Universitat de les Illes Balears

TREBALL FINAL DE MÀSTER

MÈTODES DE REPARTIMENT D'ESCONS: UNA APLICACIÓ A LES ELECCIONS GENERALS ESPANYOLES 2023

Pau Peón Bibiloni

Màster Universitari en Sistemes Intel·ligents (MUSI)

Especialitat: Ciència de Dades

Centre d'Estudis de Postgrau

Any Acadèmic 2023-24

MÈTODES DE REPARTIMENT D'ESCONS: UNA APLICACIÓ A LES ELECCIONS GENERALS ESPANYOLES 2023

Pau Peón Bibiloni

Treball Final de Màster

Centre d'Estudis de Postgrau

Universitat de les Illes Balears

Any Acadèmic 2023-24

Paraules clau del treball:

Eleccions, Mètodes de Repartiment, Paradoxes

Noms Tutors del Treball: Sebastià Massanet Massanet, Arnau Mir Torres

MÈTODES DE REPARTIMENT D'ESCONS: UNA APLICACIÓ A LES ELECCIONS GENERALS ESPANYOLES 2023

Pau Peón Bibiloni
Tutors: Sebastià Massanet Massanet, Arnau Mir Torres
Treball Final de Màster
Universitat de les Illes Balears
07122 Palma, Illes Balears, Espanya
pau.peon1@estudiant.uib.cat

***Resum*—Al llarg del treball es presenta la teoria matemàtica dels mètodes de repartiment, presentant les definicions i propietats més rellevants. A més, s'estudien els mètodes de Hamilton, del Divisor i de la quota i es veu que tots ells presenten qualcuna mena d'inconvenient. Finalment, s'apliquen tots els mètodes estudiats als resultats de les eleccions generals espanyoles del 2023 per tal de veure la configuració final del congrés dels diputats amb els diferents mètodes de repartiment. Amb això es veu que encara que la distribució dels seients canvia entre els partits, molt probablement el president del Govern triat hagués estat el mateix amb tots els mètodes.**

***Paraules clau*— Eleccions, Mètodes de Repartiment, Paradoxes**

***Resum*—Throughout the paper, the mathematical theory of apportionment methods is presented, collecting the most relevant definitions and properties. In addition, the Hamilton, Divisor and Quota methods are studied and it is seen that all of them present some kind of drawback. Finally, all the methods studied are applied to the results of the 2023 Spanish general elections in order to analyse the final configuration of the Congress of Deputies according to the different apportionment methods. This shows that even if the distribution of seats changes between the parties, it is very likely that the president of the elected government would have been the same with all the methods.**

***Index Terms*—Elections, Apportionment Methods, Paradoxes**

I. INTRODUCCIÓ

El diumenge 23 de juliol de 2023 els ciutadans espanyols varen acudir a les urnes amb l'objectiu de presentar el seu suport als partits que considerassin més afins als seus ideals i objectius. Aquests vots serien la base per decidir com repartir els seients del congrés dels diputats entre els diferents partits. Una vegada format el congrés, aquest té la missió de nomenar el president del govern.

A cada elecció general ressorgeix el mateix debat. És el mètode que s'empra a Espanya per repartir els seients en base als vots el més just?

Un es podria demanar, quina és la base sobre la que es sustenta aquest debat? No es poden repartir els seients en base a la proporció de vots que ha obtingut cada partit? La resposta a aquesta pregunta és senzilla: normalment no. Això es deu a que en la majoria d'ocasions, assignar la mateixa proporció de seients que de vots a un partit polític, pot resultar en que un partit polític tengui un nombre no enter de seients, la qual cosa és inviable. Això ho veurem més clarament amb un exemple.

Exemple 1. A les Illes Balears, el nombre de seients a repartir entre els partits que es presenten a les eleccions és de 8. Els quatre partits que varen rebre més d'un 3% dels vots varen ser el PP, el PSOE, SUMAR i VOX amb 178715, 151134, 83116 i 76302 vots respectivament. Ara si v_i és el nombre de vots del partit i i V el nombre total de vots, calculam la proporció de vots del partit i com $\frac{v_i}{V}$ i per tant el nombre de seients pel partit i hauria de ser $\frac{v_i}{V} \cdot 8$. Això fa que la distribució de seients del congrés dels diputats amb aquests quatre partits hagués de ser com es mostra a la taula I.

Taula I
RESULTAT FINAL DEL REPARTIMENT DE L'EXEMPLE 1

Partits	Vots	Proporció de vots	Nombre de seients
PP	178715	0.3653	2.9222
PSOE	151134	0.3089	2.4712
SUMAR	83116	0.1699	1.3590
VOX	76302	0.1560	1.2476

Així, podem veure clarament que l'aplicació directa de la proporció de vots no resulta en una distribució d'escons viable.

Aquest problema va sorgir per primera vegada durant el segle XVIII, quan es va publicar el primer cens dels Estats Units (EUA), que va originar un debat que dura fins avui: quants de representants corresponen a cada estat en la Cambra de Representants segons la seva població? Aquest debat, va suposar el naixement d'una nova branca de les matemàtiques, els mètodes de repartiment. Una branca que té com a intenció resoldre una qüestió essencial: es pot crear un mètode de repartiment just?

Aquest treball té com a finalitat definir formalment què és un mètode de repartiment, quines propietats hauria de complir un mètode de repartiment desitjable i mostrar els mètodes més populars que s'han desenvolupat des del naixement de la branca. Tot això, es suportarà amb exemples realitzats emprant les dades obtingudes durant les Eleccions Generals Espanyoles de 2023 [9]. A més realitzarem una breu anàlisi dels diferents resultats obtinguts segons el mètode de repartiment emprat. Els codis creats per generar aquests exemples són propis i s'inclouran a l'annex. El treball es basa principalment en el llibre *Fair Representation* de Balinski i Young [3], encara que s'han consultat altres fonts i l'estructura, part de la notació i les demostracions que s'inclouen són pròpies i no es troben en la referència esmentada. Per motius de limitació d'espai, s'ha decidit no incloure les demostracions d'aquells resultats que tenien demostracions completes i detallades en les referències consultades.

El treball s'ha estructurat de la següent manera: primer hem inclòs una secció on explicam el Sistema Electoral Espanyol, base dels exemples i l'anàlisi que farem posteriorment. A continuació hem dedicat una secció a explicar algunes definicions i propietats bàsiques. A la tercera secció trobarem les paradoxes més famoses que poden patir els mètodes de repartiment. Després trobarem dues seccions dedicades als mètodes clàssics més famosos, el de Hamilton i els del divisor. La cinquena secció estarà dedicada als mètodes emprats per decidir si un mètode afavoreix a una població o a una altra, és dir, per analitzar el biaix. A continuació introduirem i explicarem els mètodes de la quota. Després farem una breu anàlisi dels resultats de les Eleccions Generals Espanyoles del 2023 segons els diferents mètodes de repartiment emprats per assignar els escons. Finalment, trobarem una secció on exposarem les conclusions que s'han extret de la realització del treball.

Els fulls d'excel i el codi python mitjançant els quals s'han generat els exemples i s'ha realitzat l'anàlisi es poden trobar al repositori creat per aquest treball [10] i que es pot trobar des de:

https://github.com/PauPeon24/TFM_entrega

II. Sistema Electoral Espanyol

A Espanya, es celebren eleccions generals al parlament cada quatre anys, sempre i quan no es convoquin eleccions anticipades per decisió del president del Govern del moment, com va ser el cas de les eleccions del 23 de juliol de 2023. El president, Pedro Sánchez, va decidir anticipar les eleccions després d'una derrota generalitzada del PSOE i de Unidas Podemos a les eleccions autonòmiques i municipals del 28 de maig del mateix any, on ambdós partits varen perdre gran part de les comunitats i alcaldies que havien aconseguit a les eleccions anteriors. Així, per setzena vegada a Espanya, es va iniciar la preparació d'unes eleccions generals.

En aquesta secció no es tractarà com es preparen els partits polítics, ni com es formen les meses electorals, ni com trien els seus candidats els partits, ni quins mecanismes han d'emprar els partits polítics per presentar-se a les eleccions. Es tractarà, única i exclusivament, com s'utilitzen els vots dels ciutadans de les diferents províncies per decidir la configuració final de la Cambra Baixa de les Corts Generals d'Espanya, el Congrés dels Diputats. Explicarem com funciona seguint la Ley Orgánica 5/1985, de 19 de junio, del Régimen Electoral General [8].

La primera passa és decidir quants de seients conformaran el Congrés dels Diputats. En el cas d'Espanya, la llei marca que hi ha 350 escons a repartir entre els diferents partits i les diferents províncies. Una vegada fixat això, la mida de la cambra, es decideix quants de representants de cada província hi haurà al Congrés.

Com és lògic, voldrem que cada província tingui un nombre mínim de representants, ja que les poblacions d'aquestes han d'estar representades en la cambra que ostenta la sobirania nacional. Així, la llei marca que totes les províncies d'Espanya tendran un nombre mínim de 2 diputats, llevat de les ciutats autònomes de Ceuta i Melilla que en tindran només 1. Per tant, com a Espanya hi ha 50 províncies i les dues ciutats autònomes, d'inici ja s'han repartit $50\cdot2+2\cdot1=102$ escons. En queden 248.

Per repartir els escons restants, es té en compte la població de dret de cada una de les províncies, és a dir, es té en compte el nombre de persones empadronades a cada una. Segons l'Institut Nacional d'Estadística, a Espanya hi havia 47475420 persones empadronades a Espanya el 2022 [4].

Així, el que es fa és obtenir una quota dividint la població total entre el nombre d'escons a repartir, en aquest cas $\frac{47475420}{248}=191433.1452$. Amb això tenim que cada escó hauria de representar aproximadament a 191433 persones.

A continuació, es divideix la població de cada una de les províncies entre la quota i el resultat es trunca a la unitat. Així, és possible que quedin qualcuns escons sense assignar, per tant tornarem a considerar els resultats sense truncar i anirem assignant escons a les províncies amb les parts decimals més altes fins que s'hagin assignat tots. D'aquesta manera s'obté quants d'escons són necessaris per a representar tota la població de la província segons la proporció establerta anteriorment. Com podem veure, s'empra un mètode de repartiment per assignar escons a les províncies, un molt similar al mètode de Hamilton, que veurem més endavant. Veurem més clarament el funcionament del mètode amb un exemple.

Exemple 2. Considerem 3 províncies, la A, la B i la C amb 1000000, 500000, 300000 (1800000 en total) ciutadans cada una i suposem que tenim 14 escons a repartir. Per tant, la quota és $\frac{1800000}{14}=128571.4286$ i es divideixen les poblacions per la quota obtenint-se, respectivament, $\frac{1000000}{128571.4286}=7.7778$, $\frac{500000}{128571.4286}=3.8889$ i $\frac{300000}{128571.4286}=2.3333$. Per tant, truncant aquests valors assignam inicialment 7 escons a la província A, 3 a la B i 2 a la C. Així, hem assignat 12 escons, ens queden 2 escons per assignar. Ara bé, els dos valors que tenen la part decimal més alta són la de la província A i la de la província B, per tant, haurem d'assignar un escó extra a cada una.

Així, el repartiment final serà 8 escons a la província A, 4 a la província B i 2 a la província C.

D'aquesta manera podem calcular el nombre d'escons que obtindrà cada província segons els diferents mètodes de repartiment. El resultat d'aquests càlculs és el que es veu a la taula II i el procés emprat per calcular això es pot veure al full d'excel amb el nom *Votants_per_provincia.xlsx* [10].

Una vegada decidit això s'organitzen les eleccions i els ciutadans que poden i volen, van a votar. Cada ciutadà vota a la seva província i es realitzen recomptes de vots a cada província per determinar com es distribueixen entre els partits els escons de la província corresponent. Un votant pot exercir el seu dret a vot de tres maneres: votant per un partit, votant en blanc o realitzant un vot nul.

Taula II
NOMBRE D'ESCONS PER PROVÍNCIA SEGONS LA LLEI ELECTORAL

A Coruña	8	**Cuenca**	3	**Navarra**	5
Alacant	12	**Gipuzkoa**	6	**Ourense**	4
Albacete	4	**Girona**	6	**Palencia**	3
Almería	6	**Granada**	7	**Pontevedra**	7
Álava	4	**Guadalajara**	3	**Salamanca**	4
Asturias	7	**Huelva**	5	**Tenerife**	7
Ávila	3	**Huesca**	3	**Segovia**	3
Badajoz	5	**Illes Balears**	8	**Sevilla**	12
Barcelona	32	**Jaén**	5	**Soria**	2
Bizkaia	8	**La Rioja**	4	**Tarragona**	6
Burgos	4	**Las Palmas**	8	**Teruel**	3
Cáceres	4	**León**	4	**Toledo**	6
Cádiz	9	**Lleida**	4	**Valencia**	16
Cantabria	5	**Lugo**	4	**Valladolid**	5
Castelló	5	**Madrid**	37	**Zamora**	3
Ceuta	1	**Málaga**	11	**Zaragoza**	7
Ciudad Real	5	**Melilla**	1		
Córdoba	6	**Murcia**	10		

El primer que s'ha de tenir en compte és que els vots en blanc i els vots nuls tenen distintes implicacions en el resultat final, ja que mentre que els vots nuls no juguen cap paper, els vots en blanc es sumen als vots dels partits constituint el nombre de vots vàlids. Aquest valor és determinant en alguns casos ja que per a que un partit obtengui escons ha d'obtenir un mínim del 3% dels vots vàlids emesos a la província.

Una vegada realitzades les votacions es fa el recompte i es realitza el repartiment dels escons a cada província. El repartiment es realitza mitjançant el mètode de D'Hondt que explicarem i mostrarem més endavant.

Una vegada assignats els escons a cada partit en cada província, ja es pot conformar la cambra baixa per decidir el nou president del govern.

III. RECOLLIDA I TRACTAMENT DE LES DADES

En aquesta secció mostrarem com s'han recollit i tractat les dades que s'han emprat per simular els resultats de les eleccions amb els diferents mètodes de repartiment a les Eleccions Generals del juliol del 2023.

La primera passa ha estat descarregar les dades de les Eleccions Generals de juliol del 2023 de la pàgina web creada pel Ministeri de l'Interior [9]. A aquesta pàgina l'única font per consultar els vots per cada partit a cada província és un PDF, per tant, s'ha hagut de crear un full d'excel amb el nombre de vots per a cada partit (i en blanc) a cada província. Aquest full es pot trobar al repositori del treball sota el nom *VOTS_PER_PROVINCIA_BE.xlsx* [10].

A continuació, com els partits amb menys d'un tres per cent dels vots no poden obtenir cap escó s'han eliminat. S'han guardat les dades resultants a un nou full d'excel anomenat *VOTS_PER_PROVINCIA_mes_3_percent* [10].

IV. DEFINICIONS I PROPIETATS BÀSIQUES

Com s'ha indicat a la introducció, els mètodes de repartiment sorgeixen als EUA com una eina necessària per al funcionament dels sistemes democràtics parlamentaris. És per aquest motiu que hi haurà molts termes relacionats amb el context electoral, més concretament el dels EUA, al llarg d'aquesta i altres seccions.

Per començar però, hem de saber què és un mètode de repartiment. Un mètode de repartiment és un mètode que s'empra per repartir un nombre enter d'elements entre certs grups de manera que cada grup obtengui finalment un nombre enter tal que la suma dels elements repartits a cada grup coincideixi amb el nombre inicial a repartir. Aquests repartiments poden ser escons entre grups de població o seients entre partits polítics, però les aplicacions d'aquests mètodes van molt més enllà dels usos en contextos electorals i democràtics. Per exemple, es poden emprar per repartir recursos entre certs grups de població o, en un context acadèmic, es poden utilitzar per assignar hores de classe entre grups de professors.

A. *Notació*

Formalment, als grups que participen en el repartiment els hi direm *estats* i els denotarem per $A_1, ..., A_s$ on s serà el nombre d'estats presents en el repartiment. A més, aquests estats tendran assignats un cert valor que servirà com a criteri per a realitzar el repartiment (poden ser poblacions en el cas del repartiment d'escons entre estats/províncies, vots en el cas de l'assignació de diputats de partits polítics, etc.). Al vector format per aquests valors l'anomenarem *vector de poblacions* i ho denotarem com $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_s)$ on $p_i \in \mathbb{N}$ $\forall i \in \{1, ..., s\}$. Per altra banda, el nombre d'elements a repartir es coneix com *mida de la cambra* i es denota per h. A més, un repartiment pot tenir requisits mínims (un estat pot tenir dret a un nombre mínim d'escons o pot ser es necessiti establir un nombre màxim d'hores que pot realitzar un grup de professors). Aquest requisit l'anomenarem *requisit mínim o màxim* i ho denotarem per $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_s)$ amb $r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\forall i \in \{1, ..., s\}$.

B. *El problema del repartiment: definicions*

Amb això podem passar a definir formalment el que són un repartiment i un mètode de repartiment.

Definició 1. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_s) \in \mathbb{N}^s$ i una mida de la cambra $h \in \mathbb{N}$, direm que $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_s)$ és un *repartiment de h entre s amb requisit mínim (màxim)* si $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $a_i \geq r_i$ $(a_i \leq r_i)$ $\forall i \in \{1, ..., s\}$ de manera que $\sum_{j=1}^{s} a_j = h$.

Definició 2. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^s$ i una mida de la cambra h, definim un *mètode de repartiment* com una funció multivaluada M tal que:

$$M(\mathbf{p}, h) = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^s \text{ és un repartiment d'} h \text{ entre } s\}.$$

Un $\mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h)$ direm que és un *M-repartiment.*

Dins aquesta definició hi caben molts de mètodes, però no tots seran del nostre interès. Per tant, hem de definir una sèrie d'elements i propietats que ens ajudin a definir i garbellar els mètodes que ens seran útils a la pràctica.

C. *Respectar la quota*

La primera forma que tenim d'enfrontar el problema de crear un mètode de repartiment, és la de calcular la proporció de cada element del vector de poblacions sobre el total i assignar a cada estat la proporció de la mida de la cambra corresponent. Ara bé, com hem vist a l'exemple 1, els resultats d'aquest procés no sempre ens retornaran repartiments vàlids. Emperò, és lògic que vulguem que els mètodes de repartiment ens retornin repartiments que s'acostin el màxim possible a la proporció exacta de h que els hi toca. Això ens motiva a definir la quota estàndard, la quota inferior i la quota superior.

Definició 3. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i una mida de la cambra h, direm que la *quota estàndard* és $\mathbf{q} = (q_i)_{1 \le i \le s}$ on:

$$q_i = h \cdot \frac{p_i}{P}$$

on $P = \sum_{j=1}^{s} p_j$. És a dir, la quota estàndard és el nombre racional d'escons que cada estat rebria i ho denotarem per $\mathbf{q}$.

Definició 4. Donats un vector de poblacions $\mathbf{p}$, una mida de la cambra h i la seva quota estàndard $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_s)$, direm que la *quota inferior (superior)* és $\lfloor q_i \rfloor$ ($\lceil q_i \rceil$).

Amb això, podem passar a definir la primera de les propietats que ens interessarà que un mètode segueixi.

Definició 5. Donat un mètode M, un vector de poblacions $\mathbf{p}$, una mida de la cambra h i la seva quota estàndard $\mathbf{q}$, direm que un mètode M *respecta la quota* si $\forall \mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h), a_i \in \{\lfloor q_i \rfloor, \lceil q_i \rceil\}\ \forall i \in \{1, ..., s\}$.

D. Homogeneïtat

Per una altra banda, ens interessarà que si un vector de poblacions creix o decreix proporcionalment i la mida de la cambra es manté constant, els repartiments que ens retorni un mètode es mantinguin sempre constants. És lògic que vulguem que sigui així, ja que la quota estàndard de cada estat es mantindria constant sempre que la h es mantingui constant i el creixement o decreixement del vector de poblacions sigui proporcional, vegem-ho:

Exemple 3. Sigui $\mathbf{p}$ un vector de poblacions, h una mida de la cambra i considerem $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$. Diguem $\mathbf{q}$ a la quota estàndard del vector de poblacions $\mathbf{p}$ i la mida de la cambra h i $\hat{\mathbf{q}}$ a la quota estàndard del vector de poblacions $\lambda \cdot \mathbf{p}$ i la mida de la cambra h. Vegem que les dues quotes són iguals. Per a tot, $1 \le i \le s$,:

$$\hat{q_i} = h \cdot \frac{\lambda \cdot p_i}{\sum_{j=1}^{s} \lambda \cdot p_j} = h \cdot \frac{\lambda \cdot p_i}{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{s} p_j} = h \cdot \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{s} p_j} = q_i.$$

A aquesta propietat la denominarem homogeneïtat i la definirem a continuació:

Definició 6. Donat un mètode M, un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i una mida de la cambra h, direm que el mètode M és *homogeni* si:

$$M(\mathbf{p}, h) = M(\lambda \cdot \mathbf{p}, h)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{>0}.$$

E. Simetria

Una altra propietat que ens interessarà que compleixin els mètodes, és la simetria. No ens interessarà, com és lògic, que els repartiments que ens retorni el mètode per cada estat siguin diferents si permutam el vector de poblacions que utilitzam. És a dir, si tenim dos vectors de poblacions $\mathbf{p} = (2, 4)$ i $\hat{\mathbf{p}} = (4, 2)$ i una mida de la cambra h, i $M(\mathbf{p}, h) = \{(1, 2)\}$, llavors ens interessarà que $M(\hat{\mathbf{p}}, h) = \{(2, 1)\}$. Formalment, definirem la simetria de la següent manera:

Definició 7. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_s)$, una mida de la cambra h i un mètode de repartiment M tal que $M((p_1, ..., p_s), h) = \{a_1 = (a_{11}, ..., a_{1s}), ..., a_k = (a_{k1}, ..., a_{ks})\}$, direm que M és *simètric* si per qualsevol permutació σ:

$$M((p_{\sigma(1)}, ..., p_{\sigma(s)}), h) = \{a_1 = (a_{1\sigma(1)}, ..., a_{1\sigma(s)}), ..., a_k = (a_{k\sigma(1)}, ..., a_{k\sigma(s)})\}.$$

F. Proporcionalitat dèbil

A continuació, definirem una propietat que té a veure amb la proporcionalitat entre el vector de poblacions i els repartiments resultants. Aquesta és la proporcionalitat dèbil i es defineix de la següent manera:

Definició 8. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i un repartiment M, direm que M és *dèbilment proporcional* si quan existeix un $\mathbf{a} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^s$ proporcional a $\mathbf{p}$, llavors $M(\mathbf{p}, \sum_{j=1}^{s} a_j) = \{\mathbf{a}\}$.

És clar que si existeix un repartiment proporcional al vector de poblacions i que satisfà la mida de la cambra, és a dir, la suma de les components dels repartiments és la mida de la cambra, llavors aquesta hauria de ser l'única solució vàlida, ja que s'ajustaria perfectament a la quota, és a dir, $a_i = q_i$ per a tot $1 \le i \le s$. Vegem-ho.

Considerem un vector de poblacions $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_s)$, un $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ i un vector $\mathbf{a} = (\lambda \cdot p_1, ..., \lambda \cdot p_s)$. Considerem $h = \sum_{j=1}^{s} a_j$. Així, la quota estàndard $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_s)$ associada a $\mathbf{p}$ i h, serà:

$$q_i = h \cdot \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{s} p_j} = \sum_{j=1}^{s} a_j \cdot \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{s} p_j} = \lambda \sum_{j=1}^{s} p_j \cdot \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{s} p_j} = \lambda \cdot p_i.$$

Per tant, l'única solució del mètode de repartiment descrit anteriorment hauria de ser $\lambda \cdot \mathbf{p}$.

G. Proporcionalitat

Amb la proporcionalitat dèbil definida, definirem un tipus de proporcionalitat que consideri la proporcionalitat entre els propis repartiments i no només entre els repartiments i el vector de poblacions.

Suposem ara que tenim un repartiment qualsevol **b'**, obtingut d'un mètode de repartiment $M(\mathbf{p}, \sum_{j=1}^{s} b'_j)$. Suposem a més que podem disminuir la mida de la cambra a una h de manera que existeixi un repartiment, $\mathbf{b}$, proporcional al repartiment **b'** per aquesta nova h. Com el vector de poblacions $\mathbf{p}$ s'ha mantingut constant, $\mathbf{b}$ seguirà mantenint les mateixes proporcions a l'hora de realitzar el repartiment que **b'**, que el mètode havia considerat com a vàlid. Per tant, és lògic que imposem que un mètode vàlid hagi de complir que $\mathbf{b}$ sigui l'únic repartiment a $M(\mathbf{p}, h)$, on $h = \sum_{j=1}^{s} b_j < \sum_{j=1}^{s} b'_j$.

Així podem definir el que anomenarem proporcionalitat. Primer però hem d'introduir una nova notació. Si un vector **a** es proporcional a un vector **b** ho denotarem com **a** $\propto$ **b**.

Definició 9. Donat un vector de poblacions **p** i un mètode de repartiment M, direm que M és un *mètode proporcional* si:

- M és dèbilment proporcional.
- Donat un M-repartiment **b'** per $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^s$ i $\mathbf{b} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^s$ és tal que **b** $\propto$ **b'** amb $\sum_{j=1}^{s} b_j < \sum_{j=1}^{s} b'_j$, llavors **b** és l'únic repartiment a $M(\mathbf{p}, \sum_{j=1}^{s} b_j)$.

A partir d'ara, voldrem que tots els mètodes siguin homogenis, simètrics i proporcionals. Ens agradaria també que respectessin la quota, però com veurem més endavant, el fet de respectar la quota pot dur a certes paradoxes que ens agradaria poder evitar.

V. Paradoxes

Un dels problemes més freqüens amb els que ens trobarem al llarg de l'estudi dels diferents mètodes de repartiment són les paradoxes, especialment les tres següents: la paradoxa d'Alabama, la paradoxa de la població i la paradoxa dels nous estats. Aquestes paradoxes es basen en la monotonia i uniformitat dels mètodes. En aquesta secció explicarem els diferents tipus de monotonia que podem estudiar i les tres paradoxes. A més, mostrarem un teorema que ens ajudarà a entendre per què és impossible elegir un mètode de repartiment perfecte.

A. Monotonia

La monotonia estudia com es comporta el mètode si variam alguns dels seus paràmetres com poden ser la mida de la cambra, el vector de poblacions o el nombre d'estats involucrats en el repartiment.

El primer que se'ns podria ocórrer és veure com es comporta el mètode de repartiment quan variam qualsevol dels dos paràmetres, ja sigui per separat o alhora. Per fer això, hem de trobar una eina que involucri la mida de la cambra, el vector de poblacions i el nombre d'estats alhora i que sigui un criteri important a l'hora de realitzar els repartiments. Així, podem veure com varien els repartiments quan variam qualsevol dels paràmetres mencionats.

El criteri més evident que té aquestes propietats és la quota, que involucra la mida de la cambra i el vector de poblacions i que ens dona la proporció exacta que hauria de rebre cada estat. Per aquest motiu, el primer tipus de monotonia que podem definir és l'anomenada monotonia forta de la població que definirem de la següent manera:

Definició 10. Donat un mètode M, direm que és *fortament monòton respecte de la població* si quan la quota estàndard d'un estat creix, el seu repartiment no decreix.

Usualment, la mida de la cambra i el nombre d'estats són menys susceptibles a patir canvis. Per aquest motiu, podem definir un mètode parcial, un mètode en el que es fixen la mida de la cambra i el nombre d'estats per estudiar com es comporta el mètode enfront de la variació del vector de poblacions.

Definició 11. Donat un mètode M, direm que el seu *mètode parcial* és $M^*(\mathbf{p}) = M(\mathbf{p}, h)$ on $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{N}^s$ on la mida de la cambra és h i el nombre d'estats s estan fixats.

Amb això, Balinski i Young varen mostrar que aquest tipus de monotonia era massa estricte demostrant que no existia cap mètode parcial per $s \geq 2$, $h \neq 0$ i $h \neq s$ que complís aquesta monotonia. La demostració es pot consultar al teorema 4.1 a [3].

Teorema 1. *Per $s \geq 2$, $h \neq 0$ i $h \neq s$, no hi ha cap mètode parcial que satisfaci la monotonia forta de la població.*

Per aquest motiu haurem d'estudiar com varien els repartiments en funció de la variació dels paràmetres de manera independent. Així, podrem trobar dos tipus diferents de monotonia, la monotonia respecte de la cambra i la monotonia respecte de la població. Quan estudiem com afecta el nombre d'estats als repartiments xerrarem d'uniformitat i no de monotonia.

La monotonia respecte de la cambra descriu com es comporten els repartiments generats pel mètode quan s'augmenta la mida de la cambra. Direm que un mètode és monòton respecte de la cambra si quan augmentam la mida de la cambra, cap estat perd en el repartiment. Formalment ho definirem de la següent manera:

Definició 12. Donat un mètode M direm que és *monòton respecte de la cambra* si:

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbb{N}^s, h \in \mathbb{N} \text{ si } \mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h), \text{ llavors, si } a' \in M(\mathbf{p}, h+1), \\ a'_i \geq a_i \ \forall i \in \{1, ..., s\}.$$

Voldrem que els mètodes compleixin aquesta propietat, ja que com és lògic, augmentar la mida de la cambra sense modificar les poblacions no hauria de suposar en una pèrdua d'escons a qualque estat. Tots haurien, al menys, de mantenir els escons que tenien abans de l'augment.

En segon lloc, la monotonia respecte de la població descriu com es comporten els repartiments generats pel mètode quan es varia el vector de poblacions. En aquest cas, ens fixarem en les ràtios de les poblacions dues a dues i analitzarem la variació d'aquestes ràtios. Formalment, definirem la monotonia respecte de la població de la següent manera:

Definició 13. Donat un mètode de repartiment M direm que és *monòton respecte de la població* si $\forall \mathbf{p}, \mathbf{p'} \in \mathbb{N}^s$:

$$\text{si } \frac{p'_i}{p'_j} > \frac{p_i}{p_j}, \text{ llavors } a'_i \geq a_i \text{ o } a'_j \leq a_j,$$

on $\mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h)$ i $\mathbf{a'} \in M(\mathbf{p'}, h)$.

La interpretació d'aquesta definició és un poc més complexa que en el cas de la monotonia respecte la cambra. En aquest cas, comparam els estats dos a dos i ens fixam en si el quocient entre les poblacions dels estats augmenta, ja sigui per què un estat guanya més població que l'altre o en perd menys. En aquest cas, o bé l'estat més afavorit amb la modificació de poblacions no pot perdre escons o bé l'estat més perjudicat amb la modificació de poblacions no pot guanyar escons.

B. Uniformitat

Finalment voldrem estudiar com afecta la variació del nombre d'estats a un mètode de repartiment. Per això, haurem d'introduir la uniformitat. Bàsicament, direm que un mètode és uniforme si al realitzar el repartiment amb qualsevol subconjunt d'un vector de poblacions amb un mètode de repartiment, el repartiment per cada estat és el mateix que si realitzàssim el repartiment amb el mateix mètode i el vector de poblacions complet.

Definició 14. Direm que un mètode de repartiment M és uniforme si:

$\forall t$ tal que $2 \leq t \leq s$, si $(a_1, ..., a_s) \in M((p_1, ..., p_s), h)$ llavors $(a_1, ..., a_t) \in M((p_1, ..., p_t), \sum_{j=1}^{t} a_j)$. A més si $(b_1, ..., b_t) \in M((p_1, ..., p_t), \sum_{j=1}^{t} a_j)$ llavors $(b_1, ..., b_t, a_{t+1}, ..., a_s) \in M((p_1, ..., p_s), h)$.

C. Paradoxes

Amb tot això, podem passar a definir les paradoxes que contemplarem en aquest treball. Veurem exemples pràctics on ocorren aquestes paradoxes quan definim els mètodes que veurem al llarg del treball.

Definició 15. Direm que un mètode pateix la *paradoxa d'Alabama* si no és monòton respecte de la cambra.

Definició 16. Direm que un mètode pateix la *paradoxa de la població* si no és monòton respecte de la població.

Definició 17. Direm que un mètode pateix la *paradoxa dels nous estats* si donada una mida de cambra h i un nombre h' d'escons, en el cas que quan afegim un nou estat als existents i s'aplica el mètode amb una mida de cambra $h + h'$, el nou estat obté exactament h' escons, es dóna que el repartiment a la resta d'estats canvia. En altres paraules, direm que un mètode pateix la paradoxa dels nous estats si no és uniforme.

D. El mètode perfecte

Fins ara hem definit totes les propietats desitjables en un mètode de repartiment, per tant, tenim tots els ingredients per crear el mètode perfecte. Així, el mètode perfecte hauria de ser homogeni, simètric, proporcional, respectaria la quota i no patiria cap de les paradoxes definides. El problema sorgeix quan ens posam a cercar aquest mètode, no el trobam. Mai ningú ha definit un mètode que compleixi totes les propietats alhora, i és que és impossible. Balinski i Young varen demostrar a [3] el teorema 6.1 que estableix aquest fet a les pàgines 129 i 130.

Teorema 2. *No existeix cap mètode parcial per* $s \geq 4$ *i* $h \geq s + 3$ *tal que és monòton respecte de la població i respecta la quota.*

Per aquest motiu, com no existeix el mètode perfecte, l'elecció de mètodes de repartiment és un tema de debat que sempre és i serà contemporani.

VI. MÈTODE DE HAMILTON

El primer mètode que estudiarem serà el mètode de Hamilton, anomenat així en honor al seu creador, Alexander Hamilton. Aquest, sorgeix a l'any 1792 de la necessitat de trobar una manera d'assignar escons entre els diferents estats dels Estats Units. Es basa en assignar a cada estat la seva quota inferior i repartir els seients restants als estats que tenguin la part decimal de la quota estàndard més alta.

A. Definició

Definició 18. Sigui $\mathbf{p}$ un vector de poblacions i h una mida de la cambra. El repartiment resultant segons el mètode de Hamilton es calcula de la següent manera:

1) Calculam la quota estàndard de cada població:
$$q_i = h \cdot \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{s} p_j}.$$
2) Assignam provisionalment a cada estat el nombre d'escons igual a la quota inferior $\lfloor q_i \rfloor$.
3) Així tenim $h - \sum_{j=1}^{s} \lfloor q_j \rfloor$ escons restants a repartir.
4) Assignam un escó més als $h - \sum_{j=1}^{s} \lfloor q_j \rfloor$ estats amb la part decimal de la quota estàndard més alta.

Veurem més fàcilment el funcionament del mètode amb un exemple.

Exemple 4. El resultat final de les eleccions generals a A Coruña foren els que es troben a la taula III. També s'ha afegit la quota estàndard de cada partit, tenint en compte que a A Coruña es repartien 8 escons.

Taula III
PARTITS AMB MÉS D'UN TRES PER CENT DELS VOTS A A CORUÑA I EL NOMBRE DE VOTS OBTINGUTS.

Partits polítics	Vots	Quota estàndard
PP	287997	3.5008
PSOE	188184	2.2875
SUMAR	81345	0.9888
BNG	66996	0.8143
VOX	33606	0.4085

Així, a la primera assignació s'assignen 3 escons al PP, 2 al PSOE, 0 a SUMAR, 0 al BNG i 0 a VOX. Per tant, ens queden 8-5 = 3 escons a repartir.

El partit que té la part decimal de la seva quota més alta és SUMAR, per tant, assignarem un escó més a aquest partit. A continuació, el segon partit amb la part decimal més alta és el BNG, el qual també s'endurà un escó extra. Finalment, el tercer partit amb la part decimal de la seva quota més alta és el PP que s'endurà el darrer escó a repartir.

Finalment, el repartiment d'escons entre els partits a A Coruña segons el mètode de Hamilton és 4 escons al PP, 2 al PSOE, 1 a SUMAR i 1 al BNG.

B. Propietats

Com hem dit a la secció IV, els mètodes que considerarem desitjables han de ser homogenis, simètrics i proporcionals. El mètode de Hamilton compleix totes aquestes propietats.

Proposició 1. *El mètode de Hamilton és homogeni, simètric i proporcional.*

Demostració. Considerem un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i una mida de la cambra h. Vegem que el mètode de Hamilton és homogeni, simètric i proporcional.

Primer demostrarem l'homogeneïtat. Hem de veure que $M(\mathbf{p},h) = M(\lambda\cdot\mathbf{p},h)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$. Ara bé, com el mètode de Hamilton es basa únicament en la quota estàndard, si veim que la quota estàndard per **p** i h és la mateixa que per **p'** $=\lambda\cdot\mathbf{p}$ i h, haurem acabat. Diguem **q** a la primera quota estàndard i **q'** a la segona. Així, per a tot $1\le i\le s$,:

$$q'_i = h\cdot\frac{p'_i}{\sum_{j=1}^s p'_j} = h\cdot\frac{\lambda\cdot p_i}{\sum_{j=1}^s \lambda\cdot p_j} = h\cdot\frac{\lambda\cdot p_i}{\lambda\cdot\sum_{j=1}^s p_j} = h\cdot\frac{p_i}{\sum_{j=1}^s p_j} = q_i.$$

Per tant, com les quotes estàndard per ambdós vectors de població són iguals, podem dir que $M(\mathbf{p},h) = M(\lambda\cdot\mathbf{p},h)$.

La simetria es pot demostrar de forma trivial, ja que si consideram la quota estàndard, **q**, del vector de poblacions **p** i la mida de la cambra h juntament amb una permutació σ, és fàcil veure que si aplicam σ a **p**, la quota estàndard **q** es veurà afectada per la mateixa permutació i per tant, el repartiment resultant **a** també ho farà.

Finalment, la proporcionalitat del mètode es pot trobar a [7]. □

Ens faltarà veure si el mètode de Hamilton respecta la quota i, el més important, si pateix de qualcuna de les paradoxes.

Proposició 2. *El mètode de Hamilon satisfà la regla de la quota.*

Demostració. Considerem **p** un vector de poblacions, h una mida de la cambra i M el mètode de Hamilton i vegem que el mètode assigna a cada estat $\lfloor q_i\rfloor$ o $\lceil q_i\rceil$.

A la primera passa del mètode de Hamilton, s'estableix que cada estat rep $\lfloor q_i\rfloor$. A la següent, s'afegeix un escó als $h-\sum_{j=1}^s\lfloor q_j\rfloor$ estats amb la part decimal de la quota estàndard més alta. Si veim que $h-\sum_{j=1}^s\lfloor q_j\rfloor < s$, haurem acabat, ja que així tendrem que el repartiment donarà a cada estat $\lfloor q_i\rfloor$ o $\lfloor q_i\rfloor+1=\lceil q_i\rceil$.

Notem primer que:

$$\sum_{j=1}^s q_j = \sum_{j=1}^s h\cdot\frac{p_j}{\sum_{k=1}^s p_k} = h\cdot\frac{\sum_{j=1}^s p_j}{\sum_{k=1}^s p_k} = h.$$

Per tant,

$$h-\sum_{j=1}^s\lfloor q_j\rfloor = \sum_{j=1}^s q_j - \sum_{j=1}^s\lfloor q_j\rfloor = \sum_{j=1}^s q_j - \lfloor q_j\rfloor.$$

Aleshores, com $q_i-\lfloor q_i\rfloor\in[0,1)$:

$$\sum_{j=1}^s q_j-\lfloor q_j\rfloor < \sum_{j=1}^s 1 = s.$$

Així hem vist que $h-\sum_{j=1}^s\lfloor q_j\rfloor < s$ i per tant el mètode de Hamilton respecta la quota. □

Així, podria parèixer que el mètode de Hamilton és just, ja que s'ajusta bé a la idea de proporcionalitat. Ara bé, com hem vist a la secció V, un mètode que respecta la quota, presenta altres problemes més profunds, com per exemple presentar la paradoxa de la població. A continuació veurem que el mètode de Hamilton presenta les tres paradoxes definides.

Proposició 3. *El mètode de Hamilton presenta les paradoxes d'Alabama, de la població i dels nous estats.*

Demostració. Veurem mitjançant tres contraexemples diferents que el mètode de Hamilton presenta les tres paradoxes.

- Paradoxa d'Alabama.
  Considerem un vector de poblacions **p**$=(11,3,1)$ i sigui $h=7$. Amb això, la quota resultant seria $\mathbf{q}=(5.1333,1.4,0.4667)$ i per tant el repartiment seria $\mathbf{a}=(5,1,1)$.
  El problema sorgeix quan en comptes de considerar $h=7$ consideram $h=8$. En aquest cas, la quota seria $\mathbf{q}=(5.8667,1.6,0.5333)$ i per tant, el repartiment seria $\mathbf{a}=(6,2,0)$.
  Així, veim que el mètode de Hamilton no és monòton respecte de la cambra, ja que al augmentar la mida de la cambra, el tercer estat ha perdut un escó.
- Paradoxa de la població.
  Emprarem un exemple històric que es pot trobar al llibre de Balinski i Young [3] per veure que el mètode de Hamilton pateix la paradoxa de la població.
  Considerem els estats A, B, C i D i les seves poblacions en moments diferents $\mathbf{p_1}=(15717204,10081158,11319366,632446)$ i $\mathbf{p_2}=(16108493,10186391,11374631,631615)$. Fixam la mida de la cambra com h = 92.
  En el primer cas la quota és $\mathbf{q}_1=(38.3040,24.5685,27.5861,1.5413)$ i en el segon $\mathbf{q}_2=(38.6929,24.4679,27.3221,1.5172)$ i per tant, els repartiments finals segons el mètode de Hamilton són $\mathbf{a}_1=(38,25,28,1)$ i $\mathbf{a}_2=(39,24,27,2)$.
  Així, podem observar que el quocient de les poblacions entre l'estat C i el D al principi era de $\frac{11319366}{632446}=17.8978$ mentre que al final es de $\frac{11374631}{631615}=18.0089$. És a dir, la població de l'estat C ha crescut més que la de l'estat D (que de fet ha patit un decreixement) però l'estat D ha guanyat un escó mentre que el C n'ha perdut un.
  Per tant, podem veure mitjançant aquest contraexemple que el mètode de Hamilton pateix de la paradoxa de la població.
- Paradoxa dels nous estats. Finalment per veure que el mètode de Hamilton pateix d'aquesta paradoxa, considerarem un vector de poblacions $\mathbf{p}=(6000,3000,2000,1000)$ amb $h=9$. Aquests paràmetres retornen el repartiment $\mathbf{a}=(5,2,1,1)$. Per veure que el mètode pateix d'aquesta paradoxa hem de considerar un subconjunt del vector de poblacions, llevar-li la part justa a la mida de la cambra i veure que el repartiment amb el subconjunt canvia.
  Com veim a l'exemple, el darrer estat té una població de 1000 i un escó. Per tant podem considerar $(6000,3000,2000)$ i $h=8$. En aquest cas el repartiment que retorna el mètode és $(4,2,2)$. Veim així que el mètode no és uniforme i, per tant, pateix de la paradoxa dels nous estats.

□

Per tant, tenim que el mètode de Hamilton s'ajusta bé a la idea de proporcionalitat en el sentit de que és homogeni, simètric, proporcional i respecta la quota. En canvi, com hem vist presenta incongruències, ja que en qualcuns casos presenta paradoxes.

C. Implementació del mètode

El mètode de Hamilton ha estat implementat mitjançant el procés descrit a la definició del mateix. Es pot trobar el codi amb la implementació a l'apèndix.

VII. Mètodes del divisor

A continuació presentarem la familia de mètodes més popular a l'actualitat, els mètodes del divisor. Aquests mètodes consisteixen en cercar un divisor adequat D que segueixi la idea 1 escó = D electors, calcular el que anomenarem les quotes modificades $\frac{p_i}{D}$ i arrodonir-les seguint un criteri específic.

A. Definició

El primer que farem és definir el que serà la base d'aquests mètodes, un d-arrodoniment d'un nombre real. Però per definir això, primer necessitarem definir el que és un criteri del divisor, és a dir, les funcions que definiran la forma en la que arrodonirem les quotes modificades.

Definició 19. Direm que qualsevol funció monòtona creixent $d(a)$ definida per tots els enters majors o iguals que 0 que satisfà $a \leq d(a) \leq a+1$ és un criteri del divisor.

Així podem passar a definir el que és un d-arrodoniment d'un nombre real.

Definició 20. Donat un $z \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ i un criteri del divisor d, direm que $[z]_d = a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és un d-arrodoniment de z si $d(a-1) \leq z \leq d(a)$.

Anem a entendre més clarament com emprar els criteris del divisor per definir diferents formes per arrodonir.

Exemple 5. Considerem $z = 1.8317$. Veurem com podem definir la quota inferior, la quota superior i l'arrodoniment habitual emprant la definició de d-arrodoniment.

- Per assignar la quota inferior consideram el criteri del divisor $d(a) = a+1$. Així $[z]_d = \lfloor z \rfloor = a = 1$, ja que $d(a-1) = 1 \leq z \leq 2 = d(a)$.
- Per assignar la quota superior consideram el criteri del divisor $d(a) = a$. Així $[z]_d = \lceil z \rceil = a = 2$, ja que $d(a-1) = 1 \leq z \leq 2 = d(a)$.
- Per assignar l'arrodoniment de la manera habitual consideram el criteri del divisor $d(a) = a + \frac{1}{2}$. Així $[z]_d = [z] = a = 2$, ja que $d(a-1) = \frac{3}{2} \leq z \leq \frac{5}{2} = d(a)$.

Amb tot això ja tenim les eines necessàries per definir el que és un mètode del divisor.

Definició 21. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p}$, una mida de la cambra h i un criteri del divisor d, direm que M és un mètode del divisor si: $M(\mathbf{p}, h) =$

$$\left\{ \mathbf{a} : \exists D \in \mathbb{R} \text{ tal que } a_i = \left[\frac{p_i}{D}\right]_d \ \forall i \in \{1, ..., s\} \text{ i } \sum_{j=1}^{s} a_j = h \right\}.$$

Per tant, només ens faltarà saber com trobar un divisor D adequat, que com veurem a continuació, quedarà determinat pel criteri del divisor d que seleccionem. El procés a seguir per calcular un repartiment mitjançant la definició és el següent:

1) Consideram $D = \frac{P}{h}$, on $P = \sum_{j=1}^{s} p_j$.
2) Calculam:
$$M(\mathbf{p}, h) = \left\{ \mathbf{a} : a_i = \left[\frac{p_i}{D}\right]_d \text{per a tot} 1 \leq i \leq s \right\}.$$
3) Si $\sum_{j=1}^{s} a_j > h$, definim una D més gran, ja que voldrem que cada $\left[\frac{p_i}{D}\right]_d$ sigui més petit per tal que $\sum_{j=1}^{s} a_j = h$ i repetim la passa 2.
4) Si $\sum_{j=1}^{s} a_j < h$, definim una D més petita, ja que voldrem que cada $\left[\frac{p_i}{D}\right]_d$ sigui més gran per tal que $\sum_{j=1}^{s} a_j = h$ i repetim la passa 2.
5) Si $\sum_{j=1}^{s} a_j = h$, ja hem calculat el repartiment segons el mètode seleccionat i haurem acabat.

Aquest és el procés que seguirem al realitzar la implementació de qualcuns dels mètodes del divisor. Ara bé, en qualcuns casos, hi ha una forma més senzilla de calcular els repartiments com demostren Paz Jiménez-Seral i Manuel Vázquez a la Gaceta de la Real Sociedad de Matemáticas [6] i que veurem a la subsecció VII-F.

Per altra banda, existeix una definició alternativa que es basa en una desigualtat min-max. Com sabem per la definició que hem donat:

$$d(a_i - 1) \leq \frac{p_i}{D} \text{ i } \frac{p_j}{D} \leq d(a_j) \iff$$
$$\frac{p_j}{d(a_j)} \leq D \text{ i } D \leq \frac{p_i}{d(a_i - 1)} \ \forall i, j \in \{1, ..., s\}.$$

D'on podem concloure que:

$$\min_{i \in \{1,...,s\}} \frac{p_i}{d(a_i - 1)} \geq \max_{j \in \{1,...,s\}} \frac{p_j}{d(a_j)}.$$

I per tant, podem definir els mètodes del divisor de la següent manera: $M(\mathbf{p}, h) =$

$$\left\{ \mathbf{a} : \min_{i \in \{1,...,s\}} \frac{p_i}{d(a_i - 1)} \geq \max_{j \in \{1,...,s\}} \frac{p_j}{d(a_j)} \text{ i } \sum_{k=1}^{s} a_k = h \right\}.$$

Aquesta definició no ens serà tan útil per calcular els repartiments segons els mètodes, però és molt emprada per demostrar qualcuns resultats teòrics.

B. Mètodes del divisor clàssics

De la definició podem extreure que per cada criteri del divisor existeix un mètode del divisor diferent. Per tant, podem trobar infinits mètodes de repartiment en aquesta família. En aquesta subsecció, però, definirem únicament els mètodes del divisor que emprarem per simular els diferents resultats de les eleccions, és a dir, els mètodes de Jefferson, Adams, Webster, Dean i Hill, que són els més empleats.

Com cada mètode del divisor està determinat per l'elecció del criteri del divisor mostrarem quin empra cadascun dels mètodes que estudiarem.

1) Webster: Webster va introduir el mètode que avui porta el seu nom per primera vegada a un discurs al Congrés dels Estats Units l'any 1792 quan va dir: "the population of each State shall be divided by a common divisor, and, in addition to the number of members resulting from such division, a member shall be allowed to each State whose fraction exceeds a moiety of the divisor"[12]. És a dir, s'ha d'assignar a cada estat la quota modificada arrodonida segons el mètode habitual d'arrodoniment. Així, el criteri del divisor seleccionat és $d(a) = a + \frac{1}{2}$.

2) Jefferson: Jefferson va introduir el seu mètode per primera vegada el 4 d'abril de 1792 al Congrés dels Estats Units on va dir en un dels seus discursos: "we must recur to the former rule which does it according to the numbers of the respective States; and we must take the nearest common divisor, as the ratio of distribution"[5]. És a dir, el mètode de Jefferson assigna a cada estat la quota modificada inferior i per tant, el criteri del divisor seleccionat és $d(a) = a + 1$. Aquest mètode també s'anomena mètode de D'Hondt i és el que s'empra a Espanya per assignar els escons als partits segons el nombre de vots que obtenen.

3) Adams: Adams va comunicar el seu mètode a Daniel Webster via carta on deia el següent: "It is to assume the ratio of 50,000 for the apportionment and then to add one member for the fraction of every State. The apportionment will give 226 members to which an addition of 24 members will make a House of 250 members. I have assumed the ratio of 50,000 only by way of illustration, and because it would be in the present instance, in my own opinion preferable to any other number—but the principle will adapt itself to any other number"[3] pàgina 27. Aquest mètode assigna a cada estat la quota modificada superior. És a dir, el criteri del divisor seleccionat és $d(a) = a$.

4) Hill: Hill presenta el seu mètode per primera vegada per mitjà d'una carta que va enviar a William C. Huston, president de la de la Comisió del Cens de la Cambra de Representants on deia el següent: "We might subtract one ratio from the other, measuring the divergence by the resulting arithmetical difference; or we might consider how many times greater one ratio is than the other, measuring the divergence on a percentage basis, and expressing it as a percentage or relative difference instead of an arithmetical or absolute difference."[3] pàgines 47-48. A la pràctica el que es fa és assignar a cada estat la quota modificada arrodonida segons la mitjana geomètrica de les quotes modificades inferior i superior. És a dir, el criteri del divisor seleccionat és $d(a) = \sqrt{a \cdot (a + 1)}$.

5) Dean: Dean va proposar el seu mètode a Webster com: "I cannot express my rule so densely and perspicuously as I could wish, but its meaning is, that each State shall have such a number of representatives, that the population for each shall be nearest possible, whether over or under, to [—]"[3] pàgina 29, on [-] és el divisor D. A la pràctica el mètode de Dean empra el criteri del divisor $d(a) = \frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}$.

C. Propietats

La següent passa, és veure quines propietats compleixen aquests mètodes. Ara bé, com hem dit que els mètodes que consideràvem havien de ser homogenis, simètrics i proporcionals, vegem si els mètodes del divisor ho són.

Proposició 4. *Cada mètode del divisor M té una solució particular D de manera que és homogeni i simètric. A més, els mètodes d'Adams, Webster, Jefferson, Hill i Dean són proporcionals.*

Demostració. Considerem un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i una mida de la cambra h. Considerem també un mètode del divisor $M(\mathbf{p}, h) = \left\{\mathbf{a} : \exists D \in \mathbb{R} \text{ tal que } a_i = \left[\frac{p_i}{D}\right]_d \text{ i } \sum_{j=1}^s a_j = h\right\}$.

Primer demostrarem l'homogeneïtat. Considerem $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ i vegem que $M(\mathbf{p}, h) = M(\lambda\mathbf{p}, h)$. Basta considerar $\hat{D} = \lambda D$, ja que:

$$\begin{aligned} M(\lambda\mathbf{p}, h) &= \left\{\mathbf{a} : a_i = \left[\frac{\lambda p_i}{\hat{D}}\right]_d \text{ i } \sum_{j=1}^s a_j = h\right\} \\ &= \left\{\mathbf{a} : a_i = \left[\frac{\lambda p_i}{\lambda D}\right]_d \text{ i } \sum_{j=1}^s a_j = h\right\} \\ &= \left\{\mathbf{a} : a_i = \left[\frac{p_i}{D}\right]_d \text{ i } \sum_{j=1}^s a_j = h\right\} = M(\mathbf{p}, h). \end{aligned}$$

I per tant, el mètode és homogeni.

Demostrem ara la simetria. Considerem una permutació σ. Notem que $a_{\sigma(i)} = \left[\frac{p_{\sigma(i)}}{D}\right]_d$. Ara com D és el mateix divisor que empra $M(\mathbf{p}, h)$, tenim que $M(\mathbf{p}_\sigma, h)$ serà el mateix que $M(\mathbf{p}, h)$ llevat de l'ordre i per tant el mètode serà simètric.

La proporcionalitat, igual que al mètode de Hamilton es pot trobar a [7]. □

A la proposició anterior només hem vist la proporcionalitat d'alguns dels mètodes del divisor. Això es deu a que no tots els mètodes del divisor són proporcionals. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 6. Considerem el vector de poblacions $\mathbf{p} = (34, 25, 8)$ i la mida de la cambra $h = 24$. Considerem el següent criteri del divisor:

$$d(a) = a + \frac{1}{5} \text{ si } a = 4 \text{ i } d(a) = a + 1 \text{ altrament.}$$

És fàcil veure que, en efecte, d és un criteri del divisor, ja que $a \leq d(a) \leq a + 1$. Per tant, si consideram el mètode del divisor determinat per aquest d-arrodoniment, diguem-li M_d, i calculam el repartiment mitjançant el mètode que s'explica a la secció VII-F, obtenim $M_d(\mathbf{p}, h) = \{(12, 9, 3)\}$. Notem ara que el vector $(12, 9, 3)$ és proporcional al vector $(4, 3, 1)$ i per tant si consideram $h' = 4 + 3 + 1 = 8$, hauríem d'obtenir $M_d(\mathbf{p}, h') = (4, 3, 1)$ si el mètode fos proporcional. Ara bé, al realitzar els càlculs obtenim $M_d(\mathbf{p}, h') = (5, 3, 0)$. Veient així que el mètode definit per d no és proporcional.

Com hem vist, no tots els mètodes del divisor són proporcionals, i per tant, encara que n'hi hagi infinits, no tots seran adequats per a realitzar repartiments en els que vulguem que es respecti la idea de proporcionalitat.

Una de les fortaleses dels mètodes del divisor és que no pateixen de cap de les paradoxes que hem presentat a aquest treball. És a dir, els mètodes del divisor són proporcionals respecte de la cambra, proporcionals respecte de la població i uniformes.

Primer de tot, veurem que els mètodes del divisor són monòtons respecte de la població. Balinski i Young presenten el teorema 4.3 a [3] que diu que un mètode és poblacionalment monòton si, i només si, és un mètode del divisor. Ara bé, com no presenten la demostració, nosaltres demostrarem la implicació que més ens interessarà.

Proposició 5. *Si un mètode M és un mètode del divisor, llavors és monòton respecte de la població.*

Demostració. Considerem M un mètode del divisor i siguin $\mathbf{p}, \mathbf{p'}$ dos vectors de població i $\mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h)$ i $\mathbf{a}' \in M(\mathbf{p'}, h')$. Sigui D el divisor del problema corresponent a $(\mathbf{p}, h)$ i D' el corresponent a $(\mathbf{p'}, h')$.

Notem primer que com M és un mètode del divisor, $\mathbf{a} = \left(a_i : a_i = \left[\frac{p_i}{D}\right]_d\right)$ i $\mathbf{a'} = \left(a'_i : a'_i = \left[\frac{p'_i}{D'}\right]_d\right)$.

Suposem que $\frac{p'_i}{p'_j} > \frac{p_i}{p_j}$ i que $a'_i < a_i$. Així, hem de veure que $a'_j \leq a_j$. Ara bé, com $a'_i < a_i$, tenim:

$$\left[\frac{p'_i}{D'}\right]_d < \left[\frac{p_i}{D}\right]_d \Rightarrow \frac{p'_i}{D'} \leq \frac{p_i}{D} \Rightarrow p'_i \leq \frac{D'}{D} \cdot p_i \Rightarrow \frac{p'_i}{p'_j} \leq \frac{D'}{D} \frac{p_i}{p'_j}.$$

Ara, com havíem suposat que $\frac{p'_i}{p'_j} > \frac{p_i}{p_j}$, tenim que:

$$\frac{p_i}{p_j} < \frac{p'_i}{p'_j} \leq \frac{D'}{D} \frac{p_i}{p'_j} \Rightarrow \frac{1}{p_j} < \frac{D'}{D} \frac{1}{p'_j} \Rightarrow \frac{D}{p_j} < \frac{D'}{p'_j} \Rightarrow \frac{p'_j}{D'} < \frac{p_j}{D} \Rightarrow a'_j \leq a_j.$$

Hem demostrat així que tots els mètodes del divisor són monòtons respecte de la població. ☐

Així, hem vist que els mètodes del divisor sempre són monòtons respecte de la població, i per tant, no pateixen de la paradoxa de la població.

Vegem a continuació que els mètodes del divisor són uniformes. M. L. Balinski i H. P. Young demostren el resultat que no només ens garantirà aquest fet sino que a més ens donarà una caracterització dels mètodes del divisor a [3]. Ara bé, abans de presentar la proposició, hem d'introduir una nova definició.

Definició 22. Direm que un mètode M és dèbilment monòton respecte de la població si $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{N}^s$, si $p_i > p_j$, llavors $a_i \geq a_j$.

Així, podem veure la caracterització dels mètodes del divisor donada pel teorema 8.4 demostrat a [3].

Proposició 6. *Un mètode M és uniforme i dèbilment monòton respecte de la població si, i només si, és un mètode del divisor.*

Aquesta proposició ens assegura que un mètode del divisor mai pateix de la paradoxa dels nous estats, donant-nos una caracterització molt interessant d'aquests mètodes.

Finalment, hem de veure que els mètodes del divisor no pateixen de la paradoxa d'Alabama, és a dir, hem de veure que són monòtons respecte de la cambra. Per això, emprarem una proposició que demostra Friederich Pukelsheim al seu llibre Proportional Representation que demostra la relació entre la uniformitat (que ell anomena coherència) i la proporcionalitat respecte de la cambra a la secció 9.5 a les pàgines 163-165 a [11].

Proposició 7. *Tot mètode uniforme és proporcional respecte de la cambra.*

Així, com ja hem vist que els mètodes del divisor són uniformes, també tenim que són monòtons respecte de la cambra i per tant no pateixen de la paradoxa d'Alabama. A més, aquest resultat és molt més fort ja que ens mostra que si un mètode qualsevol no pateix de la paradoxa dels nous estats, llavors tampoc patirà la paradoxa d'Alabama.

Només ens faltarà veure si els mètodes del divisor respecten la quota per veure que són el mètode perfecte, però com hem dit a la secció V, no hi ha cap mètode monòton respecte de la població que respecti la quota, per tant, la següent proposició és certa.

Proposició 8. *Els mètodes del divisor, en general, no respecten la quota.*

En conclusió, els mètodes del divisor s'ajusten prou bé a la idea de proporcionalitat en el sentit de que són homogenis, simètrics i proporcionals llevat de que en general no respecten la quota. Per altra banda, el seu comportament quan es varien els paràmetres del problema és estable ja que no pateixen de cap de les tres paradoxes que consideram a aquest treball.

D. Desigualtats entre parells

Hem vist que hi ha infinits mètodes de repartiment, i per tant, l'elecció d'un o d'un altre és més complexa del que podríem esperar. A més, com els mètodes que empram es basen en arrodonir les quotes estàndard o les quotes modificades, és clar que donat un parell d'estats sempre hi haurà un lleuger afavoriment cap a un dels dos segons el que anomenarem una mesura de desigualtat o d'injustícia entre dos estats.

Aquestes mesures d'injustícia es basaran en considerar dos estats i realitzar una comparació entre ells per tal de quantificar com de molt es respecta un criteri. Aquest criteri pot ser, per exemple, la proporció d'escons que es donen a cada estat segons la població $|\frac{a_i}{p_i} - \frac{a_j}{p_j}|$, encara que es poden seleccionar altres criteris com poden ser la proporció de població representada per cada escó $|\frac{p_i}{a_i} - \frac{p_j}{a_j}|$, la mancança de representació a un estat $|a_j \cdot \frac{p_i}{p_j} - a_i|$, etc. Al llarg d'aquesta subsecció considerarem $|\frac{p_i}{a_i} - \frac{p_j}{a_j}|$ com la mesura d'injustícia, però hem de tenir en compte, que podem triar qualsevol altra que considerem adequada considerant els reordenaments dels a_i, a_j, p_i i p_j a aquesta mesura d'injustícia. Així, podem definir què vol dir que un estat hagi estat afavorit en el repartiment.

Definició 23. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i un repartiment $\mathbf{a}$, direm que l'estat i ha estat afavorit respecte l'estat j si $\frac{a_i}{p_i} > \frac{a_j}{p_j}$.

Notem que pot ser que transferint un escó d'un estat a un altre, es redueixi aquesta mesura d'injustícia. Direm que un repartiment en el que això ocorri, és inestable.

Definició 24. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i un repartiment $\mathbf{a}$, direm que $\mathbf{a}$ és inestable si $\exists i, j \in \{1, ..., s\}$:

$$\left|\frac{a_i - 1}{p_i} - \frac{a_j + 1}{p_j}\right| < \left|\frac{a_i}{p_i} - \frac{a_j}{p_j}\right|.$$

Per tant, podem definir també el que és un repartiment estable.

Definició 25. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i un repartiment $\mathbf{a}$, direm que $\mathbf{a}$ és estable si $\forall i, j \in \{1, ..., s\}$ tal que $\frac{a_i}{p_i} \geq \frac{a_j}{p_j}$:

$$\frac{a_i}{p_i} - \frac{a_j}{p_j} \leq \frac{a_j + 1}{p_j} - \frac{a_i - 1}{p_i}.$$

Una de les grans fortaleses dels mètodes del divisor que hem presentat és que cada un és estable segons un cert criteri d'injustícia. En el cas del criteri que hem exposat al llarg de la subsecció, el mètode que retorna repartiments estables segons aquest criteri és el de Webster.

Proposició 9. *Si un repartiment és estable segons la mesura d'injustícia* $\left|\frac{a_i}{p_i} - \frac{a_j}{p_j}\right|$*, llavors ha estat obtingut mitjançant el mètode de Webster.*

Demostració. Sigui $\mathbf{a}$ un repartiment de $\mathbf{p}$ i h estable, és a dir, $\forall i, j \in \{1, ..., s\}$, si $\frac{a_i}{p_i} \geq \frac{a_j}{p_j}$, llavors:

$$\frac{a_i}{p_i} - \frac{a_j}{p_j} \leq \frac{a_j + 1}{p_j} - \frac{a_i - 1}{p_i}.$$

Realitzant les restes obtenim:

$$\frac{a_i \cdot p_j - a_j \cdot p_i}{p_i \cdot p_j} \leq \frac{p_i \cdot (a_j + 1) - p_j \cdot (a_i - 1)}{p_i \cdot p_j}.$$

Si simplificam:

$$a_i \cdot p_j - a_j \cdot p_i \leq p_i \cdot (a_j + 1) - p_j \cdot (a_i - 1).$$

Si operam amb aquesta desigualtat:

$$a_i \cdot p_j + p_j \cdot (a_i - 1) \leq p_i \cdot (a_j + 1) + a_j \cdot p_i \iff p_j \cdot (2 \cdot a_i - 1) \leq p_i \cdot (2 \cdot a_j + 1) \iff \frac{p_j}{(2 \cdot a_j + 1)} \leq \frac{p_i}{(2 \cdot a_i - 1)} \iff \frac{p_j}{2(a_j + \frac{1}{2})} \leq \frac{p_i}{2(a_i - \frac{1}{2})} \iff \frac{p_j}{(a_j + \frac{1}{2})} \leq \frac{p_i}{(a_i - \frac{1}{2})}.$$

Notem que aquesta desigualtat es compleix $\forall i, j \in \{1, ..., s\}$ tal que $\frac{a_i}{p_i} \geq \frac{a_j}{p_j}$, per tant:

$$\min_{i \in \{1,...,s\}} \frac{p_i}{(a_i - \frac{1}{2})} \geq \max_{j \in \{1,...,s\}} \frac{p_j}{(a_j + \frac{1}{2})}.$$

Notem, per tant, que aquest repartiment ha estat obtingut mitjançant el mètode de Webster, ja que el d-arrodoniment que empra aquest mètode és $d(a) = a + \frac{1}{2}$, i per tant els repartiments obtinguts mitjançant el mètode de Webster compleixen:

$$M(\mathbf{p}, h) = \left\{\mathbf{a} : \min_{i \in \{1,...,s\}} \frac{p_i}{d(a_i - 1)} \geq \max_{j \in \{1,...,s\}} \frac{p_j}{d(a_j)}\right\} = \left\{\mathbf{a} : \min_{i \in \{1,...,s\}} \frac{p_i}{(a_i - \frac{1}{2})} \geq \max_{j \in \{1,...,s\}} \frac{p_j}{(a_j + \frac{1}{2})}\right\}.$$

□

Amb raonaments anàlegs es pot definir el concepte de repartiment estable segons altres criteris i arribar a les mateixes conclusions per altres mètodes del divisor, mostrant així el poder d'aquests mètodes.

E. Optimització amb restriccions

Una darrera forma de trobar mètodes de repartiment és l'optimització amb restriccions. Aquesta consisteix en considerar una funció que vulguem que minimitzi el repartiment i trobar el repartiment que minimitzi la funció i a la vegada respecti les restriccions. És a dir, podem definir un mètode de repartiment com:

$$\begin{array}{ll} & \min f(\mathbf{a}) \\ \text{subj. a:} & a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \sum_{j=1}^{s} a_j = h,\ a_i \geq r_i\ \forall 1 \leq i \leq s. \end{array}$$

El problema que podem trobar amb aquesta manera de trobar els repartiments és que en podríem trobar qualcuns que tinguessin un error molt petit, mentre que l'error per qualque estat podria ser molt gran. Per això, es pot emprar un altre mètode que donada una mesura d'injustícia les calcula dos a dos i ens retorna el repartiment que té la més petita de les màximes mesures d'injustícia entre dos estats, com per exemple la que hem emprat a la secció anterior. És a dir, el mètode de repartiment es podrà definir de la següent manera:

$$\begin{array}{ll} & \min_{a \in \mathbb{N}^s} \max_{ij \in \{1,...,s\}} \left|\frac{a_i}{p_i} - \frac{a_j}{p_j}\right| \\ \text{subj. a:} & a_i \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{s} a_j = h,\ a_i \geq r_i\ \forall 1 \leq i \leq s. \end{array}$$

F. Implementació dels mètodes del divisor

Com hem mencionat quan definíem els mètodes del divisor, considerarem dues formes de calcular els repartiments, una mitjançant la definició i el procés descrit i una altra considerant el resultat que demostren Paz Jiménez-Seral i Manuel Vázquez a la Gaceta de la Real Sociedad de Matemáticas [6]. El codi d'ambdues implementacions es pot trobar a l'apèndix A.

La primera de les implementacions es basarà en el procés descrit, encara que haurem de fer una consideració prèvia. En el cas en que $d(0) = 0$, que serà l'únic cas en el que emprarem la definició, haurem d'assignar 1 escó inicial als h estats amb les poblacions més altes. Si $h \geq s$ assignarem un escó a cada estat.

La segona implementació empra un resultat demostrat per Paz Jiménez-Seral i Manuel Vázquez en la Gaceta de la Real Sociedad de Matemáticas [6]. Aquest resultat ens mostra que podem calcular els repartiments mitjançant qualcuns mètodes del divisor si dividim les poblacions per una successió de divisors, ordenam els resultats i agafam els primers h repartiments. Ara bé, abans de mostrar el resultat que ens permet realitzar la implementació dels mètodes del divisor d'aquesta manera haurem d'introduir dues definicions.

Definició 26. Direm que β és una successió de divisors si és una successió creixent de nombres reals.

Definició 27. Sigui $\mathbf{p}$ un vector de poblacions, h una mida de la cambra i $\beta = (d_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Considerem el següent conjunt:

$$S = \left\{ q_{ij} = \frac{p_i}{d_j} \;\middle|\; i \in \{1, ..., s\} \text{ i } j \in \{0, ..., h-1\} \right\}.$$

Considerem ara l'ordenació dels q_{ij} de forma decreixent i seleccionem un subconjunt T de S format pels h primers q_{ij} segons l'ordenació anterior. La s-tupla $n = (n_1, ..., n_s)$ amb $n_i = |\{j \mid q_{ij} \in T\}|$ direm que és una distribució respecte de la successió de divisors β de h segons $\mathbf{p}$.

Amb això, podem passar a definir el resultat que ens permetrà calcular els repartiments segons els mètodes del divisor mitjançant una distribució respecte d'una successió de divisors com es demostra a la proposició 9 a [6] .

Proposició 10. *Sigui d un criteri del divisor amb $d(0) \neq 0$. Llavors, per a qualsevol mida de la cambra h, i vector de poblacions $\mathbf{p}$, els repartiments del mètode del divisor segons la funció d coincideixen amb les distribucions respecte de la successió de divisors $(d_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, on $d_i = d(i)$.*

Entendrem més fàcilment aquesta implementació mitjançant un exemple.

Exemple 7. A les eleccions de 2023 a Espanya, el nombre de vots per partits a Astúries va ser el següent: PP-209581, PSOE-202280, SUMAR-87534, VOX-73438. Volem obtenir el repartiment de 7 escons entre aquests partits segons el nombre de vots que han obtingut mitjançant el mètode de D'Hondt (també anomenat mètode de Jefferson). Per tant, hem de considerar $d(a) = a + 1$.

Així, la successió de divisors serà $\beta = \{1, 2, ...\}$ i el conjunt S, format pels $\frac{p_i}{d_j}$, tendrà els valors que trobam a la taula IV. No hem inclòs tots els elements del conjunt S a la taula, només els corresponents als primers divisors, ja que són suficients. També hem marcat en vermell els 7 elements més grans per tal de poder veure com es repartiran els escons segons els diferents partits.

Taula IV
SUBCONJUNT DEL CONJUNT S SEGONS L'EXEMPLE 6. EN VERMELL ES VEUEN ELS 7 ELEMENTS MÉS ALTS.

	1	2	3	4
PP	209581	104790.5	69860.33	52395.25
PSOE	202280	101140	67426.67	50570
SUMAR	87534	43767	29178	21883.5
VOX	73438	36719	24479.33	18359.5

Així, podem veure que al PP li correspondrien 3 escons, al PSOE 2, a SUMAR 1 i a VOX 1.

Amb aquest resultat hem realitzat les implementacions per aquells mètodes del divisor que empren un criteri del divisor tal que $d(0) \neq 0$. És a dir, el mètode de Jefferson i el mètode de Webster. Els altres mètodes els hem implementat mitjançant la definició.

VIII. BIAIX

Finalment ens interessarà que els repartiments no afavoreixin a cap estat, ni petit, ni gran. És a dir, voldrem que els nostres repartiments no estiguin esbiaixats. Per analitzar el biaix dels nostres repartiments presentarem tres aproximacions diferents. Una primera aproximació més analítica, una segona aproximació gràfica i una tercera aproximació geomètrica. És important remarcar també que aquest estudi del biaix es farà considerant els mètodes del divisor.

A. *Primera aproximació*

En aquesta primera aproximació veurem, donats dos mètodes de repartiment, si un afavoreix a un estat en relació a un altre. A més, veurem quins mètodes són millors tenint en compte aquesta definició de biaix. Així, el primer que hem de fer és definir què vol dir que donats dos mètodes de repartiment un afavoreixi més a un estat que a un altre.

Definició 28. Donats dos mètodes de repartiment M' i M, direm que M' afavoreix als estats petits relativament a M si per tot M-repartiment $\mathbf{a}$ i M'-repartiment $\mathbf{a'}$ per $\mathbf{p}$ i h:

$$p_i < p_j \text{ implica } a'_i \geq a_i \text{ o } a'_j \leq a_j.$$

Si M' afavoreix als estats petits relativament a M, escriurem M' > M.

El següent resultat, demostrat per Balinski i Young al teorema 5.1 a [3] ens serà d'utilitat per veure quins mètodes del divisor afavoreixen més als estats petits que als altres.

Teorema 3. *Si M i M' són mètodes del divisor amb criteris de divisió d i d' satisfent $\frac{d'(a)}{d'(b)} > \frac{d(a)}{d(b)}$ $\forall a, b \in \mathbb{N}$ tal que $a > b \geq 0$, llavors M' afavoreix als estats petits en relació a M.*

Amb aquest resultat podem demostrar el següent:

Proposició 11. *Si A és el mètode d'Adams, D el de Dean, H el de Hill, W el de Webster i J el de Jefferson:*

$$A > D > H > W > J.$$

Demostració. Diguem d_A, d_D, d_H, d_W i d_J als criteris del divisor de cada un dels mètodes del divisor especificats. Així, $d_A(a) = a, d_D(a) = \frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}, d_H(a) = \sqrt{a(a+1)}, d_W(a) = a + \frac{1}{2}$ i $d_J(a) = a + 1$. Considerem ara $a, b \in \mathbb{N}$ tals que $a > b > 0$.

Primer hem de veure que $\frac{d_A(a)}{d_A(b)} > \frac{d_D(a)}{d_D(b)}$.

$$\frac{d_A(a)}{d_A(b)} > \frac{d_D(a)}{d_D(b)} \iff \frac{a}{b} > \frac{\frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}}{\frac{b(b+1)}{b+\frac{1}{2}}} \iff 1 > \frac{\frac{a+1}{a+\frac{1}{2}}}{\frac{b+1}{b+\frac{1}{2}}} \iff$$
$$(a+\tfrac{1}{2})(b+1) > (a+1)(b+\tfrac{1}{2}) \iff ba + a + \tfrac{b}{2} + \tfrac{1}{2} >$$
$$ab + b + \tfrac{a}{2} + \tfrac{1}{2} \iff a + \tfrac{b}{2} > b + \tfrac{a}{2} \iff a - \tfrac{a}{2} >$$
$$b - \tfrac{b}{2} \iff \tfrac{a}{2} > \tfrac{b}{2} \iff a > b.$$

Com per hipòtesi $a > b$, ha de passar que $\frac{d_A(a)}{d_A(b)} > \frac{d_D(a)}{d_D(b)}$ i, per tant, A > D.

La següent passa és veure que $\frac{d_D(a)}{d_D(b)} > \frac{d_H(a)}{d_H(b)}$.

$$\frac{\frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}}{\frac{b(b+1)}{b+\frac{1}{2}}} > \frac{\sqrt{a(a+1)}}{\sqrt{b(b+1)}} \iff \left(\frac{\frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}}{\frac{b(b+1)}{b+\frac{1}{2}}}\right)^2 > \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \iff$$
$$\frac{\frac{a(a+1)}{(a+\frac{1}{2})^2}}{\frac{b(b+1)}{(b+\frac{1}{2})^2}} > 1 \iff (a^2+a)(b+\tfrac{1}{2})^2 > (b^2+b)(a+\tfrac{1}{2})^2 \iff$$
$$a^2b^2 + a^2b + \tfrac{a^2}{4} + ab^2 + ab + \tfrac{a}{4} >$$
$$b^2a^2 + b^2a + \tfrac{b^2}{4} + ba^2 + ba + \tfrac{b}{4} \iff \tfrac{a^2+a}{4} > \tfrac{b^2+b}{4}.$$

Així, com $a > b$, $\frac{a^2+a}{4} > \frac{b^2+b}{4}$ i, per tant, $\frac{d_D(a)}{d_D(b)} > \frac{d_H(a)}{d_H(b)}$. D'aquesta manera hem demostrat que D > H.

A continuació demostrarem que $\frac{d_H(a)}{d_H(b)} > \frac{d_W(a)}{d_W(b)}$.

$$\frac{\sqrt{a(a+1)}}{\sqrt{b(b+1)}} > \frac{a+\frac{1}{2}}{b+\frac{1}{2}} \iff \frac{a(a+1)}{b(b+1)} > \frac{(a+\frac{1}{2})^2}{(b+\frac{1}{2})^2} \iff$$
$$(a^2+a)(b+\tfrac{1}{2})^2 > (b^2+b)(a+\tfrac{1}{2})^2.$$

Ara bé, hem vist abans que aquesta darrera desigualtat era certa quan $a > b$ i, per tant, $\frac{d_H(a)}{d_H(b)} > \frac{d_W(a)}{d_W(b)}$. Així hem vist que H > W.

Per acabar, hem de veure que $\frac{d_W(a)}{d_W(b)} > \frac{d_J(a)}{d_J(b)}$.

$$\frac{a+\frac{1}{2}}{b+\frac{1}{2}} > \frac{a+1}{b+1}.$$

Hem vist quan demostràvem que A > D que aquesta desigualtat era certa quan $a > b$, per tant, ja hem demostrat que W > J.

Així, hem vist que:

$$\frac{d_A(a)}{d_A(b)} > \frac{d_D(a)}{d_D(b)} > \frac{d_H(a)}{d_H(b)} > \frac{d_W(a)}{d_W(b)} > \frac{d_J(a)}{d_J(b)}.$$

I per tant, $A > D > H > W > J$.

□

Aquesta proposició ens mostra que, entre aquests mètodes, el mètode de Jefferson és el mètode que menys afavoreix als estats petits en relació a la resta. Per altra banda, el mètode del divisor que més afavoreix als estats petits és el d'Adams. Ara bé, amb això només tenim informació relativa del biaix d'un mètode. També ens interessarà estudiar el biaix d'un mètode en sentit absolut.

A partir d'aquí només considerarem dues poblacions p_1 i p_2, ja que per veure si un mètode afavoreix a un estat o a un altre, és a dir, per veure si té biaix, és suficient fer les comparacions entre dues poblacions.

Definició 29. Donat $(a_1, a_2) \in M((p_1, p_2), h)$ amb $p_1 > p_2 > 0$ direm:

1) M afavoreix als estats grans sobre els petits si $\frac{a_1}{p_1} > \frac{a_2}{p_2}$.
2) M afavoreix als estats petits sobre els grans si $\frac{a_1}{p_1} < \frac{a_2}{p_2}$.

Notem però que aquesta definició de biaix pot resultar molt simplista i ens interessarà una mida que empri una mostra d'estats un poc més gran per tal de decidir si el mètode té biaix. Per això veurem, d'una sèrie de repartiments, quin nombre de repartiments afavoreix als estats petits i quin als estats grans. D'aquesta manera tindrem una visió més general del biaix del mètode.

Notem també que donades dues poblacions p_1 i p_2, sempre existirà un $h_* \in \mathbb{N}$ de manera que $h_* \cdot \frac{p_1}{\sum_{j=1}^{2} p_j}$ i $h_* \cdot \frac{p_2}{\sum_{j=1}^{2} p_j}$ són enters (basta considerar $h = \sum_{j=1}^{2} p_j$). És a dir, sempre existirà una mida de la cambra que ens permeti repartir exactament la seva quota estàndard a cada estat. Això, ens motivarà a definir la mida de la cambra perfecta.

Definició 30. Direm que $h_* \in \mathbb{N}$ és la mida de la cambra perfecta si és l'enter més petit que compleix que $h_* \cdot \frac{p_1}{\sum_{j=1}^{2} p_j}$ i $h_* \cdot \frac{p_2}{\sum_{j=1}^{2} p_j}$ són enters.

Podria ser una solució adequada assignar sempre aquesta mida de la cambra a tots els problemes, però a la pràctica aquest nombre normalment serà molt alt, perdent utilitat. Però, ens servirà per analitzar el biaix dels mètodes com hem explicat anteriorment.

Definició 31. Considerem M un mètode de repartiment i p_1, p_2 dues poblacions. Sigui ara $S(p_1, p_2)$ el nombre de repartiments que afavoreixen l'estat petit i $L(p_1, p_2)$ el nombre de repartiments que afavoreixen l'estat gran sobre tots els repartiments $(a_1, a_2) \in M((p_1, p_2), h)$ on $h \leq h_*$.

Direm que un mètode M és sense biaix per parells de poblacions si $\forall (p_1, p_2) \quad L(p_1, p_2) = S(p_1, p_2)$.

Vegem un exemple per entendre millor el funcionament d'aquest mètode per determinar el biaix d'un mètode.

Exemple 8. Considerem els mètodes del divisor de Webster i de Jefferson. Considerem també el vector de poblacions $(250, 150)$. El primer que hem de fer és determinar h_*, és a dir, el més petit natural tal que $h_* \cdot \frac{250}{400}$ i $h_* \cdot \frac{150}{400} \in \mathbb{N}$. És fàcil veure que aquest nombre és $h_* = 8$.

La següent passa a realitzar és calcular $M(\mathbf{p}, h)\ \forall h \in \{1, ..., 8\}$ tant pel mètode de Webster com pel mètode de Jefferson. Els resultats d'aquests repartiments es poden trobar a la taula V.

Amb aquests repartiments ja calculats només ens quedarà veure quins afavoreixen a l'estat gran i quins a l'estat petit segons la definició 31. La taula VI indica si els repartiments a la taula V afavoreixen a l'estat gran o a l'estat petit. Com podem veure, al mètode de Webster 4 repartiments afavoreixen l'estat gran i 3 al petit i per tant, podem dir que en aquest cas, el mètode de Webster afavorirà a l'estat gran. Per altra banda, el mètode de Jefferson afavoreix a l'estat gran en 5 repartiments i al petit en 2. Per tant, també podem dir que el mètode de Jefferson afavoreix, en aquest cas, a l'estat gran.

Ara bé, una altra conclusió que podríem extreure és que en aquest cas, el mètode de Webster afavoreix a l'estat gran manco que el de Jefferson ja que la diferència entre el nombre de repartiments que afavoreixen un estat o l'altre és més petit en el cas de Webster.

Aquest mètode per calcular el biaix té l'avantatge de que no necessita conèixer les distribucions de les poblacions, però té el desavantatge de que la seva aplicació real pot estar limitada, ja que a la pràctica, la mida de la cambra sol ser molt més petita que la mida de la cambra perfecta h_*. Per això, presentarem una segona aproximació gràfica i geomètrica que ens permetrà treure conclusions més precises en quant al biaix d'un mètode.

Taula V

Repartiments segons els mètodes de Webster i de Jefferson pel vector de poblacions $(250, 150)$ i per $h \in \{1, ..., 8\}$.

h	1	2	3	4	5	6	7	8
Webster	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$	$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(4, 2)$	$(4, 3)$	$(5, 3)$
Jefferson	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$	$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(4, 2)$	$(5, 2)$	$(5, 3)$

Taula VI

Dels repartiments a la taula V s'indica amb G quins afavoreixen l'estat gran i amb P quins afavoreixen al petit. Els repartiments que no afavoreixen a cap dels dos estats s'indican amb una I.

h	1	2	3	4	5	6	7	8
Webster	G	P	G	G	P	G	P	I
Jefferson	G	P	G	G	P	G	G	I

B. *Segona aproximació*

La idea darrera d'aquesta segona aproximació és molt intuïtiva. Considerarem un parell d'estats i un mètode del divisor M. Per cada repartiment (a_1, a_2) trobarem tots els (p_1, p_2) tals que $p_1 > p_2$ i $(a_1, a_2) \in M((p_1, p_2), a_1 + a_2)$ i considerarem la proporció de (p_1, p_2) que afavoreix l'estat petit. Tot això ho farem de manera gràfica per tal de facilitar la interpretació.

Notem que donat un repartiment (a_1, a_2) i un mètode del divisor M, (p_1, p_2) retornarà el repartiment (a_1, a_2) mitjançant el mètode del divisor M caracteritzat pel criteri del divisor d si $d(a_i) \geq \frac{p_i}{D} \geq d(a_i - 1)$. Per tant, podem definir el conjunt de poblacions donat un repartiment (a_1, a_2) i un divisor D.

Definició 32. Sigui $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ un repartiment amb un mètode del divisor i $D \in \mathbb{R}$ fixat. Definim $R_D(\mathbf{a})$ com el conjunt de $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ tal que $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in M(\mathbf{p}, a_1 + a_2)$ emprant el divisor D i basat en d com:

$$R_D(\mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{p} : d(a_i) \geq \frac{p_i}{D} \geq d(a_i - 1) \text{ per tot } 1leqi \leq s \right\}.$$

Notem que aquest conjunt de poblacions retornarà un rectangle amb costats de longitud $D(d(a_1) - d(a_1 - 1))$ i $D(d(a_2) - d(a_2 - 1))$. A més, com per definició $d(a) \geq a \geq d(a - 1)$, si consideram $D = 1$, tendrem que el repartiment $\mathbf{a}$ estarà dins el rectangle. D'aquesta manera podrem veure visualment quin rectangle correspon a cada repartiment als gràfics que presentarem. A partir d'ara considerarem $D = 1$ si no es diu el contrari.

Per altra banda, com hem definit anteriorment, donada una població (p_1, p_2) amb $p_1 > p_2 > 0$ i el seu repartiment corresponent (a_1, a_2), si $\frac{a_1}{p_1} > \frac{a_2}{p_2}$ el repartiment afavoreix als estats grans sobre els petits i si $\frac{a_1}{p_1} < \frac{a_2}{p_2}$, al contrari. Per tant, si consideram la recta $\frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2}$, aquesta tendrà un segment contingut dins el rectangle corresponent i que a més contindrà (a_1, a_2), ja que si $(a_1, a_2) = (p_1, p_2)$, la igualtat es complirà. A més, si tenim un vector de poblacions $\mathbf{p} \in R_1(\mathbf{a})$ de manera que està per damunt de la recta $\frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2}$ sabrem que els estats grans estaran sent afavorits, mentre que si està per davall sabrem que els estats petits estan sent afavorits. Podem veure tot això a la figura 1.

D'aquesta manera podrem veure gràficament la probabilitat de que donat un repartiment, l'estat gran afavoreixi al petit, ja que aquesta probabilitat correspon a la proporció de vectors de població que retornen un repartiment que afavoreix al petit i, a la vegada, aquesta proporció correspon a l'àrea del rectangle sobre la recta així com hem explicat.

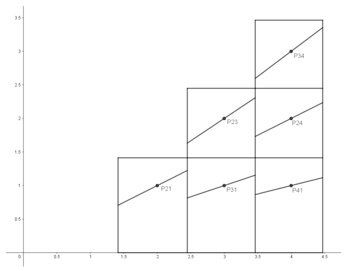

Figura 1. Rectangles corresponents al mètode de Hill. Els punts P_{ij} corresponen al repartiment (i, j). L'eix horitzontal correspon a p_1 i el vertical correspon a p_2.

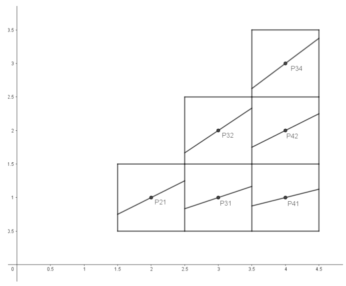

Figura 2. Rectangles corresponents al mètode de Webster.

Definició 33. Direm que un mètode M és imparcial per parells (o que no té biaix per parells) si $\forall a_1 > a_2 > 0$ i $\forall x > 0$ la probabilitat de que l'estat 1 sigui afavorit sobre l'estat 2 és la mateixa que la de que l'estat 2 sigui afavorit sobre l'estat 1.

Com hem indicat anteriorment podem veure aquestes probabilitats al gràfic que hem construït, i per tant podrem emprar aquest per veure si un mètode satisfà la definició. De fet, podem veure a la figura 1 que el mètode de Hill no és imparcial per parells, ja que l'àrea sota la recta als rectangles és major que l'àrea sobre els mateixos.

De fet, l'únic mètode que satisfà aquesta definició és el mètode de Webster com demostren Balinski i Young al teorema 5.2 a [3]. Podem observar a la figura 2 com l'àrea sota i sobre la recta dins tots els rectangles és igual quan empram el mètode de Webster.

C. Tercera aproximació

Per acabar amb aquesta secció presentarem una darrera aproximació geomètrica per estudiar el biaix d'un mètode. Aquesta darrera aproximació es basarà en el fet que donat un mètode M i un repartiment (a_1, a_2) amb $a_1 > a_2 > 0$ de h, les poblacions (p_1, p_2) tals que $p_1 + p_2 = h$ que tenen com a solució (a_1, a_2) formen un segment que conté $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.

Notem primer de tot que si (a_1, a_2) està més a la dreta del punt mig, l'estat petit està sent afavorit, és a dir, $\frac{a_1}{p_1} > \frac{a_2}{p_2}$. Donat que $p_1 + p_2 = h$, si p_1 creix, p_2 decreix. Suposem ara que $p_1 > a_1$, és a dir, (p_1, p_2) està a la dreta de (a_1, a_2). En aquest escenari $p_2 < a_2$, llavors $\frac{a_2}{p_2} > \frac{a_1}{p_1}$ i per tant, l'estat petit està sent afavorit si (p_1, p_2) està a la dreta de (a_1, a_2).

De manera anàloga podem veure que si (p_1, p_2) està a l'esquerra de (a_1, a_2) l'estat gran està sent afavorit.

Per tant, direm que M no té biaix si $\forall (a_1, a_2)$ tal que $a_1 > a_2 > 0$ aquest és el punt mig del segment format per $p_1 + p_2 = a_1 + a_2$, ja que si no ho és, hem vist que la proporció de punts al segment en la que s'afavoreix als estats grans no és igual que la proporció de punts en la que s'afavoreix als estats petits. L'únic mètode que compleix això és el mètode de Webster com indiquen Balinski i Young a les pàgines 123 i 124 [3].

En conclusió, al llarg d'aquesta secció hem aportat diferents criteris per decidir si un mètode del divisor està esbiaixat o no. Quan comparàvem el biaix entre els mètodes del divisor hem vist que el mètode amb menys biaix en relació als altres que hem estudiat és el mètode de Jefferson. Ara bé, quan hem estudiat el biaix de manera absoluta a cada un dels mètodes hem vist que el mètode de Webster era el més imparcial.

IX. Mètode de la quota

Els mètodes que hem vist fins al moment, el de Hamilton i els del divisor, han tengut propietats molt diferents. Mentre que el de Hamilton respectava la quota però patia de les tres paradoxes, els del divisor no patien de cap de les paradoxes però tampoc respectaven la quota. Per tant, com el fet de respectar la quota és bastant rellevant a l'hora d'intentar repartir de manera proporcional, sorgeix la següent pregunta: existeix qualque mètode que respecti a la quota i que a la vegada no pateixi d'alguna de les paradoxes? Efectivament existeix i és el mètode de la quota.

Aquest mètode, presentat per Balinski i Young l'any 1975 [1], es basa en el mètode de Jefferson, ja que aquest té una propietat molt interessant i és que tots els repartiments obtinguts mitjançant aquest mètode estan sempre per damunt de la quota inferior com demostren Balinski i Young al teorema 1 a [2].

Definició 34. Direm que un mètode M satisfà la quota inferior si $\forall \mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h)$, $\lfloor q_i \rfloor \leq a_i \quad \forall i \in \{1, ..., s\}$.

Proposició 12. *L'únic mètode uniforme i simètric que respecta la quota inferior és el mètode de Jefferson.*

Així, si realitzam els repartiments mitjançant el mètode de Jefferson però ens asseguram de no assignar un escó a un estat si aquest es passaria de la quota superior, tindrem una modificació del mètode de Jefferson que ens retornarà sempre repartiments que respecten la quota. El procés per obtindre un repartiment mitjançant el mètode de la quota donat un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i h és el següent:

1) Inicialitzam el repartiment a **0** que és l'únic repartiment de $M(\mathbf{p}, 0)$.
2) Consideram $U(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \left\{ i : a_i < \frac{p_i(h+1)}{\sum_{j=1}^{s} p_i} \right\}$. El conjunt d'estats als que se li pot afegir un escó sense violar la quota.
3) Consideram $k \in \{1, ..., h\}$ com la mida de la cambra en cada moment del procés iteratiu.
4) Mentre $k < h$, iteram.
5) Si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, k)$ definim $\mathbf{a'} \in M(\mathbf{p}, k+1)$ on $a'_i = a_i + 1$ si $i \in U(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ i $\frac{p_i}{(a_i+1)} \geq \frac{p_l}{a_l+1} \quad \forall l \in U(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \setminus \{i\}$ i a més $a_i < \lfloor q_i \rfloor$ i $a'_j = a_j \ \forall j \neq i$.

D'aquesta manera obtindrem per construcció un mètode que no només respectarà la quota sinó que a més serà monòton respecte de la cambra, ja que construïm el repartiment afegint sempre un escó i per tant, si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h)$ i $\mathbf{a'} \in M(\mathbf{p}, h + 1)$, $a_i \leq a'_i \ \forall i \in \{1, ..., s\}$. L'únic problema que tendrem en aquesta cas és que al respectar la quota, deixarà de ser monòton respecte de la població pel teorema 2.

De fet, Balinski i Young [3] donen una caracterització de tots els mètodes que respecten la quota i que són monòtons respecte de la cambra al teorema 7.2, que es presenta a aquest treball en la proposició 13. Per fer això necessitarem el conjunt $U(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ que hem definit al pseudocodi i haurem de definir un nou conjunt que anomenarem $L(\mathbf{p}, \mathbf{a})$.

Si tenim un repartiment **a** de h escons i un vector de poblacions $\mathbf{p}$, si volem seguir assignant escons, és a dir, consideram $h + 1$, el conjunt $U(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ és el conjunt de tots els estats als que se li pot afegir un escó sense que es violi la quota superior (considerant $h + 1$ per calcular la quota). Faltarà ara definir el conjunt $L(\mathbf{p}, \mathbf{a})$.

Definició 35. Donat un vector de poblacions $\mathbf{p}$ i un repartiment $\mathbf{a} \in M(\mathbf{p}, h)$, definim $L(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ com: $L(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = S_{\hat{\alpha}} = \left\{ i : \left\lfloor p_i \frac{h+\hat{\alpha}}{\sum_{j=1}^{s} p_j} \right\rfloor > a_i \right\}$ on $\hat{\alpha}$ és el menor enter $\alpha \geq 1$ tal que $\sum_{i \in S_\alpha} \left(\left\lfloor p_i \frac{h+\alpha}{\sum_{j=1}^{s} p_j} \right\rfloor - a_i \right) \geq \alpha$. En cas de que aquest $\hat{\alpha}$ no existeixi, $L(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ serà el conjunt de tots els estats.

Notem que el conjunt S_α ens retorna els estats que en el moment de repartir $h+\alpha$ escons seguirien tenint el repartiment associat per davall de la quota inferior. Ara, al considerar $\hat{\alpha}$, estam considerant el menor nombre d'escons que podem afegir als estats de S_α per tal de que cap estat a S_α es quedi per davall de la quota estàndard inferior al repartir els $\hat{\alpha}$ escons de manera adequada entre els estats de S_α. Per tant, amb el conjunt $L(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ estam considerant els estats candidats als que se'ls hi ha d'afegir l'escó $h + 1$ per tal que a la passa $h + \hat{\alpha}$ cap estat es quedi per davall de la quota inferior estàndard.

Si consideram la intersecció $U(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \cap L(\mathbf{p}, \mathbf{a})$, estarem considerant el conjunt dels estats candidats a rebre el següent escó. Així, podem caracteritzar els mètodes que respectin la quota i que siguin monòtons respecte de la cambra, així com indiquen Balinski i Young al teorema 7.2 a [3], de la següent manera:

Proposició 13. *M és un mètode que respecta la quota i que és monòton respecte de la cambra si, i només si, per cada vector* *de poblacions* $\boldsymbol{p}$ *els repartiments s'obtenen recursiva-ment de la següent manera:*

1) $M(\boldsymbol{p}, 0) = \boldsymbol{0}$.
2) *Si* $\boldsymbol{a} \in M(\boldsymbol{p}, h)$*, llavors* $M(\boldsymbol{p}, h+1)$ *s'obté assignant un escó a un dels estats* i *tals que* $i \in U(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) \cap L(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$.

Entendrem millor aquesta caracterització amb un exemple.

Exemple 9. Suposem que el partit A, el partit B, el partit C i el partit D es presenten a les eleccions generals per qualcuna província i obtenen, respectivament 100000, 55000, 29000 i 10000 vots. Hem assignat els 4 escons segons el procés descrit a la proposició 13, i el resultat obtingut ha estat $M(\mathbf{p}, 4) = \mathbf{a}^4 = (2, 2, 0, 0)$. Si volem afegir un altre escó mitjançant el mètode descrit a la proposició 13 hem de calcular els conjunts $U(\mathbf{p}, \mathbf{a}^4)$ i $L(\mathbf{p}, \mathbf{a}^4)$ per tal de conèixer a quins estats es pot assignar el nou escó.

Per calcular $U(\mathbf{p}, \mathbf{a}^4)$, hem de calcular la quota estàndard considerant $\mathbf{p}$ i $h = 4 + 1 = 5$, diguem-li $\mathbf{q}^5$. Així, $\mathbf{q}^5 = (2.5573, 1.4175, 0.7474, 0.2577)$. Així, els estats que formaran $U(\mathbf{p}, \mathbf{a}^4)$ seran aquells tals que $a_i^4 < q_i^5$, és a dir, $U(\mathbf{p}, \mathbf{a}^4) = \{A, C, D\}$.

Per calcular el conjunt $L(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ hem de trobar $\hat{\alpha}$. És a dir, el menor α tal que $\sum_{i \in S_\alpha} \left(\lfloor p_i \frac{h+\alpha}{\sum_{i=1}^s p_i} \rfloor - a_i^4 \right) \geq \alpha$. Així, el primer que hem de fer és veure com és el conjunt S_α.

$$
\begin{aligned}
S_\alpha &= \left\{ i : \left\lfloor \frac{p_i(h+\alpha)}{\sum_{j=1}^4 p_j} \right\rfloor > a_i^4 \right\} = \left\{ i : \left\lfloor \frac{p_i \cdot (4+\alpha)}{194000} \right\rfloor > a_i^4 \right\} \\
&= \left\{ i : \frac{p_i \cdot (4+\alpha)}{194000} \geq a_i^4 + 1 \right\} \\
&= \left\{ i : p_i \cdot (4+\alpha) \geq 194000(a_i^4 + 1) \right\}.
\end{aligned}
$$

Amb això tenim que si $\alpha \geq 15$, llavors $S_\alpha = \{A, B, C, D\}$. A més, és fàcil veure que $\sum_{i \in S_\alpha} \left(\lfloor p_i \frac{h+\alpha}{\sum_{i=1}^s p_i} \rfloor - a_i^4 \right) \geq \alpha$ no es compleix per cap α entre 1 i 18 i per tant, tant si $\hat{\alpha} \geq 18$ com si $\hat{\alpha}$ no existeix $L(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \{A, B, C, D\}$.

Així, $L(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \cap U(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \{A, C, D\}$ i per tant el següent escó s'ha de sumar a A, C o D. El criteri per assignar l'escó a qualsevol d'aquests estats pot ser qualsevol, però si ho calculam per exemple mitjançant el mètode derivat del mètode de Jefferson s'afegiria l'escó a A, ja que $\frac{p_A}{a_A^4+1} > \frac{p_C}{a_C^4+1} > \frac{p_D}{a_D^4+1}$ i per tant $M(\mathbf{p}, 5) = (3, 2, 0, 0)$.

Així, no només hem trobat un mètode que respecta la quota i que és monòton respecte de la cambra, sinó que hem trobat una caracterització d'aquest tipus de mètodes. Ara bé, a l'hora de repartir els vots a les eleccions de 2023 només emprarem el mètode basat en el mètode de la quota que s'obté modificant el de Jefferson.

X. CÀLCUL I ANÀLISI DELS RESULTATS

En aquesta secció analitzarem com haguessin canviat els resultats de les eleccions generals de 2023 segons el mètode de repartiment que s'hagués emprat per assignar els escons a cada partit en cada província en funció dels vots. Ara bé, per tal d'ajustar-nos a la legislació electoral espanyola haurem de realitzar unes petites modificacions a les dades obtingudes a [9].

A. *Obtenció dels resultats*

Una vegada recollides i tractades les dades com s'ha indicat a la secció III hem d'aplicar tots els mètodes de repartiment a cada una de les províncies amb la mida de la cambra indicada a la taula II. Això ho hem fet amb el codi que s'indica a l'apèndix A. El full d'excel resultant amb les 52 fulles per província on es detallen els diferents repartiments d'escons per partit es pot trobar al repositori [10] amb el nom *VOTS_PER_PROVINCIA_AMB_QUOTAM.xlsx*. A més, també hi ha una pàgina amb el recompte total d'escons per partit, encara que aquesta s'ha obtingut directament mitjançant el full d'excel i es poden trobar les fórmules emprades al mateix document.

B. *Anàlisi dels resultats*

El primer que podem observar quan analitzam els resultats província per província, és que en la gran majoria de les províncies, tots els mètodes, inclosos els mètodes del divisor, respecten la quota. Les úniques províncies on no passa això és a Ourense, Tarragona i Salamanca. En les dues primeres províncies, els mètodes que fallen són el d'Adams, de Webster i de Hill, és a dir, aquells on el criteri del divisor que s'empra val 0 al 0 i per tant, s'ha de repartir primer un escó per partit. El que passa a aquestes províncies és que hi ha molts de partits entre els que repartir els escons, i per tant, encara que hi hagi molta diferència entre el nombre de vots per partits, no hi ha més escons a repartir una vegada s'han assignat els primers escons, fent que encara que la quota d'un partit sigui més gran que 2, només tengui un representant. Això mostra una limitació a la pràctica dels mètodes d'Adams, Webster i Hill. A la província de Salamanca el que passa és que el mètode de D'Hondt (o de Jefferson) assigna 3 escons al partit més gran quan la seva quota és de 1.9270, mostrant la utilitat del mètode de la quota que en aquest cas assignaria 2 escons a aquest partit, fent que el repartiment resultant respecti la quota.

Una altra cosa que podem observar és que en la majoria dels casos (51 de 52) el mètode de D'Hondt respecta la quota i per tant, retorna el mateix repartiment que el mètode de la quota. Amb això, podem veure que els mètodes del divisor, encara que no respectin la quota en general, a la pràctica és poc freqüent que no ho facin.

En aquest estudi pràctic dels diferents mètodes no podem observar cap paradoxa, ja que no hem variat cap dels paràmetres dels mètodes i per tant, no podem estudiar cap tipus de monotonia ni d'uniformitat.

A continuació l'estudi que podem fer és veure quants d'escons s'endú cada partit en total. És a dir, sumant el nombre d'escons que guanya a cada província obtindrem la representació final de cada partit al congrés (taula VII).

El primer que podem observar a aquesta taula és que segons el mètode emprat hi ha diferències molt significatives, especialment als partits amb més vots. Per exemple, el Partit Popular ha obtingut 136 escons amb el mètode de D'Hondt mentre que ha obtingut 111 amb els mètodes d'Adams, Dean i Hill. Això és una diferència de 25 escons, una diferència molt significativa. El mateix passa amb el PSOE que té una diferència de 23 escons.

Taula VII
REPRESENTACIÓ TOTAL DE CADA PARTIT AL CONGRÉS DESPRÉS DE LES ELECCIONS GENERALS DEL 2023 EN FUNCIÓ DEL MÈTODE DE REPARTIMENT.

PARTITS	VOTS	D'Hondt	Hamilton	Adams	Webster	Dean	Hill	Quota
CC	114718	1	1	2	1	2	2	1
PNV	275782	5	4	4	4	4	5	4
SUMAR	3013194	31	37	53	37	52	51	31
NC-bc	42422	0	1	1	1	1	1	0
JxCAT	392634	7	6	6	6	6	6	7
CpM	1279	0	0	0	0	0	0	0
EXISTE	11292	0	1	0	0	0	0	0
BNG	152327	1	4	4	4	4	4	4
UPL	22499	0	0	0	0	0	0	0
EH Bildu	333362	6	6	6	6	6	6	6
PP	8091840	136	124	111	127	111	111	135
UPN	51764	1	1	1	1	1	1	1
XAV	7321	0	0	0	0	0	0	0
SY	9626	0	0	0	0	0	0	0
PSOE	7760970	122	112	99	114	101	102	123
CUP	18106	0	0	0	0	0	0	0
VOX	3010301	33	46	54	43	53	53	33
ERC	462883	7	7	7	7	7	7	7

Taula VIII
ESCONS OBTINGUTS PELS PARTITS QUE VAREN VOTAR A FAVOR DE LA INVESTIDURA DEL NOU GOVERN I ESCONS RESTANTS.

Bloc	VOTS	D'Hondt	Hamilton	Adams	Webster	Dean	Hill	Quota
Govern	12505870	180	177	181	177	182	182	181
Altres	11266450	170	173	169	173	168	168	169

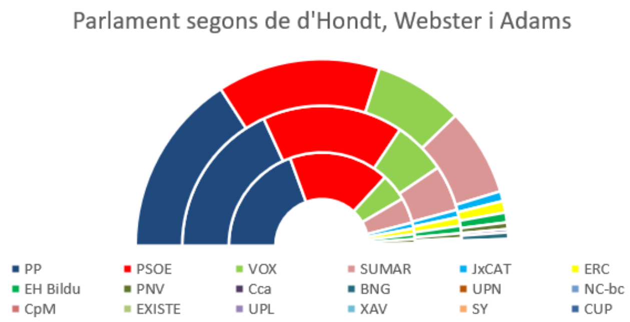

Figura 3. Repartiment dels escons al parlament amb els mètodes de D'Hondt (abaix), de Webster (enmig) i d'Adams (adalt).

Per altra banda, VOX i SUMAR guanyen escons mitjançant els mètodes d'Adams, Dean i Hill. De fet, guanyen els escons que han perdut el PP i el PSOE. Això ocorre perquè com hem explicat abans, aquests mètodes assignen d'inici un escó per partit, fent que els escons estiguin molt més repartits entre els partits presents a totes les províncies. És a dir, podem veure com els mètodes d'Adams, Dean i Hill afavoreixen als partits més petits com hem demostrat anteriorment, mentre que el mètode de Jefferson afavoreix als partits més grans. Per altra banda, podem trobar els mètodes de Hamilton i de Webster, que tenen menys biaix cap als diferents partits. Comprovam així que el que hem vist a la teoria, es manté a la pràctica. Tot això també es pot observar a la figura 3 on es mostren les diferències entre els mètodes de D'Hondt (que afavoreix als partits grans), el de Webster (un mètode més neutral) i el d'Adams (que afavoreix als partits més petits).

És conegut que el Govern actual es va formar mitjançant un pacte amb diferents partits. PSOE, SUMAR, ERC, Junts, EH Bildu, PNV, BNG i Coalició Canaria, varen fer un pacte per investir a Pedro Sánchez com a president. Aquest fet, juntament amb les diferències que hi ha entre els diferents repartiments ens fa plantejar-nos si amb un altre mètode electoral diferent al de D'Hondt la formació del govern hagués tengut un desenllaç diferent.

El que s'ha fet després ha estat sumar tots els escons obtinguts per aquests partits i hem vist si amb algun dels mètodes, aquest pacte no hagués assolit la majoria absoluta necessària per conformar el Govern, és a dir, més de 175 escons, a la primera votació o si en algun cas hagués necessitat la majoria simple per conformar el govern. Com podem veure a la taula VIII, amb tots els mètodes de repartiment els partits que varen acceptar conformar el govern obtenen majoria absoluta, per tant, els pactes no haguessin canviat en el sentit de que no hagués canviat el president, però sí possiblement el repartiment de ministeris entre els partits del govern per les diferències d'escons dels partits entre els distints mètodes.

En conclusió, un canvi de mètode de repartiment no hagués afectat massa en la configuració del Govern, però podria haver afectat en la proporció de llocs del Govern que es repartiria cada partit. Per altra banda, també podem observar que el mètode que s'empra actualment per repartir els escons a Espanya afavoreix notablement als partits més grans en detriment dels més petits.

XI. Conclusions

Per concloure amb el treball resumirem el que hem fet amb les conclusions que hem extret. El primer que hem fet ha estat realitzar un estudi teòric que ens ha permès conèixer el que és un mètode de repartiment i quines són les propietats desitjables en un d'aquests mètodes. Ara bé, el més important que hem vist a aquesta part és que trobar un mètode de repartiment que compleixi totes les propietats és impossible, ja que si un mètode no pot respectar la quota i ser monòton respecte de la població a la vegada.

A continuació hem vist el mètode de Hamilton, els mètodes del divisor i el mètode de la quota amb les seves propietats més rellevants. El que és més clar de tot el que hem vist és que tots els mètodes tenen les seves virtuts, però també els seus defectes. Per exemple, el mètode de Hamilton sempre respecta la quota, però presentarà a vegades qualcuna de les paradoxes que hem considerat.

Com hi ha infinits mètodes del divisor, hem estudiat si un mètode afavoreix més a un estat que a un altre, és a dir, si té biaix, per veure quin era el més adequat. Quan hem comparat si un mètode afavoria als estats petits en relació a un altre mètode hem vist que el que menys ho feia era el de Jefferson, és a dir, que tendeix a afavorir als estats grans. Per una altra banda, hem vist que el mètode de Webster sempre era el mètode sense biaix quan hem estudiat el biaix dels mètodes de manera individual.

Per una altra banda, hem aplicat tots els mètodes estudiats per veure els diferents escenaris que s'haguessin presentat a les eleccions generals del 2023, tant a cada província com en total. D'aquest estudi pràctic hem pogut obtindre diferents conclusions interessants.

El primer que hem pogut veure ha estat que hi havia una diferència molt significativa entre els diferents mètodes a alguns partits. Per exemple, el PP amb el mètode de D'Hondt obtenia 136 escons mentre que amb el de Adams, Dean o Hill n'obtenia 111. Un altre feet curiós que hem observat és que quan els partits més grans PP o PSOE tenien més escons els altres partits més petits com VOX o SUMAR en perdien i a l'inversa. Això ens pot fer pensar que encara que la diferència entre els mètodes és significativa, els escons es reparteixen en tots els mètodes entre els mateixos quatre partits, ja que als altres partits el nombre d'escons és més o menys costant entre els diferents mètodes.

Aquest estudi a més ens ha permès veure que l'estudi teòric que hem fet es compleix perfectament a la pràctica. El mètode de Jefferson o de D'Hondt és el mètode que més afavoreix als partits grans, ja que és el mètode en el que més escons tenen PP i PSOE i en el que menys escons tenen SUMAR i VOX. Per altra banda, també hem vist que els mètodes que més afavoreixen als partits petits són els d'Adams, Dean i Hill. Per altra banda, el mètode que menys biaix ha tingut a la pràctica, en el sentit de que ha repartit un nombre d'escons que es trobava entre el màxim i el mínim assignat per tots els mètodes, ha estat el mètode de Webster, fet que també havíem vist en l'estudi teòric.

Per altra banda, una altra conclusió interessant que hem pogut extreure és que encara que els mètodes del divisor no respecten la quota en general, en la majoria de casos pràctics ho fan, ja que de 52 províncies en tan sols 3 no s'ha respectat la quota per qualcuns mètodes. És més, el mètode de Jefferson ha respectat la quota en 51 de 52 províncies. Hem vist així que un dels majors inconvenients a l'hora de considerar els mètodes del divisor, és a dir, que no respecten la quota, a la pràctica és estrany que ho trobem.

Per altra banda, també hem estudiat que passaria amb els pactes de govern si empràssim mètodes diferents. En aquest cas hem vist que amb tots els mètodes s'hagués pogut obtindre el mateix pacte amb majoria absoluta, però amb diferent proporció d'escons entre els partits que formen aquest pacte, per tant, probablement amb un altre mètode haguéssim tingut un govern similar en composició però no en proporció de ministeris al govern.

En conclusió, hi ha molts de mètodes de repartiment diferents, cada un amb unes propietats diferents, però cap d'ells perfecte. Ara bé, els mètodes més adequats pareixen ser els mètodes del divisor, ja que a la pràctica compleixen totes les propietats desitjables en la majoria d'ocasions. Ara bé, encara que és cert que no existeix cap mètode perfecte, els cinc mètodes del divisor que hem estudiat en aquest treball pareixen apropar-se bastant a aquest concepte de perfecció. Però, aquests cinc mètodes també tenen diferents propietats entre si, i per tant, triar entre un d'ells serà una feina subjectiva que dependrà del que cerquem en el nostre mètode de repartiment.

Referències

[1] M. L. Balinski and H. P. Young. The quota method of apportionment. *The American Mathematical Monthly*, 82:701–730, 08 1975.

[2] M. L. Balinski and H. P. Young. The Jefferson method of apportionment, 1978.

[3] M. L. Balinski and H. P. Young. *Fair Representation*. BROOKINGS INSTITUTION PRESS, 2001.

[4] Instituto Nacional de Estadística. Población por provincias, país de nacimiento, español/extranjero, sexo y año. https://www.ine.es/jaxi/Datos.htm?path=/t20/e245/p08/l0/&file=03006.px.

[5] T. Jefferson. *The Works of Thomas Jefferson*, volume 6. G.P. Putnam's Sons, New York, 1904.

[6] P. Jiménez-Seral and M. Vázquez. Métodos de divisor y su relación con los principales procedimientos de distribución de escaños. *La Gaceta de la RSME*, 18(2):301–318, 2015. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1271.

[7] M. A. Jones, D. McCune, and J. M. Wilson. Proportional consistency of apportionment methods. *arXiv preprint arXiv:2311.06969*, 2023.

[8] Junta Electoral Central. Ley orgánica 5/1985, de 19 de junio, del régimen electoral general. https://www.juntaelectoralcentral.es/cs/jec/ley?idContenido=23758&p=1379062388933&template=Loreg/JEC_Contenido.

[9] Ministerio del Interior. Elecciones generales julio 2023. https://resultados.generales23j.es/es/inicio/0, 2023.

[10] Pau Peón Bibiloni. Entrega TFM. https://github.com/PauPeon24/TFM_entrega, 2024.

[11] F. Pukelsheim. *Proportional representation*. Springer, 2017.

[12] D. Webster. *The Writings and Speeches of Daniel Webster*, volume 6. Little, Brown & Co., Boston, MA, national edition edition, 1903.

XII. Apèndix A: Implementació dels mètodes

A. *Hamilton*

```
def quota(p, h):
    P = sum(p)
    q = [h*pi/P for pi in p]

    return q

def hamilton(p, h):
    # Calculam les quotes i els floors de les
    #mateixes
    q = quota(p, h)
    b = [math.floor(qi) for qi in q]

    # Extreim la part decimal de les quotes
    dec = [qi-bi for (qi, bi) in zip(q, b)]

    # Guardam la posicio de cada quota per
    #saber a quina poblacio correspon al
    #realitzar l'ordenacio
    dec_pos = [(d,i) for (d,i) in zip(dec, range(0, len(p)))]
    ordenada = sorted(dec_pos, key=lambda x: x[0], reverse = True)

    # Calculam els escons que queden a repartir
    rest = h -sum(b)

    # Afegim un esco a les h-sum(b) poblacions
    # amb les quotes amb part decimal mes gran
    for i in range(0, rest):
        b[ordenada[i][1]] += 1

    return b
```

B. *d-arrodoniments*

```
def d_adams(a):
    return a

def d_jefferson(a):
    return a + 1

def d_webster(a):
    return a + 1/2

def d_dean(a):
    return (a*(a+1))/(a + 1/2)

def d_hill(a):
    return math.sqrt(a*(a+1))
```

C. *Mètodes del divisor segons la definició*

```
def divisor(p, h, d):
    # El primer divisor a provar es ds
    ds = sum(p)/h
    divisor = ds
    inf = 0
    sup = ds**10
    a = [0]*len(p)
    if d(0) == 0:
        if h <= len(p):
            for i in range(0, h):
                a[i] += 1
        else:
            a = [1]*len(p)

    i = 0
    while sum(a) != h and i <= 1000:
        i += 1
        # Calculam les quotes modificades
        q = [pi/divisor for pi in p]
        # Calculam el repartiment
        a = [math.floor(qi) if (d(math.floor(qi)-1) <= qi
                                and qi <= d(math.floor(qi)))
                                else math.ceil(qi) for qi in q]
        # Si la suma dels escons repartits es
        # menor que la mida de la cambra,
        # agafam un divisor menor
        if sum(a) < h:
            sup = divisor
            divisor = statistics.mean([inf,sup])
        # Si la suma dels escons a repartir es
        # superior que la mida de la cambra,
        # agafam un divisor superior
        if sum(a) > h:
            inf = divisor
            divisor = statistics.mean([inf,sup])

    return a
```

D. *Mètodes del divisor mitjançant la proposició 10*

```
def divisor_method(population, house, d):
    escons = [0]*len(population)

    # Mentre que els escons repartits no sigui
    #igual a la mida de la cambra
    while sum(escons) < house:
        # Calculam les poblacions entre d(el
        #nombre d'escons que te cada estat fins
        #al moment)
        populations_compare = [p/d(e) for p,e in
                                zip(population,escons)]
        # Agafam l'estat que te el maxim a
        #aqueix valor
        max_val = max(populations_compare)
        max_ind = populations_compare.index(max_val)
        # Sumam un esco a aquest estat
        escons[max_ind] += 1

    return escons
```

E. *Mètode de la quota*

```
def metode_quota(population, house):
# Comencam amb 0 escons
escons = [0]*len(population)
# Calculam les quotes de cada estat
q = quota(population, house)

# Mentre no estiguin assignats
# tots els escons
while sum(escons) < house:
    # calculam les poblacions entre el
    # nombre d'escons que te cada estat
    # fins al moment + 1
    populations_compare = [p/(e+1) for p,e
                            in zip(population,escons)]

    # Agafam l'estat amb el maxim valor a la llista anterior
    max_val = max(populations_compare)
    max_ind = populations_compare.index(max_val)

    # Si assignar un esco no suposa
    # violar la quota de l'estat, afegim
    # l'esco a l'estat
    if escons[max_ind] < q[max_ind]:
        escons[max_ind] += 1

    # Si assignar un esco suposa violar
    # la quota, no repartim cap esco mes
    # a aquest estat
    else:
        population[max_ind] = 0

return escons
```

F. Càlcul dels repartiments per província

```
# Llegim l'excel on tenim la informacio
# de les provincies
vots_provincia = 'VOTS_PER_PROVINCIA_mes_3_percent.xlsx'

# Carregar l'arxiu excel
vots = pd.ExcelFile(vots_provincia)

# Nom de les fulles
noms_fulles = vots.sheet_names

vots_provincia_dhont = 'Ruta per crear un nou arxiu'


with pd.ExcelWriter(vots_provincia_dhont,
                    engine='openpyxl') as writer:
    # Iterar sobre cada fulla
    for fulla in noms_fulles:
        # llegim la fulla
        df = vots.parse(fulla)
        print(fulla)

        # separam el nombre de vots a una llista
        p = list(df.iloc[:, 1])
        # veim el nombre d'escons que
        # corresponen a la provincia
        h = int(escons_per_provincia[fulla])

        print(p, h)

        # calculam el nombre d'escons que
        # correspon a cada partit mitjancant
        # tots els metodes
        q = quota(p, h)
        escons_Dhont = Dhont(p, h)
        escons_hamilton = hamilton(p,h)
        print(fulla)
        escons_adams = divisor(p,h,d_adams)
        escons_webster = divisor_method(p,h,d_webster)
        escons_dean = divisor(p,h,d_dean)
        escons_hill = divisor(p,h,d_hill)
        escons_quota = metode_quota(p, h)

        df.loc[:, "QUOTA"] = q
        df.loc[:, "ESCONS D'HONT"] = escons_Dhont
        df.loc[:,"ESCONS HAMILTON"] = escons_hamilton
        df.loc[:,"ESCONS ADAMS"] = escons_adams
        df.loc[:,"ESCONS WEBSTER"] = escons_webster
        df.loc[:,"ESCONS DEAN"] = escons_dean
        df.loc[:,"ESCONS HILL"] = escons_hill
        df.loc[:,"ESCONS QUOTA"] = escons_quota

        # Escriure el dataframe a una nova
        # fulla amb el nom actual de la fulla
        df.to_excel(writer, sheet_name=fulla, index=False)
```