TP3 : Résolution de MDP à l'espace d'état infini

Paul Crespin

Simulations

Question 1

On commence par faire un simulateur de MDP avec la politique 0, consistant à ne jamais rien faire.
C'est un modèle de survie simplifié, on va considérer que chaque oiseau a une probabilité de mourir et une probabilité de se reproduire (tout seul).
On va appliquer la loi binomiale oiseau par oiseau.
On va conserver dans un historique le nombre d'oiseaux et le coût en fonction du temps.

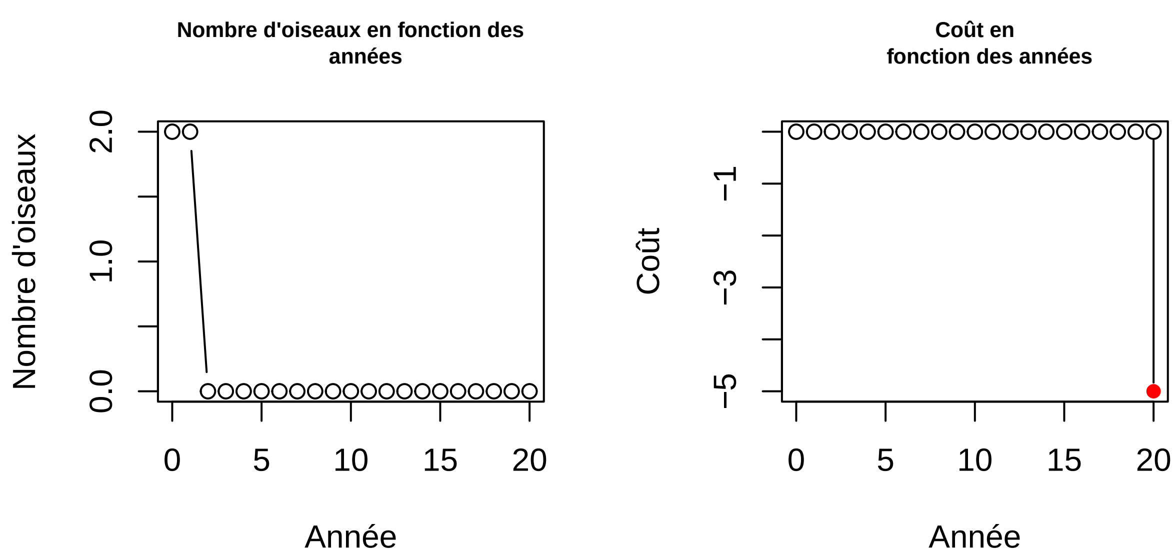
```
# On fixe les variables de bases

nb_oiseaux <- 2
nb_annees <- 20
c <- 0
historique_nb_oiseaux <- c(nb_oiseaux)
historique_c <- c(c)
alpha0 <- 5
proba_d <- 0.45
proba_b <- 0.45

# On fait la boucle sur le nombre d'années avec 2 nouvelles lois uniformes pour
# chaque oiseaux, chaque jours ainsi une actualisation du nombre d'oiseaux.

for (i in 2:(nb_annees + 1)) {
  if (nb_oiseaux != 0) {
    for (x in 1:nb_oiseaux) {
      d <- runif(1, min = 0, max = 1)
      b <- runif(1, min = 0, max = 1)
      if (d < proba_d) {
        nb_oiseaux <- nb_oiseaux - 1
      }
      if (b < proba_b) {
        nb_oiseaux <- nb_oiseaux + 1
      }
    }
  }
  historique_nb_oiseaux[i] <- nb_oiseaux
  historique_c[i] <- c
}
```

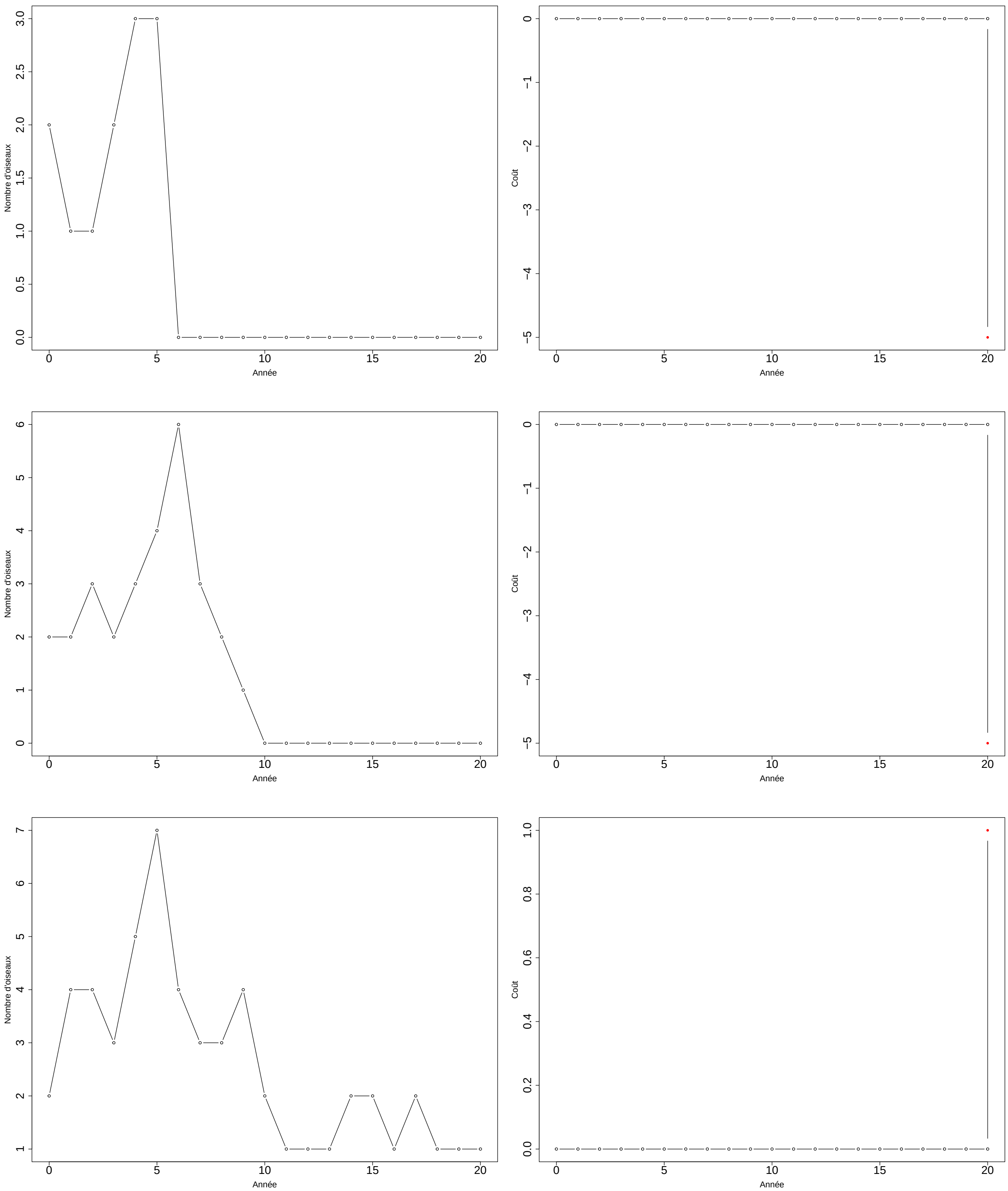
```r
# On ajoute la récompense finale

if (nb_oiseaux == 0) {
  c <- c - alpha0
} else {
  c <- c + nb_oiseaux
}

historique_c[nb_annees + 2] <- c
```

Question 2

On va tracer quelques courbes de la politique 0. Le gros point rouge est le coût final après la récompense final à la $20^{\text{ème}}$ année.

```r
par(mfrow = c(1, 2))
plot(c(0:nb_annees), historique_nb_oiseaux, main = "Nombre d'oiseaux en fonction des
     années", cex.main = 0.7, xlab = "Année", ylab = "Nombre d'oiseaux", type = "b")
if (historique_c[(nb_annees + 2)] > 0) {
  ylim <- c(0, historique_c[(nb_annees + 2)])
} else {
  ylim <- c(historique_c[(nb_annees + 2)], 0)
}
plot(c(0:nb_annees), historique_c[1:(nb_annees + 1)], ylim = ylim, main = "Coût en
     fonction des années", cex.main = 0.7, xlab = "Année", ylab = "Coût", type = "b")
points(nb_annees, historique_c[(nb_annees + 2)], col = "red", pch = 16)
segments(x0 = nb_annees,
         y0 = historique_c[(nb_annees + 1)] + ((historique_c[(nb_annees + 2)] -
                                                  historique_c[(nb_annees + 1)]) / 30),
         x1 = nb_annees,
         y1 = historique_c[(nb_annees + 2)] - ((historique_c[(nb_annees + 2)] -
                                                  historique_c[(nb_annees + 1)]) / 30))
```





On voit que la politique 0 est assez aléatoire et la survie des oiseaux est difficile. On voit aussi que le coût ne varie qu'à la dernière année, au moment de “faire les comptes”.

Le point principal à retenir est que, bien que la probabilité de naissances et de décès soient la même, la conséquence du décès est plus importante que celle de la naissance En effet, si tous les oiseaux sont morts, c'est terminé.

Question 3

On finit par estimer le coût de la politique 0 par la méthode de Monte-Carlo.

On va donc faire tourner 100 000 fois notre simulateur de la question 1 et calculer la moyenne des coûts et d'oiseaux survivants.

```r
# Variables de bases
nb_annees <- 20
alpha0 <- 5
proba_d <- 0.45
proba_b <- 0.45
nb_boucles <- 1000000
p <- matrix(nrow = 2, ncol = nb_boucles)

# On crée une matrice à 2 lignes et autant de colonnes que nécessaire,
# la première pour le coût, la seconde pour le nombre d'oiseaux au bout de 20 ans.

for (ii in 1:nb_boucles) {

  nb_oiseaux <- 2
  c <- 0

  # Ces variables ont besoin d'être remises à 0 à chaque nouvelle boucle
  # et on retire les historiques, on ne garde que les valeurs finales.

  for (i in 2:(nb_annees + 1)) {
    if (nb_oiseaux != 0) {
      for (x in 1:nb_oiseaux) {
        d <- runif(1, min = 0, max = 1)
        b <- runif(1, min = 0, max = 1)
        if (d < proba_d) {
          nb_oiseaux <- nb_oiseaux - 1
        }
        if (b < proba_b) {
         nb_oiseaux <- nb_oiseaux + 1
        }
      }
    }
  }

  if (nb_oiseaux == 0) {
    c <- c - alpha0
  } else {
    c <- c + nb_oiseaux
  }

  p[1, ii] <- c
  p[2, ii] <- nb_oiseaux

  # On rajoute le ii-ème gain final et nombre d'oiseaux à la ii-ème place de la matrice.

}
```

```r
print("Estimation du coût et du nombre moyen d'oiseaux:")
```

```
## [1] "Estimation du coût et du nombre moyen d'oiseaux:"
```

```r
rowMeans(p)
```

```
## [1] -1.570629  1.999546
```

```r
v <- c()
v[1] <- (mean((p[1, ])^2) - mean(p[1, ])^2) / (nb_boucles - 1)
v[2] <- (mean((p[2, ])^2) - mean(p[2, ])^2) / (nb_boucles - 1)
# On ne multiplie pas par "nb_boucles"
# car on le divise par cette même quantité dans le calcul de l'IC.
```

```r
print("IC à 95%")
```

```
## [1] "IC à 95%"
```

```r
print(rowMeans(p) - 1.96 * sqrt(v))
```

```
## [1] -1.582905  1.990814
```

```r
print(rowMeans(p) + 1.96 * sqrt(v))
```

```
## [1] -1.558353  2.008278
```

On peut aussi calculer le nombre de fois où l'espèce a disparu, ce que l'on voudrait éviter à tout prix (enfin, au coût de 5 en l'occurence).
On peut aussi calculer que le nombre moyen d'oiseaux les fois où l'espèce n'a pas disparu, pour comparer avec les autres politiques, ce qui en fait un taux de survie.

```r
a1 <- 0
r <- c()
for (i in 1:nb_boucles) {
  if (p[2, i] > 0) {
    a1 <- a1 + 1
    r <- c(r, p[2, i])
  }
}
a1 / nb_boucles * 100
```

```
## [1] 28.5965
```

```r
mean(r)
```

```
## [1] 6.992275
```

On voit que le taux de survie est à peine de 28.5965%, ce qui est très faible. Cela entraîne le fort coût de 5 dans 71.4035% des cas. On voit bien l'influence importante de l'extinction de l'espèce, qui est irréversible. De plus, on n'a que 7 oiseaux en moyenne quand l'espèce survit, ce qui est très peu.

Question 4

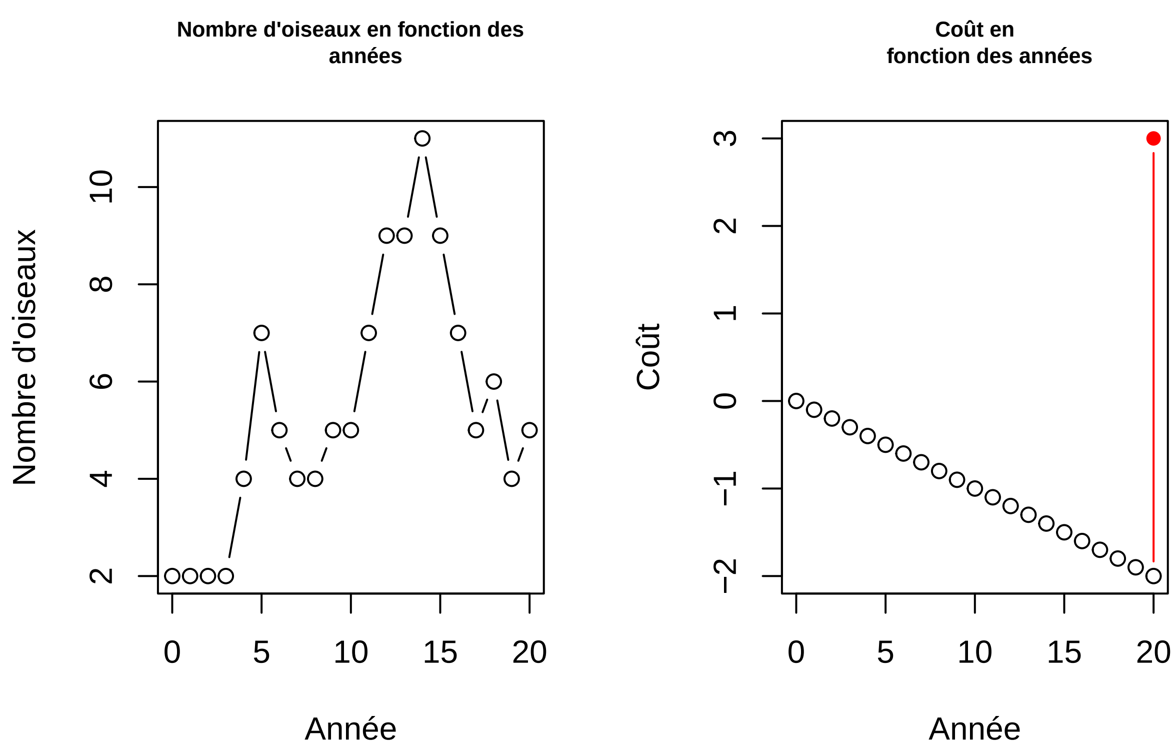
On reprends le code de la question 1, on change la probabilité de naissance et on rajoute le coût de la politique 1. Le fait de devoir continuer à payer même si l'espèce est éteinte, qui est sous-entendu par le fait de choisir l'action 1 à chaque pas dans le temps, n'est pas très cohérent, je calculerai donc un coût secondaire où on arrête de payer si l'espèce est éteinte.

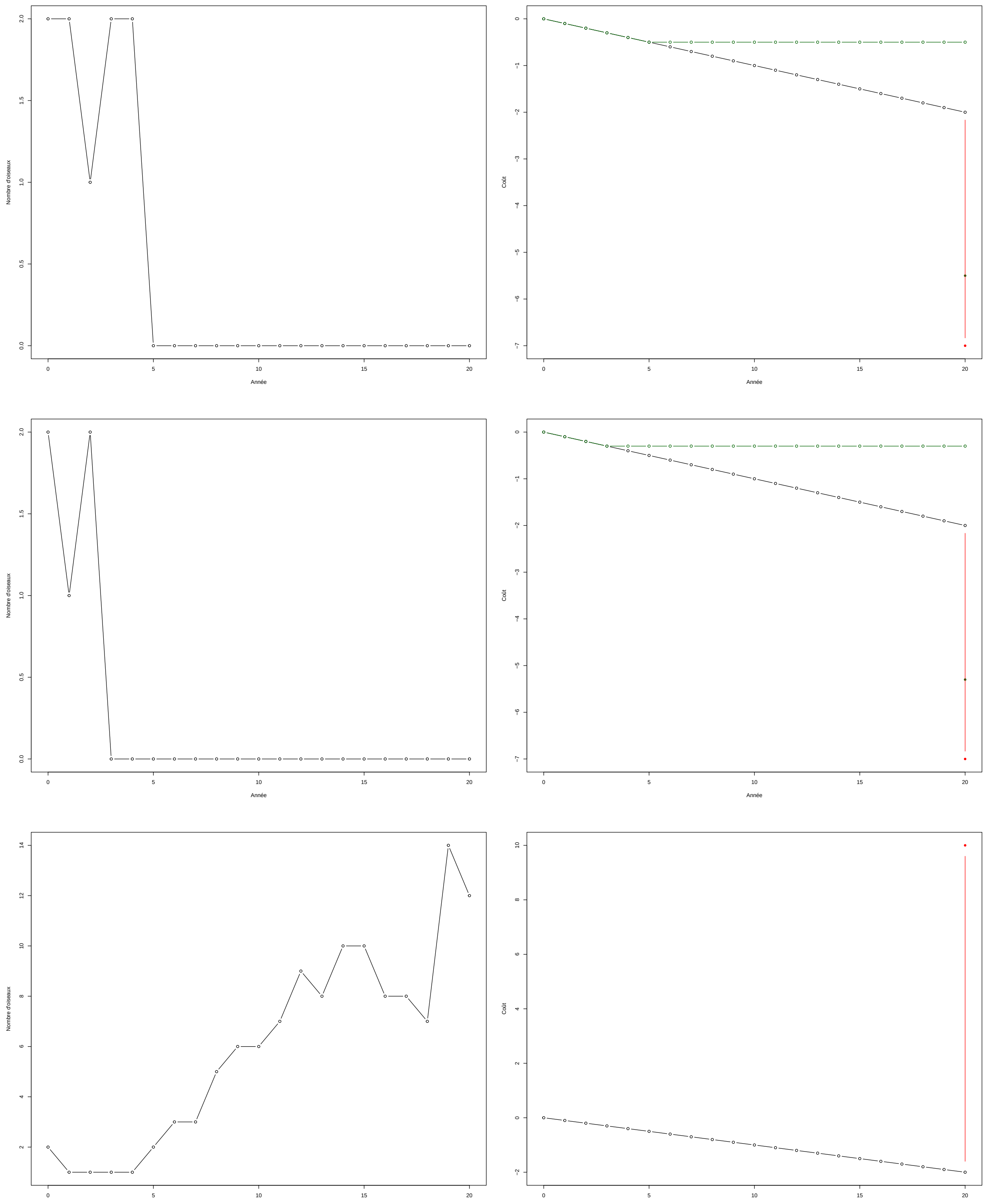
```r
nb_oiseaux <- 2
nb_annees <- 20
c <- 0
c1 <- 0
historique_nb_oiseaux <- c(nb_oiseaux)
historique_c <- c(c)
historique_c_bis <- c(c1)
alpha0 <- 5
alpha1 <- 0.1 # On rajoute le coût de la politique 1.
proba_d <- 0.45
proba_b <- 0.5 # On change la probabilité de naissance.

for (i in 2:(nb_annees + 1)) {
  if (nb_oiseaux != 0) {
    for (x in 1:nb_oiseaux) {
      d <- runif(1, min = 0, max = 1)
      b <- runif(1, min = 0, max = 1)
      if (d < proba_d) {
        nb_oiseaux <- nb_oiseaux - 1
      }
      if (b < proba_b) {
        nb_oiseaux <- nb_oiseaux + 1
      }
    }
  c1 <- c1 - alpha1
  }
  c <- c - alpha1
  historique_nb_oiseaux[i] <- nb_oiseaux
  historique_c[i] <- c
  historique_c_bis[i] <- c1
}

if (nb_oiseaux == 0) {
  c <- c - alpha0
  c1 <- c1 - alpha0
} else {
  c <- c + nb_oiseaux
  c1 <- c1 + nb_oiseaux
}

historique_c[nb_annees + 2] <- c
historique_c_bis[nb_annees + 2] <- c1
```

Question 5

On va tracer quelques courbes de la politique 1. Les points verts correspondent au coût où on ne paye plus à partir du moment où l'espèce est éteinte.

```
par(mfrow = c(1, 2))
plot(c(0:nb_annees), historique_nb_oiseaux, main = "Nombre d'oiseaux en fonction des
     années", cex.main = 0.7, xlab = "Année", ylab = "Nombre d'oiseaux", type = "b")
if (historique_c[(nb_annees + 2)] > 0) {
  ylim <- c(min(historique_c), historique_c[(nb_annees + 2)])
} else {
  ylim <- c(min(historique_c[(nb_annees + 2)], min(historique_c)), 0)
}
plot(c(0:nb_annees), historique_c[1:(nb_annees + 1)], ylim = ylim, main = "Coût en
     fonction des années", cex.main = 0.7, xlab = "Année", ylab = "Coût", type = "b")
if (historique_c_bis[nb_annees + 2] != historique_c[nb_annees + 2]) {
  points(c(0:nb_annees), historique_c_bis[1:(nb_annees + 1)], type = "b", col = "darkgreen")
  points(20, historique_c_bis[(nb_annees + 2)], col = "darkgreen", pch = 16)
}
points(20, historique_c[(nb_annees + 2)], col = "red", pch = 16)
segments(x0 = nb_annees,
         y0 = historique_c[(nb_annees + 1)] + ((historique_c[(nb_annees + 2)] -
                                                   historique_c[(nb_annees + 1)]) / 30),
         x1 = nb_annees,
         y1 = historique_c[(nb_annees + 2)] - ((historique_c[(nb_annees + 2)] -
                                                    historique_c[(nb_annees + 1)]) / 30),
         col = "red")
```





On voit que la politique 1 (qui consiste a favoriser les naissances) à l'air, sur ces quelques exemples, d'arriver moins souvent à l'extinction de l'espèce en favorisant le nombre d'indivudus et d'améliorer le gain. Là où l'espèce s'éteint quand même, on a une perte légerement moindre si on arrête la protection et les coûts qui vont avec.

Question 6

On fait pareil que pour la question 3, on estime le coût de la politique 1 par la méthode de Monte-Carlo.

```
nb_annees <- 20
alpha0 <- 5
alpha1 <- 0.1
proba_d <- 0.45
proba_b <- 0.5
nb_boucles <- 1000000
p <- matrix(nrow = 3, ncol = nb_boucles)

for (ii in 1:nb_boucles) {

  nb_oiseaux <- 2
  c <- 0
  c1 <- 0

  for (i in 2:(nb_annees + 1)) {
    if (nb_oiseaux != 0) {
      for (x in 1:nb_oiseaux) {
        d <- runif(1, min = 0, max = 1)
        b <- runif(1, min = 0, max = 1)
        if (d < proba_d) {
          nb_oiseaux <- nb_oiseaux - 1
        }
        if (b < proba_b) {
          nb_oiseaux <- nb_oiseaux + 1
        }
      }
      c1 <- c1 - alpha1
    }
  c <- c - alpha1
  }

  if (nb_oiseaux == 0) {
    c <- c - alpha0
    c1 <- c1 - alpha0
  } else {
    c <- c + nb_oiseaux
    c1 <- c1 + nb_oiseaux
  }

  p[1, ii] <- c
  p[2, ii] <- c1
  p[3, ii] <- nb_oiseaux
}
```

```
## [1] "Estimation du coût, du coût ajusté et du nombre d'oiseaux:"

## [1] 0.475945 1.222079 5.293755

## [1] "IC à 95%"

## [1] 0.4545664 1.2016733 5.2758996

## [1] 0.4973236 1.2424841 5.3116104

## [1] "Différence minimale entre les 2 coûts:"

## [1] 0.7043497

## [1] "Taux de survie:"

## 43.6438 %

## [1] "Nombre moyen d'oiseaux quand l'espèce a survécu:"

## [1] 12.12945
```

On a ici un taux de survie 43.6438%, ce qui est plus élevé que pour la politique 0. Parmi les fois où les oiseaux survivent, on a en moyenne 12 oiseaux, soit plus qu'avant également.

Question 7

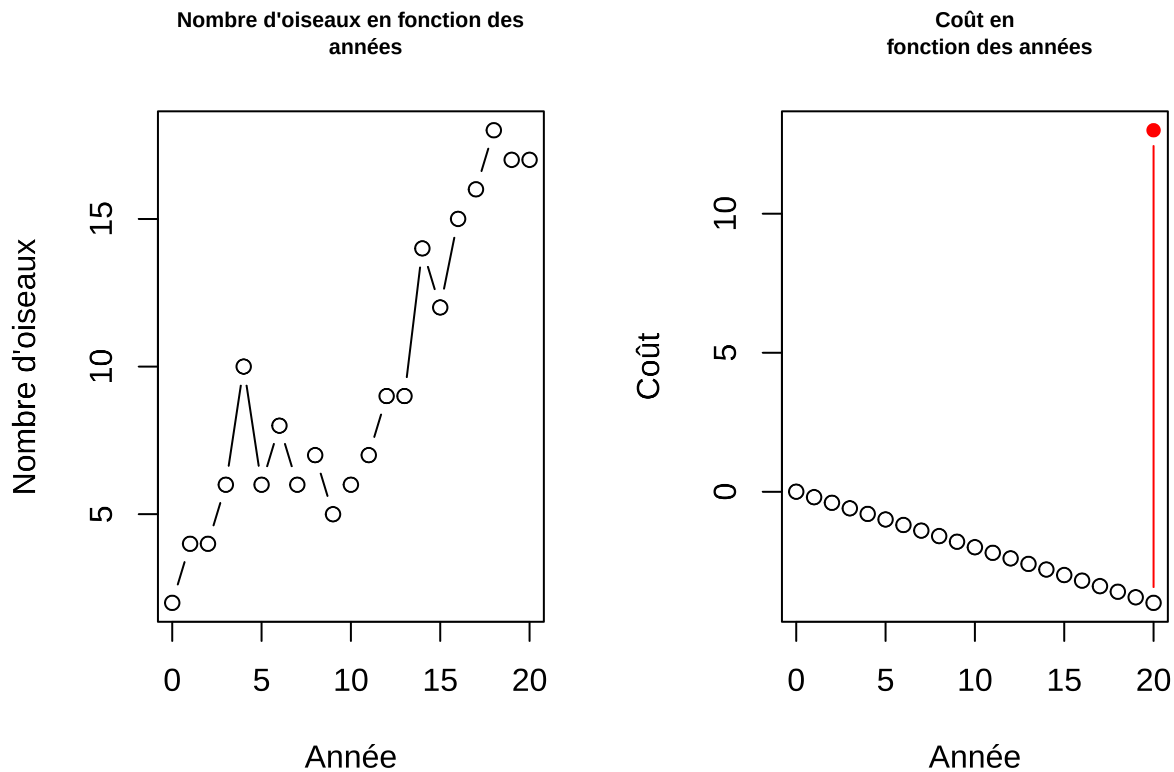
Pour la politique 2, on protège les individus existants et non les naissances.

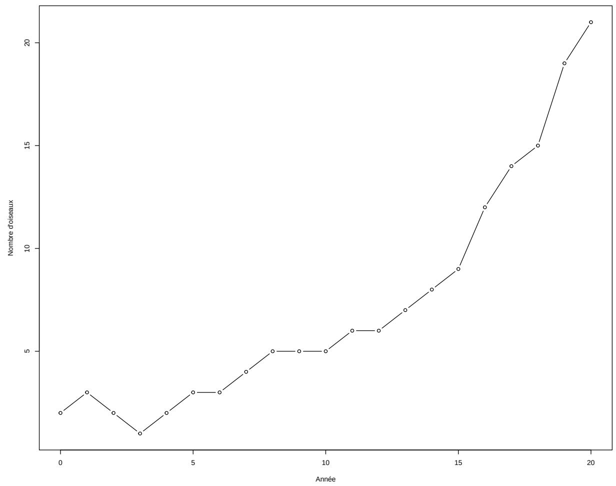
```r
nb_oiseaux <- 2
nb_annees <- 20
c <- 0
c1 <- 0
historique_nb_oiseaux <- c(nb_oiseaux)
historique_c <- c(c)
historique_c_bis <- c(c1)
alpha0 <- 5
alpha2 <- 0.2 # On change l'alpha
proba_d <- 0.35 # On diminue la probabilité de décès
proba_b <- 0.45

for (i in 2:(nb_annees + 1)) {
  if (nb_oiseaux != 0) {
    for (x in 1:nb_oiseaux) {
      d <- runif(1, min = 0, max = 1)
      b <- runif(1, min = 0, max = 1)
      if (d < proba_d) {
        nb_oiseaux <- nb_oiseaux - 1
      }
      if (b < proba_b) {
        nb_oiseaux <- nb_oiseaux + 1
      }
    }
    c1 <- c1 - alpha2
  }
  c <- c - alpha2
  historique_nb_oiseaux[i] <- nb_oiseaux
  historique_c[i] <- c
  historique_c_bis[i] <- c1
}

if (nb_oiseaux == 0) {
  c <- c - alpha0
  c1 <- c1 - alpha0
} else {
  c <- c + nb_oiseaux
  c1 <- c1 + nb_oiseaux
}

historique_c[nb_annees + 2] <- c
historique_c_bis[nb_annees + 2] <- c1
```

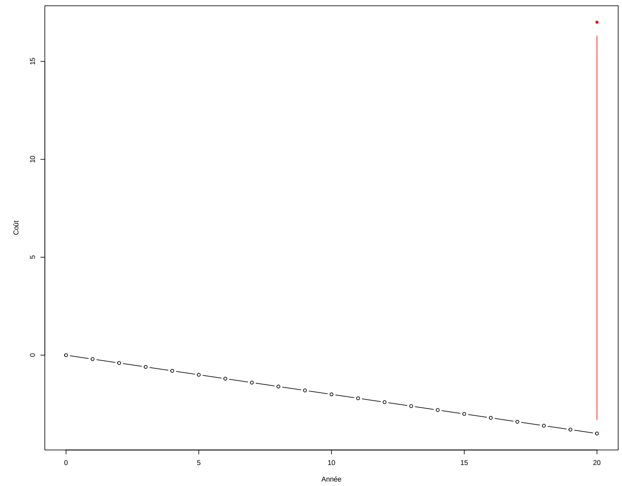
Question 8

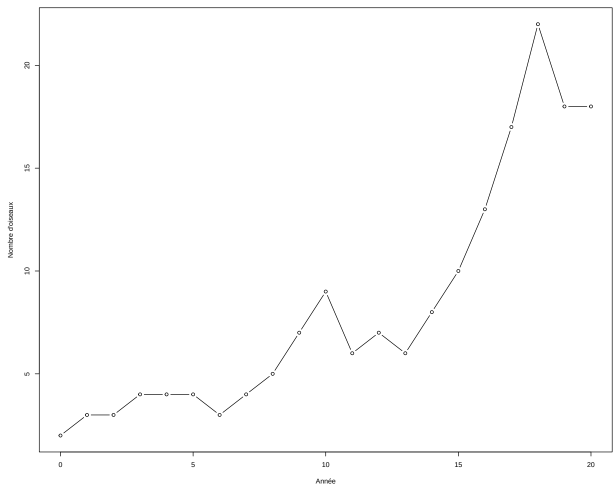
On trace les courbes de la politique 2.

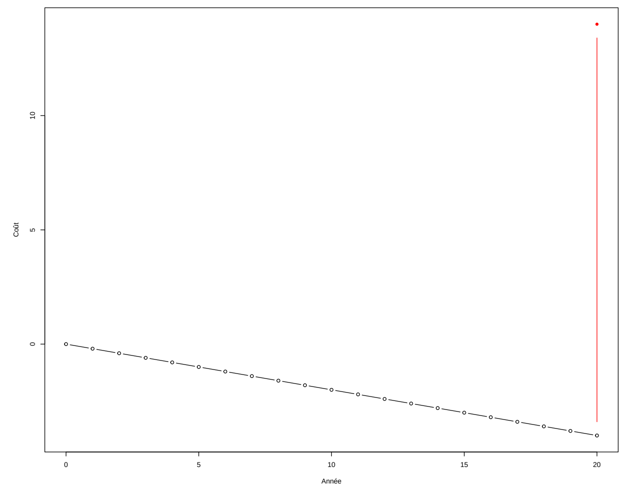
```r
par(mfrow = c(1, 2))
plot(c(0:nb_annees), historique_nb_oiseaux, main = "Nombre d'oiseaux en fonction des
     années", cex.main = 0.7, xlab = "Année", ylab = "Nombre d'oiseaux", type = "b")
if (historique_c[(nb_annees + 2)] > 0) {
  ylim <- c(min(historique_c), historique_c[(nb_annees + 2)])
} else {
  ylim <- c(min(historique_c[(nb_annees + 2)], min(historique_c)), 0)
}
plot(c(0:nb_annees), historique_c[1:(nb_annees + 1)], ylim = ylim, main = "Coût en
     fonction des années", cex.main = 0.7, xlab = "Année", ylab = "Coût", type = "b")
if (historique_c_bis[nb_annees + 2] != historique_c[nb_annees + 2]) {
  points(c(0:nb_annees), historique_c_bis[1:(nb_annees + 1)], type = "b", col = "darkgreen")
  points(20, historique_c_bis[(nb_annees + 2)], col = "darkgreen", pch = 16)
}
points(20, historique_c[(nb_annees + 2)], col = "red", pch = 16)
segments(x0 = nb_annees,
         y0 = historique_c[(nb_annees + 1)] + ((historique_c[(nb_annees + 2)] -
                                                  historique_c[(nb_annees + 1)]) / 30),
         x1 = nb_annees,
         y1 = historique_c[(nb_annees + 2)] - ((historique_c[(nb_annees + 2)] -
                                                   historique_c[(nb_annees + 1)]) / 30),
         col = "red")
```

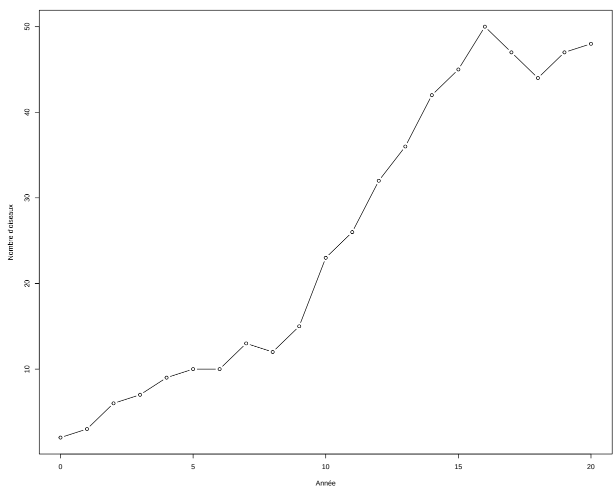


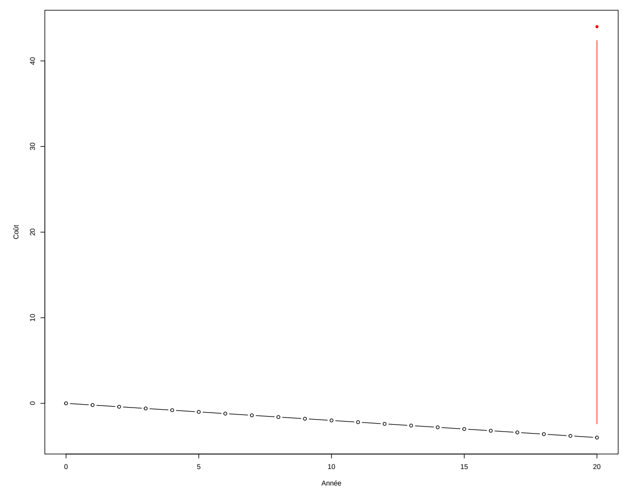












On voit que la politique 2 (qui consiste à protéger les individus existants) à l'air, sur ces quelques exemples, de non seulement arriver moins souvent à l'extinction, mais aussi d'avoir un fort nombre d'individus à la fin.

Question 9

On estime de nouveau avec la méthode de Monte-Carlo le coût moyen de la politique 2.

```
nb_annees <- 20
alpha0 <- 5
alpha2 <- 0.2
proba_d <- 0.35
proba_b <- 0.45
nb_boucles <- 1000000
p <- matrix(nrow = 3, ncol = nb_boucles)

for (ii in 1:nb_boucles) {

  nb_oiseaux <- 2
  c <- 0
  c1 <- 0

  for (i in 2:(nb_annees + 1)) {
    if (nb_oiseaux != 0) {
      for (x in 1:nb_oiseaux) {
        d <- runif(1, min = 0, max = 1)
        b <- runif(1, min = 0, max = 1)
        if (d < proba_d) {
          nb_oiseaux <- nb_oiseaux - 1
        }
        if (b < proba_b) {
          nb_oiseaux <- nb_oiseaux + 1
        }
      }
      c1 <- c1 - alpha2
    }
  c <- c - alpha2
  }

  if (nb_oiseaux == 0) {
    c <- c - alpha0
    c1 <- c1 - alpha0
  } else {
    c <- c + nb_oiseaux
    c1 <- c1 + nb_oiseaux
  }

  p[1, ii] <- c
  p[2, ii] <- c1
  p[3, ii] <- nb_oiseaux
}
```

```
## [1] "Estimation du coût, du coût ajusté et du nombre d'oiseaux:"

## [1]  7.451877  8.540017 13.450232

## [1] "IC à 95%"

## [1]  7.413018  8.502859 13.414448

## [1]  7.490736  8.577175 13.486016

## [1] "Différence minimale entre les 2 coûts:"

## [1] 1.012123

## [1] "Taux de survie:"

## 60.0329 %

## [1] "Nombre moyen d'oiseaux quand l'espèce a survécu:"

## [1] 22.40477
```

On voit que le taux de survie est bien supérieur aux précédents (60.0329%) et on a 22 individus en moyenne quand l'espèce survit.

Question 10

On cherche le nombre d'oiseaux maximal qu'on peut avoir au bout de 20 ans, en partant de 2 individus au départ.

C'est comme si on avait une probabilité de 0 de mourir et de 1 de naître.

Donc chaque année, chaque oiseau se "dédouble". On a donc $2^{21} = 2.097.152$ oiseaux au bout de 20 ans.

Question 11

A cause de l'explosion combinatoire du nombre d'oiseaux, il paraît difficile de faire tourner l'algorithme avec autant de possibilité, sans utiliser des techniques de calculs optimisées et/ou un ordinateur puissant en utilisant les multiples cœurs disponibles en parallèle, en un temps raisonnable.

La matrice de transition contiendrait presque 13.2 millard d'éléments (3 fois une matrice carrée de taille $2^{21}+1$), qui occuperait environ 6.6 To d'espace (en prenant comme base de calcul pour l'espace requis (selon RStudio) une matrice de 15 Millions d'éléments qui prends 60 MB = 7.5 Mo) . C'est beaucoup trop.

Question 12

On cherche M pour réduire le nombre d'état possible. Cela va servir pour regrouper les cas possibles mais extrêmement rares.

On pourrait chercher M en faisant tourner la simulation avec la politique 2 (celle qui a le meilleur taux de survie et le plus d'oiseaux en moyenne) un certain nombre de fois (comme pour Monte Carlo) et en prenant la valeur maximale qui apparaît, mais cette méthode est très sensible à l'aléatoire. On pourrait tomber sur un cas exceptionnel qui gonflerait notre M et augmenterait nos durées de calculs pour pas grand chose. (On rappelle que la taille de matrice grossit à 3 fois la taille de M au carré.)

On va donc prendre une valeur de M tel que le nombre d'individus au bout de 20 ans soit inférieur à M dans 99,99% des cas. Le choix du 99.99% est "un peu" arbitraire. On ne prends pas le "classique" 95% pour ne pas être trop restrictif vers le bas. De même, on ne va chercher l'intervalle que parmi les fois où l'espèce ne s'est pas éteinte pour ne pas tirer l'estimation vers le bas.

```r
# Variables de bases, inutile de calculer les coûts.
nb_annees <- 20
proba_d <- 0.35
proba_b <- 0.45
nb_boucles <- 1000000
p <- matrix(nrow = 1, ncol = nb_boucles)
a <- 0
r <- c()
M <- 0

for (ii in 1:nb_boucles) {

  nb_oiseaux <- 2

  for (i in 2:(nb_annees + 1)) {
    if (nb_oiseaux != 0) {
      for (x in 1:nb_oiseaux) {
        d <- runif(1, min = 0, max = 1)
        b <- runif(1, min = 0, max = 1)
        if (d < proba_d) {
          nb_oiseaux <- nb_oiseaux - 1
        }
        if (b < proba_b) {
          nb_oiseaux <- nb_oiseaux + 1
        }
      }
    }
  }
  p[1, ii] <- nb_oiseaux
}

for (i in 1:nb_boucles) {
  if (p[i] > 0) {
    a <- a + 1
    r <- c(r, p[i])
  }
}

max <- max(p)
```

```r
b <- a

while (b / a > 0.0001) {
  b <- a
  M <- M + 1
  for (i in 1:a) {
    if (r[i] <= M) {
      b <- b - 1
    }
  }
}
```

On a donc évaluer notre M à 155. Le max aurait été de 203.

Question 13

On va donc construire trois matrices carrées de taille M+1 (une pour chaque actions) remplie de la probabilité de passer d'un certain nombre d'oiseaux à un autre en particulier, de 0 à M (M ou plus) oiseaux.

```r
proba_b <- c(0.45, 0.5,  0.45)
proba_d <- c(0.45, 0.45, 0.35)

transition_density  <-  function(population, action) {

  result <- convolve(dbinom(0:population, population, proba_b[action]),
                     dbinom(0:population, population, proba_d[action]), type = "open")
  # Fait le produit de convolution des binomiales

  result <- result[1:(M + 1)] # On s'assure que le vecteur fait la bonne taille
  result[is.na(result)] <- 0  # et on replace les NA par des 0 si besoin.

  result[M + 1] <- 1 - sum(result[1:M])
  # On place tout le poids de la probabilité
  # de toutes les populations supérieur à M à la fin.

  result # Renvoie le résultat
}

# Matrices de transition
Q <- array(0, dim <- c((M + 1), (M + 1), 3))

# Ne rien faire : action 0
q1 <- NULL
for (i in 0:M) {
  q1 <- c(q1, transition_density(i, 1))
} # On crée M+1 vecteurs de taille M+1 les uns à la suite des autres,
  # chacun correspondant à une loi de probabilité pour un nombre d'oiseaux en particulier.

Q[, , 1] <- matrix(q1, nrow = (M + 1), byrow = TRUE)
# On remplit ensuite la matrice avec le vecteur qu'on découpe en M+1 morceaux.
```

```r
# Augmentation de la fécondité : action 1
q2 <- NULL
for (i in 0:M) {
  q2 <- c(q2, transition_density(i, 2))
}

Q[, , 2] <- matrix(q2, nrow = (M + 1), byrow = TRUE)

# Diminution des décès : action 2
q3 <- NULL
for (i in 0:M) {
  q3 <- c(q3, transition_density(i, 3))
}

Q[, , 3] <- matrix(q3, nrow = (M + 1), byrow = TRUE)
```

Voilà quelques exemples de matrices, pour l'action 1, 2 et 3 (respectivement les colonnes), en partant respectivement d'une population de base de 0, 1 et 2 oiseaux. La i$^{\text{ème}}$ ligne correspond à la probabilité d'arriver à i-1 oiseaux.

```r
Q[1, 1:4, ]
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    1    1
## [2,]    0    0    0
## [3,]    0    0    0
## [4,]    0    0    0
```

```r
Q[2, 1:4, ]
```

```
##        [,1]  [,2]   [,3]
## [1,] 0.2475 0.225 0.1925
## [2,] 0.5050 0.500 0.5150
## [3,] 0.2475 0.275 0.2925
## [4,] 0.0000 0.000 0.0000
```

```r
Q[3, 1:5, ]
```

```
##            [,1]     [,2]       [,3]
## [1,] 0.06125625 0.050625 0.03705625
## [2,] 0.24997500 0.225000 0.19827500
## [3,] 0.37753750 0.373750 0.37783750
## [4,] 0.24997500 0.275000 0.30127500
## [5,] 0.06125625 0.075625 0.08555625
```

Question 14

On reprend l'algorithme du cours et on le modifie pour nos besoins.

```
N <- 20
rec <- matrix(c(0, -0.1, -0.2), nrow = 1) # Récompense instantanée

V <- matrix(-1, nrow = M + 1, ncol = N + 1)
maximiseur <- matrix(-1, nrow = M + 1, ncol = N)
# On remplit les deux matrices de bases de -1 pour faciliter la lecture
# et ne pas confondre un 0 de base avec l'action 0.

V[, 1] <- (0:M) # Récompense terminale
V[1, 1] <- -5   # De même

for (n in 1:N) {
  for (k in 1:(M + 1)) {
    if (k <= 2^(N - n + 1) + 1) {
      tmp <- NULL
      tmp <- rec + V[, n] %*% Q[k, , ]
      v <- max(tmp)
      f <- which.max(tmp)
      V[k, n + 1] <- v
      maximiseur [k, n] <- f - 1
    }
  }
}
```

Question 15

On lit la performance optimale pour $X_0 = 2$ en V[3,21], elle est de 8.5449769.
La performance optimale varie assez peu tant qu'on reste au dessus de 100 pour M. Elle tend, de manière très lente, vers une valeur limite supérieur qu'on pourrait calculer sans l'approximation avec M.

Elle correspond au coût de ma politique 2 modifiée où on arrête les frais si l'espèce disparaît, aux quelques détails près sur les cas rares.

Question 16

Une lecture approfondie de la matrice "maximiseur" permet de confirmer que la politique 2 modifiée (diminution des décès) est optimale tant que le nombre d'oiseaux reste en dessous de la centaine.
Au-delà de ce nombre, qui arrive après la $5^{\text{ème}}$ année et qui est rare, moins de 1 chance sur 500 selon quelques rapides estimations par le simulateur, il est plus rentable de favoriser les naissances, voire de ne plus rien faire à partir d'un nombre d'oiseaux plus élevé.
Ce seuil pour faire l'action 0 ou 1 est relevé chaque année et disparaît même lors des dernières années. Il est impossible de donner une règle précise dans les cas rares, le mieux est de lire directement sur la matrice au cas par cas, selon le nombre d'oiseaux et l'année.
Enfin, on peut remarquer que changer d'action ne réduit que très peu le coût, de 3 au maximum sur les 20 ans, ce qui est très peu face à la récompense de plus de 153 oiseaux attendus en moyenne à partir du moment où on peut faire une autre action (autre que ne rien faire car l'espèce a disparu.) (au maximiseur[96,14], endroit où apparaît la $1^{\text{ère}}$ possibilité de faire une autre action.)

Etant donné que notre but premier est de sauvegarder l'espèce, il est cohérent que la décision soit de diminuer le nombre de décès même quand il y a beaucoup d'oiseaux, le coût légèrement plus élevé est largement compensé par le nombre d'oiseaux et l'esquive de la perte de 5 si l'espèce disparaissait.