

Rapport sur les travaux effectués

Paul Wang

1 Contexte : Théorie géométrique des modèles

La théorie des modèles (du premier ordre) vise à étudier des structures et théories (algébriques, combinatoires, etc.) en s'appuyant sur des outils de logique (du premier ordre). Dans sa version moderne, les objets centraux sont les *ensembles définissables*, c'est-à-dire les collections d'éléments définies par des formules du langage. Si la complexité combinatoire des ensembles définissables est faible, la théorie est considérée comme modérée. Par exemple, les *théories stables*, définies dans [She69], et étudiées plus en détail dans [She71], sont celles où l'on ne peut définir d'ordre total infini.

En logique classique, les ensembles définissables forment des algèbres de Boole (intersection, complémentaire, union) ; par dualité de Stone, l'on peut donc s'intéresser aux espaces topologiques profinis¹ associés. Ces espaces sont appelés *espaces de types*, et donnent un point de vue plus "géométrique" pour l'étude des ensembles définissables².

Un principe général, la *trichotomie de Zilber*, affirme que le comportement d'une théorie modérée dépend du type de structures algébriques définissables³ qui y apparaissent : ou bien aucun groupe infini définissable, ou bien des groupes abéliens infinis définissables mais pas de corps infini définissable, ou bien des corps infinis définissables. Ces idées ont été formalisées dans divers contextes, à l'instar des géométries de Zariski⁴ [HZ96] ou des théories o-minimales⁵ [PS98]. Une question connexe, au coeur de mes travaux, est celle de la *classification des groupes et corps définissables*, ou interprétables⁶, dans une structure donnée.

1. C'est-à-dire compacts et dont les ouverts sont unions d'ouverts-fermés

2. De même que l'étude des schémas affines peut être considérée comme plus "géométrique" que l'étude des anneaux commutatifs ; en réalité, les espaces profinis sont des schémas affines où le faisceau d'anneaux peut être intégralement reconstruit à partir de la topologie, via les ouverts-fermés.

3. C'est-à-dire, dont l'ensemble sous-jacent et les opérations sont définissables.

4. Cadre visant à capturer de manière abstraite le comportement géométrique des courbes algébriques.

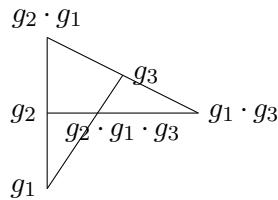
5. Point de vue, modèle-théorique à l'origine, sur la géométrie et l'analyse réelles, consistant à restreindre les classes de fonctions et d'ensembles afin d'exclure les comportements pathologiques.

6. Un ensemble interprétable est un quotient d'ensemble définissable par une relation d'équivalence définissable.

- 2 Article publié : Extending Hrushovski's groupoid-cover correspondence using simplicial groupoids
- 3 Article publié : The group configuration theorem for generically stable types

Le principe du théorème de configuration de groupe est de *déetecter la présence d'un groupe définissable à partir de données combinatoires*. Ce résultat s'inscrit dans le domaine de la *théorie géométrique des modèles*, mentionnée plus haut, qui étudie les théories du premier ordre à travers les structures algébriques définissables qui y apparaissent.

Une configuration de groupe est la donnée de 6 éléments vérifiant des propriétés d'indépendance et de dépendance bien spécifiques ; l'exemple essentiel est le suivant : soit G un groupe définissable dans une théorie stable⁷, par exemple la théorie des corps algébriquement clos, et soient g_1, g_2, g_3 des éléments *génériques* de G , formant une *famille indépendante*⁸. Alors, le diagramme ci-dessous est une configuration de groupe :



En effet, les deux propriétés définissant la notion de configuration de groupe *régulière*⁹ sont les suivantes :

- Sur le diagramme, tout triplet de points non alignés forme une famille indépendante¹⁰.
- Pour toute ligne du diagramme, chaque point est algébrique sur les deux autres¹¹.

L'énoncé du théorème de configuration de groupe pour les théories stables, attribué à Hrushovski, est le suivant :

7. Ceci signifie qu'aucune relation définissable n'induit une relation d'ordre total infini ; il s'agit d'une hypothèse forte de modération combinatoire.

8. Par exemple, si $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la conjonction de ces deux conditions correspond à demander que les g_i soient en position générale ; l'ensemble des triplets de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne vérifiant pas cette propriété est négligeable pour la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

9. Il existe en effet une définition, et un théorème, pour des *actions de groupe* plus générales qu'une action par translation d'un groupe sur lui-même ; par souci de concision, les détails ne seront pas mentionnés.

10. Toute théorie stable vient avec une notion canonique d'indépendance ; une partie de la difficulté technique est de travailler avec des généralisations ayant un sens pour des théories instables.

11. Ce qui signifie qu'il est *d'orbite finie* sous l'action des automorphismes de la structure ambiante fixant les deux autres éléments ; de manière équivalente, il existe une formule ayant un nombre fini de solutions, parmi lesquelles le point en question, utilisant comme paramètres les deux autres éléments.

Théorème 3.1. *Pour toute configuration de groupe (régulière) dans une théorie stable, il existe un groupe définissable¹² Γ et trois éléments g_1, g_2, g_3 du groupe Γ , génériques et indépendants, tels que la configuration de groupe initiale et celle de Γ construite à partir des g_i sont équivalentes, c'est-à-dire interalgébriques point à point.*

De plus, un tel groupe est essentiellement unique : étant données deux configurations de groupe équivalentes construites à partir d'éléments génériques indépendants pour deux groupes définissables Γ et Γ' , il existe une isogénie virtuelle¹³ définissable entre Γ et Γ' .

Autrement dit, les exemples présentés plus haut sont essentiellement les seuls : dans une théorie stable, tout sextuplet d'éléments vérifiant les propriétés d'indépendance et d'algébricité ci-dessus provient de génériques indépendants d'un groupe définissable. Ce résultat a des conséquences remarquables : par exemple, l'existence de types réguliers localement modulaires implique l'existence de groupes abéliens infinis type-définissables avec des génériques réguliers. En d'autres termes, Hrushovski a utilisé un théorème de configuration de groupe pour *prouver l'existence de groupes avec certaines propriétés*.

La seule variante du théorème de configuration de groupe démontrée, jusque-là, hors du cadre des théories stables, de Ben Yaacov-Tomasic-Wagner [BTW02], repose sur une hypothèse moins forte de *simplicité* de la théorie ambiante, au prix d'une conclusion moins forte également : le groupe obtenu n'est que "presque hyper-définissable".

3.1 Contributions

Dans l'article publié [Wan25a], je démontre une généralisation du théorème de configuration de groupe originel, en supposant uniquement que le sextuplet considéré définit un *type génériquement stable*, c'est-à-dire que les suites de copies indépendantes de ce sextuplet se comportent comme si elles étaient dans une théorie stable. L'énoncé est essentiellement le même, à ceci près que je donne un contrôle plus précis sur les paramètres/éléments utilisés dans la construction, qui peut être utile pour des applications du théorème. La structure de la preuve est similaire.

Au niveau technique, l'essentiel du travail a consisté à utiliser de manière précise les propriétés des types génériquement stables, en particulier la notion d'indépendance fournie par la théorie des modèles abstraite, qui se comporte *presque*¹⁴ aussi bien que dans le cas des théories stables.

Pour ce qui est des applications, au vu des résultats obtenus dans des contextes stables en utilisant le théorème de configuration de groupe originel, cette généralisation est un pas vers le développement de résultats analogues reposant sur les types génériquement stables.

12. Techniquement, *type-définissable*, une variante légèrement plus générale, où l'on autorise les intersections infinies d'ensembles définissables.

13. Autrement dit, un sous-groupe normal de $\Gamma \times \Gamma'$ pour lequel les projections vers Γ et Γ' sont à fibres finies, et d'images d'indice fini.

14. La subtilité technique qui a demandé le plus d'efforts est que l'on ne sait pas en général (voir [CGH25, Question 4.1], qui donne une réponse positive pour les théories NTP₂) si la concaténation de deux copies indépendantes d'un type génériquement stable, aussi appelée *produit tensoriel* ou *produit de Morley*, est elle-même génériquement stable.

4 Article soumis : On groups and fields interpretable in NTP₂ fields

Dans [Wan25c], j'étudie la structure des groupes et des corps définissables/interprétables, à la fois dans des cadres abstraits et pour des exemples explicites de théories du premier ordre.

4.1 Questions

Etant donnée une théorie de corps (en logique du premier ordre) T :

- Que peut-on dire des groupes définissables dans T ? Peut-on les comparer définisamment à des groupes algébriques (en coordonnées¹⁵)?
- Quid des corps définissables dans T ? Sont-ils réduits aux extensions finies¹⁶ du corps ambiant?
- Que dire si l'on généralise ces questions au cas des groupes et corps *interprétables*, i.e. si l'on autorise les quotients d'ensembles définissables par relations d'équivalence définissables?

4.2 Travaux existants

- Le premier résultat, dû à Hrushovski, inspiré par les idées de WEIL [Wei55], affirme que tout groupe définissable¹⁷ dans un corps algébriquement clos pur est définissablement isomorphe à un groupe algébrique (en coordonnées). Cela utilise un théorème de "group chunk", qui est une manière de reconstruire un groupe définissable à partir de données génériques, similaire au théorème de configuration de groupe.
- Le résultat de Hrushovski a été utilisé dans [Poi88], pour montrer que tout corps définissable dans un corps algébriquement clos pur est définissablement isomorphe à celui-ci. S'appuyant également sur ces idées, il a été prouvé dans [Pil88, Proposition 2.5], que tout groupe définissable dans une structure o-minimale est naturellement un groupe topologique, que tout corps définissable dans ce contexte est soit réel clos, soit algébriquement clos, et que, dans le cas du corps pur des nombres réels, les groupes définissables sont des groupes de Lie. Ces résultats ont ensuite été étendus dans [HP94, Theorems A and C], pour montrer que tout groupe de Nash sur un corps réel ou p-adique est localement isomorphe à l'ensemble des points d'un groupe algébrique, et que tout groupe définissable dans un corps pseudo-fini¹⁸ est virtuellement isogène à l'ensemble des points rationnels d'un groupe algébrique.

15. Les "groupes algébriques en coordonnées" sont toujours définissables, car les "variétés en coordonnées" et fonctions rationnelles le sont, puisque les opérations de corps font partie de la structure.

16. Qui sont toujours définissables, en choisissant des bases, au sens de l'algèbre linéaire.

17. En fait, "définissable" et "interprétable" sont équivalents dans les corps algébriquement clos : on dit que ceux-ci *éliminent les imaginaires*.

18. C'est-à-dire un corps infini vérifiant toutes les propriétés du premier ordre communes aux corps finis.

En ce qui concerne les corps différentiellement clos¹⁹, Pillay PILLAY [Pil97, Corollary 4.2] a prouvé que tout groupe définissable connexe se plonge dans un groupe algébrique, et Suer SUER [Sue07, Theorem 3.36] a montré que les seuls corps définissables infinis, à isomorphisme définissable près, sont le corps différentiel et le corps des constantes.

- Le théorème le plus général jusqu'ici est [MOS18, Theorem 2.19]. Rappelons qu'un groupe discret est *moyennable* s'il existe une mesure de probabilité finiment additive, invariante à gauche, définie sur tous les sous-ensembles. Alors, un groupe définissable, dans une certaine théorie, est dit *définisamment moyennable* s'il admet une mesure de probabilité finiment additive, invariante à gauche, définie sur les ensembles définissables. Le théorème 2.19 de Montenegro, Onshuus et Simon traite des groupes définisamment moyennables dans toutes les théories de corps parfaits ayant des propriétés modèles-théoriques raisonnables²⁰.
- Dans le contexte plus spécifique des corps valués²¹, sous certaines hypothèses techniques, la classification des corps interprétables a été réalisée dans [HHP22, Theorem 7.1] : les seuls corps interprétables sont les extensions finies du corps ambiant ou du corps résiduel. D'autres résultats incluent les travaux réalisés dans [PPP23], qui prouvent que les groupes définissables dans divers corps différentiels peuvent être définisamment plongés dans des groupes algébriques, et [HHP23, Theorem 1], montrant que les groupes définisamment semi-simples interprétables dans des enrichissements de corps valués algébriquement clos, réels clos ou p-adiquement clos, sont virtuellement isogènes à des produits de groupes linéaires sur le corps valué et sur le corps résiduel. Dans le cas spécifique des corps valués algébriquement clos purs, la classification des corps interprétables a été initialement prouvée dans [HR19], en utilisant une notion appelée métastabilité, qui se concentre sur les types génériquement stables. Enfin, dans le cadre de la 1-h-minimalité, une notion visant à capturer l'idée de géométrie modérée dans des contextes non archimédiens, il est montré dans [AH24] que, comme dans le cas réel, les groupes définissables admettent une structure de Lie, et que les seuls corps définissables sont les extensions finies du corps ambiant.

4.3 Contributions

- Mon travail est similaire à [MOS18, Theorem 2.19] : je démontre d'abord un théorème purement abstrait de construction de morphisme de groupes définissables [Wan25b, Théorème 3.1.47], faisant intervenir deux théories T_0 et T_1 , où T_0 est

19. Qui sont les corps de caractéristique nulle munis d'une dérivation, et pour lesquels les équations différentielles algébriques ont "suffisamment de solutions".

20. En l'occurrence, qui sont NTP₂ et où les clôtures algébriques au sens de la théorie des modèles et au sens des corps coïncident.

21. Ultramétriques, pas nécessairement de rang un.

superstable²², T_1 est NIP²³ et T_0 est une "restriction"²⁴ de T_1 .

Une notion clé est celle d'un ensemble définissable X qui *ne voit pas* un autre ensemble définissable Y : cela signifie essentiellement que toutes les fonctions définissables $X \rightarrow Y$ ont une image finie. Le résultat est alors le suivant : *tout groupe définissablement moyennable dans la théorie NIP admet un morphisme de groupes définissable vers un groupe de la théorie superstable, dont le noyau ne voit pas les ensembles définissables de la théorie superstable.*

- Ensuite, en appliquant ce théorème abstrait pour T_0 la théorie des corps algébriquement clos, j'obtiens un résultat très général [Wan25b, Théorème 3.2.2] pour des théories de corps *algébriquement bornés*²⁵, et je peux couvrir plus de cas que [MOS18, Theorem 2.19] : sous des hypothèses modérées, *tous les groupes interprétables définissablement moyennables admettent un morphisme définissable vers un groupe algébrique sur le corps ambiant, dont le noyau ne voit pas le corps*. Autrement dit, ces groupes interprétables définissablement moyennables admettent des suites exactes courtes, où le terme de droite est un sous-groupe d'un groupe algébrique, et le terme de gauche ne voit pas le corps.
 - De même, en prenant pour T_0 la théorie des corps différentiellement clos, je démontre des résultats analogues [Wan25b, Théorème 3.3.2] pour les groupes interprétables dans les théories de corps différentiels algébriquement bornés²⁶.
 - Pour ce qui est des corps interprétables, je démontre [Wan25b, Corollaire 3.2.19], sous hypothèses modérées, la dichotomie suivante : *un corps interprétable infini admet un plongement définissable dans une extension finie du corps ambiant, ou bien ne voit pas ce dernier, auquel cas on le qualifie de purement imaginaire*²⁷.
- Cela repose sur le résultat intermédiaire [Wan25b, Proposition 3.2.7] suivant : étant donnés deux corps infinis définissables F et K , *dans une théorie arbitraire*, si le groupe de transformations affines de F se plonge définissablement dans un groupe algébrique sur K , alors le corps F se plonge définissablement dans une extension finie de K .
- Je traite ensuite des exemples spécifiques : classes générales de corps valués henséliens [Wan25b, Théorèmes 3.3.32 et 3.3.33] recouvrant les exemples déjà connus dans la littérature, et corps valués différentiellement clos²⁸. Pour ces derniers, je

22. Notion de modération légèrement plus forte que la stabilité.

23. Notion de modération plus faible que la stabilité, couvrant les théories o-minimales, notamment le corps des réels, bon nombre de théories de corps valués, dont les corps p-adiques, etc.

24. En un sens technique précis.

25. C'est-à-dire où les clôtures algébriques au sens de la théorie des modèles et de la théorie des corps coïncident.

26. L'analogue des théories de corps algébriquement bornés prenant en compte la présence de la dérivation.

27. Ce qui est en général le cas pour le corps résiduel d'un corps valué hensélien, par exemple.

28. Ce sont les corps de caractéristique nulle munis d'une valuation et d'une dérivation qui "n'interagissent pas" : toutes les configurations permises par l'algèbre sont réalisées, en particulier les équations différentielles algébriques non triviales ont des ensembles de solutions denses pour la topologie de la valuation.

démontre [Wan25b, Théorème 3.3.20] que les seuls corps infinis interprétables sont le corps valué, son corps des constantes, et le corps résiduel.

5 Contribution incluse dans la thèse : On groups and fields definable in D-henselian fields

Dans les corps valués différentiellement clos, la dérivation a un comportement générique par rapport à la valuation : toutes les équations différentielles non triviales possèdent des ensembles denses de solutions. Bien que cette hypothèse facilite l'étude par des méthodes de théorie des modèles, on peut vouloir considérer des corps valués différentiels où la dérivation est continue pour la topologie de la valuation, comportement plus satisfaisant d'un point de vue géométrique. Comme montré dans [Sca00], il existe toute une famille de théories complètes du premier ordre intéressantes pour les corps valués différentiels d'équicaractéristique 0, avec des dérivations 1-Lipschitz ; ces corps sont parfois appelés *D-Henséliens*. Je me suis concentré sur le cas le plus générique, à savoir celui où le corps résiduel, avec dérivation induite, est un corps différentiellement clos ; je note cette théorie *VDF*. Des exemples de structures vérifiant ces axiomes sont donnés par les corps de séries de Hahn $K((t^\Gamma))$, où Γ est un groupe abélien ordonné divisible, le corps résiduel K est un corps différentiellement clos, et la dérivation est construite à partir de celle de K en dérivant terme à terme les coefficients.

5.1 Travaux précédents

- Dans [Sca00], Scanlon donne une axiomatisation de *VDF*, montre qu'elle est complète, et prouve un résultat d'élimination des quantificateurs, i.e. donne une description de la structure des ensembles définissables.
- Dans [Rid19], Rideau-Kikuchi démontre des résultats plus fins : description (en un certain sens) des imaginaires, i.e. des quotients d'ensembles définissables par relations d'équivalence définissables, densité des types définissables²⁹ dans les espaces de types, et métastabilité, qui correspond grossièrement à la présence de nombreux types génériquement stables³⁰.

Concernant les types génériquement stables dans les corps valués algébriquement clos, et la métastabilité, les travaux de Hrushovski et Loeser [HL16] montrent la richesse de la notion : ils construisent des analogues modèle-théoriques d'espaces de Berkovich, dont les points sont des types génériquement stables³¹, et construisent ensuite des comparaisons avec les espaces de Berkovich usuels, ce qui leur permet de démontrer des résultats sur ces derniers, notamment l'existence de rétractions par déformation sur des complexes simpliciaux, à un niveau de généralité plus grand que ce qui était connu jusque-là.

29. Qui ont de bonnes propriétés, notamment l'existence d'extensions canoniques lorsqu'on fait grossir le corps de base ; tout type génériquement stable est définissable.

30. Dont on rappelle qu'ils ont de très bonnes propriétés de régularité, d'un point de vue modèle-théorique.

31. En fait stablement dominés, ce qui est équivalent ici.

5.2 Questions

Les questions que je considère sont les mêmes que pour [Wan25c], à savoir :

- Que peut-on dire des groupes définissables dans la théorie VDF ? Ceux qui n'utilisent pas d'imaginaires se plongent-ils dans des groupes algébriques?
- Que dire des corps définissables?

5.3 Contributions

Dans le dernier chapitre de ma thèse [Wan25b, Chapitre 4], j'étudie les questions ci-dessus. Un point crucial est que les résultats de la section précédente ne s'appliquent pas pour la théorie VDF : un obstacle majeur est que la clôture algébrique dans VDF est possiblement plus grande que celle induite par la théorie des corps différentiellement clos : en raison de la condition 1-Lipschitz, certaines équations différentielles ont une solution unique³²! Un exemple est donné dans [Rid19, Proposition 3.1].

Cependant, une propriété plus faible est vérifiée : tout élément du corps valué qui est algébrique³³ sur un ensemble de paramètres est *differentiellement algébrique* sur celui-ci, c'est-à-dire qu'il est de rang fini au sens de DCF , la théorie des corps différentiellement clos. Ainsi, en travaillant « à données de rang fini près », j'effectue des constructions similaires à celles qui précédent. L'idée est de suivre la variante du théorème de configuration des groupes de Hrushovski avec des types réguliers et des poids³⁴. Cependant, en raison de difficultés techniques³⁵, j'utilise une hypothèse supplémentaire sur le générique du groupe : je demande qu'il soit génériquement stable et *orthogonal à tous les types de rang fini*³⁶. Ainsi, je démontre les résultats suivants :

- Si G est un groupe définissable, vivant dans le corps valué, qui admet un point/type générique génériquement stable orthogonal à tous les types de rang fini, alors il admet un morphisme définissable³⁷ vers un groupe algébrique, dont le noyau est de rang fini. Voir [Wan25b, Theorem 4.1.32]
- Si F est un corps définissable, vivant dans le corps valué, qui possède un sous-anneau définissable R de même degré de transcendance différentiel non nul, où R admet un générique, additif et multiplicatif, génériquement stable et orthogonal aux types de rang fini, alors F est définissablement isomorphe au corps valué différentiel ambiant. Voir [Wan25b, Theorem 4.1.37]

32. Pour des raisons similaires au théorème de point fixe de Picard, et aux résultats d'unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires.

33. Au sens de la théorie des modèles, i.e. qui vérifie une formule ayant un nombre fini de solutions.

34. Pour les détails, voir par exemple [Bou89]

35. À savoir, parce que cette variante implique parfois de prendre des extensions déviantes des types en jeu.

36. Ceci correspond à la *stabilité par changement de base le long d'extensions* (de corps valués différentiels) *différentiellement algébriques*. L'exemple typique est le point/type générique de l'anneau de valuation, dont l'image dans le corps résiduel est le point/type différentiellement transcendant.

37. Défini au moins sur sa composante connexe.

6 Article soumis : Residually Dominated Groups in Henselian Valued Fields of Equicharacteristic Zero, avec Dicle Mutlu

6.1 Contributions personnelles

7 Prépublication : Nondeterministic behaviors in double categorical systems theory

La théorie catégorique des systèmes³⁸ vise à donner un cadre théorique unifié pour l'étude de systèmes dynamiques, les aspects techniques reposant sur des notions de théorie des catégories. Plusieurs directions ont émergé de ce champ de recherches au fil du temps ; les deux plus importantes, en ce qui concerne ce projet de recherche, sont l'approche fondée sur les *catégories monoidales symétriques*, possiblement avec de la structure additionnelle (voir 7.1), et le *point de vue coalgébrique* sur les systèmes (voir 7.2). En effet, ce travail s'inscrit dans la nouvelle branche appelée *théorie doublement catégorique*, ou *doublement opéradique*, des systèmes [Mye21] [LM25], qui vise à combiner les deux approches susmentionnées dans un seul cadre ; il repose également sur la théorie synthétique des probabilités. Il me semble utile de commencer par rappeler en quoi consistent les points de vue "monoidal symétrique" et "coalgébrique", ainsi que la théorie synthétique des probabilités, avant d'expliquer les enjeux et questions en théorie doublement catégorique des systèmes, et mes contributions.

7.1 Contexte : Approche monoidale symétrique

Une catégorie monoidale symétrique est une structure contenant des objets, des morphismes entre ces objets, une opération de produit sur les objets (muni de symétries canoniques), et des opérations de composition séquentielle et parallèle sur les morphismes, vérifiant des propriétés algébriques raisonnables (associativité, etc.). L'intérêt pour la représentation de systèmes dynamiques est le suivant : si l'on peut représenter les espaces d'entrées ou de sorties possibles comme des objets, les systèmes comme des morphismes, et que l'on dispose effectivement d'opérations de compositions parallèle et séquentielle de systèmes, alors *la théorie des catégories monoidales symétriques fournit automatiquement une syntaxe et des outils de raisonnement*. Les plus emblématiques sont les *diagrammes de cordes*³⁹, qui permettent des calculs rigoureux fondés sur des manipulations graphiques des diagrammes.

Une des applications les plus marquantes est le *ZX-calculus* [DKP07], utilisé pour représenter des calculs quantiques à base de qbits, dont les vertus pédagogiques, découlant vraisemblablement de l'approche graphique et de la relative simplicité du langage, ont été testées expérimentalement [Coe+25].

38. Voir par exemple l'introduction de [LM25].

39. Appelés *string diagrams* en anglais ; voir par exemple la page du nLab sur le sujet : ncatlab.org/nlab/show/string+diagram.

7.2 Contexte : point de vue coalgébrique

Pour illustrer le point de vue coalgébrique sur les systèmes, utilisons l'exemple des machines de Moore⁴⁰.

Machines de Moore comme coalgèbres

Une machine de Moore est définie par des ensembles ^a d'états, entrées et sorties, notés respectivement S , I , et O , et des fonctions ^b de sortie $S \rightarrow O$, et de mise à jour d'état $S \times I \rightarrow S$.

L'observation est alors que, pour I et O fixés, la donnée d'une machine de Moore est équivalente à la donnée d'un ensemble S , et d'une fonction $S \rightarrow O \times S^I$, c'est-à-dire d'un objet S de la catégorie des ensembles, muni d'un morphisme $S \rightarrow F(S)$, où F désigne le foncteur $X \mapsto O \times X^I$. Autrement dit, une machine de Moore est une coalgèbre pour le foncteur F . Cette observation n'est pas restreinte au cas des machines de Moore, mais se décline sur un grand nombre d'exemples. Voir [Rut00, Section 3].

a. Plus généralement, des objets.

b. Plus généralement, des morphismes.

Partant de ce principe, l'on peut ensuite définir⁴¹ un système comme étant une coalgèbre pour un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, étant entendu que la notion dépend fortement de F , en particulier, le choix de F détermine une "interface" commune. Une *simulation* d'un système vers un autre est alors simplement un morphisme de coalgèbres ; dans la plupart des exemples, cette notion traduit l'idée de "morphisme de comparaison entre espaces d'états, *agissant identiquement sur les interfaces*", compatible avec les dynamiques des systèmes considérés". Des notions plus symétriques, de *bisimulation* et *bisimilarité*, peuvent ensuite être définies [Sta09].

7.3 Contexte : Théorie synthétique des probabilités et du nondéterminisme, catégories de Markov

Avant de présenter la théorie doublement catégorique des systèmes, je souhaite m'attarder sur un élément important au niveau "monoidal symétrique", à savoir la *théorie synthétique des probabilités*, fondée sur la notion de catégorie de Markov [Fri20, Definition 2.1]. L'idée est d'axiomatiser le comportement des *noyaux de Markov* entre espaces mesurables, qui à chaque élément de la source associent une mesure de probabilité sur l'espace d'arrivée, qui "varie de manière mesurable" (voir [Per22, Section 1] et [Gir82]). Comme les noyaux de Markov sont munis d'opération de compositions parallèle et séquentielle, *le cadre monoidal symétrique est pertinent*. Cependant, de la structure additionnelle existe, en l'occurrence, pour tout espace mesurable X , l'unique noyau de Markov del_X , de X

40. notion qui généralise celle d'automate fini déterministe

41. Il s'agit davantage d'*identifier une structure commune* à des théories de systèmes, d'*organiser l'information*, que de mener une étude axiomatique approfondie à partir de telles définitions.

vers l'espace singleton, ainsi que la fonction mesurable diagonale $\text{copy}_X : X \rightarrow X \times X$. Abstrayant à partir de cet exemple :

Définition : Une *catégorie de Markov* est une catégorie monoidale symétrique où tout objet X est muni de morphismes $\text{del}_X : X \rightarrow 1$ et $\text{copy}_X : X \rightarrow X \otimes X$, telle que ces morphismes vérifient un certain nombre de propriétés algébriques simples.

Notons que ces axiomes admettent des modèles variés, dont certains représentent des notions de nondéterminisme *possibilistes*, c'est-à-dire où l'incertitude correspond à des *ensembles d'issues possibles*, sans mesure de probabilité pour la quantifier. L'opération consistant à associer à une mesure de probabilité (raisonnable) son *support* induit alors un foncteur entre les catégories de Markov correspondantes, représentant l'oubli d'information. Ces considérations ont une importance pour les applications à l'étude des systèmes d'IA : un certain nombre de résultats expérimentaux utilisant des méthodologies moins robustes⁴², ou avec des analyses statistiques peu fournies, peuvent être considérés comme *possibilistes*, et ainsi avoir des conclusions en adéquation avec leurs méthodes.

Un point important, comme expliqué par Tobias Fritz dans l'introduction de [Fri20], est que cette approche est *axiomatique et synthétique* : il s'agit d'étudier le *comportement* des objets à un niveau relativement abstrait, plutôt que de s'appuyer sur des descriptions (ensemblistes par exemple) très précises. Parmi les exemples d'approches synthétiques fructueuses en mathématiques, on pourra penser à la théorie des *catégories abéliennes*, qui donne un cadre efficace pour traiter des questions d'algèbre homologique, à la théorie des *infini-cosmos* [RV22], qui axiomatise non pas les infini-catégories, mais les univers dans lesquels elles interagissent en tant qu'objets, appelés infini-cosmos⁴³.

7.4 Contexte : Théorie doublement catégorique des systèmes

Comme mentionné plus haut, la théorie doublement catégorique des systèmes vise à combiner un point de vue sur la *composition* de systèmes et des notions de *comparaisons*, ou *simulations généralisées* entre systèmes. L'un des objectifs est de donner des principes et méthodes, étayés par la théorie, pour la *modélisation collaborative* ; les projets les plus saillants dans ce domaine sont ModelCollab [25] et CatColab [Car24].

Au niveau technique, cela repose sur l'utilisation de *catégories doubles*⁴⁴.

Catégories doubles et simulations généralisées :

- Une catégorie double (stricte) est définie par deux catégories sur la même classe d'objets, parfois appelées les catégories *verticale* et *horizontale*, ainsi que la donnée de 2-cellules, pour tout quadruplet de morphismes formant les côtés parallèles d'un carré. Les 2-cellules sont parfois appelées *carrés*, et sont munies d'opération de composition verticale et horizontale, associatives unitaires,

42. Faute de moyens, parfois.

43. Ce point de vue permet un traitement *indépendant du modèle combinatoire* choisi pour définir ce qu'est une infini-catégorie, ce qui a son importance étant donné la pluralité des modèles existants.

44. Voir ncatlab.org/nlab/show/double+category ou [DP93, Introduction] pour plus de détails

satisfaisant la loi d'échange.

- Etant donnés des systèmes S et T , vus comme cellules de dimension 1 dans la catégorie double en jeu, un *comportement* de forme S dans T , ou *simulation généralisée* de S vers T , ou *morphisme de systèmes* de S vers T , est défini comme étant une 2-cellule. Ainsi, le principe est de construire des catégories doubles où l'une des directions encode la composition de systèmes, et l'autre les simulations généralisées entre interfaces, et entre systèmes. *La loi d'échange représente alors une condition de compatibilité cruciale entre composition de systèmes et composition de simulations généralisées.*
- Une idée importante est que chaque système *représente* un type de comportement, et une question (cf [Mye23, Fin de la Section 3.5]) est de trouver des systèmes (nécessairement simples) représentant les notions de *trajectoires*, nondéterministes en l'occurrence.
- Remarquons que la notion de catégorie double est plus générale que celle, plus courante, de 2-catégorie^a; la différence n'est pas anecdotique, car les catégories doubles permettent *considérer des simulations généralisées entre systèmes n'ayant pas la même interface.*

a. Voir ncatlab.org/nlab/show/2-category

7.5 Questions

Questions :

- Comment définir une notion de "simulation généralisée" entre systèmes nondéterministes (stochastiques, possibilistes, etc.) pouvant inclure du nondéterminisme, dans un cadre doublement catégorique ?
- Comment répondre à la première question de manière paramétrique/fonctorielle en la notion de nondéterminisme ?
- Comment capturer, dans une définition uniforme, les systèmes à temps discret et à temps continu ?

7.6 Travaux existants

- Dans [BC18], une catégorie double est construite, où une direction encode des processus de Markov ouverts, donc des systèmes probabilistes, et l'autre des fonctions de *coarse-graining*. La principale restriction est que ces fonctions sont déterministes.
- Dans [Mye23] et [LM25], les constructions utilisent la notion de *monade communative* pour le nondéterminisme ; elles donnent bien des catégories doubles, mais la notion de simulation généralisée est trop restrictive, comme expliqué dans [Mye23, Fin de la section 3.5].

7.7 Contributions

Dans [Wan25d], je construis, étant donnés une catégorie de Markov avec lois conditionnelles⁴⁵, notée \mathcal{C} , et un graphe orienté acyclique \mathcal{G} , une théorie de systèmes dynamiques, en un sens très proche de ce qui est appelé "module de systèmes"⁴⁶ dans [LM25], qui répond à la question posée dans [Mye23, Fin de la Section 3.5], i.e. qui autorise des trajectoires, et plus généralement des comportements, "vraiment nondéterministes".

Cette construction permet de capturer des classes d'exemples précédemment non couvertes, ou seulement restreinte aux comportements déterministes, par la théorie doublument catégorique des systèmes :

- Les systèmes (ouverts) gouvernés par des Equations Différentielles Stochastiques.
- Les automates nondéterministes.
- Les processus de décision de Markov partiellement observables (i.e. processus de Markov pouvant interagir avec un environnement extérieur).

Au niveau technique, mes constructions reposent sur un certain nombre d'idées.

Idées :

1. La catégorie de Markov \mathcal{C} avec lois conditionnelles représente la notion de nondéterminisme de la théorie de systèmes à construire.
2. Le graphe \mathcal{G} représente la notion de temps considérée ; pour des raisons propres au nondéterminisme^a, et par absence de structure monoidale close ou cartésienne close pertinente^b, je traite le temps de manière externe à \mathcal{C} .
3. L'existence de lois conditionnelles dans \mathcal{C} permet de définir la composée verticale des 2-cellules, ce qui correspond à *construire des trajectoires jointes de systèmes composés*, en faisant une *hypothèse d'indépendance conditionnelle des composants relativement à l'information aux interfaces*.
4. A partir de l'idée du point ci-dessus, l'essentiel du travail technique consiste à vérifier les propriétés algébriques requises ; associativité et échange demandent le plus d'efforts.
5. Afin de simplifier la rédaction, ainsi que les démonstrations futures de fonctionnalité de la construction vis-à-vis de \mathcal{C} et de \mathcal{G} , je construis d'abord des *catégories triples*, où la dimension supplémentaire sert à gérer le temps, avant d'en déduire les catégories doubles voulues comme catégories de foncteurs "de source \mathcal{G} " à valeurs dans ces catégories triples.

^a. Précisément, le fait qu'une loi sur un produit contienne plus d'information que la donnée de ses marginales.

⁴⁵. Cette condition étant la version synthétique de l'existence de lois conditionnelles au sens usuel.

⁴⁶. A absence d'identités strictes près pour l'une des directions ; j'obtiens ce que j'appelle des *semimodules de systèmes*.

b. C'est-à-dire où les espaces de morphismes seraient représentés par des objets de la catégorie elle-même.

Une observation intéressante est que le gros des calculs repose sur l'utilisation des propriétés formelles de l'indépendance conditionnelle, et que lesdites propriétés sont très similaires aux propriétés des notions d'indépendance utilisées dans mes travaux précédents, en théorie des modèles. Il ne s'agit pas d'une coïncidence : d'après l'article [Yaa13], l'indépendance conditionnelle de variables aléatoires (à valeurs dans un espace métrique) est une instance, en théorie des modèles continue, des notions d'indépendance générales présentes dans mes travaux en théorie des modèles.

Bibliographie

- [25] *ModelCollab*. TypeScript. 2025. URL : <https://github.com/UofS-CEPHIL/modelcollab>.
- [AH24] J. P. ACOSTA LÓPEZ et A. HASSON. « On groups and fields definable in 1-h-minimal fields ». *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* (2024).
- [BC18] J. C. BAEZ et K. COURSER. « Coarse-Graining Open Markov Processes ». arXiv :1710.11343 (nov. 2018). arXiv :1710.11343 [math-ph]. URL : <http://arxiv.org/abs/1710.11343>.
- [Bou89] E. BOUSCAREN. « The Group Configuration—after E. Hrushovski ». 1989. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118803539>.
- [BTW02] I. BEN-YACOV, I. TOMAŠIĆ et F. O. WAGNER. « The Group Configuration in Simple Theories and Its Applications ». *The Bulletin of Symbolic Logic* 8.2 (2002), p. 283-298. URL : <http://www.jstor.org/stable/2693967> (visité le 27/09/2024).
- [Car24] K. CARLSON. *Introducing CatColab*. 2024. URL : <https://topos.institute/blog/2024-10-02-introducing-catcolab/>.
- [CGH25] G. CONANT, K. GANNON et J. E. HANSON. « Generic stability, randomizations and NIP formulas ». *Journal of Mathematical Logic* (2025), p. 2550016.
- [Coe+25] B. COECKE et al. « High schoolers excel at Oxford quantum course using pictorial mathematics ». arXiv :2512.00141 (nov. 2025). arXiv :2512.00141 [physics]. URL : <http://arxiv.org/abs/2512.00141>.
- [DKP07] V. DANOS, E. KASHEFI et P. PANANGADEN. « The measurement calculus ». *J. ACM* 54.2 (avr. 2007), 8-es.
- [DP93] R. DAWSON et R. PARE. « General associativity and general composition for double categories ». *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 34.1 (1993), p. 57-79.

- [Fri20] T. FRITZ. « A synthetic approach to Markov kernels, conditional independence and theorems on sufficient statistics ». *Advances in Mathematics* 370 (2020), p. 107239. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870820302656>.
- [Gir82] M. Giry. « A categorical approach to probability theory ». *Categorical Aspects of Topology and Analysis*. Sous la dir. de B. BANASCHEWSKI. T. 915. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1982, p. 68-85. URL : <http://link.springer.com/10.1007/BFb0092872>.
- [HHP22] Y. HALEVI, A. HASSON et Y. PETERZIL. « Intepretable fields in various valued fields ». *Adv. Math.* 404 (2022), Paper No. 108408, 58.
- [HHP23] Y. HALEVI, A. HASSON et Y. PETERZIL. « Semisimple groups interpretable in various valued fields » (2023). arXiv : 2309.02727.
- [HL16] E. HRUSHOVSKI et F. LOESER. *Non-archimedean tame topology and stably dominated types*. T. 192. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016, p. vii+216.
- [HP94] E. HRUSHOVSKI et A. PILLAY. « Groups definable in local fields and pseudo-finite fields. » *Israel Journal of Mathematics* 85.1–3 (1994), p. 203-262.
- [HR19] E. HRUSHOVSKI et S. RIDEAU-KIKUCHI. « Valued fields, metastable groups ». *Selecta Math. (N.S.)* 25.3 (2019), Paper No. 47, 58.
- [HZ96] E. HRUSHOVSKI et B. ZILBER. « Zariski Geometries ». *Journal of the AMS* 9 (1996).
- [LM25] S. LIBKIND et D. J. MYERS. « Towards a double operadic theory of systems » (mai 2025). arXiv :2505.18329 [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2505.18329>.
- [MOS18] S. MONTENEGRO, A. ONSHUUS et P. SIMON. « Stabilizers, NTP₂ groups with f-generics and PRC fields ». *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 19 (2018), p. 821-853.
- [Mye21] D. J. MYERS. « Double Categories of Open Dynamical Systems (Extended Abstract) ». *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 333 (fév. 2021). arXiv :2005.05956 [math], p. 154-167.
- [Mye23] D. J. MYERS. *Categorical Systems Theory*. In Preparation, 2023. URL : <http://davidjaz.com/Papers/DynamicalBook.pdf>.
- [Per22] P. PERRONE. « Markov Categories and Entropy ». *IEEE Transactions on Information Theory* 70 (2022), p. 1671-1692. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:254974204>.
- [Pil88] A. PILLAY. « On groups and fields definable in o-minimal structures ». *Journal of Pure and Applied Algebra* 53.3 (1988), p. 239-255.

- [Pil97] A. PILLAY. « Some foundational questions concerning differential algebraic groups ». *Pacific Journal of Mathematics* 179 (1997), p. 179-200. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121980936>.
- [Poi88] B. POIZAT. « MM. Borel, Tits, Zil’ber et le Général Nonsense ». *J. Symb. Log.* 53.1 (1988), p. 124-131.
- [PPP23] Y. PETERZIL, A. PILLAY et F. POINT. « On definable groups in real closed fields with a generic derivation, and related structures » (2023). arXiv : 2208.08293.
- [PS98] Y. PETERZIL et S. STARCHENKO. « A trichotomy theorem for o-minimal structures ». *Proceedings of the London Mathematical Society* 77.3 (1998), p. 481-523. URL : <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/S0024611598000549>.
- [Rid19] S. RIDEAU-KIKUCHI. « Imaginaries and invariant types in existentially closed valued differential fields ». *J. Reine Angew. Math.* 750 (2019), p. 157-196.
- [Rut00] J. J. M. M. RUTTEN. « Universal coalgebra : a theory of systems ». *Theoretical Computer Science. Modern Algebra* 249.1 (oct. 2000), p. 3-80.
- [RV22] E. RIEHL et D. VERITY. *Elements of infinity-Category Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 2022. URL : <https://www.cambridge.org/core/books/elements-of-category-theory/DAC48C449AB8C2C1B1E528A49D27FC6D>.
- [Sca00] T. SCANLON. « A model complete theory of valued D -fields ». *J. Symb. Log.* 65.4 (2000), p. 1758-1784.
- [She69] S. SHELAH. « Categoricity of classes of models ». *PhD Thesis, Hebrew University of Jerusalem* (1969). URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:126141507>.
- [She71] S. SHELAH. « Stability, the f.c.p., and superstability ; model theoretic properties of formulas in first order theory ». 3.3 (1971), p. 271-362.
- [Sta09] S. STATON. « Relating Coalgebraic Notions of Bisimulation ». en. *Algebra and Coalgebra in Computer Science*. Sous la dir. d'A. KURZ, M. LENISA et A. TARLECKI. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009, p. 191-205.
- [Sue07] S. SUER. « Model Theory of Differentially Closed Fields With Several Commuting Derivations ». *PhD Thesis* (2007). URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:126141507>.
- [Wan25a] P. WANG. « THE GROUP CONFIGURATION THEOREM FOR GENERICALLY STABLE TYPES ». en. *The Journal of Symbolic Logic* 90.2 (2025), p. 681-724.
- [Wan25b] P. WANG. « Variations on the group configuration ». Theses. ENS-PSL, mai 2025. URL : <https://hal.science/tel-05419277>.

- [Wan25c] P. Z. WANG. « On groups and fields interpretable in NTP_2 fields ». arXiv :2402.09143 (jan. 2025). arXiv :2402.09143 [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2402.09143>.
- [Wan25d] P. Z. WANG. « Nondeterministic Behaviours in Double Categorical Systems Theory ». arXiv :2502.02517 (fév. 2025). arXiv :2502.02517 [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2502.02517>.
- [Wei55] A. WEIL. « On algebraic groups of transformations ». 77 (1955), p. 355-391.
- [Yaa13] I. B. YAACOV. « On theories of random variables ». en. *Israel Journal of Mathematics* 194.2 (mars 2013), p. 957-1012.