Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Teorema de Green

Definición 1.0.1 [Curva de Jordan]

Una curva de Jordan C en $\mathbb{R}^2$ es la imagen de un camino cerrado y simple en $\mathbb{R}^2$, es decir, $C = Im(\gamma)$ con $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ continua, inyectiva en $[a, b)$ y $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Observación 1.0.1

Se puede demostrar que C es un homeomorfa a la circunferencia unitaria S^1.

Teorema 1.0.1 [Teorema de la curva de Jordan]

Toda curva de Jordan C en $\mathbb{R}^2$ divide al plano en dos regiones o componentes conexas, una acotada, denominada parte interior a C y otra no acotada, denominada parte exterior a C, siendo C la frontera común a ambas regiones. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = Int(C) \cup Ext(C) \cup C \ \ con \begin{cases} Int(C) = abierto\ conexo\ acotado \\ Ext(C) = \ abierto\ conexo\ no\ acotado \qquad uni\acute{o}n\ disjunta \\ Fr(Int(C)) = C = Fr(Ext(C)) \end{cases}$$

Definición 1.0.2 [Conexión Simple]

Un conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es simplemente conexo si $\forall C$ curva de Jordan en U se tiene que $Int(C) \subset U$. Conceptualmente, esto se ve como que U no tiene agujeros.

Definición 1.0.3 [Orientación de una Curva de Jordan]

Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ curva de Jordan de clase C^1 a trozos. Se define la orientación positiva en C y se denota C^+ como el sentido de recorrido contrario a las agujas del reloj.
Conceptualmente, es el sentido de recorrido que deja la parte interior de C a la izquierda.

Teorema 1.0.2 [Teorema de Green]

Sean C curva de Jordan regular a trozos con parte interior $D = Int(C)$, $\vec{F} = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset \overline{D} = D \cup C$. Entonces:

$$\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

donde C^+ representa la curva C con orientación positiva.

Demostración. Para el caso de dominios que son a la vez proyectables horizontalmente y verticalmente. Es decir, supongamos que

$$\overline{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x) \right\}$$

donde las funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1.
Entonces $C^+ = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ donde

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a,b] \quad \gamma_1'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0) \\ \gamma_2(t) = (b,t) \quad t \in [c_2, d_2] \quad \gamma_2'(t) = (0,1) \\ \gamma_3(t) = (t, g(t)) \quad t \in [a,b] \quad \gamma_3'(t) = (1, g'(t)) \neq (0,0) \\ \gamma_4(t) = (a,t) \quad t \in [c_4, d_4] \quad \gamma_4'(t) = (0,1) \end{cases}$$

Entonces,

- $$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_{C^+} Pdx + \int_{C^+} Qdy \implies \int_{C^+} Pdx = \int_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4} (P,0)$$
$$= \int_{t=a}^{t=b} \big\langle (P(t,f(t)),0),(1,f'(t)) \big\rangle \, dt + \int_{t=c_2}^{t=d_2} \langle (P(b,t),0),(0,1) \rangle \, dt$$
$$- \int_{t=a}^{t=b} \big\langle (P(t,g(t)),0),(1,g'(t)) \big\rangle \, dt - \int_{t=c_4}^{t=d_4} \langle (P(a,t),0),(0,1) \rangle \, dt$$
$$= \int_{t=a}^{t=b} P(t,f(t)) - P(t,g(t))dt$$

- $$\int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy\, dx = -\int_{x=a}^{x=b} \left[P(x,y) \right]_{y=f(x)}^{y=g(x)} dx$$
$$= -\int_{x=a}^{x=b} P(x,g(x)) - P(x,f(x))dx = \int_{x=a}^{x=b} P(x,f(x)) - P(x,g(x))dx$$

Usando que $\overline{D}$ es verticalmente proyectable, hemos obtenido que $\int_{C^+} Pdx = -\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$.
Usando que $\overline{D}$ es horizontalmente proyectable, veamos que $\int_{C^+} Qdy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$.
Suponemos entonces que

$$\overline{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \right\}$$

donde $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1.
Entonces $C^+ = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4$ donde

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = (\psi(t), t), \quad t \in [c,d] \quad \sigma_1'(t) = (\psi'(t), 1) \\ \sigma_2(t) = (t, d), \quad t \in [a_2, b_2] \quad \sigma_2'(t) = (1,0) \\ \sigma_3(t) = (\varphi(t), t), \quad t \in [c,d] \quad \sigma_3'(t) = (\varphi'(t), 1) \\ \sigma_4(t) = (t, c), \quad t \in [a_4, b_4] \quad \sigma_4'(t) = (1,0) \end{cases}$$

- $$\int_{C^+} Qdy = \int_{\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3+\sigma_4} (0,Q)$$
$$= \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\psi(t),t)), (\psi'(t),1) \rangle dt - \int_{t=a_2}^{t=b_2} \langle (0, Q(t,d)), (1,0) \rangle dt$$
$$- \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\varphi(t),t)), (\varphi'(t),1) \rangle dt + \int_{t=a_4}^{t=b_4} \langle (0, Q(t,c)), (1,0) \rangle dt$$
$$= \int_{t=c}^{t=d} Q(\psi(t),t) - Q(\varphi(t),t)dt$$

- $$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=c}^{y=d} Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y) dy$$

$\square$

Observación 1.0.2

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

puesto que C tiene área D.

Ejemplo

Vamos a verificar el Teorema de Green para el campo $\vec{F} = (x^2, xy)$ y la curva de Jordan C dada por el borde del cuadrado $[0,1]^2$.

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 \\ Q(x,y) = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t,0), & t \in [0,1] \quad \gamma_1'(t) = (1,0) \\ \gamma_2(t) = (1,t), & t \in [0,1] \quad \gamma_2'(t) = (0,1) \\ \gamma_3(t) = (t,1), & t \in [0,1] \quad \gamma_3'(t) = (1,0) \\ \gamma_4(t) = (0,t), & t \in [0,1] \quad \gamma_4'(t) = (0,1) \end{cases}$$

- $$\int_{C^+} x^2 dx + xy dy = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} x^2 dx + xy dy$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \langle (t^2, 0), (1,0) \rangle dt}_{\gamma_1} + \underbrace{\int_0^1 \langle (1,t), (0,1) \rangle dt}_{\gamma_2} - \underbrace{\int_0^1 \langle (t^2, t), (1,0) \rangle dt}_{\gamma_3} - \underbrace{\int_0^1 \langle (0,0), (0,1) \rangle dt}_{\gamma_4}$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt + \int_{t=0}^{t=1} t dt - \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt - 0 = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}$$

- $$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_D (y - 0) dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1} y dy \right) dx = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Verificar el teorema de Green para la circunferencia de radio 2 y centro en el origen, el campo $\vec{F} = (x - y, x + y)$.

$$\begin{cases} \gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \gamma(0) = \gamma(2\pi) \text{ para } \gamma(0) \neq \gamma(t) \ \forall t \in (0, 2\pi) \\ \gamma'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t)) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\overline{D} = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

- $$\int_{C^+} (x-y) dx + (x+y) dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (2\cos(t) - 2\sin(t), 2\cos(t) + 2\sin(t)), (-2\sin(t), 2\cos(t)) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} (-4\cos(t)\sin(t) + 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) - 4\sin(t)\cos(t))dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 4dt = 8\pi$$

- $$\int_{\overline{D}} (1+1)dxdy = 2(\text{área}(\overline{D})) = 2(\pi 2^2) = 8\pi$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x,y) = (x^2+y^2, -3xy+xy^3+y^2)$ sobre la curva definida por el cuadrado $[0,1]^2$. Veamos dos maneras de calcular la integral de camino dada por $\int_\gamma F \cdot dr$.

1. Podemos describir la curva como producto de una concatenación de curvas: $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_4$ donde:

$$\begin{cases} \gamma_1 \equiv (4t, 0) : t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \gamma_2 \equiv (1, 4t-1) : t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}) \\ \gamma_3 \equiv (3-4t, 1) : t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}) \\ \gamma_4 \equiv (0, 4-4t) : t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \implies$$

$$\int_\gamma F = \sum_{k=1}^{4} \int_{\frac{k-1}{4}}^{\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t)\rangle dt = \sum_{k=1}^{4} \int_{\frac{k-1}{4}}^{\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t)\rangle dt =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \langle ((4t)^2 + 0, -3\cdot(4t)\cdot 0 + 4t\cdot 0^3 + 0\rangle, (4,0)\rangle dt +$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} \langle (t^2 + (4t-1)^2, -3(4t-1) + (4t-1)^3 + (4t-1)^2)\rangle, (0,4)\rangle dt +$$

$$+ \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} \langle (3-4t)^2 - 1^2, -3(3-4t) + (3-4t) + 1)\rangle, (-4,0)\rangle dt +$$

$$+ \int_{\frac{3}{4}}^{1} \langle (4-4t)^2, (4-4t)^2\rangle, (0,-4)\rangle dt$$

Y resolveriamos las integrales polinómicas de forma usual.

2. Otra forma de resolverlo es aplicando el teorema de Green:
Para ello veamos que el camino definido anteriormente sea una Curva de Jordan

$$\begin{cases} \text{Simple: } \forall t_1, t_2 \in (a,b) : t1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \\ \text{Cerrada: } \gamma(0) = \gamma(1) \\ \text{Regular: } ||\gamma'(t)|| \neq 0 \ \forall t \in [0,1] \end{cases} \implies \text{es una curva de Jordan}$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -3y + y^3 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \implies$$

$$\int_\gamma F = \int_0^1 \left(\int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2\, dx = \left[\frac{-3y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{-3y^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4}$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ y el camino dado por:

$$\gamma(t) = (8 + 3\cos(2\pi t), 6 + 3\sin(2\pi t))$$

con $t \in [0,1]$.
Veamos cómo lo haríamos a través de la definición:

$$\int_\gamma F = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \left(\frac{-6 - 3\sin(2\pi t)}{200 + 48\cos(2\pi t) + 36\sin(2\pi t)}, \frac{8 + 3\cos(2\pi t)}{48\cos(2\pi t) + 36\sin(2\pi t) + 99} \right), (-6\sin(2\pi t), 6\cos(2\pi t)) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \frac{18 + 36\pi\sin(2\pi t) + 48\pi\cos(2\pi t)}{48\cos(2\pi t) + 36\sin(2\pi t) + 99} dt = \ldots = 0.$$

Observación 1.0.3

La integral anterior se resolvería haciendo uso del cambio de variable $u = tg(\frac{t}{2})$, el cual suele usarse para intgrales de la forma:

$$\int \frac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))} dt$$

Haciendo uso del Teorema de Green, y verificando en primer lugar que se cumple que γ es una Curva de Jordan:

$$\begin{cases} \gamma(t) \text{ está orientada positivamente} \\ \gamma(0) = \gamma(1) = (11, 6) \\ \|\gamma'(t)\| \neq 0 \ \forall t \in [0,1] \\ \begin{cases} 8 + 3\cos(2\pi t) = 8 + 3\cos(2\pi t') \\ 6 + 3\sin(2\pi t) = 6 + 3\sin(2\pi t') \end{cases} \iff t = 0, t' = 1 \implies \gamma \text{ es simple} \end{cases}$$

F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que podemos aplicar el Teorema de Green:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\implies \int\int_{int(\gamma)} 0 dx dy = 0$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ y el camino dado por $\gamma(t) = (\epsilon\cos(2\pi t), \epsilon\sin(2\pi t))$ con $t \in [0,1]$ y $\epsilon > 0$.
Este caso es un ejemplo de un campo vectorial y un camino en el que no es posible hacer uso del Teorema de Green ya que el origen es un punto de discontinuidad y por tanto F no es de clase C^1.

No obstante si se puede calcular a través de la definición:

$$\int_\gamma F = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1 \left\langle \left(\frac{-\epsilon\sin(2\pi t)}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon\cos(2\pi t)}{\epsilon^2}\right), (-2\pi\epsilon\sin(2\pi t), 2\pi\epsilon\cos(2\pi t)) \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^1 2\pi dt = 2\pi$$

Ejemplo

Sea γ-camino simple, cerrado, regular y orientada positivamente con 2 cortes en cada eje y tal que $(0,0) \in int(\gamma)$

Corolario 1.0.1

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto simplemente conexo y el campo vectorial $\vec{F} = (P,Q) : U \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Entonces son equivalentes:

1. *$\vec{F}$ es conservativo en U $\iff$ $Pdx + Qdy$ es exacta en U, es decir, $\exists \varphi \in C^2(U)$ tal que $d\varphi = Pdx + Qdy$.*
2. *$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en U $\iff$ $Pdx + Qdy$ es cerrada en U.*

Demostración.

- (1) $\implies$ (2): Es cierto siempre. Si $(P,Q) = \nabla\varphi$ con $\varphi \in C^2(U)$ entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
- (2) $\implies$ (1): Sea σ poligonal cerrada en U de lados paralelos a los ejes coordenados. Veamos que $\int_\sigma \vec{F} = 0$.
  Entonces $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ donde cada σ_j tiene imagen $Im(\sigma_j) = C_j$, curva de Jordan poligonal.

$$\int_\sigma \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{(\partial D_j)^+} Pdx + Qdy = \sum_{j=1}^n \int_{D_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

$\square$

Ejemplo

El resultado anterior puede fallar si U no es simplemente conexo. Sean $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ que es C^∞ en U.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

pero podemos ver que $\vec{F}$ no es conservativo en U ya que tomando $\gamma_r(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ con $r > 0$ y $t \in [0, 2\pi]$ tenemos que

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-r\sin(t)}{r^2}, \frac{r\cos(t)}{r^2}\right), (-r\sin(t), r\cos(t)) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

luego como γ_r es cerrada y $\int_{\gamma_r} \vec{F} \neq 0$ entonces $\vec{F}$ no es conservativo en U.
Sabemos que $\vec{F}$ no es conservativo, pero nos podemos preguntar si se puede encontrar un potencial para $\vec{F}$ en U.
Buscamos φ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} P = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

luego

$$\varphi = \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

Entonces φ es un potencial para $\vec{F}$ en $W = \{(x,y) \mid y \neq 0\}$.

Teorema 1.0.3 [Teorema de Green General - Dominios Múltiplemente Conexos]

Sean $C_0, C_1, \ldots, C_m$ curvas de Jordan regulares a trozos en $\mathbb{R}^2$ tal que:

1. $C_j \subset Int(C_0)$ $\forall j = 1, \ldots, m$
2. $C_i \subset Ext(C_j)$ $\forall i, j = 1, \ldots, m$ *con* $i \neq j$

Sean $D = Int(C_0) \cap Ext(C_1) \cup \ldots \cup Ext(C_m)$ y $\vec{F} = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset \overline{D} = D \cup C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m$. Entonces:

$$\int_{(\partial D)^+} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

donde $(\partial D)^+ = C_0^+ - \sum_{j=1}^m C_j^+$.