Laboratorio de Análisis Aplicado
Método BFGS

1 Introducción

Sean $B \in \mathcal{R}^{nxn}$ simétrica y definida positiva, y $s,\ y \in \mathcal{R}^n,\ \ s, y \neq 0$.
Se desea una matriz simétrica y definida positiva, B_+ tal que

$$B_+ s = y. \tag{1}$$

La ecuación (1) se conoce como la ecuación de la secante.

Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno en 1970 proponen la siguiente deducción: Sea L el factor de Cholesky de B y considere

$$L_+ = L + \frac{(y - Lv)v^T}{v^T v},$$

donde

$$v = \left(\frac{y^T s}{s^T B s}\right)^{1/2} Ls.$$

La matriz L_+ es no-singular, entonces la matriz

$$B_+ = L_+ {L_+}^T,$$

es simétrica y definida positiva.
Es decir

$$B_+ = B + \frac{yy^T}{y^T s} - \frac{Bss^T B}{s^T Bs}, \tag{2}$$

la cual se conoce como la actualización BFGS. Notemos que B_+ satisface la ecuación de la secante (1).

2 Método BFGS

Sea $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ dos veces continuamente diferenciable. Se requiere encontrar un mínimo local de f por el método de Newton con la dificultad que $\nabla^2 f(x)$ es costosa de aproximar. La idea es aproximar la matriz hessiana por medio de la actualización (2).

Método BFGS

Sean $x_0 \in \mathcal{R}^n, B_0 \in \mathcal{R}^{nxn}$ simétrica y definida positiva, $tol \in (0,\ 1),\ k \leftarrow 0$.

Mientras $\| \nabla f(x_k)\| > tol$

1. Calcula la dirección p_k resolviendo el sistema lineal
$$B_k p = -\nabla f(x_k).$$
2. $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ donde α_k satisface las condiciones de Wolfe.
3. $s_k = x_{k+1} - x_k,\ y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$
4. Calcule B_{k+1} por la fórmula (2)
5. $k \leftarrow k + 1$

En general $B_0 = \nabla f(x_0)$ o λI donde $\lambda > 0$

3 Problemas

Programe el método BFGS en MATLAB y pruébelo con la función $f(x_1, x_2) = (x_1-2)^4+(x_1-2)^2 {x_2}^2+(x_2+1)^2$ que tiene el único mínimo en $x_* = (2,\ -1)^T$. Inicie con $x_0 = (1,\ 1)^T$ y $B_0 = \nabla^2 f(x_0)$.