Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática

[1] basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss

1.1 Teorema de Stokes

Definición 1.1.1 [Rotacional]

Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Se define el rotacional de $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ como:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Observación 1.1.1

En este caso, $rot(\vec{F})$ es un campo vectorial continuo definido en A.

Ejemplo

Sea $(P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Consideramos $A = U \times \mathbb{R}$ y el campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, 0)$. Entonces el rotacional de $\vec{F}$ es:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

"la derivación del toerema de Green"

Teorema 1.1.1 [Teorema de Stokes]

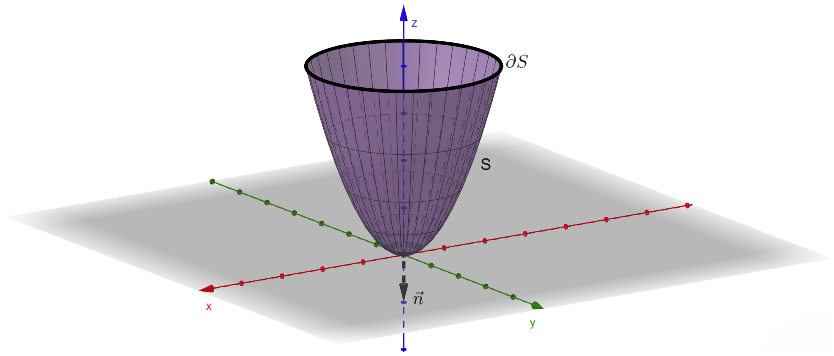
Sea $(S, \vec{n})$ una superficie orientada y regular a trozos, y sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset S$. Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F}$$

donde ∂S tiene la orientación inducida por $\vec{n}$.

Ejemplo

Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$ con la norma exterior $\vec{n}$ y el campo vectorial $\vec{F} = (yz, -xz, z)$. Verificamos el teorema de Stokes.
Tenemos que $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 = 4\}$, que es una circunferencia de radio 2 en el plano $z = 4$. Fijémonos que $\vec{n}$ induce la orientación negativa en la curva $C^- = \partial S$.



El rotacional de $\vec{F}$ es:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Consideramos la parametrización natural $\varphi : D \to S$ de S dada por:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \qquad \text{donde } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Entonces la normal a la superficie S es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

La normal $\vec{N}_\varphi$ apunta hacia arriba en el punto $(0,0,0)$, luego tenemos una normal interior.

- Calculamos el rotacional de $\vec{F}$ en S por medio de la parametrización φ:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = -\int_D \langle \vec{N}_\varphi, rot(\vec{F}) \circ \varphi(x,y) \rangle dxdy = -\int_D \langle (-2x, -2y, 1), (x, y, -2(x^2+y^2)) \rangle dxdy$$

$$= \int_D 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 dxdy = \int_D 4(x^2+y^2) dxdy = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= 4 \cdot 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 4 \cdot 2\pi \cdot 4 = 32\pi$$

- Consideramos la parametrización positiva γ de la curva ∂S dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \\ z = 4 \end{cases} \qquad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

  y calculamos la integral de línea del campo $\vec{F}$ sobre la curva ∂S:

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_{C^-} \vec{F} = -\int_\gamma \vec{F} = -\int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (8\sin(t), -8\cos(t), 4), (-2\sin(t), 2\cos(t), 0) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} 16 dt = 16 \left[t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 16(2\pi - 0) = 32\pi$$

En efecto, vemos que las integrales coinciden de acorde al teorema de Stokes.

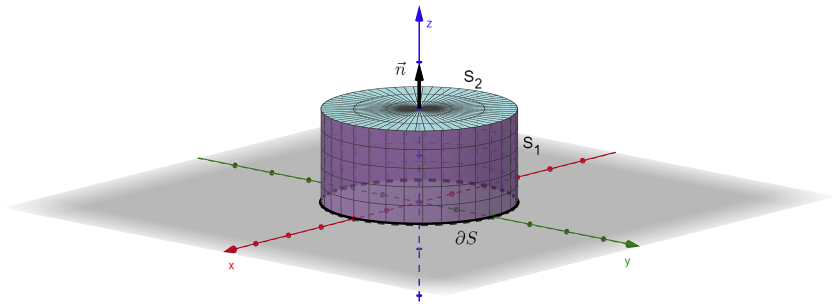
Ejemplo

Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0,2]\} \qquad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con la norma exterior $\vec{n}$ y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z)$. El borde de S es:

$$\partial S = C_0^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$$



Calculamos el rotacional del campo $\vec{F}$:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = (0,0,1-1) = (0,0,0)$$

Consideramos la parametrización γ de la curva C_0 dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

que tiene orientacion positiva. Además, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$.

- Calculamos la integral del campo $rot(\vec{F})$ sobre la superficie S:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{0} = 0$$

- Hacemos la integral de línea del campo $\vec{F}$ sobre la curva C_0^+:

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (\sin(t), \cos(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) - \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos(2t) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

Vemos que el teorema de Stokes se cumple, ya que las integrales son iguales.

Ejemplo

Consideramos el campo vectorial $\vec{F} = (yz, -xz, z)$. Veamos el rotacional de $\vec{F}$:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Supongamos que tenemos una superficie S cualesquiera cuyo borde ∂S sea la curva C_0^+ del ejemplo anterior. Entonces tenemos que:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (0,0,0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt = 0$$

Observación 1.1.2

Si S es una superficie cerrada, es decir, $\partial S = \emptyset$, entonces se tiene que:

$$\int_{(S,\vec{n})} rot(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F} = 0$$

1.2 Geometria del Rotacional

Ejemplo

Sea $F : U \vec{\to} \mathbb{R}^2$ el campo de velocidades de un fluido en $\mathbb{R}^2$. Las trayectorias son curvas $\gamma : I \to U$ con $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$.

Ejemplo

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1.
Consideremos $p \in U$ y $r > 0$, siendo D_r el circulo de centro p y radio r, con frontera $C_r = \partial D_r$.
Sea $\vec{u}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^3$ perpendicular al plano que contiene a D_r, entonces:

$$\langle rot(\vec{F})(p), \vec{u} \rangle = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r^+} \vec{F}$$

Donde C_r^+ denota a C_r conla orientacion comparativa a la de $\vec{u}$, y donde esta igualdad representa la "circulacion por unidad de área" del campo $\vec{F}$.

Demostración.

$$\int_{C_r^+} \vec{F} = \int_{(D_r,\vec{n})} rot\vec{F} = \int_{D_r} \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle = \int_{D_r} \langle rot\vec{F} - rot\vec{F}(p), \vec{u} \rangle + \langle rot\vec{F}(p), \vec{u} \rangle$$

De donde pasamos a:

$$\int_{D_r} \langle rot\vec{F}(p), \vec{u} \rangle_{\text{constante}} = \langle rot\vec{F}(p), \vec{u} \rangle \cdot \text{área}(D_r)$$

Entonces:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < r < \delta \implies \|rot\vec{F}(x,y,z) - rot\vec{F}(p)\| < \epsilon \quad \forall (x,y,z) \in D_r \implies$$

$$\implies \left| \int_{D_r} \langle rot\vec{F} - rot\vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} \left| \langle rot\vec{F} - rot\vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} \|rot\vec{F} - rot\vec{F}(p)\| \leq \epsilon \cdot \text{área}(D_r)$$

Luego:

$$\left| \frac{1}{\text{área}(D_r)} \int_{C_r^+} \vec{F} - \langle rot\vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| < \epsilon \quad \forall 0 < r < \delta$$

□

Definición 1.2.1

Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Se dice que $\vec{F}$ es irrotacional en A si $rot(\vec{F}) \equiv 0$ en A.

Lema 1.2.1

Si $\vec{F}$ es un campo de clase C^1, y es conservativo en $A \implies$ es irrotacional en A.

Demostración. Sea $\varphi : A \to \mathbb{R}$ una función tal que $\vec{F} = \nabla\varphi$, es decir, $\vec{F} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$, entonces φ es de clase C^2 en A y, aplicando el teorema de Schwarz, tenemos que:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right) = (0,0,0)$$

□

Teorema 1.2.1

Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo, y sea $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. *$\vec{F}$ es conservativo en U.*
2. *$\int_\sigma \vec{F} = 0$, $\forall\sigma$ camino triangular en U.*
3. *$\vec{F}$ es irrotacional en U, es decir, $rot(\vec{F}) \equiv 0$ en U.*

Demostración.

- (1) $\implies$ (2): Ya esta probado por la caracterizacion de los campos conservativos.
- (2) $\implies$ (1): Fijamos un punto $P \in U$ y consideramos para cada $x \in U$ la función

$$\varphi(x) = \int_{[P,x]} \vec{F}$$

Veamos que φ es un potencial de $\vec{F}$. Para ellos, veamos que $F_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ $\forall i = 1,2,3$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\underbrace{\int_{[P,x+h\vec{e}_i]} \vec{F}}_{\varphi(x+h\vec{e}_i)} - \underbrace{\int_{[P,x]} \vec{F}}_{\varphi(x)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x)\right)$$

Por (2), tenemos que el triangulo T de vértices P, x y $x + h\vec{e}_i$ es tal que

$$\int_{[P,x]+[x,x+h\vec{e}_i]+[x+h\vec{e}_i,P]} \vec{F} = 0$$

Luego se sigue entonces que:

$$\int_{[P,x+h\vec{e}_i]} \vec{F} - \int_{[P,x]} \vec{F} = \int_{[x,x+h\vec{e}_i]} \vec{F}$$

por tanto

$$\frac{1}{h}\int_{[x,x+h\vec{e}_i]} \vec{F} = \frac{1}{h}\int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(x+th\vec{e}_i), h\vec{e}_i\rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \vec{F}_i(x+th\vec{e}_i)dt \xrightarrow{h\to 0} \vec{F}_i(x)$$

donde $\gamma(t) = x + th\vec{e}_i$ con $t \in [0,1]$. Así obtenemos que (1) $\iff$ (2).

- (3) $\implies$ (2): Sea $T \subset U$ un triángulo, y sea $\sigma = \partial T$:

$$\int_\sigma \vec{F} = \int_{(T,\vec{n})} rot(\vec{F}) = 0$$

$\square$

Ejemplo

Es importante que U sea convexo:
Seam $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\}$ y $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right) = (P,Q,0)$$

Asi tenemos el siguiente rotacional

$$rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0,0,0)$$

El campo $\vec{F}$ es por tanto irrotacional en U, pero $\vec{F}$ no es conservativo. Consideremos la curva cerrada γ dada por:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \int_\gamma \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \left(\frac{-\sin(t)}{1}, \frac{\cos(t)}{1}, 0\right), (-\sin(t), \cos(t), 0)\rangle dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1dt = 2\pi \neq 0$$

Demostrando así que $\vec{F}$ no es conservativo.

Ejemplo

El ejercicio de Nash:
Encontrar $X \subset \mathbb{R}^3$ tal que si denotamos por

$$V = \{\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \to \mathbb{R}^3 \text{ campo } C^1 \mid rot(\vec{F}) = \vec{0}\}$$

$$W = \{\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \to \mathbb{R}^3 \text{ campo } C^1 \mid \vec{F} = \nabla g \text{ para algún } g\}$$

obtengamos que $dim(V \setminus W) = 8$.

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Recordamos que se definía la divergencia de $\vec{F}$ como:

$$div(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \text{donde} \quad \vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

Teorema 1.2.2 [Teorema de la Divergencia de Gauss]

Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado, y denotamos el sólido $V = \overline{A}$. Supongamos que $\partial V = S$ es una superficie cerrada, simple, regular-a-trozos y orientada con la normal exterior $\vec{n}$ a V.
Sea $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, definido en un conjunto abierto $U \supset V$. Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_V div(\vec{F}) = \int_{(S,\vec{n})} \vec{F} = \int_{(\partial V,\vec{n})} \vec{F}$$

Demostración. Para dominios proyectables:
Supongamos que V es z-proyectable, es decir, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, h(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$, donde $\overline{D} = D \cup C$ como en el teorema de Green, y $h, g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1.

$$\int_V div(\vec{F}) = \int_V \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

siendo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Veamos que

$$\int_V div(\vec{F}) = \int_{\partial V} \vec{F} = \int_{\partial V} (F_1, 0, 0) + \int_{\partial V} (0, F_2, 0) + \int_{\partial V} (0, 0, F_3)$$

Para ellos probaremos que $\int_V \frac{\partial F_3}{\partial z} = \int_{\partial V} (0, 0, F_3)$. Suponiendo que V es además x-proyectable e y-proyectable, obtendremos los resultados análogos para las integrales de F_1 y F_2.

$$\partial V = S_0 \cup S_g \cup S_h \quad \text{donde se definen las siguientes superficies:}$$
$$S_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \partial D, h(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$$
$$S_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, z = g(x,y)\}$$
$$S_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, z = h(x,y)\}$$

Considerando las parametrizaciones naturales φ_g y φ_h de S_g y S_h, respectivamente, tenemos que:

$$\varphi_g(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = g(x,y) \end{cases} \qquad \varphi_h(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = h(x,y) \end{cases}$$

Entonces la normal a la superficie S_g es:

$$\vec{N}_g = \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_g}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)$$

que es la norma exterior, pues $\vec{N}_g$ apunta hacia arriba y la superficie S_g es la parte superior de V. Por tanto, la orientación es positiva.
En el caso de S_h, tenemos que la normal es:

$$\vec{N}_h = \frac{\partial \varphi_h}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_h}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)$$

que es la norma interior, pues $\vec{N}_h$ apunta hacia arriba también, pero al ser S_h la parte inferior de V, el vector es interior. Por tanto, la orientación es negativa.
En S_0, el vector normal $\vec{n}_0 = (n_1, n_2, 0)$ es perpendicular al vector $(0, 0, 1)$, y por tanto se tiene que:

$$\int_{(S_0,\vec{n}_0)} (0, 0, F_3) = \int_{S_0} \langle (0, 0, F_3), (n_1, n_2, 0) \rangle = \int_{S_0} 0 = 0$$

$$\int_{(\partial V,\vec{n}_0)}(0,0,F_3) = \underbrace{\int_{(S_0,\vec{n}_0)}(0,0,F_3)}_{0} + \int_{(S_g,\vec{n}_g)}(0,0,F_3) + \int_{(S_h,\vec{n}_h)}(0,0,F_3)$$

$$= \int_D \vec{F}_3(x,y,g(x,y)) - \vec{F}_3(x,y,h(x,y))dxdy$$

por el teorema de Fubini tenemos

$$= \int_D [F_3(x,y,z)]_{z=h(x,y)}^{z=g(x,y)}\,dxdy = \int_V \frac{\partial F_3}{\partial z}dzdydx$$

□

Observación 1.2.1

Aquí, $\partial V = S = Fr(V)$ es la frontera topológica de V.

Ejemplo

Verficar el teorema para el siguiente dominio:

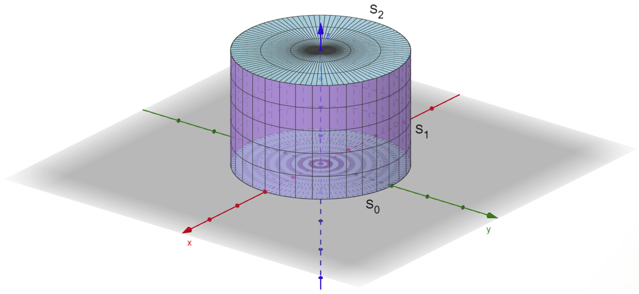
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z \in [0,2]\}$$

y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2, x^2y, z)$. Entonces vemos que la frontera de V viene dada por $\partial V = S_0 \cup S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0\}$$

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z \in [0,2]\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 2\}$$



Entonce se tiene que $div(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y^2 + x^2 + 1$.

- $$\int_V div(\vec{F}) = \int_V (y^2+x^2+1)dxdydz = \int_{z=0}^{z=2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1} r(r^2+1)drd\theta dz$$

  $$= 4\pi\int_{r=0}^{r=1} r^3 + rdr = 4\pi\left[\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = 4\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = 4\pi\cdot\frac{3}{4} = 3\pi$$

- $$\int_{(\partial V,\vec{n})}\vec{F} = \int_{(S_0,\vec{n}_0)}\vec{F} + \int_{(S_1,\vec{n}_1)}\vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)}\vec{F}$$

  $$S_1 \to \varphi_1(x,y) = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \text{donde } \theta \in [0,2\pi], z \in [0,2]$$

siendo $D = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]\}$. Entonces:

$$\vec{N}_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

que es una orientacion positiva, luego se tiene que

$$\int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} = \int_D \langle \vec{F}(\varphi_1(x,y)), \vec{N}_{\varphi_1} \rangle dxdy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=2} \langle (\cos(\theta)\sin^2(\theta), \cos^2(\theta)\sin(\theta), z), (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \rangle dz$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=2} 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) dz d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos^2(\theta)(1-\cos^2(\theta)) d\theta = \pi$$

$$S_0 \to \varphi_0(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{donde } x^2 + y^2 \leq 1$$

siendo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Entonces:

$$\vec{N}_{\varphi_0} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

que es una orientacion negativa, luego se tiene que

$$\int_{(S_0,\vec{n}_0)} \vec{F} = -\int_E \langle \vec{F}(\varphi_0(x,y)), \vec{N}_{\varphi_0} \rangle dxdy = -\int_E \langle (xy^2, x^2y, 0), (0,0,1) \rangle dxdy = 0$$

$$S_2 \to \varphi_2(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 \end{cases} \qquad \text{donde } x^2 + y^2 \leq 1$$

siendo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Entonces:

$$\vec{N}_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

que es una orientacion positiva, luego se tiene que

$$\int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F} = \int_E \langle \vec{F}(\varphi_2(x,y)), \vec{N}_{\varphi_2} \rangle dxdy = \int_E \langle (xy^2, x^2y, 2), (0,0,1) \rangle dxdy$$

$$= 2 \int_E dxdy = 2area(E) = 2 \cdot \pi$$

- Entonces, sumando las integrales:

$$\int_{(S_0,\vec{n}_0)} \vec{F} + \int_{(S_1,\vec{n}_1)} \vec{F} + \int_{(S_2,\vec{n}_2)} \vec{F} = 0 + \pi + 2\pi = 3\pi$$

Vemos que las integrales coinciden, por lo que se cumple el teorema de la divergencia de Gauss.

Teorema 1.2.3 [Teorema de la Divergencia de Gauss]

Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ un sólido cuya frontera $S = \partial V$ es una superficie simple regular a trozos, que está orientada con la normal exterior $\vec{n}$ a V.
Sea $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, definido en un conjunto abierto $U \supset V \cup S$. Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_V div(\vec{F}) = \int_{(S,\vec{n})} \vec{F}$$

Geometría de la Divergencia:

Corolario 1.2.1

En las condiciones anteriores, para cada $p \in U$ sea $B_r(p)$ la bola de radio r centrada en p y denotamos $S_r(p) = \partial B_r(p)$ la esfera correspondiente orientada con la normal exterior $\vec{n}$ a $B_r(p)$. En este caso, se cumple que:

$$div(\vec{F})(p) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B_r(p))} \int_{(S_r(p),\vec{n})} \vec{F}$$

Demostración. Denotamos $f = div(\vec{F}) : U \to \mathbb{R}$ que es una función continua en U.
Entonces $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < r < \delta$ se cumple que:

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \quad \forall x \in B_r(p)$$

Entonces, por el teorema de la divergencia de Gauss, tenemos que:

$$\left| f(p) - \frac{1}{m(B_r(p))} \int_{(S_r(p),\vec{n})} \vec{F} \right| = \left| f(p) - \frac{1}{m(B_r(p))} \int_{(S_r(p),\vec{n})} f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{m(B_r(p))} \left(\int_{B_r(p)} f(p) - \int_{(S_r(p),\vec{n})} f(x) \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{m(B_r(p))} \left| \int_{B_r(p)} |f(p) - f(x)| \right| \leq \frac{1}{m(B_r(p))} m(B_r(p)) \cdot \epsilon = \epsilon$$

□

Observación 1.2.2

Si $div(\vec{F})(p) = 0$ para todo $p \in U$, entonces se dice que $\vec{F}$ es incompresible en U.

Observación 1.2.3

Sea $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces se cumple que:

$$div(rot(\vec{F})) \equiv 0 \quad en\ U$$

Demostración.

$$rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$div(rot(\vec{F})) = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \equiv 0$$

por ser $\vec{F}$ de clase C^2. □

Observación 1.2.4

Si $\varphi : U \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, entonces se cumple que:

$$rot(\nabla \varphi) \equiv 0 \quad en\ U$$

Observación 1.2.5

Si $\varphi : U \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, entonces se cumple que:

$$div(\nabla \varphi) = div \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi$$

que es el operador Laplaciano.

Ejemplo

Dada la función $f(x,y,z) = x^2+2xy+z^2-3x+1$ y el campo vectorial $\vec{F} = (e^{-xy}, z\sin(y), x^2-z^2+y^2)$ y el sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2+z^2 \geq 4z - 3\}$$

Queremos calcular

$$\int_{\partial V} \nabla f + rot(\vec{F})$$

De la ecuación $x^2+y^2+z^2 \geq 4z-3$ analizamos el borde $x^2+y^2+(z-2)^2 = 1$.

$$V = S_0 \cup S_1 \cup S_2$$

$$\int_{\partial V} \vec{G} = \int_V div(\vec{G}) \text{ donde } \vec{G} = \nabla f + rot(\vec{F})$$

$$div(\vec{G}) = div(\nabla f) + div(rot(\vec{F})) = \Delta f + 0 = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2+0+2 = 4$$

Luego

$$\int_{\partial V} \vec{G} = \int_V div(\vec{G}) = \int_V 4 = 4 \cdot vol(V)$$

$$vol(V) = vol(V_1) - vol(V_2)$$

donde V_1 es el volumen del paraboloide y V_2 es el volumen de la esfera.

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 3 - x^2 - y^2,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

$$vol(V_1) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=2} \int_{r=0}^{r=\sqrt{3-z}} r\,dr\,dz\,d\theta = 2\pi \int_{z=0}^{z=2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{3-z}} dz = 2\pi \int_{z=0}^{z=2} \frac{3-z}{2} dz$$

$$= \pi \left[3z - \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=2} = \pi\,(6-2) = 4\pi$$

$$vol(V_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_{\partial V} \vec{G} = 4 \cdot (vol(V_1) - vol(V_2)) = 4\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right)$$