

0.1 Espai de Probabilitats

Definition 0.1.1 (Espai de Probabilitat). Un espai de Probabilitat és una terna (Ω, \mathcal{A}, P) on

- Ω *espai mostrat*: conté tots els possibles resultats de l'experiència aleatòria.
- \mathcal{A} *esdeveniments possibles*: família de parts d' Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) que té estructura de σ -àlgebra, que vol dir que és una σ -àlgebra si compleix que
 1. $\Omega \in \mathcal{A}$
 2. \mathcal{A} és estable per pas al complementari ($A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$)
 3. \mathcal{A} es estabale per unions numberables ($\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$)
- P probabilitat: assigna versemblança a un element d' \mathcal{A} . $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. P compleix:
 1. $P(\Omega) = 1$
 2. $P(\cup_{n \geq 1}^{\text{inf}} A_n) = \sum_{n=1}^{\text{inf}} P(A_n)$

Recordatori ràpid de les propietats de la probabilitat P :

1. $P(\emptyset) = 0$
2. σ -additivitat implica additivitat finita. És a dir, la probabilitat de que n esdeveniments succeixin és la suma de les seves probabilitats si els esdeveniments son disjunts. Si aquests no fossin disjunts, la probabilitat seria major o igual, en comptes d'igual.
3. $\forall A \in \mathcal{A} P(A^c) = 1 - P(A)$
4. $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

I també de les altres dues grans eines de la probabilitat:

Definition 0.1.2 (Probabilitat Condicionada). La probabilitat de que $A \in \mathcal{A}$ estigui condicionada per $B \in \mathcal{A}$ és

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

I se'n deriva immediatament el següent

Proposition 0.1.3 (Formula Probabilitats Compostes). Siguin $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \mid P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Aleshores,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Proposition 0.1.4 (Fórmula de Bayes). Siguin A, B dos esdeveniments de probabilitat no nuls, es compleix que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B|A) \frac{P(A)}{P(B)}$$

0.2 Variables Aleatòries

A nivell matemàtic és incòmode treballar amb $\omega \in \Omega$, ja que els elements son bastant arbitraris. Per a tenir quelcom més uniforme, tractem amb variables aleatòries.

Definition 0.2.1 (σ -àlgebra de Borel). Denotem amb \mathcal{B} la σ -àlgebra de Borel, que és la generada pels conjunts oberts d' \mathbb{R} . És a dir, \mathcal{B} és la σ -àlgebra de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ que conté tots els oberts d' \mathbb{R} respecte la topologia euclidiana.

Definition 0.2.2 (Variable Aleatòria). Una **Variable aleatòria** és una aplicació $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que compleix la condició de *mesurabilitat*, que és la següent:

$$\forall B \in \mathcal{B}, X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

La condició de mesurabilitat de la variable aleatòria permet assignar un valor numèric a qualsevol $\omega \in \Omega$ de la següent manera:

$$P(X^{-1}(B)) = P\{\omega \in \Omega \mid \omega \in B\}, \forall B \in \mathcal{B}$$

I per tant $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és una variable aleatòria.

Proposició 0.2.3 (Propietats de les variables aleatòries). Les propietats de les variables aleatòries són, sent X, Y variables aleatòries:

- $aX + bY, XY$ també són variables aleatòries
- $\max(X, Y), \min(X, Y)$ són variables aleatòries
- $\frac{X}{Y}$ és variable aleatòria si $0 \notin \mathcal{I}(Y)$
- L'ínfim, el suprem, el límit de l'ínfim i del suprem són variables aleatòries donada una successió de variables aleatòries
- Tota variable aleatòria no negativa és el límit creixent d'una successió de variables aleatòries simples positives.

0.3 Llei d'una Variable Aleatòria

Si les variables aleatòries et permeten assignar valors numèrics a elements de l'espai mostral, les lleis d'una variable aleatòria et permeten assignar probabilitats a aquests esdeveniments.

Definició 0.3.1 (Llei d'una Variable Aleatòria). La llei d'una variable aleatòria X és la probabilitat sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, que anomenarem Q definida de la següent manera:

$$\forall B \in \mathcal{B}, Q(B) = P(X^{-1}(B)) \mid X^{-1}(B) = \{\omega, X(\omega) \in B\}$$

per tant, $Q = P \circ X^{-1}$ i clarament $Q : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$

Es demostra trivialment que Q és una probabilitat sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Per tant, amb aquesta definició hem aconseguit passar de l'espai de probabilitat (Ω, \mathcal{A}, P) a l'espai de probabilitat numèric $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P \circ X^{-1})$. Aquests segons espais són els que, per defecte, es fan servir quan es parla de probabilitats.

Definició 0.3.2 (Funció Distribució). La funció de distribució associada a una variable aleatòria X és la funció $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida per

$$F(x) = P \circ X^{-1}((-\infty, x])$$

Remark 0.3.3 (Inducció de Probabilitat a X). Ara mateix, tenim dos espais de probabilitat, el numèric i el tradicional. El que s'aconsegueix amb la llei i la composició de les funcions és operar amb el millor dels dos mons. És a dir, la *mesurabilitat* de les variables aleatòries ens garanteix que quan volguem calcular la probabilitat d'un element a la recta real (i per tant membre de la σ -àlgebra \mathcal{B}) aquest SEMPRE equivalgui a un element a l'espai mostral Ω .

Per tant **tota variable aleatòria X induïx una probabilitat a $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$** , i aquesta probabilitat induïda és Q , la llei d'una variable aleatòria. És a dir, quan informalment volem calcular $P(B), B \in \mathcal{B}$ (sent P aquí la idea de “probabilitat”) d'una variable aleatòria, en realitat estem fent

$$Q(B) = P \circ X^{-1}(B) = P(\{\omega, X(\omega) \in B\})$$

unint l'espai numèric de probabilitat amb l'espai de probabilitat normal. Això és el que volem dir amb que X induïx una probabilitat a $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Per acabar, quan parlem de funció de distribució, seria l'equivalent a la Llei de la variable aleatòria però a la recta real.

Proposition 0.3.4 (Propietats Funció Distribució). Sigui F la funció de distribució d'una variable aleatòria X . Es compleix que:

1. F és creixent
2. F és contínua per la dreta ($\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a)$)
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Concretament, tot i existir $\lim_{y \rightarrow x^-} F(y) \forall x \in \mathbb{R}$, el que no podem esperar es que $F(x^-) = F(x) \forall x \in \mathbb{R}$, és a dir, F té discontinuïtats de primera espècie, i al ser acotada, té un nombre finit d'aquestes discontinuïtats.

El que ens dona la funció de distribució de variables aleatòries és la capacitat de calcular les probabilitats a través d'aquesta. Sigui F_X la funció de distribució de la variable aleatòria X i P_X la probabilitat induïda per aquesta. Aleshores:

$$F_{X(x)} = P_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(\{\omega, X(\omega) \in B\}) = P(X \leq x)$$

I des d'aquí, podem obtenir les següents probabilitats naturalment des de F :

- Probabilitat d'un obert d' \mathbb{R} : $P((a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- Probabilitat de la unió d'oberts d' \mathbb{R} : $P(\cup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{\infty} P((a_i, b_i])$
- Probabilitat d'un punt d' \mathbb{R} : $P(X = x) = F(x) - F(x^-)$

0.3.5 Variables Aleatòries Discretes

Aquí posarem tots els tipus de distribucions per repassar amb les seves lleis, però sento que aquesta gent té bastanta més pressa ara per ara.

0.3.6 Variables Aleatòries Absolutament Contínues

Definition 0.3.7 (Densitat). Una funció f és una densitat si compleix:

1. $f \geq 0$
2. f és integrable Riemann a \mathbb{R}
3. Es té que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Aleshores, amb la densitat podem definir:

Definition 0.3.8 (Variable Aleatòria Absolutament Contínua). Una variable aleatòria X és absolutament contínua amb densitat f si la funció de distribució es pot escriure com:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

on f és una densitat.

I des de la definició, és immediat que:

$$P(X \in I) = \int_a^b f(x) dx, I \in \{[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]\}$$

No tota variable contínua és absolutament contínua, però el revers sí que és cert.

0.4 Densitats de transformacions de Variables Aleatòries

Pàgina 71 pdf Marta Sanz, com es fa Això