Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Medida de Lebesgue

1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1.1 [n-Réctangulo]

Un n-rectángulo en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i] = [a_1,\ b_1] \times [a_2,\ b_2] \times ... \times [a_n,\ b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Definimos el volúmen de R como:

$$vol(R) := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

Consideramos también los n-rectángulos abiertos denotados por $\mathring{R}$, que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

Observación 1.1.1

Dado R n-rectángulo cerrado tal que $R = \prod_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i]$, podemos considerar para cada $\delta > 0$ el n-rectángulo abierto $R_\delta = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \delta,\ b_i + \delta)$. Se tiene que $R \subset R_\delta$ y

$$vol(R_\delta) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i + 2\delta) = vol(R) + 2n\delta$$

Por tanto

$$vol(R) = \lim_{\delta \to 0} vol(R_\delta)$$

Definición 1.1.2 [Medida exterior de Lebesgue]

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la medida exterior de A como:

$$m^*(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} vol(R_i) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ n-rectángulos cerrados}\right\}$$

Donde el ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de n-rectángulos que recubren A. A esta medida la llamamos medida de Lebesgue exterior.

Observación 1.1.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces:

1. $m^*(A) = +\infty \iff \forall (R_j)_{j\in J}$ *tal que* $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ *se tiene que* $\sum_{j\in J} vol(R_j) = +\infty$
2. $m^*(A) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists (R_j)_{j\in J}$ *tal que* $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ *y* $\sum_{j\in J} vol(R_j) < \varepsilon$
3. $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists (R_j)_{j\in J}$ *tal que* $A \subset \bigcup_{j\in J} R_j$ *y* $\sum_{j\in J} vol(R_j) < \alpha + \varepsilon$

Definición 1.1.3 [Conjunto nulo]

Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo si $m^*(A) = 0$.

Ejemplo

1. Si R es un n-rectángulo degenerado, es decir, R tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces R es un conjunto nulo ($m^*(R) = 0$).

2. En $\mathbb{R}^2$, sea el conjunto $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$. Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Consideramos $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$. Se tiene que

$$m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}\left(\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right] \times \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]\right) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \varepsilon$$

   Por tanto, $m^*(A) = 0$.

Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.1

La función $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ satisface:

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. $m^*(A) \leq m^*(B)$ *si* $A \subset B$
3. $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

Demostración.

1. $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$ con R_j n-rectángulos degenerados $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$.

2. Sea $A \subset B$ y sea $(R_j)_{j \in J}$ tal que $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$. Entonces $(R_j)_{j \in J}$ es un recubrimiento de A y por tanto $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \operatorname{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$.

3. Si $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = +\infty$ entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\exists (R_{j,i})_{i=1}^{\infty}$ tal que $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$ y por tanto se tiene que

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \varepsilon$$

   Como ε es arbitrario, se tiene que $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$.

$\square$

Corolario 1.1.1

La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

Demostración. Sea $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset R^n$ tal que $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ entonces $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$. $\square$

Lema 1.1.1

Sea $A \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \textit{vol}(Q_i) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \textit{ con } Q_i \textit{ n-rectángulos abiertos} \right\}$$

Demostración. Denotamos por β el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de rectángulos abiertos tal que

$$A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j.$$

De este modo,

$$A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{Q}_j,$$

y como

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(\overline{Q}_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_j),$$

se concluye $m^*(A) \leq \beta$.

Veamos ahora la desigualdad opuesta, $\beta \leq m^*(A)$. Si $m^*(A) = +\infty$, entonces $\beta = +\infty$ y no hay nada que demostrar. Supongamos $m^*(A) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de medida exterior, existe una sucesión $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de n-rectángulos cerrados con

$$A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \quad \text{y} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideramos $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$. Eligiendo $\delta_j > 0$ lo suficientemente pequeño, se cumple

$$\mathrm{vol}(R_j)_{\delta_j} < \mathrm{vol}(R_j) + \varepsilon_j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Aquí, $\mathrm{vol}(R_j)_{\delta_j}$ indica el volumen del n-rectángulo abierto R_j con lados aumentados en δ_j. Entonces,

$$A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j},$$

y además,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j\in\mathbb{N}} (\mathrm{vol}(R_j) + \varepsilon_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) + \varepsilon < m^*(A) + 2\varepsilon.$$

Por lo tanto, $\beta \leq m^*(A)$. $\square$

Definición 1.1.4 [Partición de un conjunto]

Una partición del intervalo $[a, b]$ es una colección numerable de puntos

$$P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$$

Dado un n-rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, una partición $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ de R es una colección particiones P_i de $[a_i, b_i]$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ siendo $R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

Los subrectángulos de P son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \prod_{j=1}^{n} [t^j_{i_j}, t^j_{i_j+1}]$$

Denotamos $S \in P$ para indicar que S es un subrectángulo de P.

Lema 1.1.2

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo y P una partición de R. Entonces:

1. $R = \bigcup_{S\in P} S$
2. *Si $S, S' \in P$ y $S \neq S'$ entonces $S \cap S' = \emptyset$*
3. $vol(R) = \sum_{S\in P} vol(S)$

Proposición 1.1.1

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo. Entonces $m^*(R) = vol(R)$.

Demostración.

- $m^*(R) \leq \mathrm{vol}(R)$
  Consideremos la sucesión $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida por $R_1 = R$ y R_j degenerados para $j > 1$. Así,

$$m^*(R) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) = \mathrm{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mathrm{vol}(R_j) = \mathrm{vol}(R_1) = \mathrm{vol}(R).$$

- $m^*(R) \geq \mathrm{vol}(R)$
  Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de medida exterior, existe una sucesión $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de n-rectángulos abiertos con

$$R \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \quad \text{y} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_j) < m^*(R) + \varepsilon.$$

  Como R es compacto (cerrado y acotado), el recubrimiento $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ admite un subrecubrimiento finito $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_m\}$ que aún cubre R. Así,

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{Q}_i.$$

  Definimos $R_j = R \cap \overline{Q}_j$ para $j = 1, \ldots, m$. Obtenemos entonces

$$R = \bigcup_{j=1}^{m} R_j.$$

  Prolongando los lados, podemos construir una partición P de R donde cada subrectángulo de P quede contenido en algún R_j con $1 \leq j \leq m$. Por tanto,

$$\mathrm{vol}(R) = \sum_{S\in P} \mathrm{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_j) < m^*(R) + \varepsilon.$$

  Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $m^*(R) \geq \mathrm{vol}(R)$.

□

1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Notación: Para $A \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por A^c al complementario de A en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.1 [Conjunto medible]

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue si para todo $R \subset \mathbb{R}^n$ n-rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c)$$

Proposición 1.2.1

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces son equivalentes:

1. *A es medible en el sentido de Lebesgue.*
2. *$\forall E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto se tiene que $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.*
3. *$\forall E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto se tiene que $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.*

Demostración.

- (2) $\implies$ (3)
  Es inmediato.
- (3) $\implies$ (2)
  Sabemos que $m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$. Para ver la otra desigualdad, observamos que
  $$m^*(E) = m^*((E \cap A) \cup (E \cap A^c)) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$
  Así, la igualdad siempre se cumple.
- (2) $\implies$ (1)
  Basta tomar $E = R$, un n-rectángulo.
- (1) $\implies$ (3)
  Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Si $m^*(E) = +\infty$, el resultado es inmediato. Supongamos que $m^*(E) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de medida exterior, existe una sucesión $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de n-rectángulos cerrados tal que
  $$E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \quad \text{y} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) < m^*(E) + \varepsilon.$$
  Entonces
  $$E \cap A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A, \quad E \cap A^c \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap A^c.$$
  Por tanto,
  $$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c).$$
  Por hipótesis A es medible, luego $m^*(R_j) = m^*(R_j \cap A) + m^*(R_j \cap A^c)$ para cada j, y como $m^*(R_j) = \operatorname{vol}(R_j)$:
  $$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_j) < m^*(E) + \varepsilon.$$
  Por la arbitrariedad de ε, se concluye que $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.

$\square$

Definición 1.2.2 [σ-Álgebra]

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3. $\forall (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *se tiene que* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

Definición 1.2.3 [Medida]

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra, entonces una medida en X es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *Si* $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$$

Teorema 1.2.1 [Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$]

La familia M de todos los conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ es una σ-álgebra y $m = m^* \restriction_M$ es una medida numerablemente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

Lema 1.2.1

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Dado cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, tenemos:

$$E \cap \mathbb{R}^n = E, \quad \text{y} \quad E \cap (\mathbb{R}^n)^c = E \cap \emptyset = \emptyset.$$

Entonces:

$$m^*(E \cap \mathbb{R}^n) = m^*(E), \quad \text{y} \quad m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(\emptyset) = 0.$$

Sustituyendo en la condición de medibilidad, se tiene:

$$m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + 0 = m^*(E).$$

Por tanto, se cumple para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ la igualdad requerida, lo que demuestra que $\mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue. $\square$

Lema 1.2.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible en el sentido de Lebesgue. Entonces, su complementario A^c también es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Por hipótesis, A es medible en el sentido de Lebesgue, lo que significa que para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$

Observemos que el complementario del complementario de A es A, es decir:

$$(A^c)^c = A.$$

Tomemos ahora A^c y veamos si para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c).$$

Sustituyendo la identidad $(A^c)^c = A$:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A).$$

Luego A^c también es medible en el sentido de Lebesgue. □

Corolario 1.2.1

El conjunto vacío $\emptyset$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Lema 1.2.3

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Observemos primero que

$$A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

luego entonces tenemos que

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$$

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto, entonces por la medibilidad de A se sigue

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

Además, sabemos que B es medible, luego para los conjuntos $E \cap A^c$ y $E \cap E$ se verifica

$$m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c)$$
$$m^*(E \cap A) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c)$$

Por tanto,

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c)$$

$$= \underbrace{m^*(E\cap A\cap B)+m^*(E\cap A\cap B^c)+m^*(E\cap A^c\cap B)}_{\geq\ m^*(E\cap(A\cup B))}+\underbrace{m^*(E\cap A^c\cap B^c)}_{m^*(E\cap(A\cup B)^c)}$$

Finalmente, observamos que

$$m^*(E)\geq m^*(E\cap(A\cup B))+m^*(E\cap(A\cup B)^c)$$

y por tanto $A\cup B$ es medible.
Nótese que la medibilidad de la intersección es inmediata, pues $A\cap B=(A^c\cup B^c)^c$, y ya hemos demostrado por el Lema 1.2.2 que el complementario de un conjunto medible es medible. □

Lema 1.2.4

Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ una colección numerable de conjuntos disjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j$ es medible en el sentido de Lebesgue y además $m^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}}m^*(A_j)$.

Demostración. Definimos la sucesión creciente de conjuntos $B_k=A_1\cup\ldots\cup A_k$. Entonces por el Lema 1.2.3, B_k es medible en el sentido de Lebesgue. Sean $B=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j$ y $E\subset\mathbb{R}^n$. Por la medibilidad de A_k, tenemos:

$$m^*(E\cap B_k)=m^*(E\cap B_k\cap A_k)+m^*(E\cap B_k\cap A_k^c)=m^*(E\cap A_k)+m^*(E\cap B_{k-1})$$

Nótese que $A_k^c=B_{k-1}$ precisamente porque los conjuntos A_j son disjuntos. Reiterando el proceso, obtenemos:

$$m^*(E\cap B_k)=\sum_{j=1}^{k}m^*(E\cap A_j)$$

Por lo tanto, aplicando la mediblidad de B_k:

$$m^*(E)=m^*(E\cap B_k)+m^*(E\cap B_k^c)=\left(\sum_{j=1}^{k}m^*(E\cap A_j)\right)+m^*(E\cap B_k^c)\geq\sum_{j=1}^{k}m^*(E\cap A_j)+m^*(E\cap B^c)$$

Se sigue entonces:

$$m^*(E)\geq\sum_{j\in\mathbb{N}}m^*(E\cap A_j)+m^*(E\cap B^c)\geq m^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}E\cap A_j\right)+m^*(E\cap B^c)\geq m^*(E\cap B)+m^*(E\cap B^c)$$

Luego, B es medible.

Tomando $E=B$ en la desigualdad anterior, obtenemos:

$$m^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)=m^*(B)\geq\sum_{j\in\mathbb{N}}m^*(B\cap A_j)+m^*(B\cap B^c)=\sum_{j\in\mathbb{N}}m^*(B\cap A_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}}m^*(A_j)$$

Por otro lado, por el apartado 2 del Teorema 1.1.1 sabemos que la medida exterior de la union numerable de conjuntos es menor o igual que la suma de las medidas exteriores de los conjuntos:

$$m^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)\leq\sum_{j\in\mathbb{N}}m^*(A_j)$$

Por tanto,

$$m^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)=\sum_{j\in\mathbb{N}}m^*(A_j)$$

□

Lema 1.2.5

La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Consideramos:

$$\begin{gathered} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \cap B_1^c \\ A_3 = B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ \vdots \\ A_j = B_j \cap B_{j-1}^c \cap \ldots \cap B_1^c \end{gathered}$$

Observemos que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ y que para todo $j \in \mathbb{N}$, A_j es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto, A_j es medible. Además, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Por el Lema 1.2.4, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ es medible $\implies \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ es medible. □

Proposición 1.2.2

Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto nulo, es decir, $m^*(A) = 0$.

Tomemos un conjunto arbitrario $E \subset \mathbb{R}^n$. Observemos que:

$$E \cap A \subset A \implies m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0.$$

Además, como la medida exterior siempre es no negativa, tenemos:

$$m^*(E \cap A) \geq 0.$$

Por lo tanto:

$$m^*(E \cap A) = 0.$$

Por otro lado, claramente:

$$E \cap A^c \subset E \implies m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E).$$

Así, sumando las desigualdades obtenidas:

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = 0 + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E).$$

Por la Proposición 1.2.1 se concluye la medibilidad de A. □

Con esto, damos por concluida la demostración del Teorema 1.2.1.

Definición 1.2.4 [Propiedad en casi todo punto]

Se dice que una propiedad se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.

Proposición 1.2.3

Todo n-rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Dado $R \subset \mathbb{R}^n$ n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que $\forall Q \subset \mathbb{R}^n$ n-rectángulo cerrado se tiene que $\mathrm{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$. Consideramos el n-rectángulo $Q_0 = Q \cap R$. Nótese que $Q \cap R^c$ es unión finita de n-rectángulos $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Entonces $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$ forman una partición de Q. Luego $\mathrm{vol}(Q) = \sum_{i=0}^m \mathrm{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^m m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$. □

Observación 1.2.1

En $\mathbb{R}^n$ los rectángulos abiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.

Definición 1.2.5 [n-Cubo]

Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j$$

Análogamente se pueden definir los cubos n-dimensionales semi-abiertos.

Observación 1.2.2

Denotaremos la norma del supremo en $\mathbb{R}^n$ como:

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^{n}\{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Llamaremos bola abierta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \ldots \times (x_n - r, x_n + r)$$

Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r]$$

Teorema 1.2.2

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces:

1. *G es la unión numerable de n-cubos cerrados.*
2. *G es la unión numerable de n-cubos abiertos.*

Demostración. Vamos a demostrar la primera parte; la segunda es análoga.

Consideremos la familia de n-cubos cerrados (o bolas en norma infinito):

$$\mathcal{B} = \left\{ \overline{B}_\infty(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n,\, r \in \mathbb{Q},\, r > 0,\, \overline{B}_\infty(q, r) \subset G \right\}.$$

Queremos ver que:

$$G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

- La inclusión $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset G$ es clara, porque todos los cubos de $\mathcal{B}$ están contenidos en G por construcción.
- Veamos la inclusión inversa $G \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.

  Sea $x \in G$. Como G es abierto, existe $\delta > 0$ tal que:

  $$B_\infty(x,\delta) \subset G.$$

  Elegimos $r \in \mathbb{Q}$ con $0 < r < \frac{\delta}{2}$. Por la densidad de $\mathbb{Q}^n$ en $\mathbb{R}^n$, existe $q \in \mathbb{Q}^n$ tal que:

  $$\|x - q\|_\infty < r.$$

  Ahora, consideremos el cubo cerrado $\overline{B}_\infty(q,r)$. Veamos que:

  $$\overline{B}_\infty(q,r) \subset B_\infty(x,\delta).$$

  En efecto, para todo $y \in \overline{B}_\infty(q,r)$:

  $$\|y - x\|_\infty \leq \|y - q\|_\infty + \|q - x\|_\infty < r + r = 2r < \delta.$$

  Por lo tanto:

  $$\overline{B}_\infty(q,r) \subset B_\infty(x,\delta) \subset G.$$

  Además, $q \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}^+$, por lo que $\overline{B}_\infty(q,r) \in \mathcal{B}$ y $x \in \overline{B}_\infty(q,r)$.

  Como $x \in G$ es arbitrario, se concluye que:

  $$G \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

Así:

$$G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

La numerabilidad de la familia $\mathcal{B}$ se debe a cómo se construyen sus elementos. Cada cubo cerrado en $\mathcal{B}$ está definido por un centro $q \in \mathbb{Q}^n$ y un radio $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, de manera que $\overline{B}_\infty(q,r) \subset G$. Dado que $\mathbb{Q}^n$ es numerable (ya que es producto finito de conjuntos numerables) y $\mathbb{Q}$ también lo es, el conjunto de pares (q,r) donde $q \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, es numerable. Esto se debe a que el producto de conjuntos numerables es numerable:

$$\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+ \quad \text{es numerable.}$$

Por lo tanto, la familia de todos los cubos cerrados con centro racional y radio racional positivo también es numerable:

$$\{\overline{B}_\infty(q,r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}.$$

La familia $\mathcal{B}$ es simplemente un subconjunto de esa colección de cubos cerrados, es decir, $\mathcal{B} \subset \{\overline{B}_\infty(q,r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$, y como todo subconjunto de un conjunto numerable sigue siendo numerable, concluimos que $\mathcal{B}$ es numerable. □

Corolario 1.2.2

Todos los conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

Teorema 1.2.3 [Regularidad de la medida]

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. *E es medible en el sentido de Lebesgue.*

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists G \subset \mathbb{R}^n$ *abierto tal que* $E \subset G$ *y* $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$.

3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset \mathbb{R}^n$ *cerrado tal que* $F \subset E$ *y* $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$.

4. $\forall \varepsilon$ *existen* F *cerrado y* G *abierto tales que* $F \subset E \subset G$ *y* $m^*(G \setminus F) < \varepsilon$.

Demostración.

- (1) $\implies$ (2)
Distinción de casos:

  1. Supongamos que $m^*(E) < +\infty$: Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists (R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos abiertos tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(R_j)$ y $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) < m^*(E) + \varepsilon$. Considerando el abierto $G = \bigcup_{j=1}^{\infty}(R_j)$, se tiene que G es medible por el Corolario 1.2.2, además, como $E \subset G$ entonces
$$m^*(G) = m^*(\underbrace{G \cap E}_{E}) + m^*(\underbrace{G \cap E^c}_{G \setminus E}) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$$
Por tanto,
$$m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) - m^*(E) < \varepsilon$$

  2. Supongamos que $m^*(E) = +\infty$: $\forall k \in \mathbb{N}$ sea $E_k = E \cap [-k, k]^n$, que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además $m^*(E_k) < +\infty$ por ser E_k acotado, y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Luego por el apartado anterior, dado $\varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ existe G_k abierto tal que $E_k \subset G_k$ y $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.
Entonces $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ abierto y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$ por lo que
$$m^*(G \setminus E) \leq m^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

- (2) $\implies$ (1)
Sea $j \in \mathbb{N}$. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{j}$. Por hipótesis, existe un conjunto abierto G_j tal que $E \subset G_j$ y $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$. Consideremos $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$, que es medible y abierto, y cumple $E \subset B$.
Además, para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $B \setminus E \subset G_j \setminus E$. Así,
$$m^*(B \setminus E) \leq m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}.$$
Por lo tanto, $m^*(B \setminus E) = 0$, lo que implica que $B \setminus E$ es medible.
Por otro lado, dado que $B = E \cup (B \setminus E)$, podemos escribir $E = B \setminus (B \setminus E)$. Como tanto B como $B \setminus E$ son medibles, se deduce que E es medible.
Finalmente, E se puede expresar como la diferencia $E = B \setminus Z$, donde B es la intersección numerable de abiertos y Z es un conjunto nulo.

- (1) $\implies$ (3)
Como E es medible entonces tenemos que E^c también es medible, por lo que, dado $\varepsilon > 0$ por (2) $\exists G$-abierto tal que $E^c \subset G$ y $m^*(G \setminus E^c) < \varepsilon$. Entonces $F = G^c$ es cerrado y $F \subset E$. Además,
$$E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \varepsilon$$

- (3) $\implies$ (1)
Para todo $j \in \mathbb{N}$, existe un conjunto cerrado F_j tal que $F_j \subset E$ y $m(E \setminus F_j) < \frac{1}{j}$. Sea
$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j,$$

que es un conjunto medible y satisface $A \subset E$. Además, dado que

$$m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

se concluye que $m(E \setminus A) = 0$.

Por lo tanto, se tiene

$$E = A \cup (E \setminus A) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \cup (E \setminus A).$$

Dado que $E \setminus A$ es un conjunto nulo y, por lo tanto, medible, y que $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ es medible por ser la unión numerable de conjuntos cerrados, se concluye que E es medible.
Observemos que en este caso $E = A \cup N$, siendo A unión numerable de cerrados y $N = E \cup A$ un conjunto nulo.

□

Definición 1.2.6 [σ-Álgebra de Borel]

La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ se define como la menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$ (o equivalentemente, la menor σ-álgebra que contiene a todos los cerrados de $\mathbb{R}^n$). Los conjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.

Definición 1.2.7 [Conjuntos G_δ y F_σ]

Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es G_δ si A es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ es F_σ si B es unión numerable de cerrados.

Corolario 1.2.3

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. *E es medible en el sentido de Lebesgue.*
2. *$E = A \setminus N$ con A siendo G_δ y N un conjunto nulo.*
3. *$E = B \cup N$ con B siendo F_σ y N un conjunto nulo.*

Lema 1.2.6

Sea $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces, $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ es medible en el sentido de Lebesgue y

$$m^* \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \lim_{j \to \infty} m^*(A_j).$$

Demostración. Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Definimos la sucesión $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ como

$$\begin{gathered} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \cap B_1^c \\ A_3 = B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ \vdots \\ A_j = B_j \cap B_{j-1}^c \cap \ldots \cap B_1^c \end{gathered}$$

De esta forma, la unión

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

es una unión disjunta de conjuntos. Por lo tanto, y usando el Lema 1.2.4, se tiene que

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(B_j) = \lim_{k\to\infty} m(A_k),$$

donde la última igualdad se debe a que para todo $j \in \mathbb{N}$ se cumple

$$m^*(A_j) = \sum_{i=1}^{j} m^*(B_i).$$

□

Corolario 1.2.4

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible entonces:

1. $m^*(E) = inf\{m^*(G) : G$ *abierto y* $E \subset G\}$.
2. $m^*(E) = sup\{m^*(K) : K$ *compacto y* $K \subset E\}$.

Demostración.

1. Dado $\varepsilon > 0$ por el Teorema 1.2.3 existe G abierto tal que $E \subset G$ y $m(G \setminus E) < \varepsilon$. Entonces usando la medibilidad de E deducimos:

$$m^*(E) \le m^*(G) = m^*(\underbrace{G \cap E}_{E}) + m^*(G \setminus E) < m^*(E) + \varepsilon$$

   Por tanto, $m^*(E) = \inf\{m^*(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$.

2. Sea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, donde definimos $E_k = E \cap [-k, k]^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, $(E_k)_k$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles y, por el Lema 1.2.6, se cumple que

$$m^*(E) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k).$$

   Además, por el Teorema 1.2.3 existe un conjunto cerrado $F_k \subset E_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}.$$

   Como F_k es cerrado y está contenido en el cubo compacto $[-k, k]^n$, entonces F_k es compacto. En particular F_k es medible por ser cerrado (Corolario 1.2.2), luego

$$m^*(E_k) = m^*(\underbrace{E_k \cap F_k}_{F_k}) + m^*(E_k \setminus F_k) \le m^*(F_k) + \frac{1}{k}$$

Al tomar el límite cuando $k \to \infty$, obtenemos

$$m^*(E) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = \lim_{k\to\infty} m^*(F_k),$$

y finalmente concluimos que

$$m^*(E) = \sup\{m^*(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m^*(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}.$$

$\square$

Definición 1.2.8 [Cubo diádico]

Se dice que un cubo en $\mathbb{R}^n$ es diádico si sus lados miden 2^{-m} para algún $m \in \mathbb{N}$. Es decir, si el rectángulo Q es de la forma:

$$Q = \left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

con $m \in \mathbb{Z}$ (nivel de escala u orden) y $k_1, k_2, \ldots k_n \in \mathbb{Z}$

Teorema 1.2.4

Todo conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ es unión numerable y disjunta de cubos diádicos.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{F}$ la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

donde $k_i \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$.

Sea $\mathcal{Q}_1$ la colección de todos los cubos cerrados de la forma

$$[k_1, k_1+1] \times \cdots \times [k_n, k_n+1],$$

con $k_i \in \mathbb{Z}$, que además satisfacen $Q \subset U$.

Supongamos definida $\mathcal{Q}_m$. Construimos $\mathcal{Q}_{m+1}$ como la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

donde $k_i \in \mathbb{Z}$, que están contenidos en U y que no están incluidos en ningún cubo de $\mathcal{Q}_j$ para $j \leq m$.

Por inducción, hemos definido así las familias $\mathcal{Q}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Por construcción, los cubos de $\mathcal{Q}$ tienen interiores disjuntos: si $Q, Q' \in \mathcal{Q}$ y $Q \neq Q'$, entonces $\text{int}(Q) \cap \text{int}(Q') = \emptyset$. Además, es claro que

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q \subset U.$$

Veamos ahora que en realidad

$$U = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q.$$

Sea $x \in U$. Dado que U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que la bola $B(x, \delta) \subset U$. Como el conjunto de números de la forma $k/2^m$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es denso en $\mathbb{R}$, podemos encontrar un cubo cerrado $Q_x \in \mathcal{F}$ que contiene a x y está contenido en $B(x, \delta) \subset U$.

El lado de Q_x es 2^{-m_x} para algún $m_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$, entonces x pertenece a un cubo de $\mathcal{Q}$. Si no es así, por definición de $\mathcal{Q}_{m_x}$, existe algún $j < m_x$ y un cubo $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$ que contiene a Q_x, y en particular a x.

En ambos casos, vemos que $x \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$, lo que muestra que

$$U = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Así, U es la unión numerable y disjunta de los cubos diádicos de $\mathcal{Q}$. $\square$

2 Funciones integrables en varias variables

2.1 Medibilidad de Funciones

Definición 2.1.1 [Espacio medible]

Un espacio medible es un par (X, Σ) donde X es un conjunto y Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible y $M|_E$ es la familia de subconjuntos medibles de E.
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$, donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto boreliano y $B|_A$ es la familia de subconjuntos borelianos de A.

Definición 2.1.2 [Función medible]

Sea (X, Σ) un espacio medible. Una función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es medible si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ es un conjunto medible.

Proposición 2.1.1

Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to [-\infty, +\infty]$, entonces son equivalentes

1. *f es medible.*
2. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto medible.*
3. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto medible.*
4. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto medible.*
5. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son conjuntos medibles.*
6. *Para todo $G \subset \mathbb{R}$ abierto, los conjuntos $f^{-1}(G)$, $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son conjuntos medibles.*

Demostración. Recordemos que, por definición, f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) < a\}$ es medible.

Observemos que:

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\}.$$

Dado que Σ es una σ-álgebra cerrada bajo complementarios, tenemos que:

$$(1) \iff (2).$$

De manera análoga:

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq \alpha + \tfrac{1}{k}\},$$

y

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = X \setminus \{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

Por lo tanto:

$$(3) \iff (2) \quad \text{y} \quad (4) \iff (3).$$

De este modo, resulta que:

$$(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4).$$

Veamos más explícitamente las implicaciones clave:

- $(1) \implies (4)$: Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$,

  $$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \tfrac{1}{k}\}.$$

  Cada conjunto de la intersección es medible por la definición de medibilidad de f. Así, la intersección numerable de conjuntos medibles es medible.

- $(4) \implies (1)$: Análogamente, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$,

  $$\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - \tfrac{1}{k}\}.$$

  Cada conjunto en la unión es medible por (4). Por tanto, la unión numerable es medible, y f es medible.

Con esto, hemos establecido la equivalencia entre (1), (2), (3) y (4).

Ahora, para (5):

- Notemos que para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

  $$\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \beta\} \cap \{x \in X : f(x) < \alpha\}.$$

  La intersección de conjuntos medibles es medible por las equivalencias anteriores.

- Además,

  $$\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\},$$

  y

  $$\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < -k\},$$

  que son intersecciones numerables de conjuntos medibles, por lo que son medibles.

Así, (1) - (4) $\implies$ (5). La construcción de los conjuntos muestra que (5) $\implies$ (2), pues podemos expresar:

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha \leq f(x) < \alpha + m\} \cup \{x \in X : f(x) = +\infty\}.$$

Por lo tanto:

$$(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4) \iff (5).$$

Finalmente, para (6):

- (6) $\implies$ (5): Sea $G = (\beta, \alpha)$ un intervalo abierto. Entonces:

$$f^{-1}(G) = \{x \in X : \beta < f(x) < \alpha\} = \{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\},$$

  que es medible por (5). Además, (6) ya contiene explícitamente que los conjuntos $\{x : f(x) = \pm\infty\}$ son medibles.

- (5) $\implies$ (6): Sea $G \subset \mathbb{R}$ un abierto cualquiera. Como $\mathbb{R}$ es segundo contable, $G = \bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j)$ para ciertos intervalos abiertos. Así:

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha_j, \beta_j)) = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\},$$

  que es unión numerable de conjuntos medibles por (5). Además, $\{x : f(x) = \pm\infty\}$ son medibles por (5).

Por tanto:

$$(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4) \iff (5) \iff (6).$$

□

Corolario 2.1.1

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es medible.

Demostración. Consideremos la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, que denotamos por $\mathcal{L}^n$. Sabemos que E es medible, es decir, $E \in \mathcal{L}^n$ y que la restricción de una función continua a un subconjunto es continua en ese subconjunto (con la topología subespacio).

Para ver que f es medible, recordemos la caracterización equivalente:

$$f \text{ es medible} \iff \forall G \subset \mathbb{R} \text{ abierto}, \quad f^{-1}(G) \in \Sigma.$$

Cabe notar que esta doble implicación es válida porque f es continua y, por lo tanto, los conjuntos

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} \text{ y } \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

son medibles por ser conjuntos vacíos. Aquí Σ es la σ-álgebra de Lebesgue de E, es decir:

$$\Sigma = \{A \subset E : \exists B \in \mathcal{L}^n \text{ con } A = E \cap B\}.$$

Tomemos $G \subset \mathbb{R}$ abierto. Dado que f es continua y G es abierto en $\mathbb{R}$, se tiene que:

$$f^{-1}(G) = \{x \in E : f(x) \in G\}$$

es un conjunto abierto en la topología subespacio de E. Por lo tanto, existe un conjunto abierto $O \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f^{-1}(G) = E \cap O.$$

Como O es abierto (y, por tanto, medible en $\mathbb{R}^n$) y E es medible, se sigue que:

$$f^{-1}(G) = E \cap O \in \Sigma.$$

Así, $f^{-1}(G)$ es medible para todo abierto G, por lo que f es medible según la caracterización (6) de la proposición anterior. □

Proposición 2.1.2

Sea (X, Σ) *un espacio medible y* $f_1, f_2, \ldots, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ *funciones medibles. Si* $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función continua, entonces la función compuesta*

$$h = \Phi \circ (f_1, f_2, \ldots, f_n) \colon X \to \mathbb{R}$$

es medible.

Demostración. Para demostrar que h es medible, probaremos que la preimagen $h^{-1}(G)$ de cualquier abierto $G \subset \mathbb{R}$ pertenece a Σ.

Definimos la función vectorial $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big),$$

de modo que $h = \Phi \circ f$.

Como cada $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ es medible, la función f es medible. En efecto, para cualquier rectángulo abierto $R = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$, se tiene

$$f^{-1}(R) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}\big((a_i, b_i)\big) \in \Sigma,$$

pues cada $f_i^{-1}\big((a_i, b_i)\big)$ es medible por al apartado (6) de la Proposición 2.1.1 y Σ es cerrado bajo intersecciones finitas. Dado que los rectángulos abiertos generan la topología de $\mathbb{R}^n$, esto implica que f es medible.

Como Φ es continua, para cualquier abierto $G \subset \mathbb{R}$, el conjunto

$$U = \Phi^{-1}(G) \subset \mathbb{R}^n$$

es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, U puede expresarse como una unión numerable de rectángulos abiertos (Teorema 1.2.2):

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j, \quad \text{donde } R_j = \prod_{i=1}^{n} (a_i^j, b_i^j).$$

La preimagen de U bajo f es

$$h^{-1}(G) = f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(R_j).$$

Como cada $f^{-1}(R_j)$ es medible, y como Σ es cerrado bajo uniones numerables, se sigue que $h^{-1}(G) \in \Sigma$.

Hemos demostrado que para todo abierto $G \subset \mathbb{R}$, $h^{-1}(G) \in \Sigma$. Por lo tanto, h es una función medible. □

Corolario 2.1.2

Sean (X, Σ) *espacio medible y* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funciones medibles, entonces* $f + g$, $f \circ g$, $max\{f, g\}$, $min\{f, g\}$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$ *son todo funciones medibles.*

Observación 2.1.1

Dada una función $f \colon X \to [-\infty, +\infty]$, *se puede descomponer como diferencia de sus partes positiva y* *negativa:*

$$f = f^+ - f^-, \quad \text{y además} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

donde

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Esta descomposición es útil en integración y teoría de la medida, ya que $f^+, f^- \geq 0$ y son funciones medibles siempre que f lo sea.

Teorema 2.1.1

Sea (X, Σ) un espacio medible y $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} : X \to [-\infty, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles. Entonces:

1. $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ *es una función medible.*
2. $\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j$ *es una función medible.*
3. $\limsup_{j\to\infty} f_j$ *es una función medible.*
4. $\liminf_{j\to\infty} f_j$ *es una función medible.*
5. *Si $f_j \to f$ puntualmente, entonces f es medible.*

Demostración.

1. Sea $h(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)$. Queremos probar que h es medible. Para ello, tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$. Observamos que:
$$\{x \in X : h(x) > \alpha\} = \{x \in X : \sup_j f_j(x) > \alpha\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_j(x) > \alpha\}$$
Como cada f_j es medible, los conjuntos $\{f_j > \alpha\}$ son medibles. Por lo tanto, su unión numerable también lo es. Así, h es medible.

2. Sea $g(x) = \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)$. Para probar que g es medible, tomamos $\alpha \in \mathbb{R}$ y escribimos:
$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \{x \in X : \inf_j f_j(x) < \alpha\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_j(x) < \alpha\}$$
o equivalentemente,
$$\{x \in X : g(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_j(x) \geq \alpha\}$$
Como los f_j son medibles, estos conjuntos también lo son, y su intersección numerable es medible. Así, g es medible.

3. Por definición,
$$\limsup_{j\to\infty} f_j(x) = \lim_{j\to\infty} \sup_{k\geq j} f_k(x) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq j} f_k(x) \right)$$
Como hemos probado que $\sup_{k\geq j} f_k$ es medible para cada j, y el ínfimo de funciones medibles es medible, se deduce que $\limsup f_j$ es medible.

4. Análogamente,
$$\liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \lim_{j\to\infty} \inf_{k\geq j} f_k(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq j} f_k(x) \right)$$
Usando la medibilidad de $\inf_{k\geq j} f_k$ y que el supremo de funciones medibles es medible, concluimos que $\liminf f_j$ es medible.

5. Si $f_j(x) \to f(x)$ puntualmente, entonces:

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

   Como $\limsup f_j$ y $\liminf f_j$ son medibles, y coinciden puntualmente con f, se concluye que f también es medible.

□

Proposición 2.1.3

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to [+\infty, -\infty]$ funciones medibles-Lebesgue tales que $f = g$ en casi todo punto. Entones g es medible-Lebesgue.

Demostración. Como $f = g$ casi en todo punto, el conjunto

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$$

es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideramos el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : g(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$$

Observamos que en Z^c, como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in Z^c$, se tiene:

$$\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z^c : f(x) < \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$$

el cual es medible porque f es medible.

Por otro lado, $\{x \in Z : g(x) < \alpha\} \subseteq Z$, y como Z es de medida nula, este conjunto también es medible.

Entonces, la unión

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : g(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : f(x) < \alpha\}$$

es la unión de dos conjuntos medibles, por lo tanto es medible.

Como esto ocurre para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se concluye que g es medible. □

Corolario 2.1.3

Sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente a una función f en casi todo punto. Entonces, f es medible.

Demostración. Sea

$$Z := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ no existe o es distinto de } f(x)\right\},$$

el cual, por hipótesis, tiene medida de Lebesgue nula.

Definimos la función

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{j\to\infty} f_j(x), & \text{si } x \in Z^c, \\ 0, & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Entonces, $g = f$ casi en todo punto (ya que $f_j \to f$ fuera de Z), y definimos también la sucesión

$$g_j(x) := \begin{cases} f_j(x), & \text{si } x \in Z^c, \\ 0, & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Cada función g_j es medible, ya que se obtiene modificando f_j en un conjunto de medida nula. Por tanto, $g_j \to g$ puntualmente, y como el límite puntual de funciones medibles es medible, se concluye que g es medible.

Finalmente, dado que $f = g$ casi en todo punto, y g es medible, la proposición anterior garantiza que f también es medible. □

Definición 2.1.3 [Función característica]

Sea (X, Σ) un espacio medible. La función característica de un conjunto $E \in \Sigma$ se define como

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \textit{si } x \in E, \\ 0, & \textit{si } x \notin E. \end{cases}$$

Observación 2.1.2

La función característica χ_E es medible si y solo si $E \in \Sigma$.

Demostración. Sea $G \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Como χ_E solo toma los valores 0 y 1, su preimagen $\chi_E^{-1}(G)$ solo puede ser uno de los siguientes conjuntos:

$$\chi_E^{-1}(G) = \begin{cases} X, & \text{si } 0 \in G \text{ y } 1 \in G, \\ E^c, & \text{si } 0 \in G \text{ y } 1 \notin G, \\ E, & \text{si } 0 \notin G \text{ y } 1 \in G, \\ \emptyset, & \text{si } 0 \notin G \text{ y } 1 \notin G. \end{cases}$$

En todos los casos, $\chi_E^{-1}(G)$ es medible si y solo si $E \in \Sigma$, ya que tanto E como su complemento E^c deben pertenecer a Σ. Por tanto, χ_E es medible si y solo si E es medible. □

Observación 2.1.3

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to [-\infty, +\infty]$ una función. Entonces, son equivalentes:

1. *f es medible-Lebesgue.*
2. *La función extendida $f \circ \chi_E : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ definida por*

$$f \circ \chi_E(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{si } x \in E, \\ 0, & \textit{si } x \notin E, \end{cases}$$

es medible-Lebesgue.

Demostración.

- (1) $\implies$ (2): Como E^c es medible y f es medible en E, se tiene que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : 0 > \alpha\}$$

donde ambos conjuntos son medibles: el primero por hipótesis y el segundo por ser subconjunto de E^c (que es medible). Por tanto, la unión es medible y $f \circ \chi_E$ es medible.

- (2) $\implies$ (1): Si $f \circ \chi_E$ es medible, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f \circ \chi_E(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : 0 > \alpha\}$$

y esta unión es medible por hipótesis. Como $\{x \in E^c : 0 > \alpha\}$ es medible y disjunto de E, se deduce que $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible. Por tanto, f es medible en E.

$\square$

Definición 2.1.4 [Función simple]

Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to [0, +\infty]$ una función. Decimos que f es una función simple *si toma un número finito de valores reales no negativos, es decir, si:*

$$f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty),$$

para ciertos $\alpha_i \in [0, +\infty)$.

Definimos los subconjuntos medibles $E_i = f^{-1}(\alpha_i)$ para $i = 1, \dots, n$, los cuales forman una partición disjunta de X, es decir,

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} E_i.$$

En tal caso, f puede escribirse como combinación lineal finita de funciones características:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}.$$

Por lo tanto, una función simple es aquella que puede expresarse como una suma finita de múltiplos escalares de funciones características de conjuntos medibles disjuntos.

Observación 2.1.4

Sea $f : X \to [0, +\infty]$ una función simple tal que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$. Entonces:

$$f \text{ es medible} \iff E_i \in \Sigma \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Es decir, f es medible si y sólo si los subconjuntos $E_1, E_2, \dots, E_n$ son medibles.

Teorema 2.1.2

Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

(i) $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n \le \cdots \le f$ *para todo n.*

(ii) Para todo $x \in X$, se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

(iii) Si además f es acotada, entonces la convergencia es uniforme casi en todo punto.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el intervalo $[0, n]$ y lo dividimos en subintervalos de longitud $\frac{1}{2^n}$. Para $1 \leq i \leq n2^n$, definimos los conjuntos

$$E_{n,i} := f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) = \{x \in X : \tfrac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{i}{2^n}\}$$

y también

$$E_n := f^{-1}([n, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Todos estos conjuntos son medibles, pues f es medible.

Definimos entonces la función simple

$$f_n := \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{E_n}$$

Veamos primero la convergencia puntual. Fijemos $x \in X$. Tenemos dos casos:

- Si $f(x) = +\infty$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x) \geq n$, y por definición $f_n(x) = n$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty = f(x)$$

- Si $f(x) < +\infty$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < n_x$. Además, existe $k \in \mathbb{N}$ con

$$\frac{k-1}{2^{n_x}} \leq f(x) < \frac{k}{2^{n_x}}$$

  y entonces

$$f_{n_x}(x) = \frac{k-1}{2^{n_x}}$$

  Por lo tanto,

$$0 \leq f(x) - f_{n_x}(x) \leq \frac{1}{2^{n_x}}$$

  Así,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

  Además, si f está acotada, es decir, si existe $M > 0$ tal que $f(x) \leq M$ para todo x, entonces para todo $n \geq M$ y todo $x \in X$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

  lo que implica que $f_n \to f$ uniformemente casi en todo punto.

Ahora, veamos que f_n es monótona creciente. Para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, por construcción de f_n, tenemos que:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{si } x \in E_{n,i} \\ n & \text{si } x \in E_n \end{cases}$$

y

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & \text{si } x \in E_{n,i} \\ n+1 & \text{si } x \in E_{n+1} \end{cases}$$

Notemos que para todo n y i,

$$\frac{i-1}{2^n} \leq \frac{2i-2}{2^{n+1}}$$

por lo que

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.2 Integración de Funciones Positivas

Definición 2.2.1 [Integral de una función simple]

Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ *el espacio medible con la* σ*-álgebra* $\mathcal{L}^n$ *de los conjuntos medibles de* $\mathbb{R}^n$ *y la medida de Lebesgue* m*. Sea*

$$s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty] \qquad s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

una función simple, medible y no negativa, donde los conjuntos $(A_i)_{i=1}^n$ *son medibles y forman una unión disjunta que cubre* $\mathbb{R}^n$*, es decir,*

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$$

Entonces, definimos la integral de s *respecto a la medida de Lebesgue como:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(x)\, dx \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(A_i)$$

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible. Definimos la integral de* s *sobre* E *como:*

$$\int_E s(x)\, dx \;:=\; \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(A_i \cap E)$$

Observación 2.2.1

La integral de la función nula sobre $\mathbb{R}^n$ *es cero:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} 0\, dx = 0.$$

Del mismo modo, si s *es una función simple y* $E \subset \mathbb{R}^n$ *tiene medida nula, entonces:*

$$\int_E s(x)\, dx = 0.$$

Esto se deduce directamente de la definición, ya que $m(A_i \cap E) = 0$ *para todo* i*.*

Lema 2.2.1

Sea $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$ *una unión disjunta de conjuntos medibles. Sea* $s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ *una función simple, medible y no negativa. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} s\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s\, dx.$$

Demostración. Sea la representación canónica de s:

$$s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \text{con } A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ medibles y disjuntos.}$$

Entonces, usando la definición de la integral de funciones simples:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s\,dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m(A_i).$$

Ahora, para cada i, tenemos que:

$$A_i = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_i \cap X_k),$$

donde la unión es disjunta porque los X_k son disjuntos. Como la medida es aditiva sobre uniones disjuntas (Lema 1.2.4):

$$m(A_i) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_i \cap X_k).$$

Por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s\,dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} m(A_i \cap X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m(A_i \cap X_k).$$

Pero la expresión

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m(A_i \cap X_k)$$

es, por la Definición 2.2.1, $\int_{X_k} s\,dx$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} s\,dx.$$

□

Corolario 2.2.1

Sean $s, t : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ funciones simples, medibles y no negativas. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s+t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} s\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} t\,dx.$$

Demostración. Supongamos que las representaciones canónicas de s y t son

$$s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \chi_{A_i}, \quad t = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \, \chi_{B_j},$$

donde los conjuntos A_i y B_j son medibles y forman particiones disjuntas de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j$$

Entonces,

$$s + t = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \chi_{A_i \cap B_j},$$

ya que en cada conjunto $A_i \cap B_j$, se tiene $s(x) = \alpha_i$, $t(x) = \beta_j$, y por tanto $(s+t)(x) = \alpha_i + \beta_j$

Como la familia $\{A_i \cap B_j\}$ es una partición disjunta de $\mathbb{R}^n$, y los conjuntos son medibles, aplicamos la definición de integral de función simple:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s+t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} (\alpha_i + \beta_j) \cdot m(A_i \cap B_j)$$

Distribuyendo:

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \cdot m(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot m(A_i \cap B_j)$$

Reordenando las sumas:

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot m(A_i \cap B_j) \right)$$

Pero por el lema de aditividad de la integral sobre uniones disjuntas que particionan el espacio (Lema 2.2.1), esto es:

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} s + \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i} t = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$$

$\square$

Definición 2.2.2 [Integral de Lebesgue]

Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ una función medible y no-negativa. Definimos la integral de Lebesgue de f en $\mathbb{R}^n$ como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \;\middle|\; s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}$$

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible y $f : E \to [0, +\infty)$ es una función medible y no-negativa, definimos la integral de Lebesgue de f sobre E como:

$$\int_{E} f := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \;\middle|\; s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}$$

Proposición 2.2.1

Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

1. *Si $0 \leq f \leq g$ y $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible $\implies \int_E f \leq \int_F g$*
2. *Si $f, g \geq 0 \implies \int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$*
3. *Si $c \geq 0,\ f \geq 0 \implies \int_E cf = c \int_E f$*
4. *Si $m(E) = 0 \implies \int_E f = 0$ (Incluso si $f = +\infty$)*
5. *Si $f\big|_E = 0 \implies \int_E f = 0$ (Incluso si $m(E) = +\infty$)*
6. *Si $A \subset B$ y $f \geq 0 \implies \int_A f \leq \int_B f$*
7. *Si A, B son conjuntos medibles y disjuntos y $f \geq 0 \implies \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$*
8. *Si $f = g$ en casi todo punto de $E \subset \mathbb{R}^n$ medible $\implies \int_E f = \int_E g$*

1'. Si $0 \leq f \leq g$ en casi todo punto de $E \subset \mathbb{R}^n$ medible, entonces $\int_E f \leq \int_E g$.

Demostración.

1. Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ funciones medibles tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Definimos los siguientes conjuntos de funciones simples:

$$\mathcal{S}_f = \{s \text{ simple y medible} \mid 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E\} \quad \mathcal{S}_g = \{t \text{ simple y medible} \mid 0 \leq t \leq g \cdot \chi_E\}$$

   Como $f(x) \leq g(x)$ para todo x, se tiene que

$$f(x)\chi_E(x) \leq g(x)\chi_E(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

   Por lo tanto, cualquier función simple $s \in \mathcal{S}_f$ también satisface $0 \leq s \leq g \cdot \chi_E$, es decir,

$$\mathcal{S}_f \subset \mathcal{S}_g$$

   La integral de Lebesgue sobre E se define como:

$$\int_E f = \sup_{s \in \mathcal{S}_f} \int_{\mathbb{R}^n} s, \quad \int_E g = \sup_{t \in \mathcal{S}_g} \int_{\mathbb{R}^n} t$$

   Como el supremo de un conjunto está acotado por el supremo de un conjunto que lo contiene, se concluye que:

$$\int_E f \leq \int_E g$$

2. Véase la demostración del Corolario 2.2.2.

3. Si $f = c \cdot 0$, entonces es trivial. Si $c > 0$, tomamos $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, con $0 \leq s \leq f$.

   Entonces, $c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, con $0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$.

   Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^m c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s$$

   Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \;\middle|\; s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f$$

4. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible tal que $m(E) = 0$, y sea $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ una función simple tal que $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$. Entonces para todo $i = 1, \ldots, m$ se tiene que $m(A_i \cap E) = 0$ por ser E de medida nula. Por lo tanto,

$$\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0$$

   Esto es cierto para toda función simple s tal que $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$. Por lo tanto, el supremo de dichas integrales también es cero:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \;\middle|\; s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\} = 0$$

5. Supongamos que $f|_E = 0$, es decir, $f(x) = 0$ en casi todo punto de E.

   Sea $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ una función simple y medible tal que $0 \leq s \leq f \cdot \chi_E$. Por definición de restricción, se tiene que

$$s(x) \leq f(x) = 0 \quad \text{para casi todo } x \in E$$

   por lo que

$$s(x) = 0 \quad \text{para casi todo } x \in E$$

   Luego $\forall i = 1, \ldots, m$ tal que $\alpha_i > 0$ se tiene que $m(A_i \cap E) = 0$

   entonces,

$$\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0$$

   Finalmente, buscando el supremo de las funciones simples obtenemos:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \;\middle|\; s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\} = 0$$

6. Dados $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos medibles.

   Definimos las funciones:

$$f_1 := f \cdot \chi_A, \quad f_2 := f \cdot \chi_B$$

   Como $f \geq 0$ y $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (porque $A \subset B$), se tiene que:

$$f_1(x) = f(x)\chi_A(x) \leq f(x)\chi_B(x) = f_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

   Es decir, $f_1 \leq f_2$ en todo $\mathbb{R}^n$.

   Entonces, por el apartado (1), se sigue que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_2$$

   Como $\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_A = \int_{\mathbb{R}^n} f_1$ y $\int_B f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_B = \int_{\mathbb{R}^n} f_2$, concluimos que:

$$\int_A f \leq \int_B f$$

7. Si A, B son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$$

   Así,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B) = \int_{\mathbb{R}^n} (f\chi_A + f\chi_B)$$

   Por el apartado (2) se sigue,

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_B = \int_A f + \int_B f$$

   Por lo tanto,

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

8. Tenemos $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ funciones medibles tales que $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in E$. Es decir, existe un conjunto $Z \subset E$ tal que $m(Z) = 0$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E \setminus Z$.

   Definimos $A := E \setminus Z$, de modo que $E = A \cup Z$ con $A \cap Z = \emptyset$ y $m(Z) = 0$.

   Entonces por (7), podemos descomponer la integral como:

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f \quad \text{y} \quad \int_E g = \int_A g + \int_Z g.$$

   Pero sobre A, se cumple que $f = g$, por lo que:

$$\int_A f = \int_A g.$$

   Además, como $m(Z) = 0$, se sigue por el apartado (4) que:

$$\int_Z f = \int_Z g = 0.$$

   Por tanto,

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f = \int_A f + 0 = \int_A g + 0 = \int_A g + \int_Z g = \int_E g.$$

1'. Sea $Z = \{x \in E \mid f(x) > g(x)\}$ el conjunto excepcional donde no se cumple la desigualdad. Por hipótesis, $m(Z) = 0$.

   Definamos la función $h = g - f \geq 0$ en $E \setminus Z$ y $h = 0$ en Z. Entonces:

   - h es medible pues es suma/resta de funciones medibles en $E \setminus Z$ y es cero en Z.
   - $h \geq 0$ en todo E por construcción.

   Entonces $g = f + h$ en casi todo punto de E (excepto en Z que tiene medida nula). Luego aplicando primero (8) y después (2) se tiene que:

$$\int_E g = \int_E (f + h) = \int_E f + \int_E h$$

   Como $h \geq 0$, por la propiedad (1) es evidente que:

$$\int_E h \geq 0$$

   Por lo tanto:

$$\int_E g = \int_E f + \int_E h \geq \int_E f$$

□

Teorema 2.2.1 [Convergencia Monótona]

Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles tales que:

1. $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ *(en $\mathbb{R}^n$)*
2. $\lim_{k \to \infty} f_k = f$ *(puntualmente en $\mathbb{R}^n$)*

Entonces se cumple que:
$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Demostración. La sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente en $[0,+\infty)$. Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k\to\infty} f_k, \in [0,+\infty].$$

Dado que $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.
Sea s una función simple y medible en $\mathbb{R}^n$ con $0 \leq s \leq f$, y fijemos un $c \in (0,1)$. $\forall k \in \mathbb{N}$, definimos la sucesión de conjuntos

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$$

Esta sucesión es medible (debido a que tanto f_k como s son medibles) y es creciente (debido a que $f_k \leq f_{k+1}$ y $c \cdot s \leq c \cdot f \leq f$). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f(x) = 0 \implies f_k(x) = c \cdot s(x) = 0 \implies x \in E_k \quad \forall k \\ \text{Si } f(x) > 0 \implies \exists k \in \mathbb{N} : c \cdot s(x) \leq f_k(x) \leq f(x) \implies x \in E_k \end{cases}$$

Por lo tanto, $x \in E_k$. Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$ con $s^{-1}(\alpha_j) = A_j$ y $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, entonces, para cada $j = 1, \ldots, m$, tenemos por el Lema 1.2.6:

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_j).$$

Luego:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando $k \to \infty$, obtenemos que:

$$l \geq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite $c \to 1$ obtenemos que:

$$l \geq \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que s es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad $\forall s$ función simple, medible y no-negativa (por ser $0 \leq s \leq f$). Por tanto, obtenemos la desigualdad buscada: $l \geq \int_{\mathbb{R}^n} f$. □

Teorema 2.2.2 [Convergencia Monótona Versión Refinada]

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f_k : E \to [0, +\infty]$ sucesión de funcion medibles y $f : E \to [0, +\infty]$ tales que:

1. *$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ (en casi todo punto de E)*
2. *$\lim_{k\to\infty} f_k = f$ (en casi todo punto de E)*

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

Demostración. Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que $m(N) = 0$. Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E\setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \hat{f} = f \cdot \chi_{E\setminus N}$$

Podemos aplicar el Teorema 2.2.1, lo que nos permite concluir que: 1. $\hat{f}_k \to f$ puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_E f = \int_{E\setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

□

Corolario 2.2.2

1. *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ son medibles y no-negativas se tiene que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

.

2. *Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ sucesión de funciones mediles $\forall k \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

.

Demostración.

1. Dado que f y g son funciones medibles y no negativas, existen sucesiones crecientes de funciones simples y medibles $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$s_j \uparrow f \quad \text{y} \quad t_j \uparrow g \quad \text{puntualmente.}$$

Como la suma de funciones simples es simple, $s_j + t_j$ es también una sucesión creciente de funciones simples que converge puntualmente a $f + g$. Por el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema 2.2.1), se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (s_j + t_j)$$

Como la integral de Lebesgue es aditiva sobre funciones simples, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s_j + t_j) = \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \int_{\mathbb{R}^n} t_j$$

Luego, aplicando el límite,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g) = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Definamos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$F_m := \sum_{k=1}^{m} f_k$$

Como cada $f_k \geq 0$, la sucesión $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente y converge puntualmente a la serie

$$F := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Por el apartado anterior, tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_m = \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Como (F_m) converge monótonamente a F, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

□

Lema 2.2.2 [Lema de Fatou]

Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{R}^n}$ sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Demostración. Sea

$$f := \liminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{j\geq k} f_j \right) = \lim_{k\to\infty} g_k \quad \text{donde} \quad g_k := \inf_{j\geq k} f_j$$

Dado que $g_k \geq 0$, la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por el Teorema 2.2.1 (TCM), se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} g_k$$

Por construcción de la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (en particular por ser monótona creciente), se cumple la igualdad:

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k$$

Finalmente, dado que $g_k \leq f_k$, se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k \implies \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Nótese que para dos sucesiones $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $a_k \leq b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\liminf_{k\to\infty} a_k \leq \liminf_{k\to\infty} b_k$$

□

Observación 2.2.2

El resultado análogo con $\limsup$ *no es válido en general. Fijémonos que si intentásemos una demostración análoga, no se podría aplicar el Teorema 2.2.1 (TCM), pues la sucesión de funciones* $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *definida por* $h_k = \sup_{j\geq k} f_j$ *no es creciente, sino decreciente. Podemos tomar de contraejemplo la función* $f_k = k \cdot \chi_{[k,\infty]}$.

2.3 Funciones Integrables-Lebesgue

Definición 2.3.1 [Integral de Lebesgue de funciones medibles]

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible y* $f : E \to [-\infty, +\infty]$ *una función medible. Sean* $f^+ = \max\{f, 0\}$ *y* $f^- = \max\{-f, 0\}$ *las partes positiva y negativa de* f. *Definimos la integral de Lebesgue de* f *en* E *como:*

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \circ \chi_E - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \circ \chi_E$$

Definición 2.3.2 [Función Integrable]

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto medible y* $f : E \to [-\infty, +\infty]$ *función medible. Se dice que* f *es integrable (o absolutamente integrable) en* E *cuando*

$$\int_E f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

Observación 2.3.1

Una función f *(no necesariamente no negativa) es integrable en* E *si y sólo si* $|f|$ *es integrable en* E*, lo cual también es equivalente a que sus partes positiva y negativa,* $f^+ = \max\{f, 0\}$ *y* $f^- = \max\{-f, 0\}$*, sean ambas integrables en* E*:*

$$f \in L^1(E) \iff |f| \in L^1(E) \iff f^+, f^- \in L^1(E)$$

Lema 2.3.1

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ y $f = g - h$ con $g, h : E \to [0, +\infty]$ funciones integrables no negativas. Entonces,

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h$$

Demostración. Primero probemos que f es integrable. Como $f = g - h$, tenemos:

$$|f| = |g - h| \leq |g| + |h|.$$

Dado que g y h son integrables, $|g|$ y $|h|$ también lo son, y por lo tanto $|g|+|h|$ es integrable. La desigualdad anterior implica que f es integrable.

Por otro lado, expresando f en términos de sus partes positiva y negativa:

$$f = f^+ - f^- = g - h.$$

Reordenando términos obtenemos:

$$f^+ + h = f^- + g.$$

Al tratarse de funciones no negativas, podemos aplicar la linealidad de la integral de Lebesgue (Corolario 2.2.2)

$$\int_E f^+ + h = \int_E f^+ + \int_E h = \int_E f^- + g = \int_E f^- + \int_E g.$$

Finalmente, restando $\int_E h$ y $\int_E f^-$ en ambos lados:

$$\int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h,$$

lo cual es equivalente a:

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h,$$

completando la demostración. □

Proposición 2.3.1

Para funciones f y g integrables en E, se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Si f, g son integrables en E, entonces $f + g$ también es integrable y*

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

2. *Si f es integrable en E y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es integrable en E y*

$$\int_E (cf) = c \int_E f$$

3. *Si $f \leq g$ en casi todo punto de E, entonces*

$$\int_E f \leq \int_E g$$

4. *Si $|f|$ es integrable en E, entonces f también es integrable y*

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

5. *Si $f = g$ en casi todo punto de E y f es integrable en E, entonces g también es integrable en E con,*

$$\int_E f = \int_E g$$

6. *Si $m(E) = 0$ y f es medible, entonces es integrable en E y*

$$\int_E f = 0$$

7. *Si f es integrable en E entonces $|f| < \infty$ en casi todo punto de E*

8. *Si $\int_E |f| = 0$, entonces $f = 0$ en casi todo punto de E.*

Demostración.

1. Dado que $f = f^+ - f^-$ y $g = g^+ - g^-$, se sigue que:

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

donde ambos términos $(f^+ + g^+)$ y $(f^- + g^-)$ son no negativos. Por el lema de integración de funciones no negativas, tenemos:

$$\int_E (f+g) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-).$$

Aplicando el Corolario 2.2.2 a cada integral y reordenando los términos:

$$= \left(\int_E f^+ + \int_E g^+\right) - \left(\int_E f^- + \int_E g^-\right) = \left(\int_E f^+ - \int_E f^-\right) + \left(\int_E g^+ - \int_E g^-\right)$$

De nuevo, por el Lema 2.3.1, obtenemos que:

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$$

2. Consideremos primero el caso $c > 0$. Como $f = f^+ - f^-$, se tiene que:

$$cf = cf^+ - cf^-,$$

donde tanto cf^+ como cf^- son funciones no negativas.

Aplicando el apartado (3) de la Proposición 2.2.1, obtenemos:

$$\int_E cf = \int_E cf^+ - \int_E cf^- = c\int_E f^+ - c\int_E f^-.$$

Factorizando la constante c, concluimos que:

$$\int_E cf = c\left(\int_E f^+ - \int_E f^-\right) = c\int_E f.$$

Para el caso $c < 0$, observemos primero que:

$$cf = (-|c|)f = -(|c|f) = -(|c|f^+ - |c|f^-) = |c|f^- - |c|f^+.$$

Integrando ambos lados y por la proposición aplicada anteriormente, tenemos:

$$\int_E cf = \int_E |c|f^- - \int_E |c|f^+ = |c|\int_E f^- - |c|\int_E f^+.$$

Factorizando y teniendo en cuenta que $c = -|c|$:

$$\int_E cf = -|c|\left(\int_E f^+ - \int_E f^-\right) = c\int_E f.$$

3. Como $g - f \geq 0$ en casi todo punto de E, podemos hacer la descomposición de f y g en sus partes positiva y negativa, de forma que $g - f = (g^+ - g^-) - (f^+ - f^-) = (g^+ + f^-) - (g^- + f^+) \geq 0$ en casi todo punto de E. Aplicando el apartado (1') de la Proposición 2.2.1, tenemos que:

$$0 \leq g^- + f^+ \leq g^+ + f^- \text{ en casi todo punto de } E \implies \int_E (g^- + f^+) \leq \int_E (g^+ + f^-)$$

Luego haciendo uso de (2) de la Proposición 2.2.1 en cada integral:

$$\int_E g^- + \int_E f^+ \leq \int_E g^+ + \int_E f^-$$

Reordenando los términos, obtenemos:

$$\int_E f^+ - \int_E f^- \leq \int_E g^+ - \int_E g^- \implies \int_E f \leq \int_E g$$

4. Se tiene que $|f| = f^+ + f^-$. Usando la linealidad de la integral,

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ + \int_E f^- \right|$$

Como $f = f^+ - f^-$, aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|$$

5. Como $f = g$ en casi todo punto de $E \implies f^+ = g^+$ y $f^- = g^-$ en casi todo punto de E, por lo que sólo queda aplicar el propiedad (8) de la Proposición 2.2.1:

$$\int_E f^+ = \int_E g^+ \text{ y } \int_E f^- = \int_E g^-$$

Así,

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g$$

6. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto de medida nula, puesto que $0 \leq |f|$, entonces por (4) de la Proposición 2.2.1 se cumple que:

$$\int_E |f| = 0$$

Aplicando el apartado anterior se deduce el resultado:

$$0 \leq \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = 0 \implies \int_E f = 0$$

7. Por definición, sabemos que la función f es integrable en E si

$$\int_E f < +\infty \iff \int_E |f| < +\infty$$

Sea $Z \subset E$ el conjunto de puntos de E donde $|f| = \infty$. Entonces tenemos por la propiedad (7) de la Proposición 2.2.1 que:

$$\int_E |f| = \int_{E \setminus Z} |f| + \int_Z |f| < +\infty \implies \int_Z |f| < +\infty \implies m(Z) = 0.$$

Por lo tanto, $|f| < \infty$ en casi todo punto de E.

8. Sea
$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$
Definimos los conjuntos
$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
por lo que
$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$
Ahora, evaluamos la medida de A_k utilizando la integral:
$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \leq \int_{A_k} k \cdot |f| = k \int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} |f| \leq \int_E |f|$$
Tomando el límite cuando $k \to \infty$ (y de la subaditividad) se concluye que
$$m(A) = \lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0.$$

□

Teorema 2.3.1 [Convergencia Dominada]

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $\forall k \in \mathbb{N}, f_k : E \to [-\infty, +\infty]$ funciones medibles. Supongamos que $\exists g : E \to [0, +\infty]$ integrable en E tal que $|f_k| < g$ en casi todo punto de E y $\forall k \in \mathbb{N}$. Si además suponemos que $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ en casi todo punto de E, entonces:

1. *f_k y f son integrables en E*
2. *$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| = 0$*
3. *$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$*

Demostración.

1. Dado que $|f_k| \leq |g| = g \quad \forall k \in \mathbb{N}$, se concluye que f_k es integrable en E. Además, como $|f| \leq g$, se sigue que f también es integrable en E.

2. Observamos que, como $|f_k| \leq g$ y $|f| \leq g$ para casi todo $x \in E$, entonces:
$$|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x)| + |f(x)| \leq g(x) + g(x) = 2g(x) \quad \text{para casi todo } x \in E$$
Por lo tanto, la función $|f_k - f|$ está acotada superiormente por $2g$, que es integrable. Sea ahora:
$$h_k(x) := 2g(x) - |f_k(x) - f(x)| \geq 0$$
Como $f_k(x) \to f(x)$ casi en todo punto de E, se tiene:
$$|f_k(x) - f(x)| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad h_k(x) \to 2g(x)$$
Aplicamos el Lema de Fatou a la sucesión de funciones no negativas (h_k):
$$\int_E \liminf_{k\to\infty} h_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E h_k$$

Dado que $h_k(x) \to 2g(x)$, entonces:

$$\int_E 2g \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E h_k$$

Pero como $h_k = 2g - |f_k - f|$, se tiene:

$$\int_E h_k = \int_E (2g - |f_k - f|) = \int_E 2g - \int_E |f_k - f|$$

Sustituyendo en la desigualdad anterior y utilizando el siguiente lema

Lema 2.3.2

Si $a_k \to a$, entonces

$$\liminf_k (a_k + b_k) \geq \liminf_k a_k + \liminf_k b_k$$

se cumple que:

$$\int_E 2g \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_E 2g - \int_E |f_k - f| \right) \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_E 2g \right) + \liminf_{k\to\infty} \left(- \int_E |f_k - f| \right)$$

$$= \int_E 2g - \limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|$$

Restando $\int_E 2g$ en ambos lados:

$$0 \leq -\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \leq 0$$

Como la integral de una función no negativa también es no negativa:

$$0 \leq \int_E |f_k - f| \leq \limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| = 0$$

3. Finalmente, aplicamos la propiedad de la integral a la diferencia $f_k - f$:

$$\left| \int_E f_k - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_k - f) \right| \leq \int_E |f_k - f| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$$

$\square$

Definición 2.3.3 [Integral Paramétrica]

Sea f función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

Teorema 2.3.2

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto medible, $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto cualquiera, $f : E \times U \to \mathbb{R}$ y suponemos que:

1. *$\forall u \in U$ $f(\cdot, u) : E \to \mathbb{R}$ es medible.*
2. *$\forall x \in E$ $f(x, \cdot) : U \to \mathbb{R}$ es continua.*
3. *$\exists g : E \to [0, +\infty]$ integrable en E tal que $|f(x,u)| \leq g(x)$ en casi todo punto de E y $\forall u \in U$.*

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_E f(x,u)dx$$

es una función continua en U.

Demostración. Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que $u_k \to u_0 \in U$. ¿Se sigue que $(F(u_k))_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to\infty} F(u_0)$?
Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$f_k = f(\cdot, u_k) : E \to \mathbb{R}$$

que es una función medible. Por la condición (2), se cumple que $\forall x \in E$,

$$f_k(x) = f(x, u_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x, u_0).$$

Es decir, la sucesión $\{f_k\}$ converge puntualmente en E a

$$f_0(x) = f(x, u_0).$$

Además, se cumple que

$$|f_k(x)| = |f(x,u_k)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Aplicando el Teorema 2.3.1 (TCD), se concluye que f_k es integrable para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

Es decir,

$$F(u_0) = \int_E f(x, u_0)\, dx.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$F(u_k) = \int_E f(x, u_k)\, dx \quad \Rightarrow \quad F(u) = \int_E f(x,u)\, dx$$

□

Observación 2.3.2

$\forall u_0 \in U$ $\lim_{u\to u_0} \int_E f(x,u)dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x, u_0)dx$

Teorema 2.3.3 [Regla de Leibniz]

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto medible, $U = (a,b) \subset \mathbb{R}$ conjunto abierto y $f : E \times U \to \mathbb{R}$ medible. Y además supongamos que:

1. *$\forall u \in U$ $f(\cdot, u) : E \to \mathbb{R}$ es integrable en E.*

2. $\forall x \in E$ $f(x,\cdot): U \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^1 *en* U.

3. $\exists g: E \to [0,+\infty]$ *integrable en* E *tal que* $|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)| \leq g(x)$ *en casi todo punto de* E *y* $\forall u \in U$.

Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_E f(x,t)dx$$

es de clase C^1 *en* U *y* $\forall t \in U$ *se cumple que:*

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

Demostración. Fijamos $t_0 \in (a,b)$ y definimos la función $h: E \times (a,b) \to \mathbb{R}$ como:

$$h(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}, & t \neq t_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

1. Medibilidad de $h(x,t)$

   Queremos ver que $h(x,t)$ es medible para todo $t \in (a,b)$.

   - Si $t \neq t_0$, es claro. - Si $t = t_0$, tenemos que:

   $$h(x,t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x,t_0+1/k) - f(x,t_0)}{1/k}$$

   lo cual es medible.

2. Continuidad de $h(x,\cdot)$

   Para todo $x \in E$, si $h(x,\cdot)$ es acotada en (a,b), entonces es continua.

   - Si $t \neq t_0$, es claro. - Si $t = t_0$, tenemos:

   $$h(x,t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0) = \lim_{t\to t_0} h(x,t),$$

   lo cual prueba la continuidad.

3. Acotación y aplicación de la Regla de Leibniz

   $$|h(x,t)| \leq g(x)$$

   - Si $t = t_0$, es claro. - Si $t \neq t_0$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (t,t_0)$ tal que:

   $$\left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,s) \right| \leq g(x).$$

   Por la Regla de Leibniz, obtenemos:

   $$F'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \int_E \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} dx =$$
   $$\lim_{t\to t_0} \left(\int_E h(x,t)dx \right) = \int_E \left(\lim_{t\to t_0} h(x,t) \right) dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, dx.$$

   Finalmente, como F' es continua en (a,b), se concluye que $F \in C^1(a,b)$.

□

2.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

Teorema 2.4.1

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann en $[a,b]$. Entonces f es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y se cumple que:

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$$

Observación 2.4.1

Denotamos $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

Demostración. $\forall k \in \mathbb{N}$ sabemos que $\exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_{n(k)}^k = b\} \subset [a,b]$ tal que: $\bar{S}(f,P_k) - \underline{S}(f,P_k) < \frac{1}{k}$. Suponemos que P_{k+1} es mas fina que P_k y además que

$$\mathrm{diam}(P_k) = \sup_{i\in\{1,\dots,n(k)\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ denotamos $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$ y $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$.

$$\underline{S}(f,P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} m_k(x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \varphi_k \quad \text{con} \quad \varphi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

$$\bar{S}(f,P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} M_k(x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \psi_k \quad \text{con} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

Es claro que $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ en [a,b]. Además, como P_{k+1} es más fino que $P_k \implies (\varphi_k)\uparrow$ y $(\psi_k)\downarrow$ Denotamos $\varphi = \lim_{k\to\infty}\varphi_k = \sup\varphi_k$ y $\psi = \lim_{k\to\infty}\psi_k = \inf\psi_k$ que son medibles y cumplen que $\varphi \leq f \leq \psi$.
Como f es integrable-Riemann $\implies$ f es acotada $\iff$ $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. La función $g(x) = M$ es integrable en $[a,b]$ y puesto que $|\psi_k| \leq g$ y $|\varphi_k| \leq g$ entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f,P_k) = \int_a^b \varphi_k \to \int_a^b \varphi \qquad \bar{S}(f,P_k) = \int_a^b \psi_k \to \int_a^b \psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f,P_k) \to (R)\int_a^b f \quad \text{y} \quad \bar{S}(f,P_k) \to (R)\int_a^b f \implies \int_a^b \varphi = (R)\int_a^b f = \int_a^b \psi$$

Y como $\int_a^b \psi - \varphi = 0 \implies \psi - \varphi = 0$ en casi todo punto de $[a,b]$. Es decir $\varphi = f = \psi$ en casi todo punto de $[a,b]$. Y finalmente obtenemos que:

$$(L)\int_a^b f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi = (R)\int_a^b f$$

□

Teorema 2.4.2

Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable-Riemann en $[a,b]$ $\iff$

$D_f = \{x \in [a,b] \mid f$ *no es continua en* $x\}$ *tiene medida nula.*

Ejemplo

La función de Dirichlet

$$f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable-Riemann en $[0,1]$. Pero $f = 0$ en casi todo punto $\implies$ f es integrable-Lebesgue y ésta vale: $\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 0 = 0$

Teorema 2.4.3

Sean $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ *y* $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ *una función absolutamente integrable-Riemann impropia en el intervalo* (α,β)*. Entonces* f *es integrable-Lebesgue en* (α,β) *y se cumple que:*

$$(L)\int_\alpha^\beta f = (R)\int_\alpha^\beta f$$

Demostración. Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea (α,β), en este caso trataremos el intervalo $[\alpha,\infty)$: Por hipótesis sabemos que:

1. $\forall k \in \mathbb{N}, f$ es integrable-Riemann en $[a,b]$
2. $\lim_{b\to\infty} \int_a^b |f| < +\infty$

Tomamos una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ y definimos las sucesiones de funciones: $f_n = f \cdot \chi_{[a,b_n]}$ y $g_n = |f| \cdot \chi_{[a,b_n]}$ medibles. De manera que tenemos que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow |f|$. Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monóntona:

1. $(L)\int_a^{+\infty} |f| = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^{b_n} |f| = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{b_n} |f| = (R)\int_a^{+\infty} |f| < \infty$
2. Esto muestra que f es integrable-Lebesgue en $[a,+\infty)$.

Por otra parte, como $|f_n| \leq |f|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

1. $(L)\int_a^{+\infty} f = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{b_n} f = (R)\int_a^{+\infty} f$

Finalmente obtenemos el resultado de que f es integrable de Riemann-impropia en $[a,+\infty)$.
$\forall (b_n)_{n\in\mathbb{N}} : b_n \to \infty$ tenemos que $|\int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f| \leq \varepsilon$ □

Ejemplo

(Hoja 3. Ej: 6.a) Calculemos

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x}\, dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando con respecto al parámetro t. Para ello, aplicamos el Teorema de Leibniz:
Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $(a,b) \subset \mathbb{R}$, con $f : E \times (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $\forall u \in (a,b), f(\cdot,u) : E \to \mathbb{R}$ es integrable en E.

2. Para casi todo $x \in E$, la función $f(x, \cdot) : (a, b) \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en (a, b).

3. Existe $g : E \to [0, +\infty]$ integrable en E tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x) \quad \text{para casi todo } x \in E, \forall u \in (a,b).$$

Entonces, $F(t)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$ y se cumple:

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

Dado que

$$f(x,t) = \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x},$$

calculamos la derivada parcial con respecto a t:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \cos(tx)e^{-x}.$$

Verifiquemos cada una de las hipótesis del Teorema de Leibniz:

1. $\forall t \in \mathbb{R}, f(x,t)$ es integrable en $[0, +\infty)$:

$$|f(x,t)| \leq e^{-x} = g(x).$$

   Como $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1 < +\infty$, se cumple la integrabilidad.

2. $\forall x \in E$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \cos(tx)e^{-x}$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo que $f(x, \cdot)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

3. Se cumple que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = |\cos(tx)e^{-x}| \leq e^{-x} = g(x),$$

   que es integrable en $[0, +\infty)$.

Por lo tanto, F es de clase C^1 en $\mathbb{R}$ y

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x}\, dx.$$

Ahora calculemos esta integral:

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-x}\, dx.$$

Usando integración por partes con

$$\begin{cases} u = \cos(tx), & dv = e^{-x}dx, \\ du = -t\sin(tx)dx, & v = -e^{-x}, \end{cases}$$

obtenemos:

$$I(t) = [\cos(tx)e^{-x}]_0^{+\infty} - t\int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-x}dx.$$

Evaluando los límites y repitiendo el proceso para $\sin(tx)e^{-x}$, obtenemos:

$$I(t)(1 + t^2) = 1.$$

Despejando:

$$I(t) = \frac{1}{1+t^2} = F'(t).$$

Finalmente, integramos:

$$F(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C.$$

Si $t = 0$, entonces

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Por lo tanto:

$$F(t) = \arctan(t).$$