Rapport sur les travaux effectués

Paul Wang

1 Contexte : Théorie géométrique des modèles

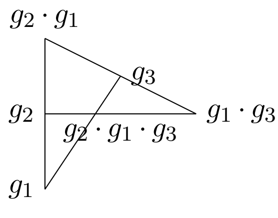
La théorie des modèles (du premier ordre) vise à étudier des structures et théories (algébriques, combinatoires, etc.) en s'appuyant sur des outils de logique (du premier ordre). Dans sa version moderne, les objets centraux sont les *ensembles définissables*, c'est-à-dire les collections d'éléments définies par des formules du langage.

2 Article publié : Extending Hrushovski's groupoid-cover correspondence using simplicial groupoids

3 Article publié : The group configuration theorem for generically stable types

Le principe du théorème de configuration de groupe est de *détecter la présence d'un groupe définissable*[1] *à partir de données combinatoires.* Ce résultat s'inscrit dans le domaine de la *théorie géométrique des modèles*, mentionnée plus haut, qui étudie les théories du premier ordre à travers les structures algébriques définissables qui y apparaissent.

Une configuration de groupe est la donnée de 6 éléments vérifiant des propriétés d'indépendance et de dépendance bien spécifiques ; l'exemple essentiel est le suivant : soit G un groupe définissable dans une théorie stable[2], par exemple la théorie des corps algébriquement clos, et soient g_1, g_2, g_3 des éléments *génériques* de G, formant une *famille indépendante*[3]. Alors, le diagramme ci-dessous est une configuration de groupe :



1. C'est-à-dire, un groupe dont l'ensemble sous-jacent et la loi sont définissables.
2. Ceci signifie qu'aucune relation définissable n'induit une relation d'ordre total infini ; il s'agit d'une hypothèse forte de modération combinatoire.
3. Par exemple, si $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la conjonction de ces deux conditions correspond à demander que les g_i soient en position générale ; l'ensemble des triplets de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne vérifiant pas cette propriété est négligeable pour la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

En effet, les deux propriétés définissant la notion de configuration de groupe *régulière*[4] sont les suivantes :

— Sur le diagramme, tout triplet de points non alignés forme une famille indépendante[5].

— Pour toute ligne du diagramme, chaque point est algébrique sur les deux autres[6].

L'énoncé du théorème de configuration de groupe pour les théories stables, attribué à Hrushovski, est le suivant :

Théorème 3.1. *Pour toute configuration de groupe (régulière) dans une théorie stable, il existe un groupe définissable*[7] Γ *et trois éléments* g_1, g_2, g_3 *du groupe* Γ*, génériques et indépendants, tels que la configuration de groupe initiale et celle de* Γ *construite à partir des* g_i *sont équivalentes, c'est-à-dire interalgébriques point à point.*

De plus, un tel groupe est essentiellement unique *: étant données deux configurations de groupe équivalentes construites à partir d'éléments génériques indépendants pour deux groupes définissables* Γ *et* Γ'*, il existe une isogénie virtuelle*[8] *définissable entre* Γ *et* Γ'*.*

Autrement dit, les exemples présentés plus haut sont essentiellement les seuls : dans une théorie stable, tout sextuplet d'éléments vérifiant les propriétés d'indépendance et d'algébricité ci-dessus provient de génériques indépendants d'un groupe définissable.

La seule variante du théorème de configuration de groupe démontrée, jusque-là, hors du cadre des théories stables, de Ben Yaacov-Tomasic-Wagner [<**empty citation**>], repose sur une hypothèse moins forte de *simplicité* de la théorie ambiante, au prix d'une conclusion moins forte également : le groupe obtenu n'est que "presque hyper-définissable".

3.1 Contributions

Dans l'article publié [<**empty citation**>], je démontre une généralisation du théorème de configuration de groupe originel, en supposant uniquement que le sextuplet considéré définit un *type génériquement stable*, c'est-à-dire que les suites de copies indépendantes de ce sextuplet se comportent comme si elles étaient dans une théorie stable. L'énoncé est essentiellement le même, à ceci près que je donne un contrôle plus précis

4. Il existe en effet une définition, et un théorème, pour des *actions de groupe* plus générales qu'une action par translation d'un groupe sur lui-même ; par souci de concision, les détails ne seront pas mentionnés.

5. Toute théorie stable vient avec une notion canonique d'indépendance ; une partie de la difficulté technique est de travailler avec des généralisations ayant un sens pour des théories instables.

6. Ce qui signifie qu'il est *d'orbite finie* sous l'action des automorphismes de la structure ambiante fixant les deux autres éléments ; de manière équivalente, il existe une formule ayant un nombre fini de solutions, parmi lesquelles le point en question, utilisant comme paramètres les deux autres éléments.

7. Techniquement, *type-définissable*, une variante légèrement plus générale, où l'on autorise les intersections infinies d'ensembles définissables.

8. Autrement dit, un sous-groupe normal de $\Gamma \times \Gamma'$ pour lequel les projections vers Γ et Γ' sont à fibres finies, et d'images d'indice fini.

sur les paramètres/éléments utilisés dans la construction, qui peut être utile pour des applications du théorème. La structure de la preuve est similaire.

Au niveau technique, l'essentiel du travail a consisté à utiliser de manière précise les propriétés des types génériquement stables, en particulier la notion d'indépendance fournie par la théorie des modèles abstraite, qui se comporte *presque* aussi bien que dans le cas des théories stables.

Pour ce qui est des applications, au vu des résultats obtenus dans des contextes stables en utilisant le théorème de configuration de groupe originel, cette généralisation est un pas vers le développement de résultats analogues reposant sur les types génériquement stables.

4 Article soumis : On groups and fields interpretable in NTP_2 fields

4.1 Contributions

Dans l'article [<**empty citation**>]

5 Article soumis : Residually Dominated Groups in Henselian Valued Fields of Equicharacteristic Zero, avec Dicle Mutlu

5.1 Contributions personnelles

6 Contribution incluse dans la thèse : On groups and fields definable in D-henselian fields

6.1 Contributions

7 Prépublication : Comportements nondéterministes en théorie doublement catégorique des systèmes

La théorie catégorique des systèmes [9] vise à donner un cadre théorique unifié pour l'étude de systèmes dynamiques, les aspects techniques reposant sur des notions de théorie des catégories. Plusieurs directions ont émergé de ce champ de recherches au fil du temps ; les deux plus importantes, en ce qui concerne ce projet de recherche, sont l'approche fondée sur les *catégories monoidales symétriques*,possiblement avec de la structure additionnelle (voir 7.1), et le *point de vue coalgébrique* sur les systèmes (voir 7.2). En effet, ce travail s'inscrit dans la nouvelle branche appelée *théorie doublement catégorique*, ou *doublement opéradique*, des systèmes [Mye21] [LM25], qui vise à combiner les deux approches susmentionnées dans un seul cadre ; il repose également sur la théorie synthétique des probabilités. Il me semble utile de commencer par rappeler en quoi consistent

9. Voir par exemple l'introduction de [LM25].

les points de vue "monoidal symétrique" et "coalgébrique", ainsi que la théorie synthétique des probabilités, avant d'expliquer les enjeux et questions en théorie doublement catégorique des systèmes, et mes contributions.

7.1 Contexte : Approche monoidale symétrique

Une catégorie monoidale symétrique est une structure contenant des objets, des morphismes entre ces objets, une opération de produit sur les objets (muni de symétries canoniques), et des opérations de composition séquentielle et parallèle sur les morphismes, vérifiant des propriétés algébriques raisonnables (associativité, etc.). L'intérêt pour la représentation de systèmes dynamiques est le suivant : si l'on peut représenter les espaces d'entrées ou de sorties possibles comme des objets, les systèmes comme des morphismes, et que l'on dispose effectivement d'opérations de compositions parallèle et séquentielle de systèmes, alors *la théorie des catégories monoidales symétriques fournit automatiquement une syntaxe et des outils de raisonnement*. Les plus emblématiques sont les *diagrammes de cordes* [10], qui permettent des calculs rigoureux fondés sur des manipulations graphiques des diagrammes.

Une des applications les plus marquantes est le *ZX-calculus* [DKP07], utilisé pour représenter des calculs quantiques à base de qbits, dont les vertus pédagogiques, découlant vraisemblablement de l'approche graphique et de la relative simplicité du langage, ont été testées expérimentalement [Coe+25].

7.2 Contexte : point de vue coalgébrique

Pour illustrer le point de vue coalgébrique sur les systèmes, utilisons l'exemple des machines de Moore [11]. Une machine de Moore est définie par des ensembles d'états, entrées et sorties, notés respectivement S, I, et O, et des fonctions de sortie $S \to O$, et de mise à jour d'état $S \times I \to S$. L'observation est alors que, pour I et O fixés, la donnée d'une machine de Moore est équivalente à la donnée d'un ensemble S, et d'une fonction $S \to O \times S^I$, c'est-à-dire d'un objet S de la catégorie des ensembles, muni d'un morphisme $S \to F(S)$, où F désigne le foncteur $X \mapsto O \times X^I$. Autrement dit, une machine de Moore est une coalgèbre pour le foncteur F. Cette observation n'est pas restreinte au cas des machines de Moore, mais se décline sur un grand nombre d'exemples. Voir [Rut00, Section 3].

Partant de ce principe, l'on peut ensuite définir [12] un système comme étant une coalgèbre pour un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, étant entendu que la notion dépend fortement de F, en particulier, le choix de F détermine une "interface" commune. Une *simulation* d'un système vers un autre est alors simplement un morphisme de coalgèbres ; dans la plupart des exemples, cette notion traduit l'idée de "morphisme de comparaison entre

10. Appelés *string diagrams* en anglais ; voir par exemple la page du nLab sur le sujet : `ncatlab.org/nlab/show/string+diagram`.

11. notion qui généralise celle d'automate fini déterministe

12. Il s'agit davantage d'*identifier une structure commune* à des théories de systèmes, d'*organiser l'information*, que de mener une étude axiomatique approfondie à partir de telles définitions.

espaces d'états, *agissant identiquement sur les interfaces*, compatible avec les dynamiques des systèmes considérés". Des notions plus symétriques, de *bisimulation* et *bisimilarité*, peuvent ensuite être définies [Sta09].

7.3 Contexte : Théorie synthétique des probabilités et du nondéterminisme

Avant de présenter la théorie doublement catégorique des systèmes, je souhaite m'attarder sur un élément important au niveau "monoidal symétrique", à savoir la *théorie synthétique des probabilités*, fondée sur la notion de catégorie de Markov [Fri20, Definition 2.1]. L'idée est d'axiomatiser le comportement des *noyaux de Markov* entre espaces mesurables, qui à chaque élément de la source associent une mesure de probabilité sur l'espace d'arrivée, qui "varie de manière mesurable" (voir [Per22, Section 1] et [Gir82]). Comme les noyaux de Markov sont munis d'opération de compositions parallèle et séquentielle, *le cadre monoidal symétrique est pertinent*. Cependant, de la structure additionnelle existe, en l'occurrence, pour tout espace mesurable X, l'unique noyau de Markov del_X, de X vers l'espace singleton, ainsi que la fonction mesurable diagonale $copy_X : X \to X \times X$. Abstrayant à partir de cet exemple, une *catégorie de Markov* est définie comme étant une catégorie monoidale symétrique où tout objet X est muni de morphismes $del_X : X \to 1$ et $copy_X : X \to X \otimes X$, telle que ces morphismes vérifient un certain nombre de propriétés algébriques simples.

Notons que ces axiomes admettent des modèles variés, dont certains représentent des notions de nondéterminisme *possibilistes*, c'est-à-dire où l'incertitude correspond à des *ensembles d'issues possibles*, sans mesure de probabilité pour la quantifier. L'opération consistant à associer à une mesure de probabilité (raisonnable) son *support* induit alors un foncteur entre les catégories de Markov correspondantes, représentant l'oubli d'information. Ces considérations ont une importance pour les applications à l'étude des systèmes d'IA : un certain nombre de résultats expérimentaux utilisant des méthodologies moins robustes [13], ou avec des analyses statistiques peu fournies, peuvent être considérés comme *possibilistes*, et ainsi avoir des conclusions en adéquation avec leurs méthodes.

Un point important, comme expliqué par Tobias Fritz dans l'introduction de [Fri20], est que cette approche est *axiomatique et synthétique* : il s'agit d'étudier le *comportement* des objets à un niveau relativement abstrait, plutôt que de s'appuyer sur des descriptions (ensemblistes par exemple) très précises. Parmi les exemples d'approches synthétiques fructueuses en mathématiques, on pourra penser à la théorie des *catégories abéliennes*, qui donne un cadre efficace pour traiter des questions d'algèbre homologique, à la théorie des *infini-cosmos* [RV22], qui axiomatise non pas les infini-catégories, mais les univers dans lesquels elles interagissent en tant qu'objets, appelés infini-cosmos [14].

13. Faute de moyens, parfois.

14. Ce point de vue permet un traitement *indépendant du modèle combinatoire* choisi pour définir ce qu'est une infini-catégorie, ce qui a son importance étant donné la pluralité des modèles existants.

7.4 Contexte : Théorie doublement catégorique des systèmes

Comme mentionné plus haut, la théorie doublement catégorique des systèmes vise à combiner un point de vue sur la *composition* de systèmes et des notions de *comparaisons*, ou *simulations généralisées* entre systèmes. Au niveau technique, cela repose sur l'utilisation de *catégories doubles*[15]. En effet, une catégorie double (stricte) est définie par deux catégories sur la même classe d'objets, parfois appelées les catégories *verticale* et *horizontale*, ainsi que la donnée de 2-cellules, pour tout quadruplet de morphismes formant les côtés parallèles d'un carré. Les 2-cellules sont parfois appelées *carrés*, et sont munies d'opération de composition verticale et horizontale, associatives unitaires, satisfaisant la loi d'échange. Remarquons que cette notion est plus générale que celle, plus courante, de 2-catégorie[16] ; la différence est importante ici, car elle permet de considérer des simulations généralisées entre systèmes n'ayant pas la même interface. Ainsi, l'on peut utiliser l'une des directions pour encoder la composition de systèmes, et l'autre pour les simulations généralisées entre interfaces, et entre systèmes. *La loi d'échange représente alors une condition de compatibilité cruciale entre composition de systèmes et composition de simulations généralisées.* Etant donné des systèmes S et T, vus comme cellules de dimension 1 dans la catégorie double en jeu, un *comportement* de forme S dans T est défini comme étant un morphisme de systèmes de S vers T, i.e. une 2-cellule. L'idée est ainsi que chaque système *représente* un type de comportement, et une question importante (cf [Mye23, Fin de la Section 3.5]) est de trouver des systèmes (nécessairement simples) représentant les notions de *trajectoires*, nondéterministes en l'occurrence.

7.5 Contributions

Dans [Wan25], je construis, étant donnés une catégorie de Markov avec lois conditionnelles[17], notée $\mathcal{C}$, et un graphe orienté acyclique $\mathcal{G}$, une théorie de systèmes dynamiques, en un sens très proche de ce qui est appelé "module de systèmes[18]" dans [LM25], qui répond à la question posée dans [Mye23, Fin de la Section 3.5], i.e. qui autorise des trajectoires, et plus généralement des comportements, "vraiment nondéterministes".

Cette construction permet de capturer des classes d'exemples précédemment non couvertes, ou seulement restreinte aux comportements déterministes, par la théorie doublement catégorique des systèmes :

— Les systèmes (ouverts) gouvernés par des Equations Différentielles Stochastiques.

— Les automates nondéterministes.

— Les processus de décision de Markov (i.e. processus de Markov ouverts, pouvant interagir avec un environnement extérieur).

Les idées que j'utilise sont les suivantes :

15. Voir `ncatlab.org/nlab/show/double+category` ou [DP93, Introduction] pour plus de détails
16. Voir `ncatlab.org/nlab/show/2-category`
17. Cette condition étant la version synthétique de l'existence de lois conditionnelles au sens usuel.
18. A absence d'identités strictes près pour l'une des directions ; j'obtiens ce que j'appelle des *semi*modules de systèmes.

1. La catégorie de Markov $\mathcal{C}$ représente la notion de nondéterminisme de la théorie de systèmes à construire.
2. Le graphe $\mathcal{G}$ représente la notion de temps considérée ; pour des raisons propres au nondéterminisme [19], et par absence de structure monoidale close ou cartésienne close pertinente [20], je traite le temps de manière externe à $\mathcal{C}$.
3. L'existence de lois conditionnelles dans $\mathcal{C}$ permet de définir la composée verticale des 2-cellules, ce qui correspond à *construire des trajectoires jointes de systèmes composés*, en faisant une *hypothèse d'indépendance conditionnelle des composants relativement à l'information aux interfaces.*
4. A partir de l'idée du point ci-dessus, l'essentiel du travail technique consiste à vérifier les propriétés algébriques requises ; associativité et échange demandent le plus d'efforts.
5. Afin de simplifier la rédaction, ainsi que les démonstrations futures de fonctorialité de la construction vis-à-vis de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{G}$, je construis d'abord des *catégories triples*, où la dimension supplémentaire sert à gérer le temps, avant d'en déduire les catégories doubles voulues comme catégories de foncteurs "de source $\mathcal{G}$" à valeurs dans ces catégories triples.

Une observation intéressante est que le gros des calculs repose sur l'utilisation des propriétés formelles de l'indépendance conditionnelle, et que lesdites propriétés sont très similaires aux propriétés des notions d'indépendance utilisées dans mes travaux précédents, en théorie des modèles. Il ne s'agit pas d'une coïncidence : d'après l'article [Yaa13], l'indépendance conditionnelle de variables aléatoires (à valeurs dans un espace métrique) est une instance, en théorie des modèles continue, des notions d'indépendance générales présentes dans mes travaux en théorie des modèles.

Bibliographie

[Coe+25] B. Coecke et al. « High schoolers excel at Oxford quantum course using pictorial mathematics ». arXiv :2512.00141 (nov. 2025). arXiv :2512.00141 [physics]. URL : `http://arxiv.org/abs/2512.00141`.

[DKP07] V. Danos, E. Kashefi et P. Panangaden. « The measurement calculus ». *J. ACM* 54.2 (avr. 2007), 8-es.

[DP93] R. Dawson et R. Pare. « General associativity and general composition for double categories ». *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 34.1 (1993), p. 57-79.

19. Précisément, le fait qu'une loi sur un produit contienne plus d'information que la donnée de ses marginales
20. C'est-à-dire où les espaces de morphismes seraient représentés par des objets de la catégorie

[Fri20] T. Fritz. « A synthetic approach to Markov kernels, conditional independence and theorems on sufficient statistics ». *Advances in Mathematics* 370 (2020), p. 107239. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870820302656.

[Gir82] M. Giry. « A categorical approach to probability theory ». *Categorical Aspects of Topology and Analysis*. Sous la dir. de B. Banaschewski. T. 915. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1982, p. 68-85. URL : http://link.springer.com/10.1007/BFb0092872.

[LM25] S. Libkind et D. J. Myers. « Towards a double operadic theory of systems » (mai 2025). arXiv :2505.18329 [math]. URL : http://arxiv.org/abs/2505.18329.

[Mye21] D. J. Myers. « Double Categories of Open Dynamical Systems (Extended Abstract) ». *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 333 (fév. 2021). arXiv :2005.05956 [math], p. 154-167.

[Mye23] D. J. Myers. *Categorical Systems Theory*. In Preparation, 2023. URL : http://davidjaz.com/Papers/DynamicalBook.pdf.

[Per22] P. Perrone. « Markov Categories and Entropy ». *IEEE Transactions on Information Theory* 70 (2022), p. 1671-1692. URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:254974204.

[Rut00] J. J. M. M. Rutten. « Universal coalgebra : a theory of systems ». *Theoretical Computer Science*. Modern Algebra 249.1 (oct. 2000), p. 3-80.

[RV22] E. Riehl et D. Verity. *Elements of infinity-Category Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 2022. URL : https://www.cambridge.org/core/books/elements-of-category-theory/DAC48C449AB8C2C1B1E528A49D27FC6D.

[Sta09] S. Staton. « Relating Coalgebraic Notions of Bisimulation ». en. *Algebra and Coalgebra in Computer Science*. Sous la dir. d'A. Kurz, M. Lenisa et A. Tarlecki. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009, p. 191-205.

[Wan25] P. Z. Wang. « Nondeterministic Behaviours in Double Categorical Systems Theory ». arXiv :2502.02517 (fév. 2025). arXiv :2502.02517 [math]. URL : http://arxiv.org/abs/2502.02517.

[Yaa13] I. B. Yaacov. « On theories of random variables ». en. *Israel Journal of Mathematics* 194.2 (mars 2013), p. 957-1012.