

Cálculo Integral¹

Segundo Cuatrimestre 2025

Pau Frangi Mahiques, Pablo Pardo Cotos y Diego Rodríguez Cubero
*Ciencias Matemáticas e
Ingeniería Informática*

¹basado en la apuntes de Jesús Jaramillo

Contents

1 Teorema de Stokes. Teorema de la divergencia de Gauss

1.1 Teorema de Stokes

Definición 1.1.1 [Rotacional]

Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define el rotacional de $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ como:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Observación 1.1.1

En este caso, $\text{rot}(\vec{F})$ es un campo vectorial continuo definido en A .

Ejemplo

Sea $(P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Consideramos $A = U \times \mathbb{R}$ y el campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, 0)$. Entonces el rotacional de \vec{F} es:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad \text{"la derivación del teorema de Green"}$$

Teorema 1.1.1 [Teorema de Stokes]

Sea (S, \vec{n}) una superficie orientada y regular a trozos, y sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $U \supset S$. Entonces se cumple la siguiente igualdad:

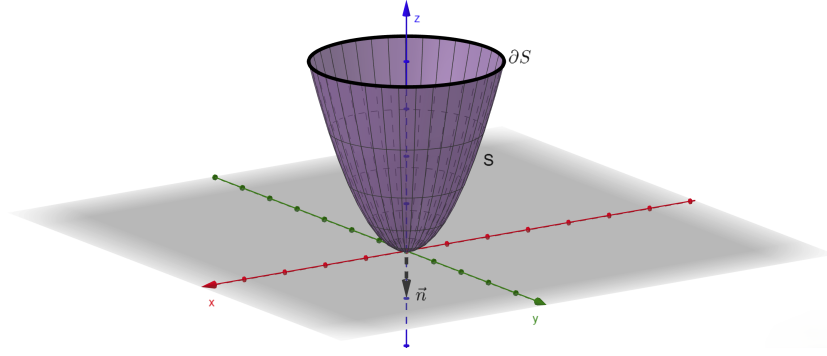
$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F}$$

donde ∂S tiene la orientación inducida por \vec{n} .

Ejemplo

Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$ con la norma exterior \vec{n} y el campo vectorial $\vec{F} = (yz, -xz, z)$. Verificamos el teorema de Stokes.

Tenemos que $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 = 4\}$, que es una circunferencia de radio 2 en el plano $z = 4$. Fijémonos que \vec{n} induce la orientación negativa en la curva $C^- = \partial S$.



El rotacional de \vec{F} es:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Consideramos la parametrización natural $\varphi : D \rightarrow S$ de S dada por:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{donde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Entonces la normal a la superficie S es:

$$\vec{N}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

La normal \vec{N}_φ apunta hacia arriba en el punto $(0, 0, 0)$, luego tenemos una normal interior.

- Calculamos el rotacional de \vec{F} en S por medio de la parametrización φ :

$$\begin{aligned} \int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) &= - \int_D \langle \vec{N}_\varphi, \text{rot}(\vec{F}) \circ \varphi(x, y) \rangle dx dy = - \int_D \langle (-2x, -2y, 1), (x, y, -2(x^2 + y^2)) \rangle dx dy \\ &= \int_D 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 dx dy = \int_D 4(x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= 4 \cdot 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 4 \cdot 2\pi \cdot 4 = 32\pi \end{aligned}$$

- Consideramos la parametrización positiva γ de la curva ∂S dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

y calculamos la integral de línea del campo \vec{F} sobre la curva ∂S :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{C^-} \vec{F} = - \int_{\gamma} \vec{F} = - \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= - \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (8 \sin(t), -8 \cos(t), 4), (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} 16 dt = 16 [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 16(2\pi - 0) = 32\pi \end{aligned}$$

En efecto, vemos que las integrales coinciden de acorde al teorema de Stokes.

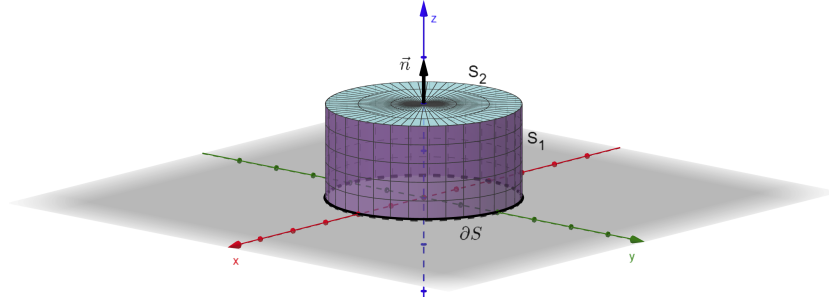
Ejemplo

Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 2]\} \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con la norma exterior \vec{n} y el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z)$. El borde de S es:

$$\partial S = C_0^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$



Calculamos el rotacional del campo \vec{F} :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 1) = (0, 0, 0)$$

Consideramos la parametrización γ de la curva C_0 dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi]$$

que tiene orientación positiva. Además, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$.

- Calculamos la integral del campo $\text{rot}(\vec{F})$ sobre la superficie S :

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{(S_1, \vec{n}_1)} \vec{0} = 0$$

- Hacemos la integral de línea del campo \vec{F} sobre la curva C_0^+ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (\sin(t), \cos(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t) - \sin^2(t) dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos(2t) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Vemos que el teorema de Stokes se cumple, ya que las integrales son iguales.

Ejemplo

Consideramos el campo vectorial $\vec{F} = (yz, -xz, z)$. Veamos el rotacional de \vec{F} :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

Supongamos que tenemos una superficie S cualesquiera cuyo borde ∂S sea la curva C_0^+ del ejemplo anterior. Entonces tenemos que:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{C_0^+} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle (0, 0, 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt = 0$$

Observación 1.1.2

Si S es una superficie cerrada, es decir, $\partial S = \emptyset$, entonces se tiene que:

$$\int_{(S, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = \int_{\partial S} \vec{F} = 0$$

1.2 Geometría del Rotacional

Ejemplo

Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo de velocidades de un fluido en \mathbb{R}^2 . Las trayectorias son curvas $\gamma : I \rightarrow U$ con $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$.

Ejemplo

Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 .

Consideremos $p \in U$ y $r > 0$, siendo D_r el círculo de centro p y radio r , con frontera $C_r = \partial D_r$.

Sea \vec{u} un vector unitario de \mathbb{R}^3 perpendicular al plano que contiene a D_r , entonces:

$$\langle \text{rot}(\vec{F})(p), \vec{u} \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r^+} \vec{F}$$

Donde C_r^+ denota a C_r con la orientación comparativa a la de \vec{u} , y donde esta igualdad representa la "circulación por unidad de área" del campo \vec{F} .

Demostración.

$$\int_{C_r^+} \vec{F} = \int_{(D_r, \vec{n})} \text{rot} \vec{F} = \int_{D_r} \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle = \int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle + \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle$$

De donde pasamos a:

$$\int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle_{\text{constante}} = \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \cdot \text{área}(D_r)$$

Entonces:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < r < \delta \implies \|\text{rot} \vec{F}(x, y, z) - \text{rot} \vec{F}(p)\| < \epsilon \quad \forall (x, y, z) \in D_r \implies$$

$$\implies \left| \int_{D_r} \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} \left| \langle \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| \leq \int_{D_r} \|\text{rot} \vec{F} - \text{rot} \vec{F}(p)\| \leq \epsilon \cdot \text{área}(D_r)$$

Luego:

$$\left| \frac{1}{\text{área}(D_r)} \int_{C_r^+} \vec{F} - \langle \text{rot} \vec{F}(p), \vec{u} \rangle \right| < \epsilon \quad \forall 0 < r < \delta$$

□

Definición 1.2.1

Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Se dice que \vec{F} es irrotacional en A si $\text{rot}(\vec{F}) \equiv 0$ en A .

Lema 1.2.1

Si \vec{F} es un campo de clase C^1 , y es conservativo en $A \implies$ es irrotacional en A .

Demostración. Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\vec{F} = \nabla\varphi$, es decir, $\vec{F} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$, entonces φ es de clase C^2 en A y, aplicando el teorema de Schwarz, tenemos que:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \right) = (0, 0, 0)$$

□

Teorema 1.2.1

Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo, y sea $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. \vec{F} es conservativo en U .
2. $\int_{\sigma} \vec{F} = 0$, $\forall \sigma$ camino triangular en U .
3. \vec{F} es irrotacional en U , es decir, $\text{rot}(\vec{F}) \equiv 0$ en U .

Demostración. Veamos las implicaciones:

1 \implies 2 Ya está probado por la caracterización de los campos conservativos.

2 \implies 1 Fijemos un $p \in U$, para cada $x \in U$ definamos $\varphi(x) = \int_{[p,x]} \vec{F}$.

Veamos que φ es un potencial para \vec{F} : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, para ello veamos si $F_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{[p, x+h\vec{e}_i]} \vec{F} - \int_{[p, x]} \vec{F} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(x+h\vec{e}_i) - \varphi(x))$$

Tenemos que por 2 si consideramos el triángulo T de vértices p , x y $x+h\vec{e}_i$, tenemos que:

$$\int_{[p,x]+[x,x+h\vec{e}_i]+[x+h\vec{e}_i,p]} \vec{F} = 0 \implies \int_{[p,x+h\vec{e}_i]} \vec{F} - \int_{[p,x]} \vec{F} = \int_{[x,x+h\vec{e}_i]} \vec{F}$$

Luego:

$$\frac{1}{h} \int_{[x,x+h\vec{e}_i]} \vec{F} = \frac{1}{h} \int_{t=0}^{t=1} \langle \vec{F}(x+t\vec{e}_i), h\vec{e}_i \rangle dt = \frac{1}{h} \cdot h \int_{t=0}^{t=1} F_i(x+t\vec{e}_i) dt \rightarrow F_i$$

Así tenemos que 1 \iff 2.

1 \implies 3 Se demuestra con el lema anterior.

3 \implies 2 Sea $T \subset U$ un triángulo, y sea $\sigma = \partial T$:

$$\int_{\sigma} \vec{F} = \int_{(T, \vec{n})} \text{rot}(\vec{F}) = 0$$

□

Ejemplo

Es importante que U sea convexo:

Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \neq 0\}$ y $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) = (P, Q, 0)$$

Así tenemos el siguiente rotacional

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$$

El campo \vec{F} es por tanto irrotacional en U , pero \vec{F} no es conservativo:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0), \quad t \in [0, 2\pi] \implies \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{t=0}^{t=2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left\langle \left(\frac{-\sin(t)}{1}, \frac{\cos(t)}{1}, 0 \right), (-\sin(t), \cos(t), 0) \right\rangle dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Demostrando así que \vec{F} no es conservativo.

Ejemplo

Sea el ejercicio de Nash:

Encontrar $X \subset \mathbb{R}^3$ tal que si denotamos:

$$V = \{ \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \text{rot}(\vec{F}) = 0 \} \quad W = \{ \vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \text{rot}(\vec{F}) \neq 0 \}$$