

Análisis práctico y teórico de un coche/cohete

Física BI NS
Trabajo de Evaluación Interna

Pau Cantos

Curso 2018-2019-2020

Índice

1	Introducción	1
1.1	Pregunta de investigación	1
1.2	Descripción del experimento	2
1.2.1	Material	2
1.2.2	Procedimiento	2
1.3	Variables experimentales	3
2	Predicción teórica	3
2.1	Antecedentes	3
2.2	Variables y constantes que intervienen en el cálculo	3
2.3	Técnica de pasar a diferenciales	4
2.4	Parámetros del objeto	4
2.4.1	Geometría del globo	4
2.4.2	Balance de masas	4
2.4.3	Presión en el interior del globo	5
2.4.4	Energía elástica almacenada	5
2.5	Dinámica del desinflado	6
2.6	Cinemática de un objeto que pierde masa	6
3	Análisis	7
3.1	Resultados	7
3.2	Comparación	7
3.3	Evaluación	7
A	Demostraciones	8
A.1	Fórmula 2.1	8
A.2	Fórmula 16	9
A.3	Fórmula 2.4	9
B	Ecuación diferencial (26)	10
B.1	Resolución analítica	10
B.2	Aproximación despreciando la variación de T_1 o T_2	10
B.2.1	Despreciando la variación de T_1	10
B.2.2	Despreciando la variación de T_2	11
B.3	Aproximación por métodos numéricos	11
C	Equilibrio total de la esfera por juego presión-tensión	11

1 Introducción

1.1 Pregunta de investigación

Pregunta 1.1. *Qué distancia recorre un vehículo propulsado por un globo, en función del volumen o la presión de aire inicial que introducimos en este. Podemos predecir su ecuación del movimiento?*

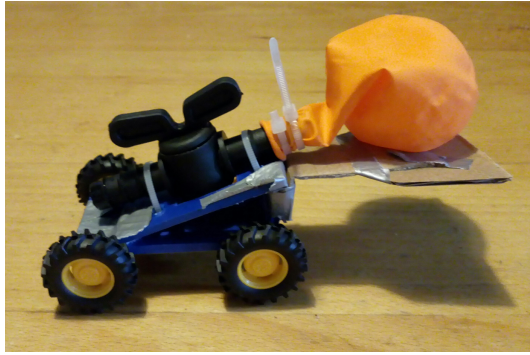


Figure 1: Fotografía del coche propulsado por aire usado en el experimento.

1.2 Descripción del experimento

1.2.1 Material

El objeto protagonista de nuestro experimento es un vehículo propulsado por un flujo de aire producido por el efecto de desinflarse de un globo en su parte anterior. Para generalizar llamaremos *combustible* al fluido que almacena el globo¹ que en nuestro experimento será aire. La figura 1 nos permite hacernos una mejor idea: Se puede ver bien que el vehículo consiste de 4 ruedas negras y amarillas, dos delanteras y 2 traseras, soportadas por una estructura triangular azul. Encima de esta se encuentra un tubo de plástico negro con una válvula. En un extremo de este hay la abertura por donde saldrá el chorro de aire propulsor y en el otro se encuentra la boquilla del globo naranja bien enganchada de forma que no se puede escapar el aire por este punto. Finalmente, el globo se apoya sobre un cartón enganchado a la parte delantera de forma que no cae al suelo. Este es necesario ya que sino al globo podría tocar o no las ruedas haciéndolo tropezar en la parte final del recorrido, cosa que hacia las medidas mucho menos regulares.

Por otro lado tenemos una macha de pie, que se puede ver en la figura 2: El tubo negro conectado



Figure 2: Fotografía de la macha de pie usada en el experimento.

a la macha tiene el otro extremo con una boquilla que se puede encajar con la apertura del cubo en el vehículo. Así, al presionar la superficie plana, todo el aire en la cavidad “roja” se transfiere dentro de globo y esta se infla de nuevo con el aire exterior.

Finalmente se necesita una cinta métrica y un suelo liso con un espacio de unos 10m mínimo y con una raya de salida (se puede pintar con tiza o cinta adhesiva), en mi caso usé el pabellón del colegio.

1.2.2 Procedimiento

- Conectar el tubo de la macha con el del coche.
- Manchar n veces.
- Cerrar la válvula.
- Desconectar el tubo de la macha.
- Colocar el vehículo en con las ruedas delanteras ante la raya de salida.
- Tapar la apertura con el dedo y abrir la válvula.
- Destapar la apertura apartando la mano para que el vehículo siga su trayectoria hasta frenar por completo.
- Medir con la cinta la distancia desde la raya de salida hasta las ruedas delanteras, si se tuerce de la línea recta mido en diagonal.
- Repetir los mismos pasos 7 veces.
- Repetir los mismos pasos para n de 1 a 10.

¹Aunque no sea realmente un combustible, es una analogía con un cohete.

1.3 Variables experimentales

Dependientes	Distancia recorrida por el vehículo: x_f
Independientes	Número de manchadas: n
Controladas	Volumen de una manchada V_1 Masa del vehículo: M

Table 1: Tabla de variables del experimento principal

2 Predicción teórica

2.1 Antecedentes

Justamente mientras estaba acabando esta parte del trabajo, el 12 de agosto de 2019 se publicó un artículo muy técnico y exacto que resuelve la cuestión de la dinámica de fluidos en el interior de un globo hinchándose o deshinchándose: [3]. Lo que hago aquí de todos modos es, menos exacto y técnico pero más comprensible y al nivel de bachillerato, llegando a conclusiones similares. También hay una diferencia importante que no permite que el resultado sea totalmente aplicable que es que se asume que el fluido es incompresible, lo cual no es del todo cierto para aire.

2.2 Variables y constantes que intervienen en el cálculo

Nota 2.1. *Todas las magnitudes clasificadas como variables (y) siguientes son en realidad funciones dependientes del tiempo (t). Entonces, para cada una de ellas $y(t)$ es el valor de la magnitud en el tiempo t. También definimos y_0 como el valor de la magnitud en situación estática del vehículo (antes de hinchar el globo), y_1 en situación de antes del arranque (con el globo hinchado) e y_f al final del experimento. Notación \dot{y} significa derivada temporal (con respecto al tiempo) de y ($\dot{y} = \frac{dy}{dt}$) y similarmente \ddot{y} para la doble derivada.*

Variables

- Tiempo: t (poniendo $t_1 = 0$).
- Posición del vehículo (una dimensión): x (poniendo $x_1 = 0$).
- Velocidad del vehículo: $v := \dot{x}$.²
- Aceleración del vehículo $a := \dot{v} = \ddot{x}$.
- Masa del vehículo: M .
- Masa del combustible interior al globo: m .
- Cambio de masa del globo: $q := \dot{M}$.
- Volumen del globo: V .
- Superficie del globo S .
- Radio del globo: r .
- Coeficiente de expansión del globo: $\lambda := \frac{r}{r_0}$.
- Momento del vehículo: p_v .
- Momento total del aire expulsado: p_e .
- Velocidad de expulsión del aire respecto al vehículo: u .
- Volumen del globo: V .
- Superficie del globo: S .

Constantes:

- Fuerza de rozamiento dinámico del vehículo con el agua y aire: F .³
- Presión atmosférica: P_0 .
- Superficie de la boquilla del globo: s .
- Densidad del combustible: ρ .

²La notación $:=$ implica definición.

³Sí, la consideramos constante.

2.3 Técnica de pasar a diferenciales

Existe una técnica, la cual llamo pasar a diferenciales que utilizaré repetidas veces y por esto la introduzco ahora:

Empiezo suponiendo que en un intervalo de tiempo Δt ciertas magnitudes y_1, y_2, \dots, y_n ($n \in \mathbb{N}$) dependientes del tiempo varían en $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n$, respectivamente. Luego derivó cierta ecuación sobre las variables anteriores. Entonces dividiendo, entre Δt y tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$, si las variables y_i son derivables como funciones del tiempo, se tiene:

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_i(t + \Delta t) - y_i(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta t} \quad (1)$$

A la practica, esto hace que las Δ 's se conviertan en d 's. Además, por ejemplo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i \Delta y_j}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y_i \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y_j}{\Delta t} \right) = 0 \cdot \dot{y}_j = 0 \quad (2)$$

así que más de un incremento o diferencial multiplicando colapsan a 0.

2.4 Parámetros del objeto

2.4.1 Geometría del globo

Siendo $r_0 = \text{ctt}$,⁴ se tiene:

$$\lambda = \frac{r}{r_0} \propto r \quad (3)$$

Asumiremos que el globo es esférico, lo cual, descontando la boquilla es una buena aproximación ya que de por si un cuerpo deformado por presión interior tenderá a la forma esférica, reduciendo así su superficie a un mismo volumen. Luego se tiene las siguientes ecuaciones:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \lambda^3 = V_0 \lambda^3 \propto \lambda^3 \quad (4)$$

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi r_0^2 \lambda^2 = S_0 \lambda^2 \propto \lambda^2 \quad (5)$$

2.4.2 Balance de masas

La masa de aire en el interior del globo es:

$$m = \rho V = \rho V_0 \lambda^3 = m_0 \lambda^3 \quad (6)$$

Luego nótese también que:

$$\frac{dm}{dy} = 3m_0 \lambda^2 = \rho S_0 r_0 \lambda^2 \propto \lambda^2 \quad (7)$$

La masa total del vehículo es:

$$M = M_0 + m \quad (8)$$

Si en un pequeño intervalo de tiempo Δt , la cantidad de masa que pasa por la boquilla del globo es $-\Delta m$ en un volumen $-\Delta V$. Luego de (6) se tiene:

$$\Delta m = \Delta(\rho V) \stackrel{\rho=\text{ctt}}{=} \rho \Delta V \quad (9)$$

Pero el volumen ΔV es un pequeño prisma de combustible de sección s y longitud Δz luego:

$$-\Delta V = s \Delta z \quad (10)$$

Juntando (8), (9) y (10) y pasando a diferenciales se tiene:

$$q = \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}(M_0 + m) \stackrel{M_0=\text{ctt}}{=} 0 + \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = -\rho s \frac{dz}{dt} = -\rho s u \propto -u \quad (11)$$

⁵ Por otro lado usando (7) y regla de la cadena se tiene:

$$q = \frac{dm}{dt} = \frac{d\lambda}{dm} \cdot \frac{dt}{d\lambda} = 3m_0 \lambda^2 \dot{\lambda} \propto \lambda^2 \dot{\lambda} \quad (12)$$

En resumen:

$$-u \propto -\rho s u = q = 3m_0 \lambda^2 \dot{\lambda} \propto \lambda^2 \dot{\lambda} \quad (13)$$

$$u = -\frac{3m_0}{\rho s} \lambda^2 \dot{\lambda} = -\frac{S_0}{\rho s} r_0 \lambda^2 \dot{\lambda} \quad (14)$$

⁴Usamos el símbolo $X \propto Y$ para indicar $X = AY$ para cierta constante $A > 0$, es decir, es proporcional.

⁵Esto es como una versión de la ecuación de continuidad

2.4.3 Presión en el interior del globo

Un material deformado tiene una tensión superficial característica. La tensión superficial en un punto de la superficie es una magnitud τ ($[\tau] = N/m = m \cdot Pa$ en S.I.) que representa la fuerza elástica ejercida por el material ya deformado por unidad de longitud. Es decir un material que ejerce una fuerza F repartida en toda una longitud L tiene tensión superficial $\tau = F/L$. Se conoce el siguiente resultado:

Fórmula 2.1 (Caso particular de la ley de Laplace). *Supóngase que una esfera hueca de radio r tiene una tensión superficial τ , homogénea en toda la superficie (por simetría esférica). Luego la presión en el interior del globo en relación a la exterior (P_0) es:*

$$P = P_0 + \frac{2\tau}{r}$$

Para ver la demostración de la fórmula consultar el anexo A.1.

Pero con esto aún no hemos determinado la presión en el interior del globo en función del radio dado que no sabemos como varia τ con la expansión de la goma elástica. Una aproximación bastante buena, para radios grandes, es asumir que es constante. Así simplemente ΔP es inversamente proporcional a r . Una exhaustiva búsqueda en algunos artículos de cierto prestigio muestra que el modelo más aceptado para en este caso es el de “James y Guth de la relación tensión superficial-expansión”, que dice lo siguiente:

Fórmula 2.2. *Un trozo de material de longitud $L_{\hat{u}}$ estirado $\lambda_{\hat{u}} := (L_{\hat{u}}/L_{\hat{u}}^0)$ en la dirección \hat{u} produce un tensión elástica en esta dirección:*

$$\tau_{\hat{u}} = \frac{F_{\hat{u}}}{L_{\hat{u}}} = C_1(1 - C_2 p \lambda_{\hat{u}}^{-2})$$

Donde C_1 y C_2 son constantes y p es la presión interna del material.⁶

Fórmula 2.3. *Aplicando este modelo se pude deducir que la tensión superficial tangente a la goma del globo varia como:*

$$\tau(\lambda) \propto 1 - \lambda^{-6} \quad (15)$$

Y por lo tanto de la fórmula 2.1

$$\Delta P \propto \frac{1 - \lambda^{-6}}{\lambda} = \lambda^{-1} - \lambda^{-7} =: f(\lambda) \quad (16)$$

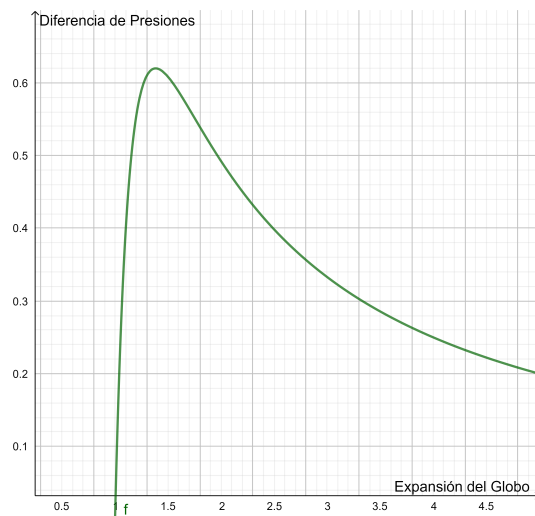


Figure 3: Gráfica de la función $f(\lambda) = \lambda^{-1} - \lambda^{-7}$ que indica la relación entre la expansión del globo y la presión interior de este en estado de equilibrio con la boquilla tapada.

Si nos fijamos este se parece a el modelo de $\tau = ctt$, que correspondería a menospreciar el término λ^{-7} , pero ofrece una mejora substancial: $\Delta P = 0$ para $\lambda = 1$, que es lo que debe suceder, la presión decrece con el crecimiento del radio pero solo a partir de $\lambda = 7^{\frac{1}{6}} \approx 1.38$.⁷

El razonamiento completo para derivar (15) se puede ver en el anexo A.2.

2.4.4 Energía elástica almacenada

Consideremos el trabajo de la presión que se hace al hinchar un globo. Si en un intervalo de tiempo Δt , todos los puntos de la estrecha pared de la superficie del globo se mueven una distancia Δr , el incremento de trabajo total será:

$$\Delta W = \iint_S \vec{\Delta r} \cdot d\vec{F}_P = \iint_S \Delta r \Delta P dS = S \Delta P \Delta r \propto \lambda^2 f(\lambda) \Delta \lambda = (\lambda - \lambda^{-5}) \Delta \lambda \quad (17)$$

⁶De hecho su modelo cuantifica estas constantes pero para nuestro trabajo no nos interesan.

⁷Esto viene de analizar la derivada de $f(\lambda)$ ($f'(\lambda) = -\lambda^{-2} + 7\lambda^{-8}$) que es positiva para $\lambda < 7^{\frac{1}{6}}$ y negativa después (se tiene un máximo en el punto $(7^{\frac{1}{6}}, 6 \cdot 7^{-\frac{7}{6}})$).

Pasando a diferenciales e integrando desde $\lambda_0 = 1$ hasta un λ genérico de expansión:

$$dW \propto (\lambda - \lambda^{-5})d\lambda \quad (18)$$

$$U := \int_0^W dW \propto \int_1^\lambda (\lambda - \lambda^{-5})d\lambda = \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^{-4}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \propto 2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3 \quad (19)$$

2.5 Dinámica del desinflado

Para obtener finalmente la variación del globo con el tiempo usaremos la conservación de la energía mecánica del sistema. La energía elástica se invierte en el movimiento del material del globo en sí, más el del aire que sale disparado. Es decir, hay dos energías cinéticas a contemplar: T_1 , la del material del globo y T_2 , la del aire. La total del sistema es $T = T_1 + T_2$. Con esto se tiene:

$$E = U + T = \text{cte} \quad (20)$$

Que es equivalente a decir $\Delta E = 0$ o en diferenciales: $\frac{dE}{d\lambda} = 0$. Conocemos la variación $\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dW}{d\lambda}$ del apartado anterior, usando (18):

$$\frac{dU}{d\lambda} \propto \lambda - \lambda^{-5} \quad (21)$$

Dado que la velocidad de los puntos en la pared del globo es $\frac{dr}{dt} \propto \dot{\lambda}$:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_g \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m_g r_0^2 \dot{\lambda}^2 \propto \dot{\lambda}^2 \quad (22)$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_g r_0^2 \dot{\lambda}^2 = m_g r_0^2 \dot{\lambda} \frac{d\dot{\lambda}}{dt} = m_g r_0^2 \dot{\lambda} \ddot{\lambda} \propto \dot{\lambda} \ddot{\lambda} \quad (23)$$

Finalmente, la variación ΔT_2 de la energía cinética del aire se debe a la velocidad adquirida por la masa desprendida $-\Delta m$ a velocidad u , de modo que:

$$\Delta T_2 = -\frac{1}{2}\Delta m u^2 \quad (24)$$

y pasando a diferenciales y usando (13) y (14):

$$\frac{dT_2}{d\lambda} = -\frac{1}{2}u^2 \frac{dm}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3m_0}{\rho s} \lambda^2 \dot{\lambda} \right)^2 (3m_0 \lambda^2) = -\frac{1}{2} \frac{(3m_0)^3}{(\rho s)^2} \lambda^6 \dot{\lambda}^2 = -\frac{(3m_0)^3}{m_g (\rho r_0 s)^2} \lambda^6 T_1 \propto -\lambda^6 T_1 \quad (25)$$

Juntando todos los resultados en la conservación de la energía (20) derivada respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\lambda} &= \frac{dU}{d\lambda} + \frac{dT_1}{d\lambda} + \frac{dT_2}{d\lambda} = B(\lambda - \lambda^{-5}) + \frac{dT_1}{d\lambda} + A\lambda^6 T_1 = 0 \\ \frac{dT_1}{d\lambda} - A\lambda^6 T_1 + B(\lambda - \lambda^{-5}) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

siendo $A := \frac{(3m_0)^3}{m_g (\rho r_0 s)^2} = \frac{\rho S_0^3 r_0}{m_g s^2}$ y B ciertas constantes positivas que habrá que determinar. De todos modos, esto ya es una ecuación diferencial lineal T_1 con coeficientes no constantes sobre la variable λ junto con $T_1(\lambda_1) = 0$ como condición de contorno.

A parte, nótese que derivando E respecto del tiempo en vez de de λ y dividiendo por $\dot{\lambda}$ saldría:

$$\ddot{\lambda} - A\lambda^6 \dot{\lambda}^2 + B(\lambda - \lambda^{-5}) = 0 \quad (27)$$

que se parece a la ecuación diferencial (2.22) del artículo mencionado [3] con $R \equiv \lambda$, $T \propto t$, $\frac{dR}{dT} < 0$ y despreciando algunos términos.

Resolviendo esta ecuación diferencial (26) deberíamos obtener T_1 en función de λ y después de la relación (22) (otra ecuación diferencial) obtendríamos λ en función del tiempo t . Este proceso es cuanto menos trivial y se explica en el anexo B. Así, de ahora en adelante asumiremos que tenemos $\lambda(t)$, es decir, la dinámica del desinflado, para continuar ya que aun tenemos que juntarlo con el movimiento del vehículo.

2.6 Cinemática de un objeto que pierde masa

Fórmula 2.4. *Un objeto que pierde masa M a una razón de cambio $q := \dot{M}$ expulsada a una velocidad u con respecto a este. Cumple la ecuación del movimiento:*

$$F = Ma + uq$$

, donde F es el sumatorio de fuerzas externas que se le aplica y a la aceleración.

Una explicación detallada del razonamiento para derivar esta fórmula 2.4 junto con referencias a otros artículos se puede encontrar en el anexo A.3.

Aplicada a nuestro problema la ecuación es idéntica solo que F es $-F$, la constante de rozamiento que es la única fuerza externa aplicada al vehículo. Luego se puede reescribir usando (13) y (14) como:

$$Ma = -uq - F = -\left(-\frac{S_0}{s}r_0\lambda^2\dot{\lambda}\right)(\rho S_0r_0\lambda^2\dot{\lambda}) - F = \frac{\rho S_0^2r_0^2}{s}\lambda^4\dot{\lambda}^2 - F = \frac{(3m_0)^2}{\rho s}\lambda^4\dot{\lambda}^2 - F \quad (28)$$

que se puede integrar respecto t para conseguir $v(t)$ teniendo λ y por tanto también $\dot{\lambda}$ y uq en función del tiempo desde $t_1 = 0$ hasta el tiempo t_2 tal que $\lambda = 1$ que deja de impulsar el aire. Luego $uq = 0$ y solo afecta $-F$ hasta el tiempo t_f tal que $v(t_f) = v_f = 0$. Luego se integrará de nuevo respecto a t desde $t_1 = 0$ hasta t_f para encontrar $x(t_f) = x_f$.

3 Análisis

3.1 Resultados

3.2 Comparación

3.3 Evaluación

A Demostraciones

A.1 Fórmula 2.1

Centramos la esfera de radio r en el origen siendo pues el conjunto de puntos: $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Consideremos el balance de fuerzas sobre el hemisferio superior ($S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \subset D$):

Por un lado hay las fuerzas que lo empujan en cada punto de su superficie debido a la diferencia de presiones, que se resumen en una resultante \vec{F}_P ⁸, y por el otro las fuerzas que tiran hacia abajo por el contorno del hemisferio ($\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$,⁹ que es una curva cerrada, el "ecuador") debidas a la tensión superficial, que se resumen en una resultante \vec{F}_t . Si estas dos se deben cancelar:

$$\vec{F}_P = -\vec{F}_t \quad (29)$$

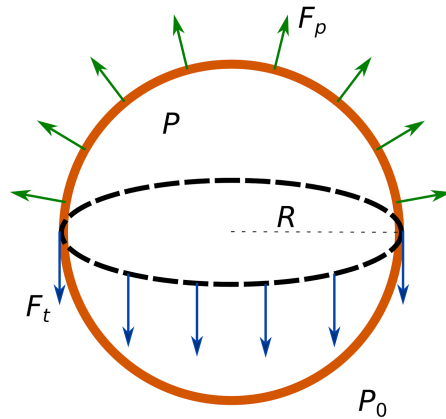


Figure 4: Esta imagen ilustra el razonamiento del balance y cálculo de fuerzas en el hemisferio.

La primera se calcula como suma vectorial de infinitos diferenciales de fuerza $d\vec{F}_P$, cada uno de ellos actuando sobre un diferencial de superficie $d\vec{S}$ y directamente proporcional a la diferencia de presión en ese sitio: $\Delta P := P - P_0$, es decir $d\vec{F}_P = \Delta P d\vec{S}$, donde la dirección de $d\vec{S}$ es normal a la superficie y su modulo es dS , es decir $d\vec{S} = \hat{n} dS$, donde \hat{n} es el vector normal a la superficie en cada punto. Uno puede observar que en realidad solo debemos contemplar la dirección vertical (\hat{k}) de la fuerza porque las otras se cancelan por simetría. Por tanto tomaremos la descomposición vertical de la fuerza, es decir en cada punto punto a altitud z o latitud θ se debe ponderar por $\frac{z}{r} = \sin(\theta)$. Integraremos en coordenadas polares donde $dS = r \cos(\theta) d\phi \cdot r d\theta$, sin entrar mucho en detalle técnico de la resolución de la integral, es una simple cuenta matemática:

$$\begin{aligned} \vec{F}_P &= \iint_S d\vec{F}_P = \iint_S \Delta P d\vec{S} = \Delta P \hat{k} \iint_S \left(\frac{z}{r}\right) dS \\ &= \Delta P \hat{k} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) (r \cos(\theta) d\phi \cdot r d\theta) \\ &= \pi r^2 \Delta P \hat{k} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = \pi r^2 \Delta P \hat{k} \end{aligned} \quad (30)$$

La segunda también se calcula como suma de infinitos diferenciales de fuerza $d\vec{F}_t$, esta vez solo en el contorno del hemisferio con una fuerza τ por unidad de longitud, es decir $dF_t = \tau dl$. Además, en este caso sabemos que la dirección de todos estos será $-\hat{k}$, pero nótese que esto viene de razonar que es normal a la curva de contorno, la cual a su vez es perpendicular a la normal de la superficie \hat{u} y la tangente de la curva de contorno $d\vec{l}$, que también son perpendiculares entre si. Por ello se podría escribir genéricamente: $d\vec{F}_t = -\tau \hat{n} \times d\vec{l}$, el signo se debe a la que \hat{n} va hacia afuera de la superficie positivamente orientada. Si integramos de nuevo en coordenadas esféricas, donde $dl = r d\phi$:

$$\vec{F}_t = \oint_{\partial S} d\vec{F}_t = \oint_{\partial S} (-\tau \hat{u} \times d\vec{l}) = \oint_{\partial S} (-\hat{k}) \tau dl = -\hat{k} \tau \int_0^{2\pi} (r d\phi) = -2\pi r \tau \hat{k} \quad (31)$$

De hecho es simplemente la longitud por la proporción τ en la dirección correcta.

⁸La negrita indicará siempre carácter vectorial o de matriz. Los vectores se tratan como matrices columna (3×1).

⁹El símbolo ∂ indica, en el contexto aplicado a una región, "contorno de".

Si realmente se tiene equilibrio (29), juntando (30) y (31) tenemos finalmente:

$$\begin{aligned}\pi r^2 \Delta P \hat{k} &= 2\pi r \tau \hat{k} \\ \Delta P &= \frac{2\tau}{r}\end{aligned}\tag{32}$$

Sumando P_0 se obtiene la formula (2.1).

Este mismo razonamiento se puede encontrar en diversos artículos similares. Cito algunos: [4], [5]. Por ello quise ir un poco mas lejos que estos artículos; me llamó la atención que todos lo hacen cogiendo como subregión S de la esfera un hemisferio. Eso tiene sentido para facilitar los cálculos pero en realidad debería dar lo mismo cogiendo cualquier subregión compacta de tipo 2D: $S \subset D$. Esto realmente demostraría el equilibrio del sistema. Me interesé pues por demostrar este echo y lo hago en el anexo C.

A.2 Fórmula 16

Analizamos primero la fuerza elástica en la dirección normal a la superficie (\hat{n}) en cualquier punto de esta, es 0, ya que la fuerza solo puede actuar tangente a la superficie. Esto no sirve para encontrar p , que es el independiente de la dirección, para poder aplicarlo en otras direcciones. Aplicando (2.2) en la dirección \hat{n} sobre cualquier punto:

$$\begin{aligned}\tau_{\hat{n}} &= 0 = C_1(1 - C_2 p \lambda_{\hat{u}}^{-2}) \\ C_2 p &= \lambda_{\hat{n}}^2\end{aligned}\tag{33}$$

Ahora $\lambda_{\hat{n}}$ es la expansión del material radialmente, es decir $\lambda_{\hat{n}} = w/w_0$ donde w y w_0 son el grosor de la pared de goma expandida y no expandida respectivamente. Dado que el volumen total de goma del globo es constante a: $V_g = 4\pi r^2 w$ (aproximadamente r se mediría como el radio desde el centro hasta algún punto en el medio de la pared de goma de grosor w), entonces $w \propto r^{-2}$ por lo que:

$$C_2 p = \lambda_{\hat{n}}^2 = (w/w_0)^2 = (r/r_0)^{-4} = \lambda^{-4}\tag{34}$$

Analizando ahora la tensión $\tau_t = \tau$ en la dirección vertical para una longitud de material siendo ahora la expansión alrededor del ecuador: $\lambda_t = \frac{2\pi r}{2\pi r_0} = r/r_0 = \lambda$, se tiene:

$$\tau = C_1(1 - C_2 p \lambda_t^{-2}) \propto 1 - \lambda^{-4} \lambda^{-2} = 1 - \lambda^{-6}\tag{35}$$

como se predecía en la fórmula 2.3

A.3 Fórmula 2.4

Consideremos la tercera ley de Newton aplicada sobre el sistema objeto + masa expulsada:

$$F = \sum \frac{dp}{dt} = \frac{dp_v}{dt} + \frac{dp_e}{dt}\tag{36}$$

Donde p_v y p_e son los momentos del objeto y aire expulsado respectivamente. Fijamos un intervalo pequeño Δt de tiempo. Supóngase que antes al inicio de este pequeño intervalo de tiempo el objeto tiene una masa m y velocidad v , por tanto un momento:

$$p_v = mv\tag{37}$$

Supóngase ahora que durante este Δt gana una masa $\Delta m (< 0)$ y una velocidad Δv , variando el momento en Δp_v . Luego:

$$p + \Delta p = (m + \Delta m)(v + \Delta v)\tag{38}$$

Restando (37) y (38) expandiendo y pasando a diferenciales:

$$\begin{aligned}(p_v + \Delta p_v) - p_v &= (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv \\ \Delta p_v &= m\Delta v + v\Delta m + \Delta m \cdot \Delta v \\ \frac{dp_v}{dt} &= m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = ma + vq\end{aligned}\tag{39}$$

¹⁰ Por otro lado, la masa de combustible $-\Delta m$ expulsada a una velocidad u hacia atrás respecto al objeto, irá a velocidad $v - u$ respecto al sistema de referencia fijo, incrementando el momento total de combustible en Δp_e (el momento de estas partículas). Planteando la igualdad y pasando a diferenciales como antes:

$$\begin{aligned}\Delta p_e &= (-\Delta m)(v - u) = (u - v)\Delta m \\ \frac{dp_e}{dt} &= (u - v)\frac{dm}{dt} = (u - v)q\end{aligned}\tag{40}$$

Sustituyendo (39) y (40) en (36) se deriva la ecuación buscada.

Esta ecuación, es conocida en la cinemática de los cohetes. Explicaciones más detalladas se encuentran en varios sitios, por ejemplo: [6]. Comúnmente también se encuentra como formula de la fuerza de propulsión: $F_t = qu$, por ejemplo en [2], que es lo mismo en realidad donde $F_t = ma - F$ y su q puede ser de signo opuesto $q \longleftrightarrow -q$.

¹⁰Nótese que esta ecuación también se puede obtener de plantear $\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot v)$ y usar la regla de la derivada de un producto.

B Ecuación diferencial (26)

B.1 Resolución analítica

Se observa que $T_1 = e^{\frac{A}{7}\lambda^7}$ es la solución particular de:

$$\frac{dT_1}{d\lambda} - A\lambda^6 T_1 = 0 \quad (41)$$

con lo que se puede usar $e^{-\frac{A}{7}\lambda^7}$ como multiplicador, es decir si se define:

$$z := T_1 e^{-\frac{A}{7}\lambda^7} \quad (42)$$

se tiene:

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(T_1 e^{-\frac{A}{7}\lambda^7} \right) = \frac{dT_1}{d\lambda} e^{-\frac{A}{7}\lambda^7} - A\lambda^6 T_1 e^{-\frac{A}{7}\lambda^7} = \left(\frac{dT_1}{d\lambda} - A\lambda^6 T_1 \right) e^{-\frac{A}{7}\lambda^7} \quad (43)$$

con lo cual multiplicando la ecuación original (26) por $e^{-\frac{A}{7}\lambda^7}$ se obtiene una ecuación de primer orden en z ahora con la variable λ separable y $z(\lambda_1) = T_1(\lambda_1) e^{-\frac{A}{7}\lambda_1^7} = 0 e^{-\frac{A}{7}\lambda_1^7} = 0$ como condición de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\lambda} + B(\lambda - \lambda^{-5}) e^{-\frac{2}{7}A\lambda^7} &= 0 \\ \frac{dz}{d\lambda} &= -B(\lambda - \lambda^{-5}) e^{-\frac{2}{7}A\lambda^7} \\ dz &= -B(\lambda - \lambda^{-5}) e^{-\frac{2}{7}A\lambda^7} d\lambda \\ z &= \int_0^z dz = -B \int_{\lambda_1}^{\lambda} (\lambda - \lambda^{-5}) e^{-\frac{2}{7}A\lambda^7} d\lambda \end{aligned} \quad (44)$$

pero la última integral ya no tiene expresión en funciones elementales.

Para recuperar T_1 se desharía (42) obteniendo:

$$T_1 = z e^{\frac{A}{7}\lambda^7} \quad (45)$$

Luego nos deshacemos de T_1 usando (22):

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_g r_0^2 \dot{\lambda}^2 \\ \sqrt{T_1} &= C \frac{d\lambda}{dt} \\ dt &= C \frac{d\lambda}{\sqrt{T_1}} \\ t &= \int_0^t dt = C \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{T_1}} \end{aligned} \quad (46)$$

Siendo $C := \sqrt{\frac{1}{2} m_g r_0}$. Así se obtendría la relación entre λ y t .

B.2 Aproximación despreciando la variación de T_1 o T_2

B.2.1 Despreciando la variación de T_1

El primer termino se va y la ecuación queda inmediatamente resoluble:

$$\begin{aligned} -A\lambda^6 T_1 + B(\lambda - \lambda^{-5}) &= 0 \\ T_1 &= \frac{B}{A} (\lambda^{-5} - \lambda^{-11}) \end{aligned} \quad (47)$$

Luego aplicando (46):

$$t = C \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{B}{A} (\lambda^{-5} - \lambda^{-11})}} = D \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^{-5} - \lambda^{-11}}} \propto \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^{-5} - \lambda^{-11}}} \quad (48)$$

siendo $D := C \sqrt{\frac{A}{B}}$. Que de nuevo es una integral sin solución en funciones elementales.

B.2.2 Despreciando la variación de T_2

El segundo termino se va y la ecuación queda en variables separables:

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{d\lambda} + B(\lambda - \lambda^{-5}) &= 0 \\ dT_1 &= -B(\lambda - \lambda^{-5})d\lambda \\ T_1 &= \int_0^{T_1} dT_1 = -B \int_{\lambda_1}^{\lambda} (\lambda - \lambda^{-5})d\lambda = \frac{B}{4}(2\lambda_1^2 + \lambda_1^{-4} - 2\lambda^2 - \lambda^{-4}) = \frac{B}{4}(D_0 - 2\lambda^2 - \lambda^{-4})\end{aligned}\quad (49)$$

siendo $D_0 := 2\lambda_1^2 + \lambda_1^{-4}$. Luego aplicando (46):

$$t = \int_0^t dt = D \int_{\lambda_1}^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{B}{4}(D_0 - 2\lambda^2 - \lambda^{-4})}} \propto \int_{\lambda_1}^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{D_0 - 2\lambda^2 - \lambda^{-4}}}\quad (50)$$

siendo esta vez $D := \frac{C}{2\sqrt{B}}$. Desafortunadamente sigue siendo una integral irresoluble.

B.3 Aproximación por métodos numéricos

Lo útil que se puede aprender de los dos últimos casos, no obstante. Es que un cambio de variable del tiempo $t = D\tilde{t} \iff \tilde{t} = \frac{1}{D}t$, con algún D dará lugar a:

$$\tilde{T}_1 = \frac{1}{2}m_g r_0^2 \left(\frac{d\lambda}{d\tilde{t}} \right)^2 = \frac{1}{2}m_g r_0^2 \left(\frac{d\lambda}{d\frac{1}{D}\tilde{t}} \right)^2 = \frac{1}{2}m_g r_0^2 \left(D \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} \right)^2 = \frac{1}{2}m_g r_0^2 D^2 \left(\frac{d\lambda}{d\tilde{t}} \right)^2 = D^2 T_1 \quad (51)$$

Esto es ciertamente útil ya que escogiendo $D^2 = B \iff D = \sqrt{B}$ eliminaríamos B , que era muy difícil de calcular al contener parámetros de elasticidad del globo, dejando solo A , que es más conocida ya que solo contiene parámetros del globo medibles con regla y balanza, al quedar:

$$\frac{d\tilde{T}_1}{d\lambda} - A\lambda^7 \tilde{T}_1 + (\lambda - \lambda^{-5}) = 0 \quad (52)$$

Esto permitiría aplicar más fácilmente los métodos numéricos sobre esta ecuación ignorando B para al final auto-escalar la gráfica del tiempo con el factor lineal D . Pero como lo que nos interesa al final es x y $\tilde{a} := \frac{d^2 x}{d\tilde{t}^2} = D^2 a$ multiplicando (2.4) por D^2 se tendrá:

$$M\tilde{a} = D^2 F - \frac{(3m_0)^2}{\rho s} \lambda^4 \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^2 \quad (53)$$

C Equilibrio total de la esfera por juego presión-tensión

En esta demostración haré uso del cálculo vectorial, y en particular de un teorema que resulta muy útil en demostraciones de física de alto nivel, sobretudo en la dinámica de fluidos, que puede caer totalmente fuera del nivel BI de bachillerato.

Empezaremos expandiendo un par de resultados matemáticos conocidos:

Fórmula C.1 (Rotacional de un producto vectorial ([8], sección: "cross product rule")). Siendo \vec{A} y \vec{B} dos campos vectoriales diferenciables¹¹, el rotacional de un producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ se puede escribir como:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

, donde $\vec{\nabla}$ es el vector columna $\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$.¹²

Fórmula C.2. La formula anterior se puede reescribir como:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \left[\vec{A} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{B}] - \vec{B} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{A}] \right]^T$$

donde el operador de vectores $[\vec{\cdot}, \vec{\cdot}]$ se define como: $[\vec{u}, \vec{v}] := (\vec{u} \cdot \vec{v})\mathbf{I} - \vec{u} \otimes \vec{v}$.¹³

¹¹Siempre se asumen como vectores columna a no ser que se diga lo contrario

¹²Como es usual esta notación, que usaremos a continuación, permite escribir $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ y $\vec{\nabla} \otimes \vec{F}$ para la divergencia, rotacional y matriz jacobiana del campo vectorial \vec{F} 3×1 , respectivamente y $\vec{\nabla}\psi$ el gradiente de una función multivariable, así como crear nuevos operadores.

¹³Los operadores \cdot y \otimes en matrices o vectores se definen con producto de matrices como: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$ y $\vec{u} \otimes \vec{v} = \vec{u}\vec{v}^T$. Por ejemplo siendo \vec{u} y \vec{v} vectores columna $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sera el producto escalar y $\vec{u} \otimes \vec{v}$ una matriz.

Explicación. Dado que \vec{A} y \vec{B} son vectores columna, $\vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ es un producto vector columna por escalar que también se puede escribir como vector fila por escalar o mejor vector fila por escalar por matriz identidad 3×3 (I):

$$\vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = \left[\vec{A} \cdot ((\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\mathbf{I}) \right]^T \quad (54)$$

Por otro lado, $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$ es un producto escalar por vector columna que también se puede escribir como traspuesta de escalar por vector fila.

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \left[(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}^T \right]^T = \left[\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{B}) \right]^T \quad (55)$$

Las mismas dos ecuaciones anteriores son válidas intercambiando \vec{A} y \vec{B} , por lo que reordenando (C):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ &= \left[\vec{A} \cdot ((\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\mathbf{I}) \right]^T - \left[\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{B} \right]^T - \left[\vec{B} \cdot ((\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\mathbf{I}) \right]^T + \left[\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{A} \right]^T \\ &= \left[\vec{A} \cdot ((\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\mathbf{I}) - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{B} - (\vec{B} \cdot ((\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\mathbf{I}) + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{A}) \right]^T \\ &= \left[\vec{A} \cdot ((\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\mathbf{I} - \vec{\nabla} \otimes \vec{B}) - \vec{B} \cdot ((\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\mathbf{I} - \vec{\nabla} \otimes \vec{A}) \right]^T \end{aligned} \quad (56)$$

□

Corolario C.0.1. *Poniendo $\vec{A} = \vec{c}$ un vector constante y $\vec{B} = \vec{F}$ un campo vectorial cualquiera en (C.2), dado que cualquier derivada de \vec{c} es 0 por ser constante, en particular $\vec{\nabla} \otimes \vec{c} = \vec{0}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{c} = 0$ y $\vec{T}[\vec{c}] = 0\mathbf{I} - \vec{0} = \vec{0}$*

$$\vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{F}) = \left[\vec{c} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{F}] - \vec{F} \cdot \vec{0} \right]^T = \left[\vec{c} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{F}] \right]^T \quad (57)$$

Fórmula C.3 (clásico de Kelvin-Stokes [1], [8]). ¹⁴ *Siendo $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial cualquiera sobre una región D del espacio euclídeo de 3 dimensiones ($D \subseteq \mathbb{R}^3$). Y siendo S una superficie compacta cerrada cualquiera en D ($S \subseteq D$). La integral curvilínea cerrada de \vec{F} sobre el contorno ∂S de S , equivale a la integral de superficie del rotacional de \vec{F} sobre S .*

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (58)$$

Fórmula C.4. *Para \vec{F} , D y S definidas cumpliendo las mismas hipótesis que en la formula anterior (C.3), se tiene también la siguiente identidad:*

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \times d\vec{l} = \iint_S [\vec{\nabla}, \vec{F}] d\vec{S}$$

Explicación. Aplicamos el teorema C.3 para el campo vectorial $\vec{c} \times \vec{F}$ siendo \vec{F} un campo vectorial cualquiera y \vec{c} un vector constante cualquiera:

$$\oint_{\partial S} (\vec{c} \times \vec{F}) \cdot d\vec{l} = \iint_S [\vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{F})] \cdot d\vec{S} \quad (59)$$

Usando la identidad del producto mixto¹⁵ y sacando la constante fuera de la primera integral se tiene:

$$\text{LHS} = \oint_{\partial S} (\vec{c} \times \vec{F}) \cdot d\vec{l} = \oint_{\partial S} \vec{c} \cdot (\vec{F} \times d\vec{l}) = \vec{c} \cdot \oint_{\partial S} \vec{F} \times d\vec{l} = \vec{c} \cdot \vec{A} \quad (60)$$

donde $\vec{A} := \oint_{\partial S} \vec{F} \times d\vec{l}$.

Por otro lado, usando el corolario C.0.1 y sacando otra vez la constante en la segunda integral:

$$\text{RHS} = \iint_S [\vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{F})] \cdot d\vec{S} = \iint_S \left[\vec{c} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{F}] \right]^T \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{c} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{F}] d\vec{S} = \vec{c} \cdot \iint_S [\vec{\nabla}, \vec{F}] d\vec{S} = \vec{c} \cdot \vec{B} \quad (61)$$

donde de nuevo $\vec{B} := \iint_S [\vec{\nabla}, \vec{F}] d\vec{S}$.

Luego si $\vec{c} \cdot \vec{A} = \text{LHS} = \text{RHS} = \vec{c} \cdot \vec{B}$ para todo vector \vec{c} luego $\vec{A} = \vec{B}$ (para verlo solo hace falta tomar, por ejemplo $\vec{c} = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ se tendría $\vec{A} = A\hat{i} + A\hat{j} + A\hat{k} = B\hat{i} + B\hat{j} + B\hat{k} = \vec{B}$). De donde se deriva la igualdad correspondiente. □

¹⁴ Hay un conjunto de teoremas de cálculo vectorial muy similares a este que vemos en [8]. Este en particular se llama clásico porque hay uno más general del cual todos son corolarios i que también se podría utilizar para probar C.4 directamente. Para los físicos quizá suena más uno de estos a menudo llamado *Teorema de la divergencia* del cual el conocido Teorema de Gauss es corolario poniendo $\vec{F} = \vec{g}, \vec{E}$ y $S = \partial V$ lo que se llama la superficie Gaussiana (luego la primera integral es el flujo ϕ).

¹⁵ Nos referimos a la identidad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$. Véase: [7]

Corolario C.0.2. *Aplicando la formula anterior siendo S una subregión cualquiera de la superficie de la esfera D y escogiendo $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$, es decir el campo identidad. Se tiene: $\vec{\nabla} \otimes \vec{F} = \mathbf{I}$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$, de modo que $[\vec{\nabla}, \vec{F}] = 3\mathbf{I} - \mathbf{I} = 2\mathbf{I}$. Usando que \hat{n} va en la misma dirección que \vec{x} por ser una esfera centrada y sacando constantes:*

$$\text{L}\vec{\text{H}}\text{S}[S] = \text{R}\vec{\text{H}}\text{S}[S] \quad (62)$$

siendo:

$$\text{L}\vec{\text{H}}\text{S}[S] = \oint_{\partial S} \vec{x} \times d\vec{l} = \oint_{\partial S} r\hat{n} \times d\vec{l} = r \oint_{\partial S} \hat{n} \times d\vec{l} \quad (63)$$

$$\text{R}\vec{\text{H}}\text{S}[S] = \iint_{\partial S} 2\mathbf{I}d\vec{S} = 2 \iint_{\partial S} d\vec{S} \quad (64)$$

Como hemos visto en el planteamiento de las integrales de la sección 2.4.3, usando las definiciones de $\text{R}\vec{\text{H}}\text{S}[S]$ y $\text{L}\vec{\text{H}}\text{S}[S]$ anteriores:

$$\vec{F}_t[S] = -\tau \oint_{\partial S} \hat{n} \times d\vec{l} = -\frac{\tau}{r} \text{L}\vec{\text{H}}\text{S}[S] \quad (65)$$

$$\vec{F}_P[S] = \iint_S \Delta P d\vec{S} = \frac{\Delta P}{2} \text{R}\vec{\text{H}}\text{S}[S] \quad (66)$$

son las fuerzas resultantes de tensión y presión sobre S , respectivamente. Luego $\text{LHS}[S] = \text{RHS}[S]$ implica:

$$-\vec{F}_t[S] = \frac{\tau}{r} \text{L}\vec{\text{H}}\text{S} = \frac{\Delta P}{2} \text{R}\vec{\text{H}}\text{S} = \vec{F}_P[S] \iff \Delta P = \frac{2\tau}{r} \quad (67)$$

Nótese que con esto además si no se asume que τ y ΔP son constantes ni D es una esfera, aplicando la fórmula C.4 con $\vec{F}(\vec{x}) = \tau(\vec{x})\hat{n}$, se tiene:

$$\begin{aligned} -\vec{F}_t[S] &= \vec{F}_P[S] \\ \iint_S [\vec{\nabla}, \tau\hat{n}]d\vec{S} &= \oint_{\partial S} \tau\hat{n} \times d\vec{l} = \iint_S \Delta P d\vec{S} \end{aligned} \quad (68)$$

Dado que las dos ultimas integrales son equivalentes para cualquier $S \subseteq D$, debe pasar también que:

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla}, \tau\hat{n}]d\vec{S} &= \Delta P d\vec{S} \\ [\vec{\nabla}, \tau\hat{n}]\hat{n} &= \Delta P \hat{n} \end{aligned} \quad (69)$$

es decir, $\hat{n}(\vec{x})$ y $\Delta P(\vec{x})$ son vectores y valores propios de la matriz $[\vec{\nabla}, \tau\hat{n}](\vec{x})$ respectivamente para todo $\vec{x} \in D$. Y de hecho aplicando la regla del producto se puede llegar a:

$$[\vec{\nabla}, \psi\vec{F}] = \psi[\vec{\nabla}, \vec{F}] + [\vec{\nabla}\psi, \vec{F}] \quad (70)$$

para un campo \vec{F} y una función multivariable ψ cualesquiera, aplicable a \hat{n} y τ respectivamente. Esto daría información exacta sobre la disposición de presiones y tensiones superficiales sobre una forma mas compleja.

Para acabar, mencionar ya que hemos introducido estos teoremas, que no es casualidad que la fuerza causada por la presión también sea ΔP por la cantidad superficie de la sombra del hemisferio en el plano $z = 0$ con su mismo vector normal. De echo esto se puede demostrar rápidamente usando este teorema y aplicaría también a cualquier casquete. Sea $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} | x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ esta sombra, sea S la superficie del hemisferio como antes y sea $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} | x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ el hemisferio entero, de modo que $\partial V = S \cup H$. Luego se tiene la siguiente fórmula:

Fórmula C.5 (derivado del teorema de la divergencia [8], [1]). *Con $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función en una región compacta cualquiera en el espacio de 3 dimensiones V :*

$$\oint_{\partial V} \psi d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\psi dV$$

con dV diferencial de volumen y $d\vec{S}$ diferencial de superficie como antes.

Corolario C.0.3. *La formula anterior aplicada a $\psi = \text{ctt}$, se tiene $\vec{\nabla}\psi = \vec{0}$ por lo que:*

$$\oint_{\partial V} \psi d\vec{S} = \iiint_V \vec{0} dV = \vec{0} \quad (71)$$

El corolario anterior aplicado a $\psi = \Delta P$ y la media esfera V con $\partial V = S \cup H$ (casco unido a círculo interior):

$$\begin{aligned} \oint_{S \cup H} \Delta P d\vec{S} &= \oint_S \Delta P d\vec{S} + \oint_H \Delta P d\vec{S} = \vec{0} \\ \oint_S \Delta P d\vec{S} &= - \oint_H \Delta P d\vec{S} = -\Delta P \oint_H (-\hat{k}) dS = \Delta P \hat{k} \oint_H dS = \mathcal{S}(H) \Delta P \hat{k} \end{aligned} \quad (72)$$

donde \mathcal{S} indica "área de la región" y $\mathcal{S}(H) = \pi r^2$ en el caso del hemisferio.

References

- [1] Khan Academy. *Los teoremas de Green, de Stokes y de la divergencia*. URL: <https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/greens-theorem-and-stokes-theorem>.
- [2] Alain Davenas. *Solid Rocket Propulsion Technology*. 1993. Chap. 1. Propulsion Elements for Solid Rocket Motors. URL: <https://books.google.es/books?hl=ca&lr=&id=qJ30dRJQSRwC&oi=fnd&pg=PP1&dq=thrust+and+impulse+rocket&ots=iLNppPNT7A&sig=2CS71KJEod4plSbXCpHLS7rnOCQ#v=onepage&q=thrust%5C%20and%5C%20impulse%5C%20rocket&f=false>.
- [3] Amir D. Gat Dotan Ilssar. “On the inflation and deflation dynamics of liquid-filled, hyperelastic balloons”. In: *Cornell University* (Aug.). URL: <https://arxiv.org/abs/1908.04074>.
- [4] *Fluidos*. URL: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/tension/laplace/laplace.htm>.
- [5] Morton M. Sternheim Joseph W. Kane. *Física*. Jan. 2007. Chap. 15. Fuerzas de cohesión en líquidos. URL: <https://books.google.es/books?id=lj5kLw2uxGIC&pg=PA335&dq=ley+de+laplace&lr=&client=firefox-a&cd=1#v=onepage&q=ley%5C%20de%5C%20laplace&f=false>.
- [6] la enciclopedia libre Wikipedia. *Ecuación del cohete de Tsiolkovski*. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_del_cohete_de_Tsiolkovski#Un_volumen_de_control_que_pierde_masa.
- [7] la enciclopedia libre Wikipedia. *Producto mixto*. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Producto_mixto.
- [8] la enciclopedia libre Wikipedia. *Vector calculus identities*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities.