Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
Ciencias Matemáticas e
Ingenería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Medida de Lebesgue

1.1 Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1.1. Un n-rectángulo en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = \prod_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i] = [a_1,\ b_1] \times [a_2,\ b_2] \times ... \times [a_n,\ b_n] \text{ donde } a_i \leq b_i\ \forall i \tag{1}$$

Definimos el volúmen de R como:

$$\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \tag{2}$$

Consideramos también los n-rectángulos abiertos denotados por $\mathring{R}$, que se definen de forma análoga. Si nos se especifica si un rectángulo es abierto o cerrado, se asume que es cerrado.

Observación 1.1.1. Dado R n-rectángulo cerrado tal que $R = \prod_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i]$, podemos considerar para cada $\delta > 0$ el n-rectángulo abierto $R_\delta = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \delta,\ b_i + \delta)$. Se tiene que $R \subset R_\delta$ y $\text{vol}(R_\delta) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i + 2\delta) = \text{vol}(R) + 2n\delta$. Por tanto:

$$\text{vol}(R) = \lim_{\delta \to 0} \text{vol}(R_\delta) \tag{3}$$

Definición 1.1.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la medida exterior de A como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ con } R_i \text{ n-rectángulos cerrados} \right\} \tag{4}$$

Donde la ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables de n-rectángulos que recubren A. A esta medida exterior la llamamos medida de Lebesgue exterior.

Observación 1.1.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$

1. $m^*(A) = +\infty \iff \forall \{R_j\}_{j \in J}$ tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ se tiene que $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) = +\infty$
2. $m^*(A) = 0 \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \{R_j\}_{j \in J}$ tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ y $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \epsilon$
3. $m^*(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \{R_j\}_{j \in J}$ tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} R_j$ y $\sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) < \alpha + \epsilon$

Definición 1.1.3. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo si $m^*(A) = 0$.

1. Si R es un n-rectángulo degenerado, es decir, R tiene alguno de los lados de longitud 0, entonces R es un conjunto nulo ($m^*(R) = 0$).
2. En $\mathbb{R}^2$, sea el conjunto $A = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$. Dado $\epsilon > 0$ tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \frac{1}{\epsilon}$. Consideramos $A \subset \bigcup_{i=1}^{m}[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$. Se tiene que $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{vol}([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m} < \epsilon$. Por tanto, $m^*(A) = 0$.

Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.1. Sea $m^* \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ una función que cumple:

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. $m^*(A) \leq m^*(B)$ si $A \subset B$
3. $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

Entonces m^* es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

1. $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_j$ con R_j n-rectángulos degenerados $\implies m^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0$.
2. Sea $A \subset B$ y sea $\{R_j\}_{j \in J}$ tal que $B \subset \bigcup_{j \in J} R_j$. Entonces $\{R_j\}_{j \in J}$ es un recubrimiento de A y por tanto $m^*(A) \leq \sum_{j \in J} \text{vol}(R_j) \implies m^*(A) \leq m^*(B)$.
3. Si $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = +\infty$ entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\exists \{R_{j,i}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{j,i}$ y por tanto se tiene que $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_{j,i}) < \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, se tiene que $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$.

□

Corolario 1.1.1. La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

Demostración. Sea $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset R^n$ tal que $m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ entonces $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = 0 \implies m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$. □

Lema 1.1.1. Sea $A \in \mathbb{R}^n$ entonces $m^*(A) = \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ con } Q_i \text{ n-rectángulos abiertos}\}$

Demostración. Denotamos por β el ínfimo de la expresión del enunciado del lema. Sea $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de rectángulos abiertos tal que $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$. Tenemos entonces que $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{Q}_j$ y puesto que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\overline{Q}_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j)$, se tiene que $m^*(A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(\overline{Q}_j) \leq \beta$. Por tanto, $m^*(A) \leq \beta$. Veamos ahora la otra desigualdad $\beta \leq m^*(A)$. Si $m^*(A) = +\infty$ entonces $\beta = +\infty$ y no hay nada que demostrar. Supongamos que $m^*(A) < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos cerrados tal que $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$ y $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(A) + \epsilon$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideramos $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^j}$. Escogiendo $\delta_j > 0$ lo suficientemente pequeño, se tiene que $\text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \text{vol}(R_j) + \epsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Nótese que aquí $\text{vol}(R_j)_{\delta_j}$ denota el volumen del n-rectángulo abierto R_j con lados aumentados en δ_j. Entonces $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (R_j)_{\delta_j}$ y $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j)_{\delta_j} < \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{vol}(R_j) + \epsilon_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(A) + 2\epsilon$. Por tanto, $\beta \leq m^*(A)$. □

Definición 1.1.4. Una partición del intervalo $[a, b]$ es una colección numerable de puntos $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$. Dado un n-rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, una partición $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ de R es una colección particiones P_i de $[a_i, b_i]$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ siendo $R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

Los subrectángulos de P son los conjuntos de la forma

$$S_{i_1,i_2,...,i_n} = \prod_{j=1}^{n} [t^j_{i_j}, t^j_{i_j+1}] \tag{5}$$

Denotamos $S \in P$ para indicar que S es un subrectángulo de P.

Lema 1.1.2. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo y P una partición de R. Entonces:

1. $R = \bigcup_{S \in P} S$
2. Si $S, S' \in P$ y $S \neq S'$ entonces $S \cap S' = \emptyset$
3. $\mathrm{vol}(R) = \sum_{S \in P} \mathrm{vol}(S)$

Proposición 1.1.1. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo entonces $m^*(R) = \mathrm{vol}(R)$.

Demostración.
" $\subseteq$ "
Sea $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$ con $R_1 = R$ y R_j degenerados para $j > 1$. Entonces:

$$m^*(R) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) = \mathrm{vol}(R_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mathrm{vol}(R_j) = \mathrm{vol}(R_1) = \mathrm{vol}(R).$$

" $\supseteq$ "
Dado $\epsilon > 0$ existe $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos abiertos tal que $R \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ y $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$. Sabemos que R es compacto al ser cerrado y acotado y, por tanto, al ser $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ un recubrimiento abierto de R, existe un subrecubrimiento finito $\{Q_1, Q_2, ..., Q_m\}$ de R. Entonces $R \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{Q}_i$. Consideramos $R_j = R \cap \overline{Q}_j$ para $j = 1, 2, ..., m$. Tenemos entonces que $R = \bigcup_{j=1}^m \overline{Q}_j$ y además prolongando los lados podemos obtener una partición P de R tal que cada subrectángulo de P está contenido el algún R_j para $1 \leq j \leq m$. Por tanto, $\mathrm{vol}(R) = \sum_{S \in P} \mathrm{vol}(S) \leq \sum_{j=1}^m \mathrm{vol}(R_j) \leq \sum_{j=1}^m \mathrm{vol}(Q_j) < m^*(R) + \epsilon$. Por tanto, $m^*(R) \geq \mathrm{vol}(R)$. $\square$

1.2 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Notación: Para $A \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por A^c al complementario de A en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.1. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue si para todo $R \subset \mathbb{R}^n$ n-rectángulo se tiene que:

$$m^*(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R \cap A^c) \tag{6}$$

Proposición 1.2.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces son equivalentes:

1. A es medible en el sentido de Lebesgue.
2. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto se tiene que $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.
3. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto se tiene que $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.

Demostración.
"$2 \implies 3$"
Trivial
"$3 \implies 2$"
$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A \cap A^c) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$
"$2 \implies 1$"
Inmediato, tomando $E = R$.
"$1 \implies 3$"
Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto, si $m^*(E) = +\infty$ entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $m^*(E) < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists \{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos cerrados tal que $E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$. Entonces $E \cap A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \cap A$ y $E \cap A^c \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \cap A^c$. Por tanto, $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(R_j \cap A) + \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(R_j \cap A^c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \text{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$. Por tanto, $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$. $\square$

Definición 1.2.2. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3. $\forall \{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ se tiene que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

Definición 1.2.3. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra, entonces una medida en X es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos entonces:

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$$

Teorema 1.2.1. La familia M de todos los conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ es una σ-álgebra y $m = m^* \restriction_M$ es una medida numerablemente aditiva que llamaremos medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Demostraremos este teorema con los siguientes lemas:

Lema 1.2.1. $\mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E) = m^*(E \cap \mathbb{R}^n) + m^*(E \cap (\mathbb{R}^n)^c) = m^*(E) + m^*(\emptyset) = m^*(E) + 0 = m^*(E)$. $\square$

Lema 1.2.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible en el sentido de Lebesgue. Entonces A^c es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap (A^c)^c) = m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap A) = m^*(E)$ $\square$

Con los dos lemas anteriores obtenemos como colorario que $\emptyset$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Lema 1.2.3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Observemos primero que $A \cup B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ luego entonces tenemos que $m^*(A \cup B) \leq m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto. Entonces $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) = m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c)$. $\square$

Lema 1.2.4. Sea $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ es medible en el sentido de Lebesgue y además $m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$.

Demostración. Definimos la sucesión creciente de conjuntos $B_k = A_1 \cup \ldots \cup A_k$. Entonces B_k es medible en el sentido de Lebesgue por el lema anterior. Sean $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ y $E \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$m^*(E \cap B_k) = m^*(E \cap B_k \cap A_k) + m^*(E \cap B_k \cap A_k^c) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1}) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \cap B_{k-1})$$

Reiterando el proceso obtenemos $m^*(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)$. Por lo tanto, $m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_k^c) = \left(\sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j)\right) + m^*(E \cap B_k^c) \geq \sum_{j=1}^k m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c)$. Se sigue entonces $m^*(E) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap A_j) + m^*(E \cap B^c) \geq m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$
Luego B es medible.
Tomando $E = B$ en la desigualdad anterior obtenemos $m^*(B) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j) + m^*(B \cap B^c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j)$. Por otro lado, $m^*(B) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_j)$ por definición de medida exterior. Por tanto, $m^*(B) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j) \implies m^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(A_j)$. $\square$

Lema 1.2.5. La unión numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es un conjunto medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Considermos:

$$\begin{gathered} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \cap B_1^c \\ A_3 = B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c \\ \vdots \\ A_j = B_j \cap B_{j-1}^c \cap \ldots \cap B_1^c \end{gathered}$$

Observemos que $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ y que para todo $j \in \mathbb{N}$, A_j es intersección finita de conjuntos medibles, por tanto, A_j es medible. Además, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Por el lema anterior, $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ es medible $\implies \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ es medible. $\square$

Proposición 1.2.2. Todo conjunto nulo es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ nulo, entonces $m^*(A) = 0$. $\forall E \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $E \cap A \subset A \implies 0 \leq m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0 \implies m^*(E \cap A) = 0$. Análogamente, $E \cap A^c \subset E \implies 0 \leq m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E) \implies m^*(E \cap A^c) = 0$. Por tanto, $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$. Para la otra desigualdad, $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \implies m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$. Y por tanto obtenemos la igualdad $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$. □

Definición 1.2.4. Se dice que una *propiedad* se verifica en casi todo punto cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica la propiedad es un conjunto nulo.

Proposición 1.2.3. Todo n-rectángulo cerrado $R \in \mathbb{R}^n$ es medible en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Dado $R \subset \mathbb{R}^n$ n-rectángulo cerrado, tenemos que ver que $\forall Q \in \mathbb{R}^n$ n-rectángulo cerrado se tiene que $\mathrm{vol}(Q) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$. Consideramos el n-rectángulo $Q_0 = Q \cap R$. Nótese que $Q \cap R^c$ es unión finita de n-rectángulos $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Entonces $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$ forman una partición de Q. Luego $\mathrm{vol}(Q) = \sum_{i=0}^m \mathrm{vol}(Q_i) = m^*(Q \cap R) + \sum_{i=1}^m m^*(Q_i) \geq m^*(Q \cap R) + m^*(Q \cap R^c)$. □

Observación 1.2.1. En $\mathbb{R}^n$ los rectángulos abiertos o se$^{\text{o}}$miabiertos son medibles en el sentido de Lebesgue.

Definición 1.2.5. Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \tag{7}$$

Análogamente se pueden definir los cubos n-dimensionales semi-abiertos.

Observación 1.2.2. Denotaremos la norma del supremo en $\mathbb{R}^n$ como:

$$||x||_\infty = \sup_{i=1}^{n}\{|x_i|\} \text{ para } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

Llamaremos bola abierta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x||_\infty < r\} \equiv (x_1 - r, x_1 + r) \times \ldots \times (x_n - r, x_n + r) \tag{9}$$

Análogamente, llamaremos bola cerrada de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$\overline{B}_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x||_\infty \leq r\} \equiv [x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r] \tag{10}$$

Teorema 1.2.2. Sea $G \in \mathbb{R}^n$ abierto entonces se tiene:

1. G es unión numerable de n-cubos cerrados.

2. G es unión numerable de n-cubos abiertos.

Demostración. Consideremos la familia de n-cubos $\mathcal{B} = \{\overline{B}_\infty(q,r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B}_\infty(q,r) \subset G\}$. Veamos que $G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$. Dado que $B \in G \quad \forall B \in \mathcal{B}$ entonces es inmediato ver que $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset G$. Por ser G abierto, $\exists\delta > 0$ tal que $B_\infty(x,\delta) \subset G$. Sea $r \in \mathbb{Q}$ con $0 < r < \frac{\delta}{2}$, por la densidad de $\mathbb{Q}^n$ en $\mathbb{R}^n$, sabemos que $\exists q \in \mathbb{Q}^n$ tal que $||x-q||_\infty < r$. Veamos entonces que $x \in B_\infty(q,r) \subset B_\infty(x,\delta) \subset G$.
Dado $y \in \mathbb{R}^n$ con $||y-q||_\infty < r$ se sigue:

$$||y-x||_\infty \le ||y-q||_\infty + ||q-x||_\infty < r + r = 2r < \delta$$

Por tanto $y \in B_\infty(x,\delta) \implies x \in \overline{B}_\infty(q,r) \subset G$. Luego $G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.
Nótese que numerabilidad de la familia $\mathcal{B}$ es inmediata por la numerabilidad de $\mathbb{Q}^n$ que, a su vez, es numerable por ser $\mathbb{Q}$ numerable.
La segunda parte del teorema es análoga a la primera. □

Corolario 1.2.1. Todos los conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

Teorema 1.2.3. Sea $E \in \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. E es medible en el sentido de Lebesgue.
2. $\forall\epsilon > 0 \quad \exists G \in \mathbb{R}^n$ abierto tal que $E \subset G$ y $m^*(G \setminus E) < \epsilon$.
3. $\forall\epsilon > 0 \quad \exists F \in \mathbb{R}^n$ cerrado tal que $F \subset E$ y $m^*(E \setminus F) < \epsilon$.
4. $\forall\epsilon$ existen F cerrado y G abierto tales que $F \subset E \subset G$ y $m^*(G \setminus F) < \epsilon$.

Demostración.
"1 $\implies$ 2" Distinción de casos:

1. Supongamos que $m^*(E) < +\infty$: Sea $\epsilon > 0$. Por definición de medida exterior, $\exists\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de n-rectángulos abiertos tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty (R_j)$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) < m^*(E) + \epsilon$. Considerando el abierto $G = \bigcup_{j=1}^\infty (R_j)$, se tiene que G es medible por el colorario anterior y $m^*(G) = m^*(E \cap G) + m^*(E \cap G^c) = m^*(E) + m^*(G \setminus E)$. Por tanto, $m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_j) - m^*(E) < \epsilon$.

2. Supongamos que $m^*(E) = +\infty$: $\forall k \in \mathbb{N}$ sea $E_k = E \cap [-k,k]^n$, que es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. Además $m^*(E_k) < +\infty$ por ser E_k acotado, y $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Dado $\epsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ existe G_k abierto tal que $E_k \subset G_k$ y $m^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Entonces $G = \bigcup_{k=1}^\infty G_k$ abierto y $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty G_k = G$ por lo que $m^*(G \setminus E) \le m^*(\bigcup_{k=1}^\infty (G_k \setminus E_k)) \le \sum_{k=1}^\infty m^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$.

"2 $\implies$ 1"
$\forall j \in \mathbb{N}$ tomando $\epsilon = \frac{1}{j}$ entonces $\exists G_j$ abierto tal que $E \subset G_j$ y $m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$. Entonces considerando $B = \bigcap_{j=1}^\infty G_j$ que es medible y abierto se tiene que $E \subset B$. Luego $B \setminus E \subset G_j \setminus E$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por tanto, $m^*(B \setminus E) \le m^*(G_j \setminus E) < \frac{1}{j}$. En consecuencia $m^*(B \setminus E) = 0 \implies B \setminus E$ es medible.
Por otro lado, $B = E \cup (B \setminus E)$ o que es lo mismo $E = B \setminus (B \setminus E)$. Tanto B como $(B \setminus E)$ son medibles, luego E es medible.
Observación: Además, $E = B \setminus Z$, donde B es intersección numerable de abiertos o Z es un conjunto nulo.
"1 $\implies$ 3"
Como E es medible entonces E^c también los es. Por (2), dado $\epsilon > 0$ existe G abierto tal que $E^c \subset G$ y $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$. Entonces $F = G^c$ es cerrado y $F \subset E$. Además, $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies$

$m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$.
"$1 \implies 3$"
Como E es medible entonces tenemos que E^c también es medible, por lo que, dado $\epsilon > 0$ por (2) $\exists G$-abierto tal que $E^c \subset G$ y $m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$. Entonces $F = G^c$ es cerrado y $F \subset E$. Además, $E \setminus F = E \cap F^c = E \cap G = G \setminus E^c \implies m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$.
"$3 \implies 1$"
$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists F_j$ cerrado tal que $F_j \subset E$, $m(E \setminus F_j) < 1/j$. Sea $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ conjunto medible y $A \subset E$. Además, $m(E \setminus A) \leq m(E \setminus F_j) < 1/j\ \forall j \in \mathbb{N}$. Por tanto, $E = A \cup (E \setminus A) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \cup (E \setminus A)$ Entonces dado que $E \setminus A$ es un conjunto medible por ser nulo y $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ es medible por ser unión numerable de conjuntos cerrados, entonces E es medible.

□

Definición 1.2.6. La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ es la menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$ (o equivalentemente, la menor σ-álgebra que contiene a todos los cerrados de $\mathbb{R}^n$). Los conjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se llaman conjuntos de Borel o conjuntos Borelianos.
Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es G_δ si A es intersección numerable de abiertos. Análogamente, decimos que un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ es F_σ si A es unión numerable de cerrados.

Corolario 1.2.2. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. E es medible en el sentido de Lebesgue.
2. $E = A \setminus N$ con A siendo G_δ y N un conjunto nulo.
3. $E = B \cup N$ con B siendo F_σ y N un conjunto nulo.

Corolario 1.2.3. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces son equivalentes:

1. E es medible en el sentido de Lebesgue.
2. $m(E) = \inf\{m(G) : G \text{ abierto y } E \subset G\}$.
3. $m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$.

Lema 1.2.6. Sea $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ familia numerable y creciente de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Entonces $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ es medible en el sentido de Lebesgue y $m(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \lim_{j\to\infty} m(A_j)$.

Demostración. Sea $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Considermos:

$$A_1 = B_1$$
$$A_2 = B_2 \cap B_1^c$$
$$A_3 = B_3 \cap B_2^c \cap B_1^c$$
$$\vdots$$
$$A_j = B_j \cap B_{j-1}^c \cap \ldots \cap B_1^c$$

De esta manera obtenemos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ y que $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de conjuntos Entonces $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} = \lim_{k\to\infty} m(A_k)$ Dado que $m^*(A_j) = m(B_1) + m(B_2) + \ldots + m(B_j)\ \forall j >= 1$ □

Demostración. Demostración del Corolario 4.
$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k : E_k = E \cap [-k,k]^n \ \forall k \in \mathbb{N}$ Entonces $(E_k)_k \in \mathbb{N}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles y por el lema anterior tenemos que $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$ Además, $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists F_k \subset E_k$ cerrado tal que $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$ Entonces como F_k es un conjunto cerrado y acotado, tenemos que el conjunto es compacto. Por tanto $m(E_k) = m(E_k \setminus F_k) + m(F_k) \geq m(F_k) + 1/k$ y por tanto $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(F_k)$ y finalmente obtenemos que $m(E) = \sup\{m(F_k) : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$ □

Definición 1.2.7. Un n-cubo cerrado (respectivamente abierto) en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \text{ tal que } \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ se tiene que } b_i - a_i = b_j - a_j \tag{11}$$

Definición 1.2.8. Se dice que un cubo en $\mathbb{R}^n$ es diádico si sus lados miden 2^{-m} para algún $m \in \mathbb{N}$. Es decir, si el rectángulo Q es de la forma:

$$Q = \left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

con $m \in \mathbb{Z}$(nivel de escala u orden) y $k_1, k_2, \ldots k_n \in \mathbb{Z}$

Teorema 1.2.4. Todo conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ es unión numerable y disjunta n-cubos semiabiertos, que son cubos diádicos.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{F}$ la familia de todos los cubos cerrados de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

con $k_i \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{Q}_1$ la familia de todos los cubos cerrados Q de la forma $[k_1, k_1+1] \times \cdots \times [k_n, k_n+1]$, donde los $k_i \in \mathbb{Z}$, y tales que $Q \subset U$. Supuesto definida $\mathcal{Q}_m$, sea $\mathcal{Q}_{m+1}$ la familia de todos los cubos Q de la forma

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right],$$

donde $k_i \in \mathbb{Z}$, tales que no están contenidos en ningún cubo $Q' \in \mathcal{Q}_j$ para $j \leq m$, y tales que $Q \subset U$. Por inducción queda definida $\mathcal{Q}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y ponemos

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m.$$

Es obvio por construcción que si $Q, Q' \in \mathcal{Q}$ y $Q \neq Q'$, entonces Q y Q' tienen interiores disjuntos. También es claro que que $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q \subset U$. Veamos que de hecho

$$U = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q.$$

Dado $x \in U$, usando que U es abierto y que el conjunto $\{k/2^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es denso en $\mathbb{R}$, es fácil ver que existe algún cubo $Q_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \in Q_x$ y $Q \subset U$. El lado de Q_x mide 2^{-m_x} para algún $m_x \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Si $Q_x \in \mathcal{Q}_{m_x}$ ya hemos terminado. En otro caso, por definición de $\mathcal{Q}_{m_x}$, existe algún $j < m_x$ tal que Q_x está contenido en algún cubo $Q'_x \in \mathcal{Q}_j$, y por tanto x pertenece a este cubo. En cualquier caso se ve que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$. □

1.3 Medibilidad de Funciones

Definición 1.3.1. Un espacio medible es un par (X, Σ) donde X es un conjunto y Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Vamos a considerar los siguientes espacios medibles:

- $(X, \Sigma) = (E, M|_E)$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible y $M|_E$ es la familia de subconjuntos medibles de E.
- $(X, \Sigma) = (A, B|_A)$, donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto boreliano y $B|_A$ es la familia de subconjuntos borelianos de A.

Definición 1.3.2. Sea (X, Σ) un espacio medible. Una función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es medible si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ es un conjunto medible.

Proposición 1.3.1. Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to [-\infty, +\infty]$, entonces son equivalentes

1. f es medible.
2. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto medible.
3. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto medible.
4. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto medible.
5. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son conjuntos medibles.
6. Para todo $G \subset \mathbb{R}$ abierto, los conjuntos $f^{-1}(G)$, $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son conjuntos medibles.

Demostración. Teniendo en cuenta que $X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ dado que las σ-álgebras son cerradas bajo complementarios, obtenemos que (1) $\iff$ (2) y (3) $\iff$ (4).
Veamos ahora la relación (1) $\iff$ (4):

- (1) $\implies$ (4): Podemos tomar el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}$ que es una intersección numerable de conjuntos medibles por (1). Por tanto al tomar el limite cuando $k \to \infty$ obtenemos que $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.
- (4) $\implies$ (1): Equivalentemente al apartado anterior podemos obtener que el conjunto $\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\}$ es medible por (4). Por tanto, también al tomar el límite cuando $k \to \infty$ obtenemos que $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ es medible.

De forma análoga a esta equivalencia podemos obtener que (2) $\iff$ (3). Y también las equivalencias de (5) $\iff$ (6) son inmediatas, pues podemos tomar los conjuntos acotados $x \in X : \alpha \leq f(x) < \beta = x \in X : f(x) \geq \alpha \cap x \in X : f(x) < \beta$ los cuales son conjuntos medibles por los apartados anteriores. De forma similar podemos obtener que el conjunto $x \in X : f(x) = +\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > k\}$ es medible por los apartados anteriores. De forma análoga se demuestra el caso de (6). Por último veamos la equivalencia de (6) $\iff$ (7):

1. (7) $\implies$ (6): Dado un conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ podemos tomarlo como $G = (\alpha, \beta)$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por tanto, el conjunto $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\} = \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\}$ y asimismo, los conjuntos $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son medibles por las equivalencias anteriores.

2. (6) $\implies$ (7): Dado un conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ podemos reescribir G como $G = \bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j)$ donde $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Por tanto, el conjunto $f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\alpha_j, \beta_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \alpha_j < f(x) < \beta_j\}$ es medible por las equivalencias anteriores.

□

Corolario 1.3.1. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es medible.

Proposición 1.3.2. Sea (X, Σ) un espacio medible y $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles y $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces la función $\Phi \circ (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}$ es medible.

Demostración. Sean $(f_1, f_2, \ldots f_n) : X \to \mathbb{R} y \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones medibles y continua respectivamente. Denotemos por $h = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \circ \Phi : X \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y sea $G \subset \mathbb{R}$ conjunto abierto, entonces, denotemos por $U = \Phi^{-1}(G)$ al conjuto abierto en $\mathbb{R}^n$. Entonces sea $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sucesión de rectángulos n-dimensionales tales que $(R_j) = \prod_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^j . \beta_i^j) \forall j \in \mathbb{N} \iff \forall j \in \mathbb{N} f^{-1}(R_j) = \prod_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^j . \beta_i^j)$ es medible. Por tanto, la funcion h es medible. □

Corolario 1.3.2. Sean (X, Σ) espacio medible y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles, entonces $f + g$ $f \circ g$, $max\{f, g\}$, $min\{f, g\}$, $f^+ = max\{f, 0\}$, $f^- = min\{f, 0\}$ son todo funciones medibles.

Observación 1.3.1. $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Teorema 1.3.1. Sea (X, Σ) espacio medible y $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} : X \to [+\infty, -\infty]$ una sucesión de funciones medibles, entonces:

1. $\sup_{j \in \mathbb{N}}\{f_j\}$ es una función medible.
2. $\inf_{j \in \mathbb{N}}\{f_j\}$ es una función medible.
3. $\limsup_{j \to \infty}\{f_j\}$ es una función medible.
4. $\liminf_{j \to \infty}\{f_j\}$ es una función medible.
5. $\lim_{j \to \infty} f_j = f$ es una función medible.

Demostración. 1. Denotemos $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$ y dado $\alpha \in \mathbb{R}$ queremos ver que $x \in X : h(x) > \alpha$ es un conjunto medible. Entonces, $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha \iff \exists j \in \mathbb{N} : f_j(x) > \alpha \Rightarrow x \in X : h(x) > \alpha = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f_j > \alpha$ que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

2. Denotemos $g(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j$ y dado $\alpha \in \mathbb{R}$ queremos ver que $x \in X : g(x) < \alpha$ es un conjunto medible. Entonces, $\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j \geq \alpha \iff \forall j \in \mathbb{N} : f_j(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in X : g(x) \geq \alpha = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} x \in X : f_j \geq \alpha$ que es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

3. Recordemos que $\limsup_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty}(\sup_{k\geq j} f_k) = \lim_{j\to\infty} \sup f_j, f_{j+1}, \ldots$. Entonces como el límite de una sucesión decreciente y acotada siempre existe tenemos que $\lim_{j\to\infty} \sup_{k\geq j} f_k = \inf_{j\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq j} f_k)$ que es medible por ser una función continua.

4. Recordemos que $\liminf_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty}(\inf_{k\geq j} f_k) = \lim_{j\to\infty} \inf f_j, f_{j+1}, \ldots = \sup_{j\in\mathbb{N}} (\inf_{k\geq j} f_k)$ que es medible por ser una función continua.

5. Si $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ (puntualmente) entonces $\lim_{j\to\infty} f_j = \limsup_{j\to\infty} f_j = \liminf_{j\to\infty} f_j = f$. Entones por los apartados anteriores obtenemos que f es una función medible.

□

Proposición 1.3.3. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to [+\infty, -\infty]$ funciones medibles-Lebesgue tales que $f = g$ en casi todo punto. Entones g es medible-Lebesgue.

Demostración. Dado que $f = g$ en casi todo punto, entonces $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ es un conjunto de medida nula. Entonces, dado un $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\} = \{x \in Z : f(x) < \alpha\} \cup \{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$ es medible dado que $\{x \in Z : f(x) < \alpha\}$ es medible por ser un conjunto de medida nula y $\{x \in Z^c : g(x) < \alpha\}$ es medible por ser g medible. Por tanto, g es medible. □

Corolario 1.3.3. Sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \to [+\infty, -\infty]$ sucesión de funciones medibles tales que $f_j \to f$ en casi todo punto, entonces f es medible.

Demostración. Sea $Z = \{x \in X : f_j(x) \not\to f(x)\}$ el cual tiene medida nula por hipótesis. Entones definimos la función $g(x) = \begin{cases} \lim_{j\to\infty} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$ en casi todo punto. Asimismo podemos definir la sucesión de funciones $g_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & x \in Z^c \\ 0 & x \in Z \end{cases}$ que converge a g puntualmente, por tanto, por la proposición anterior tenemos que g es medible $\Rightarrow f$ es medible. □

Definición 1.3.3. Sea (X, Σ) espacio medible. Definimos la función característica de un conjunto $E \in \Sigma$ como: $X_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in E^c \end{cases}$

Observación 1.3.2. X_e es medible $\iff E \in \Sigma$

Demostración. Sea $G \subset \mathbb{R}$ abierto, podemos definir el conjunto $X_E^{-1}(G) = \{x \in X : X_E(x) \in G\} = \begin{cases} X & 0 \in G & 1 \in G \\ E & 0 \notin G & 1 \in G \\ E^c & 0 \in G & 1 \notin G \\ \emptyset & 0 \notin G & 1 \notin G \end{cases}$, por tanto, X_E es medible $\iff E \in \Sigma$. □

Observación 1.3.3. Sean $E \subset \mathbb{R}^n y f : E \to [-\infty, +\infty]$. Entonces son equivalentes:

1. $f : E \to [-\infty, +\infty]$ es medible-Lebesgue.
2. $f \circ X_E : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ es medible-Lebesgue.

Demostración.

- $(1 \implies 2)$: E^c es medible y $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible $\implies$ $\{x \in \mathbb{R}^n : f \circ X_E(x) > \alpha\}$ es medible.
- $(2 \implies 1)$: $\{x \in \mathbb{R}^n : f \circ X_E(x) > \alpha\}$ es medible $\implies$ $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible.

$\square$

Definición 1.3.4. Sea (X, Σ) espacio medible y $f : X \to [0, +\infty]$. Se dice que f es una función simple si toma un valor finito de valores. Es decir si: $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty]$. Además denotamos a $f^{-1}(\alpha_i) = E_i$ y $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{E_i}$. Asimismo obtenemos que $X = bigcup_{i=1}^n E_i$-unión disjunta de conjuntos. De este modo podemos decir que f es una combinación lineal finita de funciones simples.

Observación 1.3.4. f es medible $\iff$ $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ es medible.

Teorema 1.3.2. Sea (X, Σ) espacio medible y $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible. Entonces existen funciones simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que:

- $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \le f$.
- $\forall x \in X \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Si además, f acotada $\implies$ $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en casi todo punto.

Demostración. $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n2^n$ definimos: $E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]) = \{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n}\}$ y $F_n = f^{-1}([n, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > n\}$. Los cuales son conjuntos medibles por ser preimágenes de conjuntos medibles. Sea entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} X_{E_{n,i}} + n X_{F_n}$, la cual es una sucesión de funcion simples. Analicemos la convergencia (puntual) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$:

- Si $f(x) = +\infty \implies f(x) \ge m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies f_n(x) = m \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) < +\infty \implies \exists m(x) \in \mathbb{N} : 0 \le f(x) \le m(x) \implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{k-1}{2^m} \le f(x) \le \frac{k}{2^m}$ y $f_n = \frac{k-1}{2^m} \quad \forall n \ge m \implies 0 \le |f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2^m} \quad \forall n \ge m \implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Además, cuando $\exists M \in \mathbb{N} : f(x) \le M \quad \forall x \in X \implies 0 \le f(x) - f_n(x) \le \frac{1}{2^m} \quad \forall n \ge m \implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (uniformemente).

Ahora veamos que $f_n(x)$ es creciente: $f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & x \in E_{n,i} \\ n & x \in F_n \end{cases} \implies f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}} & x \in E_{n,i} \\ n+1 & x \in F_{n+1} \end{cases} \implies$ $f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dado que $1 \le i \le n2^n \implies 1 \le i \le 2^{n+1} \implies f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 1.3.5. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la $\sigma-$álgbra M de los conjuntos medibles y la medida-Lebesgue m. Sea $s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una función simple, medible, no negativa y con representación canónica $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{A_i}$ donde $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m A_i$-unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces definimos la integral de s como: $\int_{\mathbb{R}^n} s\, dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$.

Observación 1.3.5. $int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0$

Demostración. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ mdible definimos $\int_E s = \int_{\mathbb{R}^n} s \circ X_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i \cap E)$. □

Lema 1.3.1. Sea $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^\infty X_k$ unión disjunta de conjuntos medibles. Sea $s : \mathbb{R}^\ltimes \to [0, +\infty]$ una función simple, medible y no negativa. Entonces $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^\infty \int_{X_k} s$.

Demostración. Supongamos que

$$s = \sum_{i=1}^m d_i \cdot \chi_{A_i}$$

(forma canónica), entonces

$$s(\mathbb{R}^n) = \{d_1, \ldots, d_m\}.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, sea $B_k \in \{d_1, \ldots, d_m\}$. Definimos para cada $j = 1, \ldots, m$ el conjunto

$$Y_j = \{k \in \mathbb{N} : \beta_k = d_j\}.$$

Así, $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^m Y_j$ es una unión disjunta. Además,

$$s^{-1}(\alpha_j) = A_j = \bigcup_{k \in Y_j} X_k,$$

una unión disjunta.

Entonces, usando la propiedad de la medida en una unión disjunta, tenemos

$$m(A_j) = m\left(\bigcup_{k \in Y_j} X_k\right) = \sum_{k \in Y_j} m(X_k).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k).$$

Intercambiando el orden de la suma,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k \in Y_j} \alpha_j \cdot m(X_k) = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k \in Y_j} \beta_k \cdot m(X_k).$$

□

Corolario 1.3.4. Sean $s, t : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ funciones simples, medibles y no negativas. Entonces: $\int_{\mathbb{R}^n}(s+t) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$.

Demostración. Sea $S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ y $t = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot \chi_{B_j}$. Dado que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{k} (A_i \cap B_j)$, donde la unión es disjunta y los conjuntos A_i, B_j son medibles, se tiene que en $A_i \cap B_j : s + t = \alpha_i + \beta_j$. Aplicando el lema de integración para funciones simples: $\int_{\mathbb{R}^n}(s+t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j m(A_i \cap B_j) = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t$ (por el lema). □

Definición 1.3.6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ una función medible. Definimos la integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible y $f : E \to [0, +\infty)$, definimos:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \cdot \chi_E \mid s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\}.$$

Proposición 1.3.4. Para funciones medibles, no-negativas y conjuntos medibles se tiene que:

1. si $0 \leq f \leq g$ y $E \subset F$ entonces $\int_E f \leq \int_F g$.
2. si $f, g, \geq \implies \int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.
3. si $c \geq 0, f \geq 0 \implies \int_E cf = c \int_E f$.
4. si $m(E) = 0 \implies \int_E f = 0$. (Incluso si $f = +\infty$)
5. si $f\big|_E = 0 \implies \int_E f = 0$. (Incluso si $m(E) = +\infty$)
6. si $A \subset B y f \geq 0 \implies \int_A f \leq \int_B f$.
7. si A, B son conjuntos medibles y disjuntos y $f \geq 0 \implies \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.
8. si $f = g$ en casi todo punto de E $\implies \int_E f = \int_E g$.

Demostración.

1. Si $f = c \cdot 0$, entonces es trivial.

   Si $c > 0$, tomamos $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, con $0 \leq s \leq f$.

   Entonces, $c \cdot s = \sum_{i=1}^{m} c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, con $0 \leq c \cdot s \leq c \cdot f$.

   Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot s = \sum_{i=1}^{m} c \cdot \alpha_i \cdot m(A_i) = c \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

   Tomando el supremo, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} c \cdot f = c \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \mid s \text{ es simple, } 0 \leq s \leq f \right\} = c \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

2. Si $m(E) = 0$, entonces para toda s simple y medible tal que $0 \leq s \leq f$, se tiene que

$$s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}.$$

De donde,

$$\int_E s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m(A_i \cap E) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \right\} = 0.$$

3. Para toda s simple con $0 \leq s \leq f$, se tiene que $s(x) = 0$ para casi todo $x \in E$.
   Luego,

$$f \cdot \chi_E = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \int_E s = 0, \quad \forall s.$$

   Tomando el supremo,

$$\sup \left\{ \int_E s \right\} = 0 = \int_E f.$$

4. Si f es simple y medible con $0 \leq s \leq f$, se tiene que

$$\text{si } A \subset B, \quad \chi_A \leq \chi_B \Rightarrow 0 \leq s \cdot \chi_B.$$

5. Si A, B son medibles y disjuntos, entonces

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B.$$

   Así,

$$\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\chi_A + \chi_B).$$

   Por linealidad de la integral,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

   Por lo tanto,

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

8. Si $E = A \cup Z$, con A y Z disjuntos y tales que $x \in E \Rightarrow f(x) = g(x)$, entonces

$$Z = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

   Si $m(Z) = 0$, se tiene que

$$\int_E f = \int_A f + \int_Z f = \int_A g + 0 = \int_A g.$$

$\square$

Teorema 1.3.3. Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles tales que:

1. $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. (puntualmente en $\mathbb{R}^n$)
2. $\lim_{k \to \infty} f_k = f$ (puntualmente en $\mathbb{R}^n$)

Entonces se cumple que:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Demostración. La sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente en $[0,+\infty)$. Por lo tanto, existe el límite:

$$l = \lim_{k\to\infty} f_k, \in [0,+\infty].$$

Dado que $f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Queda demostrar la otra desigualdad para probar el teorema.// Sea s una función simple y medible en $\mathbb{R}^n$ con $0 \leq s \leq f$, y fijemos un $c \in (0,1)$. $\forall k \in \mathbb{N}$, definimos la sucesión de conjuntos $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$. Esta sucesión es medible (debido a que tanto f_k como s son medibles) y es creciente (debido a que $f_k \leq f_{k+1}$ y $c \cdot s \leq c \cdot f \leq f$). Ahora veamos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } f_k(x) = 0, \Rightarrow s(x) = 0 \Rightarrow 0 = f_k(x) \Rightarrow 0 = s(x) \Rightarrow x \in E_k \quad \forall k. \\ \text{Si } f_k(x) > 0, \Rightarrow c \cdot s(x) \leq f_k(x) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad c \cdot s(x) \leq f_k(x). \end{cases}$$

Por lo tanto, $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s.$$

Dado que $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$ con $s^-1(\alpha_j) = A_j$ tenemos:

$$m(A_j) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)) = \lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_j).$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot m(E_k \cap A_j) = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} c \cdot s = c \cdot \int_{E_k} s$$

Tomando límites el límite cuando $k \to \infty$, obtenemos que:

$$l \geq c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Por último, si tomamos el límite $c \to 1$ obtenemos que:

$$l \geq \int_{\mathbb{R}^n} s$$

Dado que s es una función simple y medible arbitraria, se tiene esta propiedad $\forall s$ función simple, medible y no-negativa (por ser $0 \leq s \leq f$). Por tanto, obtenemos la ansiada desigualdad: $l \geq \int_{\mathbb{R}^n} f$. $\square$

Teorema 1.3.4. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f_k : E \to [0, +\infty]$ sucesión de funcion medibles y $f : E \to [0, +\infty]$ tales que:

1. $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ (en casi todo punto de E)
2. $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ (en casi todo punto de E)

Demostración. Denotamos el conjunto

$$N = \{x \in E \mid (1) \text{ y } (2) \text{ no se cumplen}\}$$

Sabemos que $m(N) = 0$. Definimos la sucesión de funciones

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \chi_{E\setminus N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \hat{f} = f \cdot \chi_{E\setminus N}$$

Podemos aplicar el **Teorema de la Convergencia Monótona**, lo que nos permite concluir que: 1. $\hat{f}_k \to f$ puntualmente. 2. Se cumple la convergencia de integrales. Por lo tanto, tomando límites en la integral:

$$\int_E f = \int_{E\setminus N} f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

□

Corolario 1.3.5.

1. si $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ son medibles, medibles y no-negativas $\implies$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

.

2. si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ sucesión de funciones mediles $\forall k \in \mathbb{N} \implies$

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

.

Demostración.

1. Sabemos que existen sucesiones crecientes $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones simples medibles no negativas tales que $lim_{j\to\infty} s_j = f$ y $lim_{j\to\infty} t_j = g$. Por lo tanto, aplicando el **Teorema de la Convergencia Monótona** obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + t_j = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_j + \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_j = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

2. Por el apartado anterior obtenemos que: $\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{m} f_k \implies$ podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona, dado que la sucesión $\sum_{k=1}^{m} f_k$ converge de forma creciente a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Entonces finalmente obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

.

□

Lema 1.3.2. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{R}^n}$ sucesión de funciones medibles, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k \leq liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k$$

Demostración. Sea

$$f = \liminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} f_j = \lim_{k\to\infty} g_k$$

Dado que $g_k \geq 0$, la sucesión (g_k) está compuesta por funciones medibles y no negativas para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, es una sucesión creciente en el sentido de que

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el **Teorema de la Convergencia Monótona **, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} g_k.$$

Por definición del $\liminf$, se cumple la desigualdad:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k.$$

Finalmente, dado que $g_k \leq f$, se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k.$$

□

Observación 1.3.6. El resultado análogo con $\limsup$ no es válido en gneral. Podemos tomar de contraejemplo la función $f_k = k \cdot \chi_{[k,\infty]}$.

Definición 1.3.7. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto medible y $f : E \to [0, +\infty]$ función medible. Se dice que f es integrable (o absolutamente integrable) cuando

$$\int_E f < +\infty$$

Es decir cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \chi_E < +\infty$$

Observación 1.3.7. f es integrable en $E \iff |f|$ es integrable en $E \iff f^+$ y f^- son integrables en E.

Lema 1.3.3. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ y $f = g - h$ con $g, h : E \to [-\infty, +\infty]$ funciones integrables. Entonces,

$$\int_E f = \int_E g - \int_E h.$$

Demostración. Si $f = g - h \implies |f| = |g - h| \leq g + h \implies f$ es integrable. $f = f^+ - f^- = g - h \implies f^+ + h = f^- + g \implies \int_E f^+ + h = \int_E f^- + g \implies \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h$. □

Proposición 1.3.5. Para funciones f y g integrables en E, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si f, g son integrables en E, entonces $f + g$ también es integrable y
$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$
2. Si f es integrable en E y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es integrable en E y
$$\int_E (cf) = c \int_E f.$$
3. Si $f \leq g$ en casi todo punto de E, entonces
$$\int_E f \leq \int_E g.$$
4. Si $|f|$ es integrable en E, entonces f también es integrable y
$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$
5. Si $f = g$ en casi todo punto de E y f es integrable en E, entonces g también es integrable en E con,
$$\int_E f = \int_E g.$$
6. Si $m(E) = 0$ y f es medible, entonces es integrable en E y
$$\int_E f = 0$$
7. Si f es integrable en E entonces $|f| < \infty$ en casi todo punto de E
8. Si $\int_E |f| = 0$, entonces $f = 0$ en casi todo punto de E.

Demostración.

(1) Dado que $f = f^+ - f^-$ y $g = g^+ - g* - \implies f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, con ambas partes ≥ 0. Entones, por el lema de la integral de funciones no negativas,
$$\int_E (f+g) = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-.$$
Reagrupando términos,
$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

(2) Si $c > 0$. Como $cf = cf^+ - cf^- \implies$,

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^- = c\int_E f^+ - c\int_E f^- = c\int_E f.$$

Si $c < 0$, usando $cf = cf^+ - cf*- = (-c)f^+ - (-c)f^-$. Entones aplicamos el apartado anterior y obtenemos que:

$$\int_E cf = c\int_E f.$$

(3) Como $g - f \geq 0$ en casi todo punto de E, se cumple que: $(g - f) \cdot \chi_E \geq 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n \implies$

$$\int_E (g - f) \geq 0.$$

Aplicando la linealidad de la integral,

$$\int_E g - \int_E f \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

(4) Se tiene que $|f| = f^+ + f^-$. Usando la linealidad de la integral,

$$|\int_E f| = |\int_E f^+ + \int_E f^-.|$$

Como $f = f^+ - f^-$, aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|.$$

(5) Como $f = g$ en casi todo punto de $E \implies f^+ = g^+ \quad f^- = g^-$ en casi todo punto de E por lo que sólo queda aplicar el apartado anterior.

$$\int_E f = \int_E g$$

(6) $|f| \cdot \chi_E \geq 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n \implies \int_E |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \chi_E| = 0 \implies$

$$|\int_E f| \leq \int_E |f| = 0$$

(7) No se qué hace la demostracion

(8) Sea

$$A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

Definimos los conjuntos

$$A_k = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, evaluamos la medida de A_k utilizando la integral:

$$m(A_k) = \int_{A_k} 1 \leq \int_{A_k} k \cdot |f| = k\int_{A_k} |f| \leq \int_{A_k} |f| \leq \int_E |f|$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$ (y de la subaditvidad) se concluye que

$$m(A) = \lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0.$$

□

Teorema 1.3.5. Sean $E \subset \mathbb{R}^{\ltimes}$ medible y $\forall k \in \mathbb{N}, f_k : E \to [-\infty, +\infty]$ funciones medibles. Supongamos que $\exists g : E \to [-\infty, +\infty]$ integrable en E tal que $|f_k| < g$ en casi todo punto de E y $\forall k \in \mathbb{N}$. Si además suponemos que $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ en casi todo punto de E, entonces:

1. f_k y f son integrables en E
2. $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| = 0$
3. $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$

Demostración.

1. Dado que $|f_k| \leq |g| = g \quad \forall k \in \mathbb{N}$, se concluye que f_k es integrable en E. Además, como $|f| \leq g$, se sigue que f también es integrable en E.

2. Observamos que $|f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq g + g = 2g \geq 0$, lo que implica que $2g - |f_k - f| \geq 0$. Además, la sucesión de funciones $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge casi en todo punto de E a $2g - 0 = 2g$. Aplicando el **lema de Fatou** a $\hat{f}_k = h_k \chi_E$, obtenemos que:

$$\int_E \lim_{k\to\infty} h_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E h_k$$

A partir de esto, se deduce la siguiente igualdad:

$$\int_E 2g = \liminf_k \left(\int_E 2g - \int_E |f_k - f| \right) = \lim_k \int_E 2g + \liminf_k \left(- \int_E |f_k - f| \right) = \int_E 2g - \limsup_k \int_E |f_k - f|$$

Utilizando el siguiente **lema**: si $a_k \to a$, entonces

$$\liminf_k (a_k + b_k) \geq \liminf_k a_k + \liminf_k b_k$$

se concluye que:

$$\limsup_k \int_E |f_k - f| \leq \int_E 2g - \int_E 2g = 0 \Rightarrow \lim_k \int_E |f_k - f| = 0$$

3. Finalmente, aplicamos la propiedad de la integral a la diferencia $f_k - f$:

$$\left| \int_E f_k - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_k - f) \right| \leq \int_E |f_k - f| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$$

□

Definición 1.3.8. Sea f función integrable, se define una función por su integral paramétrica como:

$$F(u) = \int_E f(x, u) dx$$

Teorema 1.3.6. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto medible, $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto cualquiera, $f : E \times U \to \mathbb{R}$ y suponemos que:

1. $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \to \mathbb{R}$ es medible.
2. $\forall x \in E f(x, \cdot) : U \to \mathbb{R}$ es continua.
3. $\exists g : E \to [0, +\infty]$ integrable en E tal que $|f(x,u)| \leq g(x)$ en casi todo punto de E y $\forall u \in U$.

Entonces podemos decir que:

$$F(u) = \int_E f(x,u)dx$$

es una función continua en U.

Demostración. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que $u_k \to u_0 \in U$. ¿Se sigue que $\{F(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to\infty} F(u_0)$?
Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$f_k = f(\cdot, u_k) : E \to \mathbb{R}$$

que es una función medible. Por la condición (2), se cumple que $\forall x \in E$,

$$f_k(x) = f(x, u_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x, u_0).$$

Es decir, la sucesión $\{f_k\}$ converge puntualmente en E a

$$f_0(x) = f(x, u_0).$$

Además, se cumple que

$$|f_k(x)| = |f(x, u_k)| \leq g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada (TCD), se concluye que f_k es integrable para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

Es decir,

$$F(u_0) = \int_E f(x, u_0)\, dx.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$F(u_k) = \int_E f(x, u_k)\, dx \quad \Rightarrow \quad F(u) = \int_E f(x, u)\, dx$$

□

Observación 1.3.8. $\forall u_0 \in U \ \lim_{u\to u_0} \int_E f(x,u)dx = F(u) = F(u_0) = \int_E f(x,u_0)dx$

Teorema 1.3.7. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ conjunto medible, $U = (a,b) \subset \mathbb{R}$ conjunto abierto y $f : E \times U \to \mathbb{R}$. Y además supongamos que:

1. $\forall u \in U f(\cdot, u) : E \to \mathbb{R}$ es integrable en E.
2. $\forall x \in E f(x, \cdot) : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en U.
3. $\exists g : E \to [0, +\infty]$ integrable en E tal que $|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)| \leq g(x)$ en casi todo punto de E y $\forall u \in U$.

Entonces se cumple que:

$$F(t) = \int_E f(x,t)dx$$

es de clase C^1 en U y $\forall t \in U$ se cumple que:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(x,t)dx$$

Demostración. Fijamos $t_0 \in (a,b)$ y definimos la función $h : E \times (a,b) \to \mathbb{R}$ como:

$$h(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}, & t \neq t_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

1. Medibilidad de $h(x,t)$

   Queremos ver que $h(x,t)$ es medible para todo $t \in (a,b)$.

   - Si $t \neq t_0$, es claro. - Si $t = t_0$, tenemos que:

   $$h(x,t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x,t_0+1/k) - f(x,t_0)}{1/k}$$

   lo cual es medible.

2. Continuidad de $h(x,\cdot)$

   Para todo $x \in E$, si $h(x,\cdot)$ es acotada en (a,b), entonces es continua.

   - Si $t \neq t_0$, es claro. - Si $t = t_0$, tenemos:

   $$h(x,t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0) = \lim_{t\to t_0} h(x,t),$$

   lo cual prueba la continuidad.

3. Acotación y aplicación de la Regla de Leibniz

   $$|h(x,t)| \leq g(x)$$

   - Si $t = t_0$, es claro. - Si $t \neq t_0$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (t,t_0)$ tal que:

   $$\left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t-t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,s) \right| \leq g(x).$$

   Por la Regla de Leibniz, obtenemos:

   $$F'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \int_E \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t-t_0}\, dx =$$

   $$\lim_{t\to t_0} \left(\int_E h(x,t)dx \right) = \int_E \left(\lim_{t\to t_0} h(x,t) \right) dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, dx.$$

   Finalmente, como F' es continua en (a,b), se concluye que $F \in C^1(a,b)$.

$\square$

1.4 Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

Teorema 1.4.1. Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann en $[a,b]$. Entonces f es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y se cumple que:

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$$

Observación 1.4.1. Denotamos $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

Demostración. $\forall k \in \mathbb{N}$ sabemos que $\exists P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_{n(k)}^k = b\} \subset [a,b]$ tal que: $\bar{S}(f,P_k) - \underline{S}(f,P_k) < \frac{1}{k}$. Suponemos que P_{k+1} es mas fina que P_k y además que

$$\operatorname{diam}(P_k) = \sup_{i\in\{1,\dots,n(k)\}} (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ denotamos $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$ y $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}^k, x_i^k]\}$.

$$\underline{S}(f,P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} m_k(x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \varphi_k \quad \text{con} \quad \varphi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} m_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

$$\bar{S}(f,P_k) = \sum_{i=1}^{n(k)} M_k(x_i^k - x_{i-1}^k) = \int_a^b \psi_k \quad \text{con} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^{n(k)} M_i^k \cdot \chi_{[x_{i-1}^k, x_i^k)}$$

Es claro que $\varphi_k \le f \le \psi_k$ en [a,b]. Además, como P_{k+1} es más fino que $P_k \implies (\varphi_k)\uparrow$ y $(\psi_k)\downarrow$ Denotamos $\varphi = \lim_{k\to\infty}\varphi_k = \sup\varphi_k$ y $\psi = \lim_{k\to\infty}\psi_k = \inf\psi_k$ que son medibles y cumplen que $\varphi \le f \le \psi$.
Como f es integrable-Riemann $\implies f$ es acotada $\iff \exists M \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \le M,\ \forall x \in [a,b]$. La función $g(x) = M$ es integrable en $[a,b]$ y puesto que $|\psi_k| \le g$ y $|\varphi_k| \le g$ entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\underline{S}(f,P_k) = \int_a^b \varphi_k \to \int_a^b \varphi \qquad \bar{S}(f,P_k) = \int_a^b \psi_k \to \int_a^b \psi$$

Pero a su vez, también se cumple que:

$$\underline{S}(f,P_k) \to (R)\int_a^b f \quad \text{y} \quad \bar{S}(f,P_k) \to (R)\int_a^b f \implies \int_a^b \varphi = (R)\int_a^b f = \int_a^b \psi$$

Y como $\int_a^b \psi - \varphi = 0 \implies \psi - \varphi = 0$ en casi todo punto de $[a,b]$. Es decir $\varphi = f = \psi$ en casi todo punto de $[a,b]$. Y finalmente obtenemos que:

$$(L)\int_a^b f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \psi = (R)\int_a^b f$$

□

Teorema 1.4.2. Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable-Riemann en $[a,b] \iff D_f = \{x \in [a,b] \mid f \text{ no es continua en } x\}$ tiene medida nula.

Ejemplo

La función de Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ no es integrable-Riemann en $[0,1]$. Pero $f = 0$ en casi todo punto $\implies f$ es integrable-Lebesgue y ésta vale: $\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 0 = 0$

Teorema 1.4.3. Sean $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ y $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una función absolutamente integrable-Riemann impropia en el intervalo (α, β). Entonces f es integrable-Lebesgue en (α, β) y se cumple que:

$$(L) \int_\alpha^\beta f = (R) \int_\alpha^\beta f$$

Demostración. Habría que realizar una distinción de casos según el tipo de intervalo que sea (α, β), en este caso trataremos el intervalo $[\alpha, \infty)$: Por hipótesis sabemos que:

1. $\forall k \in \mathbb{N}, f$ es integrable-Riemann en $[a, b]$
2. $\lim_{b\to\infty} \int_a^b |f| < +\infty$

Tomamos una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ y definimos las sucesiones de funciones: $f_n = f \cdot \chi_{[a,b_n]}$ y $g_n = |f| \cdot \chi_{[a,b_n]}$ medibles. De manera que tenemos que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow |f|$. Entonces aplicamos el Teorema de la Convergencia Monóntona:

1. $(L) \int_a^{+\infty} |f| = \lim_{n\to\infty} (L) \int_a^{b_n} |f| = \lim_{n\to\infty} (R) \int_a^{b_n} |f| = (R) \int_a^{+\infty} |f| < \infty$
2. Esto muestra que f es integrable-Lebesgue en $[a, +\infty)$.

Por otra parte, como $|f_n| \leq |f| \ \forall n \in \mathbb{N}$ por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

1. $(L) \int_a^{+\infty} f = \lim_{n\to\infty} (L) \int_a^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (R) \int_a^{b_n} f = (R) \int_a^{+\infty} f$

Finalmente obtenemos el resultado de que f es integrable de Riemann-impropia en $[a, +\infty)$.
$\forall (b_n)_{n\in\mathbb{N}} : b_n \to \infty$ tenemos que $| \int_{b_n}^{b_m} f| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f| \leq \epsilon$ $\square$

2 Funciones integrables en varias variables

3 Teorema de Fubini

4 Cambio de variables

5 Funciones definidas por integrales

6 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales

7 Teorema de Green

8 Superficies paramétricas

9 Integrales de superficie

10 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss