

Cálculo Integral¹

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
*Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática*

¹basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1	Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss	2
1.1	Teorema de Stokes	2
1.2	Geometria del Rotacional	5

1 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss

1.1 Teorema de Stokes

Definición 1.1.1 [Rotacional]

Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define el rotacional de $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ como:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Observación 1.1.1

En este caso, $\text{rot}(\vec{F})$ es un campo vectorial continuo definido en A .

Ejemplo

Sea $(P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Consideramos $A = U \times \mathbb{R}$ y el campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, 0)$. Entonces el rotacional de \vec{F} es:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad \text{"la derivación del teorema de Green"}$$

Teorema 1.1.1 [Teorema de Stokes]

Sea (S, \vec{n}) una superficie orientada y regular a trozos, y sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset S$. Entonces se cumple la siguiente igualdad:

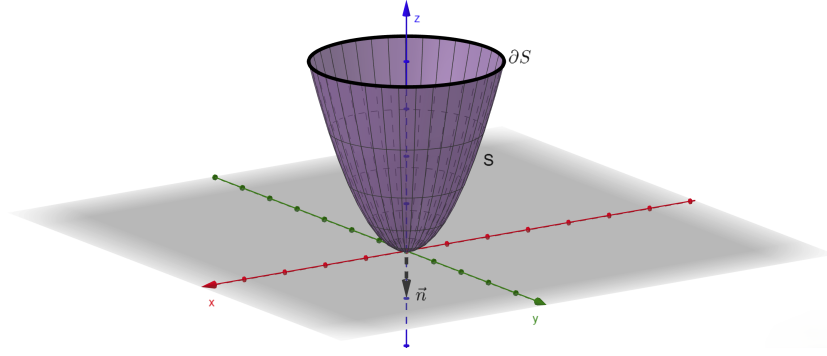
$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F}$$

donde ∂S tiene la orientación inducida por \vec{n} .

Ejemplo

Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$ con la norma exterior \vec{n} y el campo vectorial $\vec{F} = (yz, -xz, z)$. Verificamos el teorema de Stokes.

Tenemos que $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 = 4\}$, que es una circunferencia de radio 2 en el plano $z = 4$. Fijémonos que \vec{n} induce la orientación negativa en la curva $C^- = \partial S$.



El rotacional de \vec{F} es:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Consideramos la parametrización natural $\varphi : D \rightarrow S$ de S dada por:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{donde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Entonces la normal a la superficie S es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

La normal \vec{N}_φ apunta hacia arriba en el punto $(0, 0, 0)$, luego tenemos una normal interior.

- Calculamos el rotacional de \vec{F} en S por medio de la parametrización φ :

$$\begin{aligned} \int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) &= - \int_D \langle \vec{N}_\varphi, \text{rot}(\vec{F}) \circ \varphi(x, y) \rangle dx dy = - \int_D \langle (-2x, -2y, 1), (x, y, -2(x^2 + y^2)) \rangle dx dy \\ &= \int_D 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 dx dy = \int_D 4(x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= 4 \cdot 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 4 \cdot 2\pi \cdot 4 = 32\pi \end{aligned}$$

- Consideramos la parametrización positiva γ de la curva ∂S dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

y calculamos la integral de línea del campo \vec{F} sobre la curva ∂S :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{C^-} \vec{F} = - \int_{\gamma} \vec{F} = - \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= - \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (8 \sin(t), -8 \cos(t), 4), (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} 16 dt = 16 [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 16(2\pi - 0) = 32\pi \end{aligned}$$

En efecto, vemos que las integrales coinciden de acorde al teorema de Stokes.

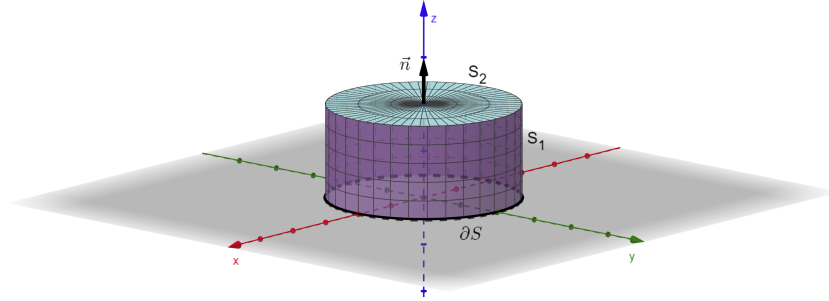
Ejemplo

Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 2]\} \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con la norma exterior \vec{n} y el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z)$. El borde de S es:

$$\partial S = C_0^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$



Calculamos el rotacional del campo \vec{F} :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 1) = (0, 0, 0)$$

Consideramos la parametrización γ de la curva C_0 dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

que tiene orientación positiva. Además, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$.

- Calculamos la integral del campo $\text{rot}(\vec{F})$ sobre la superficie S :

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{0} = 0$$

- Hacemos la integral de línea del campo \vec{F} sobre la curva C_0^+ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (\sin(t), \cos(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) - \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos(2t) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Vemos que el teorema de Stokes se cumple, ya que las integrales son iguales.

Ejemplo

Consideramos el campo vectorial $\vec{F} = (yz, -xz, z)$. Veamos el rotacional de \vec{F} :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Supongamos que tenemos una superficie S cualesquiera cuyo borde ∂S sea la curva C_0^+ del ejemplo anterior. Entonces tenemos que:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (0, 0, 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt = 0$$

Observación 1.1.2

Si S es una superficie cerrada, es decir, $\partial S = \emptyset$, entonces se tiene que:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F} = 0$$

1.2 Geometría del Rotacional

Ejemplo

Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo de velocidades de un fluido en \mathbb{R}^2 . Las trayectorias son curvas $\gamma : I \rightarrow U$ con $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$.

Ejemplo

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 .

Consideremos $p \in U$ y $r > 0$, siendo D_r el círculo de centro p y radio r , con frontera $C_r = \partial D_r$.

Sea \vec{u} un vector unitario de \mathbb{R}^3 perpendicular al plano que contiene a D_r , entonces:

$$\langle \text{rot}(\vec{F})(p), \vec{u} \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r^+} \vec{F}$$

Donde C_r^+ denota a C_r con la orientación comparativa a la de \vec{u} , y donde esta igualdad representa la "circulación por unidad de área" del campo \vec{F} .

Demostración.

$$\int_{C_r^+} \vec{F} = \int_{(D_r, \vec{n})} \text{rot} \vec{F} = \int_{D_r} \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle = \int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle + \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle$$

De donde pasamos a:

$$\int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle_{\text{constante}} = \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \cdot \text{área}(D_r)$$

Entonces:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < r < \delta \implies \|\text{rot} \vec{F}(x, y, z) - \text{rot} \vec{F}(p)\| < \epsilon \quad \forall (x, y, z) \in D_r \implies$$

$$\implies \left| \int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} \left| \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} \|\text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p)\| \leq \epsilon \cdot \text{área}(D_r)$$

Luego:

$$\left| \frac{1}{\text{área}(D_r)} \int_{C_r^+} \vec{F} - \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| < \epsilon \quad \forall 0 < r < \delta$$

□

Definición 1.2.1

Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Se dice que \vec{F} es irrotacional en A si $\text{rot}(\vec{F}) \equiv 0$ en A .

Lema 1.2.1

Si \vec{F} es un campo de clase C^1 , y es conservativo en $A \implies$ es irrotacional en A .

Demostración. Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\vec{F} = \nabla\varphi$, es decir, $\vec{F} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$, entonces φ es de clase C^2 en A y, aplicando el teorema de Schwarz, tenemos que:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \right) = (0, 0, 0)$$

□

Teorema 1.2.1

Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo, y sea $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. \vec{F} es conservativo en U .
2. $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$, $\forall \sigma$ camino triangular en U .
3. \vec{F} es irrotacional en U , es decir, $\text{rot}(\vec{F}) \equiv 0$ en U .

Demostración.

- (1) \implies (2): Ya está probado por la caracterización de los campos conservativos.
- (2) \implies (1): Fijamos un punto $P \in U$ y consideramos para cada $x \in U$ la función

$$\varphi(x) = \int_{[P,x]} \vec{F}$$

Veamos que φ es un potencial de \vec{F} . Para ellos, veamos que $F_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \forall i = 1, 2, 3$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\underbrace{\int_{[P, x+h\vec{e}_i]} \vec{F}}_{\varphi(x+h\vec{e}_i)} - \underbrace{\int_{[P,x]} \vec{F}}_{\varphi(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x))$$

Por (2), tenemos que el triángulo T de vértices P , x y $x+h\vec{e}_i$ es tal que

$$\int_{[P,x] + [x,x+h\vec{e}_i] + [x+h\vec{e}_i,P]} \vec{F} = 0$$

Luego se sigue entonces que:

$$\int_{[P, x+h\vec{e}_i]} \vec{F} - \int_{[P, x]} \vec{F} = \int_{[x, x+h\vec{e}_i]} \vec{F}$$

por tanto

$$\frac{1}{h} \int_{[x, x+h\vec{e}_i]} \vec{F} = \frac{1}{h} \int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(x + th\vec{e}_i), h\vec{e}_i \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \vec{F}_i(x + th\vec{e}_i) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \vec{F}_i(x)$$

donde $\gamma(t) = x + th\vec{e}_i$ con $t \in [0, 1]$. Así obtenemos que (1) \iff (2).

- (3) \implies (2): Sea $T \subset U$ un triángulo, y sea $\sigma = \partial T$:

$$\int_{\sigma} \vec{F} = \int_{(T, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = 0$$

□

Ejemplo

Es importante que U sea convexo:

Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) = (P, Q, 0)$$

Así tenemos el siguiente rotacional

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$$

El campo \vec{F} es por tanto irrotacional en U , pero \vec{F} no es conservativo. Consideremos la curva cerrada γ dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\langle \left(\frac{-\sin(t)}{1}, \frac{\cos(t)}{1}, 0 \right), (-\sin(t), \cos(t), 0) \right\rangle dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Demostrando así que \vec{F} no es conservativo.

Ejemplo

El ejercicio de Nash:

Encontrar $X \subset \mathbb{R}^3$ tal que si denotamos por

$$V = \{ \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo } C^1 \mid \text{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \}$$

$$W = \{ \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo } C^1 \mid \vec{F} = \nabla g \text{ para algún } g \}$$

obtenemos que $\dim(V \setminus W) = 8$.

Observación 1.2.1 [Divergencia de un campo vectorial en \mathbb{R}^3]

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define la divergencia de \vec{F} como:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \langle \nabla, \vec{F} \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Teorema 1.2.2 [Teorema de la divergencia de Gauss]

Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y actotado, denotamos $V = \bar{A}$.

Supongamos ahora que $\partial V = \partial A = S$ es una superficie cerrada, simple-regular a trozos, orientada con la normal \vec{n} exterior a V .

Sea ahora $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset V$. Entonces, si denotamos $S = \partial V$, se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}) = \int_{(S, \vec{n})} \vec{F} = \int_{\partial V} \vec{F}$$

Observación 1.2.2

Aquí $\partial V = S = \operatorname{Fr}(V)$ es la frontera topológica de V .

Ejemplo

Verifiquemos el teorema para el siguiente cilindro:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2\}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z)$$

Tenemos que $\partial V = S_0 \cup S_1 \cup S_2$, donde:

S_0 : La base inferior del cilindro

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0\}$$

S_1 : La superficie exterior del cilindro

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 2\}$$

S_2 : La base superior del cilindro

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 2\}$$

Ahora tenemos que la divergencia es:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = y^2 + 2xy + 1$$

Entonces podemos empezar a integrar

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} = \int_V (y^2 + 2xy + 1) dx dy dz = \text{cambiando a cilíndricas} \int_{z=0}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r \cdot (r^2 + 1) dr d\theta dz =$$

$$= 4\pi \int_{r=0}^{r=1} r^3 + r dr = 4\pi \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} = 3\pi$$

Ahora aplicando el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\int_{(\partial V, \vec{n})} \vec{F} = \int_{(S_0, \vec{n})} \vec{F} + \int_{(S_1, \vec{n})} \vec{F} + \int_{(S_2, \vec{n})} \vec{F}$$

Para S_1 :

$$S_1 \rightarrow \varphi \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2 \end{matrix} \equiv D$$

Donde la normal es:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

Ahora entonces la integral de la superficie S_1 es, como tenemos orientacion positiva: Para S_0 :

$$S_0 \rightarrow \varphi \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{matrix} \equiv E$$

Donde la normal es:

$$\vec{N}_{\varphi_0} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

Y así la integral sale, como tenemos orientacion negativa:

$$\int_{(S_0, \vec{n})} \vec{F} = - \int_E \langle \vec{F} \circ \varphi_0, \vec{N}_{\varphi_0} \rangle = - \int_{x^2+y^2 \leq 1} \langle (xy^2, x^2y, 0), (0, 0, 1) \rangle dx dy = 0$$

Demostracion del teorema de la divergencia de Gauss para dominios proyectables. Supongamos que V es z -proyectable, es decir:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \overline{D}, \quad z \in [h(x, y), g(x, y)]\}$$

Siendo $\overline{D} = D \cup C$ como en el teorema de Green, y $h, g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 tales que, entonces:

$$\int_V \text{div}(\vec{F}) = \int_V \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \int_V \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \int_V \frac{\partial}{\partial z} F_3$$

Veamos, para F_3 que:

$$\int_{\partial V} \vec{F} = \int_{\partial V} (F_1, 0, 0) + \int_{\partial V} (0, F_2, 0) + \int_{(\partial V, \vec{n})} (0, 0, F_3)$$

Siendo estas dos ultimas integrales iguales, es decir $\int_{(\partial V, \vec{n})} (0, 0, F_3) = \int_V \frac{\partial}{\partial z} F_3$.

Tenemos que $\partial V = S_g \cup S_h \cup S_0$, entonces las normales son:

$$\vec{N}_g = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right)$$

Siendo esta una normal exterior, al ser $g(x, y)$ la parte superior de la superficie, y tener esta normal una componente positiva en z .

$$\vec{N}_h = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right)$$

Siendo esta una normal interior, al ser $h(x, y)$ la parte inferior de la superficie, y tener esta normal una componente positiva en z .

En S_0 la normal es $\vec{n} = (n1, n2, 0)$ perpendicular a $(0, 0, 1)$, y su integral vale:

$$\int_{(S_0, \vec{n})} (0, 0, F_3) = \int_{(S_0, \vec{n})} \langle (0, 0, F_3), (n1, n2, 0) \rangle = 0$$

Asi juntando todo:

$$\int_{(\partial V, \vec{n})} (0, 0, F_3) = \int_D$$

□

Ejemplo

Hoja 6, Ejercicio 9

Sean:

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2; \quad x \geq 0, y \geq 0\} \\ S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2; \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \\ C &= \partial S \end{aligned}$$

Calculemos primero el area de S :

$$S \rightarrow \varphi \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \quad (x, y) \in D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, y \geq 0\}$$

Por tanto, la normal es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

Cuyo modulo vale:

$$\|\vec{N}_\varphi\| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

Asi el area de S es:

$$\begin{aligned} \text{área}(S) &= \int_D \|\vec{N}_\varphi\| dx dy = \int_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} \int_{r=0}^{r=1} 8r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{8} \frac{2}{3} \left[(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{24} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{\pi}{24} (5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

Ahora calculemos el volumen de V , pasando a coordenadas cilindricas:

$$V \rightarrow \varphi \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad V \equiv \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - r^2; \quad 0 \leq r \leq 1; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}, \quad J = r$$

$$\text{vol}(V) = \int_V 1 dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=1} \int_{z=0}^{z=1-r^2} r dz dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{r=1} r(1 - r^2) dr = \frac{\pi}{8}$$

De otra forma, reordenando las integrales:

$$\text{vol}(V) = \int_{z=0}^{z=1} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=\sqrt{1-z}} r dr d\theta dz = \frac{\pi}{8}$$

Ahora definamos el siguiente campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = (1 - 2z, 0, 2y)$$

Y entonces calculemos la integral en el borde de S , el cual es:

$$\partial S = C_0 + C_1 + C_2$$

Vamos a aplicar el teorema de Stokes, por lo que tenemos que calcular el rotacional de \vec{F} :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 - 2z & 0 & 2y \end{vmatrix} = (2, -2, 0)$$

Notese que el campo es constante, y que la normal que obtubimos antes es exterior, por lo que podemos tomar ∂S en sentido antihorario.

Entonces calculemos la integral de \vec{F} el borde ∂S :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{(S, \vec{n})} \langle \text{rot}(\vec{F}), \vec{N}_\varphi \rangle = \int_D \langle (2, -2, 0), (2x, 2y, 1) \rangle dx dy = \int_D (4x - 4y) dx dy = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=1} r^2 (4 \cos(\theta) - 4 \sin(\theta)) dr d\theta = \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) - \sin(\theta) d\theta \right) \cdot \left(\int_{r=0}^{r=1} 4r^2 dr \right) = \\ &= [\sin(\theta) + \cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{4r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Hoja 6, Ejercicio 10

Sean las siguientes superficies, y el siguiente campo vectorial:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2; \quad 1 \leq z \leq 2\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4; \quad 2 \leq z \leq 3\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = S_1 + S_2$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, x + y + z)$$

$$S_1 \cap S_2 = \partial S_1 \cap \partial S_2$$

Primero calculemos las parametrizaciones de las superficies, comprobemos que inducen orientaciones compatibles, y calculemos la orientacion en el borde:

$$S_1 \rightarrow \varphi_1 \begin{cases} x = z \cos(\theta) \\ y = z \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} 1 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right) \equiv D$$

Donde su normal es:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -z \sin(\theta) & z \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z)$$

Siendo esta una normal exterior, al ser z negativo, y x, y iguales a los del propio punto, por lo que el vector va hacia afuera.

Ahora vayamos a S_2 :

$$S_2 \rightarrow \varphi_2 \begin{cases} x = 2 \cos(\theta) \\ y = 2 \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} 2 \leq z \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right) \equiv E$$

Donde su normal es:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 \sin(\theta) & 2 \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 0)$$

Siendo esta una normal exterior, como se aprecia ya que x, y mantienen el mismo signo que el punto, y z es 0.

Por tanto son compatibles.

Notese que el cilindro S_2 induce en $\partial S_1 \cap \partial S_2$ una horientacion antihoraria, y el cono S_1 induce una orientacion horaria, es decir, inducen orientaciones opuestas, lo cual confirma que son compatibles.

Tenemos ahora que el borde se descompone en $\partial S = C_1^+ \cup C_3^-$, donde C_1^+ es la parte inferior del cono, y C_3^+ es la parte superior del cilindro, con orientaciones antihoraria y horaria respectivamente.

Ahora calculemos el rotacional de \vec{F} :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & x + y + z \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$$

Por lo que la integral de $\text{rot}(\vec{F})$ en la superficie S es:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F})$$

Separemos la integral en dos partes en S_1 y S_2 :

$$\begin{aligned} \int_{(S_1, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) &= \int_{(D, \vec{N}_{\varphi_1})} \langle \text{rot}(\vec{F}) \circ \varphi_1, \vec{N}_{\varphi_1} \rangle = \int_D \langle (1, -1, -2), (z \cos(\theta), z \sin(\theta), -z) \rangle = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=1}^{z=2} z(\cos(\theta) - \sin(\theta) + 2) dz d\theta = 6\pi \\ \int_{(S_2, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) &= \int_{(E, \vec{N}_{\varphi_2})} \langle \text{rot}(\vec{F}) \circ \varphi_2, \vec{N}_{\varphi_2} \rangle = \int_E \langle (1, -1, -2), (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 0) \rangle = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=2}^{z=3} (2 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta)) dz d\theta = 0 \end{aligned}$$

Asi finalmente tenemos que:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{(S_1, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) + \int_{(S_2, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = 6\pi + 0 = 6\pi$$

Finalmente calculemos la integral usando el teorema de Stokes:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F}$$

Para ello parametricemos los caminos, con las siguientes funciones:

$$C_1^+ \rightarrow \gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 1), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \gamma_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$C_3^+ \rightarrow \gamma_3(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 3), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \gamma_3'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 0)$$

Notese que hemos parametrizado C_3 en sentido positivo, es decir, en sentido antihorario, cuando en ∂S es en sentido horario, por lo que la integral de C_3 es negativa.

Ahora si calculemos ambas integrales:

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{F} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (\sin(t), -\cos(t), 1+\sin(t)+\cos(t)), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt = \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} -\sin^2(t) - \cos^2(t) dt = -2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_3^+} \vec{F} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma_3(t)), \gamma_3'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (2\sin(t), -2\cos(t), 3+2\sin(t)+2\cos(t)), (-2\sin(t), 2\cos(t), 0) \rangle dt = \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} -4\sin^2(t) - 4\cos^2(t) dt = -4 \int_{t=0}^{t=2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t) dt = -8\pi \end{aligned}$$

Y así finalmente tenemos que, como hemos calculado la integral de C_3^+ que es opuesta a la de C_3^- , la cual es la que nos interesa:

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_{C_1^+} \vec{F} - \int_{C_3^+} \vec{F} = -2\pi - (-8\pi) = 6\pi$$