Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Superficies paramétricas

Definición 1.0.1

Una superficie parametrica en $\mathbb{R}^3$ *es* $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ *de clase* C^1*, definida en un abierto* $U \subset \mathbb{R}^2$*.*
Diremos que ϕ *es una parametrización de otra superficie.*
Ademas diremos que la parametrización ϕ *es regular si* $\left\{\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}\right\}$ *son linealmente independientes en todo punto de* U*.*
Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a ϕ *no es nulo:*

$$\vec{N}_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \neq 0$$

En este caso, el plano tangente a la superficie en $\phi(u_0, v_0)$ *tiene como ecuaciones:*

$$\begin{cases} x = \phi_1(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = \phi_2(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z = \phi_3(u_0, v_0) + \lambda \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases}$$

Ejemplo

Sea la superficie $z = x^2 + y^2$.
Sea la parametrización natural $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$.
Entonces el vector normal asociado a φ es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1) \neq (0, 0, 0)$$

Asi el vector normal asociado en $(0, 0)$ es $\vec{N}_\varphi(0, 0) = (0, 0, 1)$.

Ejemplo

Superficies explicitas:
Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1.
Entonces la grafica de f es la una superficie regular con parametrización:

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Ademas:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \neq (0, 0, 0)$$

Por lo tanto, la grafica de f es una superficie regular.

Ejemplo

Tengamos el cilindro:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 < z < 1$$

Tenemos ahora:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \text{con} \quad 0 < z < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Tenemos que $x^2 + y^2 = r^2 = 1 \implies r = 1$.
Tomemos ahora:

$$\varphi : U = \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Entonces el vector normal asociado a φ es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

Ejemplo

Sea $U = \left\{(u,v) : 1 < \sqrt{u^2+v^2} < 2\right\}$ y la parametrización:

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sqrt{u^2+v^2} - 1\right)$$