \in E, \forall u \in (a, b).$$

Entonces,  $F(t)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y se cumple:

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Dado que

$$f(x, t) = \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x},$$

calculamos la derivada parcial con respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \cos(tx) e^{-x}.$$

Verifiquemos cada una de las hipótesis del Teorema de Leibniz:

1.  $\forall t \in \mathbb{R}, f(x, t)$  es integrable en  $[0, +\infty)$ :

$$|f(x, t)| \leq e^{-x} = g(x).$$

Como  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 < +\infty$ , se cumple la integrabilidad.

2.  $\forall x \in E, \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \cos(tx) e^{-x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por lo que  $f(x, \cdot)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$ .
3. Se cumple que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = |\cos(tx) e^{-x}| \leq e^{-x} = g(x),$$

que es integrable en  $[0, +\infty)$ .

Por lo tanto,  $F$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x} dx.$$

Ahora calculemos esta integral:

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x} dx.$$

Usando integración por partes con

$$\begin{cases} u = \cos(tx), & dv = e^{-x}dx, \\ du = -t \sin(tx)dx, & v = -e^{-x}, \end{cases}$$

obtenemos:

$$I(t) = [\cos(tx)e^{-x}]_0^{+\infty} - t \int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-x} dx.$$

Evaluando los límites y repitiendo el proceso para  $\sin(tx)e^{-x}$ , obtenemos:

$$I(t)(1 + t^2) = 1.$$

Despejando:

$$I(t) = \frac{1}{1 + t^2} = F'(t).$$

Finalmente, integramos:

$$F(t) = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan(t) + C.$$

Si  $t = 0$ , entonces

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Por lo tanto:

$$F(t) = \arctan(t).$$

### 3 Teoremas de Fubini y Tonelli

#### 3.1 Teorema de Tonelli

Notación:

$$\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \quad (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$$

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , entonces denotamos las funciones:

$$\begin{cases} f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty] & \text{con } f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k \\ f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty] & \text{con } f_y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

##### **Teorema 3.1.1** [Teorema de Tonelli]

Sea  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [0, +\infty]$  medible. Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , la función  $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dx dy$

Además, de forma análoga se tiene que:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , la función  $f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^k$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} G = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f_y) = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dy dx$

##### **Observación 3.1.1**

Los siguientes lemas son previos y necesarios para la demostración del Teorema de Tonelli.

##### **Lema 3.1.1**

Sean  $f, g$  que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $a, b \geq 0 \implies af + bg$  también satisfacen el Teorema de Tonelli

*Demostración.*

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(af + bg)_x = a(f_x) + b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
2.  $H(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (af + bg)_x = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + b(g_x) = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + \int_{\mathbb{R}^k} b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} (af + bg)_x = a \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_x + b \int_{\mathbb{R}^{n+k}} g_x$

□

**Lema 3.1.2**

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $f_j \uparrow f$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  puntualmente  $\implies f$  satisface el Teorema de Tonelli.

*Demostración.*

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $f_j(x, \cdot) = (f_j)_x \uparrow f(x, \cdot) = f_x$
2.  $F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \uparrow \int_{\mathbb{R}^k} f_x = F(x)$  luego  $F$  es medible por el Teorema de la Convergencia Monótona.
3. Nuevamente por el Teorema de la Convergencia aplicado a la sucesión de (2)  $F_j(x) \uparrow F(x)$  tenemos que  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx$

□

**Observación 3.1.2**

El siguiente lema es una versión del lema anterior en el que se usa el teorema de la convergencia dominada en lugar del de la convergencia monótona.

**Lema 3.1.3**

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli. Supongamos que  $(f_j) \rightarrow f$  puntualmente en  $\mathbb{R}^{n+k}$  y  $\exists g : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow [0, +\infty]$  integrable, que satisface el Teorema de Tonelli y tal que  $0 \leq f_j \leq g \quad \forall j \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $f$  satisface el Teorema de Tonelli.

*Demostración.*

1.  $(f_j)_x \rightarrow f_x$  medible
2.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} g = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} g_x) < +\infty$  luego  $G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} g_x < +\infty$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Además, tenemos que  $0 \leq (f_j)_x \leq g_x$  integrable, por lo que podemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada  $\implies F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \rightarrow F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$
3. De nuevo por el Teorema de la Convergencia Dominada  $\int_{\mathbb{R}^n} F = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f$

□

*Demostración del Teorema de Tonelli:*

1. Primero veamos el caso en el que  $f$  es la función indicatriz/característica de un cubo semiabierto.
  - (a) Supongamos que  $f = \chi_Q$  donde  $Q$  es un cubo semiabierto en  $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , con  $Q = A \times B$  donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^k$ .

**Observación 3.1.3**

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x} \iff (\chi_E)_x(y) = \chi_E(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases} = \chi_{E_x}(y)$$

Definiendo:

$$f_x = (\chi_Q)_x(y) = \begin{cases} \chi_B(y), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Se concluye que  $f_x$  es medible.

(b) Definimos la función:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (\chi_Q)_x dy = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_B dy, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} m_k(B), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Como resultado,  $F(x) = m_k(B) \cdot \chi_A(x)$  es medible.

(c)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_Q = m_{n+k}(Q) = m_n(A) \cdot m_k(B) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(B) \cdot \chi_A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)$$

2. Ahora supongamos que  $f$  es la función indicatriz de un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}^{n+k}$ .

Dado que  $G$  es abierto, se puede escribir como la unión numerable de cubos semiabiertos disjuntos:

$$G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$$

Definiendo  $G_j = \bigcup_{i=1}^j Q_i$ , se tiene que:

$$(G_j) \uparrow G, \quad \chi_{G_j} \uparrow \chi_G$$

Como cada  $\chi_{G_j} = \sum_{i=1}^j \chi_{Q_i}$  verifica el Teorema de Tonelli por los Lemas 1.4.2 y 1.4.3, se concluye que  $\chi_G$  también satisface el Teorema de Tonelli.

3. Supongamos ahora que  $f$  es la función indicatriz de un conjunto  $G_\delta$ , es decir, un conjunto resultado de la intersección numerable de conjuntos abiertos, pero bajo mas restricciones:

Supongamos que  $f = \chi_D$  donde  $D$  es un conjunto  $G_\delta$ :

#### Observación 3.1.4

Considerando  $\forall j \in \mathbb{N} D_j = D \cap (j, -j)^{n+k}$  obtenemos que  $(D_j) \uparrow D$  y  $\chi_{D_j} \uparrow \chi_D$  siendo cada  $D_j$  un conjunto  $G_\delta$  y acotado.

Por tanto, como consecuencia del Lema 1.4.2, podemos reducirnos al caso de conjuntos acotados  $D$  es un  $G_\delta$  acotado.

Entonces  $D = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  donde cada  $G_j$  es un conjunto abierto y acotado. Podemos suponer que  $(G_j) \downarrow D$  por tanto  $\chi_{G_j} \downarrow \chi_D$  y además,  $0 \leq \chi_{G_j} \leq \chi_{G_1}$  que es integrable por ser acotada. Ahora si, podemos usar el Lema 1.4.3 para obtener que  $\chi_D$  satisface el Teorema de Tonelli.

Veamos que el Teorema de Tonelli se verifica cuando  $f = \chi_N : N \subset \mathbb{R}^{n+k}$  es un conjunto de medida nula.

Supongamos entonces que  $m_{n+k}(N) = 0 \implies \forall j \in \mathbb{N}$  por la regularidad  $\exists G_j \subset \mathbb{R}^{n+k}$ -abierto con  $N \subset G_j$  y  $m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j}$ .

Entonces, sea  $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j$  que es un conjunto  $G_\delta$  y  $m_{n+k}(G) \leq m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j} \rightarrow 0$ .

Luego  $N \subset G$  y  $m_{(n+k)}(G) = 0 \implies$  por el apartado anterior  $\chi_G$  satisface el Teorema de Tonelli.

Por último tenemos que  $0 = m_{(n+k)(G)} = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_G = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$ . Sabemos que para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\widehat{F}(x)$  es medible y  $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(x) dx = 0 \implies \widehat{F}(x) = 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $N_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in N\} \subset G_x$  y  $m_k(G_x) = \widehat{R}(x) = 0 \implies N_x$  es un conjunto nulo (luego medible) para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  es decir  $\chi_{N_x}$  es medible. Además  $0 \leq F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{G_x} = 0 \implies F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} = 0$  en casi todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$  en particular  $F$  es medible. Finalmente,  $0 = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_N = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$

4. Veamos que si  $A$  es medible  $\implies f = \chi_A$  verifica el Teorema de Tonelli: Como  $A = D \setminus N$  donde  $\begin{cases} D \text{ es un conjunto } G_\delta \\ N \text{ es un conjunto de medida nula} \end{cases}$  Además tenemos que  $D = A \cup N$  disjunto  $\implies \chi_D = \chi_A + \chi_N \iff \chi_A = \chi_D - \chi_N \implies \chi_{A_x} = \chi_{D_x} - \chi_{N_x}$  y  $\chi_{A_x}$  es medible.

$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_x} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_x} - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x}$  es medible para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{D_x} dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_D = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_A$  En este paso hemos aplicado (4).

5. Si  $f$  es una función medible,  $f = \sum_{j=1}^l \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $\begin{cases} \alpha_j \in \mathbb{R} \\ A_j \text{ medible} \end{cases} \forall j \in \mathbb{N} \implies$  usando (5) y el lema 1.5.1, obtenemos el resultado.
6. Sea  $f$  función medible, no negativa en  $\mathbb{R}^{n+k}$  sabemos que  $\exists (S_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones simples, medibles y no-negativas tales que  $(S_j) \uparrow f$ . Entonces por (6) cada  $(S_j)$  verifica el Teorema de Tonelli, luego por el Lema 1.5.2,  $f$  también satisface el Teorema de Tonelli.

□

### Corolario 3.1.1 [Principio de Cavalieri]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  medible entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  el conjunto  $E_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = m(E_x)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^n$
3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m(E_x) dx$

De forma análoga se tiene que:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , el conjunto  $E_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
2. La función  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = m(E_y)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^k$
3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m(E_y) dy$

*Demostración.* Aplicando el Teorema de Tonelli, tomando  $f = \chi_E$ .

□

### Corolario 3.1.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  conjunto  $(n+k)$ -nulo. Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E_x$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^k$
2. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ ,  $E_y$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^n$

*Demostración.* Aplicamos el Teorema de Tonelli, tomando  $f = \chi_E$ . □

### 3.2 Teorema de Fubini

#### Teorema 3.2.1 [Teorema de Fubini]

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  integrable en  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Entonces:

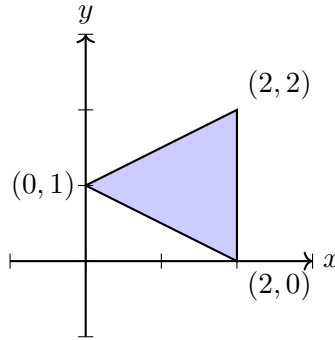
1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, +\infty]$  es integrable en  $\mathbb{R}^k$
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  definida por:  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$
3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^k} f_x \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy$

Análogamente se darían los casos tomando  $\mathbb{R}^k$  en lugar de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Recordemos que  $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ f_x = f_x^+ - f_x^- \end{cases}$  □

#### Ejemplo

1. Sea  $D$  el triángulo de vértices  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  y  $(0, 1)$ .



Intentemos calcular

$$\int_D x^2 y \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 y \cdot \chi_D \, dx \, dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \int_{D_x} x^2 \chi_D \, dy \right) dx$$

Sabiendo que  $D_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}$ , si  $0 \leq x \leq 2$  entonces  $D_x = \{y : -\frac{1}{2}x + 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 1\}$ . Por tanto, podemos plantear la integral como:

$$\begin{aligned} &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{y=\frac{1}{2}x+1} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2}x + 1 \right)^2 - \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 \right) \right) dx \\ &= \int_0^2 x^2(x) \, dx = \int_0^2 x^3 \, dx = \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

También podríamos haberlo planteado así, sabiendo que  $D^y = \{x : (x, y) \in D\}$ :

$$\int_{y=0}^{y=2} \left( \int_{D^y} x^2 y \, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=2(1+y)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy + \int_{y=1}^{y=2} \left( \int_{x=2(y-1)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy.$$



Evaluamos:

$$\int_1^2 y \left( \int_{2(y-1)}^2 x^2 dx \right) dy = \int_1^2 y \left( \frac{8}{3} y^3 - 4y^2 + 4y \right) dy = \frac{1}{3} y^4 - \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 \Big|_1^2 = 4$$

2. Sea  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y\}$  y  $f(x, y) = xe^{-y^3}$ . Calculemos:

$$\int_D f(x, y) dx dy.$$

Dado que  $f \geq 0$ , podemos aplicar el Teorema de Tonelli:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_D = \int_{x=0}^{x=+\infty} \left( \int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy \right) dx$$

No obstante, no conocemos el valor de la integral  $\int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy$ , por lo que continuamos el cálculo en el otro sentido:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} \left( e^{-y^3} \int_{x=0}^{x=y} x dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y} dy$$

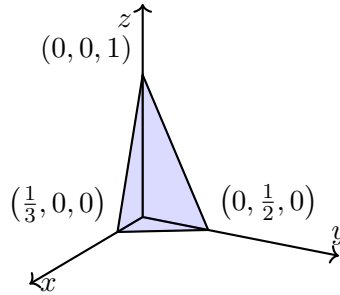
Evaluamos:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \frac{y^2}{2} dy = \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} (-3y^2) dy = -\frac{1}{6} [e^{-y^3}]_{y=0}^{y=+\infty} = \frac{1}{6}$$

3. Sea  $V$  el sólido limitado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $3x + 2y + z = 1$ . Calculemos:

(a)  $\text{Vol}(V)$

(b)  $\int_V z^2 dx dy dz$



(a) Aplicamos el Lema de Cavalieri:

$$\text{Vol}(V) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_V(x, y, z) dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{V_z} 1 dx dy \right) dz,$$

donde  $V_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in V\} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 1 - z\}$ .

Definimos:

$$\int_{z=0}^{z=1} \text{área}(V_z) dz,$$

donde el área de  $V_z$  es:

$$\text{área}(V_z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-z}{3} \cdot \frac{1-z}{2}.$$

También se podría haber definido como:

$$\int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{1-z}{2}} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dy \right) dz.$$

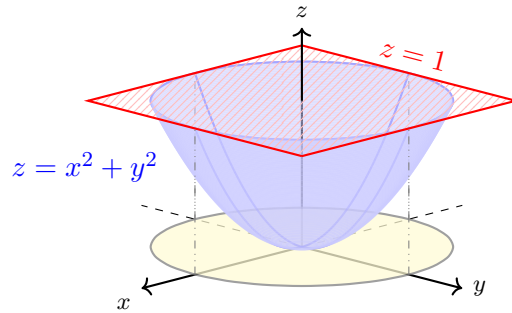
Otra forma alternativa de orden de integración sería:

$$\int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} \left( \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dz \right) dy.$$

(b)

$$\int_V z^2 dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} z^2 \left( \int_{V_z} 1 dx dy \right) dz = \int_{z=0}^{z=1} z^2 \cdot \frac{(1-z)^2}{12} dz$$

4. Sea  $V$  el sólido limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y por el plano  $z = 1$ .  
Calculemos  $\text{vol}(V)$ .



Donde

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\} \implies$$

$$\text{vol}(v) = \int_{z=0}^{z=1} \text{area}(V_z) dz = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}$$

.

### Observación 3.2.1

*La diferencia entre el Teorema de Tonelli y el de Fubini, es que el primero pide que las funciones sean no-negativas estrictamente y el segundo pide que las funciones sean integrables absolutamente.*

## 4 Cambio de variables

### Definición 4.0.1 [Conjunto Verticalmente Proyectable]

Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es verticalmente proyectable si es de la forma:

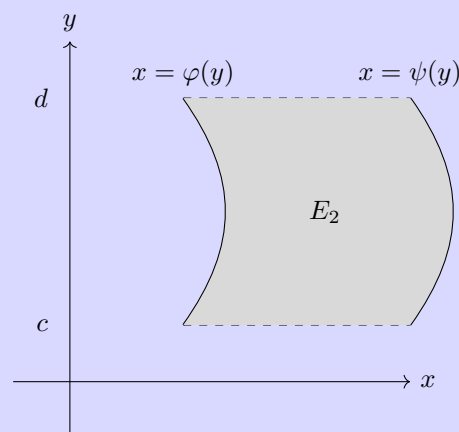
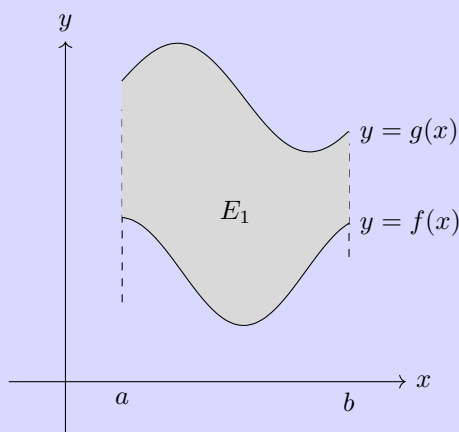
$$E_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $f(x) \leq g(x)$ . Análogamente se define un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es horizontalmente proyectable si es de la forma:

$$E_2 = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

donde  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $\varphi(y) \leq \psi(y)$ . En este caso si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  que es integrable en  $E$ :

$$\begin{aligned} \int_{E_1} h(x, y) dx dy &= \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy \right) dx \\ \int_{E_2} h(x, y) dx dy &= \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} h(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$



### Observación 4.0.1

La diferencia entre ambas definiciones es que en la primera se fija  $x$  y se mueve  $y$  y en la segunda se fija  $y$  y se mueve  $x$ . Lo que tiene como consecuencia que en la primera se integra  $dx - dy$  y en la segunda  $dy - dx$ .

### Teorema 4.0.1

Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicación lineal. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible  $\implies T(A)$  es medible y además:

$$m(T(A)) = |\det(T)|m(A)$$

### Definición 4.0.2 [Difeomorfismo]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos se dice que  $\varphi : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de  $U$  a  $V$  si:

1.  $\varphi$  es biyectiva
2.  $\varphi$  es de clase  $C^1$  en  $U$
3.  $\varphi^{-1}$  es de clase  $C^1$  en  $V$

#### Observación 4.0.2

Sea  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, y supongamos que  $\det(D\varphi(u)) \neq 0 \quad \forall u \in U \implies V = \varphi(U)$  es abierto. Si  $\varphi$  es inyectiva, tenemos que  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = V$  es un difeomorfismo.

#### Teorema 4.0.2

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ . Si  $A \subset U$  es medible, entonces  $\varphi(A)$  es medible y  $m(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi(u))| du$ .

#### Teorema 4.0.3 [Teorema del Cambio de Variable]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ . Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Entonces:

1. Si  $f$  es no negativa  $\implies (f \circ \varphi)|\det(D\varphi)|$  es medible y no-negativa.
2. Si  $f$  es integrable  $\implies (f \circ \varphi)|\det(D\varphi)|$  es integrable

En ambos casos se cumple que:

$$\int_{V=\varphi(U)} f(x) dx = \int_U (f \circ \varphi(u)) |\det(D\varphi)| du$$

#### Observación 4.0.3

Si  $A \subset U$  es medible  $\implies \varphi(A)$  es medible y

$$\int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A (f \circ \varphi(u)) |\det(D\varphi)| du$$

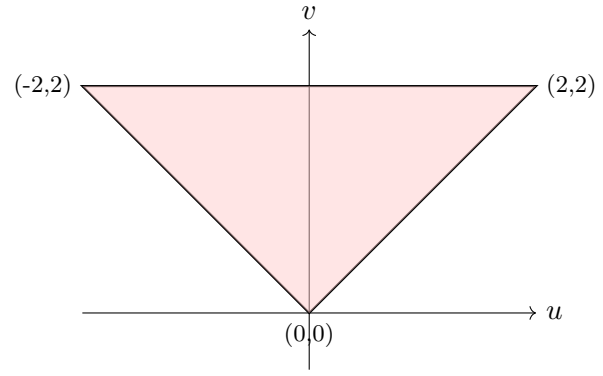
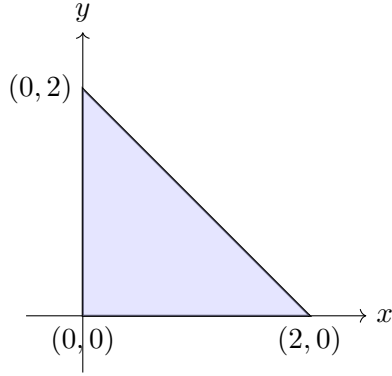
#### Ejemplo

Sea  $\int_E e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$  donde  $E =$  triángulo de vértices  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  y  $(0,2)$ .

Si tomamos el cambio de variable:

$$\varphi^{-1} \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \implies \varphi \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \implies f(x, y) = f(u, v) = e^{\frac{u}{v}}$$

Si tomamos la representación gráfica del cambio de variable obtenemos que:



Si tomamos  $y = 0 \Rightarrow \varphi^{-1} \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases}$  y también tomamos  $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases}$

en tenemos que  $|\det(D\varphi)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

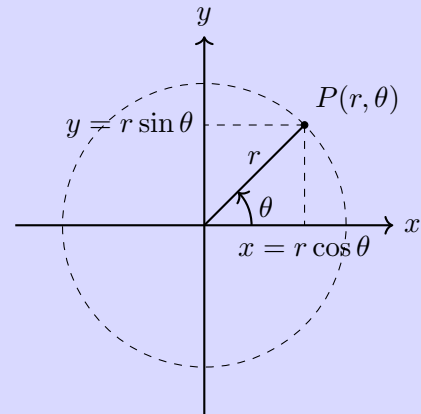
$$\begin{aligned} \int_E f(x, y) dx dy &= \int_D e^{\frac{u}{v}} |\det(D\varphi)| du dv = \int_D \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} \left( \int_{u=-v}^{u=v} e^{\frac{u}{v}} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} \left[ v e^{\frac{u}{v}} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^{v=2} v \left( e - \frac{1}{e} \right) dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=2} = e - e^{-1} \end{aligned}$$

## 4.1 Coordenadas Polares

### Definición 4.1.1 [Coordenadas polares]

En el plano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , las **coordenadas polares**  $(r, \theta)$  están definidas en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo medido desde el eje positivo  $x$  en sentido antihorario.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Y su imagen en coordenadas cartesianas es el plano sin el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La transformación  $\varphi : U \rightarrow V$  es un **difeomorfismo de clase  $C^1$** , ya que cumple las siguientes condiciones:

- $\varphi$  es de clase  $C^1$ , es decir, tiene derivadas continuas en  $U$ .
- $\varphi$  es biyectiva entre  $U$  y  $V$ .
- El determinante del Jacobiano es no nulo:

$$\det(D_\varphi)(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \neq 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de área en coordenadas polares es:

$$dA = r \, dr \, d\theta.$$

### Ejemplo

- Área del círculo  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  de centro  $(0, 0)$  y radio  $R$ :

$$\text{Área}(D) = \text{Área}(D \cap V) = \int_{\varphi^{-1}(D \cap V)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |\det(D_\varphi(r, \theta))| \, dr \, d\theta.$$

Evalutando la integral:

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r \, dr \right) d\theta = \pi R^2.$$

- Para la región  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  con  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\int_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left( \int_{r=0}^{r=1} r \cdot r \, dr \right) d\theta.$$

Resolviendo:

$$\pi \cdot \int_{r=0}^{r=1} r^2 \, dr = \frac{\pi}{3}.$$

### Ejemplo

Realicemos el cálculo de integrales gaussianas:

1.  $g(t) = e^{-t^2}$ : Es fácil ver que  $g(t) \geq 0$  es integrable en  $\mathbb{R}$ . Para ver dicha integral, separemos  $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$ .

(a) Para  $(0, +\infty)$ : Si  $t \geq 1 \implies t^2 \geq t \implies e^{-t^2} \leq e^{-t}$ . Entonces:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \int_0^1 e^{-t^2} \, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \leq 1 + \int_1^{+\infty} e^{-t} \, dt \leq 1 + e^{-1} < +\infty.$$

(b) Para  $(-\infty, 0)$ : Consideremos la integral:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt.$$

Tomamos el cambio de variable  $s = -t$ , lo que implica  $ds = -dt$ . Entonces, la integral se transforma en:

$$\int_{\infty}^0 e^{-s^2} (-ds) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Luego, la integral total es:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. Para  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ , existen dos maneras de calcular la integral:

(a) \*\*Usando coordenadas polares:\*\*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta.$$

Separando las integrales:

$$\left( \int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right).$$

Evalutando la integral en  $r$ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el resultado final es:

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

(b) \*\*Usando el producto de integrales unidimensionales:\*\*

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx.$$

Como la exponencial es separable, podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

Definiendo  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , se tiene que:

$$I^2 = \pi \implies I = \sqrt{\pi}.$$

Así, la integral en  $\mathbb{R}^2$  es:

$$I^2 = \pi.$$

### Ejemplo

#### Curvas en coordenadas polares

Calculemos el área encerrada por la curva en coordenadas polares

$$r = a(1 + \cos \theta),$$

la cual describe un **cardioide** con  $a > 0$ .

**Análisis del comportamiento de  $r$ :** Evaluemos  $r$  en algunos valores característicos de  $\theta$ :

$\theta$	$r = a(1 + \cos \theta)$	Comportamiento
0	$2a$	$r$ decrece ↓
$\frac{\pi}{2}$	$a$	$r$ decrece ↓
$\pi$	0	$r$ aumenta ↑
$\frac{3\pi}{2}$	$a$	$r$ aumenta ↑
$2\pi$	$2a$	$r$ aumenta ↑

**Cálculo del área encerrada:** Utilizamos la fórmula del área en coordenadas polares:

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=a(1+\cos \theta)} r \, dr \, d\theta.$$

Evaluando la integral interna:

$$\int_0^{a(1+\cos \theta)} r \, dr = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{a(1+\cos \theta)} = \frac{a^2}{2} (1 + \cos \theta)^2.$$

Ahora resolvemos la integral en  $\theta$ :

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta.$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

la integral se reescribe como:

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta.$$

Evaluamos término a término:

$$- \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\pi. \quad - \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0. \quad - \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta = 0.$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{a^2}{2} \left( 2\pi + \frac{2\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

**Conclusión:** El área encerrada por el cardioide es:

$$A = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

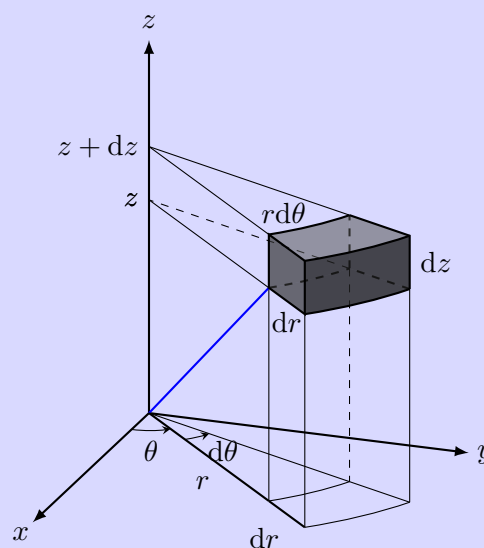
## 4.2 Coordenadas Cilíndricas

### Definición 4.2.1 [Coordenadas cilíndricas]



En el espacio tridimensional, las **coordenadas cilíndricas**  $(r, \theta, z)$  están definidas en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el eje  $z$ .
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal, medido desde el eje positivo  $x$  en el plano  $xy$ .
- $z \in \mathbb{R}$  representa la coordenada vertical, la misma que en cartesianas.

El dominio de la transformación es:

$$U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta \leq 2\pi\}.$$

Y su imagen es el espacio tridimensional excepto el semieje positivo  $x$ :

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\}.$$

La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det(D\varphi)| = r > 0.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas es:

$$dV = r dr d\theta dz.$$

### Ejemplo

Sea  $V$  el sólido limitado por  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 2$ , y consideremos la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Evaluamos la integral:

$$\int_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Cambiamos a coordenadas cilíndricas, donde  $x^2 + y^2 = r^2$ , obteniendo:

$$\int_{z=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{z}} (r^2 + z^2) \cdot r dr d\theta dz.$$

Separando la integral en términos de  $\theta$ :

$$\left( \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_{z=0}^2 \left( \int_{r=0}^{\sqrt{z}} (r^3 + z^2 r) dr \right) dz \right).$$

Resolviendo la integral en  $\theta$ :

$$2\pi \int_{z=0}^2 \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz.$$

Sustituyendo  $r = \sqrt{z}$ :

$$2\pi \int_{z=0}^2 \left( \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{2} \right) dz.$$

Resolviendo la integral en  $z$ :

$$2\pi \left[ \frac{z^3}{12} + \frac{z^4}{8} \right]_{z=0}^{z=2}.$$

Evaluando los límites:

$$2\pi \left( \frac{8}{12} + \frac{16}{8} \right) = 2\pi \left( \frac{2}{3} + 2 \right) = 2\pi \left( \frac{8}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}.$$

Por lo tanto, el resultado final es:

$$\frac{16\pi}{3}.$$

### Ejemplo

Sea  $V$  la porción de la semiesfera  $0 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  que está fuera del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Queremos calcular la integral

$$I = \int_V z dx dy dz$$

En coordenadas cilíndricas, las variables se expresan como:

$$\varphi(r, \theta, z) = \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

donde el jacobiano de la transformación es  $r$ . Los límites en estas coordenadas son:

- $0 \leq z \leq 1$  porque la semiesfera en  $z$  llega hasta  $\sqrt{2 - x^2 - y^2}$ , pero solo consideramos de  $z = 0$  hasta  $z = 1$ , pues los puntos de la esfera donde  $1 \leq z \leq \sqrt{2}$  están dentro del cilindro, luego no los consideramos.
- $1 \leq r \leq \sqrt{2 - z^2}$  porque el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  define el límite inferior y la semiesfera define el superior.

- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , ya que se recorre toda la circunferencia.

Así, la integral se reescribe como:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-z^2}} zr \, dr \, dz \, d\theta.$$

Calculamos la integral iterada:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \left( \int_1^{\sqrt{2-z^2}} r \, dr \right) dz \, d\theta.$$

La integral en  $r$  es:

$$\int_1^{\sqrt{2-z^2}} r \, dr = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2-z^2}} = \frac{(2-z^2)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-z^2}{2}.$$

Sustituyendo en la integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \cdot \frac{1-z^2}{2} dz \, d\theta.$$

Resolviendo la integral en  $z$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 z(1-z^2) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (z - z^3) dz.$$

Calculamos:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Finalmente, integramos en  $\theta$ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{8} d\theta = 2\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Luego, la integral es:

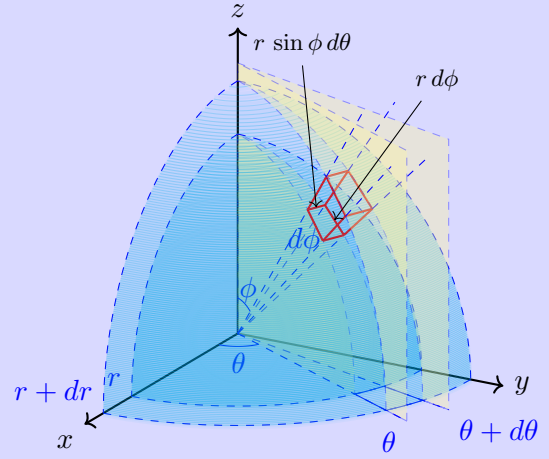
$$I = \frac{\pi}{4}.$$

### 4.3 Coordenadas Esféricas

#### **Definición 4.3.1** [Coordenadas esféricas]

*En el espacio tridimensional, las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  se definen en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  mediante la transformación:*

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \phi. \end{cases}$$



Donde:

- $r \geq 0$  es la distancia radial desde el origen.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal medido en el plano  $xy$  desde el eje positivo  $x$ .
- $\phi \in [0, \pi]$  es el ángulo polar o colatitud, medido desde el eje positivo  $z$ .

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$D_{\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de volumen, es:

$$|\det D_{\varphi}| = r^2 \sin \phi.$$

Esto implica que el elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas es:

$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

### Ejemplo

$$B_r = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \implies$$

$$\text{vol}(B_r) = \int_{B_r} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^R r^2 \sin(\phi) \, dr \right) d\phi \right) d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3$$

## 4.4 Coordenadas Elípticas

### Definición 4.4.1 [Coordenadas elípticas]

En el plano, las coordenadas elípticas  $(r, \theta)$  se definen en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  mediante la transformación:

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta. \end{cases}$$

Donde:

- $r \geq 0$  es la coordenada radial, que describe la escala de la elipse.
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo que mide la posición en la elipse, similar al ángulo en coordenadas polares.
- $a, b > 0$  son constantes que determinan los semiejes de las elipses.

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Su determinante, que representa el factor de cambio de área, es:

$$|\det D\varphi| = abr.$$

Esto implica que el elemento diferencial de área en coordenadas elípticas es:

$$dA = abr \, dr \, d\theta.$$

### Ejemplo

Consideremos la región elíptica definida en coordenadas cartesianas como:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

En coordenadas elípticas, esto equivale a:

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

**Cálculo del jacobiano:** La matriz jacobiana de la transformación es:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Su determinante es:

$$\det(D\varphi) = abr.$$

**Cálculo del área de la elipse:** La integral de área en coordenadas elípticas se expresa como:

$$\text{Área}(E) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} abr \, dr \, d\theta.$$

Resolviendo la integral en  $r$ :

$$\int_{r=0}^{r=1} abr \, dr = ab \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{ab}{2}.$$

Evalutando la integral en  $\theta$ :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Por lo tanto, el área de la elipse es:

$$\text{Área}(E) = 2\pi \cdot \frac{ab}{2} = \pi ab.$$

Así, hemos obtenido el área de la elipse usando coordenadas elípticas.

### Ejemplo

Volumen comprendido entre los paraboloides:

$$2z = 4 + \frac{x^2}{3} + y^2, \quad 2z = \frac{2x^2}{3} + 3y^2$$

Eliminando  $z$ :

$$4 + \frac{x^2}{3} + y^2 = \frac{2x^2}{3} + 3y^2 \iff \frac{x^2}{3} + 2y^2 = 4$$

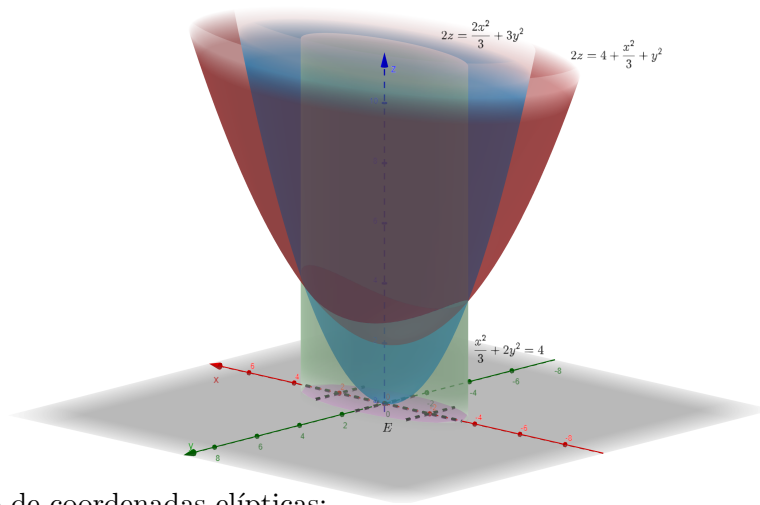
Lo cual es un cilindro elíptico de  $\mathbb{R}^3$ .

Definimos el dominio:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{3} + 2y^2 \leq 4 \right\}$$

Luego, el volumen está dado por:

$$\text{vol} = \int_E \left( 2 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} \right) - \left( \frac{x^2}{3} + \frac{3y^2}{2} \right) dx dy = \int_E \left( 2 - \frac{x^2}{6} - y^2 \right) dx dy$$



Haciendo el cambio de coordenadas elípticas:

$$a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{3}r \cos \theta, \quad y = \sqrt{2}r \sin \theta$$

El jacobiano es:

$$J = 2\sqrt{6}$$

Finalmente, el cambio de variable nos ofrece que el volumen del conjunto es:

$$2\sqrt{6}\pi.$$

### Observación 4.4.1

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \rightarrow V$  difeomorfismo- $C^1$ .

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

Entonces:

$$\det(D_\varphi) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

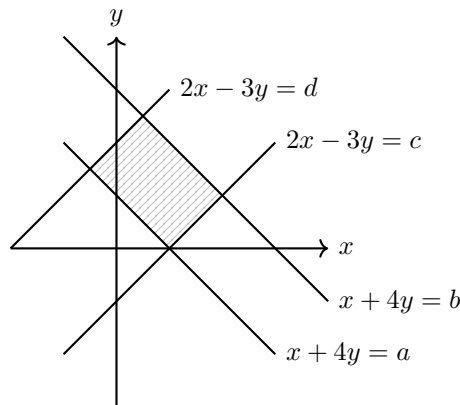
Entonces el Teorema de Cambio de Variable queda como:

$$\begin{aligned} \int_{D=\varphi(E)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n &= \int_{E=\varphi^{-1}(D)} f(x_1(u), \dots, x_n(u)) |\det(D_\varphi)| du_1 \cdots du_n \\ &= \int_{E=\varphi^{-1}(D)} f(x_1(u), \dots, x_n(u)) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

### Ejemplo

Ejercicio 4 (Hoja 4)

Calcula el área del recinto delimitado por las rectas  $\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \\ 2x - 3y = c \\ 2x - 3y = d \end{cases}$  Supongamos que  $a < b, c < d$ .



Para ello tomemos el cambio de variable:  $\varphi^{-1} = \psi = \begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - 3y \end{cases}$

$$\text{area}(D) = \int_{D=\varphi(E)} 1 dx dy = \int_E 1 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Donde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \implies \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{-5}$$

Entonces la integral anterior queda de la forma:

$$\int_E \frac{1}{5} du dv = \frac{1}{5} \cdot \text{area}(E) = \frac{1}{5} (b - a)(d - c)$$

### Ejemplo

Ejercicio 6.b (Hoja 4)

Sea el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$$

queremos calcular la integral

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Para ello consideremos el cambio de variable ("hiperbólico"):

$$\psi(x, y) = \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

Si

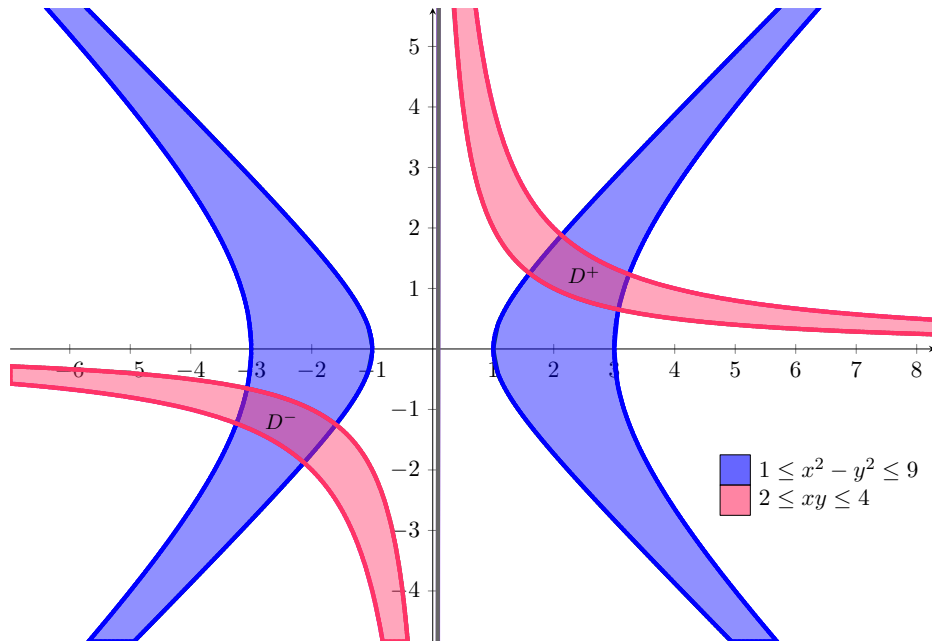
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} u = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos(2\theta) \\ v = r^2 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = r^2 \sin(2\theta) \end{cases}$$

Sean

$$V = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, \quad U = \{(u, v) : v > 0\}$$

Entonces  $\psi : V \rightarrow U$  es biyectiva y existe  $\varphi = \psi^{-1} : U \rightarrow V$ . Además el conjunto transformado es

$$E = \psi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 9, 4 \leq v \leq 8\}$$



Sean

$$D^+ = \{(x, y) \in D : x > 0, y > 0\}, \quad D^- = \{(x, y) \in D : x < 0, y < 0\}$$

Entonces

$$\int_{D^+} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^-} (x^2 + y^2) dx dy$$

Sea entonces el cambio de variable

$$\begin{cases} \bar{x} = -x \\ \bar{y} = -y \end{cases}$$

con el jacobiano igual a 1.

Entonces

$$\int_{D^-} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^+} (-x)^2 + (-y)^2 dx dy = \int_{D^+} x^2 + y^2 dx dy$$



Entonces,

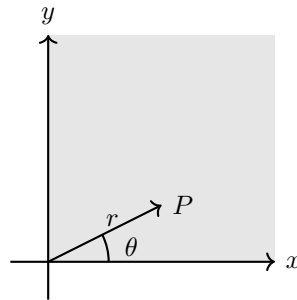
$$\int_D x^2 + y^2 dx dy = 2 \int_{D^+} x^2 + y^2 dx dy = 2 \int_E \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \int_E \sqrt{u^2 + v^2} du dv$$

Ya que tenemos que

$$x^2 + y^2 = r^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Donde además tenemos que:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2 \implies \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{4x^2 + 4y^2} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$$



Así finalmente la integral da

$$\frac{1}{2} \text{area}(E) = \frac{1}{2} \cdot (9 - 1) \cdot (8 - 4) = 16$$

### Ejemplo

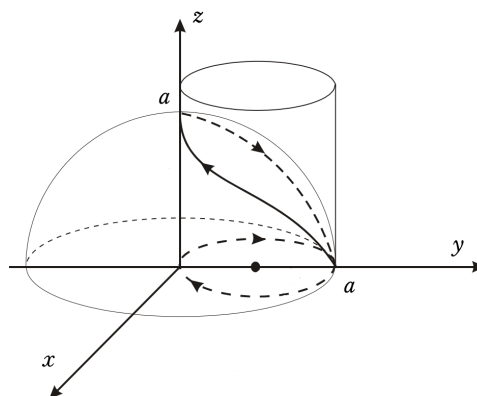
Calcúlese el volumen comprendido entre  $z = f(x, y)$ ,  $z = g(x, y)$  sobre D, con D la proyección de las funciones sobre el plano z. Entonces,

$$\text{vol} = \int_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy = \int_D 1 dx dy dz = \int_D \left[ \int_{z=g(x, y)}^{z=f(x, y)} 1 dz \right] dx dy$$

### Ejemplo

Bóveda de Viviani

Calcúlese el volumen comprendido entre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = ay$  con  $a > 0$ .



Donde tomando valores en la esfera podemos obtener:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \iff x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} \\ x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} - ay = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

Si tomamos que  $r^2 = x^2 + y^2$  y  $ay = ar \sin(\theta)$  entonces, La ecuación de la circunferencia es en coordenadas polares es:  $r = a \cos(\theta)$

$$\begin{aligned} vol &= 2 \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=a \sin(\theta)} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=a \sin(\theta)} d\theta = \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} a^3 - (a^2 - a^2 \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}} d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} a^3 - a^3 |\cos^3(\theta)| d\theta = 4 \frac{a^3}{3} \int_0^{\theta=\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{4a^3}{3} \left[ \theta - \left( \sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right) \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4a^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Todo esto teniendo en cuenta que  $(\cos^3(\theta))^{\frac{3}{2}} = |\cos^3(\theta)|$

## 5 Funciones definidas por integrales

## 6 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales

### 6.1 Caminos

#### Definición 6.1.1 [Camino]

Un camino (o curva paramétrica) en  $\mathbb{R}^n$  es una función continua  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo.

Si  $\gamma$  es diferenciable en un punto  $t \in I$ , entonces el vector velocidad de  $\gamma$  en el punto (instante)  $t$  es el vector tangente a la curva en ese punto, es decir, el vector:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \text{ si } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

#### Definición 6.1.2 [Longitud de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\sigma = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$ . Definimos

$$\Sigma(\gamma, \sigma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Definimos entonces la longitud de  $\gamma$  como:

$$l(\gamma) = \sup\{\Sigma(\gamma, \sigma) \mid \sigma \text{ es una partición de } [a, b]\} \in [0, +\infty]$$

Decimos que  $\gamma$  es **rectificable** si  $l(\gamma) < +\infty$ .

#### Observación 6.1.1

Existen caminos continuos que no son rectificables. Por ejemplo, la curva de Peano, el copo de nieve de Koch o la dada por:

$$l(\gamma) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{luego} \quad l(\gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

#### Definición 6.1.3 [Camino $C^1$ a Trozos]

Decimos que un camino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$  a trozos si:

$$\exists \mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

tal que  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es  $C^1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

#### Observación 6.1.2

En cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  la función  $\gamma$  es  $C^1$ , es decir, en los extremos admite derivadas laterales, aunque puede ocurrir que sean distintas.

**Teorema 6.1.1**

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino  $C^1$  a trozos. Entonces  $\gamma$  es rectificable y su longitud es:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

**Observación 6.1.3**

Tenemos que  $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$  existe, y es continua, salvo quizá en un número finito de puntos, luego en particular es integrable en sentido Riemann y en sentido Lebesgue.

Además, si  $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$  es partición de  $[a, b]$  entonces:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt$$

Para la demostración del teorema anterior, veamos un lema previo:

**Lema 6.1.1**

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino continuo entonces se cumple que:

$$\left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

donde:

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \left( \int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

*Demostración.* Hagamos una distinción de casos:

- Si  $u = \int_a^b \gamma(t) dt = 0$
- Si  $u = \int_a^b \gamma(t) dt \neq 0$ , sea  $u \in \mathbb{R}^n$  con  $\|u\| = 1 \implies$

$$\|v\| = \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \int_a^b \gamma_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n u_i \gamma_i(t) dt \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt = \left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\|$$

□

*Demostración.* Veamos ahora la demostración del teorema:

Podemos suponer que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$  en casi todo  $[a, b]$ .

1. Veamos que  $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ :

Sea  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$ . Entonces:

$$\Sigma(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \forall \text{ partición } \mathcal{P}$$

Luego, tomando el supremo de todas las particiones, obtenemos que  $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

2. Como  $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$  es continua en casi todo  $[a, b]$ -compacto, luego es uniformemente continua en  $[a, b]$ .

Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $t, s \in [a, b]$  y  $|t - s| < \delta \implies \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \epsilon$

Sea  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  partición de  $[a, b]$  con  $t_i - t_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) - \gamma'(t_i) + \gamma'(t_i)\| dt \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\|}_{< \epsilon} dt + \|\gamma'(t_i)\| dt \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t_i)\| + \epsilon dt = \|\gamma'(t_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Usando que para un vector  $u \in \mathbb{R}^n$  y un escalar  $c \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|$  entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \|\gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_i) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t)) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t)) dt \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1})$$

Por el Lema 6.1.1 se sigue que:

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\|}_{< \epsilon} dt + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \leq 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \\ &= 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{i=1}^n 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= 2\epsilon(b - a) + \Sigma(\gamma, \mathcal{P}) \leq 2\epsilon(b - a) + l(\gamma) \end{aligned}$$

□

### Ejemplo

Sea la curva parametrizada

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Además, se cumple que

$$\gamma(0) = (1, 0) = p.$$

Derivando, obtenemos

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

y en particular,

$$\gamma'(0) = (0, 1) = \vec{v}.$$

### Cambio de parámetro

Consideremos el cambio de variable  $t = 2\pi s$  con  $0 \leq s \leq 1$ . Definiendo la nueva curva

$$\sigma(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

obtenemos su derivada:

$$\sigma'(s) = (2\pi(-\sin(2\pi s)), 2\pi \cos(2\pi s)).$$

En particular, en  $s = 0$ ,

$$\sigma'(0) = 2\pi(0, 1) = (0, 2\pi).$$

### Otro cambio de parámetro

Si realizamos el cambio  $t = -2\pi s$ , obtenemos la curva

$$\alpha(s) = (\cos(2\pi s), -\sin(2\pi s)).$$

Calculamos su derivada:

$$\alpha'(s) = (2\pi(-\sin(2\pi s)), -2\pi \cos(2\pi s)).$$

## 6.2 Campos Escalares

### Definición 6.2.1 [Campo Escalar]

Un campo escalar es una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , donde a cada punto  $x \in A \subset \mathbb{R}^n$  le asigna un número real o escalar  $f(x)$ . Esta función también es conocida como función de punto o simplemente función escalar.

Se dice que un campo escalar es continuo si la función  $f$  es continua en el conjunto  $A$ .

### Definición 6.2.2 [Integral de un Campo Escalar a lo largo de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino  $C^1$  a trozos y sea  $f : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuo sobre  $\text{Im}(\gamma)$ . Definimos:

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Notacion: Podemos denotar

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f ds$$

Además

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b ds$$

### Definición 6.2.3 [Caminos Equivalentes]

Dos caminos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  son equivalentes si existe  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  homeomorfismo  $C^1$  con  $h' \neq 0$  en  $[c, d]$  tal que

$$\sigma = \gamma \circ h \text{ con } \sigma(s) = \gamma(h(s)) \quad \forall s \in [c, d]$$

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xleftarrow{\sigma} [c, d] \xrightarrow{h} [a, b]$$

Ahora, por el teorema de Bolzano tenemos dos posibilidades:

1. Si  $h' > 0$  es decir,  $h$  es creciente, decimos que  $h$  conserva la orientación (o que  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen la

misma orientacion)

2. Si  $h' < 0$  es decir,  $h$  es decreciente, decimos que  $h$  invierte la orientacion ( $\gamma$  y  $\sigma$  tienen orientacion opuesta)

### Observación 6.2.1

1. Si  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es biyectiva y  $C^1$  con  $h' \neq 0$  entonces aplicando el Teorema de la funcion inversa obtenemos que  $h$  admite inversa local alrededor de cada punto. Ademias se cumple que  $(h^{-1})'(h(s)) = \frac{1}{h'(s)} \forall s \in [c, d]$ . Como ademias  $h$  es biyectiva la inversa local coincide con la inversa global, luego  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es un difeomorfismo  $C^1$ , es decir,  $\exists h^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d]$  que es  $C^1$ .
2. Usando esto obtenemos que la equivalencia de caminos es una relacion de equivalencia.

### Observación 6.2.2

Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto y  $h : K \rightarrow H \subset \mathbb{R}^n$  es continua y biyectiva, entonces  $h : K \rightarrow H$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Tenemos que  $h : K \rightarrow H$  es biyectiva, luego  $\exists h^{-1} : H \rightarrow K$ . Veamos que es biyectiva. Dado  $C \subset K$  cerrado  $\implies C$  es compacto  $\implies h(C)$  es compacto  $\implies (h^{-1})^{-1}(C) = h(C)$  que es compacto en  $H$ , luego es cerrado en  $H$

□

### Teorema 6.2.1

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $C^1$  a trozos equivalentes. Sea ademias  $f : Im(\gamma) = Im(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, entonces:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f$$

### Observación 6.2.3

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes  $\implies Im(\gamma) = Im(\sigma)$

*Demostración.* Tenemos  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  difeomorfismo  $C^1$  con  $\gamma \circ h = \sigma$  con ademias  $\sigma(s) = \gamma(h(s)) \implies \sigma'(s) = \gamma'(h(s))h'(s) = h'(s)\gamma'(h(s))$

1. Caso 1:  $h$  es creciente ( $h' > 0$ )

Haciendo el cambio de variable  $t = h(s)$  y  $dt = h'(s)ds$  obtenemos:

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^{t=b} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{s=c}^{s=d} \underbrace{f(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)} \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds$$

Por ser  $h$  creciente, entonces se tiene que  $h'(s) > 0$ , luego  $\|\gamma'(h(s))\| h'(s) = \|\gamma'(h(s))h'(s)\|$

$$\int_{s=c}^{s=d} f(\sigma(s)) \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds = \int_{s=c}^{s=d} f(\sigma(s)) \underbrace{\|\gamma'(h(s))h'(s)\|}_{\sigma'(s)} ds = \int_{t=c}^{t=d} f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| ds = \int_{\sigma} f$$



2. Caso 2:  $h$  es decreciente ( $h' < 0$ )

Haciendo el mismo cambio de variable que en el apartado anterior,  $t = h(s)$  y  $dt = h'(s)ds$  obtenemos:

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^{t=b} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{s=d}^{s=c} \underbrace{f(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)} \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds$$

Por ser  $h$  decreciente, entonces se tiene que  $h'(s) < 0$ , luego  $\|\gamma'(h(s))\| h'(s) = -\|\gamma'(h(s))\| |h'(s)|$

$$\int_{s=d}^{s=c} f(\sigma(s)) \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds = - \int_{s=d}^{s=c} f(\sigma(s)) \underbrace{\|\gamma'(h(s))\| |h'(s)|}_{\sigma'(s)} ds = \int_{t=c}^{t=d} f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| ds = \int_{\sigma} f$$

□

### Corolario 6.2.1

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes y  $C^1$  a trozos  $\implies l(\gamma) = l(\sigma)$

*Demostración.*

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} 1 = \int_{t=a}^{t=b} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\sigma} 1 = l(\sigma)$$

□

### Definición 6.2.4 [Camino Inverso]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  camino  $C^1$  a trozos. Definimos el camino inverso como:

$$(-\gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (-\gamma)(s) = \gamma(a + b - s)$$

### Observación 6.2.4

De hecho,  $(-\gamma)$  es equivalente a  $\gamma$  con  $(-\gamma)(s) = \gamma(h(s))$  luego  $Im(-\gamma) = Im(\gamma)$

### Definición 6.2.5 [Concatenación de Caminos]

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $C^1$  a trozos con  $\gamma(b) = \sigma(c)$ . Definimos su concatenación como:

$$\gamma + \sigma : [a, b + (d - c)] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\gamma + \sigma) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma(t - b + c), & \text{si } b \leq t \leq b + (d - c) \end{cases}$$

### Observación 6.2.5

En este caso, si

$$f : Im(\gamma_1) \cup \dots \cup Im(\gamma_m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua en las curvas, entonces se cumple:

$$\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} f = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f$$

### Ejemplo

Dado el camino  $\gamma$  definido por:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y(t)}, \underbrace{t}_{z(t)})$$

Y la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Entonces, calcular la integral de  $f$  a lo largo de  $\gamma$ .

$$x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad \gamma(0) = (1, 0, 0), \quad \gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2) \sqrt{2} dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} (1+t^2) \sqrt{2} dt = \left[ t + \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{2} = \left( 2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right) \sqrt{2}$$

## 6.3 Campos Vectoriales

### Definición 6.3.1 [Campo Vectorial]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un campo vectorial en  $A$  es una función  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  que asigna a cada punto  $x \in A$  un vector  $\vec{F}(x) \in \mathbb{R}^n$ .

Se dice que un campo vectorial es continuo si la función  $\vec{F}$  es continua en el conjunto  $A$ .

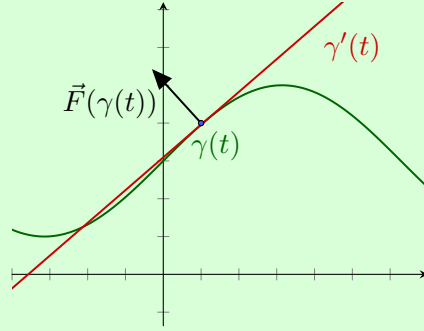
### Definición 6.3.2 [Integral de un Campo Vectorial a lo largo de un Camino]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino  $\mathcal{C}^1$  a trozos y  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo. Se define la integral de  $\vec{F}$  a lo largo de  $\gamma$  como:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

### Observación 6.3.1

El producto escalar  $\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  representa la proyección ortogonal del vector  $\vec{F}(\gamma(t))$  en la dirección de la tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t)$ .



### Notación:

Si

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad \text{y} \quad \gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_a^b \langle \vec{F}(x_1(t), \dots, x_n(t)), (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b [F_1(\gamma(t))x'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t))x'_n(t)] dt = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \end{aligned}$$

donde  $dx_i = x'_i(t)dt$ , para  $i = 1, \dots, n$  y  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ .

### Teorema 6.3.1

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminos  $C^1$  a trozos y equivalentes, y sea  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo. Entonces:

1.  $\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\sigma} \vec{F}$  si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen la misma orientación.
2.  $\int_{\gamma} \vec{F} = - \int_{\sigma} \vec{F}$  si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen orientación opuesta.

*Demostración.* Sabemos que existe  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , biyección de clase  $C^1$  con  $h' \neq 0$ , tal que:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{\gamma} & \text{Im}(\sigma) \\ h \uparrow & \nearrow \sigma & \\ [c, d] & & \end{array}$$

Luego

$$\sigma'(s) = \gamma'(h(s))h'(s), \quad \forall s \in [c, d].$$

Distinguimos dos casos según la orientación de los caminos:

- **Caso 1: Misma orientación**

Si  $r$  y  $\sigma$  tienen la misma orientación, entonces  $h' > 0$  (es decir,  $h$  es creciente). Entonces, haciendo

el cambio de variable  $t = h(s)$ ,  $dt = h'(s)ds$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\gamma(h(s))), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds \\ &= \int_{s=c}^{s=d} \langle \underbrace{\vec{F}(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)}, \underbrace{\gamma'(h(s))h'(s)}_{\sigma'(s)} \rangle ds = \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle ds = \int_{\sigma} \vec{F}\end{aligned}$$

• **Caso 2: Orientación opuesta**

Si  $\gamma$  y  $\sigma$  tienen orientación opuesta, entonces  $h' < 0$  (es decir,  $h$  es decreciente). En este caso, hacemos el mismo cambio de variable  $t = h(s)$ ,  $dt = h'(s)ds$ , y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{s=d}^{s=c} \langle \vec{F}(\gamma(h(s))), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds \\ &= \int_{s=d}^{s=c} \langle \underbrace{\vec{F}(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)}, \underbrace{\gamma'(h(s))h'(s)}_{\sigma'(s)} \rangle ds = - \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle ds = - \int_{\sigma} \vec{F}\end{aligned}$$

□

**Observación 6.3.2**

Dado una camino continuo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  cualesquiera y un campo vectorial continuo  $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se cumple que:

1.  $\int_{-\gamma} \vec{F} = - \int_{\gamma} \vec{F}$ .
2.  $\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_2} \vec{F} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \vec{F}$ .

**Ejemplo**

Un camino puede ser diferenciable (ó  $C^1$ ) y, sin embargo, su imagen puede presentar "picos". Por ejemplo, el camino  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $\gamma(t) = (t^3, |t^3|)$  es  $C^1$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , pero su imagen presenta un pico en el origen. En efecto,

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \quad \text{con} \quad \gamma'_1(t) = 3t^2 \quad \text{y} \quad \gamma'_2(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ -3t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\gamma'_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2|t| - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t|t| = 0$$

Luego  $\gamma'(0)$  existe y además  $\gamma'(0) = (0, 0)$ . Sin embargo, la imagen de  $\gamma$  en el origen presenta un pico, lo que implica que la curva no es regular en ese punto.

**Definición 6.3.3** [Camino Simple y Regular]

Diremos que una función  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un **camino simple y regular** si:

- $\gamma$  es continua.
- $\gamma$  es inyectiva (simple).

- $\gamma$  es de clase  $C^1$  en  $[a, b]$  y cumple que  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ .

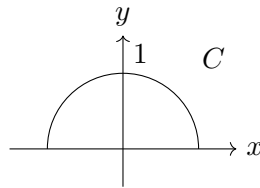
### Observación 6.3.3

1. En este caso, la función  $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Im}(\gamma)$  es un homeomorfismo sobre su imagen.
2. Diremos que  $C \subset \mathbb{R}^n$  es una **curva simple y regular** si  $C = \text{Im}(\gamma)$ , donde  $\gamma$  es un camino simple y regular. En este caso,  $\gamma$  es una **parametrización simple y regular** de  $C$ .

### Ejemplo

Consideremos la curva:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0\}.$$



Una posible parametrización es:

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Su derivada es:

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0), \quad \forall t \in (0, \pi).$$

Por lo tanto,  $\text{Im}(\gamma) = C$ , confirmando que  $\gamma$  es una parametrización simple y regular de  $C$ .

### Teorema 6.3.2

Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva simple y regular y sean  $\gamma$  y  $\sigma$  parametrizaciones simples y regulares de  $C$ . Entonces,  $\gamma$  y  $\sigma$  son equivalentes.

*Demostración.* A continuación viene la demostración del teorema anterior:

Sean  $\sigma : [c, d] \rightarrow \text{Im}(\sigma)$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Im}(\gamma)$  tales que  $\text{Im}(\sigma) = C = \text{Im}(\gamma)$ . Dado que  $\sigma$  y  $\gamma$  son homeomorfismos sobre  $C$  entonces  $\exists h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  homeomorfismo  $C^1$  tal que  $h = \gamma^{-1} \circ \sigma$ . Entonces falta demostrar que  $h$  es de clase  $C^1$  con  $h' \neq 0$  en  $[c, d]$ . Sea  $s_0 \in [c, d]$  y denotaremos  $x_0 = \sigma(s_0)$

- Consideramos primero el caso de que  $s_0 \in (c, d)$  y sea  $t_0 \in (a, b)$  tal que  $\gamma(t_0) = x_0$ : Sabemos que

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)) \neq \vec{0}$$

Supongamos que  $\gamma'_1(t_0) \neq 0$  entonces definamos la función  $H : (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$H(t, y_2, \dots, y_n) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) + y_2, \dots, \gamma_n(t) + y_n) \text{ luego } H(t_0, 0, \dots, 0) = (\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_n(t_0)) = \gamma(t_0)$$

$$D_H(t, 0 \dots 0) = \left( \begin{array}{c|ccc} \gamma'_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ \gamma'_2(t) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma'_n(t) & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \implies \det(D_H(t, 0 \dots 0)) = \gamma'_1(t) \neq 0$$

Entonces por el Teorema de la Función Inversa  $\exists U^{(t_0, 0, \dots, 0)} \subset (a, b)$  y  $\exists V^{x_0}$  tal que  $H : U^{(t_0, 0, \dots, 0)} \rightarrow V^{x_0}$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Definimos  $F : V^{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \pi_1(H^{-1}(x)) \in (a, b)$  donde

$\pi_1$  es la proyección en la primera coordenada.

$$F(\gamma(t)) = \pi_1(H^{-1}(\gamma(t))) = \pi_1(H^{-1} \circ H(t, 0, \dots, 0)) = \pi_1(t, 0, \dots, 0) = t$$

Si  $t = h(s)$  entonces  $F(\gamma(h(s))) = F(\sigma(s))$  luego  $h$  es de clase  $C^1$  alrededor de  $s_0$ . Además,  $\sigma'(s_0) = (\gamma \circ h)'(s_0) = \gamma'(t_0) \circ h'(s_0) \implies h'(s_0) \neq 0$

- Para los exteriores de  $c$  y  $d$  se usa que:  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$  entonces  $\exists \bar{\sigma} : (c - \epsilon, d + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  extensión de clase  $C^1$  y además  $\bar{\sigma}' \neq 0$  en  $(c - \epsilon, d + \epsilon)$

□

### Ejemplo

Un segmento en  $\mathbb{R}^n$ : Dados  $p \neq q$  en  $\mathbb{R}^n$ , el segmento  $[p, q]$  se define como:

$$[p, q] = \{(1 - t)p + tq \mid 0 \leq t \leq 1\} = C \text{ es una curva simple regular}$$

$$C = \text{Im}(\gamma) \text{ donde } \gamma : [0, 1] \rightarrow [p, q] \text{ con } \gamma(t) = (1 - t)p + tq = q + t(p - q)$$

Tenemos que  $\gamma$  es biyectiva y  $\gamma'(t) = p - q \neq 0 \forall t \in [0, 1]$

### Ejemplo

Una gráfica en  $\mathbb{R}^n$ : Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . La gráfica  $G_g = \{(t, g(t)) : a \leq t \leq b\}$  es una curva simple regular en  $\mathbb{R}^2$  con  $G_g = \text{Im}(\gamma)$  donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow G_g$  es de clase  $C^1$  y biyectiva con  $\gamma(t) = (t, g(t))$  y  $\gamma'(t) = (1, g'(t)) \neq \vec{0} \forall t \in [a, b]$

### Observación 6.3.4

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva simple regular, entonces  $\gamma$  es un homeomorfismo sobre su imagen, i.e.  $\gamma : [a, b] \rightarrow C = \text{Im}(\gamma)$  es un homeomorfismo.

Falta demostrar que  $\gamma^{-1} : C \rightarrow [a, b]$  es continua.

Si no fuera así: Sea  $x_0 \in C$  tal que  $\gamma^{-1}$  no es continua en  $x_0$  entonces  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $\forall \delta = \frac{1}{k} > 0, \exists x_k \in C$  con  $\|x_k - x_0\| \leq \frac{1}{k}$  pero  $\|\gamma^{-1}(x_k) - \gamma^{-1}(x_0)\| > \epsilon$

$\forall k \in \mathbb{N}$ , denotemos  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\gamma^{-1}(x_k)) \subset [a, b]$ -compacto  $\implies \exists (t_{k_j}) \rightarrow t_0 \in [a, b]$  y como  $\gamma$  es continua  $\implies \gamma(t_{k_j}) \rightarrow \gamma(t_0) \equiv (x_{k_j}) \rightarrow x_0$

Luego  $x_0 = \gamma(t_0) \iff t_0 = \gamma^{-1}(x_0)$ . Pero  $t_{k_j} = \gamma^{-1}(x_{k_j})$  satisface que  $\|t_{k_j} - t_0\| \geq \epsilon \iff \|\gamma^{-1}(x_{k_j}) - \gamma^{-1}(x_0)\| \geq \epsilon$  lo cual es una contradicción.

### Definición 6.3.4 [Integral de una Función a lo largo de una Curva]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  curva simple regular entonces;

1. Si  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, se define  $\int_C f = \int_\gamma f$  siendo  $\gamma$  una parametrización simple y regular de  $C$ .
2. Una orientación de  $C$  se define como un sentido de recorrido de  $C$ , es decir, señalar un origen y un extremo de  $C$ . Si  $C$  está orientada y  $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial continuo, se define  $\int_C \vec{F} = \int_\gamma \vec{F}$  siendo  $\gamma$  una parametrización simple y regular de  $C$ , que conserva la orientación o que induce en  $C$  la orientación elegida.

### Observación 6.3.5

Si cambiamos de orientación:  $\int_{C^-} \vec{F} = - \int_C \vec{F}$

### Definición 6.3.5 [Curva Simple Regular a Trozos]

Diremos que  $C \subset \mathbb{R}^n$  es una curva regular simple a trozos si  $C = \text{Im}(\gamma)$  siendo  $\gamma$  camino  $C^1$  a trozos con  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$  y cada  $\gamma_j$  es simple y regular  $\forall j = 1, \dots, k$ .  
En este caso si  $C_j = \text{Im}(\gamma_j) \forall j = 1, \dots, k$  entonces denotaremos  $C = C_1 + \dots + C_k$  y definimos para  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  continua:  $\int_C f = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} f$

### Observación 6.3.6

Se puede demostrar que el resultado no depende de la partición de  $C$  en curvas simples y regulares (descomposición).

### Observación 6.3.7

Si  $C = C_1 + \dots + C_k$  tienen orientaciones coherentes (el extremo de  $C_j$  coincide con  $C_{j+1} \forall j = 1, \dots, k-1$ ) diremos que  $C$  está orientada y definimos para un campo vectorial  $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua:  $\int_C \vec{F} = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} \vec{F}$

## 6.4 Campos Conservativos

### Definición 6.4.1 [Campo Conservativo]

Sea un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Un campo vectorial  $C^1$  continuo  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que es conservativo (ó campo gradiente) si  $\exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que  $\vec{F} = \nabla \varphi \iff \vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$  donde  $F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$ . Se dice entonces que la función  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ .

### Observación 6.4.1

Si  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$  entonces también lo es de  $\vec{F} + a \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$  constante.

### Proposición 6.4.1

Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo conservativo y  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  un camino  $C^1$  a trozos. Entonces:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

donde  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ .

*Demostración.* Distinguimos dos casos:

1. **Caso 1:**  $\gamma$  es  $C^1$  en  $[a, b]$

Definimos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $g(t) = \varphi(\gamma(t))$  y aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \gamma \downarrow & \nearrow \varphi & \\ U & & \end{array}$$

En particular tenemos que  $g$  es de clase  $C^1$  y además:

$$g'(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t) = D_\varphi(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \langle \nabla \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t=a}^{t=b} g'(t) dt \stackrel{\text{TFC}}{=} g(b) - g(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

2. **Caso 2:**  $\gamma$  es  $C^1$  a trozos

Se aplica el caso 1 a cada trozo.

□

**Teorema 6.4.1** [Caracterización de los Campos Conservativos]

Sea el conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo, y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo, entonces son equivalentes:

1. El campo  $\vec{F}$  es conservativo.
2.  $\int_\gamma \vec{F} = 0$  para todo  $\gamma$  camino cerrado  $C^1$  a trozos en  $U$ .
3.  $\int_\gamma \vec{F}$  solamente depende de los extremos de  $\gamma$  para todo  $\gamma$  camino  $C^1$  a trozos en  $U$ .
4.  $\int_\sigma \vec{F} = 0$  para todo  $\sigma$  poligonal cerrado de lados paralelos a los ejes coordenados en  $U$ .
5.  $\int_\sigma \vec{F}$  solamente depende de los extremos de  $\sigma$  para todo  $\sigma$  poligonal cerrado de lados paralelos a los ejes coordenados en  $U$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Si  $\gamma$  es un camino cerrado, entonces  $\gamma(a) = \gamma(b)$  y por la proposición anterior:

$$\int_\gamma \vec{F} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(b)) = 0$$

- (2)  $\implies$  (3): Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  caminos  $C^1$  a trozos con los mismos extremos. Consideramos  $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ , que es un camino cerrado. Por hipótesis,  $\int_\gamma \vec{F} = 0$ , y por la proposición anterior:

$$0 = \int_\gamma \vec{F} = \int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \implies \int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}$$

- (2)  $\implies$  (4) y (3)  $\implies$  (5): trivial
- (4)  $\implies$  (5) : es análogo a (2)  $\implies$  (3).



- (5)  $\implies$  (1) : Consideramos un punto  $x \in U$  y un vector unitario  $\vec{e}_i$  en la dirección del eje  $i$ -ésimo. Tomamos un segmento de línea recta  $\gamma$  que va de  $x$  a  $x + h\vec{e}_i$ , donde  $h$  es un número real pequeño.

La integral de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$  es:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)$$

Dividiendo ambos lados por  $h$  y tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

Por otro lado, la integral de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$  también se puede expresar como:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=h} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=h} \langle \vec{F}(x + t\vec{e}_i), \vec{e}_i \rangle dt = \int_{t=0}^{t=h} F_i(x + t\vec{e}_i) dt$$

Tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t=0}^{t=h} F_i(x + t\vec{e}_i) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h}$$

Luego

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \implies \nabla \varphi = \vec{F}$$

□

#### Observación 6.4.2

Un poligonal  $\sigma$  de lados paralelos a los ejes es un camino  $\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$  con  $\gamma_j$  segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados.

Además en este caso, si fijamos un punto  $p \in U$  la función  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} = \int_p^x \vec{F} \quad \text{donde } \gamma_x \text{ es un camino de } p \text{ a } x$$

es un potencial de  $\vec{F}$  en  $U$ .

#### Lema 6.4.1

Sea el conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo. Dados los puntos  $p, x \in U$ , entonces existe  $\sigma$  poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados en  $U$  tal que  $\sigma$  une  $p$  con  $x$ .

*Demostración.* Sea el conjunto

$$A = \{x \in U \mid \text{existe } \sigma \text{ poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados que une } p \text{ con } x\}$$

- $p \in A \neq \emptyset$ .
- $A$  es abierto. Si  $x \in A$  entonces  $x \in U$  abierto, luego  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U$ . Además,  $B(x, \epsilon) \subset A$ . Si  $y \in B(x, \epsilon)$  entonces  $\exists \sigma_{xy}$  poligonal que une  $x$  con  $y$  y también existe  $\sigma_x$  poligonal que une  $p$  con  $x$ . Por lo tanto,  $\sigma_x + \sigma_{xy}$  es un poligonal que une  $p$  con  $y$ .

- $A$  es cerrado en  $U$ .  $U \setminus A$  es abierto. Si  $x \in U \setminus A$  entonces  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U$ . Como antes, se tiene que  $B(x, \epsilon) \subset U \setminus A$ .

Por lo tanto,  $A$  es abierto y cerrado en  $U$  y como  $U$  es conexo,  $A = U$ .

Podemos definir  $\varphi(x) = \int_{\sigma_x} \vec{F}$  donde  $\sigma_x$  es un poligonal de  $U$  de lados paralelos a los ejes coordenados que une  $p$  con  $x$ .

Veamos que  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$  en  $U$ , es decir,  $\nabla \varphi = \vec{F}$ , o que es lo mismo:

$$\vec{F} = (F_1, \dots, F_n) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)$$

Por tanto nos preguntamos si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = F_i(x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} \varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x) &= \int_p^{x+h\vec{e}_i} \vec{F} - \int_p^x \vec{F} = \int_x^{x+h\vec{e}_i} \vec{F} \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \underbrace{\langle \vec{F}(\sigma(t)), h\vec{e}_i \rangle}_{(F_1, \dots, F_n)} dt = \int_{t=0}^{t=1} h F_i(\sigma(t)) dt \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} \sigma(t) = x + th\vec{e}_i, & t \in [0, 1] \\ \sigma(0) = x, & \sigma(1) = x + h\vec{e}_i \\ \sigma'(t) = h\vec{e}_i \end{cases}$$

$$\frac{\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t=0}^{t=1} h F_i(x + th\vec{e}_i) dt$$

Expresando  $G(t, h) = F_i(x + th\vec{e}_i)$  en términos de  $t$  y  $h$ , entonces obtenemos que  $G$  es continua en  $h$  y  $t$ , por lo tanto, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para intercambiar el límite y la integral.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t=0}^{t=1} F_i(x + th\vec{e}_i) dt = \int_{t=0}^{t=1} \lim_{h \rightarrow 0} F_i(x + th\vec{e}_i) dt = \int_{t=0}^{t=1} F_i(x) dt = F_i(x)$$

□

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\vec{F}(x, y, z) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz))$ , veamos si es conservativo.

Fijamos un punto  $p = (0, 0, 0)$  y definimos  $\sigma_{xyz} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  donde:

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0, 0) & t \in [0, x] \text{ ó } t \in [x, 0] \\ \gamma_2(t) = (x, t, 0) & t \in [0, y] \text{ ó } t \in [y, 0] \\ \gamma_3(t) = (x, y, t) & t \in [0, z] \text{ ó } t \in [z, 0] \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=x} \langle (0, t, 0), (1, 0, 0) \rangle dt = 0$$

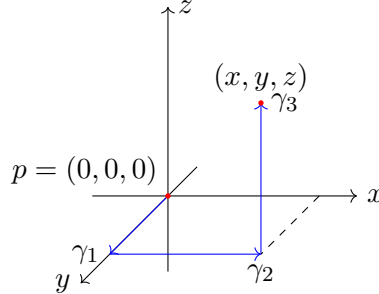
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=y} \langle (t, x, t), (0, 1, 0) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=y} x dt = xy$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=z} \langle (y, x + t \cos(yt), y \cos(yt)), (0, 0, 1) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=z} y \cos(yt) dt = [\sin(yt)]_{t=0}^{t=z} = \sin(yz)$$

Luego  $\varphi(x, y, z) = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} = xy + \sin(yz)$ .

En efecto, para confirmar que  $\vec{F}$  es conservativo, debemos verificar que  $\nabla\varphi = \vec{F}$ .

$$\nabla\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz)) = \vec{F}$$



Por lo tanto,  $\vec{F}$  es conservativo.

De forma alternativa se podría haber visto que  $\vec{F}$  es un campo conservativo, buscando una función  $\varphi$  tal que  $\vec{F} = \nabla\varphi$ , es decir:

1.  $F_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = y \implies \varphi = xy + g(y, z)$
2.  $F_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x + z \cos(yz) \implies \frac{\partial g}{\partial y} = z \cos(yz) \implies g = \sin(yz) + h(z)$
3.  $F_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = y \cos(yz) \implies \frac{\partial h}{\partial z} = y \cos(yz) \implies h = \frac{y}{z} \sin(yz) + c$

$\implies$

1.  $\varphi = \int \frac{d\varphi}{dx} dx = \int y dx = xy + H(y, z)$  constante con respecto a  $x$
2.  $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{dH}{dz} = y \cos(yz) \implies H = \int y \cos(yz) dz = \sin(yz) + G(y)$  constante con respecto a  $z$
3.  $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d}{dy}(yx + \sin(yz) + G(y)) = x + z \cos(yz) + G'(y) = x + z \cos(yz) \implies G'(y) = 0 \implies G(y) = \text{cte.}$

### Proposición 6.4.2

Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo conservativo de clase  $C^1$  entonces se cumple que:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ en } U$$

*Demostración.* Tomemos  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = F_i \in C^1 \forall i = 1, \dots, n$ . Luego  $\varphi$  es de clase  $C^2$  y por el teorema de las derivadas cruzadas (Schwartz) se tiene que:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right) = \underbrace{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i}}_{\text{Schwartz}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

□

### Corolario 6.4.1

Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$ , entonces, si  $\vec{F}$  es campo conservativo, se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } U$$

*Demostración.* Puesto que  $\vec{F}$  es conservativo, y  $\vec{F} = (P, Q) = (F_1, F_2)$ , entonces por la proposición anterior se cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

□

### Observación 6.4.3

En general el recíproco no es cierto, depende de la forma del dominio  $U$ .

### Observación 6.4.4

Terminología:

- Una forma diferencial de orden 1 en  $U$  es una expresión de la forma  $\omega = Pdx + Qdy$  con  $P, Q$  de clase  $C^1$  en  $U$ .
- $\omega$  es cerrada si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  en  $U$ .
- $\omega$  es exacta si  $\exists \varphi \in C^2(U) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \iff \nabla \varphi = (P, Q)$  en  $U$ .

Hemos visto que  $\omega$  exacta  $\implies \omega$  cerrada.

## 7 Teorema de Green

### Definición 7.0.1 [Curva de Jordan]

Una curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  es la imagen de un camino cerrado y simple en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $C = \text{Im}(\gamma)$  con  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua, inyectiva en  $[a, b)$  y  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Dicho de otra forma, una curva de Jordan en el plano es una curva cerrada y continua que no se cruza a sí misma. Es como si tomaras un lápiz, dibujaras una línea continua sin levantarlo del papel, sin pasar dos veces por el mismo punto (excepto al final), y al final volvieras exactamente al punto de partida.

Más técnicamente, es la imagen de una función continua  $\gamma$  que recorre la curva desde un punto inicial  $\gamma(a)$  hasta un punto final  $\gamma(b)$ , con la condición de que todos los puntos intermedios son distintos (no hay autointersecciones), y solo el inicio y el final coinciden:  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Este tipo de curva encierra una región bien definida del plano, como un lazo o un contorno cerrado limpio.

### Observación 7.0.1

Se puede demostrar que  $C$  es un homeomorfo a la circunferencia unitaria  $S^1$ .

### Teorema 7.0.1 [Teorema de la curva de Jordan]

Toda curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  divide al plano en dos regiones o componentes conexas, una acotada, denominada parte interior a  $C$  y otra no acotada, denominada parte exterior a  $C$ , siendo  $C$  la frontera común a ambas regiones. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \text{Int}(C) \cup \text{Ext}(C) \cup C \text{ con } \begin{cases} \text{Int}(C) = \text{abierto conexo acotado} \\ \text{Ext}(C) = \text{abierto conexo no acotado} \\ \text{Fr}(\text{Int}(C)) = C = \text{Fr}(\text{Ext}(C)) \end{cases} \quad \text{unión disjunta}$$

### Definición 7.0.2 [Conexión Simple]

Un conjunto abierto y conexo  $U \subset \mathbb{R}^2$  se dice que es simplemente conexo si  $\forall C$  curva de Jordan en  $U$  se tiene que  $\text{Int}(C) \subset U$ .

Informalmente, podemos definir un conjunto simplemente conexo como aquel que no tiene agujeros, es decir, toda curva de Jordan que esté dentro del conjunto también encierra completamente una región que pertenece al conjunto. Por ejemplo, el disco abierto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  es simplemente conexo, mientras que el conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  no lo es, porque tiene un agujero en el origen.

### Definición 7.0.3 [Orientación de una Curva de Jordan]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan de clase  $C^1$  a trozos. Se define la orientación positiva en  $C$  y se denota  $C^+$  como el sentido de recorrido contrario a las agujas del reloj.

Conceptualmente, es el sentido de recorrido que deja la parte interior de  $C$  a la izquierda.

**Teorema 7.0.2** [Teorema de Green]

Sean  $C$  curva de Jordan regular a trozos con parte interior  $D = \text{Int}(C)$ ,  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \overline{D} = D \cup C$ . Entonces:

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $C^+$  representa la curva  $C$  con orientación positiva.

*Demostración.* Para el caso de dominios que son a la vez proyectables horizontalmente y verticalmente. Es decir, supongamos que

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde las funciones  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ .

Entonces  $C^+ = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$  donde

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, f(t)), & t \in [a, b] & \gamma_1'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0) \\ \gamma_2(t) = (b, t) & t \in [c_2, d_2] & \gamma_2'(t) = (0, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, g(t)) & t \in [a, b] & \gamma_3'(t) = (1, g'(t)) \neq (0, 0) \\ \gamma_4(t) = (a, t) & t \in [c_4, d_4] & \gamma_4'(t) = (0, 1) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{C^+} P dx + Q dy &= \int_{C^+} P dx + \int_{C^+} Q dy \implies \int_{C^+} P dx = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4} (P, 0) \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \langle (P(t, f(t)), 0), (1, f'(t)) \rangle dt + \int_{t=c_2}^{t=d_2} \langle (P(b, t), 0), (0, 1) \rangle dt \\ &\quad - \int_{t=a}^{t=b} \langle (P(t, g(t)), 0), (1, g'(t)) \rangle dt - \int_{t=c_4}^{t=d_4} \langle (P(a, t), 0), (0, 1) \rangle dt \\ &= \int_{t=a}^{t=b} P(t, f(t)) - P(t, g(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx = - \int_{x=a}^{x=b} [P(x, y)]_{y=f(x)}^{y=g(x)} dx \\ &= - \int_{x=a}^{x=b} P(x, g(x)) - P(x, f(x)) dx = \int_{x=a}^{x=b} P(x, f(x)) - P(x, g(x)) dx \end{aligned}$$

Usando que  $\overline{D}$  es verticalmente proyectable, hemos obtenido que  $\int_{C^+} P dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ .

Usando que  $\overline{D}$  es horizontalmente proyectable, veamos que  $\int_{C^+} Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$ .

Suponemos entonces que

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

donde  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ .

Entonces  $C^+ = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4$  donde

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = (\psi(t), t), & t \in [c, d] & \sigma_1'(t) = (\psi'(t), 1) \\ \sigma_2(t) = (t, d), & t \in [a_2, b_2] & \sigma_2'(t) = (1, 0) \\ \sigma_3(t) = (\varphi(t), t), & t \in [c, d] & \sigma_3'(t) = (\varphi'(t), 1) \\ \sigma_4(t) = (t, c), & t \in [a_4, b_4] & \sigma_4'(t) = (1, 0) \end{cases}$$

•

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} Q dy &= \int_{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4} (0, Q) \\
&= \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\psi(t), t)), (\psi'(t), 1) \rangle dt - \int_{t=a_2}^{t=b_2} \langle (0, Q(t, d)), (1, 0) \rangle dt \\
&\quad - \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\varphi(t), t)), (\varphi'(t), 1) \rangle dt + \int_{t=a_4}^{t=b_4} \langle (0, Q(t, c)), (1, 0) \rangle dt \\
&= \int_{t=c}^{t=d} Q(\psi(t), t) - Q(\varphi(t), t) dt
\end{aligned}$$

•

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=c}^{y=d} Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y) dy$$

□

El Teorema de Green establece una conexión profunda entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada y una integral doble sobre la región encerrada por esa curva. En esencia, dice que recorrer el campo vectorial a lo largo del borde de una región (lado izquierdo) es equivalente a acumular la rotación o “vorticidad” del campo dentro de esa región (lado derecho).

En términos geométricos, si tienes un campo vectorial  $\vec{F} = (P, Q)$ , el teorema afirma que el trabajo total que realiza ese campo al recorrer la curva cerrada  $C^+$  (es decir, la integral de línea) es igual a la suma de las diferencias entre los cambios de  $Q$  en  $x$  y de  $P$  en  $y$  en el interior de la curva (es decir, una integral de área del rotacional escalar). El teorema es válido siempre que el campo sea suficientemente suave y que la región encerrada no tenga agujeros.

### Observación 7.0.2

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\bar{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

puesto que  $C$  tiene área  $D$ .

### Corolario 7.0.1

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan regular a trozos con parte interior  $D = \text{Int}(C)$ , entonces se tiene que:

$$\text{área}(D) = \int_{C^+} x dy = - \int_{C^+} y dx = \int_{C^+} \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

Demostración.

□

### Ejemplo

Vamos a verificar el Teorema de Green para el campo  $\vec{F} = (x^2, xy)$  y la curva de Jordan  $C$  dada por el borde del cuadrado  $[0, 1]^2$ .

$$\begin{cases} P(x, y) = x^2 \\ Q(x, y) = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0), & t \in [0, 1] & \gamma'_1(t) = (1, 0) \\ \gamma_2(t) = (1, t), & t \in [0, 1] & \gamma'_2(t) = (0, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, 1), & t \in [0, 1] & \gamma'_3(t) = (-1, 0) \\ \gamma_4(t) = (0, t), & t \in [0, 1] & \gamma'_4(t) = (0, 1) \end{cases}$$

•

$$\begin{aligned} \int_{C^+} x^2 dx + xy dy &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} x^2 dx + xy dy \\ &= \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (t^2, 0), (1, 0) \rangle dt}_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (1, t), (0, 1) \rangle dt}_{\gamma_2} - \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (t^2, t), (1, 0) \rangle dt}_{\gamma_3} - \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (0, 0), (0, 1) \rangle dt}_{\gamma_4} \\ &= \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt + \int_{t=0}^{t=1} t dt - \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt - 0 = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

•

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D (y - 0) dx dy = \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=1} y dy \right) dx = \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

### Ejemplo

Verificar el teorema de Green para la circunferencia de radio 2 y centro en el origen, el campo  $\vec{F} = (x - y, x + y)$ .

$$\begin{cases} \gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), & t \in [0, 2\pi] & \gamma(0) = \gamma(2\pi) \text{ para } \gamma(0) \neq \gamma(t) \forall t \in (0, 2\pi) \\ \gamma'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

•

$$\begin{aligned} \int_{C^+} (x - y) dx + (x + y) dy &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (2 \cos(t) - 2 \sin(t), 2 \cos(t) + 2 \sin(t)), (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (-4 \cos(t) \sin(t) + 4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) - 4 \sin(t) \cos(t)) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 4 dt = 8\pi \end{aligned}$$

•

$$\int_{\overline{D}} (1 + 1) dx dy = 2(\text{área}(\overline{D})) = 2(\pi 2^2) = 8\pi$$

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = (x^2 + y^2, -3xy + xy^3 + y^2)$  sobre la curva definida por el cuadrado  $[0, 1]^2$ . Veamos dos maneras de calcular la integral de camino dada por  $\int_{\gamma} F \cdot dr$ .

- Podemos describir la curva como producto de una concatenación de curvas:  $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_4$  donde:

$$\begin{cases} \gamma_1 \equiv (4t, 0) : t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \gamma_2 \equiv (1, 4t - 1) : t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}) \\ \gamma_3 \equiv (3 - 4t, 1) : t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}) \\ \gamma_4 \equiv (0, 4 - 4t) : t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \implies$$



$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \sum_{k=1}^4 \int_{t=\frac{k-1}{4}}^{t=\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma'_k(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^4 \int_{t=\frac{k-1}{4}}^{t=\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma'_k(t) \rangle dt = \\
&= \int_{t=0}^{t=\frac{1}{4}} \langle (4t)^2 + 0, -3 \cdot (4t) \cdot 0 + 4t \cdot 0^3 + 0 \rangle, (4, 0) \rangle dt + \\
&+ \int_{t=\frac{1}{4}}^{t=\frac{2}{4}} \langle (t^2 + (4t-1)^2, -3(4t-1) + (4t-1)^3 + (4t-1)^2) \rangle, (0, 4) \rangle dt + \\
&+ \int_{t=\frac{2}{4}}^{t=\frac{3}{4}} \langle (3-4t)^2 - 1^2, -3(3-4t) + (3-4t) + 1 \rangle, (-4, 0) \rangle dt + \\
&+ \int_{t=\frac{3}{4}}^{t=1} \langle (4-4t)^2, (4-4t)^2 \rangle, (0, -4) \rangle dt
\end{aligned}$$

Y resolveríamos las integrales polinómicas de forma usual.

2. Otra forma de resolverlo es aplicando el teorema de Green:

Para ello veamos que el camino definido anteriormente sea una Curva de Jordan

$$\begin{cases} \text{Simple: } \forall t_1, t_2 \in (a, b) : t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \\ \text{Cerrada: } \gamma(0) = \gamma(1) \\ \text{Regular: } \|\gamma'(t)\| \neq 0 \forall t \in [0, 1] \end{cases} \implies \text{ es una curva de Jordan}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -3y + y^3 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \implies \\
\int_{\gamma} F &= \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy \\
&= \int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx = \left[ \frac{-3y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{-3y^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4}
\end{aligned}$$

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  y el camino dado por:

$$\begin{cases} \gamma(t) = (8 + 3 \cos(2\pi t), 6 + 3 \sin(2\pi t)) \\ \gamma'(t) = 6\pi (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Veamos cómo lo haríamos a través de la definición:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \int_{t=0}^{t=1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \left( \frac{-6 - 3 \sin(2\pi t)}{109 + 48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t)}, 6\pi (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \right) \right\rangle dt \\
&= \int_{t=0}^{t=1} \frac{6\pi(6 \sin(2\pi t) + 8 \cos(2\pi t) + 3)}{109 + 48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t)} dt = 0
\end{aligned}$$

### Observación 7.0.3

La integral anterior se resolvería haciendo uso del cambio de variable  $u = tg(\frac{t}{2})$ , el cual suele usarse para integrales de la forma:

$$\int \frac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))} dt$$

Haciendo uso del Teorema de Green, y verificando en primer lugar que se cumple que  $\gamma$  es una Curva de Jordan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(t) \text{ está orientada positivamente} \\ \gamma(0) = \gamma(1) = (11, 6) \\ \|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \\ \left\{ \begin{array}{l} 8 + 3 \cos(2\pi t) = 8 + 3 \cos(2\pi t') \\ 6 + 3 \sin(2\pi t) = 6 + 3 \sin(2\pi t') \end{array} \right. \iff t = 0, t' = 1 \implies \gamma \text{ es simple} \end{array} \right.$$

$F$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , por lo que podemos aplicar el Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\implies \int \int_{Int(\gamma)} 0 dx dy = 0 \end{aligned}$$

### Ejemplo

Sea el campo vectorial  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  y el camino dado por  $\gamma(t) = (\epsilon \cos(2\pi t), \epsilon \sin(2\pi t))$  con  $t \in [0, 1]$  y  $\epsilon > 0$ .

Este caso es un ejemplo de un campo vectorial y un camino en el que no es posible hacer uso del Teorema de Green ya que el origen es un punto de discontinuidad y por tanto  $F$  no es de clase  $C^1$ . No obstante si se puede calcular a través de la definición:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_{t=0}^{t=1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \left( \frac{-\epsilon \sin(2\pi t)}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon \cos(2\pi t)}{\epsilon^2} \right), (-2\pi \epsilon \sin(2\pi t), 2\pi \epsilon \cos(2\pi t)) \right\rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=1} 2\pi dt = 2\pi \end{aligned}$$

### Ejemplo

Sea  $\gamma$ -camino simple, cerrado, regular y orientada positivamente con 2 cortes en cada eje y tal que  $(0, 0) \in int(\gamma)$

### Corolario 7.0.2

Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto simplemente conexo y el campo vectorial  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\vec{F}$  es conservativo en  $U \iff Pdx + Qdy$  es exacta en  $U$ , es decir,  $\exists \varphi \in C^2(U)$  tal que  $d\varphi = Pdx + Qdy$ .
2.  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  en  $U \iff Pdx + Qdy$  es cerrada en  $U$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Es cierto siempre. Si  $(P, Q) = \nabla \varphi$  con  $\varphi \in C^2(U)$  entonces  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .
- (2)  $\implies$  (1): Sea  $\sigma$  poligonal cerrada en  $U$  de lados paralelos a los ejes coordenados. Veamos que  $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$ .  
Entonces  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$  donde cada  $\sigma_j$  tiene imagen  $Im(\sigma_j) = C_j$ , curva de Jordan poligonal.

$$\int_{\sigma} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{(\partial D_j)^+} Pdx + Qdy = \sum_{j=1}^n \int_{D_j} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

□

### Ejemplo

El resultado anterior puede fallar si  $U$  no es simplemente conexo. Sean  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  que es  $C^\infty$  en  $U$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

pero podemos ver que  $\vec{F}$  no es conservativo en  $U$  ya que tomando  $\gamma_r(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$  con  $r > 0$  y  $t \in [0, 2\pi]$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\langle \left( \frac{-r \sin(t)}{r^2}, \frac{r \cos(t)}{r^2} \right), (-r \sin(t), r \cos(t)) \right\rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

luego como  $\gamma_r$  es cerrada y  $\int_{\gamma_r} \vec{F} \neq 0$  entonces  $\vec{F}$  no es conservativo en  $U$ .

Sabemos que  $\vec{F}$  no es conservativo, pero nos podemos preguntar si se puede encontrar un potencial para  $\vec{F}$  en  $U$ .

Buscamos  $\varphi$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} P = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) &= \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Entonces  $\varphi$  es un potencial para  $\vec{F}$  en  $W = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$ .

**Teorema 7.0.3** [Teorema de Green General - Dominios Múltiplemente Conexos]

Sean  $C_0, C_1, \dots, C_m$  curvas de Jordan regulares a trozos en  $\mathbb{R}^2$  tal que:

1.  $C_j \subset \text{Int}(C_0) \forall j = 1, \dots, m$
2.  $C_i \subset \text{Ext}(C_j) \forall i, j = 1, \dots, m$  con  $i \neq j$

Sean  $D = \text{Int}(C_0) \cap (\text{Ext}(C_1) \cup \dots \cup \text{Ext}(C_m))$  y  $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \overline{D} = D \cup C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_m$ . Entonces:

$$\int_{(\partial D)^+} Pdx + Qdy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

donde  $(\partial D)^+ = C_0^+ - \sum_{j=1}^m C_j^+$ .

**Definición 7.0.4** [Divergencia de un Campo Vectorial]

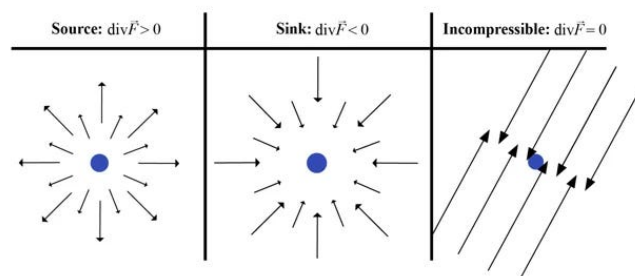
Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define la divergencia de  $\vec{F}$  como:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Más generalmente, si  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  entonces:

$$\text{div}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{F}$$

La divergencia de un campo vectorial mide qué tanto el campo "se expande" o "se contrae" en un punto, es decir, cuánto flujo neto sale o entra de una región infinitesimal alrededor de ese punto. Si imaginas un campo como un flujo de aire o de agua, la divergencia en un punto te dice si ese punto actúa como una fuente (donde el fluido se está generando y sale hacia afuera) o como un sumidero (donde el fluido desaparece y entra hacia dentro). Si no hay ganancia ni pérdida neta de fluido, la divergencia es cero.



Geométricamente, si colocas una pequeña esfera o círculo alrededor de un punto, y el flujo total que sale es mayor que el que entra, la divergencia es positiva; si entra más de lo que sale, es negativa. La divergencia se calcula como una combinación de derivadas parciales que describe cómo cambian las componentes del campo en cada dirección. Así, la divergencia condensa en un número local la idea de densidad de flujo saliente desde un punto del campo.

#### Observación 7.0.4

Sea el vector  $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ , entonces tenemos dos vectores ortogonales a  $\vec{u}$  que son  $\vec{v} = (u_2, -u_1)$  y  $\vec{w} = (-u_2, u_1)$ , y que se obtienen rotando  $\vec{u}$  90 grados en sentido horario y antihorario respectivamente.

#### Definición 7.0.5 [Vector Normal Unitario Exterior]

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan regular a trozos en  $D = \text{Int}(C)$ . Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización regular a trozos de  $C$  que induce la orientación positiva  $C^+$ . Para cada  $t_0 \in [a, b]$ , excepto una cantidad finita de ellos, consideramos el vector tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$ :

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0))$$

Se define entonces el vector normal unitario exterior a  $C$  en  $\gamma(t_0)$  como:

$$\vec{n}(\gamma(t_0)) = \left( \frac{\gamma'_2(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, -\frac{\gamma'_1(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right)$$

El vector normal unitario exterior a una curva cerrada en el plano representa la dirección que apunta hacia fuera del dominio  $D$  delimitado por la curva, y es perpendicular al vector tangente en cada punto regular. Cuando una curva  $C$  está orientada positivamente (es decir, recorriéndola el interior queda a la izquierda), el exterior queda a la derecha del sentido de recorrido. Por tanto, para obtener el vector normal exterior, se toma el vector tangente en ese punto y se rota 90° en sentido horario, apuntando hacia fuera.

#### Teorema 7.0.4 [Teorema de la Divergencia]

Supongamos que tenemos  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan regular a trozos con  $D = \text{Int}(C)$  y sea  $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset \overline{D} = D \cup C$ . Entonces:

$$\int_D \text{div}(\vec{F}) = \int_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal unitario exterior a  $C^+$ .

*Demostración.* Consideramos el campo vectorial  $\vec{G} = (-F_2, F_1) = (P, Q)$  y aplicamos el Teorema de Green:

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C^+} P dx + Q dy$$

•

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \text{div}(\vec{F}) dx dy$$

•

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \underbrace{\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle}_{\text{campo escalar}} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \vec{n}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t=a}^{t=b} \langle (F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t))), (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \rangle dt \\ &= \int_{t=a}^{t=b} -F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) dt = \int_{C^+} P dx + Q dy \end{aligned}$$

□

Lo que nos viene a decir el teorema de la divergencia es que la cantidad total de “campo” que se genera o se pierde dentro de una región ( $D$ ) es exactamente igual al flujo neto que atraviesa su frontera ( $C$ ), medido mediante el producto escalar del campo con el vector normal exterior. Este resultado permite traducir una propiedad local del campo —la divergencia, que mide en cada punto si el campo actúa como fuente o sumidero— en una propiedad global, como el flujo total que atraviesa el borde.

En términos más concretos, el lado izquierdo de la igualdad,  $\int_D \text{div}(\vec{F})$ , cuantifica cuánto se “crea” o “destruye” del campo dentro del área: es una suma punto a punto de los nacimientos o desapariciones del flujo. Por su parte, el lado derecho,  $\int_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$ , mide directamente cuánto del campo está atravesando la frontera hacia el exterior. Así, si dentro de la región hay fuentes, el campo tiende a salir; si hay sumideros, tiende a entrar. Este teorema no solo tiene un profundo contenido conceptual —relacionando lo interno con lo externo, lo local con lo global—, sino que también es una herramienta práctica: convierte una integral doble sobre una región (a menudo más complicada) en una integral de línea a lo largo de su frontera (más manejable si se conoce el campo sobre ella).

## 8 Superficies Paramétricas

### Definición 8.0.1 [Superficie Paramétrica]

Una parametrización de una superficie paramétrica  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$  definida en un abierto conexo  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que:

$$Im(\varphi) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in U\} = S$$

Diremos que la parametrización  $\varphi$  es regular cuando la pareja de vectores  $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\}$  es linealmente independiente en todo punto de  $U$ . Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a  $\varphi$  es no nulo en todo punto de  $U$ :

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$$

En este caso, el plano tangente a la superficie en el punto  $\varphi(u_0, v_0)$  tiene como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = \varphi_2(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z = \varphi_3(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

### Ejemplo

Dada la superficie  $z = x^2 + y^2$ , podemos parametrizarla con  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ . Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2x\vec{e}_3 + 2y\vec{e}_2 \neq (0, 0, 0)$$

### Ejemplo

Superficies explícitas: Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto conexo y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Entonces la gráfica de  $f$  es una superficie regular con parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Veamos que  $\vec{N}_\varphi \neq (0, 0, 0)$ :

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_3 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_2 \neq (0, 0, 0)$$

$$Im(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

### Ejemplo

Dado el cilindro de ecuaciones  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 < z < 1$ , busquemos una parametrización de la superficie. Tomando la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, 1)$$

entonces vemos que  $\underbrace{x^2 + y^2}_1 = r^2 \implies r = 1$ .

Por tanto, obtenemos que nuestra parametrización es:

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \neq (0, 0, 0)$$

### Ejemplo

Tomando el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 < z < 1$  del ejemplo anterior, podemos parametrizarlo de otra forma.

Consideramos el siguiente conjunto:

$$U = \{(u, v) : 1 < \sqrt{u^2 + v^2} < 2, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

entonces definimos nuestra parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sobre este conjunto tal que

$$\varphi(u, v) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \sqrt{u^2 + v^2} - 1 \right)$$

### Definición 8.0.2 [Superficies Equivalentes]

Diremos que dos superficies paramétricas  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definidas respectivamente sobre los conjuntos abiertos conexos  $U, V \subset \mathbb{R}^2$ , son equivalentes si existe una aplicación biyectiva  $h : V \rightarrow U$  de clase  $C^1$  (es decir, un difeomorfismo) tal que:

$$\psi = \varphi \circ h.$$

### Observación 8.0.1

1. En este caso  $\varphi(U) = \psi(V)$ .
2. En la definición se pide que los conjuntos  $U$  y  $V$  sean conexos. Como  $\forall (s, t) \in V$ ,  $D_h(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un isomorfismo lineal, sabemos que  $\det(D_h(s, t)) \neq 0$ . Por conexión,  $\det(D_h(s, t))$  conserva el signo en todo  $V$ .

### Definición 8.0.3 [Conservación de la Orientación]

1. Se dice que  $h$  conserva la orientación si  $\det(D_h(s, t)) > 0$  para todo  $(s, t) \in V$ , es decir las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  tienen la misma orientación.
2. Se dice que  $h$  cambia la orientación si  $\det(D_h(s, t)) < 0$  para todo  $(s, t) \in V$ , es decir las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  tienen orientaciones opuestas.

### Lema 8.0.1

Sean  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones equivalentes de una superficie  $S$ . Entonces,



para todo  $(s, t) \in V$ , se cumple que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s, t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(s, t))$$

Equivalentemente,

$$\vec{N}_\psi(s, t) = \det(D_h(s, t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s, t))$$

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena a  $\psi = \varphi \circ h$ , obtenemos la siguiente relación entre las matrices jacobianas:

$$D_\psi(s, t) = D_\varphi(h(s, t)) \cdot D_h(s, t).$$

En términos de las derivadas parciales, esto se traduce en:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial t},$$

donde  $h(s, t) = (h_1(s, t), h_2(s, t))$ .

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial como:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot D_h(s, t),$$

donde  $D_h(s, t)$  es la matriz jacobiana de  $h$ :

$$D_h(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos el producto vectorial de las derivadas parciales de  $\psi$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Utilizando las expresiones anteriores, tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right) \times \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial t} \right).$$

Expandiendo el producto vectorial y usando que  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Notamos que el término entre paréntesis a la derecha es el determinante de la matriz jacobiana  $D_h(s, t)$ :

$$\det(D_h(s, t)) = \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \det(D_h(s, t)) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)(h(s, t)).$$

Equivalentemente, para los vectores normales unitarios:

$$\vec{N}_\psi(s, t) = \det(D_h(s, t)) \cdot \vec{N}_\varphi(h(s, t)),$$

donde  $\vec{N}_\psi$  y  $\vec{N}_\varphi$  son los vectores normales unitarios asociados a las parametrizaciones  $\psi$  y  $\varphi$ , respectivamente.  $\square$

**Definición 8.0.4** [Orientación de una Superficie]

Asociadas a las parametrizaciones  $\varphi$  y  $\psi$  obtenemos los vectores normales unitarios

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\vec{N}_\varphi}{\|\vec{N}_\varphi\|} \quad y \quad \vec{n}_\psi = \frac{\vec{N}_\psi}{\|\vec{N}_\psi\|}$$

Entonces diremos que  $\varphi$  y  $\psi$  tienen la misma orientación si:

$$\vec{n}_\psi(s, t) = \vec{n}_\varphi(h(s, t)) \quad o \quad \vec{n}_\psi(s, t) = -\vec{n}_\varphi(h(s, t))$$

## 9 Integrales de superficie

### 9.1 Superficies como Conjuntos

#### Definición 9.1.1 [Superficie Simple Regular]

Diremos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie simple regular si  $S = \varphi(\overline{D})$  donde  $D = \text{Int}(C)$  siendo  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan regular a trozos, y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de clase  $C^1$  inyectiva y regular en  $\overline{D} \subset U$ .

En este caso, el borde de  $S$  se define como  $\partial S = \varphi(C)$ , que es una curva cerrada y regular a trozos en  $\mathbb{R}^3$ .

#### Definición 9.1.2 [Superficie Casi-Simple Regular]

Diremos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie casi-simple regular si  $S = \varphi(\overline{D})$  donde  $D = \text{Int}(C)$  siendo  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan regular a trozos, y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de clase  $C^1$  inyectiva y regular en  $D$ .

#### Definición 9.1.3 [Área e Integral de una Superficie]

Dada una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  simple regular o casi-simple regular, y una parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$  de  $S$ , definimos:

1. El área de la superficie  $S$  como:

$$a(S) = \int_S 1 dS = \int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv$$

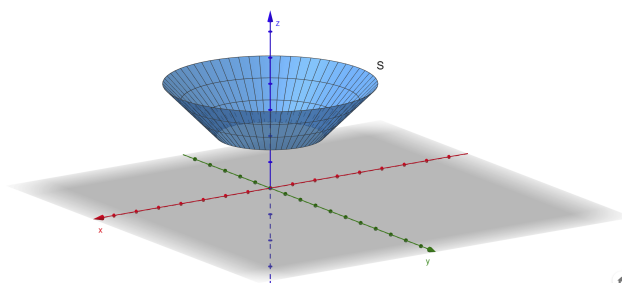
2. Si  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  es:

$$\int_S f dS = \int_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv = \int_D f(\varphi(u, v)) \|\vec{N}_\varphi\| du dv$$

#### Ejemplo

Consideramos la superficie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  resultante de acotar un cono por los planos  $z = 1$  y  $z = 2$ .

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 1 < z < 2\}$$



Calculemos el área de la superficie  $S$ :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2 = z^2 \implies r = z \quad \varphi(\theta, z) = \begin{cases} x = z \cos(\theta) \\ y = z \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\overline{D} = [0, 2\pi] \times [1, 2] \quad S = \varphi(D)$$

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z \sin(\theta) & z \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z)$$

$$\|\vec{N}_\varphi\|^2 = z^2 \cos^2(\theta) + z^2 \sin^2(\theta) + (-z)^2 = 2z^2 \implies \|\vec{N}_\varphi\| = z\sqrt{2} \neq 0 \quad \forall (0, z) \in D$$

Entonces  $\varphi$  es inyectiva y regular en  $D$  (aunque no en  $\overline{D}$ ), luego  $S$  es una superficie casi-simple regular.

Por último, el área de la superficie  $S$  es:

$$\begin{aligned} a(S) &= \int_D \|\vec{N}_\varphi\| du dv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[ \frac{z^2}{2} \sqrt{2} \right]_{z=1}^{z=2} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \frac{4}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{3}{2} \sqrt{2} d\theta = \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 2\pi = 3\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

### Ejemplo

Dada la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , calculemos la integral de superficie de  $f$  sobre la superficie  $S$  dada por la sección de cono  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $1 < z < 2$  del ejemplo anterior.

Entonces, la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  es:

$$\begin{aligned} \int_S f dS &= \int_D f(\varphi(\theta, z)) \|\vec{N}_\varphi\| d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 \cdot z\sqrt{2} dz d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} [z^4]_1^2 d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} (16 - 1) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{30\sqrt{2}}{4} d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{15\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot (2\pi) = 15\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

Observemos que  $\int_S f dA = \int_S f dS$ .

### Ejemplo

Área de la esfera en  $\mathbb{R}^3$  de radio  $R$ :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, \phi) = \begin{cases} x = R \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = R \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = R \cos(\phi) \end{cases} \quad \overline{D} = \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Entonces, tenemos que  $D = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  y  $\overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R \sin(\theta) \sin(\phi) & R \cos(\theta) \sin(\phi) & 0 \\ R \cos(\theta) \cos(\phi) & R \sin(\theta) \cos(\phi) & -R \sin(\phi) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \sin(\phi) \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{vmatrix} = -R^2 \sin(\phi) (\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi)) \\
&\|\vec{N}_\varphi\|^2 = R^4 \sin^4(\phi) + R^4 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) = R^4 \sin^2(\phi) (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) = R^4 \sin^2(\phi) \\
&\|\vec{N}_\varphi\| = R^2 \sin(\phi)
\end{aligned}$$

Luego el área de la esfera es:

$$\begin{aligned}
a(S) &= \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dudv = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} [-R^2 \cos(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -R^2 ((-1) - 1) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2R^2 d\theta = 2R^2 \cdot (2\pi) = 4\pi R^2
\end{aligned}$$

## 9.2 Superficies Regulares a Trozos

### Definición 9.2.1 [Suma de Superficies]

Sean  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  dos superficies simples regulares. Se dice que la superficie  $S$  es la suma de  $S_1$  y  $S_2$ , y se denota por  $S = S_1 + S_2$ , si:

1.  $S = S_1 \cup S_2$
2.  $S_1 \cap S_2 \subset \partial S_1 \cap \partial S_2$

En este caso, se define el borde de  $S$  como:

$$\partial S = \overline{(\partial S_1 \cup \partial S_2)} \setminus \overline{(\partial S_1 \cap \partial S_2)}$$

Si  $\partial S = \emptyset$ , entonces se dice que  $S$  no tiene borde y es cerrada.

Análogamente, se define la suma de superficies  $S_1 + S_2 + \dots + S_k$  siendo cada  $S_i$  una superficie simple regular.

### Ejemplo

Consideramos el cubo  $S$  formado por la suma de las superficies de los seis lados del cubo  $S = S_1, S_2, \dots, S_6$ . En particular tenemos que  $\partial S = \emptyset$ .

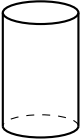
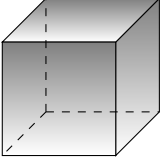
### Ejemplo

Consideramos ahora el cilindro  $S$  formado por la suma de las superficies de los dos "tapas" del cilindro  $S_1, S_2$  y la superficie lateral dividida en dos partes iguales  $S_3$  y  $S_4$ . En este caso, tenemos que  $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ , y como en el caso anterior,  $\partial S = \emptyset$ .

### Ejemplo

Quitémosle una de las tapas al cilindro, entonces tenemos que  $S = S_1 + S_2 + S_3$ , y en este caso

$$\begin{cases} \partial(S_1 + S_2) = C_0 \cup C_1 \\ \partial S_3 = C_0 \\ \partial S = (\partial(S_1 + S_2) \cup \partial S_3) \setminus (\partial S_1 + S_2) \cap \partial S_3 = (C_0 \cup C_1 \cup C_0) \setminus (C_0) = \overline{C_1} = C_1 \end{cases}$$



Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y  $S$  una superficie. Nos preguntamos qué orientación tiene el campo  $\vec{F}$  en la superficie  $S$ .

Necesitamos, por tanto, orientar  $S$  de alguna forma.

### 9.3 Orientación de Superficies

#### Definición 9.3.1 [Normal Unitaria de una Superficie]

Sea  $S$  una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ . Una **normal unitaria** en  $S$  es una función continua

$$\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que, para todo punto  $p \in S$ , se cumple que  $\vec{n}(p)$  es un vector **unitario** y **normal** a la superficie en  $p$ , es decir:

$$\vec{n}(p) \perp T_p(S) \quad \text{y} \quad \|\vec{n}(p)\| = 1,$$

donde  $T_p(S)$  denota el plano tangente a  $S$  en el punto  $p$ .

#### Definición 9.3.2 [Superficie Orientada]

Una **superficie simple regular orientada** es un par  $(S, \vec{n})$ , donde  $S$  es una superficie regular y simple, y  $\vec{n}$  es una normal unitaria que asigna de forma continua a cada punto de  $S$  una orientación consistente.

#### Observación 9.3.1

Una superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones posibles.

Sea  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  una parametrización simple y regular de  $S$ , según la definición adoptada para  $S$ . Consideramos el siguiente campo normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\overline{D} & \xrightarrow{\varphi} & S \\
\downarrow \vec{n}_\varphi & \searrow \varphi^{-1} & \uparrow \vec{n} \\
\mathbb{R}^3 & & 
\end{array}$$

Entonces, la función  $\vec{n} = \vec{N}_\varphi \circ \varphi^{-1}$  define una normal unitaria en  $S$ , ya que  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  es un homeomorfismo.

Asimismo, la función  $-\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  también es una normal unitaria en  $S$ , lo que muestra que toda superficie simple y regular admite exactamente dos orientaciones opuestas.

Sean ahora  $\vec{n}_1, \vec{n}_2 : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos normales unitarias en  $S$ . Definimos la función

$$h(p) = \langle \vec{n}_1(p), \vec{n}_2(p) \rangle$$

para todo  $p \in S$ . Esta función  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, y como  $\vec{n}_1(p)$  y  $\vec{n}_2(p)$  son vectores unitarios, se cumple que  $|h(p)| = 1$  para todo  $p \in S$ .

Dado que  $S$  es conexa, la imagen de  $h$  debe ser conexa y contenida en el conjunto  $\{-1, 1\}$ . Por tanto,  $h(p) \equiv 1$  o  $h(p) \equiv -1$  en toda la superficie. En consecuencia,  $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$  o  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$  en todo  $S$ .

### Definición 9.3.3 [Integral de un Campo Vectorial sobre una Superficie]

Sean  $(S, \vec{n})$  superficie simple regular orientada y  $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo. Se define

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

### Observación 9.3.2

1.  $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$  es un campo escalar continuo en  $S$ .
2. Si  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  es una parametrización simple regular de  $S$  tal que  $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$ ,

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u, v)), \vec{n}_\varphi(u, v) \rangle \|\vec{N}_\varphi(u, v)\| du dv = \int_D \langle \vec{F}(\varphi(u, v)), \vec{N}_\varphi(u, v) \rangle du dv$$

### Ejemplo

Consideremos el paraboloide  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$  y lo orientamos con la normal exterior (la que apunta hacia afuera del vaso).

Sea el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 0)$ , entonces queremos encontrar la integral de  $\vec{F}$  sobre  $S$ .

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \partial D = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Consideramos la parametrización del paraboloide dada por:

$$\varphi : \overline{D} \rightarrow S \quad \varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Nos preguntamos si  $\vec{n}_\varphi$  induce la misma orientación que  $\vec{n}$ .

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{N}_\varphi(0,0) = (0,0,1) \\ \varphi(0,0) = (0,0,0) \end{cases} \quad \text{que apunta hacia arriba, es decir, hacia dentro del vaso, luego } \vec{n}_\varphi = -\vec{n}$$

$$\begin{aligned} - \int_D \langle \vec{F}(\varphi(x,y)), \vec{N}_\varphi(x,y) \rangle dx dy &= - \int_D \langle (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), 0), (-2x, -2y, 1) \rangle dx dy \\ &= \int_D 2x^2(x^2+y^2) + 2y^2(x^2+y^2) dx dy = 2 \int_D (x^2+y^2)^2 dx dy \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variables a coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad dx dy = r dr d\theta$$

$$2 \int_D (x^2+y^2)^2 dx dy = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot r dr d\theta = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[ \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{6} d\theta = 2 \frac{1}{6} (2\pi) = 2 \frac{\pi}{3}$$

### Definición 9.3.4 [Orientación Inducida en el Borde]

Sea  $(S, \vec{n})$  una superficie simple, regular y orientada, y sea  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  una parametrización regular de  $S$  que preserva la orientación inducida por  $\vec{n}$ , es decir,  $\vec{n}_\varphi = \vec{n} \circ \varphi$ . Consideramos el borde de  $S$  denotado por  $\partial S = \varphi(\partial D)$ .

Entonces se define la orientación de  $\partial S$  inducida por  $\vec{n}$  como la que se obtiene al recorrer  $\partial D$  en sentido positivo y proyectar dicho recorrido a  $\partial S$  mediante  $\varphi$ , es decir, haciendo la composición  $\varphi \circ \gamma$ , donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$  es una parametrización de  $\partial D$  que recorre  $\partial D$  en sentido positivo.

### Observación 9.3.3

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$  es una parametrización de  $\partial D$  que recorre esta curva en sentido positivo, entonces la curva  $\varphi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \partial S$  recorre  $\partial S$  con la orientación inducida por  $\vec{n}$ .

Geométricamente, esto significa que  $\partial S$  se recorre de manera que el sacacorchos avanza en la dirección de  $\vec{n}$ , es decir, si imaginamos un sacacorchos girando en el sentido del recorrido de  $\partial S$ , este se desplazará en la dirección de  $\vec{n}$ .

De manera equivalente, si  $\vec{n}$  representa la vertical en el espacio, entonces  $\partial S$  se recorre dejando la superficie  $S$  a la izquierda, lo que coincide con la orientación inducida por  $\vec{n}$ .

### Ejemplo

Dada la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$  del ejemplo anterior, orientada con la normal exterior, y una parametrización  $\varphi : \overline{D} \rightarrow S$  dada por  $\varphi(x, y) = (x, -y, x^2 + y^2)$ , donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , veamos que  $\vec{n}_\varphi = \vec{n}$ .

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & -1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, -1)$$

Haciendo la evaluación  $\vec{N}_\varphi(0,0) = (0,0,-1)$ , vemos que la normal de  $\varphi$  en el punto  $(0,0)$  tiene el mismo sentido que  $\vec{n}$ , es decir,  $\vec{n}_\varphi = \vec{n}$ , luego  $\varphi$  preserva la orientación de  $S$ .

Ahora consideremos una parametrización  $\gamma$  de  $C = \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  en sentido



positivo (antihorario en el plano  $xy$ ), definida por:

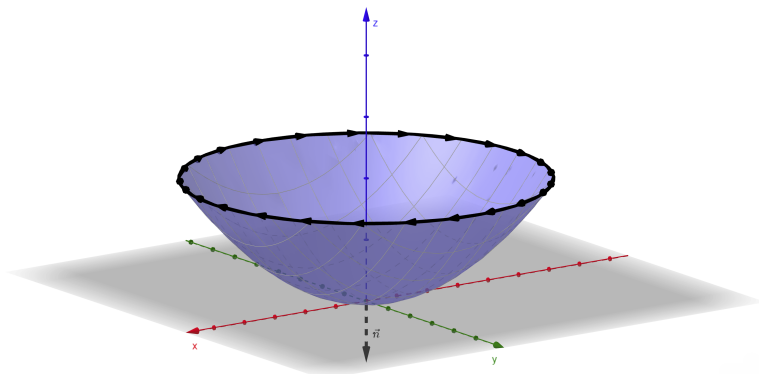
$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \partial D \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Fijémonos que la curva definida por  $\gamma$  es una curva de Jordan- $C^1$  que deja el interior de  $\partial D$  a la izquierda y el exterior a la derecha, es decir, es positiva.

Componiendo con la transformación  $\varphi$ , obtenemos la curva proyectada en  $S$ :

$$\varphi \circ \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \partial S \quad (\varphi \circ \gamma)(t) = (\cos t, -\sin t, \cos^2 t + \sin^2 t) = (\cos t, -\sin t, 1)$$

que tiene sentido horario en el plano  $xy$ , tal y como se indica en la figura



En efecto, vemos que la orientación inducida por  $\vec{n}$  en  $\partial S$  es la que se obtiene por el recorrido  $\varphi \circ \gamma$ , al ser composición de una parametrización que preserva la orientación de  $S$  y otra que recorre  $\partial D$  en sentido positivo.

Además, observamos que se cumple la regla del sacacorchos, pues si giramos el sacacorchos en el sentido del recorrido de  $\partial S$ , este se desplaza hacia abajo, es decir, en la dirección de  $\vec{n}$ .

Nótese que tomando el vector normal  $\vec{n} = (0, 0, -1)$  como referencia de eje vertical, al recorrer  $\partial S$  con  $\varphi \circ \gamma$ , la superficie  $S$  queda a la izquierda.

### Definición 9.3.5 [Orientación Compatible]

Sean  $(S_1, \vec{n}_1)$  y  $(S_2, \vec{n}_2)$  dos superficies simples y regulares de manera que  $S = S_1 + S_2$ , entonces se dice que  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  son compatibles si inducen orientaciones opuestas en  $\partial S_1 \cap \partial S_2$ .

En este caso, se dice que  $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  establece una orientación en  $\partial S$  que se llama orientación inducida por  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ .

Se dice que  $S = S_1 + S_2$  es orientable si  $S_1$  y  $S_2$  admiten orientaciones compatibles. Análogamente, de manera recursiva, si  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$  donde  $(S_i, \vec{n}_i)$  son superficies orientadas, se define  $(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k)$  como compatible si las orientaciones inducidas por  $(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{k-1})$  en  $S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1}$  y  $\vec{n}_k$  en  $S_k$  son opuestas en  $\partial(S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1}) \cap \partial S_k$ .

### Ejemplo

Consideremos el cilindro  $(S, \vec{n}) = (S_1, \vec{n}_1) + (S_2, \vec{n}_2)$  sin tapas con la orientación exterior.

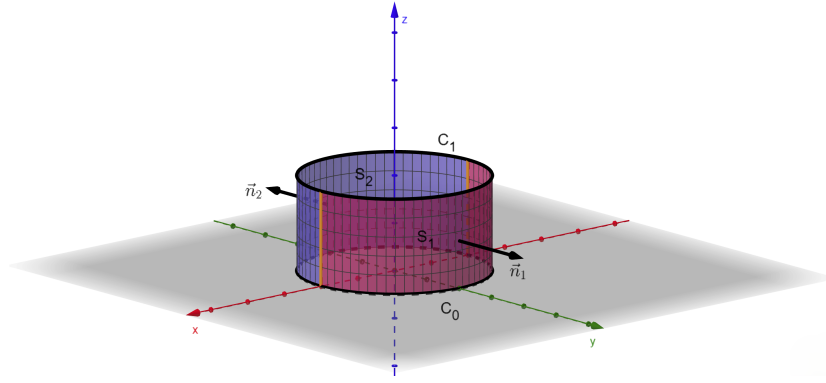
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$$

donde

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq y, z \in [0, 1]\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y \leq 0, z \in [0, 1]\}$$

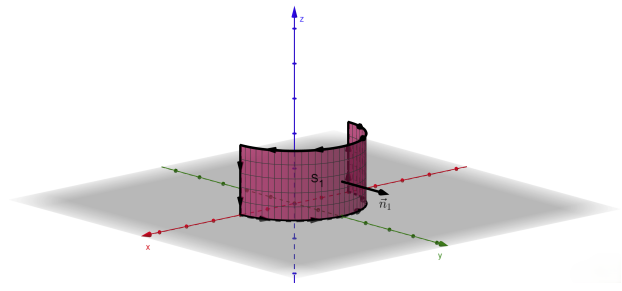
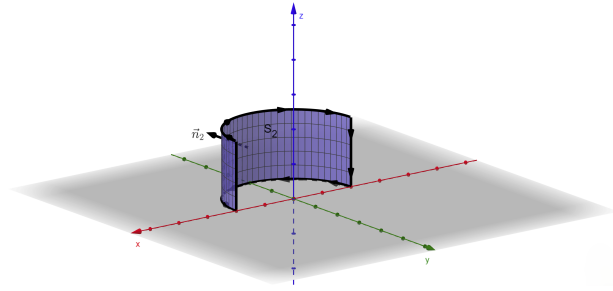
La representación gráfica de  $S$  es la siguiente:



donde  $C_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$  y  $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$  son las tapas del cilindro. En particular tenemos que  $\partial S = C_0 \cup C_1$ .

Veamos que  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  son compatibles y que, por tanto,  $S$  es orientable siendo  $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  la orientación inducida en  $S$ .

Para ello, veamos las orientaciones que inducen  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  en  $\partial S_1$  y  $\partial S_2$  respectivamente. En efecto, por la regla del sacacorchos, las orientaciones inducidas serán las descritas por las siguientes figuras:



Además en la intersección de los bordes  $\partial S_1 \cap \partial S_2$  (parte naranja de la primera figura), las orientaciones inducidas son opuestas, luego  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  son compatibles, es decir,  $S$  es orientable.

Teniendo en cuenta la orientación inducida en el borde de  $S_1$  y  $S_2$ , consideramos dos parametrizaciones  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  de  $C_0$  y  $C_1$  respectivamente:

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \gamma_1(t) = (-\cos(t), \sin(t), 1) & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

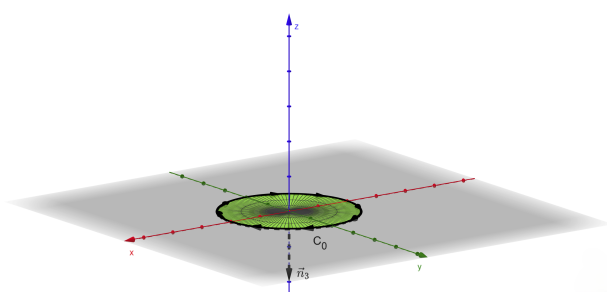
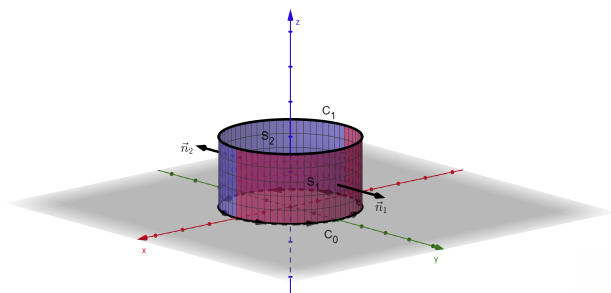
donde  $\gamma_1$  recorre negativamente  $C_1$  y  $\gamma_0$  positivamente  $C_0$ , luego  $\partial S = C_0^+ \cup C_1^-$ .

### Ejemplo

Consideramos ahora el cilindro del ejemplo anterior pero con la tapa de abajo:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$$

$$S = \underbrace{S_1 + S_3}_{S_0} + S_3 \text{ donde } S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$



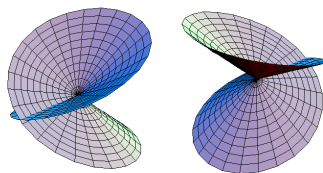
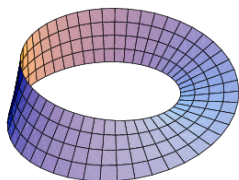
Consideramos  $\vec{n}_3$  normal hacia abajo en  $S_3$  y obtenemos que  $\vec{n}_3$  induce en  $\partial S_3 = C_0$  la orientación opuesta a la de  $S_0$ , luego son compatibles. Lo mismo podemos hacer con la tapa de arriba, y así obtenemos el cilindro completo, que es orientable con  $\partial S = \emptyset$ .

### Superficies no orientables:

1. Banda de Moebius

2. Plano proyectivo

3. Botella de Klein



### Definición 9.3.6 [Integral de Superficie Orientada Regular a Trozos]

Sea  $(S, \vec{n})$  una superficie simple, regular a trozos y orientada, es decir,  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$  donde  $(S_i, \vec{n}_i)$  son superficies simples, regulares y orientadas para  $i = 1, \dots, k$ , con  $(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k)$  orientaciones compatibles.

Sea  $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo. Se define entonces

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \sum_{i=1}^k \int_{(S_i, \vec{n}_i)} \vec{F}$$

### Ejemplo

Sea  $S = S_1 \cup S_2$ , donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, z \in [0, 1]\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

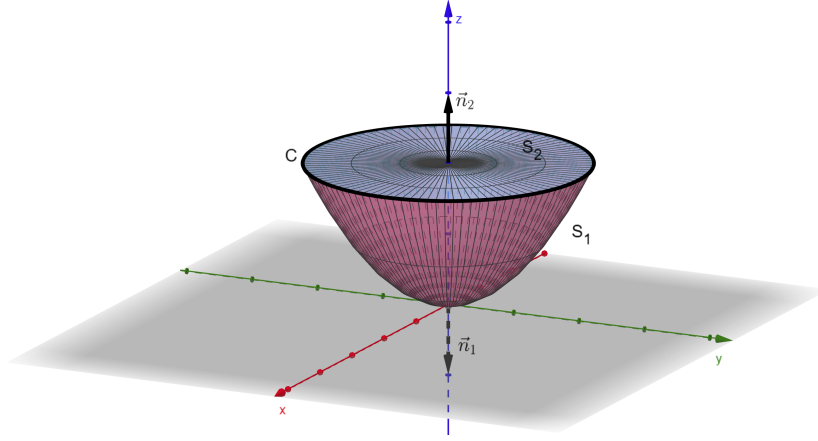
y sea  $\vec{n}$  el campo normal exterior. Consideramos el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 0)$ , y queremos calcular la integral de  $\vec{F}$  sobre la superficie  $S$ :

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Aplicando la regla del sacacorchos (regla de la mano derecha), observamos que las superficies orientadas  $(S_1, \vec{n}_1)$  y  $(S_2, \vec{n}_2)$  inducen sobre la curva

$$C = \partial S_1 \cap \partial S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

orientaciones opuestas.



Por la definición anterior de la integral de superficie orientada, tenemos que

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F}$$

Comenzamos definiendo el dominio para las parametrizaciones de  $S_1$  y  $S_2$ :

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

La parametrización de  $S_1$  es:

$$\varphi_1 : \overline{D} \rightarrow S_1, \quad \varphi_1(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

Evaluando la función  $\varphi_1$  en el origen obtenemos que  $\varphi_1(0, 0) = (0, 0, 1)$  que apunta hacia arriba, es decir, en sentido opuesto al vector normal  $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$ , luego  $\vec{n}_1 = -\vec{N}_{\varphi_1}$ .

Calculamos la integral del campo vectorial sobre la superficie  $(S_1, \vec{n}_1)$ :

$$\begin{aligned} \int_{(S, \vec{n}_1)} \vec{F} &= \int_D \langle \vec{F}(\varphi_1(x, y)), \vec{N}_{\varphi_1}(x, y) \rangle dx dy = - \int_D \langle (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2), 0), (-2x, -2y, 1) \rangle dx dy \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^4 \cdot r dr d\theta = 4\pi \left[ \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Para la parametrización de  $S_2$  tenemos:

$$\varphi_2 : \overline{D} \rightarrow S_2, \quad \varphi_2(x, y) = (x, y, 1)$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

Al igual que antes, evaluando la función  $\varphi_2$  en el origen obtenemos que  $\varphi_2(0, 0) = (0, 0, 1)$  que apunta hacia arriba, es decir, en el mismo sentido que el vector normal  $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ , luego  $\vec{n}_2 = \vec{N}_{\varphi_2}$ .

Procedemos a calcular la integral del campo vectorial sobre la superficie  $(S_2, \vec{n}_2)$ :

$$\int_{(S, \vec{n}_2)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{F}(\varphi_2(x, y)), \vec{N}_{\varphi_2}(x, y) \rangle dx dy = \int_D \langle (x, y, 0), (0, 0, 1) \rangle dx dy = \int_D 0 dx dy = 0$$

Por lo tanto, la integral de superficie de  $\vec{F}$  sobre  $S$  es:

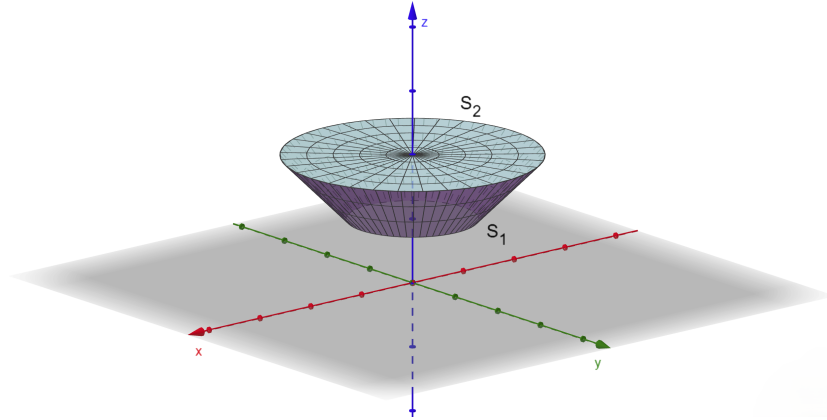
$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \frac{2\pi}{3} + 0 = \frac{2\pi}{3}$$

### Ejemplo

Sea la superficie  $S = S_1 \cup S_2$ , donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2]\} \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

y el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$ . Queremos calcular  $\int_{(S, \vec{n})} \vec{F}$ , donde  $\vec{n}$  es la normal exterior.



Observemos que  $(S_1, \vec{n}_1)$  y  $(S_2, \vec{n}_2)$  tienen orientaciones compatibles, con lo cual  $(S, \vec{n})$  está bien orientada.

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F}$$

Comenzamos parametrizando la superficie  $S_1$  con la función  $\varphi_1 : D \rightarrow S_1$  dada por:

$$\varphi_1(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = r \end{cases} \quad \text{donde } D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z \sin(\theta) & z \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z)$$

Teniendo en cuenta la geometría de la figura y que el vector  $\vec{N}_{\varphi_1}$  apunta hacia abajo, entonces es exterior a  $S$ , luego los vectores  $\vec{n}_1$  y  $\vec{N}_{\varphi_1}$  son compatibles.

Entonces la integral de  $\vec{F}$  sobre  $S_1$  es:

$$\begin{aligned} \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} &= \int_D \langle \vec{N}_{\varphi_1}, \vec{F} \circ \varphi_1 \rangle = \int_{z=0}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \langle (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z), (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z) \rangle d\theta dz \\ &= \int_{z=1}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} z^2 + z^2 d\theta dz = 2\pi \int_{z=1}^{z=2} 2z^2 dz = 4\pi \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=1}^{z=2} = 4\pi \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = 4\pi \cdot \frac{7}{3} = \frac{28\pi}{3} \end{aligned}$$

Ahora consideramos la parametrización  $\varphi_2 : E \rightarrow S_2$  de  $S_2$  dada por:

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{donde } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

La normal  $\vec{N}_{\varphi_2}$  apunta hacia arriba, es decir, hacia el exterior de  $S$ , luego  $\vec{n}_2$  y  $\vec{N}_{\varphi_2}$  son compatibles. Entonces la integral de  $\vec{F}$  sobre  $S_2$  es:

$$\begin{aligned} \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F} &= \int_E \langle \vec{N}_{\varphi_2}, \vec{F} \circ \varphi_2 \rangle = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi} \langle (0, 0, 1), (x, y, -z) \rangle dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2\pi} -z dy dx = -2\pi \int_{x=0}^{x=2} 2 dx = -4\pi [x]_{x=0}^{x=2} = -4\pi(2 - 0) = -8\pi \end{aligned}$$

Finalmente, la integral de  $\vec{F}$  sobre  $S$  es:

$$\int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n}_2)} \vec{F} = \frac{28\pi}{3} - 8\pi = \frac{28\pi}{3} - \frac{24\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

### Proposición 9.3.1

Sea  $D = \text{Int}(C)$  la parte interior de una curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  definida en un abierto  $U \supset \overline{D}$ . Consideramos la superficie  $S = G_f$ .

Para cada  $(x, y)$  en  $D$ , sea  $\theta(x, y)$  el ángulo que forma el vector normal  $\vec{n}(x, y)$  a la superficie  $S$  en el punto  $(x, y, f(x, y))$  con el vector vertical  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Entonces se tiene que:

$$a(S) = \int_D \frac{dx dy}{\cos(\theta(x, y))}$$

*Demostración.* Consideramos la parametrización  $\varphi : D \rightarrow S$  de  $S$  dada por:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases} \quad \text{donde } (x, y) \in D$$

Entonces, la normal a la superficie  $S$  es:

$$\vec{N}_{\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

Haciendo el producto escalar con el vector vertical  $\vec{e}_3$ :

$$\langle \vec{N}_{\varphi}, \vec{e}_3 \rangle = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \cdot (0, 0, 1) = 1$$

$$\langle \vec{N}_{\varphi}, \vec{e}_3 \rangle = \|\vec{N}_{\varphi}\| \cdot \|\vec{e}_3\| \cdot \cos(\theta(x, y)) = \|\vec{N}_{\varphi}\| \cdot 1 \cdot \cos(\theta(x, y)) \implies \|\vec{N}_{\varphi}\| = \frac{1}{\cos(\theta(x, y))}$$

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_{\varphi}\| dx dy = \int_D \frac{1}{\cos(\theta(x, y))} dx dy$$

□

### Observación 9.3.4

Si  $S$  está contenida en un plano cuyo vector normal es  $\vec{n}$ , entonces tenemos que  $\theta(x, y)$  es el ángulo entre  $\vec{n}$  y el vector vertical  $\vec{e}_3$  para cada  $(x, y) \in D$ .

En este caso, la integral de superficie se puede expresar como:

$$a(S) = \int_D \frac{dx dy}{\cos(\theta(x, y))} = \frac{1}{\cos(\theta(x, y))} \text{area}(D)$$

### Ejemplo

Sean los vectores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  no nulos, y sea  $S$  el paralelepípedo definido por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Entonces el área de la superficie  $S$  es:

$$a(S) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

En efecto, si consideramos la parametrización  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $S$  dada por:

$$\varphi(\lambda, \mu) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad D = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$$

entonces tenemos que

$$\varphi(\lambda, \mu) = \begin{cases} x = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Calculamos la normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \times \vec{v}$$

entonces el área de la superficie  $S$  es:

$$a(S) = \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \|\vec{u} \times \vec{v}\| d\lambda d\mu = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\mu = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

### Observación 9.3.5

En  $\mathbb{R}^3$ , el volumen del paralelepípedo definido por los vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  es el producto mixto:

$$V = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

## 10 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss

### 10.1 Teorema de Stokes

#### Definición 10.1.1 [Rotacional]

Sean  $A \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define el rotacional de  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  como:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

#### Observación 10.1.1

En este caso,  $\text{rot}(\vec{F})$  es un campo vectorial continuo definido en  $A$ .

#### Ejemplo

Sea  $(P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Consideramos  $A = U \times \mathbb{R}$  y el campo vectorial  $\vec{F} = (P, Q, 0)$ . Entonces el rotacional de  $\vec{F}$  es:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad \text{"la derivación del teorema de Green"}$$

#### Teorema 10.1.1 [Teorema de Stokes]

Sea  $(S, \vec{n})$  una superficie orientada y regular a trozos, y sea  $\vec{F}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset S$ . Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F}$$

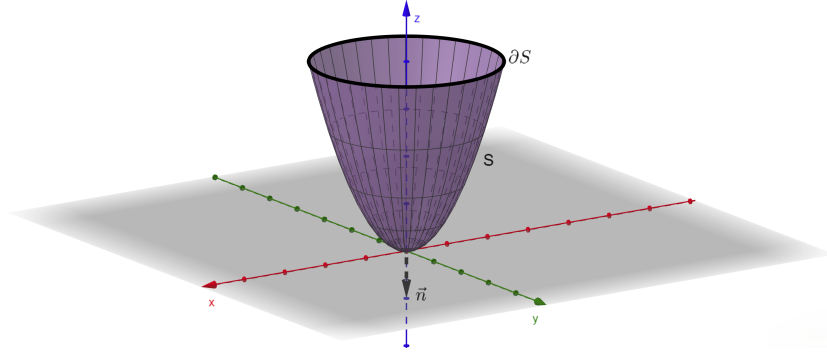
donde  $\partial S$  tiene la orientación inducida por  $\vec{n}$ .

#### Ejemplo

Sea la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$  con la norma exterior  $\vec{n}$  y el campo vectorial  $\vec{F} = (yz, -xz, z)$ . Verificamos el teorema de Stokes.

Tenemos que  $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 = 4\}$ , que es una circunferencia de radio 2 en el plano  $z = 4$ . Fijémonos que  $\vec{n}$  induce la orientación negativa en la curva  $C^- = \partial S$ .





El rotacional de  $\vec{F}$  es:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Consideramos la parametrización natural  $\varphi : D \rightarrow S$  de  $S$  dada por:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{donde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Entonces la normal a la superficie  $S$  es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

La normal  $\vec{N}_\varphi$  apunta hacia arriba en el punto  $(0, 0, 0)$ , luego tenemos una normal interior.

- Calculamos el rotacional de  $\vec{F}$  en  $S$  por medio de la parametrización  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) &= - \int_D \langle \vec{N}_\varphi, \text{rot}(\vec{F}) \circ \varphi(x, y) \rangle dx dy = - \int_D \langle (-2x, -2y, 1), (x, y, -2(x^2 + y^2)) \rangle dx dy \\ &= \int_D 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 dx dy = \int_D 4(x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= 4 \cdot 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 4 \cdot 2\pi \cdot 4 = 32\pi \end{aligned}$$

- Consideramos la parametrización positiva  $\gamma$  de la curva  $\partial S$  dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

y calculamos la integral de línea del campo  $\vec{F}$  sobre la curva  $\partial S$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{C^-} \vec{F} = - \int_{\gamma} \vec{F} = - \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= - \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (8 \sin(t), -8 \cos(t), 4), (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} 16 dt = 16 [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 16(2\pi - 0) = 32\pi \end{aligned}$$

En efecto, vemos que las integrales coinciden de acorde al teorema de Stokes.

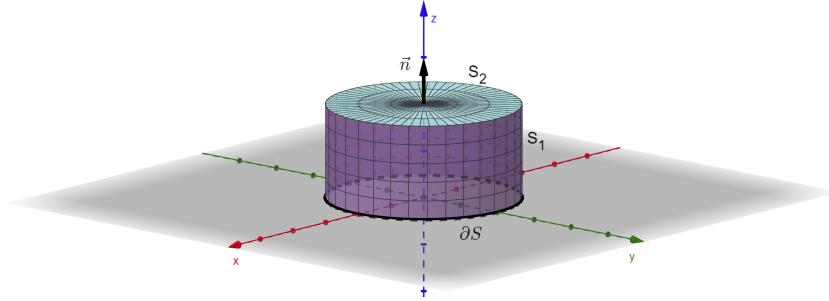
### Ejemplo

Sea  $S = S_1 \cup S_2$ , donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 2]\} \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con la norma exterior  $\vec{n}$  y el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ . El borde de  $S$  es:

$$\partial S = C_0^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$



Calculamos el rotacional del campo  $\vec{F}$ :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 1) = (0, 0, 0)$$

Consideramos la parametrización  $\gamma$  de la curva  $C_0$  dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

que tiene orientación positiva. Además,  $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ .

- Calculamos la integral del campo  $\text{rot}(\vec{F})$  sobre la superficie  $S$ :

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{0} = 0$$

- Hacemos la integral de línea del campo  $\vec{F}$  sobre la curva  $C_0^+$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (\sin(t), \cos(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) - \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos(2t) dt = \left[ \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Vemos que el teorema de Stokes se cumple, ya que las integrales son iguales.

### Ejemplo

Consideramos el campo vectorial  $\vec{F} = (yz, -xz, z)$ . Veamos el rotacional de  $\vec{F}$ :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Supongamos que tenemos una superficie  $S$  cualesquiera cuyo borde  $\partial S$  sea la curva  $C_0^+$  del ejemplo anterior. Entonces tenemos que:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (0, 0, 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt = 0$$

### Observación 10.1.2

Si  $S$  es una superficie cerrada, es decir,  $\partial S = \emptyset$ , entonces se tiene que:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F} = 0$$

## 10.2 Geometría del Rotacional

### Ejemplo

Sea  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  el campo de velocidades de un fluido en  $\mathbb{R}^2$ . Las trayectorias son curvas  $\gamma : I \rightarrow U$  con  $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ .

### Ejemplo

Sean  $U \subset \mathbb{R}^3$  abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ .

Consideremos  $p \in U$  y  $r > 0$ , siendo  $D_r$  el círculo de centro  $p$  y radio  $r$ , con frontera  $C_r = \partial D_r$ .

Sea  $\vec{u}$  un vector unitario de  $\mathbb{R}^3$  perpendicular al plano que contiene a  $D_r$ , entonces:

$$\langle \text{rot}(\vec{F})(p), \vec{u} \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r^+} \vec{F}$$

Donde  $C_r^+$  denota a  $C_r$  con la orientación comparativa a la de  $\vec{u}$ , y donde esta igualdad representa la "circulación por unidad de área" del campo  $\vec{F}$ .

*Demostración.*

$$\int_{C_r^+} \vec{F} = \int_{(D_r, \vec{n})} \text{rot} \vec{F} = \int_{D_r} \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle = \int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle + \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle$$

De donde pasamos a:

$$\int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle_{\text{constante}} = \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \cdot \text{área}(D_r)$$

Entonces:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < r < \delta \implies \|\text{rot} \vec{F}(x, y, z) - \text{rot} \vec{F}(p)\| < \epsilon \quad \forall (x, y, z) \in D_r \implies$$

$$\implies \left| \int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} \left| \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} \|\text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p)\| \leq \epsilon \cdot \text{área}(D_r)$$

Luego:

$$\left| \frac{1}{\text{área}(D_r)} \int_{C_r^+} \vec{F} - \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| < \epsilon \quad \forall 0 < r < \delta$$

□

**Definición 10.2.1**

Sean  $A \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se dice que  $\vec{F}$  es irrotacional en  $A$  si  $\text{rot}(\vec{F}) \equiv 0$  en  $A$ .

**Lema 10.2.1**

Si  $\vec{F}$  es un campo de clase  $C^1$ , y es conservativo en  $A \implies$  es irrotacional en  $A$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $\vec{F} = \nabla\varphi$ , es decir,  $\vec{F} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ , entonces  $\varphi$  es de clase  $C^2$  en  $A$  y, aplicando el teorema de Schwarz, tenemos que:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \right) = (0, 0, 0)$$

□

**Teorema 10.2.1**

Sea  $U \subset \mathbb{R}^3$  un abierto conexo, y sea  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $\vec{F}$  es conservativo en  $U$ .
2.  $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$ ,  $\forall \sigma$  camino triangular en  $U$ .
3.  $\vec{F}$  es irrotacional en  $U$ , es decir,  $\text{rot}(\vec{F}) \equiv 0$  en  $U$ .

*Demostración.*

- (1)  $\implies$  (2): Ya está probado por la caracterización de los campos conservativos.
- (2)  $\implies$  (1): Fijamos un punto  $P \in U$  y consideramos para cada  $x \in U$  la función

$$\varphi(x) = \int_{[P,x]} \vec{F}$$

Veamos que  $\varphi$  es un potencial de  $\vec{F}$ . Para ellos, veamos que  $F_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \forall i = 1, 2, 3$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \underbrace{\int_{[P, x+h\vec{e}_i]} \vec{F}}_{\varphi(x+h\vec{e}_i)} - \underbrace{\int_{[P,x]} \vec{F}}_{\varphi(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x))$$

Por (2), tenemos que el triángulo  $T$  de vértices  $P$ ,  $x$  y  $x+h\vec{e}_i$  es tal que

$$\int_{[P,x] + [x,x+h\vec{e}_i] + [x+h\vec{e}_i,P]} \vec{F} = 0$$

Luego se sigue entonces que:

$$\int_{[P, x+h\vec{e}_i]} \vec{F} - \int_{[P, x]} \vec{F} = \int_{[x, x+h\vec{e}_i]} \vec{F}$$

por tanto

$$\frac{1}{h} \int_{[x, x+h\vec{e}_i]} \vec{F} = \frac{1}{h} \int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(x + th\vec{e}_i), h\vec{e}_i \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \vec{F}_i(x + th\vec{e}_i) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \vec{F}_i(x)$$

donde  $\gamma(t) = x + th\vec{e}_i$  con  $t \in [0, 1]$ . Así obtenemos que (1)  $\iff$  (2).

- (3)  $\implies$  (2): Sea  $T \subset U$  un triángulo, y sea  $\sigma = \partial T$ :

$$\int_{\sigma} \vec{F} = \int_{(T, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = 0$$

□

### Ejemplo

Es importante que  $U$  sea convexo:

Sea  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}$  y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo vectorial dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) = (P, Q, 0)$$

Así tenemos el siguiente rotacional

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$$

El campo  $\vec{F}$  es por tanto irrotacional en  $U$ , pero  $\vec{F}$  no es conservativo. Consideremos la curva cerrada  $\gamma$  dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\langle \left( \frac{-\sin(t)}{1}, \frac{\cos(t)}{1}, 0 \right), (-\sin(t), \cos(t), 0) \right\rangle dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Demostrando así que  $\vec{F}$  no es conservativo.

### Ejemplo

El ejercicio de Nash:

Encontrar  $X \subset \mathbb{R}^3$  tal que si denotamos por

$$V = \{ \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo } C^1 \mid \text{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \}$$

$$W = \{ \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo } C^1 \mid \vec{F} = \nabla g \text{ para algún } g \}$$

obtenemos que  $\dim(V \setminus W) = 8$ .

**Observación 10.2.1** [Divergencia de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ ]

Sean  $U \subset \mathbb{R}^3$  un abierto y  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define la divergencia de  $\vec{F}$  como:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \langle \nabla, \vec{F} \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

**Teorema 10.2.2** [Teorema de la divergencia de Gauss]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y actotado, denotamos  $V = \bar{A}$ .

Supongamos ahora que  $\partial V = \partial A = S$  es una superficie cerrada, simple-regular a trozos, orientada con la normal  $\vec{n}$  exterior a  $V$ .

Sea ahora  $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $U \supset V$ . Entonces, si denotamos  $S = \partial V$ , se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}) = \int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{\partial V} \vec{F}$$

**Observación 10.2.2**

Aquí  $\partial V = S = \operatorname{Fr}(V)$  es la frontera topológica de  $V$ .

**Ejemplo**

Verifiquemos el teorema para el siguiente cilindro:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2\}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z)$$

Tenemos que  $\partial V = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ , donde:

$S_0$ : La base inferior del cilindro

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0\}$$

$S_1$ : La superficie exterior del cilindro

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 2\}$$

$S_2$ : La base superior del cilindro

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 2\}$$

Ahora tenemos que la divergencia es:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = y^2 + 2xy + 1$$

Entonces podemos empezar a integrar

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} = \int_V (y^2 + 2xy + 1) dx dy dz = \text{cambiando a cilíndricas} \int_{z=0}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r \cdot (r^2 + 1) dr d\theta dz =$$

$$= 4\pi \int_{r=0}^{r=1} r^3 + r dr = 4\pi \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} = 3\pi$$

Ahora aplicando el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\int_{(\partial V, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_0, \vec{n})} \vec{F} + \int_{(S_1, \vec{n})} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n})} \vec{F}$$

Para  $S_1$ :

$$S_1 \rightarrow \varphi \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2 \end{matrix} \equiv D$$

Donde la normal es:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

Ahora entonces la integral de la superficie  $S_1$  es, como tenemos orientacion positiva: Para  $S_0$ :

$$S_0 \rightarrow \varphi \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{matrix} \equiv E$$

Donde la normal es:

$$\vec{N}_{\varphi_0} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

Y así la integral sale, como tenemos orientacion negativa:

$$\int_{(S_0, \vec{n})} \vec{F} = - \int_E \langle \vec{F} \circ \varphi_0, \vec{N}_{\varphi_0} \rangle = - \int_{x^2+y^2 \leq 1} \langle (xy^2, x^2y, 0), (0, 0, 1) \rangle dx dy = 0$$

*Demostracion del teorema de la divergencia de Gauss para dominios proyectables.* Supongamos que  $V$  es  $z$ -proyectable, es decir:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \overline{D}, \quad z \in [h(x, y), g(x, y)]\}$$

Siendo  $\overline{D} = D \cup C$  como en el teorema de Green, y  $h, g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^1$  tales que, entonces:

$$\int_V \text{div}(\vec{F}) = \int_V \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \int_V \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \int_V \frac{\partial}{\partial z} F_3$$

Veamos, para  $F_3$  que:

$$\int_{\partial V} \vec{F} = \int_{\partial V} (F_1, 0, 0) + \int_{\partial V} (0, F_2, 0) + \int_{(\partial V, \vec{n})} (0, 0, F_3)$$

Siendo estas dos ultimas integrales iguales, es decir  $\int_{(\partial V, \vec{n})} (0, 0, F_3) = \int_V \frac{\partial}{\partial z} F_3$ .

Tenemos que  $\partial V = S_g \cup S_h \cup S_0$ , entonces las normales son:

$$\vec{N}_g = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right)$$

Siendo esta una normal exterior, al ser  $g(x, y)$  la parte superior de la superficie, y tener esta normal una componente positiva en  $z$ .

$$\vec{N}_h = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right)$$

Siendo esta una normal interior, al ser  $h(x, y)$  la parte inferior de la superficie, y tener esta normal una componente positiva en  $z$ .

En  $S_0$  la normal es  $\vec{n} = (n1, n2, 0)$  perpendicular a  $(0, 0, 1)$ , y su integral vale:

$$\int_{(S_0, \vec{n})} (0, 0, F_3) = \int_{(S_0, \vec{n})} \langle (0, 0, F_3), (n1, n2, 0) \rangle = 0$$

Asi juntando todo:

$$\int_{(\partial V, \vec{n})} (0, 0, F_3) = \int_{\overline{D}}$$

□