Cálculo Integral[1]

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática

[1]basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Teorema de Green

Definición 1.0.1 [Curva de Jordan]

Una curva de Jordan C en $\mathbb{R}^2$ es la imagen de un camino cerrado y simple en $\mathbb{R}^2$, es decir, $C = Im(\gamma)$ con $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ continua, inyectiva en $[a,b)$ y $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Observación 1.0.1

Se puede demostrar que C es un homeomorfa a la circunferencia unitaria S^1.

Teorema 1.0.1 [Teorema de la curva de Jordan]

Toda curva de Jordan C en $\mathbb{R}^2$ divide al plano en dos regiones o componentes conexas, una acotada, denominada parte interior a C y otra no acotada, denominada parte exterior a C, siendo C la frontera común a ambas regiones. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = Int(C) \cup Ext(C) \cup C \text{ con } \begin{cases} Int(C) = \text{abierto conexo acotado} \\ Ext(C) = \text{ abierto conexo no acotado} \qquad \text{unión disjunta} \\ Fr(Int(C)) = C = Fr(Ext(C)) \end{cases}$$

Definición 1.0.2 [Conexión Simple]

Un conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es simplemente conexo si $\forall C$ curva de Jordan en U se tiene que $Int(C) \subset U$. Conceptualmente, esto se ve como que U no tiene agujeros.

Definición 1.0.3 [Orientación de una Curva de Jordan]

Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ curva de Jordan de clase C^1 a trozos. Se define la orientación positiva en C y se denota C^+ como el sentido de recorrido contrario a las agujas del reloj.
Conceptualmente, es el sentido de recorrido que deja la parte interior de C a la izquierda.

Teorema 1.0.2 [Teorema de Green]

Sean C curva de Jordan regular a trozos con parte interior $D = Int(C)$, $\vec{F} = (P,Q) : U \to \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset \overline{D} = D \cup C$. Entonces:

$$\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

donde C^+ representa la curva C con orientación positiva.

Demostración. Para el caso de dominios que son a la vez proyectables horizontalmente y verticalmente. Es decir, supongamos que

$$\overline{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x) \right\}$$

donde las funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1.
Entonces $C^+ = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ donde

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a,b] \quad \gamma_1'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0) \\ \gamma_2(t) = (b,t) \quad t \in [c_2, d_2] \quad \gamma_2'(t) = (0,1) \\ \gamma_3(t) = (t, g(t)) \quad t \in [a,b] \quad \gamma_3'(t) = (1, g'(t)) \neq (0,0) \\ \gamma_4(t) = (a,t) \quad t \in [c_4, d_4] \quad \gamma_4'(t) = (0,1) \end{cases}$$

Entonces,

- $$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_{C^+} Pdx + \int_{C^+} Qdy \implies \int_{C^+} Pdx = \int_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4} (P,0)$$
$$= \int_{t=a}^{t=b} \big\langle (P(t,f(t)),0),(1,f'(t)) \big\rangle \, dt + \int_{t=c_2}^{t=d_2} \langle (P(b,t),0),(0,1) \rangle \, dt$$
$$- \int_{t=a}^{t=b} \big\langle (P(t,g(t)),0),(1,g'(t)) \big\rangle \, dt - \int_{t=c_4}^{t=d_4} \langle (P(a,t),0),(0,1) \rangle \, dt$$
$$= \int_{t=a}^{t=b} P(t,f(t)) - P(t,g(t)) dt$$

- $$\int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy\, dx = -\int_{x=a}^{x=b} [P(x,y)]_{y=f(x)}^{y=g(x)} \, dx$$
$$= -\int_{x=a}^{x=b} P(x,g(x)) - P(x,f(x)) dx = \int_{x=a}^{x=b} P(x,f(x)) - P(x,g(x)) dx$$

Usando que $\overline{D}$ es verticalmente proyectable, hemos obtenido que $\int_{C^+} Pdx = -\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$.
Usando que $\overline{D}$ es horizontalmente proyectable, veamos que $\int_{C^+} Qdy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$.
Suponemos entonces que

$$\overline{D} = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \big\}$$

donde $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1.
Entonces $C^+ = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4$ donde

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = (\psi(t), t), \quad t \in [c,d] \quad \sigma_1'(t) = (\psi'(t), 1) \\ \sigma_2(t) = (t, d), \quad t \in [a_2, b_2] \quad \sigma_2'(t) = (1,0) \\ \sigma_3(t) = (\varphi(t), t), \quad t \in [c,d] \quad \sigma_3'(t) = (\varphi'(t), 1) \\ \sigma_4(t) = (t, c), \quad t \in [a_4, b_4] \quad \sigma_4'(t) = (1,0) \end{cases}$$

- $$\int_{C^+} Qdy = \int_{\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3+\sigma_4} (0,Q)$$
$$= \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\psi(t),t)), (\psi'(t),1) \rangle dt - \int_{t=a_2}^{t=b_2} \langle (0, Q(t,d)), (1,0) \rangle dt$$
$$- \int_{t=c}^{t=d} \langle (0, Q(\varphi(t),t)), (\varphi'(t),1) \rangle dt + \int_{t=a_4}^{t=b_4} \langle (0, Q(t,c)), (1,0) \rangle dt$$
$$= \int_{t=c}^{t=d} Q(\psi(t),t) - Q(\varphi(t),t) dt$$

- $$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=c}^{y=d} Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y) dy$$

□

Observación 1.0.2

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

puesto que C tiene área D.

Ejemplo

Vamos a verificar el Teorema de Green para el campo $\vec{F} = (x^2, xy)$ y la curva de Jordan C dada por el borde del cuadrado $[0,1]^2$.

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 \\ Q(x,y) = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0), & t \in [0,1] \quad \gamma_1'(t) = (1,0) \\ \gamma_2(t) = (1, t), & t \in [0,1] \quad \gamma_2'(t) = (0,1) \\ \gamma_3(t) = (t, 1), & t \in [0,1] \quad \gamma_3'(t) = (1,0) \\ \gamma_4(t) = (0, t), & t \in [0,1] \quad \gamma_4'(t) = (0,1) \end{cases}$$

- $$\int_{C^+} x^2 dx + xydy = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} x^2 dx + xydy$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \langle (t^2, 0), (1,0) \rangle dt}_{\gamma_1} + \underbrace{\int_0^1 \langle (1,t), (0,1) \rangle dt}_{\gamma_2} - \underbrace{\int_0^1 \langle (t^2, t), (1,0) \rangle dt}_{\gamma_3} - \underbrace{\int_0^1 \langle (0,0), (0,1) \rangle dt}_{\gamma_4}$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt + \int_{t=0}^{t=1} tdt - \int_{t=0}^{t=1} t^2 dt - 0 = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}$$

- $$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_D (y - 0) dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1} ydy \right) dx = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Verificar el teorema de Green para la circunferencia de radio 2 y centro en el origen, el campo $\vec{F} = (x - y, x + y)$.

$$\begin{cases} \gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \gamma(0) = \gamma(2\pi) \text{ para } \gamma(0) \neq \gamma(t) \ \forall t \in (0, 2\pi) \\ \gamma'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t)) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\overline{D} = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

- $$\int_{C^+} (x-y)dx + (x+y)dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (2\cos(t) - 2\sin(t), 2\cos(t) + 2\sin(t)), (-2\sin(t), 2\cos(t)) \rangle dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} (-4\cos(t)\sin(t) + 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) - 4\sin(t)\cos(t))dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 4dt = 8\pi$$

- $$\int_{\overline{D}} (1+1)dxdy = 2(\text{área}(\overline{D})) = 2(\pi 2^2) = 8\pi$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x,y) = (x^2+y^2, -3xy+xy^3+y^2)$ sobre la curva definida por el cuadrado $[0,1]^2$. Veamos dos maneras de calcular la integral de camino dada por $\int_\gamma F \cdot dr$.

1. Podemos describir la curva como producto de una concatenación de curvas: $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 \times \gamma_4$ donde:

$$\begin{cases} \gamma_1 \equiv (4t, 0) : t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \gamma_2 \equiv (1, 4t-1) : t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}) \\ \gamma_3 \equiv (3-4t, 1) : t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}) \\ \gamma_4 \equiv (0, 4-4t) : t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \implies$$

$$\int_\gamma F = \sum_{k=1}^{4} \int_{\frac{k-1}{4}}^{\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t)\rangle dt = \sum_{k=1}^{4} \int_{\frac{k-1}{4}}^{\frac{k}{4}} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t)\rangle dt =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \langle ((4t)^2 + 0, -3\cdot(4t)\cdot 0 + 4t \cdot 0^3 + 0\rangle, (4,0)\rangle dt +$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} \langle (t^2 + (4t-1)^2, -3(4t-1) + (4t-1)^3 + (4t-1)^2)\rangle, (0,4)\rangle dt +$$

$$+ \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} \langle (3-4t)^2 - 1^2, -3(3-4t) + (3-4t) + 1)\rangle, (-4,0)\rangle dt +$$

$$+ \int_{\frac{3}{4}}^{1} \langle (4-4t)^2, (4-4t)^2\rangle, (0,-4)\rangle dt$$

Y resolveriamos las integrales polinómicas de forma usual.

2. Otra forma de resolverlo es aplicando el teorema de Green:
Para ello veamos que el camino definido anteriormente sea una Curva de Jordan

$$\begin{cases} \text{Simple: } \forall t_1, t_2 \in (a,b) : t1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \\ \text{Cerrada: } \gamma(0) = \gamma(1) \\ \text{Regular: } ||\gamma'(t)|| \neq 0 \ \forall t \in [0,1] \end{cases} \implies \text{es una curva de Jordan}$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -3y + y^3 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \implies$$

$$\int_\gamma F = \int_0^1 \left(\int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 -3y^2 + y^3 - 3y^2\, dx = \left[\frac{-3y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{-3y^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4}$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ y el camino dado por:

$$\gamma(t) = (8 + 3\cos(2\pi t), 6 + 3\sin(2\pi t))$$

con $t \in [0,1]$.
Veamos cómo lo haríamos a través de la definición:

$$\int_\gamma F = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \left(\frac{-6 - 3\sin(2\pi t)}{200 + 48\cos(2\pi t) + 36\sin(2\pi t)}, \frac{8 + 3\cos(2\pi t)}{48\cos(2\pi t) + 36\sin(2\pi t) + 99} \right), (-6\sin(2\pi t), 6\cos(2\pi t)) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \frac{18 + 36\pi \sin(2\pi t) + 48\pi \cos(2\pi t)}{48\cos(2\pi t) + 36\sin(2\pi t) + 99} dt = \ldots = 0.$$

Observación 1.0.3

La integral anterior se resolvería haciendo uso del cambio de variable $u = tg(\frac{t}{2})$, el cual suele usarse para intgrales de la forma:

$$\int \frac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))} dt$$

Haciendo uso del Teorema de Green, y verificando en primer lugar que se cumple que γ es una Curva de Jordan:

$$\begin{cases} \gamma(t) \text{ está orientada positivamente} \\ \gamma(0) = \gamma(1) = (11, 6) \\ \|\gamma'(t)\| \neq 0 \ \forall t \in [0,1] \\ \begin{cases} 8 + 3\cos(2\pi t) = 8 + 3\cos(2\pi t') \\ 6 + 3\sin(2\pi t) = 6 + 3\sin(2\pi t') \end{cases} \iff t = 0, t' = 1 \implies \gamma \text{ es simple} \end{cases}$$

F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que podemos aplicar el Teorema de Green:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\implies \int\int_{int(\gamma)} 0 dxdy = 0$$

Ejemplo

Sea el campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ y el camino dado por $\gamma(t) = (\epsilon\cos(2\pi t), \epsilon\sin(2\pi t))$ con $t \in [0,1]$ y $\epsilon > 0$.
Este caso es un ejemplo de un campo vectorial y un camino en el que no es posible hacer uso del Teorema de Green ya que el origen es un punto de discontinuidad y por tanto F no es de clase C^1.

No obstante si se puede calcular a través de la definición:

$$\int_\gamma F = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1 \left\langle \left(\frac{-\epsilon \sin(2\pi t)}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon \cos(2\pi t)}{\epsilon^2} \right), (-2\pi\epsilon \sin(2\pi t), 2\pi\epsilon \cos(2\pi t)) \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^1 2\pi dt = 2\pi$$

Ejemplo

Sea γ-camino simple, cerrado, regular y orientada positivamente con 2 cortes en cada eje y tal que $(0,0) \in int(\gamma)$

Corolario 1.0.1

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto simplemente conexo y el campo vectorial $\vec{F} = (P,Q) : U \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Entonces son equivalentes:

1. *$\vec{F}$ es conservativo en $U \iff Pdx + Qdy$ es exacta en U, es decir, $\exists \varphi \in C^2(U)$ tal que $d\varphi = Pdx + Qdy$.*
2. *$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en $U \iff Pdx + Qdy$ es cerrada en U.*

Demostración.

- (1) $\implies$ (2): Es cierto siempre. Si $(P,Q) = \nabla\varphi$ con $\varphi \in C^2(U)$ entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
- (2) $\implies$ (1): Sea σ poligonal cerrada en U de lados paralelos a los ejes coordenados. Veamos que $\int_\sigma \vec{F} = 0$.
  Entonces $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ donde cada σ_j tiene imagen $Im(\sigma_j) = C_j$, curva de Jordan poligonal.

$$\int_\sigma \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \int_{(\partial D_j)^+} Pdx + Qdy = \sum_{j=1}^n \int_{D_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

□

Ejemplo

El resultado anterior puede fallar si U no es simplemente conexo. Sean $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ que es C^∞ en U.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

pero podemos ver que $\vec{F}$ no es conservativo en U ya que tomando $\gamma_r(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ con $r > 0$ y $t \in [0, 2\pi]$ tenemos que

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-r\sin(t)}{r^2}, \frac{r\cos(t)}{r^2} \right), (-r\sin(t), r\cos(t)) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

luego como γ_r es cerrada y $\int_{\gamma_r} \vec{F} \neq 0$ entonces $\vec{F}$ no es conservativo en U.
Sabemos que $\vec{F}$ no es conservativo, pero nos podemos preguntar si se puede encontrar un potencial para $\vec{F}$ en U.
Buscamos φ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} P = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

luego

$$\varphi = \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

Entonces φ es un potencial para $\vec{F}$ en $W = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$.

Teorema 1.0.3 [Teorema de Green General - Dominios Múltiplemente Conexos]

Sean $C_0, C_1, \ldots, C_m$ curvas de Jordan regulares a trozos en $\mathbb{R}^2$ tal que:

1. $C_j \subset Int(C_0)$ $\forall j = 1, \ldots, m$
2. $C_i \subset Ext(C_j)$ $\forall i, j = 1, \ldots, m$ *con* $i \neq j$

Sean $D = Int(C_0) \cap (Ext(C_1) \cup \ldots \cup Ext(C_m))$ y $\vec{F} = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset \overline{D} = D \cup C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m$. Entonces:

$$\int_{(\partial D)^+} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

donde $(\partial D)^+ = C_0^+ - \sum_{j=1}^m C_j^+$.

Definición 1.0.4 [Divergencia de un Campo Vectorial]

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \to \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1. Se define la divergencia de $\vec{F}$ como:

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Observación 1.0.4

Sea el vector $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$, entonces tenemos dos vectores ortogonales a $\vec{u}$ que son $\vec{v} = (u_2, -u_1)$ y $\vec{w} = (-u_2, u_1)$, y que se obtienen rotando $\vec{u}$ 90 grados en sentido horario y antihorario respectivamente.

Definición 1.0.5 [Vector Normal Unitario Exterior]

Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ curva de Jordan regular a trozos en $D = Int(C)$. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una parametrización *regular a trozos de C que induce la orientación positiva C^+. Para cada $t_0 \in [a,b]$, excepto una cantidad finita de ellos, consideramos el vector tangente a γ en $\gamma(t_0)$:*

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$$

Se define entonces el vector normal unitario exterior a C en $\gamma(t_0)$ como:

$$\vec{n}(\gamma(t_0)) = \left(\frac{\gamma_2'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, -\frac{\gamma_1'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right)$$

Teorema 1.0.4 [Teorema de la Divergencia]

Supongamos que tenemos $C \subset \mathbb{R}^2$ curva de Jordan regular a trozos con $D = Int(C)$ y sea $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \to \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset \overline{D} = D \cup C$. Entonces:

$$\int_D div(\vec{F}) = \int_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal unitario exterior a C^+.

Demostración. Consideramos el campo vectorial $\vec{G} = (-F_2, F_1) = (P, Q)$ y aplicamos el Teorema de Green:

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{C^+} Pdx + Qdy$$

- $$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dxdy = \int_D div(\vec{F}) dxd$$

- $$\int_{C^+} \underbrace{\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle}_{\text{campo escalar}} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \vec{n}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle (F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t))), (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) \rangle dt$$

$$= \int_a^b -F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) dt = \int_{C^+} Pdx + Qdy$$

□

2 Superficies paramétricas

Definición 2.0.1 [Superficie Paramétrica]

Una parametrización de una superficie paramétrica S en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 definida en un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

$$Im(\varphi) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in U\} = S$$

Diremos que la parametrización φ es regular cuando la pareja de vectores $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\}$ es linealmente independiente en todo punto de U. Equivalentemente, cuando el vector normal asociado a φ es no nulo en todo punto de U:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$$

En este caso, el plano tangente a la superficie en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ tiene como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u_0, v_0) + \lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = \varphi_2(u_0, v_0) + \lambda\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z = \varphi_3(u_0, v_0) + \lambda\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Dada la superficie $z = x^2 + y^2$, podemos parametrizarla con $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2x\vec{e}_3 + 2y\vec{e}_2 \neq (0, 0, 0)$$

Ejemplo

Superficies explícitas: Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces la gráfica de f es una superficie regular con parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$.
Veamos que $\vec{N}_\varphi \neq (0, 0, 0)$:

$$\vec{N}_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_3 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_2 \neq (0, 0, 0)$$

$$Im(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

Ejemplo

Dado el cilindro de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1$, buscamos una parametrización de la superficie. Tomando la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, 1)$$

entonces vemos que $\underbrace{x^2 + y^2}_{1} = r^2 \implies r = 1$.

Por tanto, obtenemos que nuestra parametrización es:

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

Calculemos el vector normal:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \neq (0,0,0)$$

Ejemplo

Tomando el cilindro $x^2 + y^2 = 1, \; 0 < z < 1$ del ejemplo anterior, podemos parametrizarlo de otra forma.
Consideramos el siguiente conjunto:

$$U = \{(u,v) : 1 < \sqrt{u^2+v^2} < 2, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

entonces definimos nuestra parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ sobre este conjunto tal que

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sqrt{u^2+v^2} - 1 \right)$$