

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero  $Ciencias\ Matemáticas\ e$   $Ingenería\ Informática$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

# Contents

| 1  | Medida de Lebesgue  | <b>2</b> |
|----|---|----------|
|    | 1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$                   | 2        |
|    | 1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$                            | 5        |
|    | 1.3 Medibilidad de Funciones  | 11       |
|    | 1.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann | 27       |
|    | 1.5 Teoremas de Tonelli y Fubini                                    | 31       |
| 2  | Funciones integrables en varias variables                           | 39       |
| 3  | Teorema de Fubini   | 40       |
| 4  | Cambio de variables   | 41       |
| 5  | Funciones definidas por integrales                                  | 42       |
| 6  | Integrales de línea: campos escalares y vectoriales                 | 43       |
| 7  | Teorema de Green  | 44       |
| 8  | Superficies paramétricas  | 45       |
| 9  | Integrales de superficie  | 46       |
| 10 | Teorema de Stokes, Teorema de la divergencia de Gauss               | 47       |

# 1 Medida de Lebesgue

# 1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

### Definición 1.1.1 [n-Réctangulo]

Un n-rectángulo en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \ donde \ a_i \le b_i \ \forall i$$
 (1)

Definimos el volúmen de R como:

$$vol(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$
(2)

Consideramos también los n-rectángulos abiertos denotados por  $\mathring{R}$ , que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

#### Observación 1.1.1

Dado R n-rectángulo cerrado tal que  $R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ , podemos considerar para cada  $\delta > 0$  el n-rectángulo abierto  $R_{\delta} = \prod_{i=1}^{n} (a_i - \delta, b_i + \delta)$ . Se tiene que  $R \subset R_{\delta}$  y  $vol(R_{\delta}) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 2\delta) = vol(R) + 2n\delta$ . Por tanto:

$$vol(R) = \lim_{\delta \to 0} vol(R_{\delta})$$
 (3)

# Definición 1.1.2 [Medida Exterior de Lebesgue]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Definitions la medida exterior de A como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \ con \ R_i \ n\text{-rectángulos cerrados} \right\}$$
 (4)

Donde la ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de n-rectángulos que recubren A. A esta medida exterior la llamamos medida de Lebesque exterior.

#### Observación 1.1.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ 

1. 
$$m^*(A) = +\infty \iff \forall (R_j)_{j \in J} \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j \in J} R_j \text{ se tiene que } \sum_{j \in J} vol(R_j) = +\infty$$

2. 
$$m^*(A) = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists (R_j)_{j \in J} \ tal \ que \ A \subset \bigcup_{j \ inJ} R_j \ y \ \sum_{j \in J} vol(R_j) < \epsilon$$

3. 
$$m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists (R_j)_{j \in J} \ tal \ que \ A \subset \bigcup_{j \in J} R_j \ y \ \sum_{j \ inJ} vol(R_j) < \alpha + \epsilon$$

### Definición 1.1.3 [Conjunto Nulo]

Se dice que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto nulo si  $m^*(A) = 0$ .

# Ejemplo

- 1. Si R es un n-rectángulo degenerado, es decir, R tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces R es un conjunto nulo  $(m^*(R) = 0)$ .
- 2. En  $\mathbb{R}^2$ , sea el conjunto  $A=\{(x,x):0\leq x\leq 1\}$ . Dado  $\epsilon>0$  tomamos  $m\in\mathbb{N}$  tal que  $m>\frac{1}{\epsilon}$ . Consideramos  $A\subset\bigcup_{i=1}^m[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]\times[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]$ . Se tiene que  $m^*(A)\leq\sum_{i=1}^m\mathrm{vol}([\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]\times[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}])=\frac{1}{m^2}\cdot m=\frac{1}{m}<\epsilon$ . Por tanto,  $m^*(A)=0$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Teorema 1.1.1

Sea  $m^* \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$  una función que cumple:

- 1.  $m^*(\emptyset) = 0$
- 2.  $m^*(A) \leq m^*(B)$  si  $A \subset B$
- 3.  $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

Entonces  $m^*$  es una medida exterior en  $\mathbb{R}^n$ .

Demostración.

- 1.  $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_j \text{ n-rectángulos degenerados } \Longrightarrow m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \Longrightarrow m^*(\emptyset) = 0.$
- 2. Sea  $A \subset B$  y sea  $(R_j)_{j \in J}$  tal que  $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ . Entonces  $(R_j)_{j \in J}$  es un recubrimiento de A y por tanto  $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \operatorname{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$ .
- 3. Si  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\exists (R_{j,i})_{i=1}^{\infty}$  tal que  $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$ . Entonces  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$  y por tanto se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario, se tiene que  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$ .

### Corolario 1.1.1

La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

Demostración. Sea  $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset R^n$  tal que  $m^*(A_j) = 0$   $\forall j \in \mathbb{N}$  entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0$   $\implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$ .

### Lema 1.1.1

Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  entonces  $m^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} vol(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ con } Q_i \text{ n-rectángulos abiertos} \}$ 

Demostración. Denotamos por  $\beta$  el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea  $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$  una sucesión de rectángulos abiertos tal que  $A\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}Q_j$ . Tenemos entonces que  $A\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}Q_j\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\overline{Q}_j$  y puesto que  $\sum_{j\in\mathbb{N}}\operatorname{vol}(\overline{Q}_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\operatorname{vol}(Q_j)$ , se tiene que  $m^*(A)\leq\sum_{j\in\mathbb{N}}\operatorname{vol}(\overline{Q}_j)\leq\beta$ . Por tanto,  $m^*(A)\leq\beta$ . Veamos ahora la otra desigualdad  $\beta\leq m^*(A)$ . Si  $m^*(A)=+\infty$  entonces  $\beta=+\infty$  y no hay nada que demostrar.

Supongamos que  $m^*(A) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de n-rectángulos cerrados tal que  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) < m^*(A) + \epsilon$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$  consideramos  $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^j}$ . Escogiendo  $\delta_j > 0$  lo suficientemente pequeño, se tiene que  $\operatorname{vol}(R_j)_{\delta_j} < \operatorname{vol}(R_j) + \epsilon_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Nótese que aquí  $\operatorname{vol}(R_j)_{\delta_j}$  denota el volumen del n-rectángulo abierto  $R_j$  con lados aumentados en  $\delta_j$ . Entonces  $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j}$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j \in \mathbb{N}} (\operatorname{vol}(R_j) + \epsilon_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(A) + 2\epsilon$ . Por tanto,  $\beta \leq m^*(A)$ .

### Definición 1.1.4 [Partición de un Conjunto]

Una partición del intervalo [a,b] es una colección numerable de puntos  $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ . Dado un n-rectángulo  $R \subset \mathbb{R}^n$ , una partición  $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$  de R es una colección particiones  $P_i$  de  $[a_i, b_i]$  para cada i = 1, 2, ..., n siendo  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

Los subrectángulos de P son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \prod_{j=1}^n [t_{i_j}^j, t_{i_j+1}^j]$$
(5)

Denotamos  $S \in P$  para indicar que S es un subrectángulo de P.

#### Lema 1.1.2

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un n-rectángulo y P una partición de R. Entonces:

- 1.  $R = \bigcup_{S \in P} S$
- 2. Si  $S, S' \in P$  y  $S \neq S'$  entonces  $S \cap S' = \emptyset$
- 3.  $vol(R) = \sum_{S \in P} vol(S)$

### Proposición 1.1.1

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un n-rectángulo entonces  $m^*(R) = vol(R)$ .

Demostración.

" ⊂"

Sea  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  con  $R_1 = R$  y  $R_j$  degenerados para j > 1. Entonces:

$$m^*(R) \le \sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) = \operatorname{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \operatorname{vol}(R_j) = \operatorname{vol}(R_1) = \operatorname{vol}(R).$$

 $"\supset"$ 

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de n-rectángulos abiertos tal que  $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Sabemos que R es compacto al ser cerrado y acotado y, por tanto, al ser  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$  un recubrimiento abierto de R, existe un subrecubrimiento finito  $\{Q_1, Q_2, ..., Q_m\}$  de R. Entonces  $R \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{Q_i}$ . Consideramos  $R_j = R \cap \overline{Q_j}$  para j = 1, 2, ..., m. Tenemos entonces que  $R = \bigcup_{j=1}^m \overline{Q_j}$  y además prolongando los lados podemos obtener una partición P de R tal que cada subrectángulo de P está contenido el algún  $R_j$  para  $1 \leq j \leq m$ . Por tanto,  $\operatorname{vol}(R) = \sum_{S \in P} \operatorname{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^m \operatorname{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^m \operatorname{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(R) \geq \operatorname{vol}(R)$ .

# 1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

**Notación:** Para  $A \subset \mathbb{R}^n$  denotamos por  $A^c$  al complementario de A en  $\mathbb{R}^n$ .

### Definición 1.2.1 [Conjunto Medible]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue si para todo  $R \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c)$$
(6)

# Proposición 1.2.1

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  entonces son equivalentes:

- 1. A es medible en el sentido de Lebesgue.
- 2.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .
- 3.  $\forall E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto se tiene que  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

Demostración.

 $"2 \implies 3"$ 

Trivial

" $3 \implies 2$ "

 $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A \cap A^c) \le m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ 

"2  $\Longrightarrow$  1"

Inmediato, tomando E = R.

 $"1 \implies 3"$ 

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto, si  $m^*(E) = +\infty$  entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de n-rectángulos cerrados tal que  $E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Entonces  $E \cap A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A$  y  $E \cap A^c \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A^c$ . Por tanto,  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Por tanto,  $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

# **Definición 1.2.2** $[\sigma$ -Álgebra]

Sea X un conjunto  $y \in \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos de X. Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra si:

- 1.  $X \in \mathcal{A}$
- 2. Si  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
- 3.  $\forall (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \text{ se tiene que } \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

### Definición 1.2.3 [Medida]

Sea X un conjunto y  $A \subset \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra, entonces una medida en X es una función  $\mu : A \to [0, +\infty]$  tal que:

1. 
$$\mu(\emptyset) = 0$$

2. Si  $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:

$$\mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$$

### **Teorema 1.2.1** [Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ ]

La familia M de todos los conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $m=m^* \upharpoonright_M$  es una medida numerablemente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

### Lema 1.2.1

 $\mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E) = m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + m^*(\emptyset) = m^*(E) + 0 = m^*(E)$ .

#### Lema 1.2.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A^c$  es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A) = m^*(E)$ 

Con los dos lemas anteriores obtenemos como colorario que  $\emptyset$  es medible en el sentido de Lebesgue.

#### Lema 1.2.3

Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son medibles en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Observemos primero que  $A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$  luego entonces tenemos que  $m^*(A \cup B) \le m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$ . Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto. Entonces  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B) = m^*(E \cap A \cap B$ 

#### Lema 1.2.4

Sea  $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y además  $m^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}}m^*(A_j)$ .

Demostración. Definimos la sucesión creciente de conjuntos  $B_k = A_1 \cup ... \cup A_k$ . Entonces  $B_k$  es medible en el sentido de Lebesgue por el lema anterior. Sean  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  y  $E \in \mathbb{R}^n$  tenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k^c) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1}) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1}) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k) = m^*(E \cap B_k$$

Reiterando el proceso obtenemos  $m^*(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)$ . Por lo tanto,  $m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_k^c) = \left(\sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)\right) + m^*(E \cap B_k^c) \ge \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c)$ . Se sigue entonces  $m^*(E) \ge \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \ge m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \ge m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$  Luego B es medible.

Tomando E=B en la desigualdad anterior obtenemos  $m^*(B) \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(B\cap A_j) + m^*(B\cap B^c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(B\cap A_j)$ . Por otro lado,  $m^*(B) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(B\cap A_j)$  por definición de medida exterior. Por tanto,  $m^*(B) = \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(A_j) \implies m^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(A_j)$ .

### Lema 1.2.5

La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea  $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Considermos:

$$A_1 = B_1$$

$$A_2 = B_2 \cap B_1^c$$

$$A_3 = B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c$$

$$\vdots$$

$$A_j = B_j \cap B_{j-1}^c \cap \ldots \cap B_1^c$$

Observemos que  $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}B_j$  y que para todo  $j\in\mathbb{N},$   $A_j$  es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto,  $A_j$  es medible. Además,  $\forall i,j\in\mathbb{N}$  con  $i\neq j,$   $A_i\cap A_j=\emptyset$ . Por el lema anterior,  $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j$  es medible  $\Longrightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}}B_j$  es medible.  $\square$ 

#### Proposición 1.2.2

Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesque.

Demostración. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  nulo, entonces  $m^*(A) = 0$ .  $\forall E \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $E \cap A \subset A \implies 0 \le m^*(E \cap A) \le m^*(A) = 0 \implies m^*(E \cap A) = 0$ . Análogamente,  $E \cap A^c \subset E \implies 0 \le m^*(E \cap A^c) \le m^*(E) \implies m^*(E \cap A^c) = 0$ . Por tanto,  $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \le m^*(E)$ . Para la otra desigualdad,  $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \implies m^*(E) \le m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ . Y por tanto obtenemos la igualdad  $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ .

#### Definición 1.2.4

Se dice que una propiedad se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.

### Proposición 1.2.3

Todo n-rectángulo cerrado  $R \in \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Dado  $R \subset \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que  $\forall Q \in \mathbb{R}^n$  n-rectángulo cerrado se tiene que  $\operatorname{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ . Consideramos el n-rectángulo  $Q_0 = Q \cap R$ . Nótese que  $Q \cap R^c$  es unión finita de n-rectángulos  $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ . Entonces  $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$  forman una partición de Q. Luego  $\operatorname{vol}(Q) = \sum_{i=0}^m \operatorname{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^m m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$ .

#### Observación 1.2.1

En  $\mathbb{R}^n$  los rectángulos abiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.

### Definición 1.2.5 [n-Cubo]

Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \tag{7}$$

Análogamente se pueden definir los cubos n-dimensionales semi-abiertos.

#### Observación 1.2.2

Denotaremos la norma del supremo en  $\mathbb{R}^n$  como:

$$||x||_{\infty} = \sup_{i=1}^{n} \{|x_i|\} \ para \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$
 (8)

Llamaremos bola abierta de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio r > 0 al conjunto:

$$B_{\infty}(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n : ||y - x||_{\infty} < r \} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \ldots \times (x_n - r, x_n + r)$$
 (9)

Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio r > 0 al conjunto:

$$\overline{B}_{\infty}(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n : ||y - x||_{\infty} \le r \} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r]$$
 (10)

#### Teorema 1.2.2

Sea  $G \in \mathbb{R}^n$  abierto entonces se tiene:

- 1. G es unión numerable de n-cubos cerrados.
- 2. G es unión numerable de n-cubos abiertos.

Demostración. Consideremos la familia de n-cubos  $\mathcal{B} = \{\overline{B}_{\infty}(q,r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B}_{\infty}(q,r) \subset G\}$ . Veamos que  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ . Dado que  $B \in G$   $\forall B \in \mathcal{B}$  entonces es inmediato ver que  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset G$ . Por ser G abierto,  $\exists \delta > 0$  tal que  $B_{\infty}(x,\delta) \subset G$ . Sea  $r \in \mathbb{Q}$  con  $0 < r < \frac{\delta}{2}$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , sabemos que  $\exists q \in \mathbb{Q}^n$  tal que  $||x-q||_{\infty} < r$ . Veamos entonces que  $x \in B_{\infty}(q,r) \subset B_{\infty}(x,\delta) \subset G$ . Dado  $y \in \mathbb{R}^n$  con  $||y-q||_{\infty} < r$  se sigue:

$$||y - x||_{\infty} \le ||y - q||_{\infty} + ||q - x||_{\infty} < r + r = 2r < \delta$$

Por tanto  $y \in B_{\infty}(x, \delta) \implies x \in \overline{B}_{\infty}(q, r) \subset G$ . Luego  $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .

Nótese que numerabilidad de la familia  $\mathcal{B}$  es inmediata por la numerabilidad de  $\mathbb{Q}^n$  que, a su vez, es numerable por ser  $\mathbb{Q}$  numerable.

La segunda parte del teorema es análoga a la primera.

#### Corolario 1.2.1

### Teorema 1.2.3 [Regularidad de la Medida]

Sea  $E \in \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

- 1. E es medible en el sentido de Lebesgue.
- 2.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists G \in \mathbb{R}^n \text{ abserto tal que } E \subset G \text{ y } m^*(G \setminus E) < \epsilon.$
- 3.  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists F \in \mathbb{R}^n \ cerrado \ tal \ que \ F \subset E \ y \ m^*(E \setminus F) < \epsilon$ .
- 4.  $\forall \epsilon \ existen \ F \ cerrado \ y \ G \ abierto \ tales \ que \ F \subset E \subset G \ y \ m^*(G \setminus F) < \epsilon$ .

### Demostración.

"1  $\implies$  2" Distinción de casos:

- 1. Supongamos que  $m^*(E) < +\infty$ : Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición de medida exterior,  $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de n-rectángulos abiertos tales que  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$  y  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$ . Considerando el abierto  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j)$ , se tiene que G es medible por el colorario anterior y  $m^*(G) = m^*(E \cap G) + m^*(E \cap G^c) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$ . Por tanto,  $m^*(G \setminus E) = m^*(G) m^*(E) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) m^*(E) < \epsilon$ .
- 2. Supongamos que  $m^*(E) = +\infty$ :  $\forall k \in \mathbb{N}$  sea  $E_k = E \cap [-k, k]^n$ , que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además  $m^*(E_k) < +\infty$  por ser  $E_k$  acotado, y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  existe  $G_k$  abierto tal que  $E_k \subset G_k$  y  $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$ . Entonces  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$  abierto y  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$  por lo que  $m^*(G \setminus E) \le m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k)) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$ .

"2  $\Longrightarrow$  1"

 $\forall j \in \mathbb{N}$  tomando  $\epsilon = \frac{1}{j}$  entonces  $\exists G_j$  abierto tal que  $E \subset G_j$  y  $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . Entonces considerando  $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  que es medible y abierto se tiene que  $E \subset B$ . Luego  $B \setminus E \subset G_j \setminus E$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$ . En consecuencia  $m^*(B \setminus E) = 0 \implies B \setminus E$  es medible.

Por otro lado,  $B = E \cup (B \setminus E)$  o que es lo mismo  $E = B \setminus (B \setminus E)$ . Tanto B como  $(B \setminus E)$  son medibles, luego E es medible.

Observación: Además,  $E = B \setminus Z$ , donde B es intersección numerable de abiertos o Z es un conjunto nulo. "1  $\implies$  3"

Como E es medible entonces  $E^c$  también los es. Por (2), dado  $\epsilon > 0$  existe G abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,  $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ .

"1  $\implies$  3"

Como E es medible entonces tenemos que  $E^c$  también es medible, por lo que, dado  $\epsilon > 0$  por (2)  $\exists G$ -abierto tal que  $E^c \subset G$  y  $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ . Entonces  $F = G^c$  es cerrado y  $F \subset E$ . Además,  $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$ .

"3  $\implies$  1"

 $\forall j \in \mathbb{N} \ \exists F_j \ \text{cerrado tal que} \ F_j \subset E, \ m(E \setminus F_j) < 1/j. \ \text{Sea} \ A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \ \text{conjunto medible y} \ A \subset E.$  Además,  $m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < 1/j \ \forall j \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $E = A \cup (E \setminus A) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \cup (E \setminus A)$  Entonces dado que  $E \setminus A$  es un conjunto medible por ser nulo y  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  es medible por ser unión numerable de conjuntos cerrados, entonces E es medible.

# **Definición 1.2.6** [ $\sigma$ -Álgebra de Borel]

La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  (o equivalentemente, la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los cerrados de  $\mathbb{R}^n$ ). Los conjuntos de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.

Decimos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es  $G_\delta$  si A es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  es  $F_\sigma$  si A es unión numerable de cerrados.

#### Corolario 1.2.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces son equivalentes:

- 1. E es medible en el sentido de Lebesgue.
- 2.  $E = A \setminus N$  con A siendo  $G_{\delta}$  y N un conjunto nulo.
- 3.  $E = B \cup N$  con B siendo  $F_{\sigma}$  y N un conjunto nulo.

#### Lema 1.2.6

Sea  $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$  familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces  $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$  es medible en el sentido de Lebesgue y  $m(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \lim_{j\to\infty} m(A_j)$ .

Demostración. Sea  $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$  una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Considermos:

$$A_1 = B_1$$

$$A_2 = B_2 \cap B_1^c$$

$$A_3 = B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c$$

$$\vdots$$

$$A_j = B_j \cap B_{j-1}^c \cap \ldots \cap B_1^c$$

De esta manera obtenemos que  $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$  y que  $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$  es una sucesión disjunta de conjuntos Entonces  $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)=m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j)=\sum_{j=1}^{\infty}=\lim_{k\to\infty}m(A_k)$  Dado que  $m^*(A_j)=m(B_1)+m(B_2)+\ldots+m(B_j)$   $\forall j>=1$ 

### Corolario 1.2.3

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible entonces:

- 1.  $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abserto } y E \subset G\}.$
- 2.  $m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto } y \ K \subset E\}.$

Demostración.  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k : E_k = E \cap [-k, k]^n \ \forall k \in \mathbb{N}$  Entonces  $(E_k)_k \in \mathbb{N}$  es una sucesión creciente de conjuntos medibles y por el lema anterior tenemos que  $m(E) = \lim_{k \to \infty} m(E_k)$  Además,  $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists F_k \subset E_k$  cerrado tal que  $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$  Entonces como  $F_k$  es un conjunto cerrado y acotado, tenemos que el conjunto es compacto. Por tanto  $m(E_k) = m(E_k \setminus F_k) + m(F_k) \ge m(F_k) + 1/k$  y por tanto  $m(E) = \lim_{k \to \infty} m(F_k)$  y finalmente obtenemos que  $m(E) = \sup\{m(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$ 

### Definición 1.2.7 [Cubo Diádico]

Se dice que un cubo en  $\mathbb{R}^n$  es diádico si sus lados miden  $2^{-m}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Es decir, si el rectángulo Q es de la forma:

$$Q = \left\lceil \frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right\rceil \times \dots \times \left\lceil \frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right\rceil,$$

 $con \ m \in \mathbb{Z}(nivel \ de \ escala \ u \ orden) \ y \ k_1, k_2, \dots k_n \in \mathbb{Z}$ 

#### Teorema 1.2.4

Todo conjunto abierto U de  $\mathbb{R}^n$  es unión numerable y disjunta n-cubos semiabiertos, que son cubos diádicos.

Demostración. Denotemos por  $\mathcal{F}$  la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

con  $k_i \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $\mathcal{Q}_1$  la familia de todos los cubos cerrados Q de la forma  $[k_1, k_1+1] \times \cdots \times [k_n, k_n+1]$ , donde los  $k_i \in \mathbb{Z}$ , y tales que  $Q \subset U$ . Supuesto definida  $\mathcal{Q}_m$ , sea  $\mathcal{Q}_{m+1}$  la familia de todos los cubos Q de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

donde  $k_i \in \mathbb{Z}$ , tales que no están contenidos en ningún cubo  $Q' \in \mathcal{Q}_j$  para  $j \leq m$ , y tales que  $Q \subset U$ . Por inducción queda definida  $\mathcal{Q}_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , y ponemos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Es obvio por construcción que si  $Q, Q' \in \mathcal{Q}$  y  $Q \neq Q'$ , entonces Q y Q' tienen interiores disjuntos. También es claro que que  $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \subset U$ . Veamos que de hecho

$$U = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Dado  $x \in U$ , usando que U es abierto y que el conjunto  $\{k/2^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , es fácil ver que existe algún cubo  $Q_x \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in Q_x$  y  $Q \subset U$ . El lado de  $Q_x$  mide  $2^{-m_x}$  para algún  $m_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Si  $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$  ya hemos terminado. En otro caso, por definición de  $\mathcal{Q}_{m_x}$ , existe algún  $j < m_x$  tal que  $Q_x$  está contenido en algún cubo  $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$ , y por tanto x pertenece a este cubo. En cualquier caso se ve que  $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ .

#### 1.3 Medibilidad de Funciones

### **Definición 1.3.1** [Espacio Medible]

Un espacio medible es un par  $(X, \Sigma)$  donde X es un conjunto y  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de X.

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$ , donde  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto medible y  $M|_E$  es la familia de subconjuntos medibles de E.
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto boreliano y  $B|_A$  es la familia de subconjuntos borelianos de A.

### Definición 1.3.2 [Función Medible]

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible. Una función  $f: X \to [-\infty, +\infty]$  es medible si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es un conjunto medible.

### Proposición 1.3.1

Sea  $(X,\Sigma)$  un espacio medible  $y : X \to [-\infty, +\infty]$ , entonces son equivalentes

- 1. f es medible.
- 2. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  es un conjunto medible.
- 3. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  es un conjunto medible.
- 4. Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  es un conjunto medible.
- 5. Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.
- 6. Para todo  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, los conjuntos  $f^{-1}(G)$ ,  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$   $y \{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son conjuntos medibles.

Demostración. Teniendo en cuenta que  $X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \ge \alpha\}$  dado que las  $\sigma$ -álgebras son cerradas bajo complementarios, obtenemos que (1)  $\iff$  (2) y (3)  $\iff$  (4). Veamos ahora la relación (1)  $\iff$  (4):

- (1)  $\Longrightarrow$  (4): Podemos tomar el conjunto  $\{x \in X : f(x) \le \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}$  que es una intersección numerable de conjuntos medibles por (1). Por tanto al tomar el limite cuando  $k \to \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) \le \alpha\}$  es medible.
- (4)  $\Longrightarrow$  (1): Equivalentemente al apartado anterior podemos obtener que el conjunto  $\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \le \alpha \frac{1}{k}\}$  es medible por (4). Por tanto, también al tomar el límite cuando  $k \to \infty$  obtenemos que  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  es medible.

De forma análoga a esta equivalencia podemos obtener que  $(2) \iff (3)$ . Y también las equivalencias de  $(5) \iff (6)$  son inmediatas, pues podemos tomar los conjuntos acotados  $x \in X : \alpha \le f(x) < \beta = x \in X : f(x) \ge \alpha \cap x \in X : f(x) < \beta$  los cuales son conjuntos medibles por los apartados anteriores. De forma similar podemos obtener que el conjunto  $x \in X : f(x) = +\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\}$  es medible por los apartados anteriores. De forma análoga se demuestra el caso de (6). Por último veamos la equivalencia de  $(6) \iff (7)$ :

1. (7)  $\Longrightarrow$  (6): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos tomarlo como  $G = (\alpha, \beta)$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\} = \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\}$  y asimismo, los conjuntos  $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$  y  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  son medibles por las equivalencias anteriores.

2. (6)  $\Longrightarrow$  (7): Dado un conjunto abierto  $G \subset \mathbb{R}$  podemos reescribir G como  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$  donde  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  es un conjunto abierto. Por tanto, el conjunto  $f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\alpha_j, \beta_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\}$  es medible por las equivalencias anteriores.

#### Corolario 1.3.1

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f: E \to \mathbb{R}$  una función continua, entonces f es medible.

# Proposición 1.3.2

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$  funciones medibles y  $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  una función continua, entonces la función  $\Phi \circ (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}$  es medible.

Demostración. Sean  $(f_1, f_2, \ldots f_n): X \to \mathbb{R} y \Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  funciones medibles y continua respectivamente. Denotemos por  $h = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \circ \Phi: X \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$  y sea  $G \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto, entonces, denotemos por  $U = \Phi^{-1}(G)$  al conjuto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces sea  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesión de rectángulos n-dimensionales tales que  $(R_j) = \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^j.\beta_i^j) \forall j \in \mathbb{N} \iff \forall j \in \mathbb{N} f^{-1}(R_j) = \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^j.\beta_i^j)$  es medible. Por tanto, la funcion h es medible.

### Corolario 1.3.2

Sean  $(X, \Sigma)$  espacio medible y f, g :  $X \to \mathbb{R}$  funciones medibles, entonces f + g  $f \circ g$ ,  $max\{f, g\}$ ,  $min\{f, g\}$ ,  $f^+ = max\{f, 0\}$ ,  $f^- = min\{f, 0\}$  son todo funciones medibles.

### Observación 1.3.1

 $f = f^+ - f^- y |f| = f^+ + f^-.$ 

#### Teorema 1.3.1

Sea  $(X,\Sigma)$  espacio medible  $y(f_j)_{j\in\mathbb{N}}:X\to [+\infty,-\infty]$  una sucesión de funciones medibles, entonces:

- 1.  $\sup_{j\in\mathbb{N}}\{f_j\}$  es una función medible.
- 2.  $\inf_{j\in\mathbb{N}}\{f_j\}$  es una función medible.
- 3.  $\limsup_{j\to\infty} \{f_j\}$  es una función medible.
- 4.  $\liminf_{j\to\infty} \{f_j\}$  es una función medible.
- 5.  $\lim_{j\to\infty} f_j = f$  es una función medible.

Demostración. 1. Denotemos  $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : h(x) > \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha \iff \exists j \in \mathbb{N} : f_j(x) > \alpha \Rightarrow x \in X : h(x) > \alpha = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

- 2. Denotemos  $g(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j$  y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  queremos ver que  $x \in X : g(x) < \alpha$  es un conjunto medible. Entonces,  $\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j \geq \alpha \iff \forall j \in \mathbb{N} : f_j(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in X : g(x) \geq \alpha = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} x \in X : f_j \geq \alpha$  que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.
- 3. Recordemos que  $\limsup_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty} (\sup_{k\geq j} f_k) = \lim_{j\to\infty} \sup f_j, f_{j+1}, \ldots$  Entonces como el límite de una sucesión decreciente y acotada siempre existe tenemos que  $\lim_{j\to\infty} \sup_{k\geq j} f_k = \inf_{j\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
- 4. Recordemos que  $\liminf_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty} (\inf_{k\geq j} f_k) = \lim_{j\to\infty} \inf f_j, f_{j+1}, \ldots = \sup_{j\in\mathbb{N}} (\inf_{k\geq j} f_k)$  que es medible por ser una función continua.
- 5. Si  $\lim_{j\to\infty} f_j = f$  (puntualmente) entonces  $\lim_{j\to\infty} f_j = \lim\sup_{j\to\infty} f_j = \lim\inf_{j\to\infty} f_j = f$ . Entones por los apartados anteriores obtenemos que f es una función medible.

### Proposición 1.3.3

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \to [+\infty, -\infty]$  funciones medibles-Lebesgue tales que f = g en casi todo punto. Entones g es medible-Lebesgue.

Demostración. Dado que f = g en casi todo punto, entonces  $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$  es un conjunto de medida nula. Entonces, dado un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : f(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible dado que  $\{x \in Z : f(x) < \alpha\}$  es medible por ser un conjunto de medida nula y  $\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$  es medible por ser g medible. Por tanto, g es medible.

#### Corolario 1.3.3

Sea  $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}: \mathbb{R}^n \to [+\infty, -\infty]$  sucesión de funciones medibles tales que  $f_j \to f$  en casi todo punto, entonces f es medible.

 $Demostración. \text{ Sea } Z = \{x \in X : f_j(x) \not\rightarrow f(x)\} \text{ el cual tiene medida nula por hipótesis. Entones definimos la función } g(x) = \begin{cases} \lim_{j \to \infty} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x) \text{ en casi todo punto. Asimismo podemos definir la sucesión de funciones } g_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases} \text{ que converge a } g \text{ puntualmente, por tanto, por la proposición anterior tenemos que } g \text{ es medible } \Rightarrow f \text{ es medible.}$ 

### **Definición 1.3.3** [Función Característica]

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible. Definimos la función característica de un conjunto  $E \in \Sigma$  como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in E^c \end{cases}$$

### Observación 1.3.2

 $\chi_E \ es \ medible \iff E \in \Sigma$ 

Demostración. Sea  $G \subset \mathbb{R}$  abierto, podemos definir el conjunto

$$\chi_E^{-1}(G) = \{ x \in X : \chi_E(x) \in G \} = \begin{cases} X & 0 \in G & 1 \in G \\ E & 0 \notin G & 1 \in G \\ E^c & 0 \in G & 1 \notin G \\ \emptyset & 0 \notin G & 1 \notin G \end{cases}$$

por tanto,  $\chi_E$  es medible  $\iff E \in \Sigma$ .

#### Observación 1.3.3

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f: E \to [-\infty, +\infty]$ . Entonces son equivalentes:

- 1.  $f: E \to [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.
- 2.  $f \circ \chi_E : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$  es medible-Lebesgue.

Demostración.

- $(1 \implies 2): E^c$  es medible  $y \{x \in E: f(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in \mathbb{R}^n: f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$  es medible.
- $(2 \implies 1): \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$  es medible  $\implies \{x \in E : f(x) > \alpha\}$  es medible.

#### Definición 1.3.4

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible  $y \ f : X \to [0, +\infty]$ . Se dice que f es una función simple si toma un valor finito de valores. Es decir si:  $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty]$ . Además denotamos a  $f^{-1}(\alpha_i) = E_i$   $y \ f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ . Asimismo obtenemos que  $X = bigcup_{i=1}^n E_i$ -unión disjunta de conjuntos. De este modo podemos decir que f es una combinación lineal finita de funciones simples.

#### Observación 1.3.4

 $f \ es \ medible \iff \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \ es \ medible.$ 

#### Teorema 1.3.2

Sea  $(X, \Sigma)$  espacio medible  $y f: X \to [0, +\infty]$  una función medible. Entonces existen funciones simples  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que:

- $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f$ .
- $\forall x \in X$   $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ .
- Si además, f acotada  $\implies \lim_{n\to\infty} f_n = f$  en casi todo punto.

Demostración.  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n2^n$  definimos:  $E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]) = \{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\}$  y  $F_n = f^{-1}([n, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > n\}$ . Los cuales son conjuntos medibles por ser preimágenes de conjuntos medibles. Sea entonces  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} X_{E_{n,i}} + nX_{F_n}$ , la cual es una sucesión de funcion simples. Analicemos la convergencia (puntual)  $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ :

- Si  $f(x) = +\infty \implies f(x) \ge m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies f_n(x) = m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = +\infty.$
- Si  $f(x) < +\infty \implies \exists m(x) \in \mathbb{N} : 0 \le f(x) \le m(x) \implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{k-1}{2^m} \le f(x) \le \frac{k}{2^m} \text{ y } f_n = \frac{k-1}{2^m} \quad \forall n \ge m \implies 0 \le |f(x) f_n(x)| \le \frac{1}{2^m} \quad \forall n \ge m \implies \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$  Además, cuando  $\exists M \in \mathbb{N} : f(x) \le M \quad \forall x \in X \implies 0 \le f(x) f_n(x) \le \frac{1}{2^m} \quad \forall n \ge m \implies \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$  (uniformemente).

Ahora veamos que  $f_n(x)$  es creciente:  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & x \in E_{n,i} \\ n & x \in F_n \end{cases} \implies f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & x \in E_{n,i} \\ n+1 & x \in F_{n+1} \end{cases} \implies f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \text{Dado que } 1 \le i \le n2^n \implies 1 \le i \le 2^{n+1} \implies f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \Box$ 

# **Definición 1.3.5** [Integral de una función simple]

Consideremos en  $\mathbb{R}^n$  la  $\sigma$ -álgbra M de los conjuntos medibles y la medida-Lebesgue m. Sea  $s: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$  una función simple, medible, no negativa y con representación canónica  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  donde  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m A_i$ -unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces definimos la integral de s como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s \, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$$

#### Observación 1.3.5

 $\int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0$ 

Demostración. Dado  $E \subset \mathbb{R}^n$  mdible definimos  $\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \circ X_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap E)$ .

#### Lema 1.3.1

Sea  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$  unión disjunta de conjuntos medibles. Sea  $s : \mathbb{R}^{\ltimes} \to [0, +\infty]$  una función simple, medible y no negativa. Entonces  $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s$ .

Demostración. Supongamos que

$$s = \sum_{i=1}^{m} d_i \cdot \chi_{A_i}$$

(forma canónica), entonces

$$s(\mathbb{R}^n) = \{d_1, \dots, d_m\}.$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $B_k \in \{d_1, \ldots, d_m\}$ . Definimos para cada  $j = 1, \ldots, m$  el conjunto

$$Y_j = \{k \in \mathbb{N} : \beta_k = d_j\}.$$

Así,  $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{m} Y_i$  es una unión disjunta. Además,

$$s^{-1}(\alpha_j) = A_j = \bigcup_{k \in Y_j} X_k,$$

una unión disjunta.

Entonces, usando la propiedad de la medida en una unión disjunta, tenemos

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k \in Y_j} X_k\right) = \sum_{k \in Y_j} m(X_k).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k).$$

Intercambiando el orden de la suma,

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k) = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k \in Y_i} \beta_k \cdot m(X_k).$$

#### Corolario 1.3.4

Sean  $s,t:\mathbb{R}^n\to [0,+\infty]$  functiones simples, medibles y no negativas. Entonces:  $\int_{\mathbb{R}^n} (s+t) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$ .

Demostración. Sea  $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$  y  $t = \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot \chi_{B_j}$ . Dado que  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^k (A_i \cap B_j)$ , donde la unión es disjunta y los conjuntos  $A_i, B_j$  son medibles, se tiene que en  $A_i \cap B_j$ :  $s+t = \alpha_i + \beta_j$ . Aplicando el lema de integración para funciones simples:  $\int_{\mathbb{R}^n} (s+t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^k \beta_j m(A_i \cap B_j) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t \text{ (por el lema)}.$ 

#### Definición 1.3.6

Sea  $f: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$  una función medible. Definimos la integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible  $y f : E \to [0, +\infty)$ , definimos:

$$\int_{E} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n}} s \cdot \chi_{E} \mid s \text{ es simple, medible } y \text{ } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_{E} \right\}.$$

### Proposición 1.3.4

Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

- 1.  $si \ 0 \le f \le g \ y \ E \subset F \ entonces \int_E f \le \int_F g$ .
- 2.  $si\ f, g, \ge \Longrightarrow \int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$ .
- 3.  $si \ c \geq 0, f \geq 0 \implies \int_E cf = c \int_E f$ .

4. 
$$si\ m(E) = 0 \implies \int_E f = 0$$
. (Incluso  $si\ f = +\infty$ )

5. 
$$si f|_E = 0 \implies \int_E f = 0$$
. (Incluso  $si m(E) = +\infty$ )

6. 
$$si\ A \subset Byf \ge 0 \implies \int_A f \le \int_B f$$
.

7. si A, B son conjuntos medibles y disjuntos y  $f \ge 0 \implies \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ .

8. 
$$si\ f = g\ en\ casi\ todo\ punto\ de\ E \implies \int_E f = \int_E g$$

Demostración. 1. Si  $f = c \cdot 0$ , entonces es trivial.

Si c > 0, tomamos  $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \le s \le f$ .

Entonces,  $c \cdot s = \sum_{i=1}^{m} c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ , con  $0 \le c \cdot s \le c \cdot f$ .

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

2. Si m(E) = 0, entonces para toda s simple y medible tal que  $0 \le s \le f$ , se tiene que

$$s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}.$$

De donde,

$$\int_{E} s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i} \cdot m(A_{i} \cap E) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_E f = \sup\left\{\int_E s\right\} = 0.$$

3. Para toda s simple con  $0 \le s \le f$ , se tiene que s(x) = 0 para casi todo  $x \in E$ . Luego,

$$f \cdot \chi_E = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \int_E s = 0, \quad \forall s.$$

Tomando el supremo,

$$\sup\left\{ \int_{E} s \right\} = 0 = \int_{E} f.$$

4. Si f es simple y medible con  $0 \le s \le f$ , se tiene que

si 
$$A \subset B$$
,  $\chi_A \leq \chi_B \Rightarrow 0 \leq s \cdot \chi_B$ .

5. Si A, B son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B.$$

Así,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B).$$

Por linealidad de la integral,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

Por lo tanto,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{A} f + \int_{B} f.$$

8. Si  $E = A \cup Z$ , con A y Z disjuntos y tales que  $x \in E \Rightarrow f(x) = g(x)$ , entonces

$$Z = \{ x \in E \mid f(x) \neq g(x) \}.$$

Si m(Z) = 0, se tiene que

$$\int_{E} f = \int_{A} f + \int_{Z} f = \int_{A} g + 0 = \int_{A} g.$$

### Teorema 1.3.3 [Convergencia Monótona]

Sea  $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty]$  una sucesión de funciones medibles tales que:

1.  $f_1 \le f_2 \le \dots$  (en  $\mathbb{R}^n$ )

2.  $\lim_{k\to\infty} f_k = f$  (puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ )

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Demostración. La sucesión  $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$  es monótona creciente en  $[0,+\infty)$ . Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k \to \infty} f_k, \in [0, +\infty].$$

Dado que  $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \le \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.// Sea s una función simple y medible en  $\mathbb{R}^n$  con  $0 \le s \le f$ , y fijemos un  $c \in (0,1)$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$ , definimos la sucesión de conjuntos  $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \ge c \cdot s(x)\}$ . Esta sucesión es medible (debido a que tanto  $f_k$  como s son medibles) y es creciente (debido a que  $f_k \le f_{k+1}$  y  $c \cdot s \le c \cdot f \le f$ ). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f_k(x) = 0, \Rightarrow s(x) = 0 \Rightarrow 0 = f_k(x) \Rightarrow 0 = s(x) \Rightarrow x \in E_k \quad \forall k. \\ \text{Si } f_k(x) > 0, \Rightarrow c \cdot s(x) \leq f_k(x) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad c \cdot s(x) \leq f_k(x). \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k \to \infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que  $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $s^-1(\alpha_j) = A_j$  tenemos:

$$m(A_j) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)) = \lim_{k \to \infty} m(E_k \cap A_j).$$

**Entonces:** 

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k \to \infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k \to \infty} \int_{E_k} s ds$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \ge \int_{E_k} f_k \ge \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando  $k \to \infty$ , obtenemos que:

$$l \ge c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite  $c \to 1$  obtenemos que:

$$l \ge \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que s es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad  $\forall s$  función simple, medible y no-negativa (por ser  $0 \le s \le f$ ). Por tanto, obtenemos la ansiada desigualdad:  $l \ge \int_{\mathbb{R}^n} f$ .

### Teorema 1.3.4

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible  $y \ f_k : E \to [0, +\infty]$  sucesión de funcion medibles  $y \ f : E \to [0, +\infty]$  tales que:

- 1.  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$  (en casi todo punto de E)
- 2.  $\lim_{k\to\infty} f_k = f$  (en casi todo punto de E)

Demostración. Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que m(N) = 0. Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E \setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \ \text{y} \ \hat{f} = f \cdot \chi_{E \setminus N}$$

Podemos aplicar el \*\*Teorema de la Convergencia Monótona\*\*, lo que nos permite concluir que: 1.  $\hat{f}_k \to f$  puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_{E} f = \int_{E \setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k \to \infty} \int_{E} f_k.$$

### Corolario 1.3.5

1.  $si\ f,g:\mathbb{R}^n\to [0,+\infty]$  son medibles, medibles y no-negativas  $\Longrightarrow$ 

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2.  $si(f_k)_{k\in\mathbb{N}}: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$  succession de funciones mediles  $\forall k \in \mathbb{N} \implies$ 

$$\int_{E} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E} f_k$$

Demostración. 1. Sabemos que existen sucesiones crecientes  $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$  y  $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$  de funciones simples medibles no negativas tales que  $\lim_{j\to\infty} s_j = f$  y  $\lim_{j\to\infty} t_j = g$ . Por lo tanto, aplicando el \*\*Teorema de la Convergencia Monótona\*\* obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + t_j = \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

2. Por el apartado anterior obtenemos que:  $\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{m} f_k \implies$  podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona, dado que la sucesión  $\sum_{k=1}^{m} f_k$  converge de forma creciente a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ . Entonces finalmente obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

.

Lema 1.3.2

Sea  $(f_k)_{k\in\mathbb{R}^n}$  sucesión de funciones medibles, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \to \infty} f_k \le \lim \inf_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Demostración. Sea

$$f = \liminf_{k \to \infty} f_k = \lim_{k \to \infty} \inf_{j \ge k} f_j = \lim_{k \to \infty} g_k$$

Dado que  $g_k \geq 0$ , la sucesión  $(g_k)$  está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \le g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el \*\*Teorema de la Convergencia Monótona \*\*, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}g_k=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty}g_k.$$

Por definición del liminf, se cumple la desigualdad:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \le \liminf_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k.$$

Finalmente, dado que  $g_k \leq f$ , se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \le \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

#### Observación 1.3.6

El resultado análogo con lim sup no es válido en gneral. Podemos tomar de contraejemplo la función  $f_k = k \cdot \chi_{[k,\infty]}$ .

### Definición 1.3.7

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible  $y \ f : E \to [0, +\infty]$  función medible. Se dice que f es integrable (o absolutamente integrable) cuando

$$\int_{E} f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

#### Observación 1.3.7

f es integrable en  $E \iff |f|$  es integrable en  $E \iff f^+$  y  $f^-$  son integrables en E.

#### Lema 1.3.3

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y f = g - h con  $g, h : E \to [-\infty, +\infty]$  functiones integrables. Entonces,

$$\int_{E} f = \int_{E} g - \int_{E} h.$$

Demostración. Si  $f = g - h \implies |f| = |g - h| \le g + h \implies f$  es integrable.  $f = f^+ - f^- = g - h \implies f^+ + h = f^- + g \implies \int_E f^+ + h = \int_E f^- + g \implies \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h$ .

#### Proposición 1.3.5

Para funciones f y g integrables en E, se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $Si\ f,g\ son\ integrables\ en\ E,\ entonces\ f+g\ también\ es\ integrable\ y$ 

$$\int_{E} (f+g) = \int_{E} f + \int_{E} g.$$

2. Si f es integrable en E y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces cf es integrable en E y

$$\int_{E} (cf) = c \int_{E} f.$$

3. Si  $f \leq g$  en casi todo punto de E, entonces

$$\int_{E} f \le \int_{E} g.$$

4. Si |f| es integrable en E, entonces f también es integrable y

$$\left| \int_{E} f \right| \le \int_{E} |f|.$$

5.  $Si\ f = g\ en\ casi\ todo\ punto\ de\ E\ y\ f\ es\ integrable\ en\ E,\ entonces\ g\ también\ es\ integrable\ en\ E\ con,$ 

$$\int_{E} f = \int_{E} g.$$

6.  $Si\ m(E) = 0\ y\ f\ es\ medible,\ entonces\ es\ integrable\ en\ E\ y$ 

$$\int_{E} f = 0$$

- 7. Si f es integrable en E entonces  $|f| < \infty$  en casi todo punto de E
- 8. Si  $\int_{E} |f| = 0$ , entonces f = 0 en casi todo punto de E.

Demostración.

(1) Dado que  $f = f^+ - f^-$  y  $g = g^+ - g * - \implies f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ , con ambas partes  $\geq 0$ . Entones, por el lema de la integral de funciones no negativas,

$$\int_{E} (f+g) = \int_{E} f^{+} + \int_{E} g^{+} - \int_{E} f^{-} - \int_{E} g^{-}.$$

Reagrupando términos,

$$\int_{E} (f+g) = \int_{E} f + \int_{E} g.$$

(2) Si c > 0. Como  $cf = cf^+ - cf^- \implies$ ,

$$\int_{E} cf = \int_{E} (cf)^{+} - \int_{E} (cf)^{-} = c \int_{E} f^{+} - c \int_{E} f^{-} = c \int_{E} f.$$

Si c < 0, usando  $cf = cf^+ - cf * - = (-c)f^+ - (-c)f^-$ . Entones aplicamos el apartado anterior y obtenemos que:

$$\int_{E} cf = c \int_{E} f.$$

(3) Como  $g - f \ge 0$  en casi todo punto de E, se cumple que:  $(g - f) \cdot \chi_E \ge 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies$ 

$$\int_{E} (g - f) \ge 0.$$

Aplicando la linealidad de la integral,

$$\int_{E} g - \int_{E} f \ge 0,$$

lo cual implica que

$$\int_{E} f \le \int_{E} g.$$

(4) Se tiene que  $|f| = f^+ + f^-$ . Usando la linealidad de la integral,

$$\left| \int_{E} f \right| = \left| \int_{E} f^{+} + \int_{E} f^{-} \right|$$

Como  $f = f^+ - f^-$ , aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \le \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|.$$

(5) Como f = g en casi todo punto de  $E \implies f^+ = g^+$   $f^- = g^-$  en casi todo punto de E por lo que sólo queda aplicar el apartado anterior.

$$\int_{E} f = \int_{E} g$$

(6)  $|f| \cdot \chi_E \ge 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n \implies \int_E |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \chi_E| = 0 \implies$ 

$$\left| \int_{E} f \right| \le \int_{E} |f| = 0$$

(7) No se qué hace la demostracion

(8) Sea

$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

Definimos los conjuntos

$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, evaluamos la medida de  $A_k$  utilizando la integral:

$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \le \int_{A_k} k \cdot |f| = k \int_{A_k} |f| \le \int_{A_k} |f| \le \int_{E} |f|$$

Tomando el límite cuando  $k \to \infty$  (y de la subaditvidad) se concluye que

$$m(A) = \lim_{k \to \infty} m(A_k) = 0.$$

#### Teorema 1.3.5

Sean  $E \subset \mathbb{R}^{\ltimes}$  medible  $y \ \forall k \in \mathbb{N}, f_k : E \to [-\infty, +\infty]$  funciones medibles. Supongamos que  $\exists g : E \to [-\infty, +\infty]$  integrable en E tal que  $|f_k| < g$  en casi todo punto de E  $y \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Si además suponemos que  $\lim_{k \to \infty} f_k = f$  en casi todo punto de E, entonces:

1.  $f_k$  y f son integrables en E

- 2.  $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k f| = 0$
- 3.  $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$

Demostración.

1. Dado que  $|f_k| \leq |g| = g \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , se concluye que  $f_k$  es integrable en E. Además, como  $|f| \leq g$ , se sigue que f también es integrable en E.

2. Observamos que  $|f_k - f| \le |f_k| + |f| \le g + g = 2g \ge 0$ , lo que implica que  $2g - |f_k - f| \ge 0$ . Además, la sucesión de funciones  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge casi en todo punto de E a 2g - 0 = 2g. Aplicando el \*\*lema de Fatou\*\* a  $\hat{f}_k = h_k \chi_E$ , obtenemos que:

$$\int_E \lim_{k \to \infty} h_k = \liminf_{k \to \infty} \int_E h_k$$

A partir de esto, se deduce la siguiente igualdad:

$$\int_E 2g = \liminf_k \left( \int_E 2g - \int_E |f_k - f| \right) = \lim_k \int_E 2g + \liminf_k \left( -\int_E |f_k - f| \right) = \int_E 2g - \limsup_k \int_E |f_k - f|$$

Utilizando el siguiente **lema**: si  $a_k \to a$ , entonces

$$\liminf_{k} (a_k + b_k) \ge \liminf_{k} a_k + \liminf_{k} b_k$$

se concluye que:

$$\limsup_{k} \int_{E} |f_k - f| \le \int_{E} 2g - \int_{E} 2g = 0 \Rightarrow \lim_{k} \int_{E} |f_k - f| = 0$$

3. Finalmente, aplicamos la propiedad de la integral a la diferencia  $f_k - f$ :

$$\left| \int_{E} f_k - \int_{E} f \right| = \left| \int_{E} (f_k - f) \right| \le \int_{E} |f_k - f| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k = \int_E f$$

#### Definición 1.3.8 [Integral Paramétrica]

Sea f función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_{\Gamma} f(x, u) dx$$

#### Teorema 1.3.6

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto cualquiera,  $f: E \times U \to \mathbb{R}$  y suponemos que:

- 1.  $\forall u \in Uf(\cdot, u) : E \to \mathbb{R}$  es medible.
- 2.  $\forall x \in Ef(x,\cdot): U \to \mathbb{R}$  es continua.
- 3.  $\exists g: E \to [0, +\infty]$  integrable en E tal que  $|f(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de E y  $\forall u \in U$ .

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_{E} f(x, u) dx$$

es una función continua en U.

Demostración. Sea  $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset U$  tal que  $u_k\to u_0\in U$ . ¿Se sigue que  $\{F(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}\xrightarrow{k\to\infty} F(u_0)$ ?

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$f_k = f(\cdot, u_k) : E \to \mathbb{R}$$

que es una función medible. Por la condición (2), se cumple que  $\forall x \in E$ ,

$$f_k(x) = f(x, u_k) \xrightarrow{k \to \infty} f(x, u_0).$$

Es decir, la sucesión  $\{f_k\}$  converge puntualmente en E a

$$f_0(x) = f(x, u_0).$$

Además, se cumple que

$$|f_k(x)| = |f(x, u_k)| \le g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada (TCD), se concluye que  $f_k$  es integrable para todo  $k \in \mathbb{N}$  y

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

Es decir,

$$F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$F(u_k) = \int_E f(x, u_k) dx \quad \Rightarrow \quad F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

### Observación 1.3.8

 $\forall u_0 \in U \lim_{u \to u_0} \int_E f(x, u) dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x, u_0) dx$ 

#### Teorema 1.3.7

Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  conjunto medible,  $U = (a,b) \subset \mathbb{R}$  conjunto abierto  $y f : E \times U \to \mathbb{R}$ . Y además supongamos que:

- 1.  $\forall u \in Uf(\cdot, u) : E \to \mathbb{R}$  es integrable en E.
- 2.  $\forall x \in Ef(x, \cdot) : U \to \mathbb{R} \text{ es de clase } C^1 \text{ en } U.$
- 3.  $\exists g: E \to [0, +\infty]$  integrable en E tal que  $|\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)| \leq g(x)$  en casi todo punto de E y  $\forall u \in U$ .

Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_{E} f(x, t) dx$$

es de clase  $C^1$  en U y  $\forall t \in U$  se cumple que:

$$F'(t) = \int_{E} \frac{\partial f}{\partial u}(x, t) dx$$

Demostración. Fijamos  $t_0 \in (a,b)$  y definimos la función  $h: E \times (a,b) \to \mathbb{R}$  como:

$$h(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}, & t \neq t_0\\ \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

1. Medibilidad de h(x,t)

Queremos ver que h(x,t) es medible para todo  $t \in (a,b)$ .

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos que:

$$h(x, t_0) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(x, t_0 + 1/k) - f(x, t_0)}{1/k}$$

lo cual es medible.

2. Continuidad de  $h(x,\cdot)$ 

Para todo  $x \in E$ , si  $h(x, \cdot)$  es acotada en (a, b), entonces es continua.

- Si  $t \neq t_0$ , es claro. - Si  $t = t_0$ , tenemos:

$$h(x,t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0) = \lim_{t \to t_0} h(x,t),$$

lo cual prueba la continuidad.

3. Acotación y aplicación de la Regla de Leibniz

$$|h(x,t)| \le g(x)$$

- Si  $t=t_0$ , es claro. - Si  $t\neq t_0$ , por el Teorema del Valor Medio, existe  $c\in(t,t_0)$  tal que:

$$\left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,s) \right| \le g(x).$$

Por la Regla de Leibniz, obtenemos:

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \int_E \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx = \lim_{t \to t_0} \left( \int_E h(x, t) dx \right) = \int_E \left( \lim_{t \to t_0} h(x, t) \right) dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx.$$

Finalmente, como F' es continua en (a,b), se concluye que  $F \in C^1(a,b)$ .

# 1.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

#### Teorema 1.4.1

Sea  $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f:[a,b] \to \mathbb{R}$  integrable Riemann en [a,b]. Entonces f es integrable Lebesgue en [a,b] y se cumple que:

$$(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$$

#### Observación 1.4.1

Denotamos  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$ 

Demostración.  $\forall k \in \mathbb{N}$  sabemos que  $\exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{n(k)}^k = b\} \subset [a,b]$  tal que:  $\bar{S}(f,P_k) - \underline{S}(f,P_k) < \frac{1}{k}$ . Suponemos que  $P_{k+1}$  es mas fina que  $P_k$  y además que

$$diam(P_k) = \sup_{i \in \{1, \dots, n(k)\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$$

 $\forall k \in \mathbb{N} \text{ denotamos } m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\} \text{ y } M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}.$ 

$$\underline{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} m_k (x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \varphi_k \quad \text{con} \quad \varphi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

$$\bar{S}(f, P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} M_k(x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \psi_k \quad \text{con} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

Es claro que  $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$  en [a,b]. Además, como  $P_{k+1}$  es más fino que  $P_k \implies (\varphi_k) \uparrow y \ (\psi_k) \downarrow$  Denotamos  $\varphi = \lim_{k \to \infty} \varphi_k = \sup \varphi_k \ y \ \psi = \lim_{k \to \infty} \psi_k = \inf \psi_k$  que son medibles y cumplen que  $\varphi \leq f \leq \psi$ . Como f es integrable-Riemann  $\implies f$  es acotada  $\iff \exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a,b]$ . La función g(x) = M es integrable en [a,b] y puesto que  $|\psi_k| \leq g$  y  $|\varphi_k| \leq g$  entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f, P_k) = \int_a^b \varphi_k \to \int_a^b \varphi \qquad \bar{S}(f, P_k) = \int_a^b \psi_k \to \int_a^b \psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f,P_k) \to (R) \int_a^b f \quad \text{y} \quad \bar{S}(f,P_k) \to (R) \int_a^b f \implies \int_a^b \varphi = (R) \int_a^b f = \int_a^b \psi$$

Y como  $\int_a^b \psi - \varphi = 0 \implies \psi - \varphi = 0$  en casi todo punto de [a,b]. Es decir  $\varphi = f = \psi$  en casi todo punto de [a,b]. Y finalmente obtenemos que:

$$(L)\int_a^b f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi = (R)\int_a^b f$$

### Teorema 1.4.2

Sean  $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$  y  $f:[a,b] \to \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces f es integrable-Riemann en  $[a,b] \iff D_f = \{x \in [a,b] \mid f \text{ no es continua en } x\}$  tiene medida nula.

# Ejemplo

La función de Dirichlet

$$f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable-Riemann en [0,1]. Pero f=0 en casi todo punto  $\implies f$  es integrable-Lebesgue y ésta vale:  $\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 0 = 0$ 

#### Teorema 1.4.3

Sean  $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$  y  $f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$  una función absolutamente integrable-Riemann impropia en el intervalo  $(\alpha,\beta)$ . Entonces f es integrable-Lebesgue en  $(\alpha,\beta)$  y se cumple que:

$$(L)\int_{\alpha}^{\beta} f = (R)\int_{\alpha}^{\beta} f$$

Demostración. Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea  $(\alpha, \beta)$ , en este caso trataremos el intervalo  $[\alpha, \infty)$ : Por hipótesis sabemos que:

- 1.  $\forall k \in \mathbb{N}, f$  es integrable-Riemann en [a, b]
- 2.  $\lim_{b\to\infty} \int_a^b |f| < +\infty$

Tomamos una sucesión  $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$  y definimos las sucesiones de funciones:  $f_n=f\cdot\chi_{[a,b_n]}$  y  $g_n=|f|\cdot\chi_{[a,b_n]}$  medibles. De manera que tenemos que  $f_n\uparrow f$  y  $g_n\uparrow |f|$ . Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monóntona:

- 1.  $(L) \int_a^{+\infty} |f| = \lim_{n \to \infty} (L) \int_a^{b_n} |f| = \lim_{n \to \infty} (R) \int_a^{b_n} |f| = (R) \int_a^{+\infty} |f| < \infty$
- 2. Esto muestra que f es integrable-Lebesgue en  $[a, +\infty)$ .

Por otra parte, como  $|f_n| \leq |f| \ \forall n \in \mathbb{N}$  por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

1. 
$$(L) \int_{a}^{+\infty} f = \lim_{n \to \infty} (L) \int_{a}^{\infty} f_n = \lim_{n \to \infty} (R) \int_{a}^{b_n} f = (R) \int_{a}^{+\infty} f$$

Finalmente obtenemos el resultado de que f es integrable de Riemann-impropia en  $[a, +\infty)$ .  $\forall (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : b_n \to \infty$  tenemos que  $|\int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f| \leq \epsilon$ 

### **Ejemplo**

(Hoja 3. Ej: 6.a) Calculemos

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando con respecto al parámetro t. Para ello, aplicamos el \*\*Teorema de Leibniz\*\*: Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $(a,b) \subset \mathbb{R}$ , con  $f: E \times (a,b) \to \mathbb{R}$  tal que:

- 1.  $\forall u \in (a,b), f(\cdot,u) : E \to \mathbb{R}$  es integrable en E.
- 2. Para casi todo  $x \in E$ , la función  $f(x,\cdot):(a,b)\to\mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en (a,b).
- 3. Existe  $g:E \to [0,+\infty]$  integrable en E tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \le g(x)$$
 para casi todo  $x \in E, \forall u \in (a,b).$ 

Entonces, F(t) es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y se cumple:

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

Dado que

$$f(x,t) = \frac{\sin(tx)}{x}e^{-x},$$

calculamos la derivada parcial con respecto a t:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \cos(tx)e^{-x}.$$

Verifiquemos cada una de las hipótesis del Teorema de Leibniz:

1.  $\forall t \in \mathbb{R}, f(x,t)$  es integrable en  $[0,+\infty)$ :

$$|f(x,t)| \le e^{-x} = g(x).$$

Como  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 < +\infty$ , se cumple la integrabilidad.

- 2.  $\forall x \in E, \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \cos(tx)e^{-x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por lo que  $f(x,\cdot)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$ .
- 3. Se cumple que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| = \left| \cos(tx)e^{-x} \right| \le e^{-x} = g(x),$$

que es integrable en  $[0, +\infty)$ .

Por lo tanto, F es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x} dx.$$

Ahora calculemos esta integral:

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x} dx.$$

Usando integración por partes con

$$\begin{cases} u = \cos(tx), & dv = e^{-x}dx, \\ du = -t\sin(tx)dx, & v = -e^{-x}, \end{cases}$$

obtenemos:

$$I(t) = [\cos(tx)e^{-x}]_0^{+\infty} - t \int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-x} dx.$$

Evaluando los límites y repitiendo el proceso para  $\sin(tx)e^{-x}$ , obtenemos:

$$I(t)(1+t^2) = 1.$$

Despejando:

$$I(t) = \frac{1}{1+t^2} = F'(t).$$

Finalmente, integramos:

$$F(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C.$$

Si t = 0, entonces

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Por lo tanto:

$$F(t) = \arctan(t)$$
.

### 1.5 Teoremas de Tonelli y Fubini

Notación:

$$\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \qquad (x,y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$$

Sea  $f: \mathbb{R}^{n+k} \to [-\infty, +\infty]$ , entonces denotamos las funciones:

$$\begin{cases} f_x : \mathbb{R}^k \to [-\infty, +\infty] & \text{con} \quad f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k \\ f_y : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty] & \text{con} \quad f_y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

# Teorema 1.5.1 [Teorema de Tonelli]

Sea  $f: \mathbb{R}^{n+k} \to [0, +\infty]$  medible. Entonces:

- 1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , la función  $f_x : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
- 2. La función  $F: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
- 3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dx dy$

Además, de forma análoga se tiene que:

- 1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , la función  $f_y : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
- 2. La función  $G: \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx$  definida en casi todo punto de  $\mathbb{R}^k$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
- 3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} G = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f_y) = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y) dy dx$

### Observación 1.5.1

Los siguientes lemas son previos y necesarios para la demostracion del Teorema de Tonelli.

### Lema 1.5.1

Sean f, g que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $a, b \ge 0 \implies af + bg$  también satisfacen el Teorema de Tonelli

Demostración.

- 1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(af + bg)_x = a(f_x) + b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^k$ .
- 2.  $H(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (af + bg)_x = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + b(g_x) = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + \int_{\mathbb{R}^k} b(g_x)$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ .
- 3.  $\int_{\mathbb{R}^n} (af + bg)_x = a \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_x + b \int_{\mathbb{R}^{n+k}} g_x$

# Lema 1.5.2

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesion de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli y  $f_j \uparrow f$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  puntalmente  $\implies f$  satisface el Teorema de Tonelli.

Demostración.

- 1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $f_i(x,\cdot) = (f_i)_x \uparrow f(x,\cdot) = f_x$
- 2.  $F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \uparrow \int_{\mathbb{R}^k} f_x = F(x)$  luego F es medible por el Teorema de la Convergencia Monótona.
- 3. Nuevamente por el Teorema de la Convergencia aplicado a la sucesión de (2)  $F_j(x) \uparrow F(x)$  tenemos que  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \, dy \right) dx$

Observación 1.5.2

El siguiente lema es una versión de lema anterior en el que se usa el teorema de la convergencia dominada en lugar del de la convergencia monótona.

Lema 1.5.3

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sucesion de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli. Supongamos que  $(f_j) \to f$  puntualmente en  $\mathbb{R}^{n+k}$  y  $\exists g : \mathbb{R}^{n+k} \to [0, +\infty]$  integrable, que satisface el Teorema de Tonelli y tal que  $0 \le f_j \le g \quad \forall j \in \mathbb{N}$ . Entonces, f satisface el Teorema de Tonelli.

Demostración.

- 1.  $(f_i)_x \to f_x$  medible
- 2.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} g = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} g_x) < +\infty$  luego  $G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} g_x < +\infty$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  Además, tenemos que  $0 \le (f_j)_x \le g_x$  integrable, por lo que podemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada  $\Longrightarrow F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \to F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$
- 3. De nuevo por el Teorema de la Convergencia Dominada  $\int_{\mathbb{R}^n} F = \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f$

Demostración del Teorema de Tonelli:

- 1. Primero veamos el caso en el que f es la función indicatriz/característica de un cubo semiabierto.
  - (a) Supongamos que  $f = \chi_Q$  donde Q es un cubo semiabierto en  $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ . Con  $Q = A \times B : A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^k$

Observación 1.5.3

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x} \ (\chi_E)_x(y) = \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \notin E \end{cases} = \chi_{E_x}(y)$$

Sea 
$$f_x = (\chi_Q)_x(y) = (\chi_Q)_x(y) = \begin{cases} \chi_B(y) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$
 función medible.

(b) 
$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (\chi_Q)_x = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_B & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} m_k(B) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \Longrightarrow$$

 $F(x) = m_k(B) \cdot \chi_A(x)$  es medible.

(c) 
$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_Q = m_{n+k}(Q) = m_n(A) \cdot m_k(B) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(B) \cdot \chi_A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)$$

2. Ahora supongamos que f es la función indicatriz/característica de un conjunto abierto: Supongamos que  $f = \chi_G : G \subset \mathbb{R}^{n+k}$  - conjunto abierto  $\Longrightarrow G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j : Q_j$ -cubos semiabiertos disjuntos.

$$\implies \forall j \in \mathbb{N} \text{ sea } G_j = \bigcup_{i=1}^j Q_i \implies \begin{cases} (G_j) \uparrow G \\ \chi_{G_j} \uparrow \chi_G \text{ con cada } \chi_{G_j} = \sum_{i=1}^j \chi_{Q_i} \end{cases}$$

 $\implies \forall j \in \mathbb{N} \ \chi_{G_j} = \sum_{i=1}^j \chi_{Q_i}$  verifica el Teorema de Tonelli por el Lema 1.4.2 y Lema 1.4.3. Luego  $\chi_G$  satisface el Teorema de Tonelli por el Lema 1.4.2.

3. Supongamos ahora que f es la función indicatriz de un conjunto  $G_{\delta}$ , es decir, un conjunto resultado de la intersección numerable de conjuntos abiertos, pero bajo mas restricciones: Supongamos que  $f = \chi_D$  donde D es un conjunto  $G_{\delta}$ :

### Observación 1.5.4

Considerando  $\forall j \in \mathbb{N}D_j = D \cap (j, -j)^{n+k}$  obtenemos que  $(D_j) \uparrow D$  y  $\chi_{D_j} \uparrow \chi_D$  siendo cada  $D_j$  un conjunto  $G_\delta$  y acotado.

Por tanto, como consecuencia del Lema 1.4.2, podemos reducirnos al caso de conjuntos acotados D es un  $G_{\delta}$  acotado.

Entonces  $D = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  donde cada  $G_j$  es es un conjunto abierto y acotado. Podemos suponer que  $(G_j) \downarrow D$  por tanto  $X_{G_j} \downarrow \chi_D$  y además,  $0 \le \chi_{G_j} \le \chi_{G_1}$  que es integrable por ser acotada. Ahora si, podemos usar el Lema 1.4.3 para obtener que  $\chi_D$  satisface el Teorema de Tonelli.

4. Veamos que el Teorema de Tonelli se verifia cuando  $f = \chi_N : N \subset \mathbb{R}^{n+k}$  es un conjunto de medida nula.

Supongamos entonce que  $m_{n+k}(N)=0 \implies \forall j \in \mathbb{N}$  por la regularidad  $\exists G_j \subset \mathbb{R}^{n+k}$ -abierto con  $N \subset G_j$  y  $m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j}$ .

Entonces, sea  $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j$  que es un conjunto  $G_\delta$  y  $m_{n+k}(G) \leq m_{n+k}(G_j) < \frac{1}{j} \to 0$ . Luego  $N \subset G$  y  $m_{(n+k)}(G) = 0 \Longrightarrow$  por el apartado anterior  $\chi_G$  satisface el Teorema de Tonelli.

Luego  $N \subset G$  y  $m_{(n+k)}(G) = 0$   $\Longrightarrow$  por el apartado anterior  $\chi_G$  satisface el Teorema de Tonelli. Por último tenemos que  $0 = m_{(n+k)(G)} = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_G = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$ . Sabemos que para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n \widehat{F}(x)$  es medible y  $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(x) dx = 0 \Longrightarrow \widehat{F}(x) = 0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $N_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in N\} \subset G_x$  y  $m_k(G_x) = \widehat{R}(x) = 0 \Longrightarrow N_x$  es un conjunto nulo (luego medible) para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  es decir  $\chi_{N_x}$  es medible. Además  $0 \le F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} \le \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{G_x} = 0 \Longrightarrow F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{N_x} = 0$  en casi todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$  en particualr F es medible. Finalmente,  $0 = \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \chi_N = \mathbb{R}^k F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{N_x} dy) dx$ 

5. Veamos que si A es medible  $\implies f = \chi_A$  verifica el Teorema de Tonelli: Como  $A = D \setminus N$  donde  $\begin{cases} D \text{ es un conjunto } G_{\delta} \\ N \text{ es un conjunto de medida nula} \end{cases}$  Además tenemos que  $D = A \cup N$  disjunto  $\implies \chi_D = \chi_A + \chi_N \iff \chi_A = \chi_D - \chi_N \implies \chi_{A_x} = \chi_{D_x} - \chi_{N_x} \text{ y } \chi_{A_x} \text{ es medible.}$ 

 $F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_x} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_x}$  es medible para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$   $\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{D_x} dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_D = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_A$  En este paso hemos aplicado la demostración del teorema 4.

- 6. El Teorema de Tonelli se verifica para funciones simples-medibles:
- 7. Si f es una función medible,  $f = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $\begin{cases} \alpha_j \in \mathbb{R} \\ A_j \text{ medible} \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N} \implies \text{usando (5) y el lema 1.5.1, obtenemos el resultado}$
- 8. Sea f función medible no-negativa en  $\mathbb{R}^{n+k}$  sabemos que  $\exists (S_j)_{j\in\mathbb{N}} \uparrow f$  donde cada  $S_j$  es simple, medible y no-negativa- Cada  $S_j$  verifica el Teorema de Tonelli por (6), luego por el Lema 1.5.2, f satisface el Teorema de Tonelli.

### Corolario 1.5.1 [Prinicpio de Cavalieri]

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  medible entonces:

- 1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  el conjunto  $E_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^k$
- 2. La función  $F: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$  tal que  $F(x) = m(E_x)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^n$
- 3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m(E_x) dx$

De forma análoga se tiene que:

- 1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ , el conjunto  $E_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in E\}$  es medible en  $\mathbb{R}^n$
- 2. La función  $G: \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$  tal que  $G(y) = m(E_y)$  definida en casi todo punto es medible en  $\mathbb{R}^k$
- 3.  $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m(E_y) dy$

Demostración. Aplicando el Teorema de Tonelli, tomando  $f = \chi_E$ .

#### Corolario 1.5.2

Sea  $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$  conjunto (n+k)-nulo. Entonces:

- 1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E_x$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^k$
- 2. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^k$ ,  $E_y$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^n$

Demostración. Aplicamos el Teorema de Tonelli, tomand  $f = \chi_E$ .

### Teorema 1.5.2 [Teorema de Fubini]

Sea  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to [-\infty, +\infty]$  integrable on  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n f_x : \mathbb{R}^k \to [-\infty, +\infty]$  es integrable en  $\mathbb{R}^k$ 

- 2. La función  $F: \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$  definida por:  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$
- 3.  $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx) dy$

Análogamente se darían los casos tomando  $\mathbb{R}^k$  en lugar de  $\mathbb{R}^n$ .

Demostración. Recordemos que  $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ f_x = f_x^+ - f_x^- \end{cases}$ 

### Ejemplo

1. Sea D el triángulo de vértices (2,0),(2,2) y (0,1). Intentemos calcular

$$\int_{D} x^{2}y \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^{2}} x^{2}y \cdot \chi_{D} \, dx \, dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (\int_{D_{x}} x^{2}\chi_{D} dy) dx =$$

Sabiendo que  $D_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}$ , si  $0 \le x \le 2$  entonces  $D_x = \{y : -\frac{1}{2}x + 1 \le y \le \frac{1}{2}x + 1\}$ . Por tanto, podemos plantear la integral como:

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{y=\frac{1}{2}x+1} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left( \frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}x-1 \right) dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{16}{4} = 4.$$

También podríamos haberlo planteado así, sabiendo que  $D^y = \{x : (x, y) \in D\}$ :

$$\int_{y=0}^{y=2} \left( \int_{D^y} x^2 y \, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=2(1+y)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy + \int_{y=1}^{y=2} \left( \int_{x=2(y-1)}^{x=2} x^2 y \, dx \right) dy.$$

Evaluamos:

$$\int_{1}^{2} y \left( \int_{2(y-1)}^{2} x^{2} dx \right) dy = \int_{1}^{2} y \left( \frac{8}{3} y^{3} - 4y^{2} + 4y \right) dy = \frac{1}{3} y^{4} - \frac{4}{3} y^{3} + 2y^{2} \Big|_{1}^{2} = 4.$$

2. Sea  $D = \{(x,y) : 0 \le x \le y\}$  y  $f(x,y) = xe^{-y^3}$ . Calculemos:

$$\int_D f(x,y)dxdy.$$

Dado que  $f \geq 0$ , podemos aplicar el Teorema de Tonelli:

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f\chi_D = \int_{x=0}^{x=+\infty} \left( \int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy \right) dx.$$

No obstante, no conocemos el valor de la integral  $\int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y^3} dy$ , por lo que continuamos el cálculo en el otro sentido:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} \left( e^{-y^3} \int_{x=0}^{x=y} x dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y} dy.$$

Evaluamos:

$$\int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} \frac{y^2}{2} dy = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{3} \int_{y=0}^{y=+\infty} e^{-y^3} (-3y^2) dy = -\frac{1}{6} [e^{-y^3}]_{y=0}^{y=+\infty}.$$

- 3. Sea V el sólido limitado por x=0,y=0,z=0,3x+2y+z=1. Calculemos:

  - (a)  $\operatorname{Vol}(V)$ (b)  $\int_{V} z^{2} dx dy dz$

(a) Aplicamos el Lema de Cavalieri:

$$\operatorname{Vol}(V) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_V(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{V_z} 1 dx dy \right) dz,$$

donde  $V_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in V\} = \{(x, y) : x \ge 0, y \ge 0, 3x + 2y \le 1 - z\}.$ 

Definimos:

$$\int_{z=0}^{z=1} \operatorname{área}(V_z) dz,$$

donde el área de  $V_z$  es:

También se podría haber definido como:

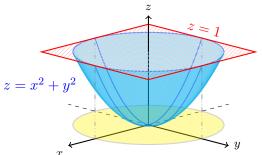
$$\int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{1-z}{2}} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dy \right) dz.$$

Otra forma alternativa de orden de integración sería:

$$\int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} \left( \int_{z=0}^{z=1} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{1-z-2y}{3}} 1 dx \right) dz \right) dy.$$

(b) 
$$\int_{V} z^{2} dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} z^{2} \left( \int_{V_{z}} 1 dx dy \right) dz = \int_{z=0}^{z=1} z^{2} \cdot \frac{(1-z)^{2}}{12} dz$$

4. Sea V el sólido limitado por el parabolo<br/>ide  $z=x^2+y^2$  y por el plano z=1. Calculemos vol(V).



Donde

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 1\} \implies vol(v) = \int_{z=0}^{z=1} area(V_z)dz = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}$$

.

#### Definición 1.5.1

Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es verticalmente proyectable si es de la forma:

$$E_1 = \{(x, y) : a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$$

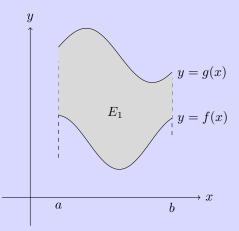
donde  $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$  son funciones continuas con  $f(x)\leq g(x)$ . Análogamente se define un conjunto  $E\subset\mathbb{R}^2$  es horizontalmente proyectable si es de la forma:

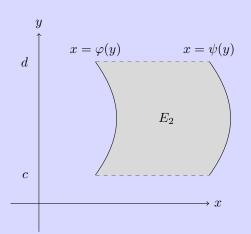
$$E_2 = \{(x, y) : c \le y \le d, \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

donde  $\varphi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $\varphi(y) \le \psi(y)$ . En este caso si  $f : E \to \mathbb{R}$  que es integrable en E:

$$\int_{E_1} h(x,y)dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)dy \right) dx$$

$$\int_{E_2} h(x,y)dxdy = \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} h(x,y)dx \right) dy$$





## Teorema 1.5.3

Sea  $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  aplicación lineal. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible  $\implies T(A)$  es medible y  $m(T(A)) = |\det(T)|m(A)$ .

# Definición 1.5.2

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos se dice que  $\varphi : U \to V$  es un difeomorfismo si:

- 1.  $\varphi$  es biyectiva
- 2.  $\varphi$  es de clase  $C^1$  en U
- 3.  $\varphi^{-1}$  es de clase  $C^1$  en V

#### Observación 1.5.5

Sea  $\phi: U \to V$  de clase  $C^1$  donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, y supongamos que  $\det(D\phi(x)) \neq 0 \quad \forall u \in U \implies V = \varphi(U)$  es abierto. Si  $\varphi$  es inyectiva, tenemos que  $\varphi: U \to \varphi(U) = V$  es un difeomorfismo.

# Teorema 1.5.4

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abierto  $y \varphi : U \to V$  difeomorfismo. Si  $A \subset U$  es medible, entonces  $\varphi(A)$  es medible

 $y \ m(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi)|.$ 

# Teorema 1.5.5 [Teorema del Cambio de Variable]

Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos y  $\varphi : U \to V$  difeomorfismo- $C^1$ . Sea  $f : V \to \mathbb{R}$  medible. Entonces:

- 1. Si f es no negativa  $\implies f \circ \varphi |\det(D\varphi)|$  es medible y no-negativa.
- 2. Si f es integrable  $\implies$   $(f \circ \varphi)|\det(D\varphi)|$  es integrable

En ambos casos se cumple que:

$$\int_{V=\varphi(U)} f(x)dx = \int_{U} (f \circ \phi(u)) |\det(D\varphi)| du$$

### Observación 1.5.6

 $Si\ A \subset U\ es\ medible\ \Longrightarrow\ \varphi(A)\ es\ medible\ y$ 

$$\int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A (f \circ \varphi(u)) |\det(D\varphi)| du$$

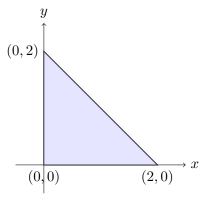
# Ejemplo

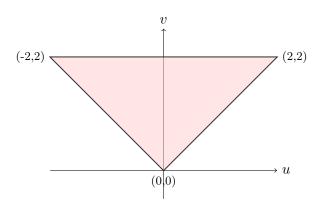
Sea  $\int_E e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$  donde E = triangulo de vértices (0,0), (2,0) y (0,2).

Si tomamos el cambio de variable:

$$\varphi^{-1} \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \implies \varphi \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{v - u}{2} \end{cases} \implies f(x, y) = f(u, v) = e^{\frac{u}{v}}$$

Si tomamos la representación gráfica del cambio de variable obtenemos que:





Si tomamos  $y = 0 \implies \varphi^{-1} \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases}$  y también tomamos  $x = 0 \implies \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases}$ 

$$\int_{E} f(x,y) dx dy = \int_{D} e^{\frac{u}{v}} |det(D\varphi)| du dv = \int_{D} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv$$

en donde  $|det(D\varphi)| = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$ 

$$=\frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=2}(\int_{u=-v}^{u=v}e^{\frac{u}{v}}du)dv=\frac{1}{2}\int_{v=0}^{v=2}[ve^{\frac{u}{v}}]_{u=-v}^{u=v}dv=\frac{1}{2}\int_{v=0}^{v=2}v(e-\frac{1}{e})dv=\frac{1}{2}(e-e^{-1})[\frac{v^2}{2}]_{v=0}^{v=2}=e-e^{-1}]_{v=0}^{u=2}(e^{-\frac{u}{v}})dv=\frac{1}{2}(e^{-\frac{u}{v}})dv=\frac{1$$

Funciones integrables en varias variables

3 Teorema de Fubini

| 4 | Cambio | de | variables |
|---|--------|----|-----------|
|   |        |    |           |

| 5 | Funciones definidas por integrales |
|---|------------------------------------|
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |
|   |                                    |

| 6 | Integrales | de línea: | campos | escalares | y vectoriales |  |
|---|------------|-----------|--------|-----------|---------------|--|
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |
|   |            |           |        |           |               |  |

# 7 Teorema de Green

8 Superficies paramétricas

9 Integrales de superficie

| 10 | Teorema de Stokes. | Teorema de la divergencia de Gauss |
|----|--------------------|------------------------------------|
|    |                    |                                    |
|    |                    |                                    |
|    |                    |                                    |