

# Mathematics for Artificial Intelligence

9강: CNN 첫걸음

---

임성빈

UNIST



인공지능대학원 & 산업공학과  
Learning Intelligent Machine Lab

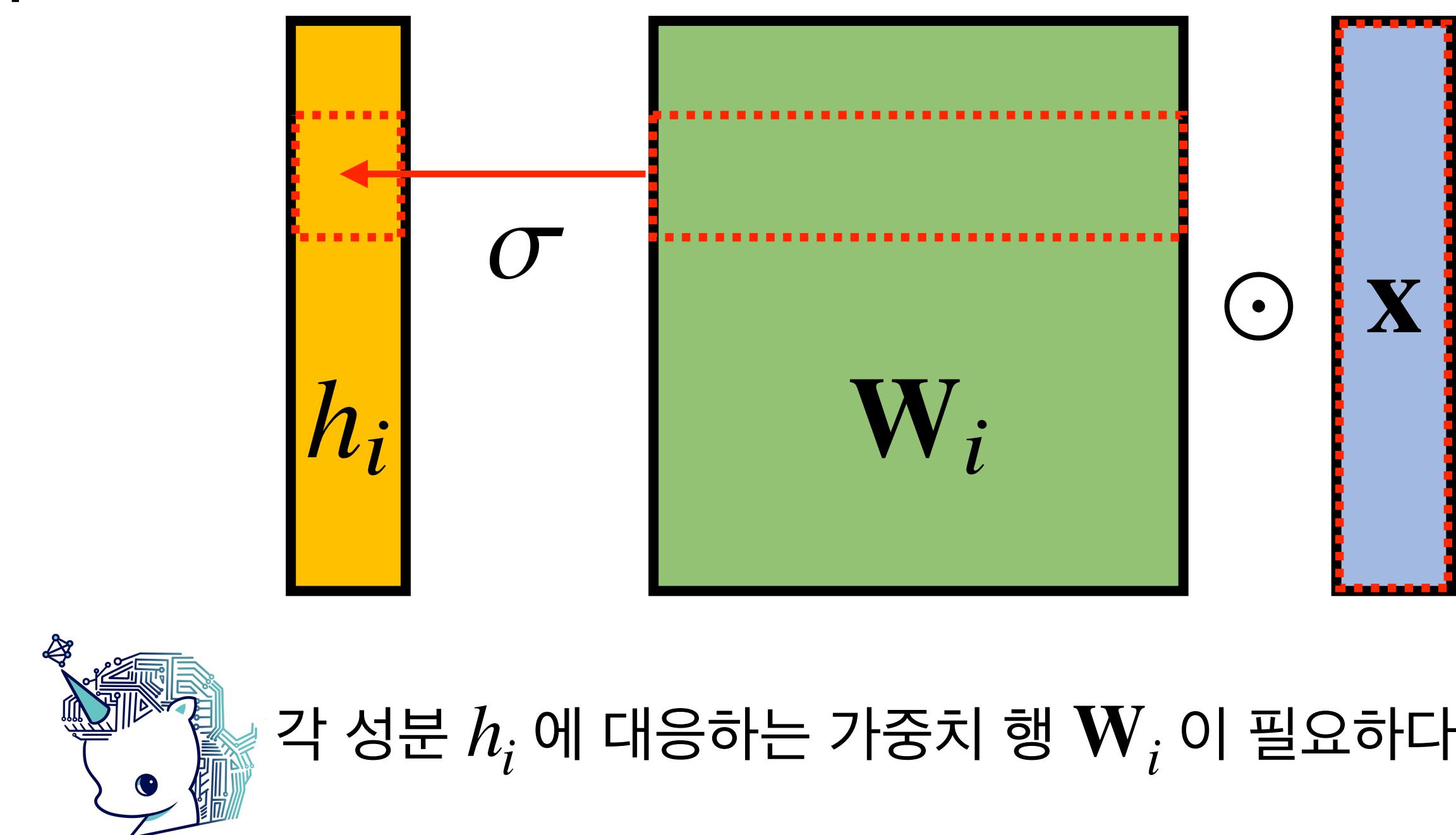
# Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 지금까지 배운 다층신경망(MLP)은 각 뉴런들이 선형모델과 활성함수로 모두 연결된 (fully connected) 구조였습니다

$$h_i = \sigma \left( \sum_{j=1}^p W_{ij} x_j \right)$$

활성함수  
가중치 행렬



각 성분  $h_i$ 에 대응하는 가중치 행  $W_i$ 이 필요하다

# Convolution 연산 이해하기

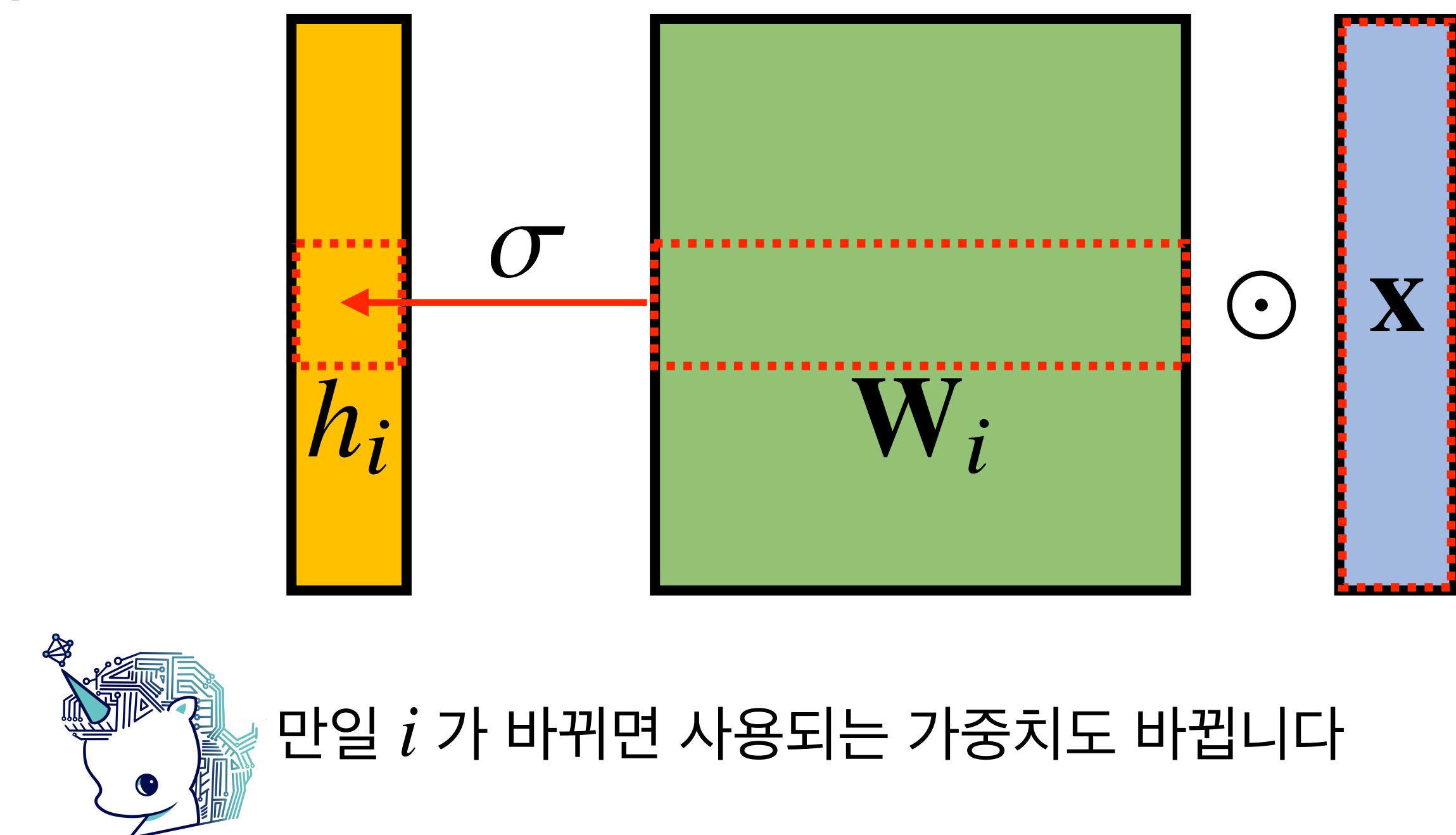
# CNN 첫걸음

- 지금까지 배운 다층신경망(MLP)은 각 뉴런들이 선형모델과 활성함수로 모두 연결된 (fully connected) 구조였습니다

$$h_i = \sigma \left( \sum_{j=1}^p W_{ij} x_j \right)$$

활성함수

가중치 행렬



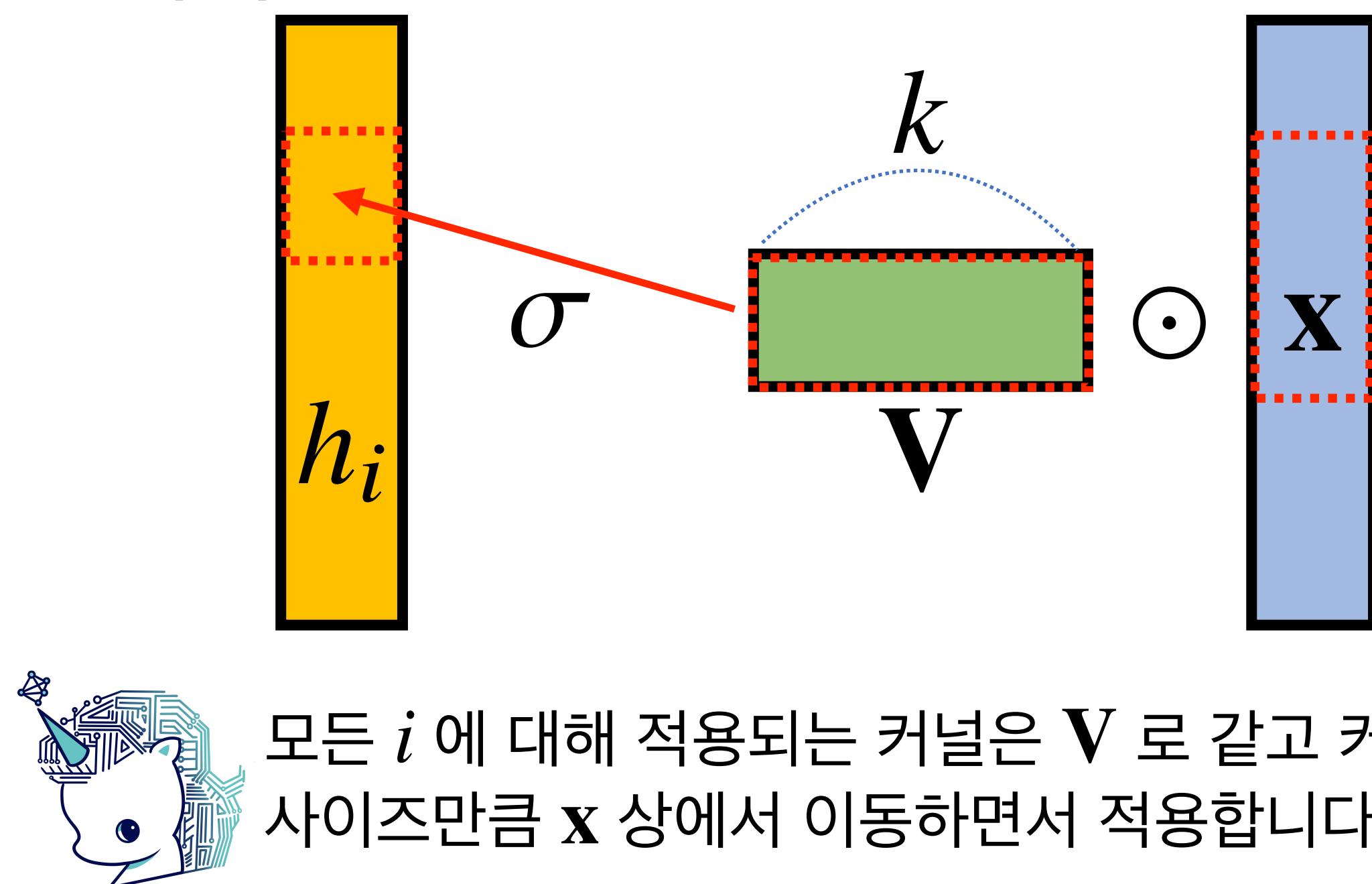
# Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- Convolution 연산은 이와 달리 커널(kernel)을 입력벡터 상에서 움직여가면서 선형모델과 합성함수가 적용되는 구조입니다

$$h_i = \sigma \left( \sum_{j=1}^k V_j x_{i+j-1} \right)$$

커널 사이즈  
활성함수  
가중치 행렬



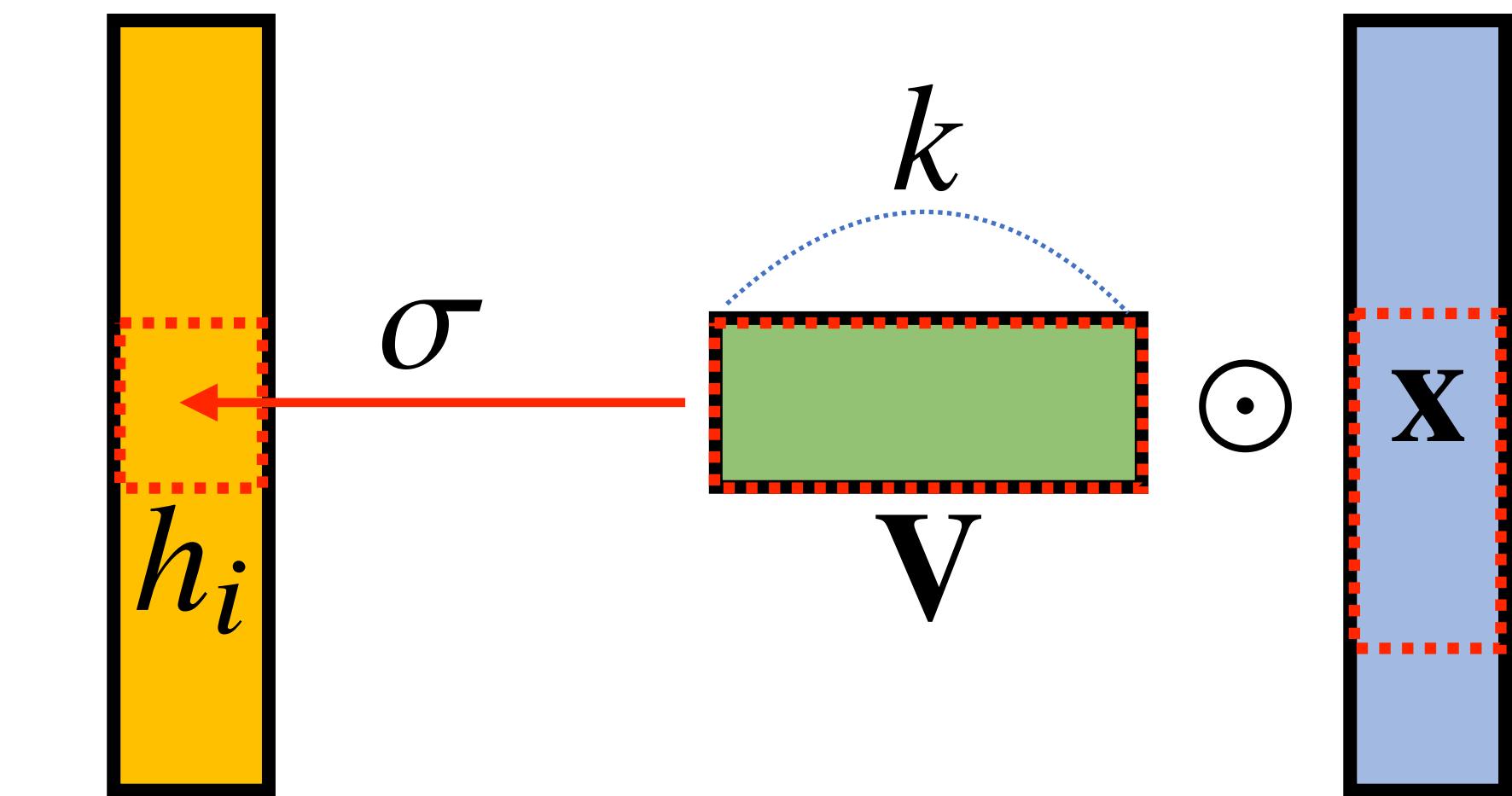
# Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

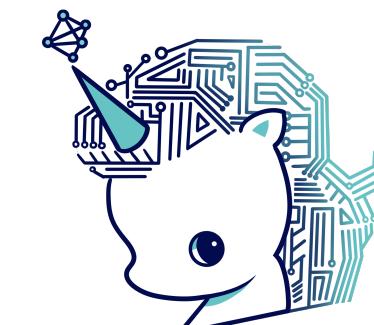
- Convolution 연산은 이와 달리 커널(kernel)을 입력벡터 상에서 움직여가면서 선형모델과 합성함수가 적용되는 구조입니다

$$h_i = \sigma \left( \sum_{j=1}^k V_j x_{i+j-1} \right)$$

커널 사이즈  
활성함수  
가중치 행렬



활성화 함수를 제외한 Convolution  
연산도 선형변환에 속합니다



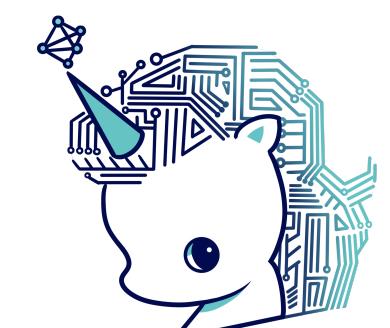
# Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- Convolution 연산의 수학적인 의미는 신호(signal)를 커널을 이용해 국소적으로 증폭 또는 감소시켜서 정보를 추출 또는 필터링하는 것입니다

continuous  $[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x - z)dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - z)g(z)dz = [g * f](x)$

discrete  $[f * g](i) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^d} f(a)g(i - a) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^d} f(i - a)g(a) = [g * f](i)$



Convolution 을 수식으로만 이해하는 것은 매우 어렵습니다

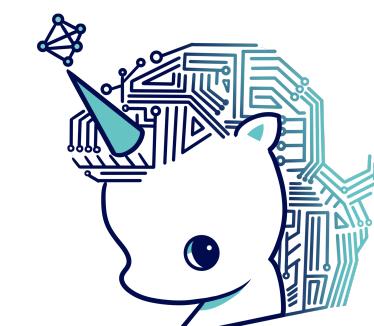
# Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- Convolution 연산의 수학적인 의미는 신호(signal)를 커널을 이용해 국소적으로 증폭 또는 감소시켜서 정보를 추출 또는 필터링하는 것입니다

continuous  $[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x + z)dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(x + z)g(z)dz = [g * f](x)$

discrete  $[f * g](i) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^d} f(a)g(i + a) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^d} f(i + a)g(a) = [g * f](i)$

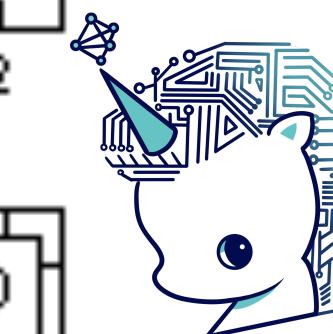
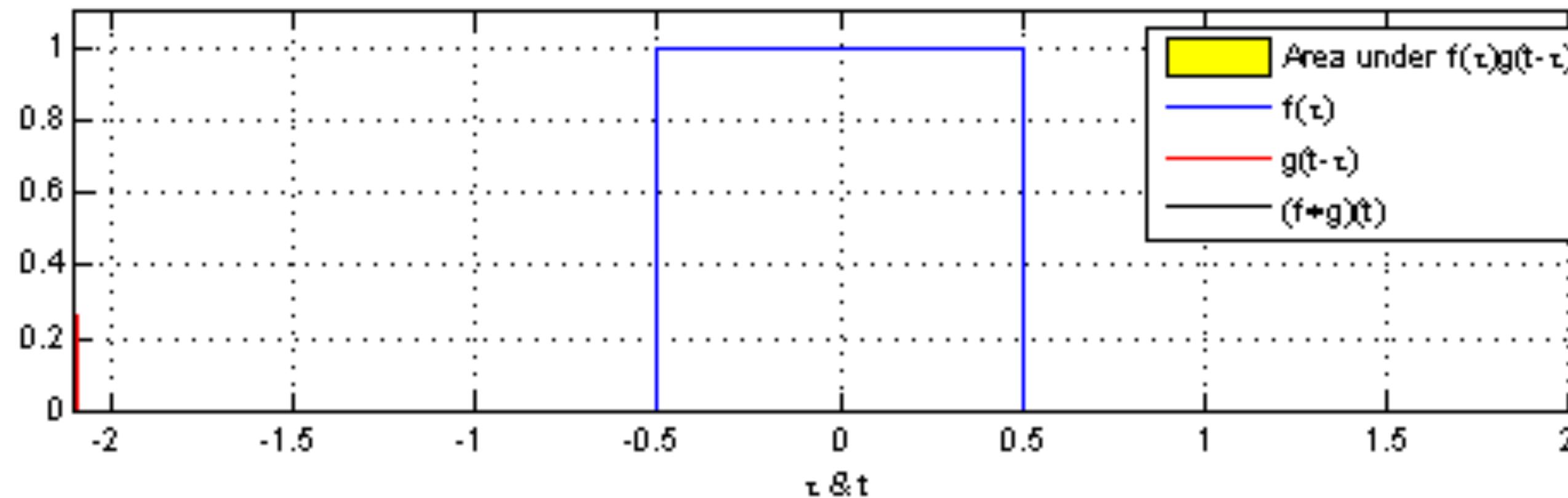


CNN에서 사용하는 연산은 사실 convolution이 아니고 cross-correlation이라 부릅니다

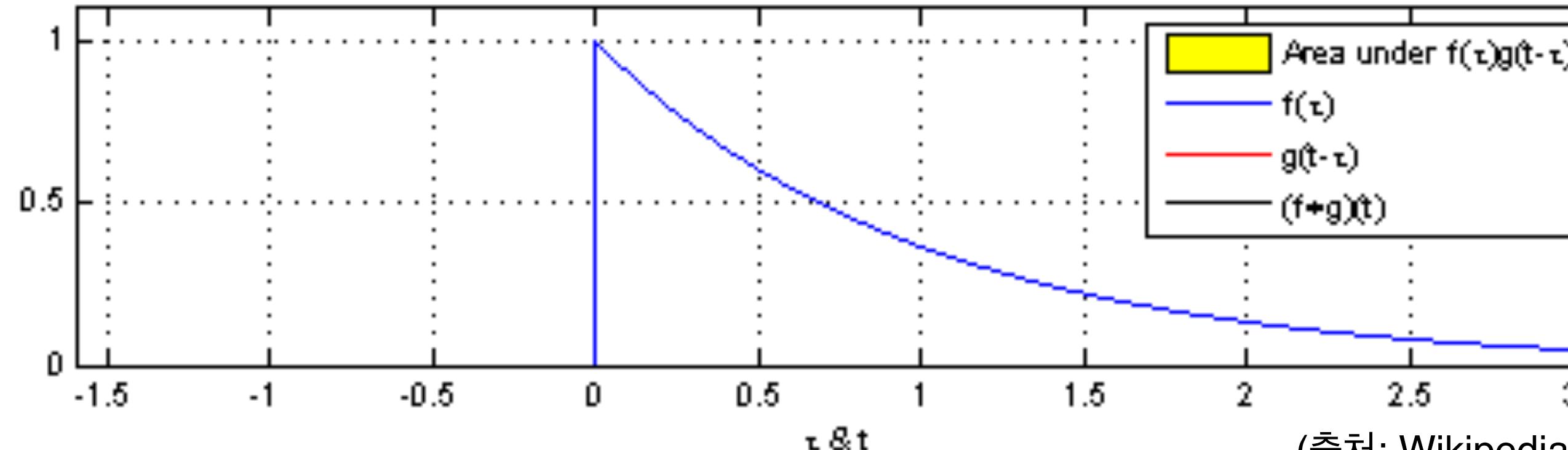
# Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 커널은 정의역 내에서 움직여도 변하지 않고(**translation invariant**) 주어진 신호에 **국소적(local)**으로 적용합니다



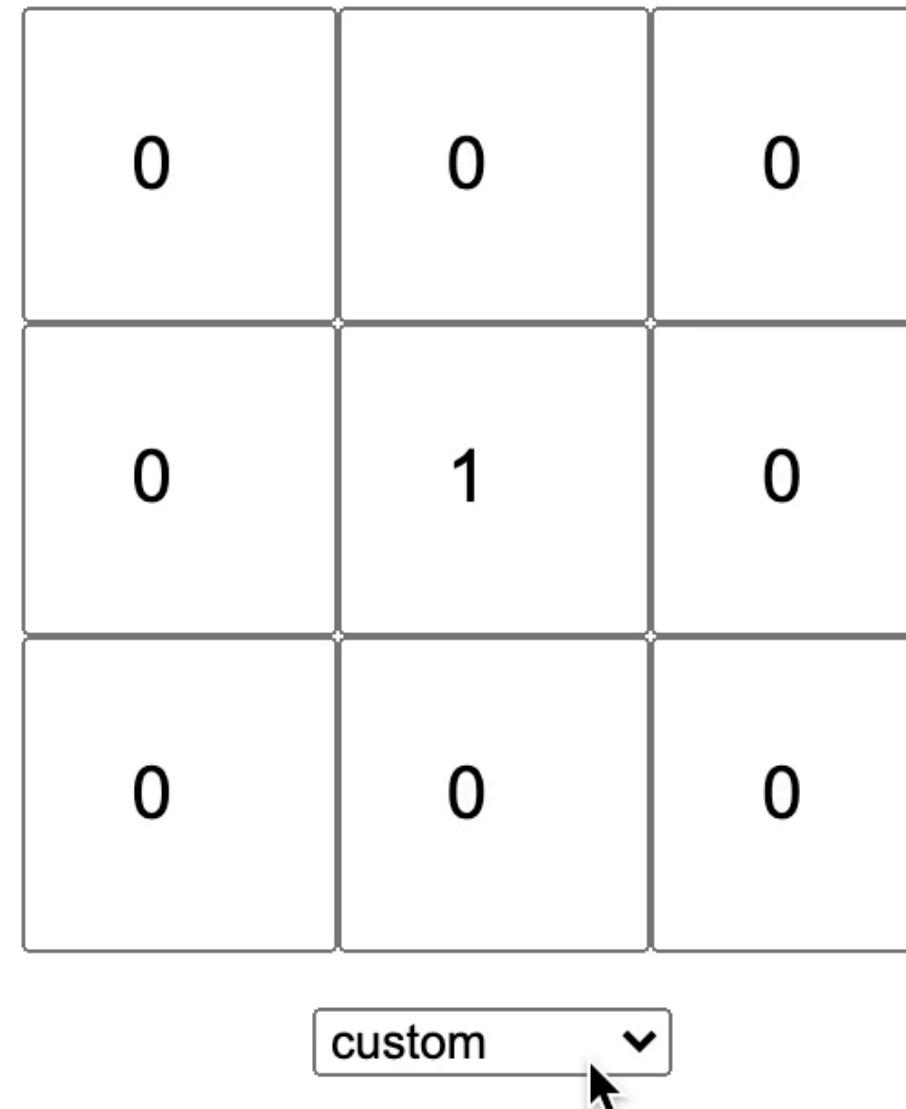
파란색이 신호  
빨간색이 커널  
검은색이 결과입니다



(출처: Wikipedia)

# 영상처리에서 Convolution

CNN 첫걸음



The **custom** kernel is whatever you make it.

For more, have a look at Gimp's excellent documentation on using [Image kernel's](#). You can also apply your own custom filters in Photoshop by going to Filter -> Other -> Custom...

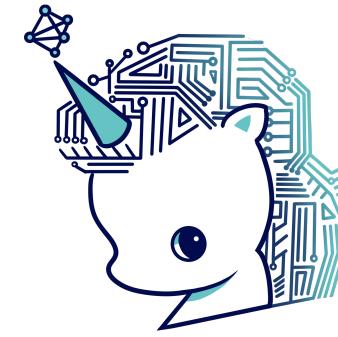
# 다양한 차원에서의 Convolution

CNN 첫걸음

- Convolution 연산은 1차원뿐만 아니라 다양한 차원에서 계산 가능합니다

1D-conv

$$[f * g](i) = \sum_{p=1}^d f(p)g(i+p)$$



데이터의 성격에 따라  
사용하는 커널이 달라집니다

2D-conv

$$[f * g](i, j) = \sum_{p,q} f(p, q)g(i+p, j+q)$$

3D-conv

$$[f * g](i, j, k) = \sum_{p,q,r} f(p, q, r)g(i+p, j+q, k+r)$$

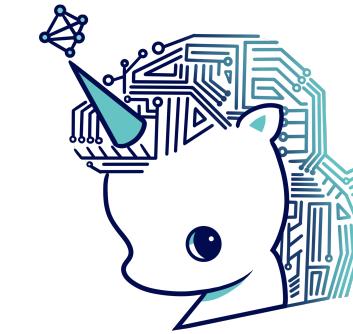
# 다양한 차원에서의 Convolution

CNN 첫걸음

- Convolution 연산은 1차원뿐만 아니라 다양한 차원에서 계산 가능합니다

1D-conv

$$[f * g](i) = \sum_{p=1}^d f(p)g(i + p)$$



$i, j, k$  가 바뀌어도 커널  $f$ 의  
값은 바뀌지 않습니다

2D-conv

$$[f * g](i, j) = \sum_{p,q} f(p, q)g(i + p, j + q)$$

3D-conv

$$[f * g](i, j, k) = \sum_{p,q,r} f(p, q, r)g(i + p, j + q, k + r)$$

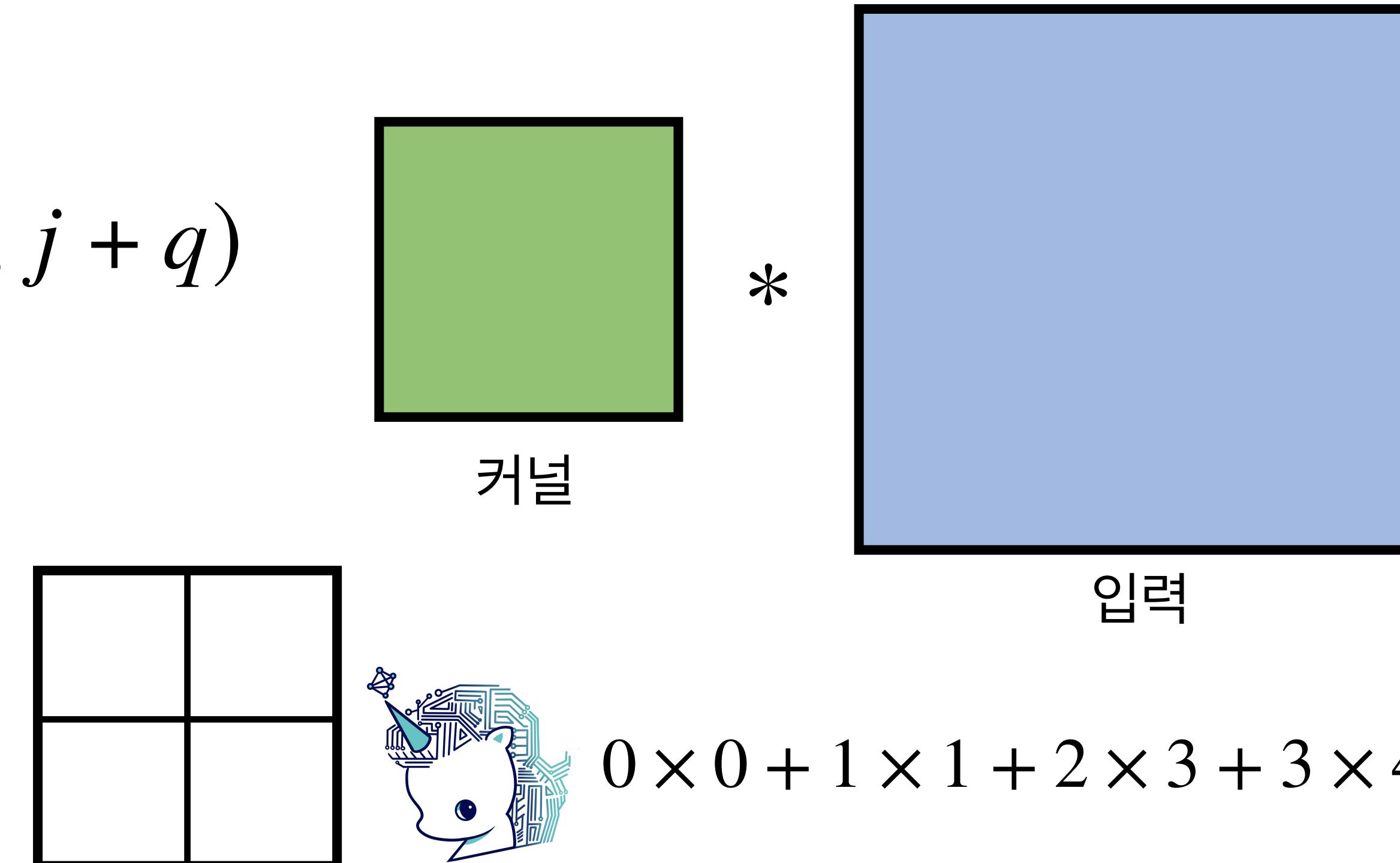
# 2차원 Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 2D-Conv 연산은 이와 달리 커널(kernel)을 입력벡터 상에서 움직여가면서 선형모델과 합성함수가 적용되는 구조입니다

$$[f * g](i, j) = \sum_{p,q} f(p, q)g(i + p, j + q)$$

커널  
↑  
입력 ↓



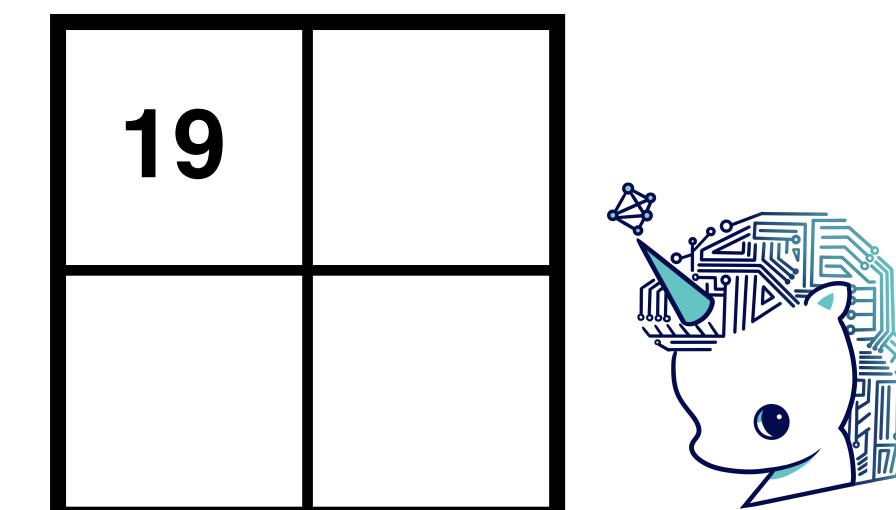
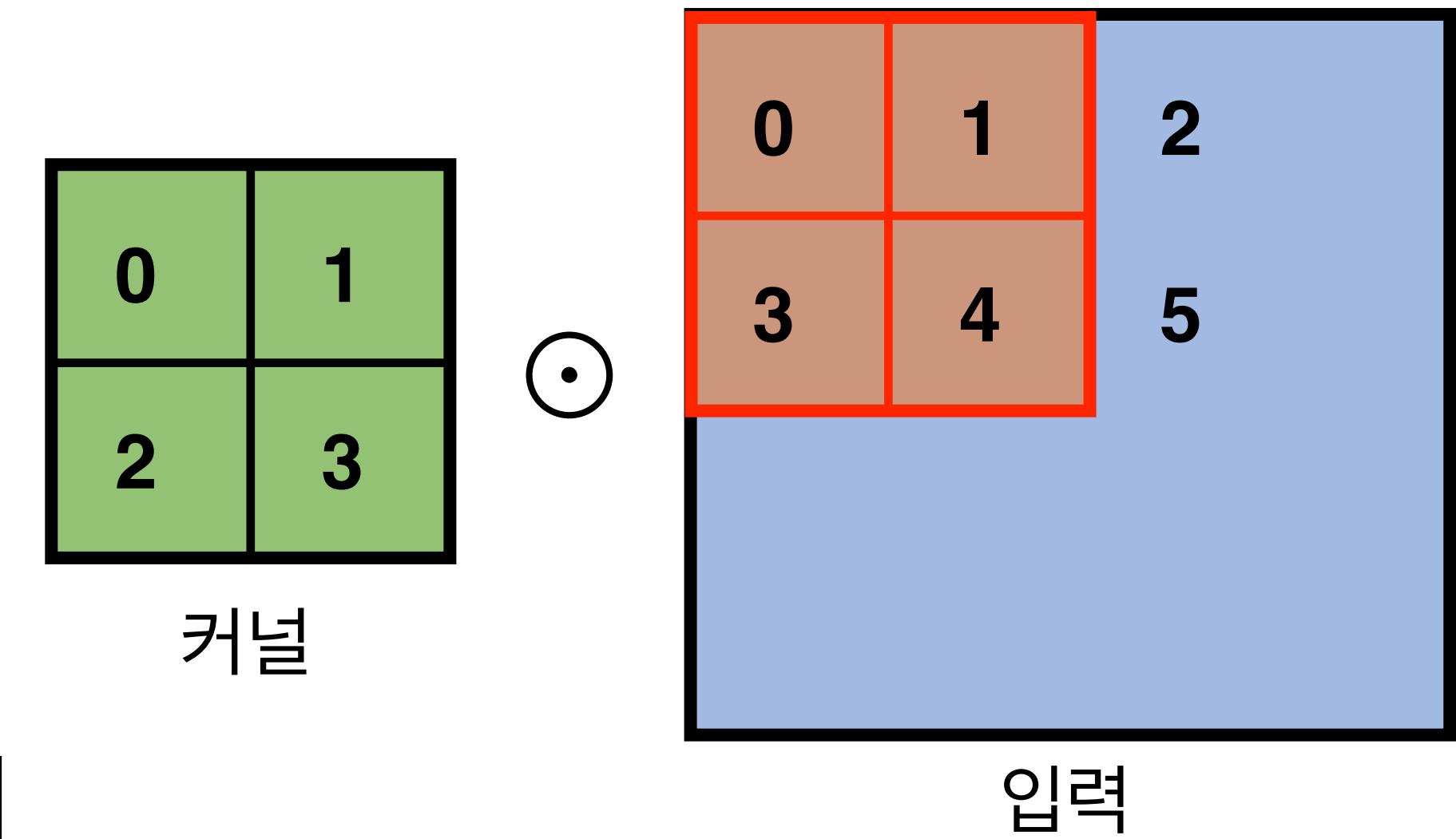
# 2차원 Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 2D-Conv 연산은 이와 달리 커널(kernel)을 입력벡터 상에서 움직여가면서 선형모델과 합성함수가 적용되는 구조입니다

$$[f * g](i, j) = \sum_{p,q} f(p, q)g(i + p, j + q)$$

커널  
↑  
입력 ↓



$$0 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 19$$

# 2차원 Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 2D-Conv 연산은 이와 달리 커널(kernel)을 입력벡터 상에서 움직여가면서 선형모델과 합성함수가 적용되는 구조입니다

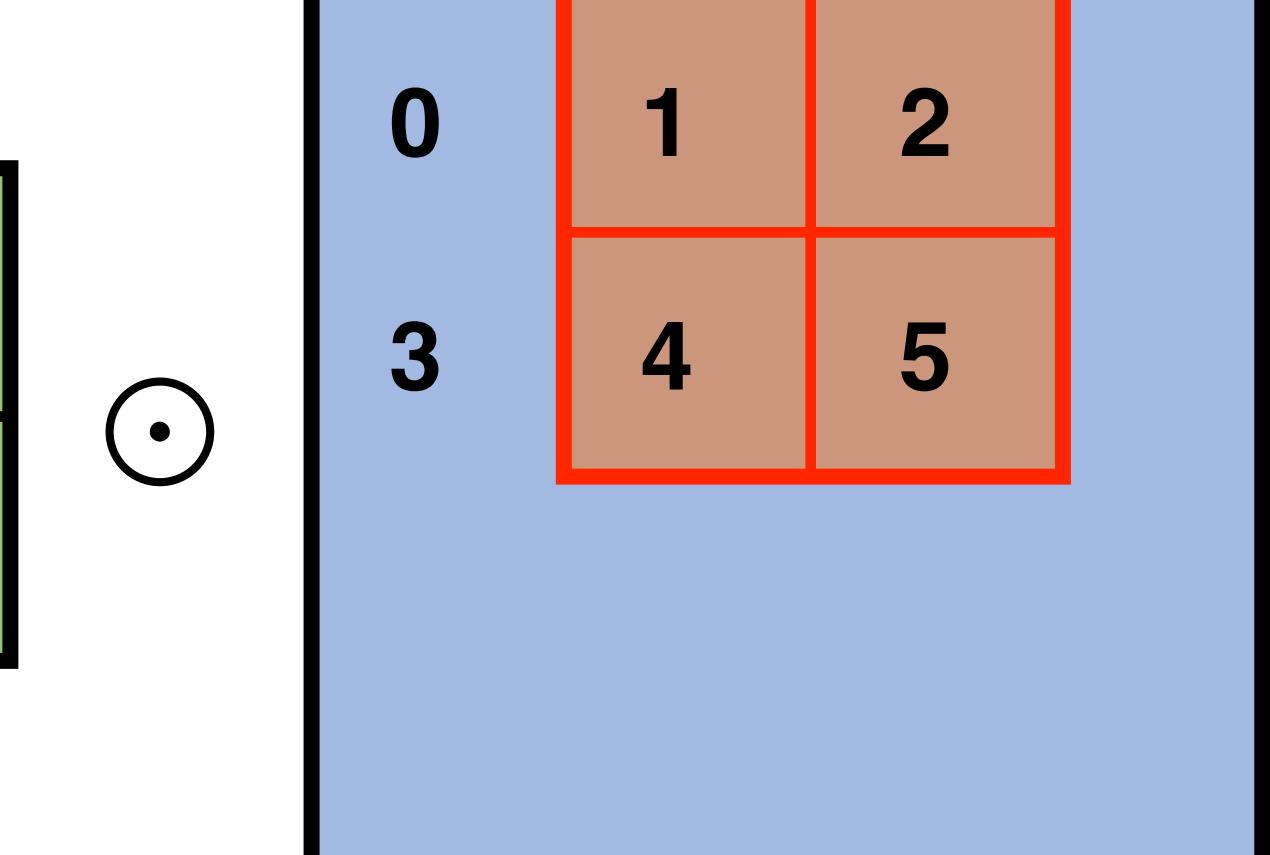
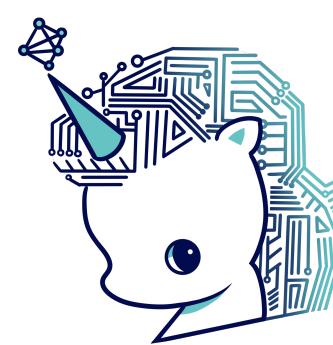
$$[f * g](i, j) = \sum_{p,q} f(p, q)g(i + p, j + q)$$

커널  
입력

0	1
2	3

커널

19	25



$$0 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 5 = 25$$

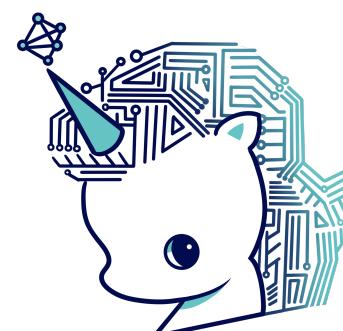
# 2차원 Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 2D-Conv 연산은 이와 달리 커널(kernel)을 입력벡터 상에서 움직여가면서 선형모델과 합성함수가 적용되는 구조입니다
- 입력 크기를  $(H, W)$ , 커널 크기를  $(K_H, K_W)$ , 출력 크기를  $(O_H, O_W)$  라 하면 출력 크기는 다음과 같이 계산합니다

$$O_H = H - K_H + 1$$

$$O_W = W - K_W + 1$$

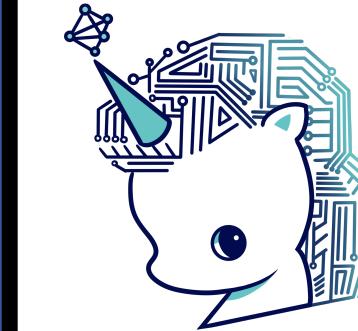
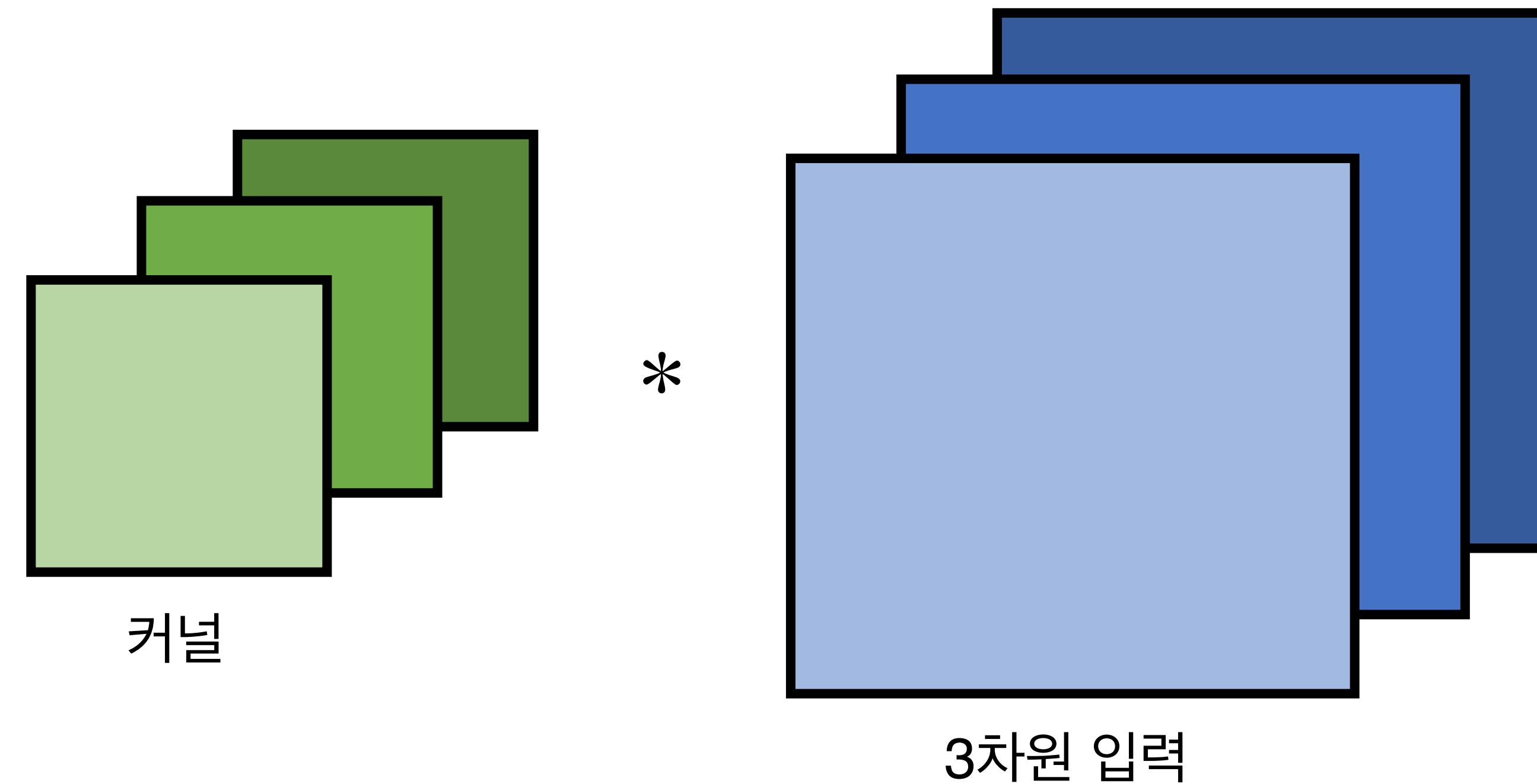


가령 28x28 입력을 3x3 커널로  
2D-Conv 연산을 하면 26x26 이 된다

# 2차원 Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 채널이 여러개인 2차원 입력의 경우 2차원 Convolution 을 채널 개수만큼 적용한다고 생각하면 됩니다

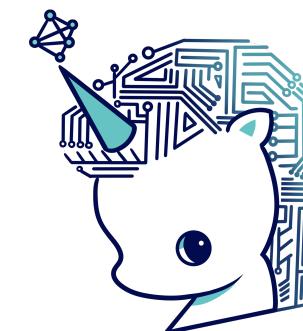


3차원부터는 행렬이  
아닌 텐서라 부릅니다

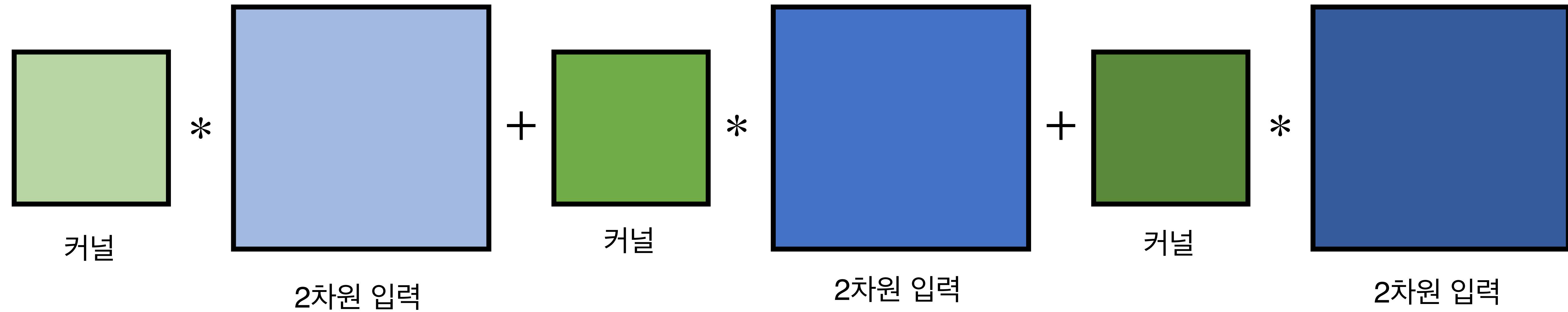
# 2차원 Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 채널이 여러개인 2차원 입력의 경우 2차원 Convolution 을 채널 개수만큼 적용한다고 생각하면 됩니다



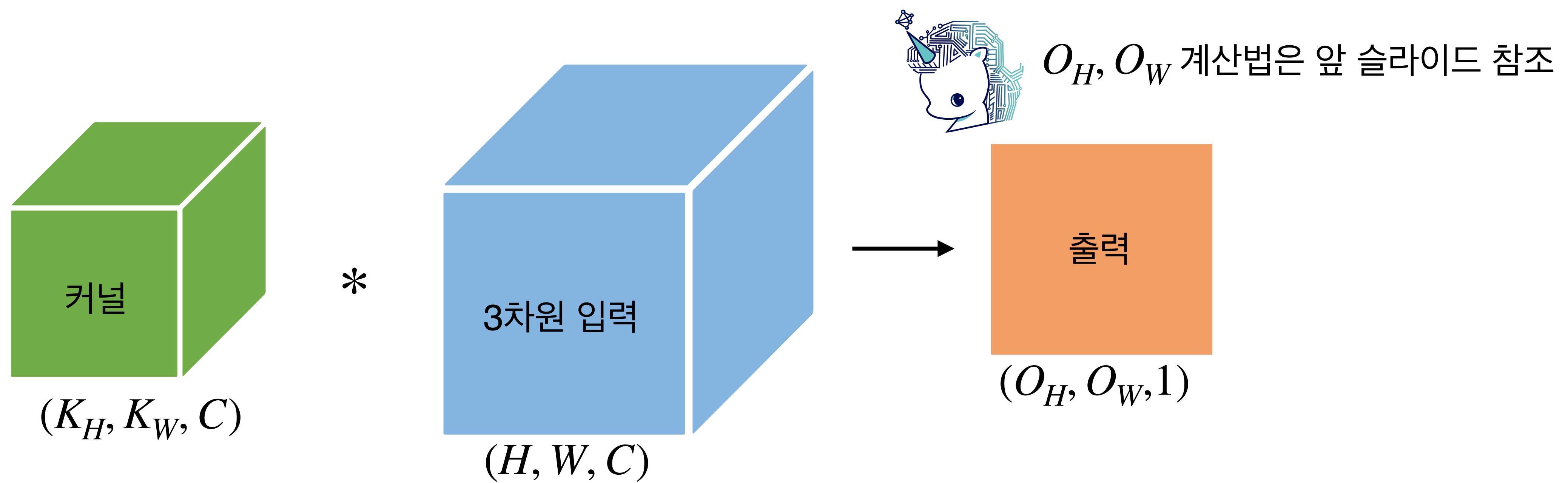
채널이 여러개인 경우 커널의 채널 수와  
입력의 채널수가 같아야 합니다



# 2차원 Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

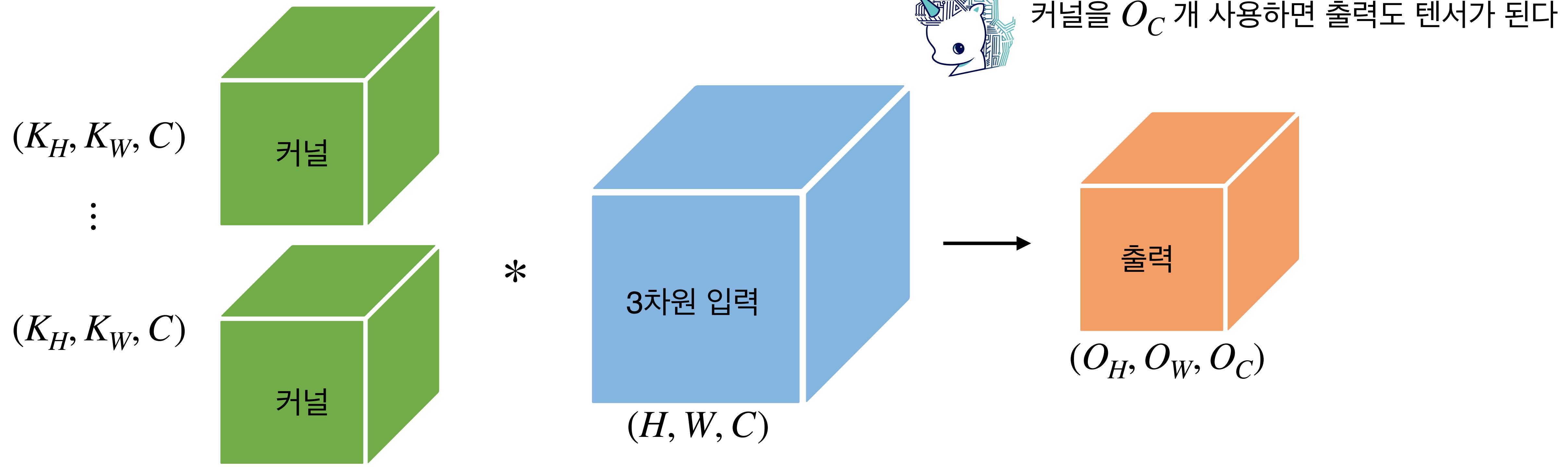
- 채널이 여러개인 2차원 입력의 경우 2차원 Convolution 을 채널 개수만큼 적용한다고 생각하면 됩니다. 텐서를 직육면체 블록으로 이해하면 좀 더 이해하기 쉽습니다



# 2차원 Convolution 연산 이해하기

CNN 첫걸음

- 채널이 여러개인 2차원 입력의 경우 2차원 Convolution 을 채널 개수만큼 적용한다고 생각하면 됩니다. 텐서를 직육면체 블록으로 이해하면 좀 더 이해하기 쉽습니다

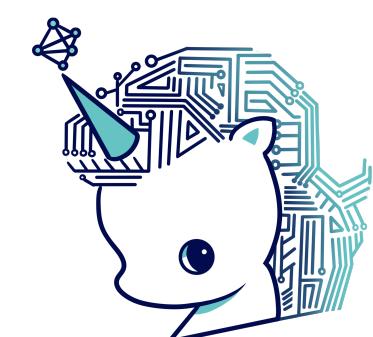


# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} [f * g](x) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial g}{\partial x}(x - y)dy \\ &= [f * g'](x)\end{aligned}$$

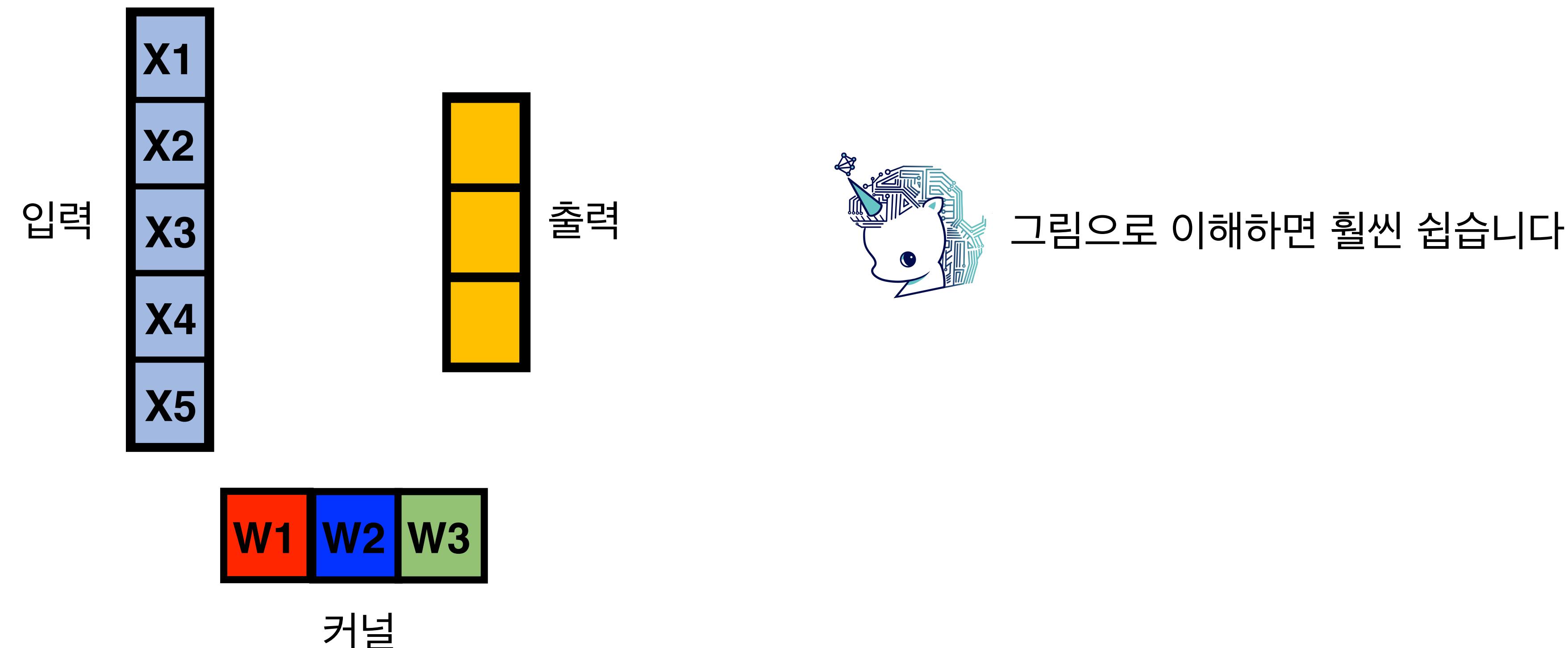


Discrete 일 때도 마찬가지로 성립한다

# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

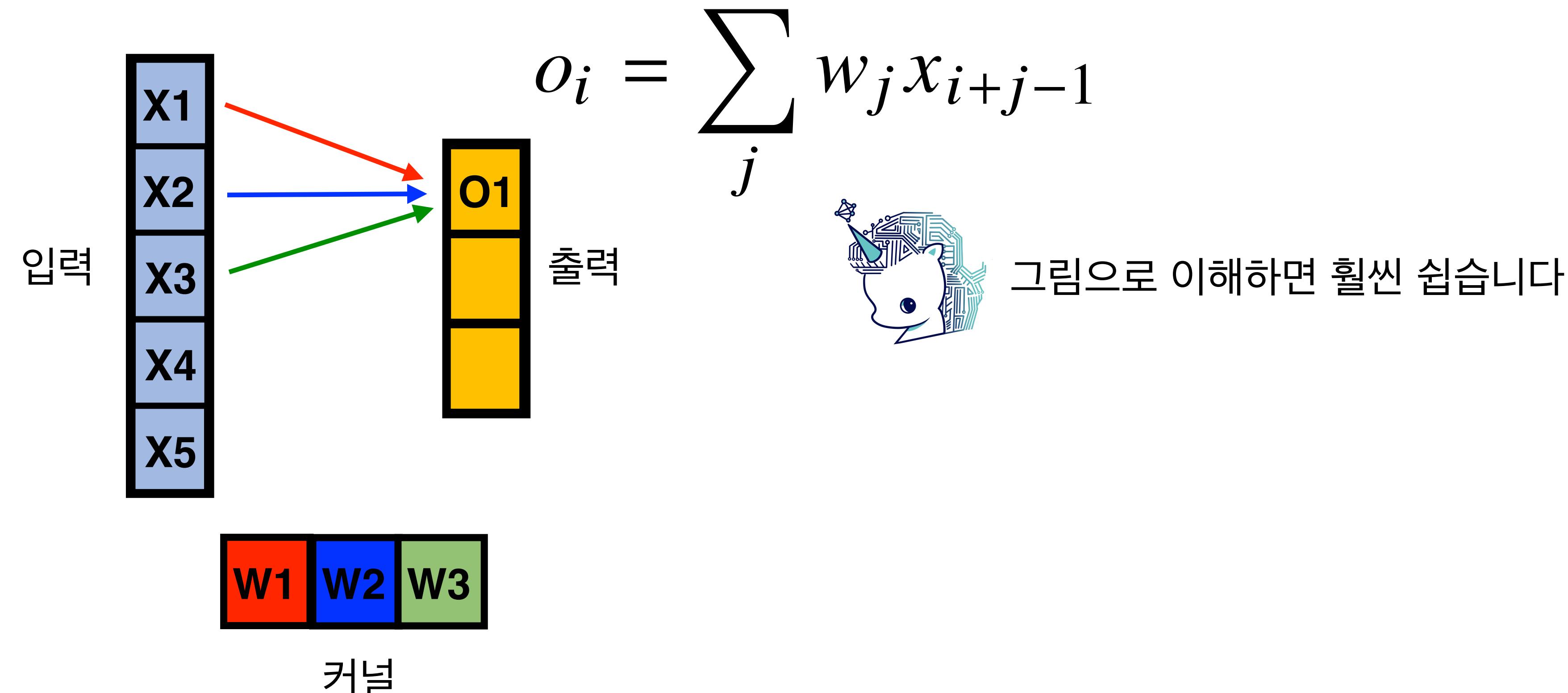
- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다



# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

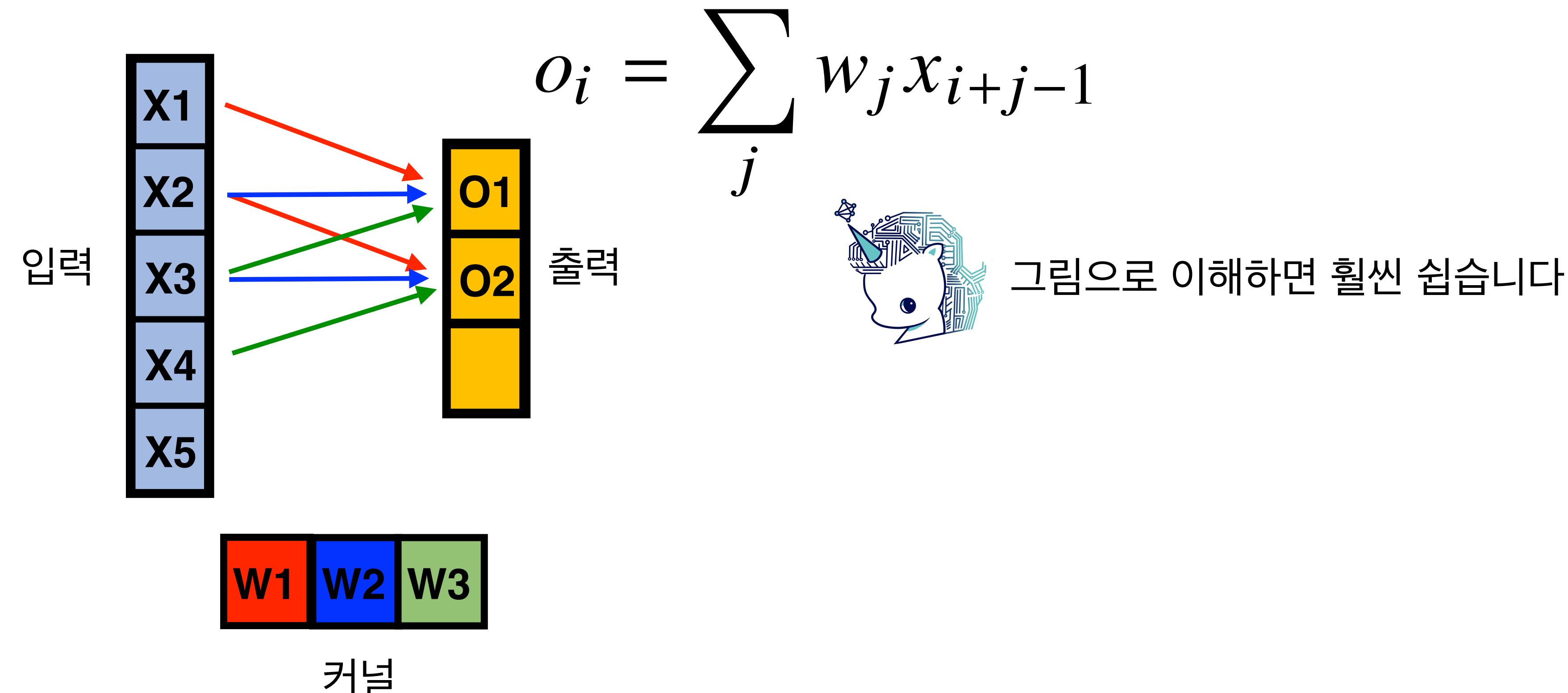
- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다



# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

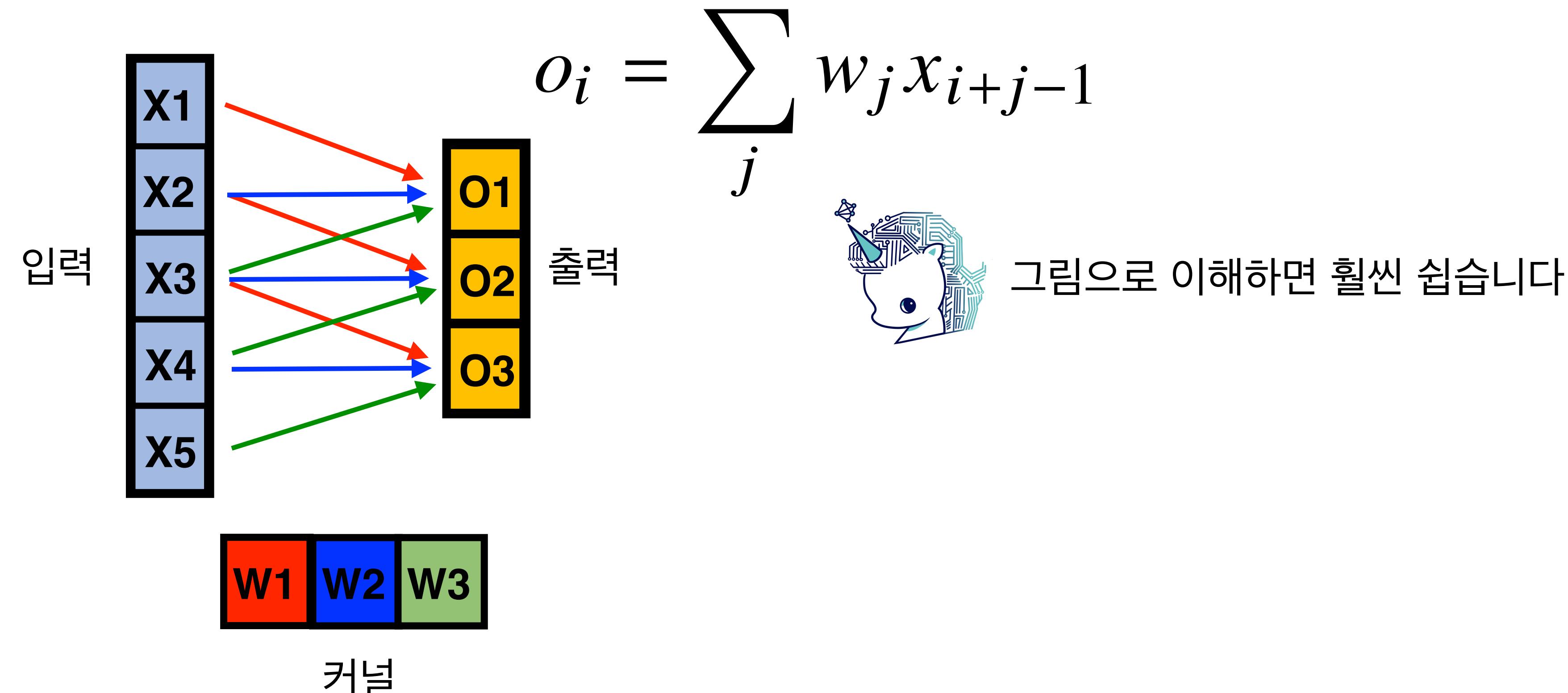
- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다



# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

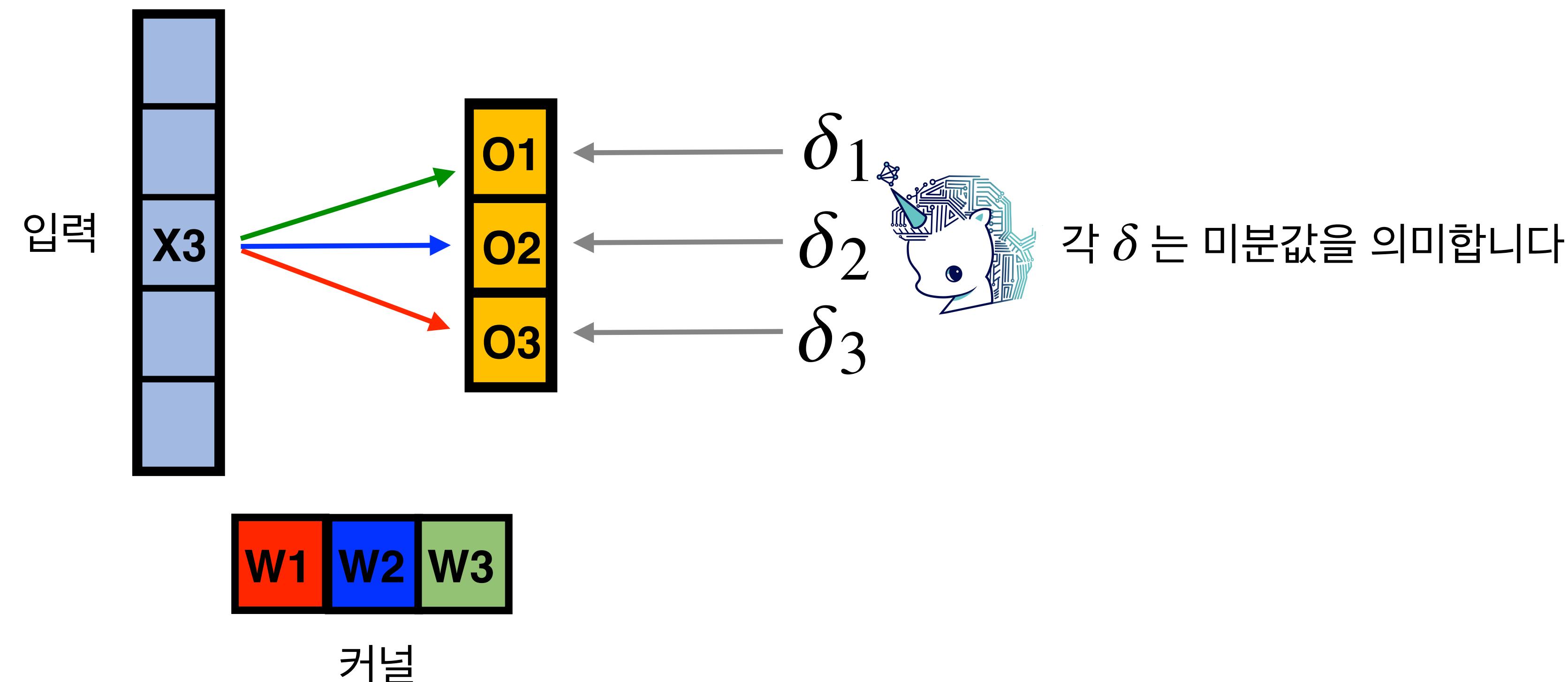
- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다



# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

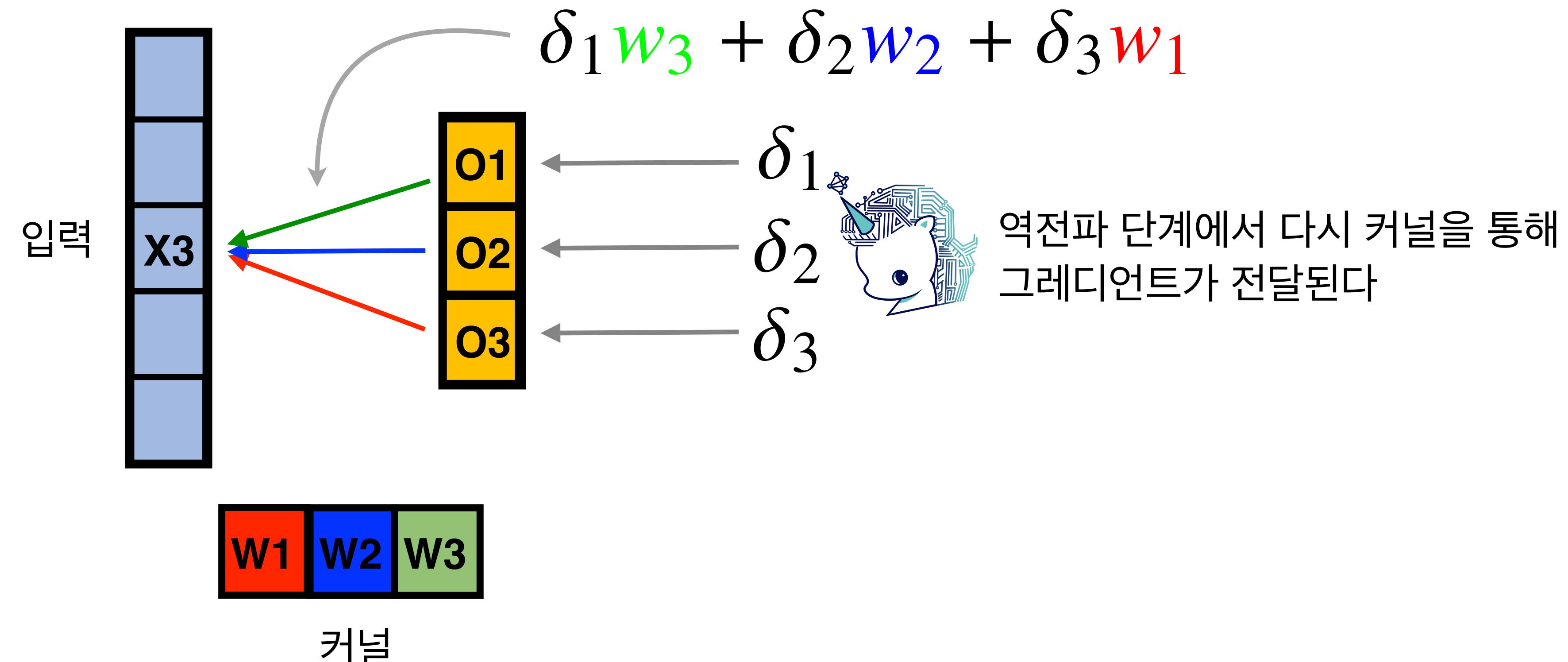
- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다



# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

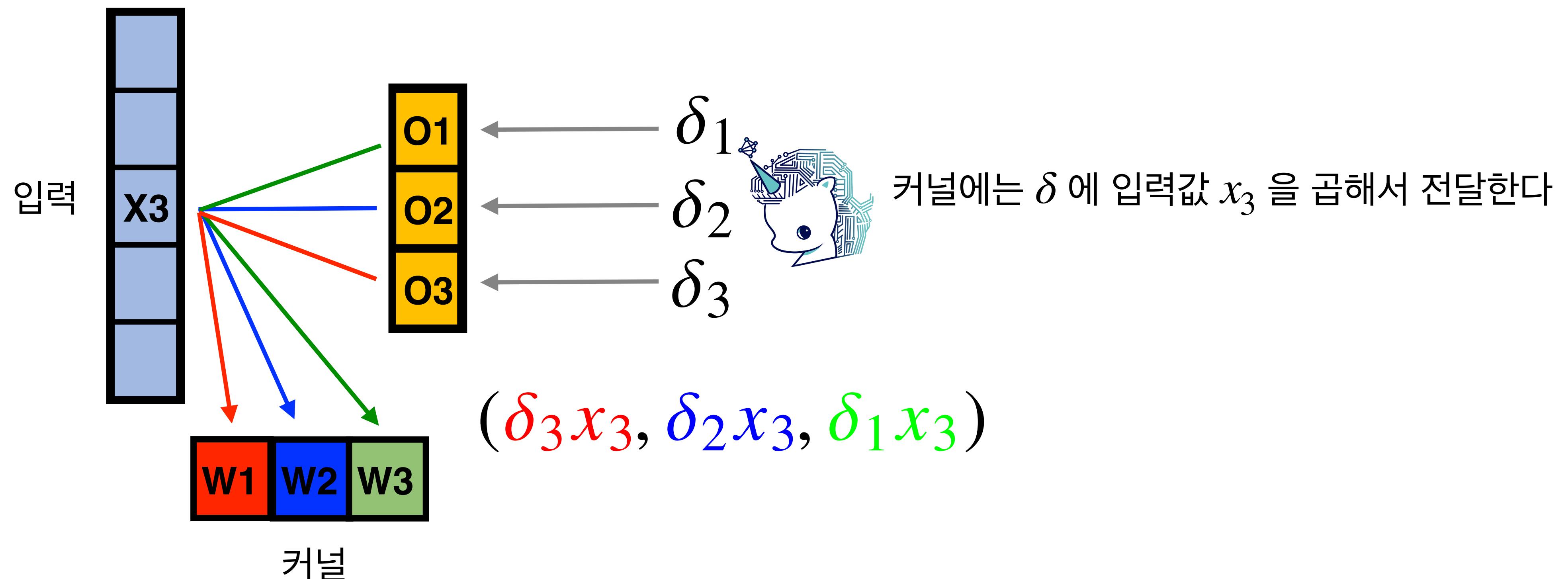
- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다



# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

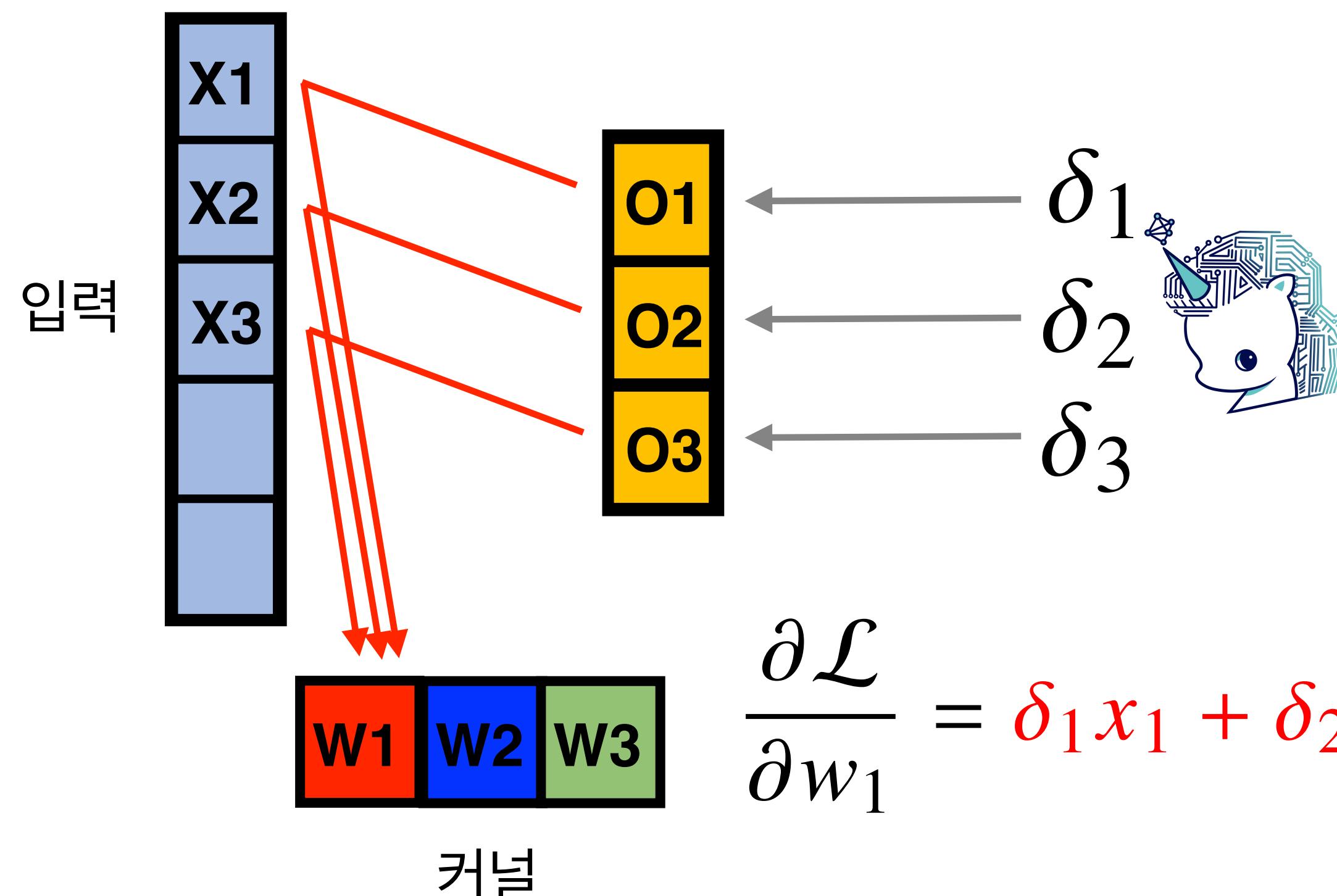
- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다



# Convolution 연산의 역전파 이해하기

CNN 첫걸음

- Convolution 연산은 커널이 모든 입력데이터에 공통으로 적용되기 때문에 역전파를 계산할 때도 convolution 연산이 나오게 됩니다



$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = \sum_j \delta_j x_{i+j-1}$$

각 커널에 들어오는 모든 그레디언트를 더하면 결국 convolution 연산과 같다

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1} = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3$$

# THE END

---

다음 시간에 보아요!