Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero

Ciencias Matemáticas e

Ingenería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Medida de Lebesgue

1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1.1 [n-Réctangulo]

Un n-rectángulo en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^{n} [a_i,\ b_i] = [a_1,\ b_1] \times [a_2,\ b_2] \times ... \times [a_n,\ b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i\ \forall i \tag{1}$$

Definimos el volúmen de R como:

$$vol(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \tag{2}$$

Consideramos también los n-rectángulos abiertos denotados por $\mathring{R}$, que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

Observación 1.1.1

Dado R n-rectángulo cerrado tal que $R = \prod_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i]$, podemos considerar para cada $\delta > 0$ el n-rectángulo abierto $R_\delta = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \delta,\ b_i + \delta)$. Se tiene que $R \subset R_\delta$ y $vol(R_\delta) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i + 2\delta) = vol(R) + 2n\delta$. Por tanto:

$$vol(R) = \lim_{\delta \to 0} vol(R_\delta) \tag{3}$$

Definición 1.1.2 [Medida Exterior de Lebesgue]

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la medida exterior de A como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ n-rectángulos cerrados} \right\} \tag{4}$$

Donde la ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de n-rectángulos que recubren A. A esta medida exterior la llamamos medida de Lebesgue exterior.

Observación 1.1.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$

1. $m^*(A) = +\infty \iff \forall (R_j)_{j\in J}$ *tal que* $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ *se tiene que* $\sum_{j\in J} vol(R_j) = +\infty$
2. $m^*(A) = 0 \iff \forall \epsilon > 0\ \exists (R_j)_{j\in J}$ *tal que* $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ *y* $\sum_{j\in J} vol(R_j) < \epsilon$
3. $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \epsilon > 0\ \exists (R_j)_{j\in J}$ *tal que* $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ *y* $\sum_{j\ inJ} vol(R_j) < \alpha + \epsilon$

Definición 1.1.3 [Conjunto Nulo]

Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo si $m^*(A) = 0$.

Ejemplo

1. Si R es un n-rectángulo degenerado, es decir, R tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces R es un conjunto nulo ($m^*(R) = 0$).

2. En $\mathbb{R}^2$, sea el conjunto $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$. Dado $\epsilon > 0$ tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \frac{1}{\epsilon}$. Consideramos $A \subset \bigcup_{i=1}^{m}[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$. Se tiene que $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{vol}([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \epsilon$. Por tanto, $m^*(A) = 0$.

Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.1

Sea $m^* \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ una función que cumple:

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. $m^*(A) \leq m^*(B)$ *si* $A \subset B$
3. $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

Entonces m^* es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

1. $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$ con R_j n-rectángulos degenerados $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$.
2. Sea $A \subset B$ y sea $(R_j)_{j\in J}$ tal que $B \subset \bigcup_{j\in J} R_j$. Entonces $(R_j)_{j\in J}$ es un recubrimiento de A y por tanto $m^*(A) \leq \sum_{j\in J} \text{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$.
3. Si $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = +\infty$ entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\exists (R_{j,i})_{i=1}^{\infty}$ tal que $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$ y por tanto se tiene que $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty}(m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, se tiene que $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$.

□

Corolario 1.1.1

La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

Demostración. Sea $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset R^n$ tal que $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ entonces $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$. □

Lema 1.1.1

Sea $A \in \mathbb{R}^n$ entonces $m^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} vol(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ con Q_i n-rectángulos abiertos$\}$

Demostración. Denotamos por β el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de rectángulos abiertos tal que $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$. Tenemos entonces que $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{Q}_j$ y puesto que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(\overline{Q}_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(Q_j)$, se tiene que $m^*(A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(\overline{Q}_j) \leq \beta$. Por tanto, $m^*(A) \leq \beta$. Veamos ahora la otra desigualdad $\beta \leq m^*(A)$. Si $m^*(A) = +\infty$ entonces $\beta = +\infty$ y no hay nada que demostrar.

Supongamos que $m^*(A) < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists (R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos cerrados tal que $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(A) + \epsilon$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideramos $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^j}$. Escogiendo $\delta_j > 0$ lo suficientemente pequeño, se tiene que $\text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \text{vol}(R_j) + \epsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Nótese que aquí $\text{vol}(R_j)_{\delta_j}$ denota el volumen del n-rectángulo abierto R_j con lados aumentados en δ_j. Entonces $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j}$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j\in\mathbb{N}} (\text{vol}(R_j) + \epsilon_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(A) + 2\epsilon$. Por tanto, $\beta \le m^*(A)$. □

Definición 1.1.4 [Partición de un Conjunto]

Una partición del intervalo $[a, b]$ es una colección numerable de puntos $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$. Dado un n-rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, una partición $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ de R es una colección particiones P_i de $[a_i, b_i]$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ siendo $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

Los subrectángulos de P son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1,i_2,...,i_n} = \prod_{j=1}^{n} [t^j_{i_j}, t^j_{i_j+1}] \tag{5}$$

Denotamos $S \in P$ para indicar que S es un subrectángulo de P.

Lema 1.1.2

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo y P una partición de R. Entonces:

1. $R = \bigcup_{S\in P} S$
2. *Si $S, S' \in P$ y $S \neq S'$ entonces $S \cap S' = \emptyset$*
3. *$vol(R) = \sum_{S\in P} vol(S)$*

Proposición 1.1.1

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo entonces $m^*(R) = vol(R)$.

Demostración.
" $\subseteq$ "
Sea $R \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j$ con $R_1 = R$ y R_j degenerados para $j > 1$. Entonces:

$$m^*(R) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \text{vol}(R_j) = \text{vol}(R_1) = \text{vol}(R).$$

" $\supseteq$ "
Dado $\epsilon > 0$ existe $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos abiertos tal que $R \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$. Sabemos que R es compacto al ser cerrado y acotado y, por tanto, al ser $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ un recubrimiento abierto de R, existe un subrecubrimiento finito $\{Q_1, Q_2, ..., Q_m\}$ de R. Entonces $R \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{Q}_i$. Consideramos $R_j = R \cap \overline{Q}_j$ para $j = 1, 2, ..., m$. Tenemos entonces que $R = \bigcup_{j=1}^m \overline{Q}_j$ y además prolongando los lados podemos obtener una partición P de R tal que cada subrectángulo de P está contenido el algún R_j para $1 \le j \le m$. Por tanto, $\text{vol}(R) = \sum_{S\in P} \text{vol}(S) \le \sum_{j=1}^m \text{vol}(R_j) \le \sum_{j=1}^m \text{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$. Por tanto, $m^*(R) \ge \text{vol}(R)$. □

1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Notación: Para $A \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por A^c al complementario de A en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.1 [Conjunto Medible]

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue si para todo $R \subset \mathbb{R}^n$ n-rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c) \tag{6}$$

Proposición 1.2.1

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces son equivalentes:

1. *A es medible en el sentido de Lebesgue.*
2. *$\forall E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto se tiene que $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.*
3. *$\forall E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto se tiene que $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.*

Demostración.
"2 $\implies$ 3"
Trivial
"3 $\implies$ 2"
$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A \cap A^c) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$
"2 $\implies$ 1"
Inmediato, tomando $E = R$.
"1 $\implies$ 3"
Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto, si $m^*(E) = +\infty$ entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $m^*(E) < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists \{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos cerrados tal que $E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$. Entonces $E \cap A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \cap A$ y $E \cap A^c \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \cap A^c$. Por tanto, $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$. Por tanto, $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$. $\square$

Definición 1.2.2 [σ-Álgebra]

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si:

1. *$X \in \mathcal{A}$*
2. *Si $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$*
3. *$\forall (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ se tiene que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$*

Definición 1.2.3 [Medida]

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra, entonces una medida en X es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. Si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:*

$$\mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$$

Teorema 1.2.1 [Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$]

La familia M *de todos los conjuntos medibles de* $\mathbb{R}^n$ *es una* σ*-álgebra y* $m = m^* \restriction_M$ *es una medida numerablemente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

Lema 1.2.1

$\mathbb{R}^n$ *es medible en el sentido de Lebesgue.*

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E) = m^*(E\cap\mathbb{R}^n)+m^*(E\cap(\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E)+m^*(\emptyset) = m^*(E) + 0 = m^*(E)$. □

Lema 1.2.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ *medible en el sentido de Lebesgue. Entonces* A^c *es medible en el sentido de Lebesgue.*

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E\cap A^c)+m^*(E\cap(A^c)^c) = m^*(E\cap A^c)+m^*(E\cap A) = m^*(E)$ □

Con los dos lemas anteriores obtenemos como colorario que $\emptyset$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Lema 1.2.3

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces* $A\cup B$ *y* $A\cap B$ *son medibles en el sentido de Lebesgue.*

Demostración. Observemos primero que $A\cup B = (A^c\cap B)\cup(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ luego entonces tenemos que $m^*(A\cup B) \leq m^*(A^c\cap B)+m^*(A\cap B)+m^*(A\cap B^c)$. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E) = m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c) = m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c\cap B)+m^*(E\cap A^c\cap B^c) = m^*(E\cap A\cap B)+m^*(E\cap A\cap B^c)+m^*(E\cap A^c\cap B)+m^*(E\cap A^c\cap B^c) \geq m^*(E\cap(A\cup B))+m^*(E\cap A^c\cap B^c) = m^*(E\cap(A\cup B))+m^*(E\cap(A\cup B)^c)$. □

Lema 1.2.4

Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ *es medible en el sentido de Lebesgue y además* $m^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(A_j)$*.*

Demostración. Definimos la sucesión creciente de conjuntos $B_k = A_1 \cup \ldots \cup A_k$. Entonces B_k es medible en el sentido de Lebesgue por el lema anterior. Sean $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ y $E \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$m^*(E\cap B_k) = m^*(E\cap B_k\cap A_k)+m^*(E\cap B_k\cap A_k^c) = m^*(E\cap A_k)+m^*(E\cap B_{k-1}) = m^*(E\cap A_k)+m^*(E\cap B_{k-1})$

Reiterando el proceso obtenemos $m^*(E\cap B_k)=\sum_{j=1}^k m^*(E\cap A_j)$. Por lo tanto, $m^*(E)=m^*(E\cap B_k)+m^*(E\cap B_k^c)=\left(\sum_{j=1}^k m^*(E\cap A_j)\right)+m^*(E\cap B_k^c)\geq \sum_{j=1}^k m^*(E\cap A_j)+m^*(E\cap B^c)$. Se sigue entonces $m^*(E)\geq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(E\cap A_j)+m^*(E\cap B^c)\geq m^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E\cap A_j)+m^*(E\cap B^c)\geq m^*(E\cap B)+m^*(E\cap B^c)$ Luego B es medible.
Tomando $E=B$ en la desigualdad anterior obtenemos $m^*(B)\geq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(B\cap A_j)+m^*(B\cap B^c)=\sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(B\cap A_j)$. Por otro lado, $m^*(B)\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(B\cap A_j)$ por definición de medida exterior. Por tanto, $m^*(B)=\sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(A_j) \implies m^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(A_j)$. □

Lema 1.2.5

La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Considermos:

$$\begin{gathered} A_1=B_1\\ A_2=B_2\cap B_1^c\\ A_3=B_3\cap B_2^c\cap B_1^c\\ \vdots\\ A_j=B_j\cap B_{j-1}^c\cap\ldots\cap B_1^c \end{gathered}$$

Observemos que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j=\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ y que para todo $j\in\mathbb{N}$, A_j es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto, A_j es medible. Además, $\forall i,j\in\mathbb{N}$ con $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\emptyset$. Por el lema anterior, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ es medible $\implies \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ es medible. □

Proposición 1.2.2

Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ nulo, entonces $m^*(A)=0$. $\forall E\in\mathbb{R}^n$ se tiene que $E\cap A\subset A \implies 0\leq m^*(E\cap A)\leq m^*(A)=0 \implies m^*(E\cap A)=0$. Análogamente, $E\cap A^c\subset E \implies 0\leq m^*(E\cap A^c)\leq m^*(E) \implies m^*(E\cap A^c)=0$. Por tanto, $m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c)\leq m^*(E)$. Para la otra desigualdad, $E=(E\cap A)\cup(E\cap A^c) \implies m^*(E)\leq m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c)$. Y por tanto obtenemos la igualdad $m^*(E)=m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c)$. □

Definición 1.2.4

Se dice que una propiedad se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.

Proposición 1.2.3

Todo n-rectángulo cerrado $R\in\mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Dado $R\subset\mathbb{R}^n$ n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que $\forall Q\in\mathbb{R}^n$ n-rectángulo cerrado se tiene que $\text{vol}(Q)\geq m^*(Q\cap R)+m^*(Q\cap R^c)$. Consideramos el n-rectángulo $Q_0=Q\cap R$. Nótese que $Q\cap R^c$ es unión finita de n-rectángulos $\{Q_1,\ldots,Q_m\}$. Entonces $Q=Q_0\cup Q_1\cup\ldots\cup Q_m$ forman una partición de Q. Luego $\text{vol}(Q)=\sum_{i=0}^m \text{vol}(Q_i)=m^*(Q\cap R)+\sum_{i=1}^m m^*(Q_i)\geq m^*(Q\cap R)+m^*(Q\cap R^c)$. □

Observación 1.2.1

En $\mathbb{R}^n$ los rectángulos abiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.

Definición 1.2.5 [n-Cubo]

Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \tag{7}$$

Análogamente se pueden definir los cubos n-dimensionales semi-abiertos.

Observación 1.2.2

Denotaremos la norma del supremo en $\mathbb{R}^n$ como:

$$||x||_\infty = \sup_{i=1}^{n}\{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

Llamaremos bola abierta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x||_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \ldots \times (x_n - r, x_n + r) \tag{9}$$

Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x||_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r] \tag{10}$$

Teorema 1.2.2

Sea $G \in \mathbb{R}^n$ abierto entonces se tiene:

1. *G es unión numerable de n-cubos cerrados.*
2. *G es unión numerable de n-cubos abiertos.*

Demostración. Consideremos la familia de n-cubos $\mathcal{B} = \{\overline{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B}_\infty(q, r) \subset G\}$. Veamos que $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Dado que $B \in G \quad \forall B \in \mathcal{B}$ entonces es inmediato ver que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset G$. Por ser G abierto, $\exists \delta > 0$ tal que $B_\infty(x, \delta) \subset G$. Sea $r \in \mathbb{Q}$ con $0 < r < \frac{\delta}{2}$, por la densidad de $\mathbb{Q}^n$ en $\mathbb{R}^n$, sabemos que $\exists q \in \mathbb{Q}^n$ tal que $||x - q||_\infty < r$. Veamos entonces que $x \in B_\infty(q, r) \subset B_\infty(x, \delta) \subset G$.
Dado $y \in \mathbb{R}^n$ con $||y - q||_\infty < r$ se sigue:

$$||y - x||_\infty \leq ||y - q||_\infty + ||q - x||_\infty < r + r = 2r < \delta$$

Por tanto $y \in B_\infty(x, \delta) \implies x \in \overline{B}_\infty(q, r) \subset G$. Luego $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
Nótese que numerabilidad de la familia $\mathcal{B}$ es inmediata por la numerabilidad de $\mathbb{Q}^n$ que, a su vez, es numerable por ser $\mathbb{Q}$ numerable.
La segunda parte del teorema es análoga a la primera. □

Corolario 1.2.1

Todos los conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

Teorema 1.2.3 [Regularidad de la Medida]

Sea $E \in \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. *E es medible en el sentido de Lebesgue.*
2. *$\forall \epsilon > 0 \quad \exists G \in \mathbb{R}^n$ abierto tal que $E \subset G$ y $m^*(G \setminus E) < \epsilon$.*
3. *$\forall \epsilon > 0 \quad \exists F \in \mathbb{R}^n$ cerrado tal que $F \subset E$ y $m^*(E \setminus F) < \epsilon$.*
4. *$\forall \epsilon$ existen F cerrado y G abierto tales que $F \subset E \subset G$ y $m^*(G \setminus F) < \epsilon$.*

Demostración.
"1 $\implies$ 2" Distinción de casos:

1. Supongamos que $m^*(E) < +\infty$: Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists (R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos abiertos tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(R_j)$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) < m^*(E)+\epsilon$. Considerando el abierto $G = \bigcup_{j=1}^{\infty}(R_j)$, se tiene que G es medible por el colorario anterior y $m^*(G) = m^*(E \cap G) + m^*(E \cap G^c) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$. Por tanto, $m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) - m^*(E) < \epsilon$.
2. Supongamos que $m^*(E) = +\infty$: $\forall k \in \mathbb{N}$ sea $E_k = E \cap [-k,k]^n$, que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además $m^*(E_k) < +\infty$ por ser E_k acotado, y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Dado $\epsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ existe G_k abierto tal que $E_k \subset G_k$ y $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Entonces $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ abierto y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$ por lo que $m^*(G \setminus E) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus E_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$.

"2 $\implies$ 1"
$\forall j \in \mathbb{N}$ tomando $\epsilon = \frac{1}{j}$ entonces $\exists G_j$ abierto tal que $E \subset G_j$ y $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$. Entonces considerando $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ que es medible y abierto se tiene que $E \subset B$. Luego $B \setminus E \subset G_j \setminus E$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por tanto, $m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$. En consecuencia $m^*(B \setminus E) = 0 \implies B \setminus E$ es medible.
Por otro lado, $B = E \cup (B \setminus E)$ o que es lo mismo $E = B \setminus (B \setminus E)$. Tanto B como $(B \setminus E)$ son medibles, luego E es medible.
Observación: Además, $E = B \setminus Z$, donde B es intersección numerable de abiertos o Z es un conjunto nulo.
"1 $\implies$ 3"
Como E es medible entonces E^c también los es. Por (2), dado $\epsilon > 0$ existe G abierto tal que $E^c \subset G$ y $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$. Entonces $F = G^c$ es cerrado y $F \subset E$. Además, $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$.
"1 $\implies$ 3"
Como E es medible entonces tenemos que E^c también es medible, por lo que, dado $\epsilon > 0$ por (2) $\exists G$-abierto tal que $E^c \subset G$ y $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$. Entonces $F = G^c$ es cerrado y $F \subset E$. Además, $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$.
"3 $\implies$ 1"
$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists F_j$ cerrado tal que $F_j \subset E$, $m(E \setminus F_j) < 1/j$. Sea $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ conjunto medible y $A \subset E$. Además, $m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < 1/j\ \forall j \in \mathbb{N}$. Por tanto, $E = A \cup (E \setminus A) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \cup (E \setminus A)$ Entonces dado que $E \setminus A$ es un conjunto medible por ser nulo y $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ es medible por ser unión numerable de conjuntos cerrados, entonces E es medible.

$\square$

Definición 1.2.6 [σ-Álgebra de Borel]

La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ es la menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$ (o equivalentemente, la menor σ-álgebra que contiene a todos los cerrados de $\mathbb{R}^n$). Los conjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.
Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es G_δ si A es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ es F_σ si A es unión numerable de cerrados.

Corolario 1.2.2

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. *E es medible en el sentido de Lebesgue.*
2. *$E = A \setminus N$ con A siendo G_δ y N un conjunto nulo.*
3. *$E = B \cup N$ con B siendo F_σ y N un conjunto nulo.*

Lema 1.2.6

Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ es medible en el sentido de Lebesgue y $m(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \lim_{j\to\infty} m(A_j)$.

Demostración. Sea $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Considermos:

$$\begin{gathered} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \cap B_1^c \\ A_3 = B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ \vdots \\ A_j = B_j \cap B_{j-1}^c \cap \ldots \cap B_1^c \end{gathered}$$

De esta manera obtenemos que $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$ y que $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de conjuntos Entonces $m^*(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) = m^*(\bigcup_{j=1}^\infty B_j) = \sum_{j=1}^\infty = \lim_{k\to\infty} m(A_k)$ Dado que $m^*(A_j) = m(B_1) + m(B_2) + \ldots + m(B_j)$ $\forall j >= 1$ ☐

Corolario 1.2.3

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible entonces:

1. *$m(E) = inf\{m(G) : G$ abierto y $E \subset G\}$.*
2. *$m(E) = sup\{m(K) : K$ compacto y $K \subset E\}$.*

Demostración. $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k : E_k = E \cap [-k, k]^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$ Entonces $(E_k)_k \in \mathbb{N}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles y por el lema anterior tenemos que $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$ Además, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists F_k \subset E_k$ cerrado tal que $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$ Entonces como F_k es un conjunto cerrado y acotado, tenemos que el conjunto es compacto. Por tanto $m(E_k) = m(E_k \setminus F_k) + m(F_k) \geq m(F_k) + 1/k$ y por tanto $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(F_k)$ y finalmente obtenemos que $m(E) = \sup\{m(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m(K) : K$ compacto y $K \subset E\}$ ☐

Definición 1.2.7 [Cubo Diádico]

Se dice que un cubo en $\mathbb{R}^n$ es diádico si sus lados miden 2^{-m} para algún $m \in \mathbb{N}$. Es decir, si el rectángulo Q es de la forma:

$$Q = \left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

con $m \in \mathbb{Z}$(nivel de escala u orden) y $k_1, k_2, \ldots k_n \in \mathbb{Z}$

Teorema 1.2.4

Todo conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ es unión numerable y disjunta n-cubos semiabiertos, que son cubos diádicos.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{F}$ la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

con $k_i \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{Q}_1$ la familia de todos los cubos cerrados Q de la forma $[k_1, k_1+1]\times\cdots\times[k_n, k_n+1]$, donde los $k_i \in \mathbb{Z}$, y tales que $Q \subset U$. Supuesto definida $\mathcal{Q}_m$, sea $\mathcal{Q}_{m+1}$ la familia de todos los cubos Q de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

donde $k_i \in \mathbb{Z}$, tales que no están contenidos en ningún cubo $Q' \in \mathcal{Q}_j$ para $j \leq m$, y tales que $Q \subset U$. Por inducción queda definida $\mathcal{Q}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y ponemos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Es obvio por construcción que si $Q, Q' \in \mathcal{Q}$ y $Q \neq Q'$, entonces Q y Q' tienen interiores disjuntos. También es claro que que $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q \subset U$. Veamos que de hecho

$$U = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q.$$

Dado $x \in U$, usando que U es abierto y que el conjunto $\{k/2^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ es denso en $\mathbb{R}$, es fácil ver que existe algún cubo $Q_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \in Q_x$ y $Q \subset U$. El lado de Q_x mide 2^{-m_x} para algún $m_x \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Si $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$ ya hemos terminado. En otro caso, por definición de $\mathcal{Q}_{m_x}$, existe algún $j < m_x$ tal que Q_x está contenido en algún cubo $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$, y por tanto x pertenece a este cubo. En cualquier caso se ve que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$. □

1.3 Medibilidad de Funciones

Definición 1.3.1 [Espacio Medible]

Un espacio medible es un par (X, Σ) donde X es un conjunto y Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible y $M|_E$ es la familia de subconjuntos medibles de E.
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$, donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto boreliano y $B|_A$ es la familia de subconjuntos borelianos de A.

Definición 1.3.2 [Función Medible]

Sea (X, Σ) un espacio medible. Una función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es medible si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ es un conjunto medible.

Proposición 1.3.1

Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to [-\infty, +\infty]$, entonces son equivalentes

1. *f es medible.*
2. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto medible.*
3. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto medible.*
4. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto medible.*
5. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son conjuntos medibles.*
6. *Para todo $G \subset \mathbb{R}$ abierto, los conjuntos $f^{-1}(G)$, $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son conjuntos medibles.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ dado que las σ-álgebras son cerradas bajo complementarios, obtenemos que (1) $\iff$ (2) y (3) $\iff$ (4).
Veamos ahora la relación (1) $\iff$ (4):

- (1) $\implies$ (4): Podemos tomar el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}$ que es una intersección numerable de conjuntos medibles por (1). Por tanto al tomar el limite cuando $k \to \infty$ obtenemos que $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.
- (4) $\implies$ (1): Equivalentemente al apartado anterior podemos obtener que el conjunto $\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\}$ es medible por (4). Por tanto, también al tomar el límite cuando $k \to \infty$ obtenemos que $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ es medible.

De forma análoga a esta equivalencia podemos obtener que (2) $\iff$ (3). Y también las equivalencias de (5) $\iff$ (6) son inmediatas, pues podemos tomar los conjuntos acotados $x \in X : \alpha \leq f(x) < \beta = x \in X : f(x) \geq \alpha \cap x \in X : f(x) < \beta$ los cuales son conjuntos medibles por los apartados anteriores. De forma similar podemos obtener que el conjunto $x \in X : f(x) = +\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\}$ es medible por los apartados anteriores. De forma análoga se demuestra el caso de (6). Por último veamos la equivalencia de (6) $\iff$ (7):

1. (7) $\implies$ (6): Dado un conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ podemos tomarlo como $G = (\alpha, \beta)$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por tanto, el conjunto $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\} = \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\}$ y asimismo, los conjuntos $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son medibles por las equivalencias anteriores.

2. (6) $\implies$ (7): Dado un conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ podemos reescribir G como $G = \bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j)$ donde $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Por tanto, el conjunto $f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\alpha_j, \beta_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\}$ es medible por las equivalencias anteriores.

□

Corolario 1.3.1

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es medible.

Proposición 1.3.2

Sea (X, Σ) un espacio medible y $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles y $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces la función $\Phi \circ (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}$ es medible.

Demostración. Sean $(f_1, f_2, \ldots f_n) : X \to \mathbb{R} y \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones medibles y continua respectivamente. Denotemos por $h = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \circ \Phi : X \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y sea $G \subset \mathbb{R}$ conjunto abierto, entonces, denotemos por $U = \Phi^{-1}(G)$ al conjuto abierto en $\mathbb{R}^n$. Entonces sea $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sucesión de rectángulos n-dimensionales tales que $(R_j) = \prod_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^j . \beta_i^j) \forall j \in \mathbb{N} \iff \forall j \in \mathbb{N} f^{-1}(R_j) = \prod_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^j . \beta_i^j)$ es medible. Por tanto, la funcion h es medible. □

Corolario 1.3.2

Sean (X, Σ) espacio medible y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles, entonces $f + g$ $f \circ g$, $max\{f, g\}$, $min\{f, g\}$, $f^+ = max\{f, 0\}$, $f^- = min\{f, 0\}$ son todo funciones medibles.

Observación 1.3.1

$f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Teorema 1.3.1

Sea (X, Σ) espacio medible y $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : X \to [+\infty, -\infty]$ una sucesión de funciones medibles, entonces:

1. $\sup_{j \in \mathbb{N}}\{f_j\}$ *es una función medible.*
2. $\inf_{j \in \mathbb{N}}\{f_j\}$ *es una función medible.*
3. $\limsup_{j \to \infty}\{f_j\}$ *es una función medible.*
4. $\liminf_{j \to \infty}\{f_j\}$ *es una función medible.*
5. $\lim_{j \to \infty} f_j = f$ *es una función medible.*

Demostración.

1. Denotemos $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$ y dado $\alpha \in \mathbb{R}$ queremos ver que $x \in X : h(x) > \alpha$ es un conjunto medible. Entonces, $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha \iff \exists j \in \mathbb{N} : f_j(x) > \alpha \Rightarrow x \in X : h(x) > \alpha = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha$ que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

2. Denotemos $g(x) = \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j$ y dado $\alpha \in \mathbb{R}$ queremos ver que $x \in X : g(x) < \alpha$ es un conjunto medible. Entonces, $\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j \geq \alpha \iff \forall j \in \mathbb{N} : f_j(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in X : g(x) \geq \alpha = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} x \in X : f_j \geq \alpha$ que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

3. Recordemos que $\limsup_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty}(\sup_{k\geq j} f_k) = \lim_{j\to\infty} \sup f_j, f_{j+1}, \ldots$. Entonces como el límite de una sucesión decreciente y acotada siempre existe tenemos que $\lim_{j\to\infty} \sup_{k\geq j} f_k = \inf_{j\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq j} f_k)$ que es medible por ser una función continua.

4. Recordemos que $\liminf_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty}(\inf_{k\geq j} f_k) = \lim_{j\to\infty} \inf f_j, f_{j+1}, \ldots = \sup_{j\in\mathbb{N}} (\inf_{k\geq j} f_k)$ que es medible por ser una función continua.

5. Si $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ (puntualmente) entonces $\lim_{j\to\infty} f_j = \limsup_{j\to\infty} f_j = \liminf_{j\to\infty} f_j = f$. Entones por los apartados anteriores obtenemos que f es una función medible.

$\square$

Proposición 1.3.3

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to [+\infty, -\infty]$ funciones medibles-Lebesgue tales que $f = g$ en casi todo punto. Entones g es medible-Lebesgue.

Demostración. Dado que $f = g$ en casi todo punto, entonces $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ es un conjunto de medida nula. Entonces, dado un $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : f(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$ es medible dado que $\{x \in Z : f(x) < \alpha\}$ es medible por ser un conjunto de medida nula y $\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$ es medible por ser g medible. Por tanto, g es medible. $\square$

Corolario 1.3.3

Sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \to [+\infty, -\infty]$ sucesión de funciones medibles tales que $f_j \to f$ en casi todo punto, entonces f es medible.

Demostración. Sea $Z = \{x \in X : f_j(x) \not\to f(x)\}$ el cual tiene medida nula por hipótesis. Entones definimos la función $g(x) = \begin{cases} \lim_{j\to\infty} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$ en casi todo punto. Asimismo podemos definir la sucesión de funciones $g_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases}$ que converge a g puntualmente, por tanto, por la proposición anterior tenemos que g es medible $\Rightarrow f$ es medible. $\square$

Definición 1.3.3 [Función Característica]

Sea (X, Σ) espacio medible. Definimos la función característica de un conjunto $E \in \Sigma$ como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in E^c \end{cases}$$

Observación 1.3.2

χ_E es medible $\iff E \in \Sigma$

Demostración. Sea $G \subset \mathbb{R}$ abierto, podemos definir el conjunto

$$\chi_E^{-1}(G) = \{x \in X : \chi_E(x) \in G\} = \begin{cases} X & 0 \in G \quad 1 \in G \\ E & 0 \notin G \quad 1 \in G \\ E^c & 0 \in G \quad 1 \notin G \\ \emptyset & 0 \notin G \quad 1 \notin G \end{cases}$$

por tanto, χ_E es medible $\iff E \in \Sigma$. □

Observación 1.3.3

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ y $f : E \to [-\infty, +\infty]$. Entonces son equivalentes:

1. *$f : E \to [-\infty, +\infty]$ es medible-Lebesgue.*
2. *$f \circ \chi_E : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ es medible-Lebesgue.*

Demostración.

- $(1 \implies 2)$: E^c es medible y $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible $\implies \{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$ es medible.
- $(2 \implies 1)$: $\{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\}$ es medible $\implies \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible.

□

Definición 1.3.4

Sea (X, Σ) espacio medible y $f : X \to [0, +\infty]$. Se dice que f es una función simple si toma un valor finito de valores. Es decir si: $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty]$. Además denotamos a $f^{-}1(\alpha_i) = E_i$ y $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$. Asimismo obtenemos que $X = bigcup_{i=1}^{n} E_i$-unión disjunta de conjuntos. De este modo podemos decir que f es una combinación lineal finita de funciones simples.

Observación 1.3.4

---

f es medible $\iff \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ es medible.

Teorema 1.3.2

Sea (X, Σ) espacio medible y $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible. Entonces existen funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

- *$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f$.*
- *$\forall x \in X \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*
- *Si además, f acotada $\implies \lim_{n\to\infty} f_n = f$ en casi todo punto.*

Demostración. $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n2^n$ definimos: $E_{n,i} = f^{-}1([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]) = \{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\}$ y $F_n = f^{-}1([n, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > n\}$. Los cuales son conjuntos medibles por ser preimágenes de conjuntos medibles. Sea entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} X_{E_{n,i}} + nX_{F_n}$, la cual es una sucesión de funcion simples. Analicemos la convergencia (puntual) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$:

- Si $f(x) = +\infty \implies f(x) \geq m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies f_n(x) = m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) < +\infty \implies \exists m(x) \in \mathbb{N} : 0 \leq f(x) \leq m(x) \implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) \leq \frac{k}{2^m}$ y $f_n = \frac{k-1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies 0 \leq |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Además, cuando $\exists M \in \mathbb{N} : f(x) \leq M \quad \forall x \in X \implies 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall n \geq m \implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (uniformemente).

Ahora veamos que $f_n(x)$ es creciente: $f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & x \in E_{n,i} \\ n & x \in F_n \end{cases} \implies f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & x \in E_{n,i} \\ n+1 & x \in F_{n+1} \end{cases} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dado que $1 \leq i \leq n2^n \implies 1 \leq i \leq 2^{n+1} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 1.3.5 [Integral de una función simple]

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la $\sigma-$álgbra M de los conjuntos medibles y la medida-Lebesgue m. Sea $s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una función simple, medible, no negativa y con representación canónica $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ donde $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m A_i$-unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces definimos la integral de s como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s\, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$$

Observación 1.3.5

$\int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0$

Demostración. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ mdible definimos $\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \circ X_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap E)$. $\square$

Lema 1.3.1

Sea $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^\infty X_k$ unión disjunta de conjuntos medibles. Sea $s : \mathbb{R}^\ltimes \to [0, +\infty]$ una función simple, medible y no negativa. Entonces $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^\infty \int_{X_k} s$.

Demostración. Supongamos que

$$s = \sum_{i=1}^m d_i \cdot \chi_{A_i}$$

(forma canónica), entonces

$$s(\mathbb{R}^n) = \{d_1, \ldots, d_m\}.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, sea $B_k \in \{d_1, \ldots, d_m\}$. Definimos para cada $j = 1, \ldots, m$ el conjunto

$$Y_j = \{k \in \mathbb{N} : \beta_k = d_j\}.$$

Así, $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^m Y_j$ es una unión disjunta. Además,

$$s^{-1}(\alpha_j) = A_j = \bigcup_{k \in Y_j} X_k,$$

una unión disjunta.

Entonces, usando la propiedad de la medida en una unión disjunta, tenemos

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k \in Y_j} X_k\right) = \sum_{k \in Y_j} m(X_k).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k).$$

Intercambiando el orden de la suma,

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k) = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

□

Corolario 1.3.4

Sean $s, t : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ funciones simples, medibles y no negativas. Entonces: $\int_{\mathbb{R}^n}(s+t) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$.

Demostración. Sea $S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ y $t = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot \chi_{B_j}$. Dado que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{k} (A_i \cap B_j)$, donde la unión es disjunta y los conjuntos A_i, B_j son medibles, se tiene que en $A_i \cap B_j : s + t = \alpha_i + \beta_j$. Aplicando el lema de integración para funciones simples: $\int_{\mathbb{R}^n}(s+t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j m(A_i \cap B_j) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$ (por el lema). □

Definición 1.3.6

Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ una función medible. Definimos la integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible y $f : E \to [0, +\infty)$, definimos:

$$\int_{E} f = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E\right\}.$$

Proposición 1.3.4

Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

1. *si $0 \leq f \leq g$ y $E \subset F$ entonces $\int_E f \leq \int_F g$.*
2. *si $f, g, \geq \implies \int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.*
3. *si $c \geq 0, f \geq 0 \implies \int_E cf = c \int_E f$.*

4. si $m(E) = 0 \implies \int_E f = 0$. (Incluso si $f = +\infty$)
5. si $f\big|_E = 0 \implies \int_E f = 0$. (Incluso si $m(E) = +\infty$)
6. si $A \subset B y f \geq 0 \implies \int_A f \leq \int_B f$.
7. si A, B son conjuntos medibles y disjuntos y $f \geq 0 \implies \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.
8. si $f = g$ en casi todo punto de $E \implies \int_E f = \int_E g$.

Demostración. 1. Si $f = c \cdot 0$, entonces es trivial.

Si $c > 0$, tomamos $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, con $0 \leq s \leq f$.

Entonces, $c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, con $0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$.

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

2. Si $m(E) = 0$, entonces para toda s simple y medible tal que $0 \leq s \leq f$, se tiene que

$$s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}.$$

De donde,

$$\int_E s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \right\} = 0.$$

3. Para toda s simple con $0 \leq s \leq f$, se tiene que $s(x) = 0$ para casi todo $x \in E$.

Luego,

$$f \cdot \chi_E = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \int_E s = 0, \quad \forall s.$$

Tomando el supremo,

$$\sup \left\{ \int_E s \right\} = 0 = \int_E f.$$

4. Si f es simple y medible con $0 \leq s \leq f$, se tiene que

$$\text{si } A \subset B, \quad \chi_A \leq \chi_B \Rightarrow 0 \leq s \cdot \chi_B.$$

5. Si A, B son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B.$$

Así,

$$\int_{A\cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A\cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B).$$

Por linealidad de la integral,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

Por lo tanto,

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

8. Si $E = A \cup Z$, con A y Z disjuntos y tales que $x \in E \Rightarrow f(x) = g(x)$, entonces

$$Z = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Si $m(Z) = 0$, se tiene que

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f = \int_A g + 0 = \int_A g.$$

$\square$

Teorema 1.3.3 [Convergencia Monótona]

Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles tales que:

1. *$f_1 \leq f_2 \leq \ldots.$ (en $\mathbb{R}^n$)*
2. *$\lim_{k\to\infty} f_k = f$ (puntualmente en $\mathbb{R}^n$)*

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Demostración. La sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente en $[0, +\infty)$. Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k\to\infty} f_k, \in [0, +\infty].$$

Dado que $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.// Sea s una función simple y medible en $\mathbb{R}^n$ con $0 \leq s \leq f$, y fijemos un $c \in (0, 1)$. $\forall k \in \mathbb{N}$, definimos la sucesión de conjuntos $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$. Esta sucesión es medible (debido a que tanto f_k como s son medibles) y es creciente (debido a que $f_k \leq f_{k+1}$ y $c \cdot s \leq c \cdot f \leq f$). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f_k(x) = 0, \Rightarrow s(x) = 0 \Rightarrow 0 = f_k(x) \Rightarrow 0 = s(x) \Rightarrow x \in E_k \quad \forall k. \\ \text{Si } f_k(x) > 0, \Rightarrow c \cdot s(x) \leq f_k(x) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad c \cdot s(x) \leq f_k(x). \end{cases}$$

Por lo tanto, $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$ con $s^-1(\alpha_j) = A_j$ tenemos:

$$m(A_j) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty}(E_k \cap A_j)) = \lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_j).$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando $k \to \infty$, obtenemos que:

$$l \geq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite $c \to 1$ obtenemos que:

$$l \geq \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que s es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad $\forall s$ función simple, medible y no-negativa (por ser $0 \leq s \leq f$). Por tanto, obtenemos la ansiada desigualdad: $l \geq \int_{\mathbb{R}^n} f$. □

Teorema 1.3.4

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f_k : E \to [0, +\infty]$ sucesión de funcion medibles y $f : E \to [0, +\infty]$ tales que:

1. $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ *(en casi todo punto de E)*
2. $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ *(en casi todo punto de E)*

Demostración. Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que $m(N) = 0$. Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E\setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \hat{f} = f \cdot \chi_{E\setminus N}$$

Podemos aplicar el **Teorema de la Convergencia Monótona**, lo que nos permite concluir que: 1. $\hat{f}_k \to f$ puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_E f = \int_{E\setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

□

Corolario 1.3.5

1. *si $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ son medibles, medibles y no-negativas $\implies$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

.

2. *si* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ *sucesión de funciones mediles* $\forall k \in \mathbb{N} \implies$

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

.

Demostración. 1. Sabemos que existen sucesiones crecientes $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones simples medibles no negativas tales que $lim_{j\to\infty} s_j = f$ y $lim_{j\to\infty} t_j = g$. Por lo tanto, aplicando el **Teorema de la Convergencia Monótona** obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + t_j = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

2. Por el apartado anterior obtenemos que: $\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{m} f_k \implies$ podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona, dado que la sucesión $\sum_{k=1}^{m} f_k$ converge de forma creciente a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Entonces finalmente obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

.

□

Lema 1.3.2

Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{R}^n}$ *sucesión de funciones medibles, entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k \leq liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Demostración. Sea

$$f = \liminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} f_j = \lim_{k\to\infty} g_k$$

Dado que $g_k \geq 0$, la sucesión (g_k) está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el **Teorema de la Convergencia Monótona **, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} g_k.$$

Por definición del $\liminf$, se cumple la desigualdad:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k.$$

Finalmente, dado que $g_k \leq f$, se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

□

Observación 1.3.6

El resultado análogo con $\limsup$ *no es válido en gneral. Podemos tomar de contraejemplo la función* $f_k = k \cdot \chi_{[k,\infty]}$.

Definición 1.3.7

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto medible y* $f : E \to [0, +\infty]$ *función medible. Se dice que* f *es integrable (o absolutamente integrable) cuando*

$$\int_E f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

Observación 1.3.7

f *es integrable en* $E \iff |f|$ *es integrable en* $E \iff f^+$ *y* f^- *son integrables en* E.

Lema 1.3.3

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ *y* $f = g - h$ *con* $g, h : E \to [-\infty, +\infty]$ *funciones integrables. Entonces,*

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h.$$

Demostración. Si $f = g - h \implies |f| = |g - h| \leq g + h \implies f$ es integrable. $f = f^+ - f^- = g - h \implies f^+ + h = f^- + g \implies \int_E f^+ + h = \int_E f^- + g \implies \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h$. $\square$

Proposición 1.3.5

Para funciones f *y* g *integrables en* E, *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si* f, g *son integrables en* E, *entonces* $f + g$ *también es integrable y*

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

2. *Si* f *es integrable en* E *y* $c \in \mathbb{R}$, *entonces* cf *es integrable en* E *y*

$$\int_E (cf) = c \int_E f.$$

3. *Si* $f \leq g$ *en casi todo punto de* E, *entonces*

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4. *Si $|f|$ es integrable en E, entonces f también es integrable y*

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|.$$

5. *Si $f = g$ en casi todo punto de E y f es integrable en E, entonces g también es integrable en E con,*

$$\int_E f = \int_E g.$$

6. *Si $m(E) = 0$ y f es medible, entonces es integrable en E y*

$$\int_E f = 0$$

7. *Si f es integrable en E entonces $|f| < \infty$ en casi todo punto de E*

8. *Si $\int_E |f| = 0$, entonces $f = 0$ en casi todo punto de E.*

Demostración.

(1) Dado que $f = f^+ - f^-$ y $g = g^+ - g* - \implies f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, con ambas partes ≥ 0. Entones, por el lema de la integral de funciones no negativas,

$$\int_E (f+g) = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-.$$

Reagrupando términos,

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

(2) Si $c > 0$. Como $cf = cf^+ - cf^- \implies$,

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^- = c\int_E f^+ - c\int_E f^- = c\int_E f.$$

Si $c < 0$, usando $cf = cf^+ - cf* - = (-c)f^+ - (-c)f^-$. Entones aplicamos el apartado anterior y obtenemos que:

$$\int_E cf = c\int_E f.$$

(3) Como $g - f \geq 0$ en casi todo punto de E, se cumple que: $(g - f) \cdot \chi_E \geq 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n \implies$

$$\int_E (g - f) \geq 0.$$

Aplicando la linealidad de la integral,

$$\int_E g - \int_E f \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

(4) Se tiene que $|f| = f^+ + f^-$. Usando la linealidad de la integral,

$$|\int_E f| = |\int_E f^+ + \int_E f^-.|$$

Como $f = f^+ - f^-$, aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|.$$

(5) Como $f = g$ en casi todo punto de $E \implies f^+ = g^+ \quad f^- = g^-$ en casi todo punto de E por lo que sólo queda aplicar el apartado anterior.

$$\int_E f = \int_E g$$

(6) $|f| \cdot \chi_E \geq 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n \implies \int_E |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \chi_E| = 0 \implies$

$$|\int_E f| \leq \int_E |f| = 0$$

(7) No se qué hace la demostracion

(8) Sea

$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

Definimos los conjuntos

$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, evaluamos la medida de A_k utilizando la integral:

$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \leq \int_{A_k} k \cdot |f| = k \int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} |f| \leq \int_E |f|$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$ (y de la subaditvidad) se concluye que

$$m(A) = \lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0.$$

□

Teorema 1.3.5

Sean $E \subset \mathbb{R}^{\ltimes}$ medible y $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k : E \to [-\infty, +\infty]$ funciones medibles. Supongamos que $\exists g : E \to [-\infty, +\infty]$ integrable en E tal que $|f_k| < g$ en casi todo punto de E y $\forall k \in \mathbb{N}$. Si además suponemos que $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ en casi todo punto de E, entonces:

1. *f_k y f son integrables en E*
2. *$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| = 0$*
3. *$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$*

Demostración.

1. Dado que $|f_k| \leq |g| = g \quad \forall k \in \mathbb{N}$, se concluye que f_k es integrable en E. Además, como $|f| \leq g$, se sigue que f también es integrable en E.

2. Observamos que $|f_k - f| \le |f_k| + |f| \le g + g = 2g \ge 0$, lo que implica que $2g - |f_k - f| \ge 0$. Además, la sucesión de funciones $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge casi en todo punto de E a $2g - 0 = 2g$. Aplicando el **lema de Fatou** a $\hat{f}_k = h_k \chi_E$, obtenemos que:

$$\int_E \lim_{k\to\infty} h_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E h_k$$

A partir de esto, se deduce la siguiente igualdad:

$$\int_E 2g = \liminf_k \left(\int_E 2g - \int_E |f_k - f| \right) = \lim_k \int_E 2g + \liminf_k \left(- \int_E |f_k - f| \right) = \int_E 2g - \limsup_k \int_E |f_k - f|$$

Utilizando el siguiente **lema**: si $a_k \to a$, entonces

$$\liminf_k (a_k + b_k) \ge \liminf_k a_k + \liminf_k b_k$$

se concluye que:

$$\limsup_k \int_E |f_k - f| \le \int_E 2g - \int_E 2g = 0 \Rightarrow \lim_k \int_E |f_k - f| = 0$$

3. Finalmente, aplicamos la propiedad de la integral a la diferencia $f_k - f$:

$$\left| \int_E f_k - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_k - f) \right| \le \int_E |f_k - f| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$$

□

Definición 1.3.8 [Integral Paramétrica]

Sea f función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_E f(x,u)dx$$

Teorema 1.3.6

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto medible, $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto cualquiera, $f : E \times U \to \mathbb{R}$ y suponemos que:

1. *$\forall u \in U f(\cdot, u) : E \to \mathbb{R}$ es medible.*
2. *$\forall x \in E f(x, \cdot) : U \to \mathbb{R}$ es continua.*
3. *$\exists g : E \to [0, +\infty]$ integrable en E tal que $|f(x,u)| \le g(x)$ en casi todo punto de E y $\forall u \in U$.*

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_E f(x,u)dx$$

es una función continua en U.

Demostración. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que $u_k \to u_0 \in U$. ¿Se sigue que $\{F(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to\infty} F(u_0)$?
Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$f_k = f(\cdot, u_k) : E \to \mathbb{R}$$

que es una función medible. Por la condición (2), se cumple que $\forall x \in E$,

$$f_k(x) = f(x, u_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x, u_0).$$

Es decir, la sucesión $\{f_k\}$ converge puntualmente en E a

$$f_0(x) = f(x, u_0).$$

Además, se cumple que

$$|f_k(x)| = |f(x, u_k)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada (TCD), se concluye que f_k es integrable para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

Es decir,

$$F(u_0) = \int_E f(x, u_0)\, dx.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$F(u_k) = \int_E f(x, u_k)\, dx \quad \Rightarrow \quad F(u) = \int_E f(x, u)\, dx$$

□

Observación 1.3.8

$\forall u_0 \in U \;\; \lim_{u\to u_0} \int_E f(x,u)dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x,u_0)dx$

Teorema 1.3.7

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto medible, $U = (a,b) \subset \mathbb{R}$ conjunto abierto y $f : E \times U \to \mathbb{R}$. Y además supongamos que:

1. $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \to \mathbb{R}$ *es integrable en E.*
2. $\forall x \in E f(x, \cdot) : U \to \mathbb{R}$ *es de clase C^1 en U.*
3. $\exists g : E \to [0, +\infty]$ *integrable en E tal que* $|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)| \leq g(x)$ *en casi todo punto de E y $\forall u \in U$.*

Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_E f(x,t)dx$$

es de clase C^1 en U y $\forall t \in U$ se cumple que:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(x,t)dx$$

Demostración. Fijamos $t_0 \in (a,b)$ y definimos la función $h : E \times (a,b) \to \mathbb{R}$ como:

$$h(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}, & t \neq t_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

1. Medibilidad de $h(x,t)$

   Queremos ver que $h(x,t)$ es medible para todo $t \in (a,b)$.

   - Si $t \neq t_0$, es claro. - Si $t = t_0$, tenemos que:

   $$h(x,t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x,t_0+1/k) - f(x,t_0)}{1/k}$$

   lo cual es medible.

2. Continuidad de $h(x,\cdot)$

   Para todo $x \in E$, si $h(x,\cdot)$ es acotada en (a,b), entonces es continua.

   - Si $t \neq t_0$, es claro. - Si $t = t_0$, tenemos:

   $$h(x,t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0) = \lim_{t\to t_0} h(x,t),$$

   lo cual prueba la continuidad.

3. Acotación y aplicación de la Regla de Leibniz

   $$|h(x,t)| \leq g(x)$$

   - Si $t = t_0$, es claro. - Si $t \neq t_0$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (t,t_0)$ tal que:

   $$\left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t-t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,s) \right| \leq g(x).$$

   Por la Regla de Leibniz, obtenemos:

   $$F'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \int_E \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\, dx =$$
   $$\lim_{t\to t_0} \left(\int_E h(x,t) dx \right) = \int_E \left(\lim_{t\to t_0} h(x,t) \right) dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, dx.$$

   Finalmente, como F' es continua en (a,b), se concluye que $F \in C^1(a,b)$.

$\square$

1.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

Teorema 1.4.1

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann en $[a,b]$. Entonces f es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y se cumple que:

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$$

Observación 1.4.1

Denotamos $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

Demostración. $\forall k \in \mathbb{N}$ sabemos que $\exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_{n(k)}^k = b\} \subset [a,b]$ tal que: $\bar{S}(f,P_k) - \underline{S}(f,P_k) < \frac{1}{k}$. Suponemos que P_{k+1} es mas fina que P_k y además que

$$\operatorname{diam}(P_k) = \sup_{i\in\{1,\dots,n(k)\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ denotamos $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$ y $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$.

$$\underline{S}(f,P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} m_k(x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \varphi_k \quad \text{con} \quad \varphi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

$$\bar{S}(f,P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} M_k(x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \psi_k \quad \text{con} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

Es claro que $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ en [a,b]. Además, como P_{k+1} es más fino que $P_k \implies (\varphi_k)\uparrow$ y $(\psi_k)\downarrow$ Denotamos $\varphi = \lim_{k\to\infty}\varphi_k = \sup\varphi_k$ y $\psi = \lim_{k\to\infty}\psi_k = \inf\psi_k$ que son medibles y cumplen que $\varphi \leq f \leq \psi$.
Como f es integrable-Riemann $\implies$ f es acotada $\iff$ $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. La función $g(x) = M$ es integrable en $[a,b]$ y puesto que $|\psi_k| \leq g$ y $|\varphi_k| \leq g$ entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f,P_k) = \int_a^b \varphi_k \to \int_a^b \varphi \qquad \bar{S}(f,P_k) = \int_a^b \psi_k \to \int_a^b \psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f,P_k) \to (R)\int_a^b f \quad \text{y} \quad \bar{S}(f,P_k) \to (R)\int_a^b f \implies \int_a^b \varphi = (R)\int_a^b f = \int_a^b \psi$$

Y como $\int_a^b \psi - \varphi = 0 \implies \psi - \varphi = 0$ en casi todo punto de $[a,b]$. Es decir $\varphi = f = \psi$ en casi todo punto de $[a,b]$. Y finalmente obtenemos que:

$$(L)\int_a^b f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi = (R)\int_a^b f$$

□

Teorema 1.4.2

Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada. Entonces* f *es integrable-Riemann en* $[a,b] \iff D_f = \{x \in [a,b] \mid f$ *no es continua en* $x\}$ *tiene medida nula.*

Ejemplo

La función de Dirichlet

$$f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable-Riemann en $[0,1]$. Pero $f=0$ en casi todo punto $\implies$ f es integrable-Lebesgue y ésta vale: $\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 0 = 0$

Teorema 1.4.3

Sean $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ y $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ una función absolutamente integrable-Riemann impropia en el intervalo (α,β). Entonces f es integrable-Lebesgue en (α,β) y se cumple que:

$$(L)\int_\alpha^\beta f = (R)\int_\alpha^\beta f$$

Demostración. Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea (α,β), en este caso trataremos el intervalo $[\alpha,\infty)$: Por hipótesis sabemos que:

1. $\forall k\in\mathbb{N}, f$ es integrable-Riemann en $[a,b]$
2. $\lim_{b\to\infty}\int_a^b |f| < +\infty$

Tomamos una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\uparrow +\infty$ y definimos las sucesiones de funciones: $f_n = f\cdot\chi_{[a,b_n]}$ y $g_n = |f|\cdot\chi_{[a,b_n]}$ medibles. De manera que tenemos que $f_n\uparrow f$ y $g_n\uparrow |f|$. Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monóntona:

1. $(L)\int_a^{+\infty}|f| = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^{b_n}|f| = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{b_n}|f| = (R)\int_a^{+\infty}|f| < \infty$
2. Esto muestra que f es integrable-Lebesgue en $[a,+\infty)$.

Por otra parte, como $|f_n|\leq|f|\ \forall n\in\mathbb{N}$ por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

1. $(L)\int_a^{+\infty} f = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{b_n} f = (R)\int_a^{+\infty} f$

Finalmente obtenemos el resultado de que f es integrable de Riemann-impropia en $[a,+\infty)$.
$\forall (b_n)_{n\in\mathbb{N}} : b_n\to\infty$ tenemos que $|\int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m}|f|\leq\epsilon$ ☐

Ejemplo

(Hoja 3. Ej: 6.a) Calculemos
$$F(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}e^{-x}\,dx,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$
derivando con respecto al parámetro t. Para ello, aplicamos el **Teorema de Leibniz**:
Sea $E\subset\mathbb{R}^n$ medible y $(a,b)\subset\mathbb{R}$, con $f:E\times(a,b)\to\mathbb{R}$ tal que:

1. $\forall u\in(a,b), f(\cdot,u):E\to\mathbb{R}$ es integrable en E.
2. Para casi todo $x\in E$, la función $f(x,\cdot):(a,b)\to\mathbb{R}$ es de clase C^1 en (a,b).
3. Existe $g:E\to[0,+\infty]$ integrable en E tal que
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|\leq g(x)\quad \text{para casi todo } x\in E, \forall u\in(a,b).$$

Entonces, $F(t)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$ y se cumple:
$$F'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Dado que
$$f(x,t) = \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x},$$
calculamos la derivada parcial con respecto a t:
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \cos(tx)e^{-x}.$$
Verifiquemos cada una de las hipótesis del Teorema de Leibniz:

1. $\forall t \in \mathbb{R}, f(x,t)$ es integrable en $[0,+\infty)$:
$$|f(x,t)| \leq e^{-x} = g(x).$$
Como $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 < +\infty$, se cumple la integrabilidad.

2. $\forall x \in E, \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \cos(tx)e^{-x}$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo que $f(x,\cdot)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

3. Se cumple que
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = |\cos(tx)e^{-x}| \leq e^{-x} = g(x),$$
que es integrable en $[0,+\infty)$.

Por lo tanto, F es de clase C^1 en $\mathbb{R}$ y
$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x}\,dx.$$
Ahora calculemos esta integral:
$$I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x}\,dx.$$
Usando integración por partes con
$$\begin{cases} u = \cos(tx), & dv = e^{-x}dx, \\ du = -t\sin(tx)dx, & v = -e^{-x}, \end{cases}$$
obtenemos:
$$I(t) = [\cos(tx)e^{-x}]_0^{+\infty} - t\int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-x}dx.$$
Evaluando los límites y repitiendo el proceso para $\sin(tx)e^{-x}$, obtenemos:
$$I(t)(1+t^2) = 1.$$
Despejando:
$$I(t) = \frac{1}{1+t^2} = F'(t).$$
Finalmente, integramos:
$$F(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C.$$
Si $t = 0$, entonces
$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0 \Rightarrow C = 0.$$
Por lo tanto:
$$F(t) = \arctan(t).$$

1.5 Teoremas de Tonelli y Fubini

Notación:

$$\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \qquad (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$$

Sea $f : \mathbb{R}^{n+k} \to [-\infty, +\infty]$, entonces denotamos las funciones:

$$\begin{cases} f_x : \mathbb{R}^k \to [-\infty, +\infty] & \text{con} \quad f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k \\ f_y : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty] & \text{con} \quad f_y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Teorema 1.5.1 [Teorema de Tonelli]

Sea $f : \mathbb{R}^{n+k} \to [0, +\infty]$ medible. Entonces:

1. *Para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, la función $f_x : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ es medible en $\mathbb{R}^k$*
2. *La función $F : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ tal que $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y)dy$ definida en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$ es medible en $\mathbb{R}^n$*
3. $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f_x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y)dy)dx = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y)dxdy$

Además, de forma análoga se tiene que:

1. *Para casi todo $y \in \mathbb{R}^k$, la función $f_y : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ es medible en $\mathbb{R}^n$.*
2. *La función $G : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ tal que $G(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)dx$ definida en casi todo punto de $\mathbb{R}^k$ es medible en $\mathbb{R}^k$.*
3. $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} G = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f_y) = \int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)dx)dy = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x, y)dydx$

Observación 1.5.1

Los siguientes lemas son previos y necesarios para la demostracion del Teorema de Tonelli.

Lema 1.5.1

Sean f, g que satisfacen el Teorema de Tonelli y $a, b \geq 0 \implies af + bg$ también satisfacen el Teorema de Tonelli

Demostración.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (af + bg)_x = a(f_x) + b(g_x)$ es medible en $\mathbb{R}^k$.
2. $H(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (af + bg)_x = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + b(g_x) = \int_{\mathbb{R}^k} a(f_x) + \int_{\mathbb{R}^k} b(g_x)$ es medible en $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_{\mathbb{R}^n} (af + bg)_x = a \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_x + b \int_{\mathbb{R}^{n+k}} g_x$

□

Lema 1.5.2

Sea $(f_j)_{j \int \mathbb{N}}$ sucesion de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli y $f_j \uparrow f$ en $\mathbb{R}^{n+k}$ puntalmente $\implies$ f satisface el Teorema de Tonelli.

Demostración.

1. Para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $f_j(x,\cdot) = (f_j)_x \uparrow f(x,\cdot) = f_x$
2. $F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \uparrow \int_{\mathbb{R}^k} f_x = F(x)$ luego F es medible por el Teorema de la Convergencia Monótona.
3. Nuevamente por el Teorema de la Convergencia aplicado a la sucesión de (2) $F_j(x) \uparrow F(x)$ tenemos que $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dy)\,dx$

$\square$

Observación 1.5.2

El siguiente lema es una versión de lema anterior en el que se usa el teorema de la convergencia dominada en lugar del de la convergencia monótona.

Lema 1.5.3

Sea $(f_j)_{j \int \mathbb{N}}$ sucesion de funciones que satisfacen el Teorema de Tonelli. Supongamos que $(f_j) \to f$ puntualmente en $\mathbb{R}^{n+k}$ y $\exists g : \mathbb{R}^{n+k} \to [0,+\infty]$ integrable, que satisface el Teorema de Tonelli y tal que $0 \le f_j \le g \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Entonces, f satisface el Teorema de Tonelli.

Demostración.

1. $(f_j)_x \to f_x$ medible
2. $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} g = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^k} g_x) < +\infty$ luego $G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} g_x < +\infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ Además, tenemos que $0 \le (f_j)_x \le g_x$ integrable, por lo que podemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada $\implies F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f_j)_x \to F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x$
3. De nuevo por el Teorema de la Convergencia Dominada $\int_{\mathbb{R}^n} F = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f$

$\square$

Demostración del Teorema de Tonelli:

1. Primero veamos el caso en el que f es la función indicatriz/característica de un cubo semiabierto.
   (a) Supongamos que $f = \chi_Q$ donde Q es un cubo semiabierto en $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Con $Q = A \times B :$ $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^k$

Observación 1.5.3

$(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ $(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \notin E \end{cases} = \chi_{E_x}(y)$

Sea $f_x = (\chi_Q)_x(y) = (\chi_Q)_x(y) = \begin{cases} \chi_B(y) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ función medible.

(b)

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (\chi_Q)_x = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_B & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} m_k(B) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \implies$$

$F(x) = m_k(B) \cdot \chi_A(x)$ es medible.

(c)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_Q = m_{n+k}(Q) = m_n(A) \cdot m_k(B) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(B) \cdot \chi_A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)$$

2. Ahora supongamos que f es la función indicatriz/característica de un conjunto abierto:
   Supongamos que $f = \chi_G : G \subset \mathbb{R}^{n+k}$ - conjunto abierto $\implies G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j : Q_j$-cubos semiabiertos disjuntos.

   $$\implies \forall j \in \mathbb{N} \text{ sea } G_j = \bigcup_{i=1}^{j} Q_i \implies \begin{cases} (G_j) \uparrow G \\ \chi_{G_j} \uparrow \chi_G \text{ con cada } \chi_{G_j} = \sum_{i=1}^{j} \chi_{Q_i} \end{cases}$$

   $\implies \forall j \in \mathbb{N}\ \chi_{G_j} = \sum_{i=1}^{j} \chi_{Q_i}$ verifica el Teorema de Tonelli por el Lema 1.4.2 y Lema 1.4.3. Luego χ_G satisface el Teorema de Tonelli por el Lema 1.4.2.

3. Supongamos ahora que f es la función indicatriz de un conjunto G_δ, es decir, un conjunto resultado de la intersección numerable de conjuntos abiertos, pero bajo mas restricciones:
   Supongamos que $f = \chi_D$ donde D es un conjunto G_δ:

   Observación 1.5.4

   Considerando $\forall j \in \mathbb{N} D_j = D \cap (j, -j)^{n+k}$ obtenemos que $(D_j) \uparrow D$ y $\chi_{D_j} \uparrow \chi_D$ siendo cada D_j un conjunto G_δ y acotado.
   Por tanto, como consecuencia del Lema 1.4.2, podemos reducirnos al caso de conjuntos acotados D es un G_δ acotado.

   Entonces $D = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ donde cada G_j es es un conjunto abierto y acotado. Podemos suponer que $(G_j) \downarrow D$ por tanto $X_{G_j} \downarrow \chi_D$ y además, $0 \leq \chi_{G_j} \leq \chi_{G_1}$ que es integrable por ser acotada. Ahora si, podemos usar el Lema 1.4.3 para obtener que χ_D satisface el Teorema de Tonelli.

□

Corolario 1.5.1 [Principio de Cavalieri]

Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$ medible entonces:

1. *Para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $E_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in E\}$ es medible en $\mathbb{R}^k$*
2. *La función $F : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ tal que $F(x) = m(E_x)$ definida en casi todo punto es medible en $\mathbb{R}^n$*
3. *$m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m(E_x) dx$*

De forma análoga se tiene que:

1. *Para casi todo $y \in \mathbb{R}^k$, el conjunto $E_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$ es medible en $\mathbb{R}^n$*

2. *La función* $G : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ *tal que* $G(y) = m(E_y)$ *definida en casi todo punto es medible en* $\mathbb{R}^k$

3. $m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m(E_y)dy$

2 Funciones integrables en varias variables

3 Teorema de Fubini

4 Cambio de variables

5 Funciones definidas por integrales

6 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales

7 Teorema de Green

8 Superficies paramétricas

9 Integrales de superficie

10 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss