

Cálculo Integral¹

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
*Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática*

¹basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1	Integrales de línea: campos escalares y vectoriales	2
1.1	Caminos	2
1.2	Campos Escalares	5
1.3	Campos Vectoriales	8
1.4	Campos Conservativos	13
2	Teorema de Green	19

1 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales

1.1 Caminos

Definición 1.1.1 [Camino]

Un camino (o curva paramétrica) en \mathbb{R}^n es una función continua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo.

Si γ es diferenciable en un punto $t \in I$, entonces el vector velocidad de γ en el punto (instante) t es el vector tangente a la curva en ese punto, es decir, el vector:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \text{ si } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

Definición 1.1.2 [Longitud de un Camino]

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino en \mathbb{R}^n . Sea $\sigma = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ partición de $[a, b]$. Definimos

$$\Sigma(\gamma, \sigma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Definimos entonces la longitud de γ como:

$$l(\gamma) = \sup\{\Sigma(\gamma, \sigma) \mid \sigma \text{ es una partición de } [a, b]\} \in [0, +\infty]$$

Decimos que γ es **rectificable** si $l(\gamma) < +\infty$.

Observación 1.1.1

Existen caminos continuos que no son rectificables. Por ejemplo, la curva de Peano, el copo de nieve de Koch o la dada por:

$$l(\gamma) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{luego} \quad l(\gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Definición 1.1.3 [Camino C^1 a Trozos]

Decimos que un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es C^1 a trozos si:

$$\exists \mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

tal que $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es C^1 para todo $i = 1, \dots, n$.

Observación 1.1.2

En cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ la función γ es C^1 , es decir, en los extremos admite derivadas laterales, aunque puede ocurrir que sean distintas.

Teorema 1.1.1

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos. Entonces γ es rectificable y su longitud es:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Observación 1.1.3

Tenemos que $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$ existe, y es continua, salvo quizá en un número finito de puntos, luego en particular es integrable en sentido Riemann y en sentido Lebesgue.

Además, si $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ es partición de $[a, b]$ entonces:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt$$

Para la demostración del teorema anterior, veamos un lema previo:

Lema 1.1.1

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ camino continuo entonces se cumple que:

$$\left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

donde:

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

Demostración. Hagamos una distinción de casos:

- Si $u = \int_a^b \gamma(t) dt = 0$
- Si $u = \int_a^b \gamma(t) dt \neq 0$, sea $u \in \mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1 \implies$

$$\|v\| = \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \int_a^b \gamma_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n u_i \gamma_i(t) dt \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt = \left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\|$$

□

Demostración. Veamos ahora la demostración del teorema:

Podemos suponer que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es C^1 en casi todo $[a, b]$.

1. Veamos que $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$:

Sea $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ partición de $[a, b]$. Entonces:

$$\Sigma(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \forall \text{ partición } \mathcal{P}$$

Luego, tomando el supremo de todas las particiones, obtenemos que $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

2. Como $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$ es continua en casi todo $[a, b]$ -compacto, luego es uniformemente continua en $[a, b]$.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $t, s \in [a, b]$ y $|t - s| < \delta \implies \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \epsilon$

Sea $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ partición de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) - \gamma'(t_i) + \gamma'(t_i)\| dt \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\|}_{< \epsilon} dt + \|\gamma'(t_i)\| dt \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t_i)\| + \epsilon dt = \|\gamma'(t_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Usando que para un vector $u \in \mathbb{R}^n$ y un escalar $c \in \mathbb{R}$ se cumple que $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \|\gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_i) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t)) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t)) dt \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1})$$

Por el Lema 1.1.1 se sigue que:

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\|}_{< \epsilon} dt + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1}) \leq 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \\ &= 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{i=1}^n 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= 2\epsilon(b - a) + \Sigma(\gamma, \mathcal{P}) \leq 2\epsilon(b - a) + l(\gamma) \end{aligned}$$

□

Ejemplo

Sea la curva parametrizada

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Además, se cumple que

$$\gamma(0) = (1, 0) = p.$$

Derivando, obtenemos

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

y en particular,

$$\gamma'(0) = (0, 1) = \vec{v}.$$

Cambio de parámetro

Consideremos el cambio de variable $t = 2\pi s$ con $0 \leq s \leq 1$. Definiendo la nueva curva

$$\sigma(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

obtenemos su derivada:

$$\sigma'(s) = (2\pi(-\sin(2\pi s)), 2\pi \cos(2\pi s)).$$

En particular, en $s = 0$,

$$\sigma'(0) = 2\pi(0, 1) = (0, 2\pi).$$

Otro cambio de parámetro

Si realizamos el cambio $t = -2\pi s$, obtenemos la curva

$$\alpha(s) = (\cos(2\pi s), -\sin(2\pi s)).$$

Calculamos su derivada:

$$\alpha'(s) = (2\pi(-\sin(2\pi s)), -2\pi \cos(2\pi s)).$$

1.2 Campos Escalares

Definición 1.2.1 [Campo Escalar]

Un campo escalar es una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde a cada punto $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ le asigna un número real o escalar $f(x)$. Esta función también es conocida como función de punto o simplemente función escalar.

Se dice que un campo escalar es continuo si la función f es continua en el conjunto A .

Definición 1.2.2 [Integral de un Campo Escalar a lo largo de un Camino]

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ camino C^1 a trozos y sea $f : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre $\text{Im}(\gamma)$. Definimos:

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Notacion: Podemos denotar

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f ds$$

Además

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b ds$$

Definición 1.2.3 [Caminos Equivalentes]

Dos caminos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son equivalentes si existe $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ homeomorfismo C^1 con $h' \neq 0$ en $[c, d]$ tal que

$$\sigma = \gamma \circ h \text{ con } \sigma(s) = \gamma(h(s)) \quad \forall s \in [c, d]$$

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xleftarrow{\sigma} [c, d] \xleftrightarrow{h} [a, b]$$

Ahora, por el teorema de Bolzano tenemos dos posibilidades:

1. Si $h' > 0$ es decir, h es creciente, decimos que h conserva la orientación (o que γ y σ tienen la

misma orientacion)

2. Si $h' < 0$ es decir, h es decreciente, decimos que h invierte la orientacion (γ y σ tienen orientacion opuesta)

Observación 1.2.1

1. Si $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es biyectiva y C^1 con $h' \neq 0$ entonces aplicando el Teorema de la funcion inversa obtenemos que h admite inversa local alrededor de cada punto. Ademias se cumple que $(h^{-1})'(h(s)) = \frac{1}{h'(s)} \forall s \in [c, d]$. Como ademias h es biyectiva la inversa local coincide con la inversa global, luego $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es un difeomorfismo C^1 , es decir, $\exists h^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d]$ que es C^1 .
2. Usando esto obtenemos que la equivalencia de caminos es una relacion de equivalencia.

Observación 1.2.2

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $h : K \rightarrow H \subset \mathbb{R}^n$ es continua y biyectiva, entonces $h : K \rightarrow H$ es un homeomorfismo.

Demostración. Tenemos que $h : K \rightarrow H$ es biyectiva, luego $\exists h^{-1} : H \rightarrow K$. Veamos que es biyectiva. Dado $C \subset K$ cerrado $\implies C$ es compacto $\implies h(C)$ es compacto $\implies (h^{-1})^{-1}(C) = h(C)$ que es compacto en H , luego es cerrado en H

□

Teorema 1.2.1

Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ caminos C^1 a trozos equivalentes. Sea ademias $f : \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f$$

Observación 1.2.3

Si γ y σ son equivalentes $\implies \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma)$

Demostración. Tenemos $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ difeomorfismo C^1 con $\gamma \circ h = \sigma$ con ademias $\sigma(s) = \gamma(h(s)) \implies \sigma'(s) = \gamma'(h(s))h'(s) = h'(s)\gamma'(h(s))$

1. Caso 1: h es creciente ($h' > 0$)

Haciendo el cambio de variable $t = h(s)$ y $dt = h'(s)ds$ obtenemos:

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^{t=b} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{s=c}^{s=d} \underbrace{f(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)} \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds$$

Por ser h creciente, entonces se tiene que $h'(s) > 0$, luego $\|\gamma'(h(s))\| h'(s) = \|\gamma'(h(s))h'(s)\|$

$$\int_{s=c}^{s=d} f(\sigma(s)) \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds = \int_{s=c}^{s=d} f(\sigma(s)) \underbrace{\|\gamma'(h(s))h'(s)\|}_{\sigma'(s)} ds = \int_{t=c}^{t=d} f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| ds = \int_{\sigma} f$$

2. Caso 2: h es decreciente ($h' < 0$)

Haciendo el mismo cambio de variable que en el apartado anterior, $t = h(s)$ y $dt = h'(s)ds$ obtenemos:

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^{t=b} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{s=d}^{s=c} \underbrace{f(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)} \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds$$

Por ser h decreciente, entonces se tiene que $h'(s) < 0$, luego $\|\gamma'(h(s))\| h'(s) = -\|\gamma'(h(s))\| |h'(s)|$

$$\int_{s=d}^{s=c} f(\sigma(s)) \|\gamma'(h(s))\| h'(s) ds = - \int_{s=d}^{s=c} f(\sigma(s)) \underbrace{\|\gamma'(h(s))\| |h'(s)|}_{\sigma'(s)} ds = \int_{t=c}^{t=d} f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| ds = \int_{\sigma} f$$

□

Corolario 1.2.1

Si γ y σ son equivalentes y C^1 a trozos $\implies l(\gamma) = l(\sigma)$

Demostración.

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} 1 = \int_{t=a}^{t=b} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\sigma} 1 = l(\sigma)$$

□

Definición 1.2.4 [Camino Inverso]

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ camino C^1 a trozos. Definimos el camino inverso como:

$$(-\gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (-\gamma)(s) = \gamma(a + b - s)$$

Observación 1.2.4

De hecho, $(-\gamma)$ es equivalente a γ con $(-\gamma)(s) = \gamma(h(s))$ luego $Im(-\gamma) = Im(\gamma)$

Definición 1.2.5 [Concatenación de Caminos]

Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ caminos C^1 a trozos con $\gamma(b) = \sigma(c)$. Definimos su concatenación como:

$$\gamma + \sigma : [a, b + (d - c)] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\gamma + \sigma) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma(t - b + c) & \text{si } b \leq t \leq b + (d - c) \end{cases}$$

Observación 1.2.5

En este caso, si

$$f : Im(\gamma_1) \cup \dots \cup Im(\gamma_m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua en las curvas, entonces se cumple:

$$\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} f = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f$$

Ejemplo

Dado el camino γ definido por:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y(t)}, \underbrace{t}_{z(t)})$$

Y la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Entonces, calcular la integral de f a lo largo de γ .

$$x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad \gamma(0) = (1, 0, 0), \quad \gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2) \sqrt{2} dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} (1+t^2) \sqrt{2} dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{2} = \left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right) \sqrt{2}$$

1.3 Campos Vectoriales

Definición 1.3.1 [Campo Vectorial]

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, un campo vectorial en A es una función $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $x \in A$ un vector $\vec{F}(x) \in \mathbb{R}^n$.

Se dice que un campo vectorial es continuo si la función \vec{F} es continua en el conjunto A .

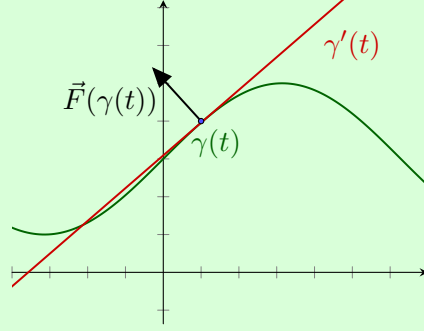
Definición 1.3.2 [Integral de un Campo Vectorial a lo largo de un Camino]

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino \mathcal{C}^1 a trozos y $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Se define la integral de \vec{F} a lo largo de γ como:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Observación 1.3.1

El producto escalar $\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ representa la proyección ortogonal del vector $\vec{F}(\gamma(t))$ en la dirección de la tangente a γ en $\gamma(t)$.



Notación:

Si

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad \text{y} \quad \gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_a^b \langle \vec{F}(x_1(t), \dots, x_n(t)), (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b [F_1(\gamma(t))x'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t))x'_n(t)] dt = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \end{aligned}$$

donde $dx_i = x'_i(t)dt$, para $i = 1, \dots, n$ y $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$.

Teorema 1.3.1

Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ caminos C^1 a trozos y equivalentes, y sea $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Entonces:

1. $\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\sigma} \vec{F}$ si γ y σ tienen la misma orientación.
2. $\int_{\gamma} \vec{F} = -\int_{\sigma} \vec{F}$ si γ y σ tienen orientación opuesta.

Demostración. Sabemos que existe $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$, biyección de clase C^1 con $h' \neq 0$, tal que:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{\gamma} & \text{Im}(\sigma) \\ h \uparrow & \nearrow \sigma & \\ [c, d] & & \end{array}$$

Luego

$$\sigma'(s) = \gamma'(h(s))h'(s), \quad \forall s \in [c, d].$$

Distinguimos dos casos según la orientación de los caminos:

- **Caso 1: Misma orientación**

Si r y σ tienen la misma orientación, entonces $h' > 0$ (es decir, h es creciente). Entonces, haciendo

el cambio de variable $t = h(s)$, $dt = h'(s)ds$, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\gamma(h(s))), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds \\ &= \int_{s=c}^{s=d} \langle \underbrace{\vec{F}(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)}, \underbrace{\gamma'(h(s))h'(s)}_{\sigma'(s)} \rangle ds = \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle ds = \int_{\sigma} \vec{F}\end{aligned}$$

• **Caso 2: Orientación opuesta**

Si γ y σ tienen orientación opuesta, entonces $h' < 0$ (es decir, h es decreciente). En este caso, hacemos el mismo cambio de variable $t = h(s)$, $dt = h'(s)ds$, y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{s=d}^{s=c} \langle \vec{F}(\gamma(h(s))), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds \\ &= \int_{s=d}^{s=c} \langle \underbrace{\vec{F}(\gamma(h(s)))}_{\sigma(s)}, \underbrace{\gamma'(h(s))h'(s)}_{\sigma'(s)} \rangle ds = - \int_{s=c}^{s=d} \langle \vec{F}(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle ds = - \int_{\sigma} \vec{F}\end{aligned}$$

□

Observación 1.3.2

Dado una camino continuo $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ cualesquiera y un campo vectorial continuo $\vec{F} : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$, se cumple que:

1. $\int_{-\gamma} \vec{F} = - \int_{\gamma} \vec{F}$.
2. $\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_2} \vec{F} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \vec{F}$.

Ejemplo

Un camino puede ser diferenciable (ó C^1) y, sin embargo, su imagen puede presentar "picos". Por ejemplo, el camino $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\gamma(t) = (t^3, |t^3|)$ es C^1 en el intervalo $[-1, 1]$, pero su imagen presenta un pico en el origen. En efecto,

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \quad \text{con} \quad \gamma'_1(t) = 3t^2 \quad \text{y} \quad \gamma'_2(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ -3t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\gamma'_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2|t| - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t|t| = 0$$

Luego $\gamma'(0)$ existe y además $\gamma'(0) = (0, 0)$. Sin embargo, la imagen de γ en el origen presenta un pico, lo que implica que la curva no es regular en ese punto.

Definición 1.3.3 [Camino Simple y Regular]

Diremos que una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un **camino simple y regular** si:

- γ es continua.
- γ es inyectiva (simple).

- γ es de clase C^1 en $[a, b]$ y cumple que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

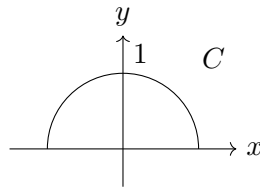
Observación 1.3.3

1. En este caso, la función $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Im}(\gamma)$ es un homeomorfismo sobre su imagen.
2. Diremos que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una **curva simple y regular** si $C = \text{Im}(\gamma)$, donde γ es un camino simple y regular. En este caso, γ es una **parametrización simple y regular** de C .

Ejemplo

Consideremos la curva:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0\}.$$



Una posible parametrización es:

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Su derivada es:

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0), \quad \forall t \in (0, \pi).$$

Por lo tanto, $\text{Im}(\gamma) = C$, confirmando que γ es una parametrización simple y regular de C .

Teorema 1.3.2

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva simple y regular y sean γ y σ parametrizaciones simples y regulares de C . Entonces, γ y σ son equivalentes.

Demostración. A continuación viene la demostración del teorema anterior:

Sean $\sigma : [c, d] \rightarrow \text{Im}(\sigma)$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Im}(\gamma)$ tales que $\text{Im}(\sigma) = C = \text{Im}(\gamma)$. Dado que σ y γ son homeomorfismos sobre C entonces $\exists h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ homeomorfismo C^1 tal que $h = \gamma^{-1} \circ \sigma$. Entonces falta demostrar que h es de clase C^1 con $h' \neq 0$ en $[c, d]$. Sea $s_0 \in [c, d]$ y denotaremos $x_0 = \sigma(s_0)$

- Consideramos primero el caso de que $s_0 \in (c, d)$ y sea $t_0 \in (a, b)$ tal que $\gamma(t_0) = x_0$: Sabemos que

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)) \neq \vec{0}$$

Supongamos que $\gamma'_1(t_0) \neq 0$ entonces definamos la función $H : (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$H(t, y_2, \dots, y_n) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) + y_2, \dots, \gamma_n(t) + y_n) \text{ luego } H(t_0, 0, \dots, 0) = (\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_n(t_0)) = \gamma(t_0)$$

$$D_H(t, 0 \dots 0) = \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma'_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ \gamma'_2(t) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma'_n(t) & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \implies \det(D_H(t, 0 \dots 0)) = \gamma'_1(t) \neq 0$$

Entonces por el Teorema de la Función Inversa $\exists U^{(t_0, 0, \dots, 0)} \subset (a, b)$ y $\exists V^{x_0}$ tal que $H : U^{(t_0, 0, \dots, 0)} \rightarrow V^{x_0}$ es un difeomorfismo de clase C^1 . Definimos $F : V^{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \pi_1(H^{-1}(x)) \in (a, b)$ donde

π_1 es la proyección en la primera coordenada.

$$F(\gamma(t)) = \pi_1(H^{-1}(\gamma(t))) = \pi_1(H^{-1} \circ H(t, 0, \dots, 0)) = \pi_1(t, 0, \dots, 0) = t$$

Si $t = h(s)$ entonces $F(\gamma(h(s))) = F(\sigma(s))$ luego h es de clase C^1 alrededor de s_0 . Además, $\sigma'(s_0) = (\gamma \circ h)'(s_0) = \gamma'(t_0) \circ h'(s_0) \implies h'(s_0) \neq 0$

- Para los exteriores de c y d se usa que: $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 entonces $\exists \bar{\sigma} : (c - \epsilon, d + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ extensión de clase C^1 y además $\bar{\sigma}' \neq 0$ en $(c - \epsilon, d + \epsilon)$

□

Ejemplo

Un segmento en \mathbb{R}^n : Dados $p \neq q$ en \mathbb{R}^n , el segmento $[p, q]$ se define como:

$$[p, q] = \{(1 - t)p + tq \mid 0 \leq t \leq 1\} = C \text{ es una curva simple regular}$$

$$C = \text{Im}(\gamma) \text{ donde } \gamma : [0, 1] \rightarrow [p, q] \text{ con } \gamma(t) = (1 - t)p + tq = q + t(p - q)$$

Tenemos que γ es biyectiva y $\gamma'(t) = p - q \neq 0 \forall t \in [0, 1]$

Ejemplo

Una gráfica en \mathbb{R}^n : Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . La gráfica $G_g = \{(t, g(t)) : a \leq t \leq b\}$ es una curva simple regular en \mathbb{R}^2 con $G_g = \text{Im}(\gamma)$ donde $\gamma : [a, b] \rightarrow G_g$ es de clase C^1 y biyectiva con $\gamma(t) = (t, g(t))$ y $\gamma'(t) = (1, g'(t)) \neq \vec{0} \forall t \in [a, b]$

Observación 1.3.4

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva simple regular, entonces γ es un homeomorfismo sobre su imagen, i.e. $\gamma : [a, b] \rightarrow C = \text{Im}(\gamma)$ es un homeomorfismo.

Falta demostrar que $\gamma^{-1} : C \rightarrow [a, b]$ es continua.

Si no fuera así: Sea $x_0 \in C$ tal que γ^{-1} no es continua en x_0 entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta = \frac{1}{k} > 0, \exists x_k \in C$ con $\|x_k - x_0\| \leq \frac{1}{k}$ pero $\|\gamma^{-1}(x_k) - \gamma^{-1}(x_0)\| > \epsilon$

$\forall k \in \mathbb{N}$, denotemos $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\gamma^{-1}(x_k)) \subset [a, b]$ -compacto $\implies \exists (t_{k_j}) \rightarrow t_0 \in [a, b]$ y como γ es continua $\implies \gamma(t_{k_j}) \rightarrow \gamma(t_0) \equiv (x_{k_j}) \rightarrow x_0$

Luego $x_0 = \gamma(t_0) \iff t_0 = \gamma^{-1}(x_0)$. Pero $t_{k_j} = \gamma^{-1}(x_{k_j})$ satisface que $\|t_{k_j} - t_0\| \geq \epsilon \iff \|\gamma^{-1}(x_{k_j}) - \gamma^{-1}(x_0)\| \geq \epsilon$ lo cual es una contradicción.

Definición 1.3.4 [Integral de una Función a lo largo de una Curva]

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ curva simple regular entonces;

1. Si $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, se define $\int_C f = \int_\gamma f$ siendo γ una parametrización simple y regular de C .
2. Una orientación de C se define como un sentido de recorrido de C , es decir, señalar un origen y un extremo de C . Si C está orientada y $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, se define $\int_C \vec{F} = \int_\gamma \vec{F}$ siendo γ una parametrización simple y regular de C , que conserva la orientación o que induce en C la orientación elegida.

Observación 1.3.5

Si cambiamos de orientación: $\int_{C^-} \vec{F} = - \int_C \vec{F}$

Definición 1.3.5 [Curva Simple Regular a Trozos]

Diremos que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva regular simple a trozos si $C = \text{Im}(\gamma)$ siendo γ camino C^1 a trozos con $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ y cada γ_j es simple y regular $\forall j = 1, \dots, k$.
En este caso si $C_j = \text{Im}(\gamma_j) \forall j = 1, \dots, k$ entonces denotaremos $C = C_1 + \dots + C_k$ y definimos para $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ continua: $\int_C f = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} f$

Observación 1.3.6

Se puede demostrar que el resultado no depende de la partición de C en curvas simples y regulares (descomposición).

Observación 1.3.7

Si $C = C_1 + \dots + C_k$ tienen orientaciones coherentes (el extremo de C_j coincide con $C_{j+1} \forall j = 1, \dots, k-1$) diremos que C está orientada y definimos para un campo vectorial $\vec{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua: $\int_C \vec{F} = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} \vec{F}$

1.4 Campos Conservativos

Definición 1.4.1 [Campo Conservativo]

Sea un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Un campo vectorial C^1 continuo $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es conservativo (ó campo gradiente) si $\exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\vec{F} = \nabla \varphi \iff \vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ donde $F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$. Se dice entonces que la función φ es un potencial de \vec{F} .

Observación 1.4.1

Si φ es un potencial de \vec{F} entonces también lo es de $\vec{F} + a \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$ constante.

Proposición 1.4.1

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo conservativo y $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un camino C^1 a trozos. Entonces:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

donde φ es un potencial de \vec{F} .

Demostración. Distinguimos dos casos:

1. **Caso 1:** γ es C^1 en $[a, b]$

Definimos la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $g(t) = \varphi(\gamma(t))$ y aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \gamma \downarrow & \nearrow \varphi & \\ U & & \end{array}$$

En particular tenemos que g es de clase C^1 y además:

$$g'(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t) = D_\varphi(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \langle \nabla \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t=a}^{t=b} g'(t) dt \stackrel{\text{TFC}}{=} g(b) - g(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

2. **Caso 2:** γ es C^1 a trozos

Se aplica el caso 1 a cada trozo.

□

Teorema 1.4.1 [Caracterización de los Campos Conservativos]

Sea el conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, entonces son equivalentes:

1. El campo \vec{F} es conservativo.
2. $\int_\gamma \vec{F} = 0$ para todo γ camino cerrado C^1 a trozos en U .
3. $\int_\gamma \vec{F}$ solamente depende de los extremos de γ para todo γ camino C^1 a trozos en U .
4. $\int_\sigma \vec{F} = 0$ para todo σ poligonal cerrado de lados paralelos a los ejes coordenados en U .
5. $\int_\sigma \vec{F}$ solamente depende de los extremos de σ para todo σ poligonal cerrado de lados paralelos a los ejes coordenados en U .

Demostración.

- (1) \implies (2): Si γ es un camino cerrado, entonces $\gamma(a) = \gamma(b)$ y por la proposición anterior:

$$\int_\gamma \vec{F} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(b)) = 0$$

- (2) \implies (3): Sean γ_1 y γ_2 caminos C^1 a trozos con los mismos extremos. Consideramos $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$, que es un camino cerrado. Por hipótesis, $\int_\gamma \vec{F} = 0$, y por la proposición anterior:

$$0 = \int_\gamma \vec{F} = \int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \implies \int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}$$

- (2) \implies (4) y (3) \implies (5): trivial
- (4) \implies (5) : es análogo a (2) \implies (3).

- (5) \implies (1) : Consideramos un punto $x \in U$ y un vector unitario \vec{e}_i en la dirección del eje i -ésimo. Tomamos un segmento de línea recta γ que va de x a $x + h\vec{e}_i$, donde h es un número real pequeño.

La integral de \vec{F} sobre γ es:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)$$

Dividiendo ambos lados por h y tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

Por otro lado, la integral de \vec{F} sobre γ también se puede expresar como:

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=h} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=h} \langle \vec{F}(x + t\vec{e}_i), \vec{e}_i \rangle dt = \int_{t=0}^{t=h} F_i(x + t\vec{e}_i) dt$$

Tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t=0}^{t=h} F_i(x + t\vec{e}_i) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h}$$

Luego

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \implies \nabla \varphi = \vec{F}$$

□

Observación 1.4.2

Un poligonal σ de lados paralelos a los ejes es un camino $\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ con γ_j segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados.

Además en este caso, si fijamos un punto $p \in U$ la función $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} = \int_p^x \vec{F} \quad \text{donde } \gamma_x \text{ es un camino de } p \text{ a } x$$

es un potencial de \vec{F} en U .

Lema 1.4.1

Sea el conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Dados los puntos $p, x \in U$, entonces existe σ poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados en U tal que σ une p con x .

Demostración. Sea el conjunto

$$A = \{x \in U \mid \text{existe } \sigma \text{ poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados que une } p \text{ con } x\}$$

- $p \in A \neq \emptyset$.
- A es abierto. Si $x \in A$ entonces $x \in U$ abierto, luego $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$. Además, $B(x, \epsilon) \subset A$. Si $y \in B(x, \epsilon)$ entonces $\exists \sigma_{xy}$ poligonal que une x con y y también existe σ_x poligonal que une p con x . Por lo tanto, $\sigma_x + \sigma_{xy}$ es un poligonal que une p con y .

- A es cerrado en U . $U \setminus A$ es abierto. Si $x \in U \setminus A$ entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$. Como antes, se tiene que $B(x, \epsilon) \subset U \setminus A$.

Por lo tanto, A es abierto y cerrado en U y como U es conexo, $A = U$.

Podemos definir $\varphi(x) = \int_{\sigma_x} \vec{F}$ donde σ_x es un poligonal de U de lados paralelos a los ejes coordenados que une p con x .

Veamos que φ es un potencial de \vec{F} en U , es decir, $\nabla \varphi = \vec{F}$, o que es lo mismo:

$$\vec{F} = (F_1, \dots, F_n) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)$$

Por tanto nos preguntamos si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = F_i(x)$ para $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x) &= \int_p^{x+h\vec{e}_i} \vec{F} - \int_p^x \vec{F} = \int_x^{x+h\vec{e}_i} \vec{F} \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \underbrace{\langle \vec{F}(\sigma(t)), h\vec{e}_i \rangle}_{(F_1, \dots, F_n)} dt = \int_{t=0}^{t=1} h F_i(\sigma(t)) dt \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} \sigma(t) = x + th\vec{e}_i, & t \in [0, 1] \\ \sigma(0) = x, & \sigma(1) = x + h\vec{e}_i \\ \sigma'(t) = h\vec{e}_i \end{cases}$$

$$\frac{\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t=0}^{t=1} h F_i(x + th\vec{e}_i) dt$$

Expresando $G(t, h) = F_i(x + th\vec{e}_i)$ en términos de t y h , entonces obtenemos que G es continua en h y t , por lo tanto, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para intercambiar el límite y la integral.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t=0}^{t=1} F_i(x + th\vec{e}_i) dt = \int_{t=0}^{t=1} \lim_{h \rightarrow 0} F_i(x + th\vec{e}_i) dt = \int_{t=0}^{t=1} F_i(x) dt = F_i(x)$$

□

Ejemplo

Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F}(x, y, z) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz))$, veamos si es conservativo.

Fijamos un punto $p = (0, 0, 0)$ y definimos $\sigma_{xyz} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ donde:

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0, 0) & t \in [0, x] \text{ ó } t \in [x, 0] \\ \gamma_2(t) = (x, t, 0) & t \in [0, y] \text{ ó } t \in [y, 0] \\ \gamma_3(t) = (x, y, t) & t \in [0, z] \text{ ó } t \in [z, 0] \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=x} \langle (0, t, 0), (1, 0, 0) \rangle dt = 0$$

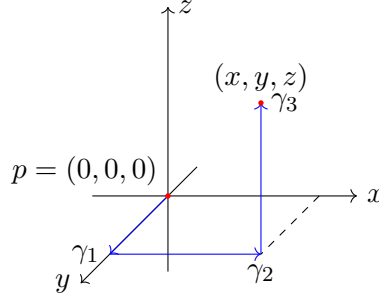
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=y} \langle (t, x, t), (0, 1, 0) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=y} x dt = xy$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=z} \langle (y, x + t \cos(yt), y \cos(yt)), (0, 0, 1) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=z} y \cos(yt) dt = [\sin(yt)]_{t=0}^{t=z} = \sin(yz)$$

Luego $\varphi(x, y, z) = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} = xy + \sin(yz)$.

En efecto, para confirmar que \vec{F} es conservativo, debemos verificar que $\nabla\varphi = \vec{F}$.

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz)) = \vec{F}$$



Por lo tanto, \vec{F} es conservativo.

De forma alternativa se podría haber visto que \vec{F} es un campo conservativo, buscando una función φ tal que $\vec{F} = \nabla\varphi$, es decir:

1. $F_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = y \implies \varphi = xy + g(y, z)$
 2. $F_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x + z \cos(yz) \implies \frac{\partial g}{\partial y} = z \cos(yz) \implies g = \sin(yz) + h(z)$
 3. $F_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = y \cos(yz) \implies \frac{\partial h}{\partial z} = y \cos(yz) \implies h = \frac{y}{z} \sin(yz) + c$
- \implies
1. $\varphi = \int \frac{d\varphi}{dx} dx = \int y dx = xy + H(y, z)$ constante con respecto a x
 2. $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{dH}{dz} = y \cos(yz) \implies H = \int y \cos(yz) dz = \sin(yz) + G(y)$ constante con respecto a z
 3. $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d}{dy}(yx + \sin(yz) + G(y)) = x + z \cos(yz) + G'(y) = x + z \cos(yz) \implies G'(y) = 0 \implies G(y) = \text{cte.}$

Proposición 1.4.2

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo conservativo de clase C^1 entonces se cumple que:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ en } U$$

Demostración. Tomemos $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = F_i \in C^1 \forall i = 1, \dots, n$. Luego φ es de clase C^2 y por el teorema de las derivadas cruzadas (Schwartz) se tiene que:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right) = \underbrace{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i}}_{\text{Schwartz}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

□

Corolario 1.4.1

Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 , entonces, si \vec{F} es campo conservativo, se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } U$$

Demostración. Puesto que \vec{F} es conservativo, y $\vec{F} = (P, Q) = (F_1, F_2)$, entonces por la proposición anterior se cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

□

Observación 1.4.3

En general el recíproco no es cierto, depende de la forma del dominio U .

Observación 1.4.4

Terminología:

- Una forma diferencial de orden 1 en U es una expresión de la forma $\omega = Pdx + Qdy$ con P, Q de clase C^1 en U .
- ω es cerrada si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en U .
- ω es exacta si $\exists \varphi \in C^2(U) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \iff \nabla \varphi = (P, Q)$ en U .

Hemos visto que ω exacta $\implies \omega$ cerrada.

2 Teorema de Green

Definición 2.0.1 [Curva de Jordan]

Una curva de Jordan C en \mathbb{R}^2 es la imagen de un camino cerrado y simple en \mathbb{R}^2 , es decir, $C = \text{Im}(\gamma)$ con $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua, inyectiva en $[a, b)$ y $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Dicho de otra forma, una curva de Jordan en el plano es una curva cerrada y continua que no se cruza a sí misma. Es como si tomaras un lápiz, dibujaras una línea continua sin levantarlo del papel, sin pasar dos veces por el mismo punto (excepto al final), y al final volvieras exactamente al punto de partida.

Más técnicamente, es la imagen de una función continua γ que recorre la curva desde un punto inicial $\gamma(a)$ hasta un punto final $\gamma(b)$, con la condición de que todos los puntos intermedios son distintos (no hay autointersecciones), y solo el inicio y el final coinciden: $\gamma(a) = \gamma(b)$. Este tipo de curva encierra una región bien definida del plano, como un lazo o un contorno cerrado limpio.

Observación 2.0.1

Se puede demostrar que C es un homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1 .

Teorema 2.0.1 [Teorema de la curva de Jordan]

Toda curva de Jordan C en \mathbb{R}^2 divide al plano en dos regiones o componentes conexas, una acotada, denominada parte interior a C y otra no acotada, denominada parte exterior a C , siendo C la frontera común a ambas regiones. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \text{Int}(C) \cup \text{Ext}(C) \cup C \text{ con } \begin{cases} \text{Int}(C) = \text{abierto conexo acotado} \\ \text{Ext}(C) = \text{abierto conexo no acotado} \\ \text{Fr}(\text{Int}(C)) = C = \text{Fr}(\text{Ext}(C)) \end{cases} \quad \text{unión disjunta}$$

Definición 2.0.2 [Conexión Simple]

Un conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es simplemente conexo si $\forall C$ curva de Jordan en U se tiene que $\text{Int}(C) \subset U$.

Informalmente, podemos definir un conjunto simplemente conexo como aquel que no tiene agujeros, es decir, toda curva de Jordan que esté dentro del conjunto también encierra completamente una región que pertenece al conjunto. Por ejemplo, el disco abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ es simplemente conexo, mientras que el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no lo es, porque tiene un agujero en el origen.

Definición 2.0.3 [Orientación de una Curva de Jordan]

Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ curva de Jordan de clase C^1 a trozos. Se define la orientación positiva en C y se denota C^+ como el sentido de recorrido contrario a las agujas del reloj.

Conceptualmente, es el sentido de recorrido que deja la parte interior de C a la izquierda.

Teorema 2.0.2 [Teorema de Green]

Sean C curva de Jordan regular a trozos con parte interior $D = \text{Int}(C)$, $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset \overline{D} = D \cup C$. Entonces:

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde C^+ representa la curva C con orientación positiva.

Demostración. Para el caso de dominios que son a la vez proyectables horizontalmente y verticalmente. Es decir, supongamos que

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde las funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 .

Entonces $C^+ = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ donde

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, f(t)), & t \in [a, b] & \gamma_1'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0) \\ \gamma_2(t) = (b, t) & t \in [c_2, d_2] & \gamma_2'(t) = (0, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, g(t)) & t \in [a, b] & \gamma_3'(t) = (1, g'(t)) \neq (0, 0) \\ \gamma_4(t) = (a, t) & t \in [c_4, d_4] & \gamma_4'(t) = (0, 1) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{C^+} P dx + Q dy &= \int_{C^+} P dx + \int_{C^+} Q dy \implies \int_{C^+} P dx = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4} (P, 0) \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \langle (P(t, f(t)), 0), (1, f'(t)) \rangle dt + \int_{t=c_2}^{t=d_2} \langle (P(b, t), 0), (0, 1) \rangle dt \\ &\quad - \int_{t=a}^{t=b} \langle (P(t, g(t)), 0), (1, g'(t)) \rangle dt - \int_{t=c_4}^{t=d_4} \langle (P(a, t), 0), (0, 1) \rangle dt \\ &= \int_{t=a}^{t=b} P(t, f(t)) - P(t, g(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx = - \int_{x=a}^{x=b} [P(x, y)]_{y=f(x)}^{y=g(x)} dx \\ &= - \int_{x=a}^{x=b} P(x, g(x)) - P(x, f(x)) dx = \int_{x=a}^{x=b} P(x, f(x)) - P(x, g(x)) dx \end{aligned}$$

Usando que \overline{D} es verticalmente proyectable, hemos obtenido que $\int_{C^+} P dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$.

Usando que \overline{D} es horizontalmente proyectable, veamos que $\int_{C^+} Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$.

Suponemos entonces que

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

donde $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 .

Entonces $C^+ = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4$ donde

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = (\psi(t), t), & t \in [c, d] & \sigma_1'(t) = (\psi'(t), 1) \\ \sigma_2(t) = (t, d), & t \in [a_2, b_2] & \sigma_2'(t) = (1, 0) \\ \sigma_3(t) = (\varphi(t), t), & t \in [c, d] & \sigma_3'(t) = (\varphi'(t), 1) \\ \sigma_4(t) = (t, c), & t \in [a_4, b_4] & \sigma_4'(t) = (1, 0) \end{cases}$$

•

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} Q dy &= \int_{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4} (0, Q) \\
&= \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\psi(t), t)), (\psi'(t), 1) \rangle dt - \int_{t=a_2}^{t=b_2} \langle (0, Q(t, d)), (1, 0) \rangle dt \\
&\quad - \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\varphi(t), t)), (\varphi'(t), 1) \rangle dt + \int_{t=a_4}^{t=b_4} \langle (0, Q(t, c)), (1, 0) \rangle dt \\
&= \int_{t=c}^{t=d} Q(\psi(t), t) - Q(\varphi(t), t) dt
\end{aligned}$$

•

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=c}^{y=d} Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y) dy$$

□

El Teorema de Green establece una conexión profunda entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada y una integral doble sobre la región encerrada por esa curva. En esencia, dice que recorrer el campo vectorial a lo largo del borde de una región (lado izquierdo) es equivalente a acumular la rotación o “vorticidad” del campo dentro de esa región (lado derecho).

En términos geométricos, si tienes un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q)$, el teorema afirma que el trabajo total que realiza ese campo al recorrer la curva cerrada C^+ (es decir, la integral de línea) es igual a la suma de las diferencias entre los cambios de Q en x y de P en y en el interior de la curva (es decir, una integral de área del rotacional escalar). El teorema es válido siempre que el campo sea suficientemente suave y que la región encerrada no tenga agujeros.

Corolario 2.0.1

Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos con parte interior $D = \text{Int}(C)$, entonces se tiene que:

$$\text{área}(D) = \int_{C^+} x dy = - \int_{C^+} y dx = \int_{C^+} \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

Demostración.

□

Observación 2.0.2

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

puesto que C tiene área D .

Ejemplo

Vamos a verificar el Teorema de Green para el campo $\vec{F} = (x^2, xy)$ y la curva de Jordan C dada por el borde del cuadrado $[0, 1]^2$.

$$\begin{cases} P(x, y) = x^2 \\ Q(x, y) = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0), & t \in [0, 1] & \gamma'_1(t) = (1, 0) \\ \gamma_2(t) = (1, t), & t \in [0, 1] & \gamma'_2(t) = (0, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, 1), & t \in [0, 1] & \gamma'_3(t) = (1, 0) \\ \gamma_4(t) = (0, t), & t \in [0, 1] & \gamma'_4(t) = (0, 1) \end{cases}$$

•

$$\begin{aligned} \int_{C^+} x^2 dx + xy dy &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} x^2 dx + xy dy \\ &= \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (t^2, 0), (1, 0) \rangle dt}_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (1, t), (0, 1) \rangle dt}_{\gamma_2} - \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (t^2, t), (1, 0) \rangle dt}_{\gamma_3} - \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} \langle (0, 0), (0, 1) \rangle dt}_{\gamma_4} \\ &= \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt + \int_{t=0}^{t=1} t dt - \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt - 0 = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

•

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D (y - 0) dx dy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1} y dy \right) dx = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Verificar el teorema de Green para la circunferencia de radio 2 y centro en el origen, el campo $\vec{F} = (x - y, x + y)$.

$$\begin{cases} \gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), & t \in [0, 2\pi] & \gamma(0) = \gamma(2\pi) \text{ para } \gamma(0) \neq \gamma(t) \forall t \in (0, 2\pi) \\ \gamma'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

•

$$\begin{aligned} \int_{C^+} (x - y) dx + (x + y) dy &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (2 \cos(t) - 2 \sin(t), 2 \cos(t) + 2 \sin(t)), (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (-4 \cos(t) \sin(t) + 4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) - 4 \sin(t) \cos(t)) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 4 dt = 8\pi \end{aligned}$$

•

$$\int_{\overline{D}} (1 + 1) dx dy = 2(\text{área}(\overline{D})) = 2(\pi 2^2) = 8\pi$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x, y) = (x^2 + y^2, -3xy + xy^3 + y^2)$ sobre la curva definida por el cuadrado $[0, 1]^2$. Veamos dos maneras de calcular la integral de camino dada por $\int_{\gamma} F \cdot dr$.

- Podemos describir la curva como producto de una concatenación de curvas: $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_4$ donde:

$$\begin{cases} \gamma_1 \equiv (4t, 0) : t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \gamma_2 \equiv (1, 4t - 1) : t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}) \\ \gamma_3 \equiv (3 - 4t, 1) : t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}) \\ \gamma_4 \equiv (0, 4 - 4t) : t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \sum_{k=1}^4 \int_{t=\frac{k-1}{4}}^{t=\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma'_k(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^4 \int_{t=\frac{k-1}{4}}^{t=\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma'_k(t) \rangle dt = \\
&= \int_{t=0}^{t=\frac{1}{4}} \langle (4t)^2 + 0, -3 \cdot (4t) \cdot 0 + 4t \cdot 0^3 + 0 \rangle, (4, 0) \rangle dt + \\
&+ \int_{t=\frac{1}{4}}^{t=\frac{2}{4}} \langle (t^2 + (4t-1)^2, -3(4t-1) + (4t-1)^3 + (4t-1)^2) \rangle, (0, 4) \rangle dt + \\
&+ \int_{t=\frac{2}{4}}^{t=\frac{3}{4}} \langle (3-4t)^2 - 1^2, -3(3-4t) + (3-4t) + 1 \rangle, (-4, 0) \rangle dt + \\
&+ \int_{t=\frac{3}{4}}^{t=1} \langle (4-4t)^2, (4-4t)^2 \rangle, (0, -4) \rangle dt
\end{aligned}$$

Y resolveríamos las integrales polinómicas de forma usual.

2. Otra forma de resolverlo es aplicando el teorema de Green:

Para ello veamos que el camino definido anteriormente sea una Curva de Jordan

$$\begin{cases} \text{Simple: } \forall t_1, t_2 \in (a, b) : t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \\ \text{Cerrada: } \gamma(0) = \gamma(1) \\ \text{Regular: } \|\gamma'(t)\| \neq 0 \forall t \in [0, 1] \end{cases} \implies \text{ es una curva de Jordan}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -3y + y^3 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \implies \\
\int_{\gamma} F &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy \\
&= \int_{x=0}^{x=1} -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx = \left[\frac{-3y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{-3y^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ y el camino dado por:

$$\begin{cases} \gamma(t) = (8 + 3 \cos(2\pi t), 6 + 3 \sin(2\pi t)) \\ \gamma'(t) = 6\pi (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Veamos cómo lo haríamos a través de la definición:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \int_{t=0}^{t=1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \left(\frac{-6 - 3 \sin(2\pi t)}{109 + 48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t)}, 6\pi (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \right) \right\rangle dt \\
&= \int_{t=0}^{t=1} \frac{6\pi(6 \sin(2\pi t) + 8 \cos(2\pi t) + 3)}{109 + 48 \cos(2\pi t) + 36 \sin(2\pi t)} dt = 0
\end{aligned}$$

Observación 2.0.3

La integral anterior se resolvería haciendo uso del cambio de variable $u = tg(\frac{t}{2})$, el cual suele usarse para integrales de la forma:

$$\int \frac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))} dt$$

Haciendo uso del Teorema de Green, y verificando en primer lugar que se cumple que γ es una Curva de Jordan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(t) \text{ está orientada positivamente} \\ \gamma(0) = \gamma(1) = (11, 6) \\ \|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \\ \begin{cases} 8 + 3 \cos(2\pi t) = 8 + 3 \cos(2\pi t') \\ 6 + 3 \sin(2\pi t) = 6 + 3 \sin(2\pi t') \end{cases} \iff t = 0, t' = 1 \implies \gamma \text{ es simple} \end{array} \right.$$

F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, por lo que podemos aplicar el Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \implies \int \int_{Int(\gamma)} 0 dx dy &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ y el camino dado por $\gamma(t) = (\epsilon \cos(2\pi t), \epsilon \sin(2\pi t))$ con $t \in [0, 1]$ y $\epsilon > 0$.

Este caso es un ejemplo de un campo vectorial y un camino en el que no es posible hacer uso del Teorema de Green ya que el origen es un punto de discontinuidad y por tanto F no es de clase C^1 . No obstante si se puede calcular a través de la definición:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_{t=0}^{t=1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \left(\frac{-\epsilon \sin(2\pi t)}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon \cos(2\pi t)}{\epsilon^2} \right), (-2\pi \epsilon \sin(2\pi t), 2\pi \epsilon \cos(2\pi t)) \right\rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=1} 2\pi dt = 2\pi \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea γ -camino simple, cerrado, regular y orientada positivamente con 2 cortes en cada eje y tal que $(0, 0) \in int(\gamma)$

Corolario 2.0.2

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto simplemente conexo y el campo vectorial $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 . Entonces son equivalentes:

1. \vec{F} es conservativo en $U \iff Pdx + Qdy$ es exacta en U , es decir, $\exists \varphi \in C^2(U)$ tal que $d\varphi = Pdx + Qdy$.
2. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en $U \iff Pdx + Qdy$ es cerrada en U .

Demostración.

- (1) \implies (2): Es cierto siempre. Si $(P, Q) = \nabla \varphi$ con $\varphi \in C^2(U)$ entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
- (2) \implies (1): Sea σ poligonal cerrada en U de lados paralelos a los ejes coordenados. Veamos que $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$.
Entonces $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$ donde cada σ_j tiene imagen $Im(\sigma_j) = C_j$, curva de Jordan poligonal.

$$\int_{\sigma} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{(\partial D_j)^+} Pdx + Qdy = \sum_{j=1}^n \int_{D_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

□

Ejemplo

El resultado anterior puede fallar si U no es simplemente conexo. Sean $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ que es C^∞ en U .

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

pero podemos ver que \vec{F} no es conservativo en U ya que tomando $\gamma_r(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ con $r > 0$ y $t \in [0, 2\pi]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\langle \left(\frac{-r \sin(t)}{r^2}, \frac{r \cos(t)}{r^2} \right), (-r \sin(t), r \cos(t)) \right\rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

luego como γ_r es cerrada y $\int_{\gamma_r} \vec{F} \neq 0$ entonces \vec{F} no es conservativo en U .

Sabemos que \vec{F} no es conservativo, pero nos podemos preguntar si se puede encontrar un potencial para \vec{F} en U .

Buscamos φ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} P = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) &= \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Entonces φ es un potencial para \vec{F} en $W = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$.

Teorema 2.0.3 [Teorema de Green General - Dominios Múltiplemente Conexos]

Sean C_0, C_1, \dots, C_m curvas de Jordan regulares a trozos en \mathbb{R}^2 tal que:

1. $C_j \subset \text{Int}(C_0) \forall j = 1, \dots, m$
2. $C_i \subset \text{Ext}(C_j) \forall i, j = 1, \dots, m$ con $i \neq j$

Sean $D = \text{Int}(C_0) \cap (\text{Ext}(C_1) \cup \dots \cup \text{Ext}(C_m))$ y $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset \overline{D} = D \cup C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_m$. Entonces:

$$\int_{(\partial D)^+} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

donde $(\partial D)^+ = C_0^+ - \sum_{j=1}^m C_j^+$.

Definición 2.0.4 [Divergencia de un Campo Vectorial]

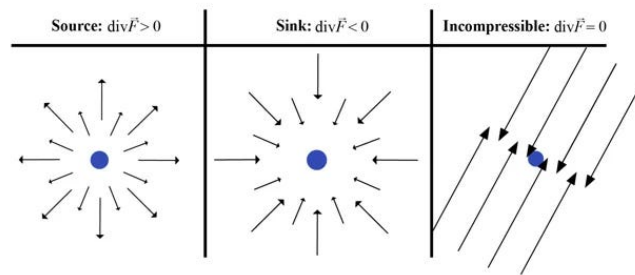
Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 . Se define la divergencia de \vec{F} como:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Más generalmente, si $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ entonces:

$$\text{div}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{F}$$

La divergencia de un campo vectorial mide qué tanto el campo "se expande" o "se contrae" en un punto, es decir, cuánto flujo neto sale o entra de una región infinitesimal alrededor de ese punto. Si imaginas un campo como un flujo de aire o de agua, la divergencia en un punto te dice si ese punto actúa como una fuente (donde el fluido se está generando y sale hacia afuera) o como un sumidero (donde el fluido desaparece y entra hacia dentro). Si no hay ganancia ni pérdida neta de fluido, la divergencia es cero.



Geométricamente, si colocas una pequeña esfera o círculo alrededor de un punto, y el flujo total que sale es mayor que el que entra, la divergencia es positiva; si entra más de lo que sale, es negativa. La divergencia se calcula como una combinación de derivadas parciales que describe cómo cambian las componentes del campo en cada dirección. Así, la divergencia condensa en un número local la idea de densidad de flujo saliente desde un punto del campo.

Observación 2.0.4

Sea el vector $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$, entonces tenemos dos vectores ortogonales a \vec{u} que son $\vec{v} = (u_2, -u_1)$ y $\vec{w} = (-u_2, u_1)$, y que se obtienen rotando \vec{u} 90 grados en sentido horario y antihorario respectivamente.

Definición 2.0.5 [Vector Normal Unitario Exterior]

Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ curva de Jordan regular a trozos en $D = \text{Int}(C)$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización regular a trozos de C que induce la orientación positiva C^+ . Para cada $t_0 \in [a, b]$, excepto una cantidad finita de ellos, consideramos el vector tangente a γ en $\gamma(t_0)$:

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0))$$

Se define entonces el vector normal unitario exterior a C en $\gamma(t_0)$ como:

$$\vec{n}(\gamma(t_0)) = \left(\frac{\gamma'_2(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, -\frac{\gamma'_1(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right)$$

El vector normal unitario exterior a una curva cerrada en el plano representa la dirección que apunta hacia fuera del dominio D delimitado por la curva, y es perpendicular al vector tangente en cada punto regular. Cuando una curva C está orientada positivamente (es decir, recorriéndola el interior queda a la izquierda), el exterior queda a la derecha del sentido de recorrido. Por tanto, para obtener el vector normal exterior, se toma el vector tangente en ese punto y se rota 90° en sentido horario, apuntando hacia fuera.

Teorema 2.0.4 [Teorema de la Divergencia]

Supongamos que tenemos $C \subset \mathbb{R}^2$ curva de Jordan regular a trozos con $D = \text{Int}(C)$ y sea $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset \overline{D} = D \cup C$. Entonces:

$$\int_D \text{div}(\vec{F}) = \int_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

donde \vec{n} es el vector normal unitario exterior a C^+ .

Demostración. Consideramos el campo vectorial $\vec{G} = (-F_2, F_1) = (P, Q)$ y aplicamos el Teorema de Green:

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C^+} P dx + Q dy$$

•

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \text{div}(\vec{F}) dx dy$$

•

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \underbrace{\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle}_{\text{campo escalar}} &= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \vec{n}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t=a}^{t=b} \langle (F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t))), (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \rangle dt \\ &= \int_{t=a}^{t=b} -F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) dt = \int_{C^+} P dx + Q dy \end{aligned}$$

□

Lo que nos viene a decir el teorema de la divergencia es que la cantidad total de “campo” que se genera o se pierde dentro de una región (D) es exactamente igual al flujo neto que atraviesa su frontera (C), medido mediante el producto escalar del campo con el vector normal exterior. Este resultado permite traducir una propiedad local del campo —la divergencia, que mide en cada punto si el campo actúa como fuente o sumidero— en una propiedad global, como el flujo total que atraviesa el borde.

En términos más concretos, el lado izquierdo de la igualdad, $\int_D \text{div}(\vec{F})$, cuantifica cuánto se “crea” o “destruye” del campo dentro del área: es una suma punto a punto de los nacimientos o desapariciones del flujo. Por su parte, el lado derecho, $\int_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$, mide directamente cuánto del campo está atravesando la frontera hacia el exterior. Así, si dentro de la región hay fuentes, el campo tiende a salir; si hay sumideros, tiende a entrar. Este teorema no solo tiene un profundo contenido conceptual —relacionando lo interno con lo externo, lo local con lo global—, sino que también es una herramienta práctica: convierte una integral doble sobre una región (a menudo más complicada) en una integral de línea a lo largo de su frontera (más manejable si se conoce el campo sobre ella).