

Rapport sur les travaux effectués

Paul Wang

Table des matières

I Théorie géométrique des modèles	2
1 Revêtements et groupoïdes définissables	3
1.1 Revêtements internes et groupoïdes de liaison	3
1.2 Questions	4
1.3 Travaux existants	5
1.4 Contributions	5
2 Configurations de groupe génériquement stables	7
2.1 Contexte	7
2.2 Travaux existants	9
2.3 Contributions	9
3 Groupes et corps interprétables dans des théories de corps	9
3.1 Questions	9
3.2 Théories de corps (valués)	10
3.3 Travaux existants	11
3.4 Contributions	12
4 Corps valués D-henseliens et types génériquement stables	13
4.1 Travaux existants	14
4.2 Questions	14
4.3 Contributions	14
5 Domination résiduelle dans les corps valués henseliens	16
5.1 Travaux existants	16
5.2 Résultats principaux	17
5.3 Contributions personnelles	18
II Théorie catégorique des systèmes	18

6	Point de vue doublement catégorique	18
6.1	Approche monoidale symétrique	18
6.2	Point de vue coalgébrique	19
6.3	Théorie synthétique des probabilités et du nondéterminisme, catégories de Markov	20
6.4	Théorie doublement catégorique des systèmes	21
6.5	Questions	21
6.6	Travaux existants	22
6.7	Contributions	22
	Bibliographie	23

Première partie

Théorie géométrique des modèles

La théorie des modèles du premier ordre¹ vise à étudier des structures et théories² (algébriques, combinatoires, etc.) en s'appuyant sur des outils de logique (du premier ordre). Dans sa version moderne, les objets centraux sont les *ensembles définissables*, c'est-à-dire les collections d'éléments définies par des formules du langage. En logique classique, les ensembles définissables forment des algèbres de Boole (intersection, complémentaire, union) ; par dualité de Stone, l'on peut donc s'intéresser aux espaces topologiques profinis³ associés. Ces espaces sont appelés *espaces de types*, et donnent un point de vue plus "géométrique" pour l'étude des ensembles définissables⁴.

Si la complexité combinatoire des ensembles définissables est faible, la théorie est considérée comme modérée. Par exemple, les *théories stables*, définies dans [She69], et étudiées plus en détail dans [She71], sont celles où l'on ne peut définir d'ordre total infini.

Exemple 0.1. — Dans les corps algébriquement clos, munis uniquement de la structure de corps, les seuls ensembles définissables sont les *constructibles*, c'est-à-dire les combinaisons booléennes de lieux d'annulation de polynômes. En particulier, on dit que la théorie *élimine les quantificateurs* : même en s'autorisant à utiliser des quantificateurs, les seuls ensembles que l'on peut définir par des formules du premier ordre sont déjà définissables sans quantificateurs.

— A l'inverse, dans l'anneau des entiers relatifs, la complexité de quantification n'a

1. Rappelons que cela signifie que les seuls quantificateurs autorisés sont ceux portant sur des éléments ; il n'y a pas de quantification sur les parties.

2. Pour cette partie, une théorie du premier ordre est une classe de structures du premier ordre définie par une collection d'axiomes du premier ordre.

3. C'est-à-dire compacts et dont les ouverts sont unions d'ouverts-fermés.

4. De même que l'étude des schémas affines peut être considérée comme plus "géométrique" que l'étude des anneaux commutatifs ; en fait, les *espaces profinis* sont des schémas affines où le faisceau d'anneaux peut être reconstruit à partir de la topologie, via les ouverts-fermés.

pas de borne, et est en lien avec des questions fines de calculabilité : les ensembles définissables par une formule existentielle sont exactement ceux qui sont récursivement énumérables, c'est-à-dire pour lesquels il existe une fonction calculable qui les énumère, etc.

Un principe général, la *trichotomie de Zilber*, affirme que le comportement d'une théorie modérée dépend du type de structures algébriques définissables⁵ qui y apparaissent : ou bien aucun groupe infini définissable, ou bien des groupes abéliens infinis définissables mais pas de corps infini définissable, ou bien des corps infinis définissables. Ces idées ont été formalisées dans divers contextes, à l'instar des géométries de Zariski⁶ [HZ96] ou des théories o-minimales⁷ [PS98]. Une question connexe, au coeur de mes travaux, est celle de la *classification des groupes et corps définissables*, ou interprétables⁸, dans une structure donnée.

1 Revêtements et groupoïdes définissables

Lorsque l'on étudie la structure fine des ensembles définissables dans une théorie ou structure donnée, la notion de *revêtement* apparaît assez vite. Etant donnée une structure \mathbb{U} , un *revêtement de \mathbb{U} via une⁹ nouvelle sorte S* est une structure \mathbb{U}' , dont l'ensemble sous-jacent est l'union disjointe de celui de \mathbb{U} et de S , telle que la structure définissable induite sur \mathbb{U} coïncide avec celle d'origine. On dit aussi que \mathbb{U} est *stablement plongée* dans \mathbb{U}' . Un fait important, qui explique la terminologie, est que, dans une structure stable, tout ensemble définissable est stablement plongé.

1.1 Revêtements internes et groupoïdes de liaison

Une classe de revêtements intéressante est celle des *revêtements internes*. Dans une structure ambiante donnée, un ensemble définissable X est *interne* à un ensemble définissable Y s'il existe une bijection définissable entre X et un ensemble définissable¹⁰ $Z \subseteq Y^k/E$, où k est un entier, et E une relation d'équivalence définissable sur Y^k .

Un point crucial est qu'une telle bijection définissable peut demander des paramètres (pour être définie) supplémentaires, par rapport à ceux utilisés pour définir X et Y .

Exemple 1.1. Considérons la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique nulle¹¹, notée DCF_0 . Cette théorie est stable, et élimine les quantificateurs.

5. C'est-à-dire, dont l'ensemble sous-jacent et les opérations sont définissables.

6. Cadre visant à capturer de manière abstraite le comportement géométrique des courbes algébriques.

7. Point de vue, modèle-théorique à l'origine, sur la géométrie et l'analyse réelles, consistant à restreindre les classes de fonctions et d'ensembles afin d'exclure les comportements pathologiques.

8. Un ensemble interprétable est un quotient d'ensemble définissable par une relation d'équivalence définissable.

9. Nous nous concentrerons ici sur le cas d'une seule nouvelle sorte ; généraliser la notion à plusieurs sortes, voire une infinité, ne pose pas de difficulté particulière.

10. L'on dit parfois "interprétable", car un quotient définissable est en jeu ; il y a une manière canonique d'étendre la structure définissable aux quotients définissables, appelés *imaginaires*.

11. Il s'agit de la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique nulle munis d'une dérivation,

Le corps des constantes, défini par l'équation différentielle $x' = 0$, est algébriquement clos, et sa structure induite est réduite aux opérations de corps. Considérons également l'ensemble X défini par l'équation $x' = 1$. Alors, par linéarité, tout élément de X fournit une bijection définissable entre X et le corps des constantes. Cependant, sans paramètres, il n'y a pas de fonctions définissables intéressante entre les deux.

Cette dépendance en les paramètres est contrôlée par un *groupoïde* de liaison, introduit par Hrushovski dans [HRU12], qui est une version intrinsèque des *groupes de liaison*, étudiés en théorie de la stabilité, notamment par Zilber [Zil80] et Poizat [Poi83], ce dernier développant une généralisation modèle-théorique de la théorie de Galois des corps, incluant les quotients définissables. Rappelons qu'un groupoïde est donné par une collection d'objets et de morphismes inversibles, avec une loi de composition associative et unitaire ; la principale différence avec la notion de groupe est que la composée de deux morphismes n'est définie que si le domaine de l'un est égale à l'image de l'autre. L'intérêt, ici comme dans d'autres domaines¹², est *l'absence de choix* à faire.

1.2 Questions

Etant donnée une structure \mathbb{U} et un ensemble A définissable sans paramètres, un revêtement (\mathbb{U}, S) de \mathbb{U} est dit *1-analysable au-dessus de A* s'il existe une fonction surjective définissable sans paramètres $f : S \rightarrow A$, dont les fibres S_a sont internes à \mathbb{U} .

Exemple 1.2. Dans la théorie des corps différentiellement clos, l'ensemble X défini par l'équation différentielle $(\frac{x'}{x})' = 0$ et la condition $x \neq 0$, donne un revêtement 1-analysable sur le corps des constantes C , via la fonction de dérivation logarithmique $x \in X \mapsto \frac{x'}{x} \in C$. En effet, pour tout $\lambda \in C$, l'ensemble $X_\lambda = \{x \neq 0 \mid x' = \lambda \cdot x\}$ est interne à C : toute solution définit, par multiplication, une bijection entre X_λ et $C \setminus \{0\}$.

Notons que X est un sous-groupe multiplicatif du corps différentiel ambiant, et s'inscrit dans la suite exacte courte de groupes abéliens suivante : $1 \rightarrow C^\times \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0$.

- Les constructions de Hrushovski peuvent-elles s'étendre au cas des revêtements 1-analysables ?
- Si oui, peut-on donner un critère pour qu'un revêtement 1-analysable soit en fait interne ?
- Y a-t-il des versions uniformes en familles ?

i.e. un endomorphisme additif vérifiant la formule de Leibniz, telle que toute équation différentielle polynomiale en une variable, non dégénérée, a "beaucoup" de solutions.

12. L'on pensera par exemple à la différence entre groupe fondamental et groupoïde fondamental en topologie algébrique, la première notion supposant de choisir un point base.

1.3 Travaux existants

- Dans [HRU12], Hrushovski démontre, entre autres choses¹³, une correspondance, pour toute structure \mathbb{U} , entre groupoïdes définissables¹⁴ *sans paramètres* dans \mathbb{U} et revêtements internes de \mathbb{U} à une sorte supplémentaire. L'idée cruciale est que les morphismes du groupoïde définissable sont des bijections définissables témoignant de l'internalité de la sorte supplémentaire.
- Dans [HM18], Haykazyan et Moosa démontrent d'une part que la correspondance de Hrushovski provient d'une équivalence de catégories, pour des bonnes notions de morphismes de revêtements internes¹⁵ et de morphismes de groupoïdes définissables. Fidèles au principe de ne pas faire de choix arbitraire, ils définissent un morphisme de groupoïdes comme, essentiellement, un *profoncteur* définissable, c'est-à-dire une catégorie étendant l'union disjointe en ajoutant des morphismes entre les objets des deux groupoïdes ; ils demandent par ailleurs des propriétés importantes d'homogénéité.
Par ailleurs, ils étendent la correspondance au cas de revêtements 1-analysables à fibres indépendantes¹⁶, c'est-à-dire qu'ils donnent une version "uniforme le long de familles définissables" de la construction.
- Dans sa thèse, Jimenez démontre un résultat uniforme [Jim20, Theorem 3.1.3] le long de familles de revêtements internes qu'il appelle *paires relativement internes*. Il construit également des *Delta* groupoïdes¹⁷, qu'il utilise pour caractériser l'internalité pour ses paires relativement internes, via une condition de dégénérescence. Cependant, comme expliqué dans la discussion [Jim20, Fin de la Section 3.2], ses constructions ne répondent pas à la question de non-canonicité des paramètres.

1.4 Contributions

Dans l'article [Wan21], je définis une notion de *groupoïde simplicial*¹⁸ définissable au-dessus d'un ensemble définissable A . Un tel objet est donné par :

1. Une famille \mathcal{G}_n , $n \geq 1$, de groupoïdes définissables sans paramètres, où, pour tout n , le groupoïde \mathcal{G}_n admet une partition définissable indexée par l'ensemble interprétable¹⁹ des parties de A de cardinal n .
2. Des morphismes $\iota_{n,m} : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_m$, pour $n < m$, entre groupoïdes définissables, au sens de Haykazyan et Moosa [HM18], c'est-à-dire donnés par une extension définissable

13. Il étudie également les liens avec les questions d'amalgamation, qui vont au-delà du cadre de ce rapport.

14. Avec une petite hypothèse technique, signalée par Haykazyan et Moosa.

15. En l'occurrence, il s'agit de fonctions entre les sortes supplémentaires, définissables dans un revêtement interne commun.

16. Condition forte, exprimant l'absence d'interaction, au niveau des ensembles définissables, entre les fibres.

17. Une notion similaire, mais plus simple, à celle de groupoïdes *simpliciaux*.

18. Qui verrait plutôt s'appeler Delta groupoïde, comme dans [Jim20].

19. En effet, cet ensemble est isomorphe au quotient de l'ensemble $A^{=n}$ des n -uplets de A sans répétition, par l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

de la catégorie définissable $\mathcal{G}_n \sqcup \mathcal{G}_m$, i.e. des collections de morphismes des objets de \mathcal{G}_n vers ceux de \mathcal{G}_m .

Je demande que ces morphismes de groupoïdes $\iota_{n,m}$ soient compatibles avec les partitions de \mathcal{G}_n et \mathcal{G}_m , que les fonctions à l'intérieur soient *injectives*, et que l'égalité $\iota_{n,m} \circ \iota_{k,n} = \iota_{k,m}$ soit vraie pour $k < n < m$, au sens de la composition de morphismes de groupoïdes (voir [HM18]).

Je définis ensuite une notion de *morphisme entre groupoïdes simpliciaux sur A*.

Je démontre alors les résultats suivants, pour toute \mathbb{U} et tout A :

- Il existe une correspondance entre revêtements 1-analysables sur A , uniformément finiment engendrés²⁰, localement stablement plongés²¹, et groupoïdes simpliciaux sur A vérifiant la propriété de l'union disjointe²².
 - Cette correspondance provient d'une équivalence de catégories, pour des catégories de revêtements 1-analysables et de groupoïdes simpliciaux *constituées d'isomorphismes*.
 - Les constructions se généralisent en supprimant la condition de finitude du côté des revêtements ; les groupoïdes simpliciaux obtenus ne sont alors que pro-définissables, i.e. obtenus par produits possiblement infinis d'ensembles définissables.
 - Je calcule ensuite les objets correspondants pour l'exemple 1.2, ainsi que pour la suite exacte courte de groupe abéliens $0 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \rightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \rightarrow 0$.
- Je montre, pour ces deux exemples, que les groupoïdes simpliciaux restreints aux degrés ≤ 3 suffisent à capturer la structure totale des revêtements : seule la loi de groupe compte, et elle est déjà encodée dans les degrés ≤ 3 .

Idées pour construire des groupoïdes simpliciaux :

- Suivant la suggestion de Hrushovski dans [HRU12], étant donné un revêtement 1-analysable (\mathbb{U}, S) sur un ensemble définissable A , je considère, pour toute partie finie $\bar{c} \subset A$, le revêtement *interne* défini par l'union des fibres $S_{\bar{c}} = \bigcup_{a \in \bar{c}} S_a$. La construction de Hrushovski s'applique alors, j'obtiens un groupoïde définissable avec les paramètres \bar{c} , que je note $\mathcal{G}_{\bar{c}}$.
- Je montre que, pour tout n , la construction ci-dessus peut se faire uniformément en $\bar{c} \subset A$ de cardinal n ; j'obtiens donc des groupoïdes définissables \mathcal{G}_n .
- Les morphismes $\iota_{n,m} : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_m$ sont construits à partir des inclusions $S_{\bar{c}} \hookrightarrow S_{\bar{c}'}$, pour $\bar{c} \subset \bar{c}' \subset A$ finies.

Cette construction est proche de celle de Jimenez ; la principale différence est que mes morphismes de groupoïdes sont des profoncteurs, et non pas simplement des foncteurs. C'était déjà un point crucial dans les travaux de Haykazyan et Moosa,

20. Condition technique de finitude.

21. Condition sur les revêtements internes intermédiaires.

22. Condition exprimant le fait que les objets en haut degré sont unions disjointes d'objets en bas degré.

qui faisait fonctionner leurs constructions.

Idées pour construire des revêtements 1-analysables : Etant donné un groupe simplicial définissable \mathcal{G} au-dessus d'un A , je construis un revêtement 1-analysable sur A comme suit :

- Je construis par induction transfinie un *système cohérent d'inclusions*, ce qui correspond à choisir un objet par composante connexe en chaque degré, ainsi qu'une famille cohérente d'injections parmi les fonctions des $\iota_{n,m}$, entre ces objets.
- Etant donné un système cohérent d'inclusions, je construit une sorte supplémentaire S , consistant à recoller les copies des objets choisis le long des injections de la famille. Par construction, la sorte S vient avec une surjection définissable $S \rightarrow A$, dont les fibres sont internes à \mathbb{U} .
- Pour montrer que cela ne dépend pas des choix faits, je construis par induction, étant donnés deux systèmes cohérents d'inclusions, une "famille cohérente d'isomorphismes partiels" entre eux, constituée de morphismes de \mathcal{G} . Une telle famille s'assemble alors en un isomorphisme de structures entre les extensions construites.
- Pour montrer que les structures que je construis sont bien des revêtements, j'applique un critère d'extension d'automorphismes [CH99, Appendix, Lemma 1], et j'utilise de nouveau une construction par induction transfinie.

Cette construction généralise celle de Haykazyan et Moosa [HM18], avec des conditions de compatibilité supplémentaires, automatiques pour eux vu leur hypothèse d'indépendance des fibres.

2 Configurations de groupe génériquement stables

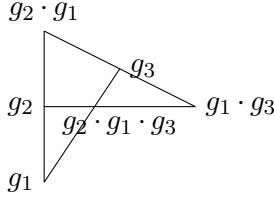
Le principe du théorème de configuration de groupe est de *détecter la présence d'un groupe définissable à partir de données combinatoires*. Ce résultat s'inscrit dans le domaine de la *théorie géométrique des modèles*, dont on rappelle qu'elle consiste à étudier les théories du premier ordre à travers les structures algébriques définissables qui y apparaissent.

2.1 Contexte

Une configuration de groupe est la donnée de 6 éléments vérifiant des propriétés d'indépendance et de dépendance bien spécifiques ; l'exemple essentiel est le suivant : soit G un groupe définissable dans une théorie stable²³, par exemple la théorie des corps

²³. Ceci signifie qu'aucune relation définissable n'induit une relation d'ordre total infini ; il s'agit d'une hypothèse forte de modération combinatoire.

algébriquement clos, et soient g_1, g_2, g_3 des éléments *génériques* de G , formant une *famille indépendante*²⁴. Alors, le diagramme ci-dessous est une configuration de groupe :



En effet, les deux propriétés définissant la notion de configuration de groupe *régulière*²⁵ sont les suivantes :

- Sur le diagramme, tout triplet de points non alignés forme une famille indépendante²⁶.
- Pour toute ligne du diagramme, chaque point est algébrique sur les deux autres²⁷.

L'énoncé du théorème de configuration de groupe pour les théories stables, attribué à Hrushovski, est le suivant :

Théorème 2.1. *Pour toute configuration de groupe (régulière) dans une théorie stable, il existe un groupe définissable²⁸ Γ et trois éléments g_1, g_2, g_3 du groupe Γ , génériques et indépendants, tels que la configuration de groupe initiale et celle de Γ construite à partir des g_i sont équivalentes, c'est-à-dire interalgébriques point à point.*

De plus, un tel groupe est essentiellement unique : étant données deux configurations de groupe équivalentes construites à partir d'éléments génériques indépendants pour deux groupes définissables Γ et Γ' , il existe une isogénie virtuelle²⁹ définissable entre Γ et Γ' .

Autrement dit, les exemples présentés plus haut sont essentiellement les seuls : dans une théorie stable, tout sextuplet d'éléments vérifiant les propriétés d'indépendance et d'algébricité ci-dessus provient de génériques indépendants d'un groupe définissable. Ce résultat a des conséquences remarquables : par exemple, l'existence de types réguliers localement modulaires implique l'existence de groupes abéliens infinis type-définissables avec des génériques réguliers. En d'autres termes, Hrushovski a utilisé un théorème de configuration de groupe pour prouver l'*existence de groupes avec certaines propriétés*.

24. Par exemple, si $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la conjonction de ces deux conditions correspond à demander que les g_i soient en position générale ; l'ensemble des triplets de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne vérifiant pas cette propriété est négligeable pour la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

25. Il existe en effet une définition, et un théorème, pour des *actions de groupe* plus générales qu'une action par translation d'un groupe sur lui-même ; nous l'ignorerons ici, malgré son importance.

26. Toute théorie stable vient avec une notion canonique d'indépendance ; une partie de la difficulté technique est de travailler avec des généralisations ayant un sens pour des théories instables.

27. Ce qui signifie qu'il est *d'orbite finie* sous l'action des automorphismes de la structure ambiante fixant les deux autres éléments ; de manière équivalente, il existe une formule ayant un nombre fini de solutions, parmi lesquelles le point en question, utilisant comme paramètres les deux autres éléments.

28. Techniquement, *type-définissable*, une variante légèrement plus générale, où l'on autorise les intersections infinies d'ensembles définissables.

29. Autrement dit, un sous-groupe normal de $\Gamma \times \Gamma'$ pour lequel les projections vers Γ et Γ' sont à fibres finies, et d'images d'indice fini.

2.2 Travaux existants

La seule variante du théorème de configuration de groupe démontrée, jusque-là, hors du cadre des théories stables, de Ben Yaacov-Tomasic-Wagner [BTW02], repose sur une hypothèse moins forte de *simplicité* de la théorie ambiante, au prix d'une conclusion moins forte également : le groupe obtenu n'est que "presque hyper-définissable".

2.3 Contributions

Dans l'article publié [Wan25a], je démontre une généralisation du théorème de configuration de groupe originel, en supposant uniquement que le sextuplet considéré définit un *type génériquement stable*, c'est-à-dire que les suites de copies indépendantes de ce sextuplet se comportent comme si elles étaient dans une théorie stable. L'énoncé est essentiellement le même, à ceci près que je donne un contrôle plus précis sur les paramètres/éléments utilisés dans la construction, qui peut être utile pour des applications du théorème. La structure de la preuve est similaire.

Au niveau technique, l'essentiel du travail a consisté à utiliser de manière précise les propriétés des types génériquement stables, en particulier la notion d'indépendance fournie par la théorie des modèles abstraite, qui se comporte *presque*³⁰ aussi bien que dans le cas des théories stables.

Pour ce qui est des applications, au vu des résultats obtenus dans des contextes stables en utilisant le théorème de configuration de groupe originel, cette généralisation est un pas vers le développement de résultats analogues reposant sur les types génériquement stables.

3 Groupes et corps interprétables dans des théories de corps

Dans [Wan25c], j'étudie la structure des groupes et des corps définissables/interprétables, à la fois dans des cadres abstraits et pour des exemples explicites de théories de corps valués.

3.1 Questions

Etant donnée une théorie de corps (en logique du premier ordre) T :

- Que peut-on dire des groupes définissables dans T ? Peut-on les comparer définisamment à des groupes algébriques (en coordonnées³¹)?
- Quid des corps définissables dans T ? Sont-ils réduits aux extensions finies³² du corps ambiant?

30. La subtilité technique qui a demandé le plus d'efforts est que l'on ne sait pas en général (voir [CGH25, Question 4.1]), qui donne une réponse positive pour les théories NTP₂) si la concaténation de deux copies indépendantes d'un type génériquement stable, aussi appelée *produit tensoriel* ou *produit de Morley*, est elle-même génériquement stable.

31. Les "groupes algébriques en coordonnées" sont toujours définissables, car les "variétés en coordonnées" et fonctions rationnelles le sont, puisque les opérations de corps font partie de la structure.

32. Qui sont toujours définissables, en choisissant des bases, au sens de l'algèbre linéaire.

- Que dire si l'on généralise ces questions au cas des groupes et corps *interprétables*, i.e. si l'on autorise les quotients d'ensembles définissables par relations d'équivalence définissables ?

3.2 Théories de corps (valués)

Pour la suite, un corps valué est donné par un corps K , un groupe abélien ordonné³³ Γ , que l'on notera multiplicativement ici, et un morphisme de groupes surjectif $|\cdot| : K^\times \rightarrow \Gamma$, appelé norme, vérifiant l'inégalité ultramétrique suivante : $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$. Usuellement, la norme est étendue en ajoutant un élément absorbant à Γ , égal à la norme de l'élément 0. On appelle Γ le groupe de valeurs.

Exemple 3.1. Les structures suivantes sont des corps valués :

- Pour tout nombre premier p , et tout réel r tel que $0 < r < 1$, le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} , muni de la norme p -adique $x \mapsto r^{v_p(x)}$, où $v_p(x)$ désigne la valuation p -adique de x . Le groupe de valeurs est $r^{\mathbb{Z}}$, isomorphe à \mathbb{Z} . A isomorphisme près, cette structure ne dépend pas du choix de r .
- Pour tout nombre premier p , et tout réel r avec $0 < r < 1$, le complété de \mathbb{Q} selon la norme p -adique, noté \mathbb{Q}_p . On l'appelle le corps des nombres p -adiques, et, à isomorphisme près, il ne dépend pas du choix de r .
- Pour tout corps K , le corps des fractions rationnelles $K(t)$, avec une norme associée à la valuation t -adique.
- Pour tout corps K , le corps des séries de Laurent $K((t))$, avec une norme t -adique, qui est le complété de $K(t)$.
- Pour tout corps K et tout groupe abélien ordonné Γ , le corps de séries de Hahn $K(X^\Gamma)$, dont les éléments sont les fonctions de Γ dans K à support co-bien ordonné (i.e. bien ordonné pour l'ordre dual de Γ) ; la somme est définie terme à terme, et le produit est calculé par convolution.

Dans un corps valué, l'inégalité ultramétrique entraîne que la boule unité fermée $\mathcal{O} = \{x : |x| \leq 1\}$ est un anneau local, dont l'idéal maximal \mathfrak{m} est la boule ouverte, $\mathfrak{m} = \{x : |x| < 1\}$. Le quotient \mathcal{O}/\mathfrak{m} est appelé *corps résiduel*.

Définition : Une théorie de corps (valué) est une théorie avec un corps (valué) définissable marqué^a.

a. De même qu'un espace topologique pointé est un espace topologique avec un point marqué.

Un point important est que le corps (valué) définissable en question peut avoir de la structure additionnelle ; l'enjeu est de comprendre comment étudier ces cas sans nécessairement passer par une analyse détaillée de ladite structure additionnelle.

33. L'on demande que l'ordre soit total, et compatible avec la loi de groupe.

3.3 Travaux existants

- Le premier résultat, dû à Hrushovski, inspiré par les idées de WEIL [Wei55], affirme que tout groupe définissable³⁴ dans un corps algébriquement clos pur est définissablement isomorphe à un groupe algébrique (en coordonnées). Cela utilise un théorème de "group chunk", qui est une manière de reconstruire un groupe définissable à partir de données génériques, similaire au théorème de configuration de groupe.
- Le résultat de Hrushovski a été utilisé par Poizat [Poi88], pour montrer que tout corps définissable dans un corps algébriquement clos pur est définissablement isomorphe à celui-ci. S'appuyant également sur ces idées, il a été prouvé dans [Pil88, Proposition 2.5], que tout groupe définissable dans une structure o-minimale est naturellement un groupe topologique, que tout corps définissable dans ce contexte est soit réel clos, soit algébriquement clos, et que, dans le cas du corps pur des nombres réels, les groupes définissables sont des groupes de Lie. Ces résultats ont ensuite été étendus dans [HP94, Theorems A and C], pour montrer que tout groupe de Nash sur un corps réel ou p-adique est localement isomorphe à l'ensemble des points d'un groupe algébrique, et que tout groupe définissable dans un corps pseudo-fini³⁵ est virtuellement isogène à l'ensemble des points rationnels d'un groupe algébrique. En ce qui concerne les corps différentiellement clos³⁶, Pillay PILLAY [Pil97, Corollary 4.2] a prouvé que tout groupe définissable connexe se plonge dans un groupe algébrique, et Suer SUER [Sue07, Theorem 3.36] a montré que les seuls corps définissables infinis, à isomorphisme définissable près, sont le corps différentiel et le corps des constantes.
- Le théorème le plus général jusqu'ici est [MOS18, Theorem 2.19]. Rappelons qu'un groupe discret est *moyennable* s'il existe une mesure de probabilité finiment additive, invariante à gauche, définie sur tous les sous-ensembles. Alors, un groupe définissable, dans une certaine théorie, est dit *définissablement moyennable* s'il admet une mesure de probabilité finiment additive, invariante à gauche, définie sur les ensembles définissables. Le théorème 2.19 de Montenegro, Onshuus et Simon traite des groupes définissablement moyennables dans toutes les théories de corps parfaits ayant des propriétés modèles-théoriques raisonnables³⁷.
- Dans le contexte plus spécifique des corps valués³⁸, sous certaines hypothèses techniques, la classification des corps interprétables a été réalisée dans [HHP22, Theorem 7.1] : les seuls corps interprétables sont les extensions finies du corps ambiant

34. En fait, "définissable" et "interprétable" sont équivalents dans les corps algébriquement clos : on dit que ceux-ci *éliminent les imaginaires*.

35. C'est-à-dire un corps infini vérifiant toutes les propriétés du premier ordre communes aux corps finis.

36. Qui sont les corps de caractéristique nulle munis d'une dérivation, et pour lesquels les équations différentielles algébriques ont "suffisamment de solutions".

37. En l'occurrence, qui sont NTP₂ et où les clôtures algébriques au sens de la théorie des modèles et au sens des corps coïncident.

38. Ultramétriques, pas nécessairement de rang un.

ou du corps résiduel. D'autres résultats incluent les travaux réalisés dans [PPP23], qui prouvent que les groupes définissables dans divers corps différentiels peuvent être définissablement plongés dans des groupes algébriques, et [HHP23, Theorem 1], montrant que les groupes définissablement semi-simples interprétables dans des enrichissements de corps valués algébriquement clos, réels clos ou p -adiquement clos, sont virtuellement isogènes à des produits de groupes linéaires sur le corps valué et sur le corps résiduel. Dans le cas spécifique des corps valués algébriquement clos purs, la classification des corps interprétables a été initialement prouvée dans [HR19], en utilisant une notion appelée métastabilité, qui se concentre sur les types génériquement stables. Enfin, dans le cadre de la 1-h-minimalité, une notion visant à capturer l'idée de géométrie modérée dans des contextes non archimédiens, il est montré dans [AH24] que, comme dans le cas réel, les groupes définissables admettent une structure de Lie, et que les seuls corps définissables sont les extensions finies du corps ambiant.

3.4 Contributions

- Mon travail est similaire à [MOS18, Theorem 2.19] : je démontre d'abord un théorème purement abstrait de construction de morphisme de groupes définissables [Wan25b, Théorème 3.1.47], faisant intervenir deux théories T_0 et T_1 , où T_0 est superstable³⁹, T_1 est NIP⁴⁰ et T_0 est une "restriction"⁴¹ de T_1 . Une notion clé est celle d'un ensemble définissable X qui *ne voit pas* un autre ensemble définissable Y : cela signifie essentiellement que toutes les fonctions définissables $X \rightarrow Y$ ont une image finie. Le résultat est alors le suivant : *tout groupe définissablement moyennable dans la théorie NIP admet un morphisme de groupes définissable vers un groupe de la théorie superstable, dont le noyau ne voit pas les ensembles définissables de la théorie superstable.*
- Ensuite, en appliquant ce théorème abstrait pour T_0 la théorie des corps algébriquement clos, j'obtiens un résultat très général [Wan25b, Théorème 3.2.2] pour des théories de corps *algébriquement bornés*⁴², et je peux couvrir plus de cas que [MOS18, Theorem 2.19] : sous des hypothèses modérées, *tous les groupes interprétables*⁴³ *définissablement moyennables admettent un morphisme définissable vers un groupe algébrique sur le corps ambiant, dont le noyau ne voit pas le corps.* Autrement dit, ces groupes interprétables définissablement moyennables admettent des suites exactes courtes, où le terme de droite est un sous-groupe d'un groupe algébrique, et le terme de gauche ne voit pas le corps.

39. Notion de modération légèrement plus forte que la stabilité.

40. Notion de modération plus faible que la stabilité, couvrant les théories o-minimales, notamment le corps des réels, bon nombre de théories de corps valués, dont les corps p -adiques, etc.

41. En un sens technique précis.

42. C'est-à-dire où les clôtures algébriques au sens de la théorie des modèles et de la théorie des corps coïncident.

43. Le théorème [MOS18, Theorem 2.19] ne traite que les cas des groupes *définissables* et noyaux finis.

- De même, en prenant pour T_0 la théorie des corps différentiellement clos, je démontre des résultats analogues [Wan25b, Théorème 3.3.2] pour les groupes interprétables dans les théories de corps différentiels algébriquement bornés⁴⁴.
- Pour ce qui est des corps interprétables, je démontre [Wan25b, Corollaire 3.2.19], sous hypothèses modérées, la dichotomie suivante : *un corps interprétable infini admet un plongement définissable dans une extension finie du corps ambiant, ou bien ne voit pas ce dernier, auquel cas on le qualifie de purement imaginaire*⁴⁵. Cela repose sur le résultat intermédiaire [Wan25b, Proposition 3.2.7] suivant : étant donnés deux corps infinis définissables F et K , *dans une théorie arbitraire*, si le groupe de transformations affines de F se plonge définissablement dans un groupe algébrique sur K , alors le corps F se plonge définissablement dans une extension finie de K .
- Je traite ensuite des exemples spécifiques : classes générales de corps valués henseliens [Wan25b, Théorèmes 3.3.32 et 3.3.33] recouvrant les exemples déjà connus dans la littérature, et corps valués différentiellement clos⁴⁶. Pour ces derniers, je démontre [Wan25b, Théorème 3.3.20] que les seuls corps infinis interprétables sont le corps valué, son corps des constantes, et le corps résiduel.

Ces résultats englobent dans un cadre général la grande majorité des exemples étudiés précédemment dans la littérature, et des preuves également ; le fait qu'ils portent sur les groupes *interprétables* permet des applications à l'étude des imaginaires, i.e. des quotients définissables. Par ailleurs, les théorèmes les plus abstraits [Wan25b, Théorème 3.1.47] [Wan25b, Théorème 3.1.30] peuvent s'appliquer à des cadres autres que des théories de corps.

4 Corps valués D-henseliens et types génériquement stables

Dans les corps valués différentiellement clos, la dérivation a un comportement générique par rapport à la valuation : toutes les équations différentielles non triviales possèdent des ensembles denses de solutions. Bien que cette hypothèse facilite l'étude par des méthodes de théorie des modèles, on peut vouloir considérer des corps valués différentiels où la dérivation est continue pour la topologie de la valuation, comportement plus satisfaisant d'un point de vue géométrique. Comme montré dans [Sca00], il existe toute une famille de théories complètes du premier ordre intéressantes pour les corps valués différentiels d'équicaractéristique 0, avec des dérivations 1-Lipschitz ; ces corps sont parfois appelés *D-Henséliens*. Je me suis concentré sur le cas le plus générique, à savoir celui où le corps résiduel, avec dérivation induite, est un corps différentiellement clos ; je

44. L'analogue des théories de corps algébriquement bornés prenant en compte la présence de la dérivation.

45. Ce qui est en général le cas pour le corps résiduel d'un corps valué hensélien, par exemple.

46. Ce sont les corps de caractéristique nulle munis d'une valuation et d'une dérivation qui "n'interagissent pas" : toutes les configurations permises par l'algèbre sont réalisées, en particulier les équations différentielles algébriques non triviales ont des ensembles de solutions denses pour la topologie de la valuation.

note cette théorie *VDF*. Des exemples de structures vérifiant ces axiomes sont donnés par les corps de séries de Hahn $K((t^\Gamma))$, où Γ est un groupe abélien ordonné divisible, le corps résiduel K est un corps différentiellement clos, et la dérivation est construite à partir de celle de K en dérivant terme à terme les coefficients.

4.1 Travaux existants

- Dans [Sca00], Scanlon donne une axiomatisation de *VDF*, montre qu'elle est complète, et prouve un résultat d'élimination des quantificateurs, i.e. donne une description de la structure des ensembles définissables ; en fait, il démontre ces résultats pour une classe générale de théories de corps valués avec dérivation 1-Lipschitz.
- Dans [Rid19], Rideau-Kikuchi démontre des résultats plus fins : description (en un certain sens) des imaginaires, i.e. des quotients d'ensembles définissables par relations d'équivalence définissables, densité des types définissables⁴⁷ dans les espaces de types, et métastabilité, qui correspond grossièrement à la présence de nombreux types génériquement stables⁴⁸.

Concernant les types génériquement stables dans les corps valués algébriquement clos, et la métastabilité, les travaux de Hrushovski et Loeser [HL16] montrent la richesse de la notion : ils construisent des analogues modèle-théoriques d'espaces de Berkovich, dont les points sont des types génériquement stables⁴⁹, et construisent ensuite des comparaisons avec les espaces de Berkovich usuels, ce qui leur permet de démontrer des résultats sur ces derniers, notamment l'existence de rétractions par déformation sur des complexes simpliciaux, à un niveau de généralité plus grand que ce qui était connu jusque-là.

4.2 Questions

Les questions que je considère sont les mêmes que pour [Wan25c], à savoir :

- Que peut-on dire des groupes définissables dans la théorie *VDF*? Ceux qui n'utilisent pas d'imaginaires se plongent-ils dans des groupes algébriques?
- Que dire des corps définissables?

4.3 Contributions

Dans le dernier chapitre de ma thèse [Wan25b, Chapitre 4], j'étudie les questions ci-dessus. Un point crucial est que les résultats de la section précédente ne s'appliquent pas pour la théorie *VDF* : un obstacle majeur est que la clôture algébrique dans *VDF* est possiblement plus grande que celle induite par la théorie des corps différentiellement

47. Qui ont de bonnes propriétés, notamment l'existence d'extensions canoniques lorsqu'on fait grossir le corps de base ; tout type génériquement stable est définissable.

48. Dont on rappelle qu'ils ont de très bonnes propriétés de régularité, d'un point de vue modèle-théorique.

49. En fait stablement dominés, ce qui est équivalent ici.

clos : en raison de la condition 1-Lipschitz, certaines équations différentielles ont une solution unique⁵⁰ ! Un exemple est donné dans [Rid19, Proposition 3.1].

Cependant, une propriété plus faible est vérifiée : tout élément du corps valué qui est algébrique⁵¹ sur un ensemble de paramètres est *différentiellement algébrique* sur celui-ci, c'est-à-dire qu'il est de rang fini au sens de *DCF*, la théorie des corps différentiellement clos. Ainsi, en travaillant « à données de rang fini près », j'effectue des constructions similaires à celles qui précédent. L'idée est de suivre la variante du théorème de configuration des groupes de Hrushovski avec des types réguliers et des poids⁵². Cependant, en raison de difficultés techniques⁵³, j'utilise une hypothèse supplémentaire sur le générique du groupe : je demande qu'il soit génériquement stable et *orthogonal à tous les types de rang fini*⁵⁴. Ainsi, je démontre les résultats suivants :

- Si G est un groupe définissable, vivant dans le corps valué, qui admet un point/type générique génériquement stable orthogonal à tous les types de rang fini, alors il admet un morphisme définissable⁵⁵ vers un groupe algébrique, dont le noyau est de rang fini. Voir [Wan25b, Theorem 4.1.32].
- Si F est un corps définissable, vivant dans le corps valué, qui possède un sous-anneau définissable R de même degré de transcendance différentiel non nul, où R admet un générique, additif et multiplicatif, génériquement stable et orthogonal aux types de rang fini, alors F est définisamment isomorphe au corps valué différentiel ambiant. Voir [Wan25b, Theorem 4.1.37].

Ces résultats sont, à ma connaissance, les premiers obtenus dans un cadre où les hypothèses usuelles sur la clôture algébrique ne sont pas vérifiées ; il s'agit donc d'un premier pas vers une étude plus fine des structures de ce genre. Par exemple, bien que les preuves n'utilisent pas à proprement parler la métastabilité de la théorie *VDF*, les bonnes propriétés des types génériquement stables sont cruciales, ce qui confirme, si besoin était, l'importance de ces derniers.

Une autre classe de structures intéressantes où ces idées pourraient s'adapter est celle des corps valués avec automorphismes⁵⁶, où, de même que pour *VDF*, certaines équations faisant intervenir l'automorphisme ont une unique solution.

50. Pour des raisons similaires au théorème de point fixe de Picard, et aux résultats d'unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires.

51. Au sens de la théorie des modèles, i.e. qui vérifie une formule ayant un nombre fini de solutions.

52. Pour les détails, voir par exemple [Bou89]

53. À savoir, parce que cette variante implique parfois de prendre des extensions déviantes des types en jeu.

54. Ceci correspond à la *stabilité par changement de base le long d'extensions* (de corps valués différentiels) *différentiellement algébriques*. L'exemple typique est le point/type générique de l'anneau de valuation, dont l'image dans le corps résiduel est le point/type différentiellement transcendant.

55. Défini au moins sur sa composante connexe.

56. Dont on demande qu'ils soient des isométries [AD10], ou bien qu'ils soient contractants [DHI25], pour la valuation.

5 Domination résiduelle dans les corps valués henseliens

La notion de *domination stable*, brièvement mentionnée plus haut, a été introduite par Haskell, Hrushovski et Macpherson [HHM08], pour étudier les corps valués algébriquement clos. Le point de départ est le constat suivant : les structures et théories stables ont de très bonnes propriétés de régularité modèle-théoriques ; cependant, bon nombre de théories et structures intéressantes n'étant pas stables, on ne peut appliquer telle quelle la théorie de la stabilité. L'idée est alors de considérer la *partie stable* d'une structure donnée, qui est la "plus grande sous-structure stable", et d'essayer de contrôler des comportements dans la structure totale via leur trace sur la partie stable.

Par exemple, dans les corps valués algébriquement clos, la partie stable est, à revêtement interne près, le corps résiduel, qui est un corps algébriquement clos *pur stamment plongé*⁵⁷. L'on comprend alors que seuls certains types, certaines extensions, pourront être bien contrôlé(e)s par la partie stable : dans un corps valué, les extensions *ramifiées* (qui font grossir le groupe de valeurs) ou *immédiates* (qui ne font grossir ni le corps résiduel, ni le groupe de valeurs) ont peu de chances d'être comprises via le corps résiduel.

On dit⁵⁸ qu'un type⁵⁹ est *stablement dominé* si *le comportement de ses extensions générériques est contrôlé par ce qu'elles induisent sur la partie stable*. L'exemple canonique, pour les corps valués algébriquement clos, est celui du type d'une *extension monogène purement résiduelle d'un corps sphériquement complet*⁶⁰. La notion a ensuite été généralisée à celle de *domination résiduelle*, dans des contextes divers [EHM19] [EHS] [Vic22] [KRV24].

5.1 Travaux existants

- Les travaux de Haskell, Hrushovski et Macpherson [HHM08] contiennent des résultats fondamentaux sur la domination stable, entre autres, des propriétés de changement de base pour les types stablement dominés et la métastabilité, relativement au groupe de valeurs, de la théorie des corps valués algébriquement clos. Un résultat particulièrement important pour la suite est le suivant :

Dans une théorie quelconque, si G est un groupe définissable admettant un générique stablement dominé p , alors il existe une famille de groupes définissables dans la partie stable \mathfrak{g}_i , et de morphismes définissables $f_i : G \rightarrow g_i$, tels que le type p est stablement dominé par la famille⁶¹ (f_i).

57. Ceci signifie que la structure induite par le corps valué est exactement la structure de corps, et rien de plus.

58. A certains détails techniques près, que nous ignorerons ici.

59. C'est-à-dire un point dans le spectre d'une algèbre d'ensembles définissables, i.e. une collection cohérente maximale d'ensembles définissables.

60. Il s'agit d'un analogue fort de la complétude dans le cadre général des corps valués ultramétriques, où l'on demande que toute chaîne de boules a un point d'accumulation ; cette notion est pertinente lorsque la valuation n'est pas discrète.

61. Ce qui signifie que le contrôle décrit plus haut n'a besoin que de l'information contenue dans ces fonctions.

- Plus récemment, Cubides Kovacsics, Rideau-Kikuchi et Vicaría [KRV25] ont défini une notion plus générale de *domination résiduelle* et montré l'équivalence, sous hypothèses techniques assez faibles, entre cette notion et la domination stable au sens des corps valués algébriquement clos, y compris pour des imaginaires⁶². Il s'agit du résultat le plus complet à ce jour.

5.2 Résultats principaux

Dans [MW25], nous démontrons les résultats suivants pour les corps valués henséliens d'équicaractéristique nulle :

- La domination résiduelle, pour les extensions régulières de type fini, est caractérisée par la conjonction de la propriété de la base séparée⁶³ et de l'absence de ramification. Voir [MW25, Corollary ???].
- La domination résiduelle au sens du corps valué henselien ambiant équivaut à la domination stable au sens de sa clôture algébrique⁶⁴, c'est-à-dire au sens de la théorie des corps valués algébriquement clos. Voir [MW25, ???]. Ce résultat, moins général que celui de [KRV25], a été obtenu indépendamment, avec des méthodes plus algébriques et plus simples. Il nous est utile pour ce qui suit.
- Supposons que la théorie considérée est NTP₂ (il s'agit d'une notion de modération assez faible, couvrant un grand nombre d'exemples). Si G est un groupe définissable, vivant dans le corps valué, possédant un générique résiduellement dominé, alors il existe un groupe algébrique sur le corps résiduel \mathfrak{g} et un morphisme de groupes définissable surjectif f de⁶⁵ G vers \mathfrak{g} , tel que tous les génériques de⁶⁶ G sont dominés par f . En particulier, tous les génériques de G sont résiduellement dominés. Voir ???
- Supposons maintenant que la théorie considérée est NIP⁶⁷, et soit G un groupe définissable ayant un générique résiduellement dominé, comme précédemment. Alors, il existe un groupe G_1 , définissable et stamment dominé au sens des corps valués algébriquement clos, et un morphisme de groupes définissables ι , de noyau fini, allant de⁶⁸ G dans G_1 , tel que l'image de tout générique de⁶⁹ G est générique dans G_1 au sens des corps valués algébriquement clos.

62. C'est-à-dire des classes d'équivalence de uplets du corps valué modulo relation d'équivalence définissable ; les uplets dans le corps résiduel sont un exemple relativement simple d'imaginaires dans les corps valués.

63. Ce qui signifie qu'il existe des bases pour lesquelles les normes de combinaisons linéaires se calculent explicitement en fonction des normes des coefficients.

64. Munie de l'unique valuation étendant la sienne, par henselianité ; cette structure est une "restriction" du corps henselien ambiant, car seules les formules sans quantificateurs sont prises en compte.

65. la composante connexe de

66. la composante connexe de

67. Notion plus restrictive que NTP₂, mais encore assez large.

68. la composante connexe de

69. la composante connexe de

De plus, le groupe G_1 et le morphisme ι sont essentiellement universels, et essentiellement fonctoriels vis-à-vis des morphismes surjectifs de groupes définissables. Voir ???

5.3 Contributions personnelles

Pour cet article, une bonne partie des idées ont été le résultat d'interactions avec ma co-auteure Dicle Mutlu ; les contributions que l'on peut m'attribuer sont les suivantes :

- En exploitant les propriétés fines de la générnicité dans le cadre NTP₂, je démontre que tout générique d'un groupe ayant un générique résiduellement dominé est lui-même résiduellement dominé.
- J'utilise le théorème du stabilisateur [MOS18, Theorem 2.15] pour construire des morphismes de groupes définissables à partir de données génériques, ce qui me permet de démontrer l'universalité et la fonctorialité des constructions de ???

Deuxième partie

Théorie catégorique des systèmes

La théorie catégorique des systèmes⁷⁰ vise à donner un cadre théorique unifié pour l'étude de systèmes dynamiques, les aspects techniques reposant sur des notions de théorie des catégories. Plusieurs directions ont émergé de ce champ de recherches au fil du temps ; les deux plus importantes, en ce qui concerne ma recherche, sont l'approche fondée sur les *catégories monoidales symétriques*, possiblement avec de la structure additionnelle (voir 6.1), et le *point de vue coalgébrique* sur les systèmes (voir 6.2). En effet, mon travail s'inscrit dans la nouvelle branche appelée *théorie doublement catégorique*, ou *doublement opéradique*, des systèmes [Mye21] [LM25], qui vise à combiner les deux approches susmentionnées dans un seul cadre ; il repose également sur la théorie synthétique des probabilités. Il me semble utile de commencer par rappeler en quoi consistent les points de vue "monoidal symétrique" et "coalgébrique", ainsi que la théorie synthétique des probabilités, avant d'expliquer les enjeux et questions en théorie doublement catégorique des systèmes, et mes contributions.

6 Point de vue doublement catégorique

6.1 Approche monoidale symétrique

Une catégorie monoidale symétrique est une structure contenant des objets, des morphismes entre ces objets, une opération de produit sur les objets (muni de symétries canoniques), et des opérations de composition séquentielle et parallèle sur les morphismes,

70. Voir par exemple l'introduction de [LM25].

vérifiant des propriétés algébriques raisonnables (associativité, etc.). L'intérêt pour la représentation de systèmes dynamiques est le suivant : si l'on peut représenter les espaces d'entrées ou de sorties possibles comme des objets, les systèmes comme des morphismes, et que l'on dispose effectivement d'opérations de compositions parallèle et séquentielle de systèmes, alors *la théorie des catégories monoidales symétriques fournit automatiquement une syntaxe et des outils de raisonnement*. Les plus emblématiques sont les *diagrammes de cordes*⁷¹, qui permettent des calculs rigoureux fondés sur des manipulations graphiques des diagrammes.

Une des applications les plus marquantes est le *ZX-calculus* [DKP07], utilisé pour représenter des calculs quantiques à base de qbits, dont les vertus pédagogiques, découlant vraisemblablement de l'approche graphique et de la relative simplicité du langage, ont été testées expérimentalement [Coe+25].

6.2 Point de vue coalgébrique

Pour illustrer le point de vue coalgébrique sur les systèmes, utilisons l'exemple des machines de Moore⁷².

Machines de Moore comme coalgèbres

Une machine de Moore est définie par des ensembles ^a d'états, entrées et sorties, notés respectivement S , I , et O , et des fonctions ^b de sortie $S \rightarrow O$, et de mise à jour d'état $S \times I \rightarrow S$.

L'observation est alors que, pour I et O fixés, la donnée d'une machine de Moore est équivalente à la donnée d'un ensemble S , et d'une fonction $S \rightarrow O \times S^I$, c'est-à-dire d'un objet S de la catégorie des ensembles, muni d'un morphisme $S \rightarrow F(S)$, où F désigne le foncteur $X \mapsto O \times X^I$. Autrement dit, une machine de Moore est une coalgèbre pour le foncteur F . Cette observation n'est pas restreinte au cas des machines de Moore, mais se décline sur un grand nombre d'exemples. Voir [Rut00, Section 3].

a. Plus généralement, des objets.

b. Plus généralement, des morphismes.

Partant de ce principe, l'on peut ensuite définir⁷³ un système comme étant une coalgèbre pour un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, étant entendu que la notion dépend fortement de F , en particulier, le choix de F détermine une "interface" commune. Une *simulation* d'un système vers un autre est alors simplement un morphisme de coalgèbres ; dans la plupart des exemples, cette notion traduit l'idée de "morphisme de comparaison entre espaces d'états, agissant identiquement sur les interfaces", compatible avec les dynamiques

71. Appelés *string diagrams* en anglais ; voir par exemple la page du nLab sur le sujet : ncatlab.org/nlab/show/string+diagram.

72. notion qui généralise celle d'automate fini déterministe

73. Il s'agit davantage d'*identifier une structure commune* à des théories de systèmes, d'*organiser l'information*, que de mener une étude axiomatique approfondie à partir de telles définitions.

des systèmes considérés". Des notions plus symétriques, de *bisimulation* et *bisimilarité*, peuvent ensuite être définies [Sta09].

6.3 Théorie synthétique des probabilités et du nondéterminisme, catégories de Markov

Avant de présenter la théorie doublement catégorique des systèmes, je souhaite m'attarder sur un élément important au niveau "monoidal symétrique", à savoir la *théorie synthétique des probabilités*, fondée sur la notion de catégorie de Markov [Fri20, Definition 2.1]. L'idée est d'axiomatiser le comportement des *noyaux de Markov* entre espaces mesurables, qui à chaque élément de la source associent une mesure de probabilité sur l'espace d'arrivée, qui "varie de manière mesurable" (voir [Per22, Section 1] et [Gir82]). Comme les noyaux de Markov sont munis d'opération de compositions parallèle et séquentielle, *le cadre monoidal symétrique est pertinent*. Cependant, de la structure additionnelle existe, en l'occurrence, pour tout espace mesurable X , l'unique noyau de Markov del_X , de X vers l'espace singleton, ainsi que la fonction mesurable diagonale $\text{copy}_X : X \rightarrow X \times X$. Abstrayant à partir de cet exemple :

Définition : Une *catégorie de Markov* est une catégorie monoidale symétrique où tout objet X est muni de morphismes $\text{del}_X : X \rightarrow 1$ et $\text{copy}_X : X \rightarrow X \otimes X$, telle que ces morphismes vérifient un certain nombre de propriétés algébriques simples.

Notons que ces axiomes admettent des modèles variés, dont certains représentent des notions de nondéterminisme *possibilistes*, c'est-à-dire où l'incertitude correspond à des *ensembles d'issues possibles*, sans mesure de probabilité pour la quantifier. L'opération consistant à associer à une mesure de probabilité (raisonnable) son *support* induit alors un foncteur entre les catégories de Markov correspondantes, représentant l'oubli d'information. Ces considérations ont une importance pour les applications à l'étude des systèmes d'IA : un certain nombre de résultats expérimentaux utilisant des méthodologies moins robustes⁷⁴, ou avec des analyses statistiques peu fournies, peuvent être considérés comme *possibilistes*, et ainsi avoir des conclusions en adéquation avec leurs méthodes.

Un point important, comme expliqué par Tobias Fritz dans l'introduction de [Fri20], est que cette approche est *axiomatique et synthétique* : il s'agit d'étudier le *comportement* des objets à un niveau relativement abstrait, plutôt que de s'appuyer sur des descriptions (ensemblistes par exemple) très précises. Parmi les exemples d'approches synthétiques fructueuses en mathématiques, on pourra penser à la théorie des *catégories abéliennes*, qui donne un cadre efficace pour traiter des questions d'algèbre homologique, à la théorie des *infini-cosmos* [RV22], qui axiomatise non pas les infini-catégories, mais les univers dans lesquels elles interagissent en tant qu'objets, appelés infini-cosmos⁷⁵.

74. Faute de moyens, parfois.

75. Ce point de vue permet un traitement *indépendant du modèle combinatoire* choisi pour définir ce qu'est une infini-catégorie, ce qui a son importance étant donné la pluralité des modèles existants.

6.4 Théorie doublement catégorique des systèmes

Comme mentionné plus haut, la théorie doublement catégorique des systèmes vise à combiner un point de vue sur la *composition* de systèmes et des notions de *comparaisons*, ou *simulations généralisées* entre systèmes. L'un des objectifs est de donner des principes et méthodes, étayés par la théorie, pour la *modélisation collaborative* ; les projets les plus saillants dans ce domaine sont ModelCollab [25] et CatColab [Car24].

Au niveau technique, cela repose sur l'utilisation de *catégories doubles*⁷⁶.

Catégories doubles et simulations généralisées :

- Une catégorie double (stricte) est définie par deux catégories sur la même classe d'objets, parfois appelées les catégories *verticale* et *horizontale*, ainsi que la donnée de 2-cellules, pour tout quadruplet de morphismes formant les côtés parallèles d'un carré. Les 2-cellules sont parfois appelées *carrés*, et sont munies d'opération de composition verticale et horizontale, associatives unitaires, satisfaisant la loi d'échange.
- Etant donnés des systèmes S et T , vus comme cellules de dimension 1 dans la catégorie double en jeu, un *comportement* de forme S dans T , ou *simulation généralisée* de S vers T , ou *morphisme de systèmes* de S vers T , est défini comme étant une 2-cellule. Ainsi, le principe est de construire des catégories doubles où l'une des directions encode la composition de systèmes, et l'autre les simulations généralisées entre interfaces, et entre systèmes. *La loi d'échange représente alors une condition de compatibilité cruciale entre composition de systèmes et composition de simulations généralisées*.
- Une idée importante est que chaque système *représente* un type de comportement, et une question (cf [Mye23, Fin de la Section 3.5]) est de trouver des systèmes (nécessairement simples) représentant les notions de *trajectoires*, nondéterministes en l'occurrence.
- Remarquons que la notion de catégorie double est plus générale que celle, plus courante, de 2-catégorie^a; la différence n'est pas anecdotique, car les catégories doubles permettent *considérer des simulations généralisées entre systèmes n'ayant pas la même interface*.

a. Voir ncatlab.org/nlab/show/2-category

6.5 Questions

Questions :

- Comment définir une notion de "simulation généralisée" entre systèmes non-déterministes (stochastiques, possibilistes, etc.) pouvant inclure du nondéterminisme, dans un cadre doublement catégorique ?

76. Voir ncatlab.org/nlab/show/double+category ou [DP93, Introduction] pour plus de détails

- Comment répondre à la première question de manière paramétrique/fonctorielle en la notion de nondéterminisme ?
- Comment capturer, dans une définition uniforme, les systèmes à temps discret et à temps continu ?

6.6 Travaux existants

- Dans [BC18], une catégorie (monoidale symétrique) double est construite, où une direction encode des processus de Markov ouverts, donc des systèmes probabilistes, et l'autre des fonctions de *coarse-graining*. La principale restriction est que ces fonctions sont déterministes. Un autre point est la focalisation sur les compositions séquentielle et parallèle, aux dépens des schémas de composition plus généraux.
- Dans [Mye23] et [LM25], les constructions utilisent la notion de *monade communative* pour le nondéterminisme ; elles donnent bien des catégories doubles, mais la notion de simulation généralisée est trop restrictive, comme expliqué dans [Mye23, Fin de la section 3.5].

6.7 Contributions

Dans [Wan25d], je construis, étant donné une catégorie de Markov avec lois conditionnelles⁷⁷, notée \mathcal{C} , et un graphe orienté acyclique \mathcal{G} , une théorie de systèmes dynamiques, en un sens très proche de ce qui est appelé "module de systèmes"⁷⁸ dans [LM25], qui répond à la question posée dans [Mye23, Fin de la Section 3.5], i.e. qui autorise des trajectoires, et plus généralement des comportements, "vraiment nondéterministes".

Cette construction permet de capturer des classes d'exemples précédemment non couvertes, ou seulement restreinte aux comportements déterministes, par la théorie doublument catégorique des systèmes :

- Les systèmes (ouverts) gouvernés par des Equations Différentielles Stochastiques.
- Les automates nondéterministes.
- Les processus de décision de Markov partiellement observables (i.e. processus de Markov pouvant interagir avec un environnement extérieur).

Au niveau technique, mes constructions reposent sur un certain nombre d'idées.

Idées :

1. La catégorie de Markov \mathcal{C} avec lois conditionnelles représente la notion de nondéterminisme de la théorie de systèmes à construire.
2. Le graphe \mathcal{G} représente la notion de temps considérée ; pour des raisons propres

⁷⁷. Cette condition étant la version synthétique de l'existence de lois conditionnelles au sens usuel.

⁷⁸. A absence d'identités strictes près pour l'une des directions ; j'obtiens ce que j'appelle des *semimodules* de systèmes.

au nondéterminisme ^a, et par absence de structure monoidale close ou cartésienne close pertinente ^b, je traite le temps de manière externe à \mathcal{C} .

3. L'existence de lois conditionnelles dans \mathcal{C} permet de définir la composée verticale des 2-cellules, ce qui correspond à *construire des trajectoires jointes de systèmes composés*, en faisant une *hypothèse d'indépendance conditionnelle des composants relativement à l'information aux interfaces*.
4. A partir de l'idée du point ci-dessus, l'essentiel du travail technique consiste à vérifier les propriétés algébriques requises ; associativité et échange demandent le plus d'efforts.
5. Afin de simplifier la rédaction, ainsi que les démonstrations futures de fonctionnalité de la construction vis-à-vis de \mathcal{C} et de \mathcal{G} , je construis d'abord des *catégories triples*, où la dimension supplémentaire sert à gérer le temps, avant d'en déduire les catégories doubles voulues comme catégories de foncteurs "de source \mathcal{G} " à valeurs dans ces catégories triples.

a. Précisément, le fait qu'une loi sur un produit contienne plus d'information que la donnée de ses marginales.

b. C'est-à-dire où les espaces de morphismes seraient représentés par des objets de la catégorie elle-même.

Une observation intéressante est que le gros des calculs repose sur l'utilisation des propriétés formelles de l'indépendance conditionnelle, et que lesdites propriétés sont très similaires aux propriétés des notions d'indépendance utilisées dans mes travaux précédents, en théorie des modèles. Il ne s'agit pas d'une coïncidence : d'après l'article [Yaa13], l'indépendance conditionnelle de variables aléatoires (à valeurs dans un espace métrique) est une instance, en théorie des modèles continue, des notions d'indépendance générales présentes dans mes travaux en théorie des modèles.

Bibliographie

- [25] *ModelCollab*. TypeScript. 2025. URL : <https://github.com/UofS-CEPHIL/modelcollab>.
- [AD10] S. AZGIN et L. van den DRIES. « Elementary theory of valued fields with a valuation-preserving automorphism ». 9.4 (2010), p. 1-35.
- [AH24] J. P. ACOSTA LÓPEZ et A. HASSON. « On groups and fields definable in 1-h-minimal fields ». *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* (2024).
- [BC18] J. C. BAEZ et K. COURSER. « Coarse-Graining Open Markov Processes ». arXiv :1710.11343 (nov. 2018). arXiv :1710.11343 [math-ph]. URL : <http://arxiv.org/abs/1710.11343>.
- [Bou89] E. BOUSCAREN. « The Group Configuration—after E. Hrushovski ». 1989. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118803539>.

- [BTW02] I. BEN-YAACOV, I. TOMAŠIĆ et F. O. WAGNER. « The Group Configuration in Simple Theories and Its Applications ». *The Bulletin of Symbolic Logic* 8.2 (2002), p. 283-298. URL : <http://www.jstor.org/stable/2693967> (visité le 27/09/2024).
- [Car24] K. CARLSON. *Introducing CatColab*. 2024. URL : <https://topos.institute/blog/2024-10-02-introducing-catcolab/>.
- [CGH25] G. CONANT, K. GANNON et J. E. HANSON. « Generic stability, randomizations and NIP formulas ». *Journal of Mathematical Logic* (2025), p. 2550016.
- [CH99] Z. CHATZIDAKIS et E. HRUSHOVSKI. « Model theory of difference fields ». *Transactions of the AMS* 351.8 (1999), p. 2997-3071.
- [Coe+25] B. COECKE et al. « High schoolers excel at Oxford quantum course using pictorial mathematics ». arXiv :2512.00141 (nov. 2025). arXiv :2512.00141 [physics]. URL : <http://arxiv.org/abs/2512.00141>.
- [DHI25] Y. DOR, Y. HALEVI et W. an appendix by ITAY KAPLAN. « CONTRACTING ENDOMORPHISMS OF VALUED FIELDS ». *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 24.5 (2025), p. 2047-2106.
- [DKP07] V. DANOS, E. KASHEFI et P. PANANGADEN. « The measurement calculus ». *J. ACM* 54.2 (avr. 2007), 8-es.
- [DP93] R. DAWSON et R. PARE. « General associativity and general composition for double categories ». *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 34.1 (1993), p. 57-79.
- [EHM19] C. EALY, D. HASKELL et J. MAŘÍKOVÁ. « Residue field domination in real closed valued fields ». *Notre Dame J. Form. Log.* 60.3 (2019), p. 333-351. URL : <https://doi-org.libaccess.lib.mcmaster.ca/10.1215/00294527-2019-0015>.
- [EHS] C. EALY, D. HASKELL et P. SIMON. « Residue field domination in some henselian valued fields ». (). URL : <https://arxiv.org/abs/2212.05188>.
- [Fri20] T. FRITZ. « A synthetic approach to Markov kernels, conditional independence and theorems on sufficient statistics ». *Advances in Mathematics* 370 (2020), p. 107239. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870820302656>.
- [Gir82] M. GIRY. « A categorical approach to probability theory ». *Categorical Aspects of Topology and Analysis*. Sous la dir. de B. BANASCHEWSKI. T. 915. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1982, p. 68-85. URL : <http://link.springer.com/10.1007/BFb0092872>.
- [HHM08] D. HASKELL, E. HRUSHOVSKI et D. MACPHERSON. *Stable Domination and Independence in Algebraically Closed Valued Fields*. Lect. Notes Log., Assoc. Symb. Log.; Cambridge University Press, 2008.

- [HHP22] Y. HALEVI, A. HASSON et Y. PETERZIL. « Intepretable fields in various valued fields ». *Adv. Math.* 404 (2022), Paper No. 108408, 58.
- [HHP23] Y. HALEVI, A. HASSON et Y. PETERZIL. « Semisimple groups interpretable in various valued fields » (2023). arXiv : 2309.02727.
- [HL16] E. HRUSHOVSKI et F. LOESER. *Non-archimedean tame topology and stably dominated types*. T. 192. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016, p. vii+216.
- [HM18] L. HAYKAZYAN et R. MOOSA. « Functoriality and uniformity in Hrushovski's groupoid-cover correspondence ». *Annals of Pure and Applied Logic* 169.8 (août 2018), p. 705-730.
- [HP94] E. HRUSHOVSKI et A. PILLAY. « Groups definable in local fields and pseudo-finite fields. » *Israel Journal of Mathematics* 85.1–3 (1994), p. 203-262.
- [HR19] E. HRUSHOVSKI et S. RIDEAU-KIKUCHI. « Valued fields, metastable groups ». *Selecta Math. (N.S.)* 25.3 (2019), Paper No. 47, 58.
- [HRU12] E. HRUSHOVSKI. « Groupoids, imaginaries and internal covers ». *Turkish Journal of Mathematics* 36.2 (jan. 2012), p. 173-198.
- [HZ96] E. HRUSHOVSKI et B. ZILBER. « Zariski Geometries ». *Journal of the AMS* 9 (1996).
- [Jim20] L. JIMENEZ. « Internality in Families ». en. thesis. University of Notre Dame, 2020. URL : https://curate.nd.edu/articles/thesis/Internality_in_Families/24822435/1.
- [KRV24] P. KOVACSICS, S. RIDEAU-KIKUCHI et M. VICARÍA. « On orthogonal types to the value group and residual domination » (2024).
- [KRV25] P. C. KOVACSICS, S. RIDEAU-KIKUCHI et M. VICARÍA. « On residual domination and types orthogonal to the value group ». arXiv :2410.22712 (oct. 2025). arXiv :2410.22712 [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2410.22712>.
- [LM25] S. LIBKIND et D. J. MYERS. « Towards a double operadic theory of systems » (mai 2025). arXiv :2505.18329 [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2505.18329>.
- [MOS18] S. MONTENEGRO, A. ONSHUUS et P. SIMON. « Stabilizers, NTP₂ groups with f-generics and PRC fields ». *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 19 (2018), p. 821-853.
- [MW25] D. MUTLU et P. Z. WANG. « Residually Dominated Groups in Henselian Valued Fields of Equicharacteristic Zero ». arXiv :2502.08530 (fév. 2025). arXiv :2502.08530 [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2502.08530>.
- [Mye21] D. J. MYERS. « Double Categories of Open Dynamical Systems (Extended Abstract) ». *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 333 (fév. 2021). arXiv :2005.05956 [math], p. 154-167.

- [Mye23] D. J. MYERS. *Categorical Systems Theory*. In Preparation, 2023. URL : <http://davidjaz.com/Papers/DynamicalBook.pdf>.
- [Per22] P. PERRONE. « Markov Categories and Entropy ». *IEEE Transactions on Information Theory* 70 (2022), p. 1671-1692. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:254974204>.
- [Pil88] A. PILLAY. « On groups and fields definable in o -minimal structures ». *Journal of Pure and Applied Algebra* 53.3 (1988), p. 239-255.
- [Pil97] A. PILLAY. « Some foundational questions concerning differential algebraic groups ». *Pacific Journal of Mathematics* 179 (1997), p. 179-200. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121980936>.
- [Poi83] B. POIZAT. « Une théorie de Galois imaginaire ». en. *The Journal of Symbolic Logic* 48.4 (déc. 1983), p. 1151-1170.
- [Poi88] B. POIZAT. « MM. Borel, Tits, Zil’ber et le Général Nonsense ». *J. Symb. Log.* 53.1 (1988), p. 124-131.
- [PPP23] Y. PETERZIL, A. PILLAY et F. POINT. « On definable groups in real closed fields with a generic derivation, and related structures » (2023). arXiv : 2208.08293.
- [PS98] Y. PETERZIL et S. STARCHENKO. « A trichotomy theorem for o -minimal structures ». *Proceedings of the London Mathematical Society* 77.3 (1998), p. 481-523. URL : <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/S0024611598000549>.
- [Rid19] S. RIDEAU-KIKUCHI. « Imaginaries and invariant types in existentially closed valued differential fields ». *J. Reine Angew. Math.* 750 (2019), p. 157-196.
- [Rut00] J. J. M. M. RUTTEN. « Universal coalgebra : a theory of systems ». *Theoretical Computer Science. Modern Algebra* 249.1 (oct. 2000), p. 3-80.
- [RV22] E. RIEHL et D. VERITY. *Elements of infinity-Category Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 2022. URL : <https://www.cambridge.org/core/books/elements-of-category-theory/DAC48C449AB8C2C1B1E528A49D27FC6D>.
- [Sca00] T. SCANLON. « A model complete theory of valued D -fields ». *J. Symb. Log.* 65.4 (2000), p. 1758-1784.
- [She69] S. SHELAH. « Categoricity of classes of models ». *PhD Thesis, Hebrew University of Jerusalem* (1969). URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:126141507>.
- [She71] S. SHELAH. « Stability, the f.c.p., and superstability; model theoretic properties of formulas in first order theory ». 3.3 (1971), p. 271-362.
- [Sta09] S. STATON. « Relating Coalgebraic Notions of Bisimulation ». en. *Algebra and Coalgebra in Computer Science*. Sous la dir. d'A. KURZ, M. LENISA et A. TARLECKI. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009, p. 191-205.

- [Sue07] S. SUER. « Model Theory of Differentially Closed Fields With Several Commuting Derivations ». *PhD Thesis* (2007). URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:126141507>.
- [Vic22] M. VICARIA. « Residue field domination in henselian valued fields of equi-characteristic zero, <https://arxiv.org/pdf/2109.08243.pdf> » (2022).
- [Wan21] P. WANG. « Extending Hrushovski’s groupoid-cover correspondence using simplicial groupoids ». *Annals of Pure and Applied Logic* 172.7 (2021), p. 102970.
- [Wan25a] P. WANG. « THE GROUP CONFIGURATION THEOREM FOR GENERICALLY STABLE TYPES ». en. *The Journal of Symbolic Logic* 90.2 (2025), p. 681-724.
- [Wan25b] P. WANG. « Variations on the group configuration ». Theses. ENS-PSL, mai 2025. URL : <https://hal.science/tel-05419277>.
- [Wan25c] P. Z. WANG. « On groups and fields interpretable in NTP_2 fields ». arXiv :2402.09143 (jan. 2025). arXiv :2402.09143 [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2402.09143>.
- [Wan25d] P. Z. WANG. « Nondeterministic Behaviours in Double Categorical Systems Theory ». arXiv :2502.02517 (fév. 2025). arXiv :2502.02517 [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2502.02517>.
- [Wei55] A. WEIL. « On algebraic groups of transformations ». 77 (1955), p. 355-391.
- [Yaa13] I. B. YAACOV. « On theories of random variables ». en. *Israel Journal of Mathematics* 194.2 (mars 2013), p. 957-1012.
- [Zil80] B. I. ZILBER. « Totally categorical theories : Structural properties and the non-finite axiomatizability ». en. *Model Theory of Algebra and Arithmetic*. Sous la dir. de L. PACHOLSKI, J. WIERZEJEWSKI et A. J. WILKIE. Berlin, Heidelberg : Springer, 1980, p. 381-410.