

Simulateur de circuits quantiques avec outil de visualisation et de quantification de l'intrication

par

Paul DESCHILDRE HOCQUET

PROJET PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION DE LA MAÎTRISE
AVEC PROJET

M. Ing.

MONTRÉAL, LE 26 JUILLET 2024

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC



Paul DESCHILDRE HOCQUET, 2024



Cette licence Creative Commons signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette oeuvre à condition de mentionner l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'oeuvre n'ait pas été modifié.

PRÉSENTATION DU JURY

CE PROJET A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE:

M. Jean-Marc ROBERT, directeur de projet
Département de génie logiciel et des TI, ÉTS

M. Michael McGUFFIN, président du jury
Département de génie logiciel et des TI, ÉTS

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Mr. Jean-Marc ROBERT, mon tuteur de projet de fin de maîtrise, pour m'avoir introduit au monde de l'informatique et l'algorithmie quantique. Je le remercie également de m'avoir pris sous sa tutelle pour l'entièreté de ce projet. Nous remercions également Mr. Michael McGUFFIN du temps qu'il a su accorder au projet ainsi que pour ses multiples interventions toujours très pertinentes sur les méthodes de représentation et de visualisation.

Simulateur de circuits quantiques avec outil de visualisation et de quantification de l'intrication

Paul DESCHILDRE HOCQUET

RÉSUMÉ

L'informatique quantique est en passe de devenir une véritable révolution parmi les technologies de l'information : efficacité algorithmique, cryptographie ou encore modélisation chimique, les exemples d'utilisations ne manquent pas.

Basée sur les principes fondamentaux de la physique quantique, l'informatique quantique n'est pas encore totalement accessible à l'ensemble de spécialistes de l'informatique, à l'instar de l'informatique classique il y a quelques décennies.

L'un des principaux enjeux du domaine est donc pédagogique : permettre à des étudiants en informatique, sans connaissance en physique fondamentale, de comprendre les enjeux et le fonctionnement de l'informatique quantique.

Le concept le plus important à maîtriser est l'intrication. Véritable clef de voûte de l'informatique quantique, ce phénomène est observé, utilisé et pour autant pas encore totalement compris ; Einstein le nomma même "Action fantomatique à distance".

Aujourd'hui, certains grands acteurs du domaine proposent des outils de simulation de circuits et de mesure mais ces derniers ne proposent pas de détecter ou de quantifier l'intrication, laissant une partie fondamentale de l'information de côté.

Tout d'abord, un large rappel des notions mathématiques et physiques sont proposées, afin de rendre ce mémoire autosuffisant. Ensuite, une revue des propositions de quantification et de représentations existantes est effectuée, et une explication sur les choix pour le simulateur est exprimée. Puis, le simulateur - cœur du projet - est présenté : son affichage, son utilisation et son fonctionnement. Enfin une discussion est ouverte sur les possibles améliorations et sur d'autres idées d'implémentation.

Mots-clés: informatique quantique, visualisation quantique, intrication

Quantum circuit simulator with visualization and quantification tool for entanglement

Paul DESCHILDRE HOCQUET

ABSTRACT

Quantum computing is on the edge of becoming a genuine revolution among the information technologies : algorithmic efficiency, cryptography or chemical modeling, there is a wide array of usages.

Based on the fundamental principles of quantum physics, quantum computing is not yet as accessible to all computer science specialists, just like classical computing was a few decades ago.

One of the domain's main challenges is educational : to allow computer science students with no fundamental physics background to grasp the mechanisms behind quantum computing.

The most important concept to understand is entanglement. Genuine keystone of quantum computing, this phenomena is observable, used but yet not fully understood ; Einstein first called it "Spooky Action at a Distance".

As of today, some major companies in the domain offer simulation and measurement tools, but those do not feature entanglement detection nor quantification, leaving useful information behind.

First of all, a large summary of mathematical and physical concepts is proposed, in order to make this paper self-sufficient. Afterwards, a review of methods of quantification and representation of entanglement is proposed. Then, an explanation on the choices made for the simulator are given. Thereafter, the heart of the project - the simulator - is presented : its display, its usage and its implementation. Finally, a discussion is opened about possible enhancements and new implementations ideas.

Keywords: quantum computing, quantum visualization, entanglement

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 NOTIONS DE BASE	3
1.1 Etats quantiques	3
1.1.1 Qubit	3
1.1.2 Formalisme de Dirac	3
1.1.3 Amplitude et probabilité	4
1.1.4 Etat quantique et superposition	4
1.1.5 Condition de normalisation	5
1.1.6 Produit de Kronecker	5
1.1.7 Matrice de densité	6
1.1.8 Etats mixtes	6
1.1.9 Pureté	7
1.1.10 Intrication	7
1.2 Modèles de calcul	9
1.2.1 Machines de Turing réversibles	9
1.2.2 Circuits quantiques	10
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	13
2.1 Représentations hiérarchiques	13
2.2 Représentations issues de Bloch	14
2.3 Représentations originales	24
2.4 Littérature de l'intrication	30
CHAPITRE 3 NOTIONS AVANCÉES	31
3.1 Trace partielle	31
3.2 Décomposition de Schmidt	31
3.3 Logarithme d'une matrice	34
3.4 Relation entre matrices de densités, traces partielles et décompositions de Schmidt	35
3.5 Entropie de Von Neumann	36
CHAPITRE 4 SIMULATEUR ET VISUALISATEUR	39
4.1 Entrée du simulateur et affichage du circuit	40
4.2 Calcul des états	42
4.3 Représentation de l'intrication : l'entropie de Von Neumann	46
4.4 Partitions, minimum et maximum d'intrications	47
4.5 Paramètres utilisateur	48
4.6 Intuition	49
4.7 Pistes d'amélioration	52

CHAPITRE 5 CONCLUSION	55
ANNEXE I EXEMPLE APPLIQUÉ DES NOTIONS MATHÉMATIQUES	57
ANNEXE II COMMANDES TEXTUELLES DU SIMULATEUR	71
BIBLIOGRAPHIE	77

LISTE DES FIGURES

	Page	
Figure 1.1	Exemple de circuit quantique	10
Figure 2.1	Visualisation d'un circuit de trois qubits selon QuFlow	14
Figure 2.2	Cercle de Bloch	15
Figure 2.3	Représentation toroïdale	16
Figure 2.4	Disque d'intrication	19
Figure 2.5	Notation en cercle sur 1 qubit	21
Figure 2.6	Notation en cercle sur 2 qubits	21
Figure 2.7	Représentation en cercle d'un produit de Kronecker	22
Figure 2.8	Notation en cercle sur 2 qubits intriqués	22
Figure 2.9	Notation en cercle sur 3 qubits intriqués	23
Figure 2.10	Notation en cercle sur 4 qubits intriqués	24
Figure 2.11	Photographies de dispositifs de représentation de l'intrication	25
Figure 2.12	Etat $ \Gamma\rangle$ selon QuBOBS	26
Figure 2.13	Boite arc-en-ciel pour des amino-acides	27
Figure 2.14	Paire de Bell avec boites arc-en-ciel	27
Figure 2.15	Téléportation avec boites arc-en-ciel	28
Figure 2.16	Version modifiée des boites-arc-en-ciel	29
Figure 4.1	Fenêtre Simulateur	39
Figure 4.2	Séquences Bell	41
Figure 4.3	Sortie du simulateur pour un état de Bell	42
Figure 4.4	Séquences circuit 5 qubits	46
Figure 4.5	Fenêtre simulateur 5 qubits, maximum d'intrication	49

Figure 4.6	Différents résultats état de Bell	50
Figure 4.7	Simulateur pour un double état de Bell	51
Figure 4.8	Maquette du simulateur amélioré	53

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

NP	<i>Nondeterministic Polynomial</i> , Non Déterministe polynomial
SVD	<i>Singular Values Decomposition</i> , Décomposition en Valeurs Singulières
TSP	<i>Travelling salesman problem</i> , Problème du voyageur de commerce

INTRODUCTION

Dès 1965, Gordon Earl Moore théorise et prévoit l'évolution de la puissance de calcul des ordinateurs à travers la loi empirique éponyme : la loi de Moore. Cette loi prévoit un doublement de la capacité de calcul des semi-conducteurs tous les ans sans augmentation du coût de fabrication, puis, dix ans plus tard, un doublement de la quantité de transistors composant une puce de microprocesseur. Néanmoins, dû aux limitations techniques et scientifiques permettant de rétrécir davantage les transistors, l'industrie du silicium prévoit un arrêt brutal de cette croissance - nommé "The Wall" ("Le Mur" en français). Les prédictions de cette loi se sont avérées relativement exactes et, aux alentours des années 2020, la loi de Moore est jugée comme ayant atteint sa limite. Le moment semble donc opportun pour introduire des changements importants dans le domaine de l'informatique, et permettre de continuer d'améliorer la performance et les capacités des calculs.

Dans les années 1980, le physicien Richard Feynman théorise l'utilisation de systèmes quantiques dans le cadre de calculs et d'algorithmes, puis les premiers essais pratiques voient le jour dans les années 1990. Aujourd'hui, l'informatique quantique constitue un changement de paradigme presque inéluctable. Contrairement aux bits classiques limités à être soit dans l'état 0, soit dans l'état 1, les *qubits* - l'unité fondamentale de l'informatique quantique - peuvent exister sous les états 0, 1 ou une superposition des deux à la fois ! Ce fonctionnement permet de démultiplier la puissance des calculs dans certaines applications ou bien même de résoudre des problèmes trop complexes pour des ordinateurs traditionnels. Grâce à cela, les potentielles applications sont déjà nombreuses : en sécurité informatique et cryptographie, pour des simulations industrielles en chimie ou en aéronautique, pour des optimisations logistiques (le problème du voyageur de commerce, ou TSP) ou encore pour des optimisations financières. Il est ainsi nécessaire de former aujourd'hui les acteurs de demain du domaine.

Pourtant, basée sur les théories de la mécanique quantique, l'informatique quantique apparaît comme un pan peu accessible de l'informatique théorique. En effet, la plupart des étudiants

en informatique ne possèdent pas de connaissance en physique théorique leur permettant de comprendre les mécanismes et les relations qui entrent en jeu dans un circuit quantique, et notamment la clef de voûte de l'informatique quantique : l'intrication. Ce phénomène, aussi étrange que puissant, demande d'adopter une toute nouvelle manière de réfléchir et d'aborder les concepts, ce qui peut ne pas être intuitif en premier lieu. Afin de rendre plus ludique, visuel et pratique, certaines grandes entreprises du domaine, à l'instar d'IBM, proposent d'ores et déjà des simulateurs de circuits quantiques. Néanmoins, aucune ne propose d'informations détaillées sur les relations d'intrications, pourtant fondamentales dans l'exécution d'un circuit.

L'objectif de ce projet de maîtrise est donc de proposer un outil novateur et efficace qui répond à la volonté d'informer, de représenter et de quantifier l'intrication dans un circuit quantique afin d'insuffler aux néophytes du domaine une intuition sur ce phénomène. Ainsi, ce mémoire propose un simulateur affichant une représentation du circuit, basée sur la représentation de Penrose, ainsi que différents outils permettant de mesurer l'évolution de l'intrication au cours du circuit. Ce mémoire, accompagnant le simulateur, se veut auto-suffisant sur les notions nécessaires pour la compréhension et l'utilisation du simulateur. Ainsi, une grande partie des notions mathématiques et physiques y sont reprises et expliquées avant d'être mises en application dans le simulateur.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE

1.1 Etats quantiques

1.1.1 Qubit

Un qubit est l'élément fondamental de l'informatique quantique, à l'instar du bit pour l'informatique classique. Le bit admet soit une valeur de 0, soit de 1, d'où sa dénomination de binaire. Le qubit, quant à lui, s'affranchit d'un choix binaire et admet une superposition des deux résultats 0 et 1 avant d'être mesuré sur l'un des deux.

Un qubit est donc exprimé sous la forme d'un vecteur de dimension 1×2 où sont indiqués les amplitudes des résultats 0 et 1, tel que :

$$\begin{pmatrix} \text{amplitude de 0} \\ \text{amplitude de 1} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Ainsi :

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ désigne un qubit qui sera égal à 0 à la mesure
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ désigne un qubit qui sera égal à 1 à la mesure

1.1.2 Formalisme de Dirac

Afin d'éviter de supporter des vecteurs dans les calculs, Dirac (1939) introduit les $\langle |$ bras et les $| \rangle$ kets, autrement appelé le formalisme de Dirac.

En somme, $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d'autres kets notables sont présentés en Chapitre 4.1),
et $\langle i| = |i\rangle^\dagger$, où \dagger désigne la transposée complexe hermitienne.

1.1.3 Amplitude et probabilité

Chaque ket qui compose un état quantique désigne un résultat possible lors de la mesure du système. Ils possèdent respectivement une amplitude qui caractérise la probabilité de chance d'obtenir le résultat correspondant lors de la mesure. Soit α l'amplitude d'un ket. La probabilité d'observer le ket associé à α lors de la mesure est :

$$\text{Pr}(\text{observer } |i\rangle \text{ à la mesure}) = |\alpha_i|^2 \quad (1.2)$$

1.1.4 Etat quantique et superposition

Un état quantique est la description de tous les aspects d'un système physique régit par la mécanique quantique. Selon le premier postulat de la mécanique quantique, un état quantique peut admettre plusieurs valeurs possibles pour un même observable (ou quantité observable), ici la probabilité de mesure. Ce phénomène permet notamment aux qubits de se différencier des bits classiques en possédant plus de 2 états possibles. Ainsi, l'état d'un système quantique est défini par le vecteur d'une combinaison linéaire d'états de base (souvent $|0\rangle$ et $|1\rangle$), avec des coefficients complexes.

Soit un état ψ à n qubits :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle \quad (1.3)$$

où :

- i index du résultat possible, exprimé en binaire dans le ket,
- α_i amplitude de $|i\rangle$, un coefficient complexe. L'ensemble de ses coefficients doivent respecter la condition de normalisation en Equation 1.4

1.1.5 Condition de normalisation

La condition de normalisation assure de la véracité d'un état. Puisque $|\alpha|^2$ est la probabilité d'observer un état, il est important que la somme des probabilités soit égale à 1. Ainsi, la condition de normalisation est désignée par la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1 \quad (1.4)$$

Si cette condition n'est pas respectée, alors l'état considéré ne possède aucun sens physique.

1.1.6 Produit de Kronecker

Un produit de Kronecker est un produit tensoriel particulier. Désigné par le symbole \otimes , il définit le produit de deux matrices comme "l'encapsulation" de celle de gauche dans celle de droite dont les éléments agissent alors comme des coefficients multiplicateurs.

Soient A et B deux matrices de dimensions respectives $m \times n$ et $p \times q$. Le résultat du produit de Kronecker de ces deux matrices donne une matrice de dimensions $m \cdot p \times n \cdot q$ telle que :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n} \cdot b_{12} & \cdots & a_{1n} \cdot b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} \cdot b_{p1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n} \cdot b_{p1} & \cdots & a_{1n} \cdot b_{pq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn} \cdot b_{12} & \cdots & a_{mn} \cdot b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{p1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn} \cdot b_{p1} & \cdots & a_{mn} \cdot b_{pq} \end{pmatrix}$$

1.1.7 Matrice de densité

La matrice de densité ρ est la représentation en une seule matrice de tout l'ensemble des états d'un système physique à un instant.

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.5)$$

Ainsi, si $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^\dagger & \beta^\dagger \end{pmatrix}$ et $|\psi\rangle\langle\psi|$ est le produit tensoriel, alors

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\dagger & \beta^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} \\ \beta\bar{\alpha} & \beta\bar{\beta} \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice de densité représente la condition de normalisation exprimée à l'Equation 1.4 :

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1 = \text{tr}(\rho) \quad (1.6)$$

où tr désigne la trace de la matrice (soit : la somme des coefficients de la diagonale).

Bien que cette notation s'applique à n'importe quel système quantique, elle est avantageuse notamment pour décrire des états mixtes limités par le formalisme de Dirac. Dans le cadre de ce mémoire, seuls des états purs seront considérés.

1.1.8 Etats mixtes

La Section 1.1.4 introduisait les états quantiques. Ces états sont classifiés comme des états purs puisqu'ils peuvent être écrits comme une combinaison linéaire d'états de base.

Pourtant, en pratique, il est quasiment impossible d'utiliser des états purs tant ils sont instables et soumis aux variations de l'environnement. Une manière plus précise de décrire le véritable état d'un système physique est d'utiliser un mélange statistique d'états purs, appelé un état mixte.

Un état mixte peut donc être représenté par une matrice de densité telle que :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (1.7)$$

où $p_i \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_i p_i = 1$

1.1.9 Pureté

La pureté (généralement notée γ) d'un état permet de déterminer si ce dernier est pur ou mixte. Puisque ce mémoire ne considère que des états purs, cette mesure permet de vérifier que les états introduits restent dans le cadre d'utilisation du simulateur. Ainsi, la pureté est définie par la relation suivante :

$$\gamma = \text{tr}(\rho^2) \quad (1.8)$$

Si $\gamma = 1$, alors l'état désigné par la matrice de densité ρ est un état pur. Sinon, il s'agit d'un état mixte.

1.1.10 Intrication

L'intrication est le phénomène de la mécanique quantique qui rend l'informatique quantique unique. Ce phénomène apparaît lorsque deux particules constituent un système lié et présentent des états quantiques dépendant l'un de l'autre, peu importe la distance les séparant.

De façon pratique, certains états quantiques purs peuvent être écrits sous la forme d'un produit tensoriel (ou de Kronecker) de l'états de deux sous-systèmes S_1 et S_2 . Ces états sont nommés *séparables* : le système S_1 admet un état quantique E_1 indépendant de celui du sous-système S_2 , E_2 et l'un n'affecte pas l'autre de quelque manière.

Un état intriqué est donc l'inverse : un état non séparable ou non factorisable. Soient :

$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$, l'état quantique d'un système à deux qubits

$$|E_1\rangle = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1$$

$$|E_2\rangle = c|0\rangle_2 + d|1\rangle_2$$

$|\psi\rangle$ est séparable en deux états $|E_1\rangle \otimes |E_2\rangle$ si et seulement si :

- $\alpha = a \cdot c$

- $\beta = b \cdot c$
- $\gamma = a \cdot d$
- $\delta = b \cdot d$

Si l'une de ces relations n'est pas respectée, alors l'état n'est pas factorisable et par conséquent, intriqué.

Certains états sont plus intriqués que d'autres. Les plus intriqués sont appelés les états de Bell et sont reconnus comme étant maximallement intriqués.

Soit $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ l'un des quatres états de Bell. En se basant sur le fait que

ces états soient les plus intriqués possible, il est possible de mettre en place une relation simple de comparaison de l'intrication.

Soit $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$ un état sur deux qubits. Il est possible d'évaluer son taux d'intrication comparé à un état de Bell avec la relation suivante :

$$s = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un état de Bell, $s = \frac{1}{2}$, ce qui définit le maximum de s , et dans le cas d'un état séparable, $s = 0$. Ainsi :

$$0 \leq |s| \leq \frac{1}{2} \quad (1.10)$$

Une présentation d'application de toutes les notions mathématiques de ce chapitre et du Chapitre 3 se trouve en Annexe I

1.2 Modèles de calcul

1.2.1 Machines de Turing réversibles

Introduites par Turing (1936), les machines de Turing sont des modèles théoriques de calcul aujourd’hui considérés comme les ancêtres des ordinateurs modernes. Elles utilisent un ruban infini divisé en cases, d’une tête de lecture et d’écriture capable de se déplacer sur le ruban et d’un ensemble d’instructions régissant son comportement. La machine fonctionne en lisant une case du ruban, en appliquant une instruction en fonction du contenu lu et de l’état dans lequel se trouve la machine, et en modifiant éventuellement le ruban, avant de passer à l’instruction suivante tout en mettant à jour son état.

Plus tard, le français indépendant Lecerf (1963) introduit une variante des machines de Turing classiques : les machines de Turing réversibles. Mais c’est surtout Bennett (1973) qui introduit publiquement et globalement les machines réversibles et la considération énergétique. Ces nouvelles machines sont capables de "rembobiner" leurs instructions pour revenir à un état antérieur. Cette réversibilité implique des interactions importantes, notamment pour l’informatique quantique.

En effet, les modèles de calculs quantiques peuvent être simulés par des machines de Turing réversibles. Ainsi, théoriquement, tout ce qui peut être calculé par un ordinateur quantique peut également être calculé par une machine de Turing réversible, bien que les calculs puissent demander plus de temps selon leur complexité. Visuellement, les circuits quantiques utilisent une variante de la représentation de Penrose, utilisée pour la première fois dans le cadre de circuits quantiques par Feynman (1986).

En informatique classique, la plupart des portes élémentaires ne sont pas réversibles : le résultat d’une porte ET ne permet pas de remonter aux deux bits qui ont composé ce résultat. Théoriquement, il serait possible de rendre les opérations classiques réversibles. Cependant, l’informatique classique admet la possibilité de "jeter" les informations non-nécessaires suivant une opération (sous forme d’émission de chaleur, et donc d’entropie) sans altérer le résultat. La nature unitaire de la mécanique quantique lui demande donc aussi d’être réversible. "Jeter" de

l'information durant des calculs quantiques est également possible. Néanmoins, les informations à "jeter" s'obtiennent en effectuant des mesures sur le système quantique, nuisant à son intégrité. A des fins utiles, il n'est donc pas concevable d'employer des circuits quantiques irréversibles, d'où le postulat de réversibilité.

1.2.2 Circuits quantiques

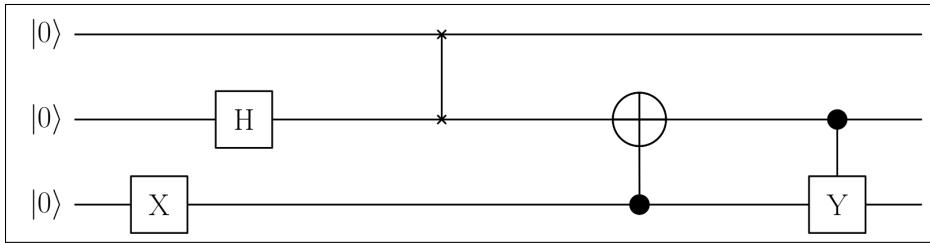


Figure 1.1 Exemple de représentation d'un circuit quantique

En informatique quantique, un circuit quantique est un modèle de calcul proche de ceux des circuits classiques, dans lequel un calcul est une séquence de portes (quantiques), de mesures, d'initialisations de qubits, voires d'autres d'actions comme la communication avec un canal classique. Le modèle universel présenté en Figure 1.1 admet des circuits quantiques écrits de gauche à droite, axe représentant le temps et l'ordre d'exécution. Chaque ligne horizontale représente un qubit et les éventuelles lignes doubles représentent des bits classiques. Les objets connectés aux lignes (des points ou des carrés avec des symboles par exemple) désignent les opérations effectuées sur les qubits, telles que des portes de mesure ou des portes de transformation. Cette représentation est inspirée de la représentation de Penrose (1971) et introduite par Feynman (1986) avant d'être admise comme le modèle universel de représentation de circuits quantiques.

Pourtant, à l'inverse des circuits traditionnels, les circuits quantiques admettent un postulat de réversibilité : tout circuit doit être réversible et retourner en sortie les valeurs d'entrée inchangées. Ce postulat affecte non seulement la conception des circuits, mais également la physionomie des portes qui les composent, elles mêmes devant être réversibles.

Ainsi, des portes quantiques (ou plus précisément des portes logiques quantiques) sont mis en

place. Ce sont de petits circuits quantiques opérant sur peu de qubits (généralement 1 qubit : ce sont des portes unitaires ; mais aussi 2 ou 3 qubits dans le cas de portes contrôlées). Les portes sont classées en différents groupes de portes :

Portes unitaires

Ces portes effectuent des transformations sur un seul qubit à la fois. Les portes de Pauli inversent selon leurs dimension l'état d'un qubit. Par exemple, la porte X inverse les amplitudes des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ d'un système, la porte Y inverse la phase et la porte Z inverse le signe de $|1\rangle$. La porte de Hadamard (H) génère une superposition égale des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, indispensable pour générer par la suite de l'intrication. Les portes de déphasage S et T permettent d'effectuer des petites transformations précises, de l'ordre de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{8}$ respectivement. Enfin, les portes de rotations permettent de faire tourner l'état d'un qubit autour d'un certain axe de la sphère de Bloch, illustrée plus tard en Chapitre 2.2.

Portes contrôlées

Ces portes introduisent une notion de dépendance entre les qubits : une transformation sera effectuée sur un qubit cible seulement si un ou des qubits de contrôle admettent des valeurs spécifiques. La porte CNOT inverse le qubit cible (effectue une porte X) si le qubit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$, à l'instar d'une porte "Si... Alors". De la même manière pour une porte CZ qui applique alors une porte Z sur le qubit cible. Enfin, il existe des portes à multiple contrôles comme la porte de Toffoli (ou CCNOT). Il s'agit, en somme, d'un CNOT à double contrôle.

Autres portes

Il existe, en réalité, une infinité de portes quantiques. La majorité des portes couramment utilisées entrent dans les deux catégories précédentes mais il en existe d'autres notables, notamment la porte SWAP (ou échange) qui inverse l'état de deux qubits entre eux.

Ces portes sont ensuite regroupées pour former des ensembles d'utilisation. L'ensemble le plus connu est l'ensemble de Clifford. Cet ensemble, composé des portes Hadamard, de phase S et CNOT, permet de simuler le plus efficacement des circuits quantiques sur des ordinateurs classiques. Cependant, cet ensemble ne permet pas de simuler toutes les transformations quantiques possibles. En y ajoutant la porte T, l'ensemble de Clifford devient alors un ensemble universel et permet de simuler n'importe quel circuit quantique. D'autres ensembles universels existent comme l'ensemble composé des portes de rotation, de changement de phase et CNOT.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

Avant d'établir les objectifs de notre projet, il est essentiel d'analyser les travaux déjà existants. Dans la nomenclature actuelle de l'informatique quantique, les représentations d'états et de circuits demeurent relativement limités. La première véritable représentation d'un état quantique reste la sphère de Bloch. Introduite par Bloch (1946), elle permet de visualiser en trois dimensions l'état d'un système quantique à deux niveaux, autrement appelé un qubit. Dès lors, cette représentation ne permet pas de représenter des systèmes à plusieurs qubits. Puis vient la première représentation de circuits quantiques selon Feynman (1986), reprenant les codes de la représentation graphique de Penrose.

Ces deux représentations sont universellement utilisées en informatique quantique mais laissent certains aspects du domaine de côté, notamment l'intrication.

2.1 Représentations hiérarchiques

Lin, Hao & Sun (2018) présentent leur représentation de circuits quantiques nommé *QuFlow*. Il s'agit d'un constructeur de circuit quantique qui, lors de l'execution, décline toutes les possibilités de résultats avec l'amplitude et la probabilité associée après chaque porte, sous la forme d'un arbre hiérarchique. Lin *et al.* (2018) illustrent cette représentation par la Figure 2.1 : la représentation traditionnelle du circuit quantique (a) et la déclinaison de tous les résultats possibles (b). Ce genre de représentation s'avère très utile d'un point de vue pédagogique, permettant à des étudiants de comprendre ce qui se passe tout au long d'un circuit. Cependant, cette représentation demeure limitée à des circuits composés de peu de qubits, dès lors que le nombre de déclinaisons possibles augmente exponentiellement avec le nombre de qubits : 2^n , où n est le nombre de qubits. De plus, cette représentation n'apporte aucune information sur l'intrication du système.

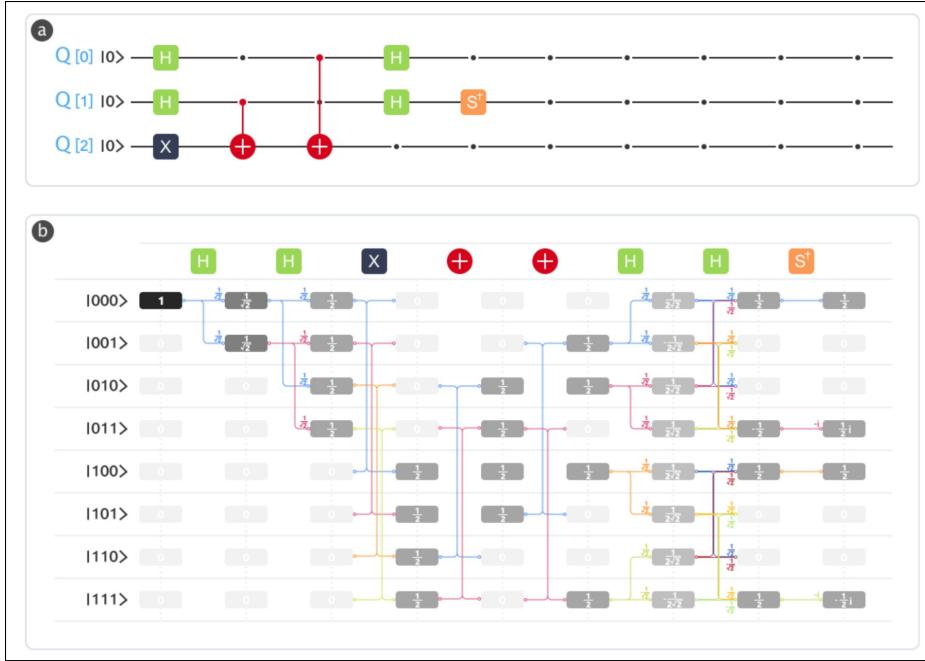


Figure 2.1 Représentation d'un circuit comportant trois qubits selon la représentation QuFlow issue de Lin *et al.* (2018) : la représentation traditionnelle du circuit selon Feynman (a) et la décomposition du circuit en détail montrant les $2^3 = 8$ résultats possibles (b).

2.2 Représentations issues de Bloch

D'autres représentations tentent d'aborder la question de l'intrication en se basant sur un outil fondamental : la sphère de Bloch. C'est le cas notamment de Chang *et al.* (2022) qui proposent de représenter l'intrication sous la forme d'un toroïde.

La Figure 2.2 propose une coupe de la sphère de Bloch, appelée cercle de Bloch. Les paramètres représentés sur le cercle sont directement liés aux composantes et propriétés d'un état quantique, ici à un qubit.

Soit l'état $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}|1\rangle$ et sa matrice de densité :

$$\rho_\psi = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & c \\ c & b^2 \end{pmatrix}$$

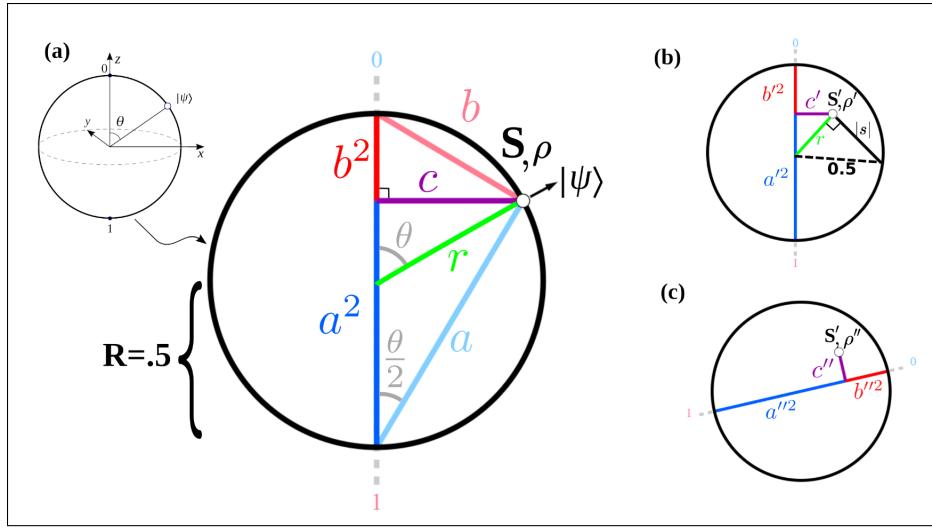


Figure 2.2 Généralisation des paramètres d'un état quantique à 1 qubit sur un cercle de Bloch, issue de Chang *et al.* (2022)

Les segments r et " $|s|$ " représentent, dans le cas d'un état à un qubit, la mixité (ou pureté) de l'état par la relation :

$$|s| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - r^2}$$

Pour un état à 2 qubits

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

tel que :

- $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

- $\alpha \geq 0$

- de matrice de densité $\rho_\psi = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & \alpha\delta \\ \beta\alpha & |\beta|^2 & \gamma\beta & \beta\delta \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & |\gamma|^2 & \gamma\delta \\ \delta\alpha & \delta\beta & \delta\gamma & |\delta|^2 \end{pmatrix}$

- et de traces partielles (voir Chapitre 3) :

- $(\rho_\psi)_A = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 & \alpha\beta + \gamma\delta \\ \beta\alpha + \delta\gamma & |\beta|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$
- $(\rho_\psi)_B = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha\gamma + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\beta & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & u \\ u & v \end{pmatrix}$

La Figure 2.3 illustre cette représentation toroïdale reposant sur deux représentations de cercles de Bloch, dont chaque cercle correspond à la représentation d'une des traces partielles (voir Chapitre 3).

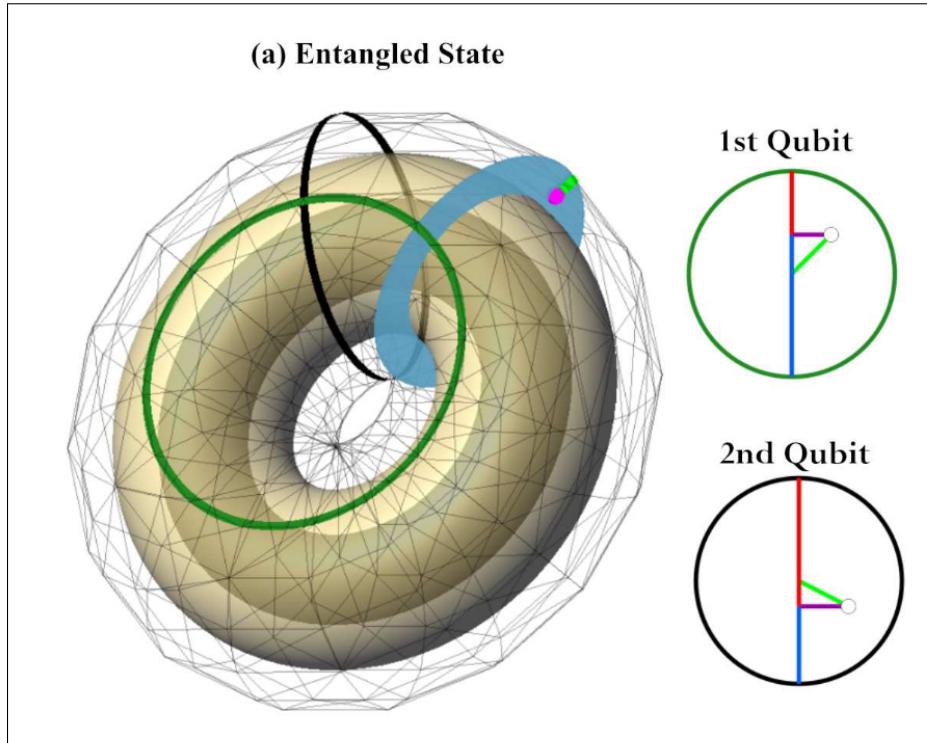


Figure 2.3 Représentation toroïdale d'un état intriqué à deux qubit, issue de Chang *et al.* (2022)

Les paramètres de chacun des cercles sont définis par les relations suivantes :

$$r_A^2 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \text{ et } r_B^2 = \left(w - \frac{1}{2} \right)^2 + u^2, \text{ avec } r_A = r_B = r \quad (2.1)$$

$$s = \alpha\delta - \beta\gamma \text{ et } |s| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - r^2} \quad (2.2)$$

$$\sin(\theta_A) = \frac{y}{r_A} \text{ et } \sin(\theta_B) = \frac{u}{r_B} \quad (2.3)$$

En plus de proposer une représentation pour un état intriqué, cet article propose une métrique de l’intrication :

$$s = \alpha\delta - \beta\gamma \quad (2.4)$$

où :

$$0 \leq |s| \leq \frac{1}{2} \quad (2.5)$$

Cette métrique est, en réalité, la relation de comparaison d’intrication par rapport à un état de Bell introduite dans le Chapitre 1.1.10. Ainsi, bien que cette représentation soit très descriptive visuellement, elle se limite à des systèmes à deux qubits ; sans quoi il serait impossible de les comparer avec des états de Bell.

Toujours inspirés par la sphère de Bloch, Tao, Pan, Chen & Wang (2017) s’inspirent des travaux de Walck & Hansell (2001) dans lesquels ils proposent de représenter des états intriqués par le biais de deux sphères de Bloch et d’un disque, ce dernier représentant l’information partagée par l’intrication.

La Figure 2.4 présente tous les paramètres nécessaires à la représentation et comment ils sont utilisés. Les deux sphères extérieures sont les sphères de Bloch décrivant l’état et le disque au centre décrit les informations partagées entre les deux sphères.

Soit un état arbitraire $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$ respectant les conditions de normalisation. Le paramètre C dénote la concurrence, une mesure de l’intrication donnée par la relation :

$$C = 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \quad (2.6)$$

La concurrence permet de définir "l'angle d'intrication" η donné par la relation :

$$C = \sin \eta$$

Cette relation est, en fait, une mesure comparative avec un état de Bell, état maximalement intriqué. La position des points sur les deux sphères de Bloch est définie par deux mesures d'angles Θ_i autour de l'axe y de la sphère et ϕ_i autour de l'axe z (deux rotations étant suffisantes pour décrire une position à la surface d'une sphère).

L'angle d'intrication η est alors nécessaire pour définir les angles $0 \leq \Theta_i, \Theta_i \leq \pi$ donnés respectivement par :

$$\Theta_1 = \cos^{-1} \frac{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2}{\cos \eta}$$

$$\Theta_2 = \cos^{-1} \frac{|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2}{\cos \eta}$$

Ces deux mesures d'angles permettent ensuite de définir $0 \leq \phi_i, \phi_i \leq \pi$ par la relation :

$$\phi_1 = \begin{cases} 0, & \text{si } \Theta_1 = 0 \text{ ou } \Theta_1 = \pi \\ \arg(a^*c + b^*d), & \text{si } 0 < \Theta_1 < \pi \end{cases}$$

$$\phi_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } \Theta_2 = 0 \text{ ou } \Theta_2 = \pi \\ \arg(a^*b + c^*d), & \text{si } 0 < \Theta_2 < \pi \end{cases}$$

où * exprime le conjugué d'un nombre complexe.

Enfin, il reste à définir γ la dernière mesure d'angle, cette fois partagée entre les deux sphères de Bloch. Cette mesure est définie par la relation :

$$\gamma = \arg(A^*B)$$

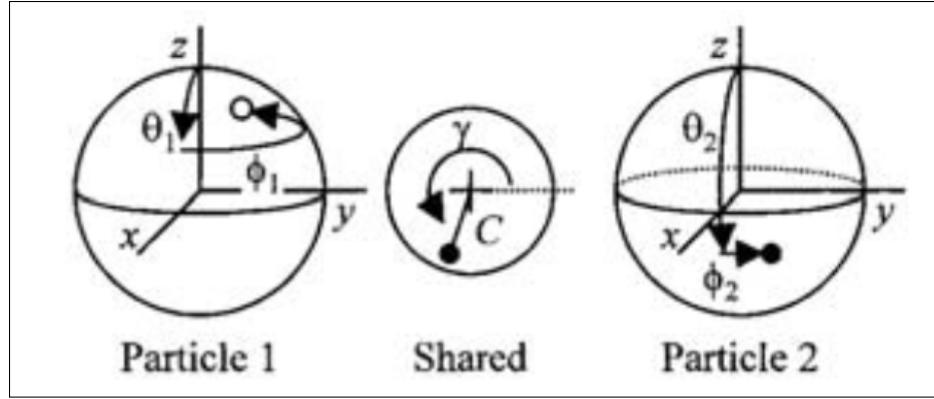


Figure 2.4 Disque intermédiaire d'intrication, issue de Walck & Hansell (2001)

où A et B sont définis par les relations respectives suivantes :

$$\begin{aligned} A = & a \cdot e^{i\frac{\phi_1}{2}} e^{i\frac{\phi_2}{2}} \cos \frac{\Theta_1}{2} \cos \frac{\Theta_2}{2} + b \cdot e^{i\frac{\phi_1}{2}} e^{-i\frac{\phi_2}{2}} \cos \frac{\Theta_1}{2} \sin \frac{\Theta_2}{2} \\ & + c \cdot e^{-i\frac{\phi_1}{2}} e^{i\frac{\phi_2}{2}} \sin \frac{\Theta_1}{2} \cos \frac{\Theta_2}{2} + d \cdot e^{-i\frac{\phi_1}{2}} e^{-i\frac{\phi_2}{2}} \sin \frac{\Theta_1}{2} \sin \frac{\Theta_2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & a \cdot e^{i\frac{\phi_1}{2}} e^{i\frac{\phi_2}{2}} \sin \frac{\Theta_1}{2} \sin \frac{\Theta_2}{2} + b \cdot e^{i\frac{\phi_1}{2}} e^{-i\frac{\phi_2}{2}} \sin \frac{\Theta_1}{2} \cos \frac{\Theta_2}{2} \\ & + c \cdot e^{-i\frac{\phi_1}{2}} e^{i\frac{\phi_2}{2}} \cos \frac{\Theta_1}{2} \sin \frac{\Theta_2}{2} + d \cdot e^{-i\frac{\phi_1}{2}} e^{-i\frac{\phi_2}{2}} \cos \frac{\Theta_1}{2} \cos \frac{\Theta_2}{2} \end{aligned}$$

Soit l'état partiellement intriqué $|\Gamma\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}}|11\rangle$. Il est possible de représenter cet état en utilisant les paramètres suivants :

$$C_{|\Gamma\rangle} = 2|ad - bc| = 2 \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$$

$$C_{|\Gamma\rangle} = \sin \eta_{|\phi\rangle} \iff \eta_{|\phi\rangle} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Theta_{1|\Gamma\rangle} = \cos^{-1} \left(\frac{\left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 - \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 - \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right|^2}{\cos \frac{\pi}{3}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Theta_{2|\Gamma\rangle} = \cos^{-1} \left(\frac{\left| \frac{1}{2} \right|^2 - \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 - \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right|^2}{\cos \frac{\pi}{3}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{2} \right) \approx 1.91 \text{ rad}$$

L'argument d'un calcul quelconque comprenant des arguments de nombres réels est nul. Ainsi, puisque les amplitudes de $|\Gamma\rangle$ sont purement réelles, l'argument résultant sera nul. Néanmoins :

$$\phi_{1|\Gamma\rangle} = 0, \text{ puisque } \Theta_{1|\Gamma\rangle} = 0$$

$$\phi_{2|\Gamma\rangle} = \arg \left(\frac{1}{2}^* \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^* \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = 0 \right)$$

De la même manière que pour $\phi_{1|\Gamma\rangle}$ et $\phi_{2|\Gamma\rangle}$, $A_{|\Gamma\rangle}$, $B_{|\Gamma\rangle}$ et $\gamma_{|\Gamma\rangle}$ sont nuls dès lors que tous les paramètres sont purement réels.

Ainsi, la représentation de l'état intriqué $|\Gamma\rangle$ serait :

- un point placé à la base sur la première sphère de Bloch puisque $\Theta_{1|\Gamma\rangle} = \Theta_{2|\Gamma\rangle} = 0$
- un point à environ 1.91 rad autour de l'axe y sur la seconde sphère de Bloch
- un point à environ 86.6% du rayon du disque du milieu, dans l'axe horizontal, pour la concurrence

Malheureusement, cette représentation est aussi limitée à un système à deux qubits.

Bley *et al.* (2023) s'inspirent également des cercles de Bloch pour proposer une représentation de circuits à plusieurs qubits. La Figure 2.5 présente le fonctionnement de cette représentation.

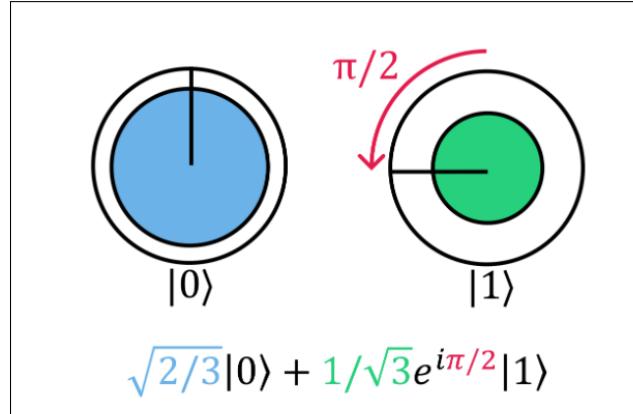


Figure 2.5 Représentation d'un qubit avec la notation en cercle, issue de Bley *et al.* (2023)

Chaque cercle représente un état de base du qubit. Le rayon de la partie colorée de chaque cercle correspond à la valeur absolue de l'amplitude et la barre noire qui part du centre correspond à l'angle de la phase. Cette représentation s'étend à des états à plusieurs qubits comme le montre

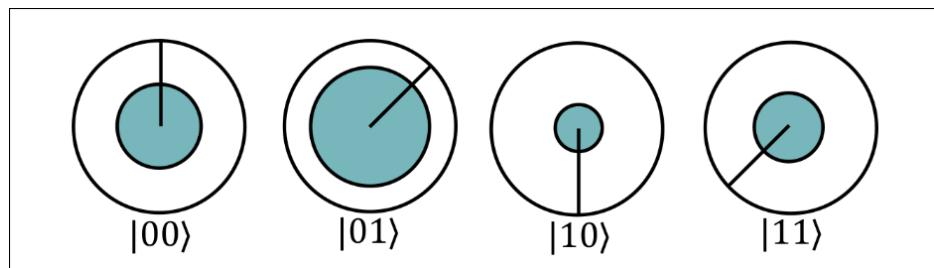


Figure 2.6 Représentation de deux qubits avec la notation en cercle, issue de Bley *et al.* (2023)

la Figure 2.6 avec un état à deux qubits. Cependant, il est complexe de se rendre compte de l'intrication lorsque des cercles sont représentés en ligne.

Lorsque deux qubits admettent des états séparables, il est alors possible d'utiliser la notation en cercle comme des matrices et de représenter "visuellement" les produits de Kronecker, comme le propose la Figure 2.7, pour l'état $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/4}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}|00\rangle +$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\pi}{4}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}}e^{\frac{3i\pi}{4}}|11\rangle.$$

A gauche, les deux états à un qubit séparables et à droite, le résultat du produit tensoriel des deux états.

Une ligne verte sépare verticalement le résultat du produit tensoriel. Cette ligne représente

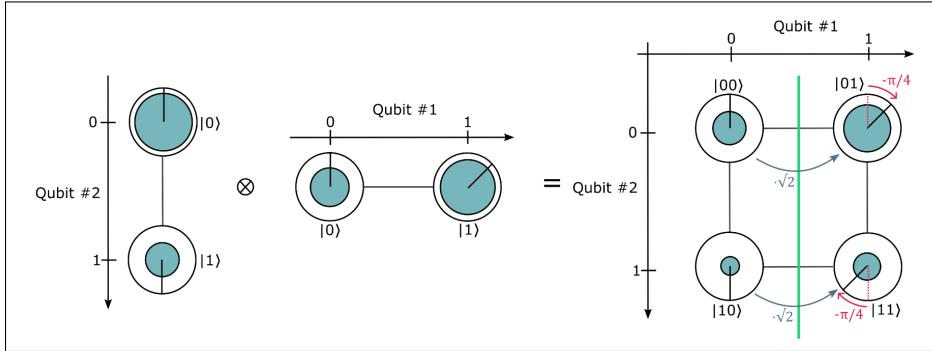


Figure 2.7 Représentation d'un produit de Kronecker avec la notation en cercle, issue de Bley *et al.* (2023)

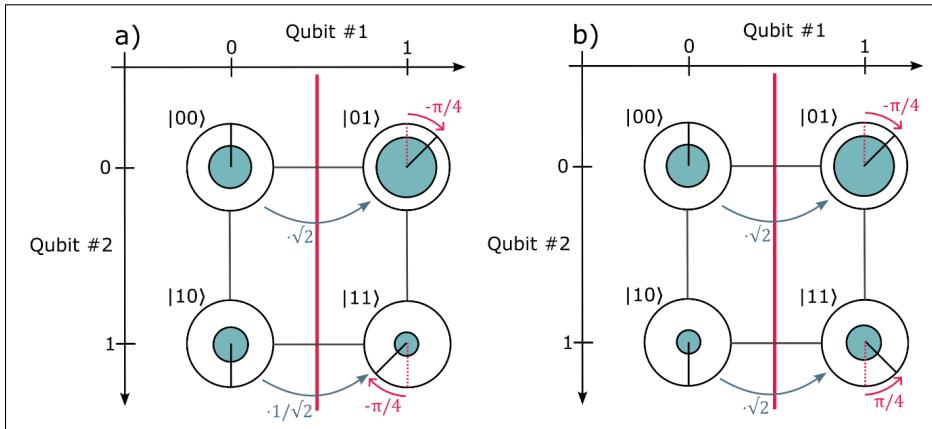


Figure 2.8 Représentation d'un état à deux qubits intriqués avec la notation en cercle, issue de Bley *et al.* (2023)

l'intrication de l'état. Si elle est verte, cela signifie que l'état est séparable (ce qui est attendu dans le cas de la Figure 2.7 puisque le résultat est issu d'un produit tensoriel de deux états distincts, donc pouvant être factorisés). Si elle est rouge, alors l'état est intriqué, comme le montre la Figure 2.8 pour les états :

a) $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\pi}{4}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}}e^{\frac{3i\pi}{4}}|11\rangle$

$$\text{b) } \frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-i\pi}{4}} |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{12}} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{\frac{3i\pi}{4}} |11\rangle$$

Cette représentation est avantageuse car elle permet de représenter des états à plus de deux qubits. La Figure 2.9 montre la représentation de l'état à trois qubits $\frac{1}{\sqrt{2}} |000\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{\frac{-i\pi}{4}} |001\rangle - \frac{1}{3} |110\rangle - \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{\frac{3i\pi}{4}} |111\rangle$. Les états de bases sont les sommets d'un cube et les barres d'intrications sont désormais des plans.

Dans cette configuration, il est possible de représenter à la fois un plan vert et un plan rouge, indiquant alors que l'état est partiellement intriqué et factorisable sur le qubit du plan vert. Pour

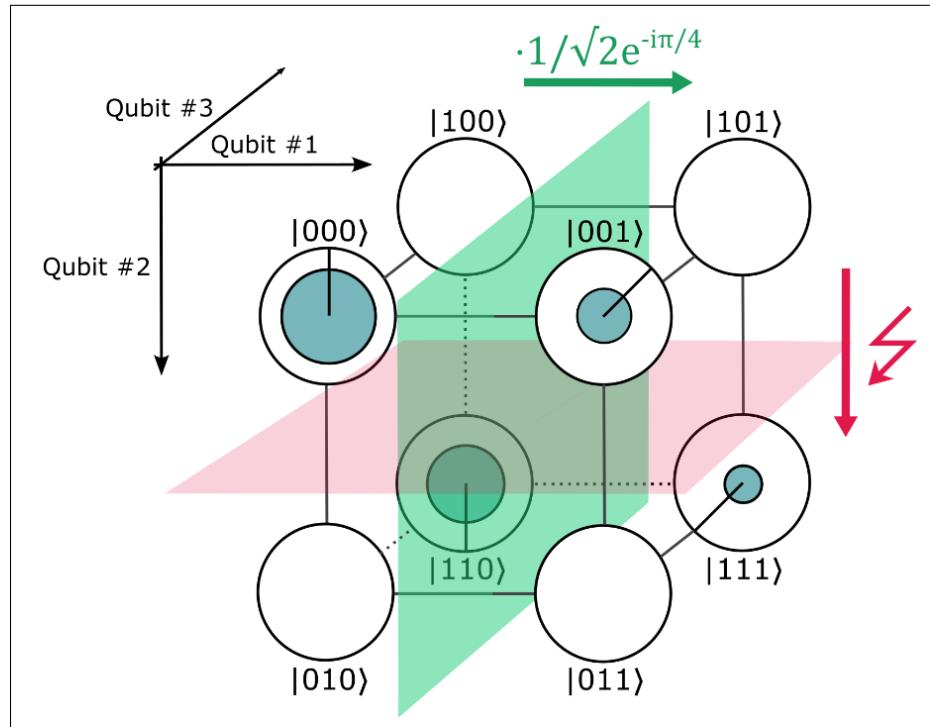


Figure 2.9 Représentation d'un état à trois qubits intriqués avec la notation en cercle, issue de Bley *et al.* (2023)

quatre qubits, cette représentation est étendue à un tesseract (ou 4-cube) comme le présente la Figure 2.10.

Cette représentation peut être très utile pour aider aux calculs et à visualiser les effets de transformations puisqu'elle peut être utilisée comme des matrices. Il est aussi appréciable de pouvoir étendre cette visualisation à trois qubits, utile pour certains protocoles comme celui de

la téléportation quantique. La représentation en tesseract pour des utilisations à quatre qubits marque la limite de cette représentation : fonctionnelle mais complexe à lire et à utiliser dans des calculs.

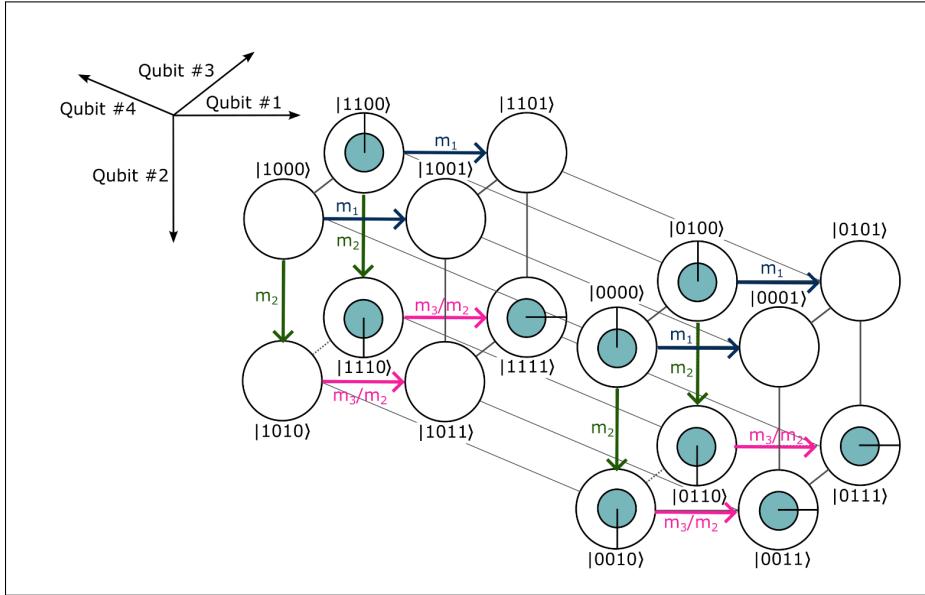


Figure 2.10 Représentation d'un état à quatre qubits intriqués avec la notation en cercle, issue de Bley *et al.* (2023)

2.3 Représentations originales

Certains articles proposent des manières originales de représenter l'intrication. Laplante, Perez, Tissot & Vettier (2022) présentent un dispositif permettant de monter l'effet de l'intrication sur deux particules/qubits. La Figure 2.11 est un ensemble de photographies des dispositifs construits. De manière générale, chaque disque correspond à un état et les portions de couleurs correspondent aux amplitudes de la base fixée ($|0\rangle$ et $|1\rangle$ par exemple). Les photos de gauche et du milieu montrent deux disques avec des distributions d'amplitudes différentes. Les deux disques sont entourés d'un cadre en dents crantées afin de les transformer en pseudo roues crantées. Ainsi faisant, il est possible de lier les deux disques en ajoutant en leur milieu une petite roue crantée : une action sur l'un des disques sera donc répercutee sur l'autre et vice-versa. Les surfaces de couleurs sont délimitées ainsi :

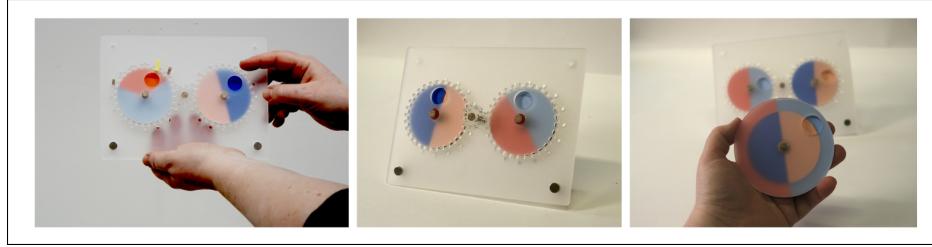


Figure 2.11 Photographies de dispositifs représentant deux manières de représenter des qubits intriqués selon QuBOBS, issue de Laplante *et al.* (2022)

Soient un état $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$, l'obtention de 0 à la mesure représentée par les teintes de bleu et l'obtention de 1 à la mesure représentée par les teintes de rouge.
La probabilité d'obtenir 0 à la mesure du premier qubit est donc :

$$\Pr("0 \text{ au premier qubit}") = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

Et celle d'obtenir 1 est :

$$\Pr("1 \text{ au premier qubit}") = |\gamma|^2 + |\delta|^2$$

De la même manière pour le second qubit :

$$\Pr("0 \text{ au second qubit}") = |\alpha|^2 + |\gamma|^2$$

$$\Pr("0 \text{ au second qubit}") = |\beta|^2 + |\delta|^2$$

Il suffit alors de remplir les surfaces des disques pour correspondre aux probabilités de mesures des états de base.

Soit l'état partiellement intriqué $|\Gamma\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}}|11\rangle$. La distribution des surfaces bleues et orange pour les deux disques seraient les suivantes :

Disque 1 :

$$\% \text{ de surface bleue} = \left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0.75$$

$$\% \text{ de surface orange} = \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right|^2 = 0.25$$

Disque 2 :

$$\% \text{ de surface bleue} = \left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{5}{12} \approx 0.416$$

$$\% \text{ de surface orange} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right|^2 = \frac{7}{12} \approx 0.583$$

La Figure 2.12 désigne la représentation QuBOBS de l'état $|\Gamma\rangle$.

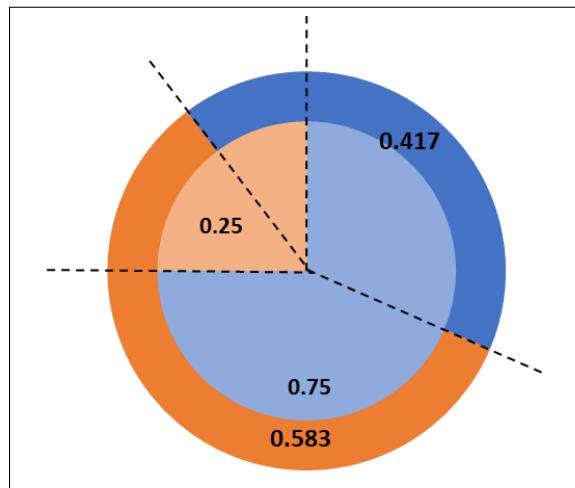


Figure 2.12 Représentation de l'état $|\Gamma\rangle$ selon QuBOBS

La photo de droite de la Figure 2.11 simplifie le processus et compacte le dispositif en un ensemble de cercles concentriques (il est possible d'imaginer le même assemblage de roues crantées à l'arrière du dispositif).

Le cercle découpé sur la face des disques représente la mesure. Ainsi, dans le cas des photos de gauche et du milieu, il faut lire la mesure pour chacun des disques tandis que pour la version compacte, une seule fente est nécessaire pour effectuer la mesure.

Enfin, il serait peut-être possible de faire varier les paramètres des dents crantées et de la roue crantée centrale selon le degré d'intrication des qubits, en utilisant la mesure de la concurrence par exemple.

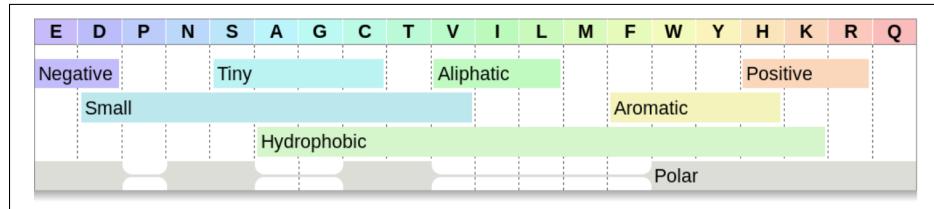


Figure 2.13 Classification d'amino-acides avec des boîtes arc-en-ciel, issue de Lamy (2019)

Finalement, la représentation qui a le plus retenu notre attention est la plus atypique : celle des boites arc-en-ciel. Ce type de représentation est notamment utilisée en chimie pour la classification d'amino-acides comme le présente la Figure 2.13.

Lamy (2019) propose d'utiliser ces boîtes dans le cadre de l'informatique quantique. Ces dernières permettent de représenter l'évolution d'un état au cours d'un circuit par le biais de cases de couleur dans un tableau.

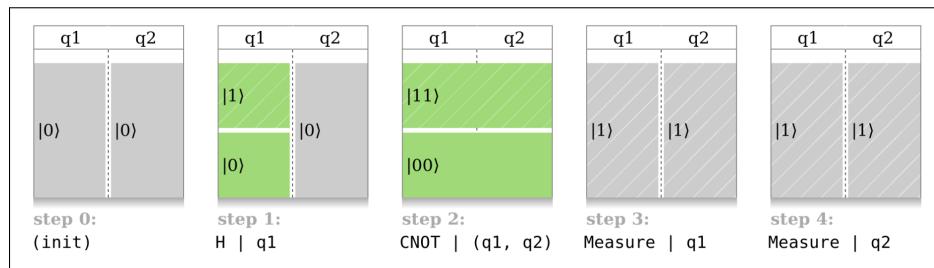


Figure 2.14 Représentation du circuit d'une paire de Bell avec les boîtes arc-en-ciel, issue de Lamy (2019)

La Figure 2.14 présente un exemple d'utilisation des boîtes arc-en-ciel dans le cas de la création d'une paire de Bell et sa mesure. Les qubits sont représentés en colonne et les états correspondants sont représentés par ces blocs de couleurs en dessous de leurs colonnes respectives.

Dans le cas d'états intriqués, les blocs de couleurs s'étendent sur plusieurs colonnes, comme le

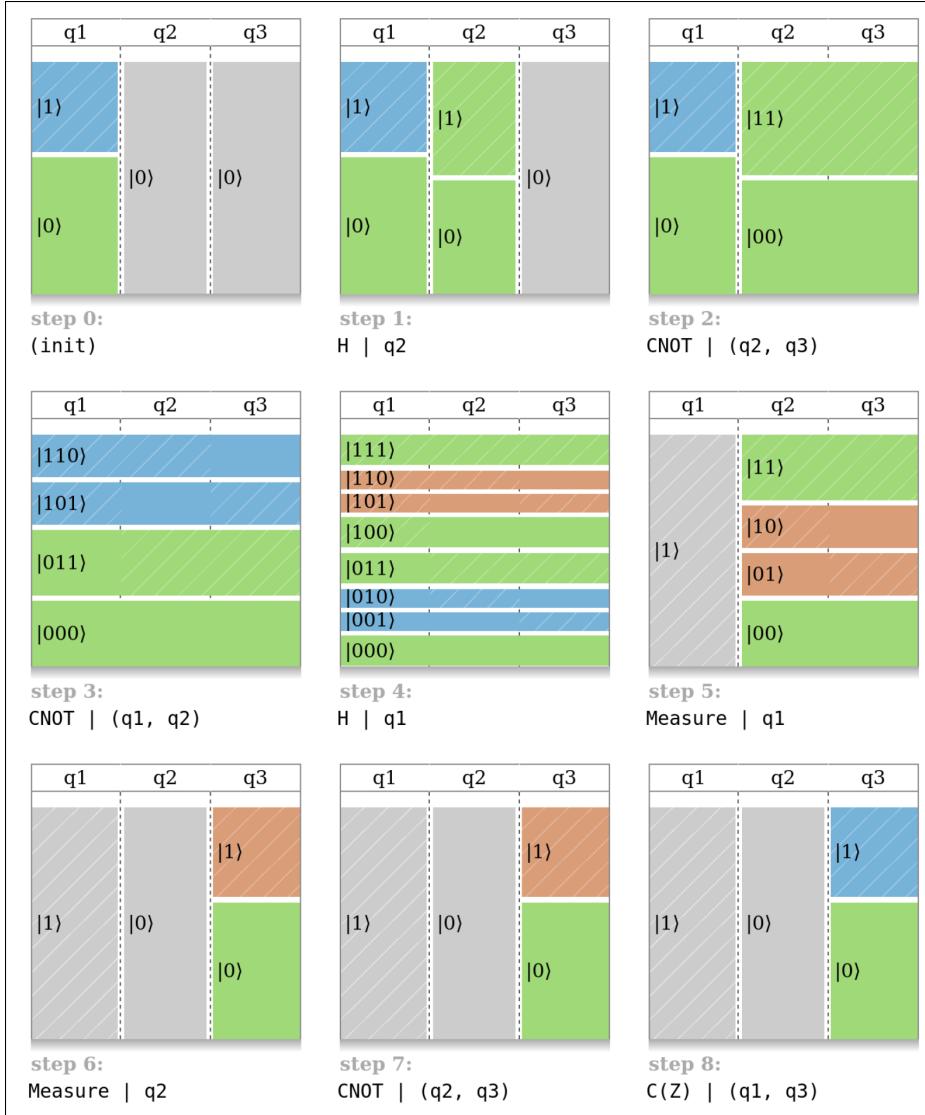


Figure 2.15 Représentation du circuit de la téléportation avec les boîtes arc-en-ciel, issue de Lamy (2019)

montre l'étape 2 de la Figure 2.14 ou les étapes 2, 3, 4 et 5 de la Figure 2.15. La hauteur des blocs de couleur désignent la probabilité d'obtention du résultat correspondants à la mesure et la couleur désigne la phase.

Si les qubits intriqués ne sont pas côte-à-côte dans le tableau, il y aurait alors des trous dans les blocs de couleurs à l'instar du bloc « Polar » dans la Figure 2.13 et dans la maquette proposée en Figure 2.16. La représentation en colonne convient sûrement davantage au domaine de la

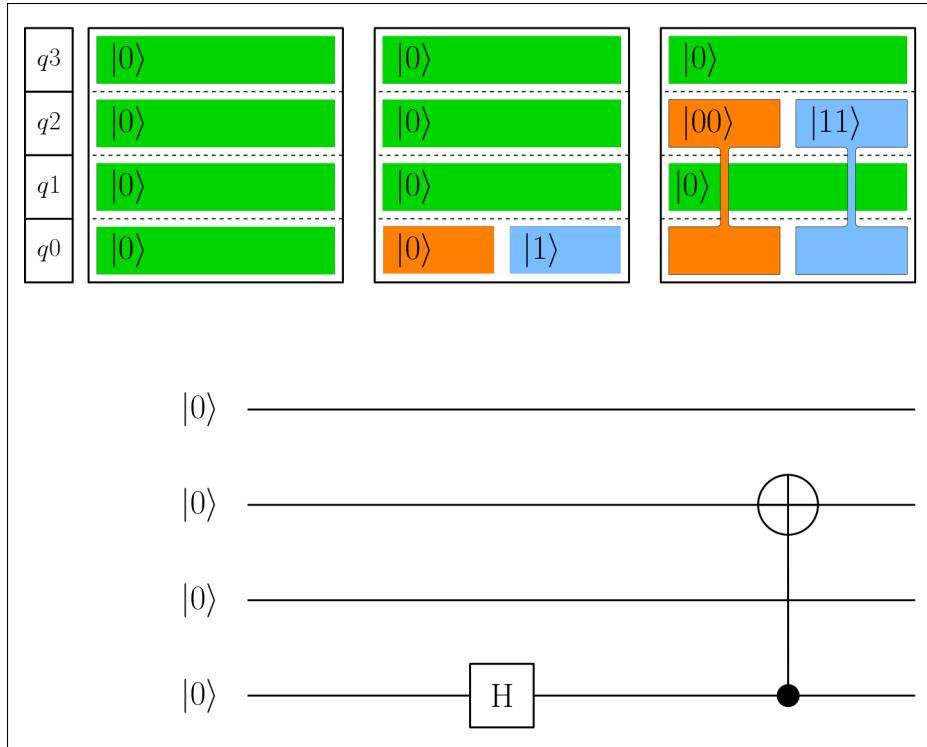


Figure 2.16 Représentation du circuit de l'état de Bell avec des boîtes arc-en-ciel modifiées

chimie. Cependant, il serait peut-être plus intéressant de transposer les boîtes et de placer les qubits en ligne afin de les faire correspondre à la représentation linéaire des qubits dans les représentations de Penrose des circuits. C'est ce que la maquette illustre en Figure 2.16 où les boîtes arc-en-ciel sont disposées à l'horizontale et des liens d'intrications à la verticale. Il est également possible d'imaginer ajouter une mesure de l'intrication en utilisant le gradient de couleur à la place de la phase.

Cette représentation est intéressante visuellement et pédagogiquement. L'intrication y est directement visible en un simple coup d'oeil, tout en pouvant proposer à un lecteur plus averti des informations importantes sur le circuit et ses relations.

Néanmoins, afin de permettre une telle représentation, il est obligatoire de connaître en détail les relations d'intrication de qubit à qubit, individuellement. Une telle détection de l'intrication est un problème NP-complet, comme le montrent Gühne & Tóth (2009) et sort du cadre du projet.

Malheureusement, la représentation en boîtes arc-en-ciel doit donc être abandonnée et il devient nécessaire de trouver une manière alternative et plus simple de détecter et quantifier l'intrication.

2.4 Littérature de l'intrication

Comme abordé précédemment, Walck & Hansell (2001) proposent une métrique mesure de l'intrication nommée *Concurrence* définie en Equation 2.6. Cette dernière semble simple à calculer et rapide à mettre en place, mais elle ne se contente que d'états à deux qubits au maximum ; insuffisant dans le cas du simulateur.

La mesure de l'intrication la plus développée et validée dans le cas d'états purs est celle de Bennett, Bernstein, Popescu & Schumacher (1996). Ces derniers proposent d'utiliser l'entropie de Von Neumann - définie plus en détails dans la partie 3.5 - pour quantifier l'intrication au sein d'un état pur intriqué, notée en *ebits*. Cette mesure se base sur un partitionnement bipartite des qubits du circuit, puis évalue la quantité de désordre (d'où le terme d'entropie) entre ces deux sous-systèmes. Selon l'assignement des qubits dans les partitions, il est possible d'extraire des informations très intéressantes sur l'intrication qui régit le circuit étudié. C'est donc cette mesure qui sera implémentée dans le simulateur.

CHAPITRE 3

NOTIONS AVANCÉES

Ce chapitre introduit les principales notions physiques et mathématiques essentielles dans le fonctionnement du simulateur.

3.1 Trace partielle

Une trace partielle est une réduction de la matrice d'un système vers un sous-système donné.

Soient A et B deux sous-systèmes d'une matrice de densité ρ , ayant comme bases :

- $A : |i\rangle_A$
- $B : |j\rangle_B$

Alors les traces partielles de ρ par rapport à A et B sont respectivement :

$$\rho_A = Tr_B[\rho] = \sum_j (\mathcal{I}_A \otimes \langle j|_B) \rho (\mathcal{I}_A \otimes |j\rangle_B)$$

$$\rho_B = Tr_A[\rho] = \sum_i (\langle i|_A \otimes \mathcal{I}_B) \rho (|i\rangle_B \otimes \mathcal{I}_B)$$

où $\rho_j = Tr_i$ désigne la trace partielle du système j obtenue en effaçant ("tracing out") le sous-système i du système de base.

La trace partielle est une matrice de densité de l'état tracé où $Tr(\rho^2) < 1$, et est donc un état mixte.

3.2 Décomposition de Schmidt

La décomposition de Schmidt est une méthode permettant de factoriser un état quantique quelconque (intriquée comme séparable) sous la forme d'un seul produit tensoriel d'ensembles d'états orthonormés.

Soit un espace hilbertien $H_A \otimes H_B$.

Pour tout élément de cet espace $|\psi\rangle$ (normalisé), il existe une décomposition telle que :

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_j \alpha_{i,j} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$$

où $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ et $\sum_{i,j} |\alpha_{i,j}|^2 = 1$

Soient H_A de dimension m et H_B de dimension n tels que $m < n$

Il existe une décomposition de $|\psi\rangle$ telle que :

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i a_i \otimes b_j$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, et $\{a_1 \dots a_n\} \subseteq H_A$ et $\{b_1 \dots b_m\} \subseteq H_B$ sont deux ensembles orthonormaux.

De plus, puisque $\langle \psi | \psi \rangle = 1$,

$$\sum_i \alpha_i^2 = 1$$

l'entropie étant définie pour α_i^2 .

Cette décomposition utilise la décomposition en valeurs singulières (aussi appellée SVD).

Soit un état quantique quelconque sur n qubits $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle$

1. Définir deux sous-systèmes A et B , respectivement de m et p qubits tels que $n = m + p$
2. Exprimer l'état $|\psi\rangle$ sous forme canonique des deux sous-systèmes A et B (exprimé sous la forme de produits de Kronecker développés).
3. Définir la matrice C_{AB} , de dimension $2^m \times 2^p$, contenant les amplitudes de $|\psi\rangle$ telles que les lignes de la matrice contiennent les amplitudes liées au système A et les colonnes les amplitudes liées au système B .
4. Calculer la matrice M_{AB} , de dimension $2^p \times 2^p$, telle que

$$M_{AB} = C_{AB}^T C_{AB}$$

où T est la transposée.

5. Calculer la matrice V^T
 - a. Calculer les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres \vec{v}_i de M_{AB}

1. Valeurs propres λ_i : poser et réduire

$$\det(M_{AB} - \lambda \mathcal{I}_n) = 0$$

où \det représente le déterminant et \mathcal{I}_n représente la matrice identité de dimension n (le nombre de qubits).

2. Vecteurs propres \vec{v}_i : pour chaque λ_i , poser et résoudre

$$(M_{AB} - \lambda_i \mathcal{I}_n) \vec{x} = \vec{0}$$

b. Composer la matrice V où chaque colonne est un vecteur propre \vec{v}_i

$$V = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_0 & \dots & v_{i-1} \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$$

c. Calculer la transposée V^T

6. Calculer la matrice Σ

a. Calculer les valeurs singulières σ_i de M_{AB} pour chaque $\lambda_i > 0$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

b. Ordonner les σ_i par ordre croissant

c. Composer la matrice Σ , de même dimension que la matrice C_{AB} , en plaçant les σ_i sur la diagonale de Σ

7. Calculer la matrice U

a. Poser la relation de décomposition en valeurs singulières

$$C_{AB} = U \Sigma V^T$$

b. Isoler U dans la relation

$$C_{AB} = U\Sigma V^T \iff C_{AB}V = U\Sigma V^TV$$

Or, puisque V est orthogonale, $V^TV = I$

$$\iff C_{AB}V = U\Sigma I$$

$$\iff C_{AB}V = U\Sigma$$

$$\iff U = C_{AB}V\Sigma^{-1}$$

8. Faire apparaître la décomposition de Schmidt en rassemblant les différentes matrice de la SVD obtenues dans les étapes précédentes et en développant le calcul dans le cas d'un état quantique.
9. Les σ_i sont aussi appelés les coefficients de Schmidt. Soit c le nombre de coefficients de Schmidt strictement positifs. Si $c = 1$, l'état est séparable. Si $c \geq 2$, l'état est intriqué.

Il est important de noter que tous les calculs de cette section sont difficiles à faire lorsque les matrices augmentent en dimension. Souvent, l'ordre de complexité de ces opérations est de $O(N^3)$, où $N = 2^n$ avec n le nombre de qubits du système.

Dans le cas d'un état séparable, les traces partielles des deux sous-systèmes sont des matrices de densité pures où $Tr(\rho^2) = 1$. La décomposition de Schmidt admet donc un seul coefficient de Schmidt égal à 1.

3.3 Logarithme d'une matrice

Soit D une matrice diagonale. Son logarithme L est une matrice diagonale composée des logarithmes des coefficients diagonaux de D .

Pour rappel, l'exponentiation d'une matrice M est définie par la série convergente

$$e^M = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} M^K$$

Soit A une matrice diagonalisable (hermitienne ou unitaire par exemple). Il existe la relation de diagonalisation de matrice :

$$A = PDP^{-1} \quad (3.1)$$

où D une matrice diagonale et P une matrice de passage de bases de vecteurs propres de A . Puisque $e^{PDP^{-1}} = \sum \frac{1}{K!} (PDP^{-1})^K$ et $(PDP^{-1})^K$ est simplement $PD^K P^{-1}$, alors l'exponentielle est $e^M = Pe^D P^{-1}$

En appelant L un logarithme de D , il est vérifiable que :

$$e^{(PLP^{-1})} = Pe^L P^{-1} = A$$

Ainsi,

$$\log(A) = PLP^{-1} \quad (3.2)$$

Cette décomposition est appellée la décomposition spectrale de A .

3.4 Relation entre matrices de densités, traces partielles et décompositions de Schmidt

Bennett *et al.* (1996) introduisent une relation entre la matrice de densité ρ de l'état d'un système, les traces partielles de sous-systèmes et la décomposition de Schmidt.

Soit la décomposition de Schmidt d'un état quantique quelconque

$$|\psi\rangle = \sum_i \sigma_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$$

et la matrice de densité $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ décrivant ce même état. Si $|\psi\rangle$ est pur, la somme n'est composée que d'un seul élément. Si il est mixte, alors la somme est composée de plusieurs éléments.

Les traces partielles de cette matrice ρ selon deux sous-systèmes quelconques A et B sont :

$$\rho_A = Tr_B[\rho]$$

$$\rho_B = Tr_A[\rho]$$

Alors :

$$\rho_A = Tr_B[\rho] = \sum_i \sigma_i^2 |u_i\rangle \langle u_i|$$

$$\rho_B = Tr_A[\rho] = \sum_i \sigma_i^2 |v_i\rangle \langle v_i|$$

Il est important de noter que les ensembles de $\{\sigma_i\}$ dans ces deux décompositions sont égaux. Ceci est important car l'entropie de Von Neumann est calculée sur ces coefficients.

3.5 Entropie de Von Neumann

L'entropie de Von Neumann est une extension du concept d'entropie de la thermodynamique classique au monde quantique. De la même manière que dans le monde classique, elle désigne le caractère aléatoire d'un système ; ce qui, dans le cas d'un système quantique, représente une quantification de l'intrication.

Selon Bennett *et al.* (1996), l'entropie de Von Neumann est définie par les relations suivantes :

$$E = -\text{tr}(\rho_A \log_2(\rho_A)) = -\text{tr}(\rho_B \log_2(\rho_B)) = -\sum_i \sigma_i^2 \log_2(\sigma_i^2) \quad (3.3)$$

où :

- $0 \leq E \leq 1$ est exprimé en ebits ; 0 désigne un état séparable, 1 un état intriqué au maximum
- ρ_A et ρ_B sont les traces partielles des sous-systèmes A et B d'un état quantique intriqué
- σ_i sont les coefficients de Schmidt de la décomposition de Schmidt de l'état quantique considéré
- $\log_2(\rho)$ désigne le logarithme de la matrice ρ selon les règles de calcul du logarithme d'une matrice exprimées en Chapitre 3.3.

Généralisée à plus de deux qubits, un état maximallement intriqué entre deux sous-systèmes possède d rangs de Schmidt dans sa décomposition de Schmidt, conduisant à $\log_2(d)$ ebits d'intrication, où d est la dimension du sous-système hilbertien le plus petit des deux.

Dans le cas d'un état séparable, la décomposition de Schmidt n'admet qu'un coefficient valant 1. Ainsi, l'entropie sera égale à 0.

CHAPITRE 4

SIMULATEUR ET VISUALISATEUR

Ce simulateur est avant-tout un défi pour vérifier la compréhension du monde quantique. A l'instar des autres simulateurs du domaine, il propose une représentation de Penrose du circuit donné en entrée, mais apporte une nouveauté dans la quantification et une représentation graphique de l'intrication.

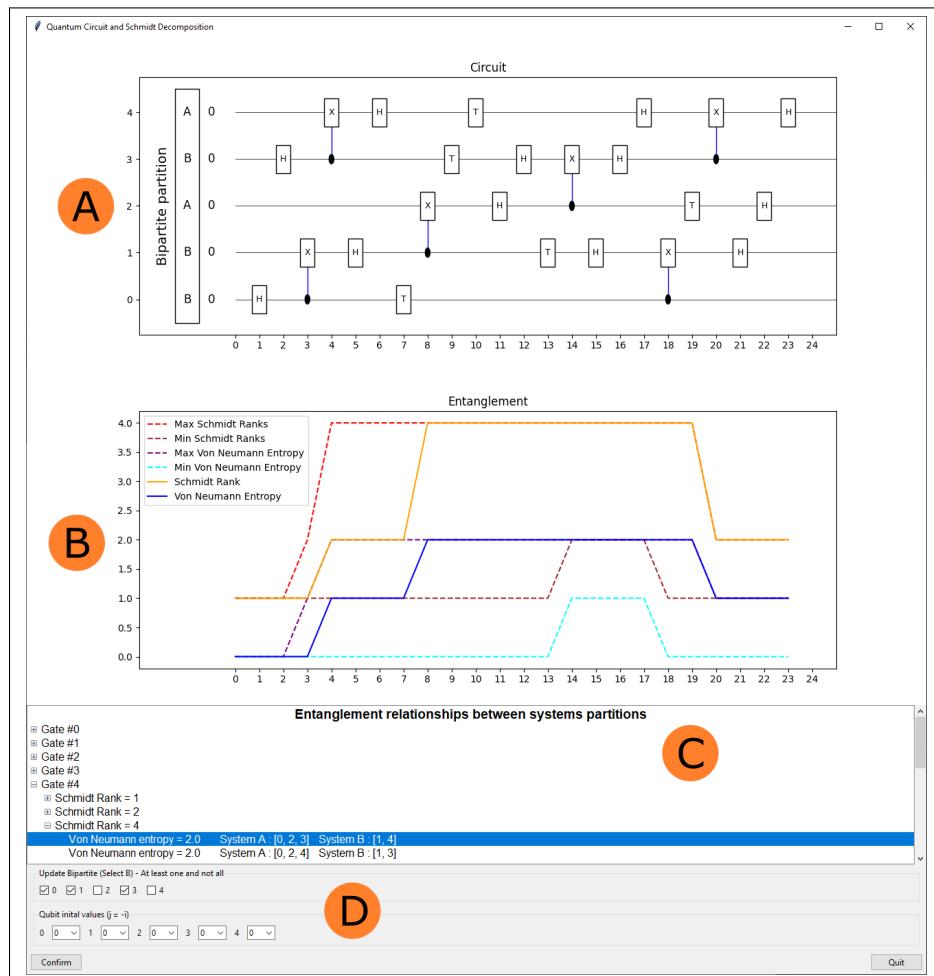


Figure 4.1 Fenêtre du simulateur pour l'exemple donné par la séquence d'instruction en Figure 4.4 ; sous-système A = [0,1,3] et sous-système B = [2,4]

4.1 Entrée du simulateur et affichage du circuit

Le simulateur prend en entrée un fichier texte avec des instructions suivant une nomenclature dédiée. Ces instructions indiquent les conditions initiales du circuit (nombre de qubits, leurs états initiaux) ainsi que les portes de transformation quantique. Les portes les plus génériques sont supportées par le simulateur : portes de Clifford, portes de rotation ou même porte de Hadamard. Toutes les portes prises en charge par le simulateur sont regroupées en Annexe II. La première ligne du fichier texte doit être la ligne d'initialisation du circuit, indiquée par la lettre N . Sur cette ligne est mentionné le nombre de qubits qui composent le circuit ainsi que leurs valeurs initiales respectives parmi les valeurs suivantes :

- "0" pour $|0\rangle$
- "1" pour $|1\rangle$
- "+" pour $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- "-" pour $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- "i" pour $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- "j" pour $|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$

Voici deux séquences d'initialisation du simulateur :

a) N 3 0 0 0

b) N 5 0 1 0 + +

La séquence a) initialise le simulateur d'un circuit à trois qubits, ayant chacun comme valeur initiale $|0\rangle$, tandis que la séquence b) initialise le simulateur pour un circuit à cinq qubits de valeurs initiales :

- qubit #0 = $|0\rangle$
- qubit #1 = $|1\rangle$
- qubit #2 = $|0\rangle$
- qubit #3 = $|+\rangle$
- qubit #4 = $|+\rangle$

Après cette ligne d'initialisation, le fichier texte comporte les instructions des portes du circuit. Chaque ligne du fichier texte doit correspondre à une porte du circuit. Les portes sont déclarées de la manière suivante :

- Dans le cas d'une porte à un qubit, telles que les portes X, Y, Z, Hadamard ou de rotation

```
code_lettre    qubit_cible ("angle_parametre")
```

- Dans le cas d'une porte à deux qubit, telle que les portes XX, YY ou ZZ

```
code_lettre    qubit_cible1 qubit_cible2 ("angle_parametre")
```

- Dans le cas d'une porte SWAP

```
code_lettre    qubit_cible1 qubit_cible2
```

- Dans le cas d'une porte contrôlée, telles que les portes CNOT ou CZ

```
code_lettre    qubit_de_controle qubit_cible
```

L'ensemble des portes est disponible en Annexe II.

La Figure 4.2 décrit le circuit d'un état de Bell : de trois qubits initialisés à $|0\rangle$, d'une porte de

N 3 0 0 0
H 0
CX 0 1

Figure 4.2 Séquences textuelles pour le simulateur pour un état de Bell

Hadamard sur le qubit #0 et d'une porte C-NOT de contrôle le qubit #0 et de cible le qubit #1.

La sortie obtenue pour ce fichier texte est représentée en Figure 4.3

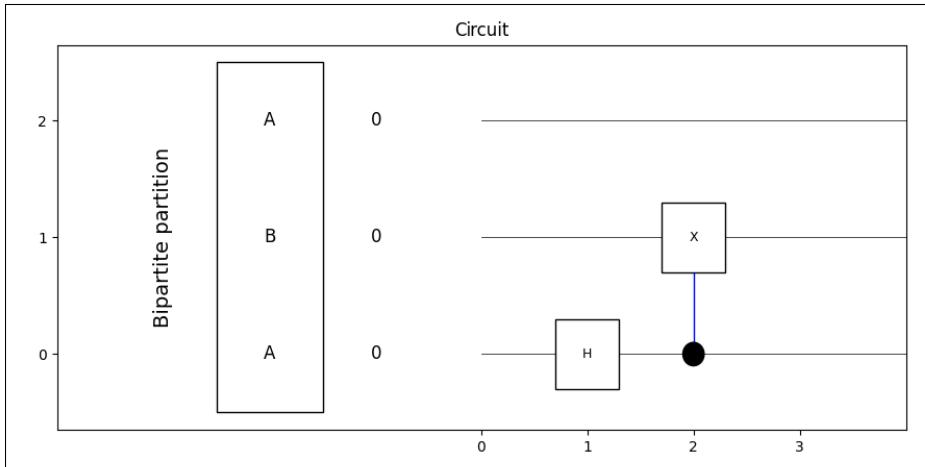


Figure 4.3 Sortie du simulateur pour l'état de Bell défini par la séquence d'instructions en Figure 4.2

4.2 Calcul des états

A l'instar d'autres simulateurs, le simulateur proposé calcul les transformations appliquées à l'état initial après chaque porte du circuit. La manière la plus intuitive d'implémenter le calcul des états serait de calculer en tout temps la matrice de densité ρ de l'état du circuit et d'y appliquer les transformations de chaque porte par des opérations matricielles. Cependant, la matrice de densité d'un état à n qubits est de dimension $2^n \times 2^n$. Ainsi, pour un état à 10 qubits, la matrice de densité comporterait $2^{10} \times 2^{10} > 1\ 000\ 000$ éléments. Conserver une telle matrice à chaque porte du circuit est couteux en ressources et en temps. En effet, à chaque porte - matrice de dimension $2^n \times 2^n$ également - cela demanderait d'effectuer un produit matriciel de deux matrices de dimension $2^n \times 2^n$, soit un calcul de complexité d'ordre $O(2n^3)$.

Il est possible d'améliorer la complexité du simulateur en réduisant la dimension des opérations. Plutôt que de conserver la matrice de densité de l'état quantique, seulement son vecteur dans H_n est conservé. Puis lors des modifications apportées par les portes quantiques, il faut trouver une

façon efficace de faire ces modifications sans effectuer de multiplication matricielle. Puisque les portes sont des portes simples à un ou deux qubits en général, il faut trouver une transformation plus directe que celle nécessitant la multiplication matricielle.

Pour cela, les opérations de transformation et les qubits affectés sont déplacés en fin d'état. Cela permet plusieurs optimisations :

- Les portes composent une matrice de transformation à chaque étape du circuit. Cette matrice peut être relativement complexe lorsque les portes sont situées au centre du circuit. Les placer en fin de circuit allége cette matrice de transformation, la rendant pseudo-diagonale.
- La matrice de densité est pratique car elle s'utilise dans toutes les situations et toutes les transformations, mais est lourde à conserver. Déplacer les opérations de transformation en fin de circuit demande donc aussi de déplacer les qubits affectés en fin de circuit. Se faisant, il devient possible d'utiliser simplement le vecteur d'état du circuit, de dimension 1×2^n .
- Une fois en bas de matrice et de vecteur, il est possible de réduire le champ du calcul à seulement les éléments concernés.

Soit l'exemple d'un état à 3 qubits (0, 1 et 2) qui subit une porte Z sur le qubit 1.

$$I \otimes Z \otimes I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les "−1" de la porte Z sont distribués dans toute la matrice de transformation, forçant de considérer la matrice en entière lors des calculs. Si la porte est déplacée vers la fin de l'état :

$$I \otimes I \otimes Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas illustré ci-dessus, la matrice définissant l'opération ($I \otimes I \otimes Z$) est simplement composée de matrices Z (2×2) sur sa diagonale (2^{n-1}) fois. Ainsi, pour effectuer la transformation $(I \otimes I \otimes Z) |\psi\rangle$, il suffit d'appliquer la transformation Z sur le vecteur $|\psi\rangle$ découpé en 2^{n-1} blocs de 2 valeurs. La complexité totale est donc linéaire dans la dimension du vecteur $|\psi\rangle$. Une amélioration importante par rapport à la solution naïve de représenter l'opération par une matrice $2^n \times 2^n$ et l'état par un vecteur 2^n sans aucune structure particulière. Cette solution aurait donné un temps d'exécution de $O(2^{2n})$.

L'approche détaillée au paragraphe précédent se généralise à un circuit de n qubits. Ainsi, toute opération de la forme $I_1 \otimes \cdots \otimes I_{i-1} \otimes U_i \otimes I_{i+1} \otimes \cdots \otimes I_n$ nécessite de permuter le qubit i et le qubit n , impactant le vecteur $|\psi\rangle$ dérivant l'état du système, puis d'effectuer la transformation $(I_1 \otimes \cdots \otimes I_{n-1} \otimes U_n) |\psi\rangle$. Cette transformation n'est, en fait, qu'une permutation du vecteur $|\psi\rangle$ définie par la matrice $(I_1 \otimes \cdots \otimes I_{i-1}) \otimes (SWAP_{i,n})$.

Cette transformation peut être illustrée par le cas extrême où

$$U_1 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_n \longrightarrow I_1 \otimes I_{n-1} \otimes \cdots \otimes U_n$$

Dans ce cas, il faut simplement permute les coefficients

$$|0q_2 \cdots q_{n-1}1\rangle \longrightarrow |1q_2 \cdots q_{n-1}0\rangle \text{ et } |1q_2 \cdots q_{n-1}0\rangle \longrightarrow |0q_2 \cdots q_{n-1}1\rangle$$

$$|0xy1\rangle \longleftrightarrow |1xy0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, il ne s'agit que d'une simple permutation, pouvant être faite en temps linéaire.

La même approche est utilisée pour les portes à K -qubits. Il faut alors amener des k qubits comme derniers qubits. Plus complexe mais avec la même logique, la complexité de cette approche est alors de $K^2 \cdot N$.

```

N 5 0 0 0 0 0
H 0
H 3
CX 0 1
CX 3 4
H 1
H 4
T 0
CX 1 2
T 3
T 4
H 2
H 3
T 1
CX 2 3
H 1
H 3
H 4
CX 0 1
T 2
CX 3 4
H 1
H 2
H 4

```

Figure 4.4 Séquences textuelles pour le simulateur pour un circuit à cinq qubits

4.3 Représentation de l'intrication : l'entropie de Von Neumann

Pour la suite, le circuit illustré en Figure 4.1 et séquencé par le fichier textuel en Figure 4.4 sera pris en exemple.

La volonté de ce simulateur est de proposer une approche visuelle de l'intrication à l'utilisateur, ici l'entropie de Von Neumann.

La Figure 4.1 a) représente le circuit donné en entrée au simulateur. Sur la gauche du circuit se trouve un encart "Bipartite partition" comportant une lettre "A" ou "B" devant chaque fil du circuit. Cela représente l'attribution de chaque qubit à l'un des deux sous-systèmes A et B permettant le calcul de l'intrication, expliqué en détails dans les parties 4.3 et 4.4 à suivre, et affiché en Figure 4.1 b) et c). La Figure 4.1 b) affiche l'évolution de l'intrication au cours du circuit à travers deux valeurs représentées par les lignes pleines : l'entropie de Von Neumann (en bleu) et le rang de Schmidt (en jaune-orangé). Ces deux valeurs sont calculées selon l'état après chaque porte avec la méthode donnée en Chapitre 3. La décomposition de Schmidt

est calculée selon répartition des qubits dans les deux sous-systèmes A et B , puis le rang de Schmidt correspond au nombre de coefficients de Schmidt issus de la décomposition. Enfin, l'entropie de Von Neumann est calculée avec les coefficients de Schmidt. Ce calcul est répété après chaque porte du circuit jusqu'à former le graphique en Figure 4.1 b). Afin de vérifier l'implémentation de la méthode, la bibliothèque python *pyqentangle* est utilisée pour recouper et assurer la véracité des résultats obtenus. Après implémentation des deux méthodes, des valeurs identiques sont obtenues pour différents circuits, confirmant l'implémentation initiale basée sur les mathématiques présentés en Chapitre 3.

4.4 Partitions, minimum et maximum d'intrications

L'entropie de Von Neumann ne permet que de décrire l'intrication entre deux groupes de qubits. Cela ne donne que des indications sommaires sur l'intrication en général au sein de l'état. Mais il est possible de proposer davantage d'information en calculant les maximums et les minimums d'intrications possible à chaque porte (en pointillés sur le graphique). Pour se faire, chaque partition possible des qubits dans les sous-systèmes A et B est générée et stockée. Par exemple, un état à n qubits admet $\frac{\binom{n}{2}}{2}$ partitions. Les partitions "miroir" entre A et B ne sont pas conservées dès lors que les résultats seront identiques et cela permet d'économiser des ressources de calcul. Une fois générée, chaque partition est utilisée pour le calcul de l'intrication (entropie de Von Neumann et rang de Schmidt) avec l'état à chaque porte. Les résultats sont stockés après chaque porte et sont répertoriés dans la liste hérarchique en Figure 4.1 c) :

- index croissant de porte du circuits
 - rang de Schmidt décroissant
 - entropie de Von Neumann décroissante

En parallèle, les maximums et les minimums de chaque valeur sont affichés sur le graphique : l'entropie de Von Neumann en pointillés bleus-clairs et violets, et le rang de Schmidt en pointillés jaunes et orange foncés.

Dans le cas de l'exemple en Figure 4.1, les cinq qubits du système sont assignés de la sorte : $A = [0, 1, 3]$ et $B = [2, 4]$, où les chiffres désignent les indices des qubits du circuit. A la porte 4, avec cette partition, il est observable en Figure 4.1 b) que les lignes pleines de rang de Schmidt (jaune) et d'entropie de Von Neumann (bleue) ne sont pas confondues avec le maximum, et ne le sont qu'à partir de la porte 8.

Pour connaitre la partition de sous-systèmes permettant d'obtenir ce maximum, l'utilisateur peut utiliser la liste hiérarchique en Figure 4.1 d). Il lui suffit d'ouvrir l'arborescence de la porte 4, puis du rang de Schmidt le plus élevé - ici 4 - puis de repérer une répartition à reproduire dans la partie de contrôle du simulateur en Figure 4.1 d). Soit la répartition en surbrillance bleue considérée ici : $A = [0, 2, 3]$ et $B = [1, 4]$. Le résultat est affiché sur la Figure 4.5.

Avec cette nouvelle répartition, les lignes continues du rang de Schmidt (jaune) et de l'entropie de Von Neumann (bleue) sont désormais confondues avec leurs courbes maximales (pointillés orange foncés et violets respectivement).

Ces présences et absences de minimums et maximums locaux sont une source importante d'information sur l'intrication du circuit. L'intuition derrière ces valeurs est davantage expliquée dans la partie 4.6.

4.5 Paramètres utilisateur

L'utilisateur peut également faire des modifications sur le circuit ou sur les partitions directement depuis la fenêtre du simulateur. La Figure 4.1 d) présente les paramètres que l'utilisateur peut modifier en utilisant le simulateur. La première ligne présente tous les qubits du circuit ainsi qu'une case à cocher qui leur est associée. Lorsque la case est cochée, le qubit est sélectionné pour appartenir au sous-système B, sinon il est attribué au sous-système A. Ces sélecteurs permettent à l'utilisateur de se placer dans les conditions d'extremum qu'il observe sur la représentation graphique. La seconde ligne permet de modifier les valeurs initiales de chaque qubits, outrepasstant celles données en entrée dans le fichier textuel. Chaque mise à jour des paramètres doit être validée par le bouton "Confirmer" en bas à gauche.

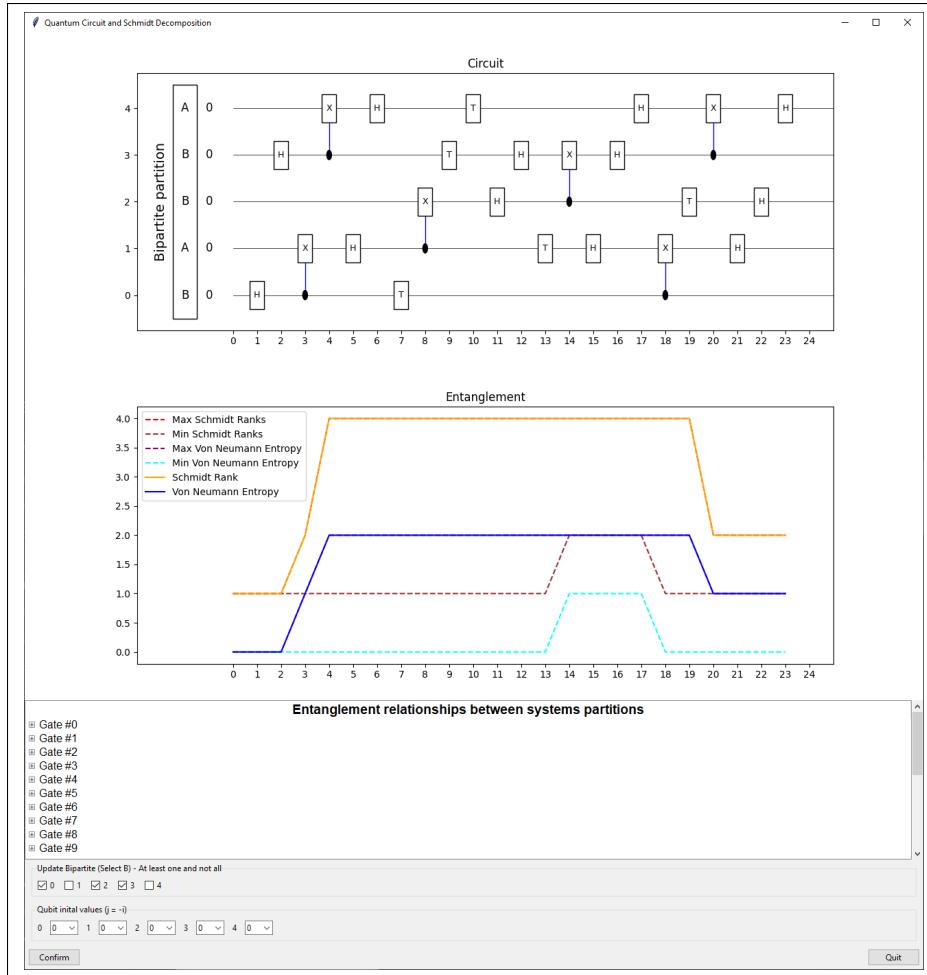


Figure 4.5 Fenêtre du simulateur pour l'exemple donné par la séquence d'instruction en Figure 4.4 ; sous-système A = [0,2,3] et sous-système B = [1,4]

4.6 Intuition

Cette représentation permet à l'utilisateur de se forger une certaine intuition sur les relations d'intrication dans circuit.

Lors de l'exemple donné par les Figures 4.2 et 4.3, il est possible d'observer trois cas ; illustrés par la Figure 4.6 (de gauche à droite) :

- $A = [1, 2]$ et $B = [0]$
- $A = [0, 2]$ et $B = [1]$

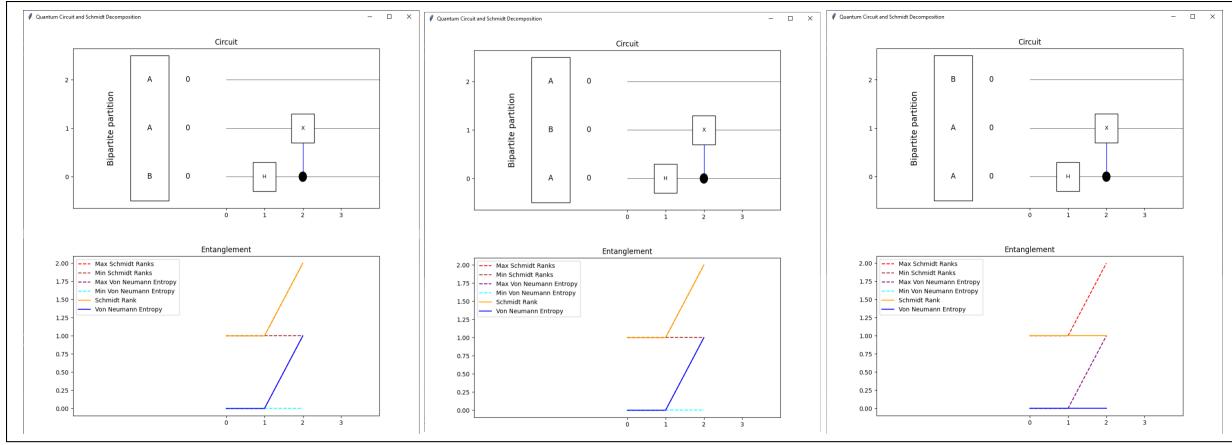


Figure 4.6 Fenêtres du simulateur pour un état de Bell

- $A = [0, 1]$ et $B = [2]$

Pour les deux premiers cas, il y a un pic d'intrication à partir de la porte 2, ici le C-NOT. Cela oriente l'utilisateur à penser que la porte C-NOT joue un rôle dans l'apparition de l'intrication au sein du circuit. Avec l'expérience, il est connu qu'une porte de Hadamard suivie d'une porte C-NOT crée un état de Bell, maximalement intriqué ; c'est donc une bonne piste d'intuition que donne le simulateur. C'est seulement au fur et à mesure d'essais que l'utilisateur néophyte en quantique s'apercevra de la nécessité de lier une porte de Hadamard avec un C-NOT pour générer de l'intrication.

Dans l'exemple en Figure 4.6 ci-dessus, il est assez aisément de repérer que seuls les qubits 0 et 1 sont intriqués ensemble, dès lors que le qubit 2 ne subit aucune transformation de porte. Néanmoins, grâce aux quantités d'intrication mesurées selon les répartitions en sous-systèmes A et B, il est possible de déduire quels qubits sont intriqués.

La Figure 4.6 présente le résultat du même circuit de Bell mais avec les trois partition de systèmes A et B possibles :

- Lorsque $A = [1, 2]$ et $B = [0]$, de l'intrication est détectée. Le qubit 0 est alors intriqué soit avec le qubit 1, soit avec le qubit 2 ;

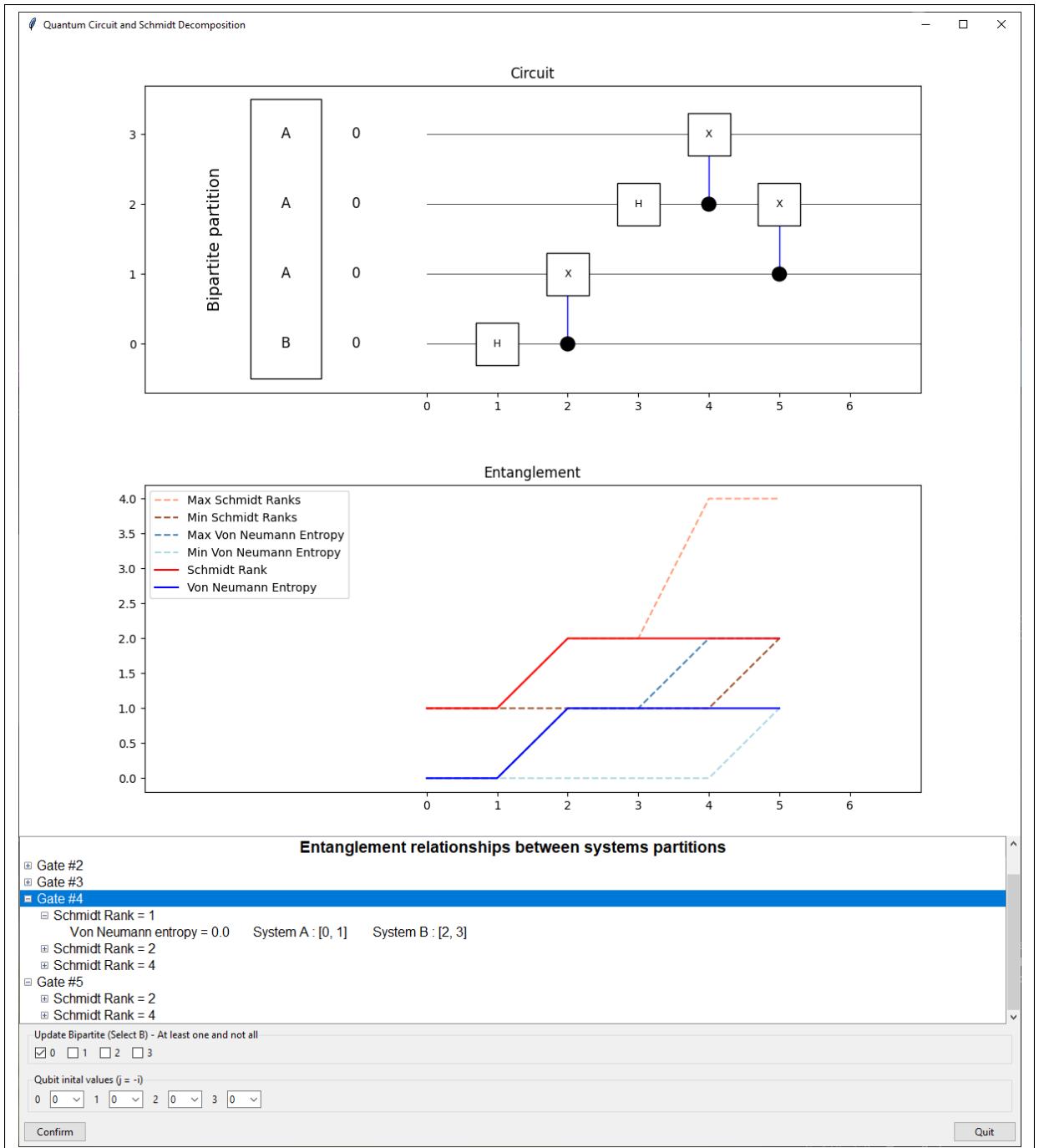


Figure 4.7 Fenêtre du simulateur pour le circuit de deux états de Bell

- De même pour lorsque $A = [0, 2]$ et $B = [1]$. Le qubit 1 est intriqué soit avec le qubit 0, soit avec le qubit 2 ;

- Lorsque $A = [0, 1]$ et $B = [2]$, aucune intrication n'est détectée et le rang de Schmidt et l'entropie forment respectivement une ligne plate. Cela signifie que le qubit 2 n'est pas intriqué ni avec le qubit 0, ni avec le qubit 1.

Ces observations permettent de conclure que, par relations logiques, les qubits 0 et 1 sont intriqués à l'issue de la porte 2 et le qubit 2 demeure séparable des deux autres.

Pour des cas simples comme celui-ci - à trois qubits - il est assez intuitif de repérer ces relations d'intrication. Pour autant, étendre ces relations à des systèmes de dizaines de qubits demande d'établir des règles relationnelles mathématiques complexes.

La représentation graphique permet également d'observer des variations qui donnent des indications subtiles sur l'évolution de l'intrication au cours du circuit.

Sur la Figure 4.7, à la porte 5, le minimum d'entropie de Von Neumann - représenté par la courbe pointillée bleutée - augmente et n'est plus égal à zéro. Le fait que l'intrication d'admette plus de minimum à zéro signifie qu'aucune partition possible du système n'admet de qubit séparable ; le système est donc entièrement intriqué, partiellement ou maximallement selon les cas.

Ce fait est également observable dans la liste hiérarchique : à la porte 4, il existe une partition donnant un rang de Schmidt de 1 et une entropie de Von Neumann de 0. Cela disparaît à la porte 5 où il ne reste plus que des partitions pour des rangs de Schmidt à 2 et 4, témoignant de l'intrication complète de l'état. L'absence ou la disparition d'information, ici d'entropie, permet de donner une nouvelle intuition sur l'évolution de l'intrication du circuit.

4.7 Pistes d'amélioration

Une première amélioration majeure du simulateur serait de proposer une représentation détaillée de l'intrication, notamment via la détection de l'intrication multipartite. Comme ambitionné au début du projet, une représentation telle que les boîtes arc-en-ciel fournirait des informations plus complètes et plus précises sur l'intrication que la simple entropie de Von Neumann. Pour les néophytes, cela permettrait de proposer une approche davantage visuelle et intuitive de l'intrication. Il est aussi possible d'imaginer d'autres représentations comme un treillis hiérarchique présenté en Figure 4.8. Sur cette maquette, un bouton permet de passer de la

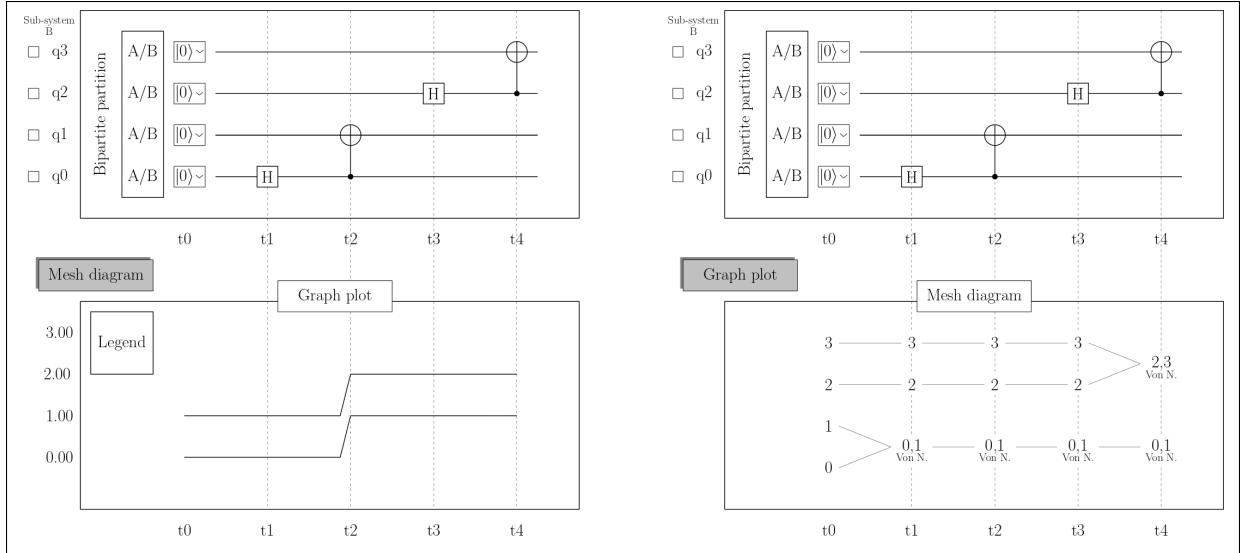


Figure 4.8 Maquette du simulateur avec des améliorations

fenêtre "graphique" à la fenêtre "treillis", en conservant l'affichage de Penrose du circuit en haut et en faisant correspondre les balises des portes aux transformations qu'elles induisent sur l'intrication du circuit. Bien que cela demande également des informations obtenable par résolution de problèmes NP-complet, ce genre de représentation permettrait de donner le même type d'informations qu'avec les boîtes arc-en-ciel, mais serait plus compacte et plus facilement intégrable dans le simulateur actuel. Pour autant, le fait d'être un problème NP-complet ne représente pas une grande limitation lorsque n est petit.

Dans son état actuel, le simulateur est plutôt statique. À part avec les paramètres en bas de fenêtre, l'utilisateur ne peut pas beaucoup interagir avec. Un ajout possible serait de proposer des informations additionnelles au survol de certains éléments avec la souris. Par exemple, au survol d'un extrémum sur le graphique, afficher la partition générant cet extrémum et, s'il y en a plusieurs, l'une d'entre elles. De la même manière, il serait intéressant de proposer des informations sur les portes à leur survol : leurs matrices par exemple.

Bien que cela n'ait pas de lien direct avec l'utilisation du simulateur, mais le code de ce dernier est optimisable. Des opérations sont faites plusieurs fois et stockées à plusieurs endroits, les appels de fonctions entre les différents modules sont redondants ou encore certaines variables sont déclarées en global.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

Ce mémoire et ce projet résultent de la volontée d'aider les néophytes du domaine à comprendre le phénomène d'intrication. Trop peu, voire aucun, outils présentent des informations sur l'intrication aujourd'hui ; d'où ce souhaite de proposer un outil de simulation quantique différent et innovant.

Après des rappels détaillés sur les notions physiques et mathématiques qui encadrent l'informatique quantique, une revue relativement exaustive de la littérature est proposée, sur les représentations et la quantification de l'intrication.

D'abord motivé de proposer une représentation novatrice par les boites arc-en-ciel, les exigences mathématiques et calculatoires que cela demandait sortaient du cadre de compétences des auteurs du projet.

L'entropie de Von Neumann est donc apparue comme une solution efficace et pratique afin de proposer de l'information sur l'intrication du circuit.

Par la même occasion, un simulateur de circuit quantique traditionnel est implémenté afin d'en proposer un affichage en parallèle de l'évolution graphique de l'intrication.

En proposant l'analyse d'extremums locaux, d'autres informations sur l'intrication, plus subtiles, ont pu être mises en lumière, obtenues en déclinant toutes les possiblités de partitions du système étudié.

Le simulateur proposé est, certes statistique, mais propose des informations complètes sur l'intrication d'un circuit. Il constitue un outil suffisant pour initier un néophyte sur les notions de l'intrication et commencer à lui insuffler une intuition sur le phénomène.

De nombreuses améliorations sont possibles, la plus importante étant surtement de rendre le simulateur plus interactif avec l'utilisateur.

ANNEXE I

EXAMPLE APPLIQUÉ DES NOTIONS MATHÉMATIQUES

1. Définition de l'état

Soit un état sur deux qubits

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}}|11\rangle$$

qui respecte la condition de normalisation

$$\left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|-\frac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{12}}\right|^2 = 1$$

Cet état peut également écrit sous la forme d'un vecteur :

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le bra de $|\phi\rangle$ s'écrit :

$$\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \left(\frac{1}{2}^* \quad \frac{1}{\sqrt{2}}^* \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}^* \quad \frac{1}{\sqrt{12}}^* \right)$$

Or, le conjugué complexe d'un nombre purement réel est lui-même.

Ainsi :

$$\langle\phi| = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \right)$$

2. Matrice de densité

La matrice de densité de $|\phi\rangle$ est donc :

$$\begin{aligned}
 \rho_\phi = |\phi\rangle\langle\phi| &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left|\frac{1}{2}\right|^2 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \left|-\frac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 & -\frac{\sqrt{2}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \left|\frac{1}{\sqrt{12}}\right|^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vérification de la condition de normalisation :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho_\phi) &= \left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1 \end{aligned}$$

3. Pureté

Soit :

$$(\rho_\phi)^2 = \begin{pmatrix} \left| \frac{1}{2} \right|^2 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 & -\frac{1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6\sqrt{2}} & \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right|^2 \end{pmatrix}$$

La pureté de $|\phi\rangle$ s'exprime par :

$$\gamma_\phi = \text{tr}((\rho_\phi)^2) = \left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right|^2 = 1$$

Donc $|\phi\rangle$ est un état pur.

4. Décomposition de Schmidt

Soit la décomposition de Schmidt de l'état $|\phi\rangle$:

1. Soient A le sous-système composé du qubit le plus important et B le sous-système composé du qubit le moins important (ici, dans le cadre d'un état à deux qubits, la définition des deux sous-systèmes est triviale).
2. Soit la forme canonique de $|\phi\rangle$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + -\frac{1}{\sqrt{6}} |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{12}} |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

3. Soit la matrice C_{AB}

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

4. Soit la matrice $2 \times 2 M_{AB}$

$$M_{AB} = C_{AB}^\dagger C_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les calculs à venir, il est possible de poser

$$\frac{\tilde{M}_{AB}}{12} = M_{AB} \iff \tilde{M}_{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$$

et d'utiliser \tilde{M}_{AB} dans les étapes suivantes, sans oublier de revenir ensuite à la matrice initiale avec le facteur $\frac{1}{12}$.

5. Calculer la matrice V^T

$|\phi\rangle$ est un état à 2 qubits, la matrice \tilde{M}_{AB} admet alors deux valeurs propres

$$\det(\tilde{M}_{AB} - \tilde{\lambda}\mathcal{I}_2) = 0$$

$$\iff \det \left(\begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\iff \det \left(\begin{pmatrix} 5 - \tilde{\lambda} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 - \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\iff (5 - \tilde{\lambda}) \cdot (7 - \tilde{\lambda}) - 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 0$$

$$\iff 35 - 5\tilde{\lambda} - 7\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}^2 - 8 = 0$$

$$\iff \tilde{\lambda}^2 - 12\tilde{\lambda} + 27 = 0$$

$\iff (\tilde{\lambda} - 9)(\tilde{\lambda} - 3) = 0$ par factorisation ; également possible par résolution du polynôme du second degré.

$$\implies \tilde{\lambda}_1 = 9 \text{ et } \tilde{\lambda}_2 = 3$$

$$\implies \lambda_1 = \frac{9}{12} \text{ et } \lambda_2 = \frac{3}{12} \implies \lambda_1 = \frac{3}{4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{4}$$

Soient \vec{v}_1 et \vec{v}_2 les vecteurs propres respectifs des valeurs propres λ_1 ou $\tilde{\lambda}_1$ et λ_2 ou $\tilde{\lambda}_2$

Pour $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ **ou** $\tilde{\lambda}_1 = 9$:

$$(\tilde{M}_{AB} - \tilde{\lambda}_1 I_2) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -4x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 0 \\ 2\sqrt{2}x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = 1 \end{cases} \iff \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur \vec{v}_1 n'est pas normalisé :

$$\left\| \vec{v}_1 \right\| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 + |1|^2 = \frac{3}{2} \neq 1$$

Il faut le normaliser :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{\left\| \vec{v}_1 \right\|}} \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ **ou** $\tilde{\lambda}_2 = 3$:

$$(\tilde{M}_{AB} - \tilde{\lambda}_2 I_2) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 0 \\ 2\sqrt{2}x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \iff \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme pour \vec{v}_1 , \vec{v}_2 n'est pas normalisé :

$$\left\| \vec{v}_2 \right\| = \left| -\sqrt{2} \right|^2 + |1|^2 = 3 \neq 1$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\|\vec{v}_2\|}} \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Vérification de l'orthogonalité entre les vecteurs propres :

$$|\langle v_1 | v_2 \rangle| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 1$$

Les deux vecteurs propres sont bien orthogonaux.

Avec les deux vecteurs propres, il est possible de construire la matrice V ...

$$V = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

...et en déduire la matrice V^T

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

6. Calculer la matrice Σ

Soient les valeurs singulières σ_i telles que

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \text{ pour tout } \lambda_i > 0$$

Alors :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \text{ et } \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\iff \sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sigma_2 = \frac{1}{2}$$

La matrice Σ est une matrice diagonale de même dimensions que M_{AB} , soit 2×2 , et sa diagonale est composée des valeurs singulières σ_i , ordonnée de manière croissante.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

7. Calculer la matrice U

$$U = \frac{C_{AB}V}{\Sigma}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} C_{AB} \cdot \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} C_{AB} \cdot \vec{v}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

\vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont déjà normalisés et il est trivial qu'ils sont orthogonaux.

Alors :

$$U = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La décomposition de Schmidt de $|\phi\rangle$ est donc :

$$C_{AB} = U\Sigma V^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\iff |\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle_A \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle_B + \frac{2}{\sqrt{6}} |1\rangle_B \right) + \frac{1}{2} |1\rangle_A \otimes \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{3}} |1\rangle_B \right)$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sont les coefficients de Schmidt de $|\phi\rangle$.

Le nombre de coefficients de Schmidt $c_{|\phi\rangle} = 2$. Donc $|\phi\rangle$ est un état intriqué.

5. Traces partielles

Soit $|\phi\rangle$ et sa matrice de densité

$$\rho_\phi = \begin{pmatrix} \left| \frac{1}{2} \right|^2 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 & -\frac{\sqrt{2}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 6 & -2\sqrt{3} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -2\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Soient deux sous-systèmes A et B de bases :

- A : $|i\rangle_A = \{|0\rangle_A ; |1\rangle_A\}$
- B : $|j\rangle_B = \{|0\rangle_B ; |1\rangle_B\}$

Trace partielle $(\rho_\phi)_A$ du système A ou réduction de ρ_ϕ par rapport à B

$$\begin{aligned}
 (\rho_\phi)_A &= Tr_B[\rho_\phi] = \sum_j (\mathcal{I}_A \otimes \langle j|_B) \rho_\phi (\mathcal{I}_A \otimes |j\rangle_B) \\
 &= (\mathcal{I}_A \otimes \langle 0|_B) \rho_\phi (\mathcal{I}_A \otimes |0\rangle_B) + (\mathcal{I}_A \otimes \langle 1|_B) \rho_\phi (\mathcal{I}_A \otimes |1\rangle_B) \\
 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_B \right) \rho_\phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right) + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_B \right) \rho_\phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rho_\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho_\phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -2\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 6 & -2\sqrt{3} & \sqrt{6} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vérification de la normalisation de la trace partielle :

$$tr((\rho_\phi)_A) = \frac{1}{12}(9 + 3) = 1$$

Trace partielle $(\rho_\phi)_B$ du système B ou réduction de ρ_ϕ par rapport à A

$$\begin{aligned}
 (\rho_\phi)_B &= Tr_A[\rho_\phi] = \sum_i (\langle i|_A \otimes \mathcal{I}_B) \rho_\phi (|i\rangle_A \otimes \mathcal{I}_B) \\
 &= (\langle 0|_A \otimes \mathcal{I}_B) \rho_\phi (|0\rangle_A \otimes \mathcal{I}_B) + (\langle 1|_A \otimes \mathcal{I}_B) \rho_\phi (|1\rangle_A \otimes \mathcal{I}_B) \\
 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_B \right) \rho_\phi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_B \right) + \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_B \right) \rho_\phi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_B \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rho_\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho_\phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 6 & -2\sqrt{3} & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & 2\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vérification de la normalisation de la trace partielle :

$$tr((\rho_\phi)_B) = \frac{1}{12}(5 + 7) = 1$$

6. Relation entre matrice de densité, traces partielles et décomposition de Schmidt

En résumé, soit

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}} |11\rangle$$

avec :

- sa matrice de densité $\rho_\phi = \begin{pmatrix} \left|\frac{1}{2}\right|^2 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \left|-\frac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 & -\frac{\sqrt{2}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \left|\frac{1}{\sqrt{12}}\right|^2 \end{pmatrix}$
- ses traces partielles $(\rho_\phi)_A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $(\rho_\phi)_B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$
- sa décomposition de Schmidt

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle_A \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle_B + \frac{2}{\sqrt{6}} |1\rangle_B \right) + \frac{1}{2} |1\rangle_A \otimes \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{3}} |1\rangle_B \right)$$

$$- |u_0\rangle = |0\rangle_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A$$

$$- |u_1\rangle = |1\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A$$

$$- |v_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle_B + \frac{2}{\sqrt{6}} |1\rangle_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}_B$$

$$- |v_1\rangle = -\frac{2}{\sqrt{6}} |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{3}} |1\rangle_B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}_B$$

Les relations qui unissent la matrice de densité, les traces partielles et la décomposition de Schmidt sont comme suit :

Calcul de $\sum_i \sigma_i |u_i\rangle \langle u_i|$

$$\begin{aligned}
\sum_i \sigma_i |u_i\rangle \langle u_i| &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 |0\rangle_A \langle 0|_A + \left(\frac{1}{2}\right)^2 |1\rangle_A \langle 1|_A \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (\rho_\phi)_A
\end{aligned}$$

Calcul de $\sum_i \sigma_i |v_i\rangle \langle v_i|$

$$\begin{aligned}
\sum_i \sigma_i |v_i\rangle \langle v_i| &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle_B + \frac{2}{\sqrt{6}} |1\rangle_B \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \langle 0|_B + \frac{2}{\sqrt{6}} \langle 1|_B \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{3}} |1\rangle_B \right) \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} \langle 0|_B + \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1|_B \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix} \\
&= (\rho_\phi)_B
\end{aligned}$$

ANNEXE II

COMMANDES TEXTUELLES DU SIMULATEUR

Tableau-A II-1 Commandes textuelles pour les portes à un qubit

Code lettre	Porte	Matrice
I	Identité	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
X	NOT, X	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Y	Y	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Z	Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
H	Hadamard	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
P, S, SRZ	P, S, \sqrt{Z}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
T	T	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix}$
SRX	\sqrt{X}	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{bmatrix}$
SRY	\sqrt{Y}	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{bmatrix}$

Tableau-A II-2 Commandes textuelles pour les portes à deux qubits

Code lettre	Porte	Matrice
SW	$SWAP$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
SWr	\sqrt{SWAP}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
SWi	$iSWAP$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
SWir	\sqrt{iSWAP}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tableau-A II-3 Commandes textuelles pour les portes contrôlées

Code lettre	Porte	Matrice
CX	C-NOT	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
NC	Not CX	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
CY	Contrôle Y	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$
CZ	Contrôle Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
CS	Contrôle S	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$
CT	Contrôle T	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix}$
CH	Contrôle Hadamard	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Tableau-A II-4 Commandes textuelles pour les portes paramétrées à un qubit

Code lettre	Porte	Matrice
RTX	$\mathcal{R}_x(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ -i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
RTY	$\mathcal{R}_y(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
RTZ	$\mathcal{R}_z(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos \theta - i \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta + i \sin \theta \end{bmatrix}$
XX	$\mathcal{R}_{xx}(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -i \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -i \sin \theta & 0 \\ 0 & -i \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -i \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
YY	$\mathcal{R}_{yy}(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & i \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -i \sin \theta & 0 \\ 0 & -i \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ i \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
XY	$\mathcal{R}_{xy}(\theta)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & i \sin \theta & 0 \\ 0 & i \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
ZZ	$\mathcal{R}_{zz}(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos \theta - i \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta + i \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta + i \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta - i \sin \theta \end{bmatrix}$

BIBLIOGRAPHIE

- Bennett, C. H. (1973). Logical Reversibility of Computation. *IBM Journal of Research and Development*, 17, 525-532.
- Bennett, C. H., Bernstein, H. J., Popescu, S. & Schumacher, B. (1996). Concentrating Partial Entanglement by Local Operations. *Physical Review A*, 53(4), 2046-2052.
- Bley, J., Rexigel, E., Arias, A., Longen, N., Krupp, L., Kiefer-Emmanouilidis, M., Lukowicz, P., Donhauser, A., Küchemann, S., Kuhn, J. & Widera, A. (2023). Visualizing Entanglement in multi-Qubit Systems.
- Bloch, F. (1946). Nuclear Induction. *Physical Review*, 70(7), 460-474.
- Chang, L.-H. H., Roccaforte, S., Xu, R. & Cadden-Zimansky, P. (2022). Geometric Visualizations of Single and Entangled Qubits.
- Dirac, P. A. M. (1939). A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35(3), 416-418.
- Feynman, R. P. (1986). Quantum Mechanical Computers. *Foundations of Physics*, 16(6), 507-531.
- Gühne, O. & Tóth, G. (2009). Entanglement detection.
- Lamy, J.-B. (2019). Dynamic software visualization of quantum algorithms with rainbow boxes.
- Laplante, S., Perez, L., Tissot, S. & Vettier, L. (2022). QuBOBS, interactive objects and a visual representation to explain quantum computing.
- Lecerf, Y. (1963). Machines de Turing réversibles. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de L'académie des Sciences*, 257, 2597-2600.
- Lin, S., Hao, J. & Sun, L. (2018). Quflow : Visualizing Parameter Flow in Quantum Circuits for Understanding Quantum Computation.
- Penrose, R. (1971). Applications of negative dimensional tensors. *Combinatorial Mathematics and its Applications*, Academic Press.
- Tao, Z., Pan, Y., Chen, A. & Wang, L. (2017). ShorVis : A Comprehensive Case Study of Quantum Computing Visualization. *2017 International Conference on Virtual Reality and Visualization (ICVRV)*, 360-365.

Turing, A. M. (1936). ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTScheidungsproblem. 230-265.

Walck, S. N. & Hansell, N. C. (2001). Characterization and visualization of the state and entanglement of two spins. *European Journal of Physics*, (22), 343-350.