Frageliste zur Linearen Algebra I

aus Protokollen entnommen

Paul Hoger

09.04.2019

1. Frage Wann ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar?

$$A * x = b$$

Antwort Das LGS ist lösbar, wenn $Rang(A) = Rang(A|b)$.

2. Frage Was ist der Rang einer Matrix A?

Antwort Der Rang $Rang(A)$ einer Matrix $A \in K^{p \times q}$ wird definiert als der Rang der eindeutig bestimmten Treppenform T von Gestalt $T = C \cdot A, \quad C \in \mathrm{GL}_p(K)$.
Oder: Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten.

3. Frage Wie wird ein LGS gelöst?

Antwort Wende das Gaußverfahren auf die Matrix an, bis diese Treppenform hat.

4. Frage Können Umformungen auch mittels Matrizenmultiplikation durchgeführt werden?

Antwort Ja, für jede Umformung gibt es eine Matrix, die diese Umformung durch Multiplikation erzeugt. Die Matrizen heißen Additionsmatrizen und Vertauschungsmatrizen.

5. Frage Was muss an Id_3 multipliziert werden, damit die 2. Zeile 2-mal auf die 3. Zeile addiert wird?

Antwort Es gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Frage Wie ist eine lineare Abbildung zwischen den beiden K-Vektorräumen V und W definiert?

Antwort Sei K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Eine (K-)lineare Abbildung von V nach W ist eine Abbildung $\Phi : V \to W$, für die gilt:

$\forall u, v \in V : \Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$

$\forall a \in K, v \in V : \Phi(av) = a\Phi(v)$

7. Frage Wie bildet man die Abbildungsmatrix von Φ?

Antwort Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, B eine Basis von V und C eine Basis W. Bestimme für jeden Basisvektor aus B $\Phi(b)$ und stelle den Vektor anschließend als Linearkombination aus C dar. Trage nun die Koeffizienten spaltenweise in eine Matrix ein.

8. Frage Wie wird die Abbildungsmatrix durch einen Basiswechsel verändert?

Antwort Man bildet bzgl. einer anderen Basis ab. Daher ändern sich die einzelnen Spalten, da man die neuen Basisvektoren abbildet.

9. Frage Wie berechnet man einen Basiswechsel?

Antwort Es seien V, W zwei K-Vektorräume und Φ ein Homomorphismus von V nach W. Weiter seien B, $\tilde{B}$ zwei Basen von V und C, $\tilde{C}$ zwei Basen von W. Dann gilt:
$D_{\tilde{C}\tilde{B}}(\Phi) = D_{\tilde{C}C}(Id_W) * D_{CB}(\Phi) * D_{B\tilde{B}}(Id_V)$

10. Frage Sei B ähnlich zu A. Es gilt also: $B = S^{-1} * A * S$ für eine geeignete Matrix S. Wie kann man S bestimmen?

Antwort Da Eigenwerte eine Ähnlichkeitsinvariante ist, muss gelten $T^{-1} * A * T = D = U^{-1} * B * U$, wobei T, U geeignet gewählt sind und D die Diagonalmatrix ist.
Also gilt $T^{-1} * A * T = U^{-1} * B * U$. Man stellt nach B um und erhält: $(U * T^{-1}) * A * (T * U^{-1}) = B$. Nun sei $S := T * U^{-1}$. Daraus folgt:
$S^{-1} * A * S = B$

11. Frage Wann ist der Endomorphismus ϕ bzw. A diagonalisierbar?

Antwort Es gilt:

$$\begin{aligned}
A \text{ ist diagonalsierbar} &\iff A \text{ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix} \\
&\iff \text{alle Eigenwerte sind verschieden} \\
&\iff \forall \lambda \in Spec(A) : \mu_g(\lambda) = \mu_a(\lambda) \\
&\iff \text{Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren} \\
&\iff V \text{ ist direkte Summe der Eigenräume} \\
&\iff dim(V) = \sum_{\lambda \in Spec(\Phi)} dim(Eig(\Phi, \lambda))
\end{aligned}$$

12. Frage Nenne eine Matrix, die nicht diagonalisierbar ist.

Antwort $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Frage Was ist ein homogenes Gleichungssystem?

Antwort Ein homogenes LGS hat die Form $A * x = 0$.

14. Frage Wie ist der Kern einer Abbildung Φ definiert?

Antwort Sei $\Phi : V \to W$. Dann ist der $Kern(\Phi) = \{v \in V | \Phi(v) = 0\}$.

15. Frage Was ist die Dimensionsformel von Φ?

Antwort $dim(V) = dim(Bild(\Phi)) + dim(Kern(\Phi))$

16. Frage Was ist das Besondere an einem invarianten Untervektorraum?

Antwort Falls U ein invarianter Untervektorraum ist, dann gilt $\Phi(U) \subseteq U$.

17. Frage Wie sind Eigenvektoren definiert?

Antwort Ein Vektor $v \in V$ heißt Eigenvektor, wenn gilt:
$v \neq 0$ und $\exists k \in K : \Phi(v) = k * v$

18. Frage Wie berechnet man Eigenwerte?

Antwort Man berechnet die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms.

19. Frage Wie sieht das charakteristische Polynom aus?

Antwort Das charakteristische Polynom einer Matrix A ist gegeben durch $CP_A(\lambda) = det(A-\lambda Id)$.

20. Frage Warum sind die Nullstellen des Charakteristischen Polynoms genau die Eigenwerte?

Antwort Für jeden Eigenwert λ gilt:

$$\begin{aligned}
& A * v = \lambda * v \\
\iff & (Av - \lambda * Id * v) = 0 \\
\iff & (A - \lambda * Id)v = 0 \\
\iff & \text{Satz vom Nullprodukt: } (A - \lambda * Id) = 0 \\
\iff & (A - \lambda * Id) \text{ ist nicht invertierbar} \\
\iff & det(A - \lambda * Id) = 0 \\
\iff & \lambda \text{ ist Nullstelle vom charaktersitischen Polynom}
\end{aligned}$$

21. Frage Wie viele Eigenwerte kann es geben?

Antwort Für $A \in K^{n \times n}$ gilt: Es gibt höchstens n Eigenwerte.

22. Frage Wie lautet die Definition einer Diagonalmatrix?

Antwort Eine Diagonalmatrix ist eine Matrix folgender Form: $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$

23. Frage Wann sind zwei Matrizen ähnlich?

Antwort Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist ähnlich zu $B \in K^{n \times n}$, falls es eine Matrix $S \in GL_n^K$ gibt mit $B = S^{-1} * A * S$.

24. Frage Beweisen Sie, dass die Determinante eine Ähnlichkeitsinvariante ist.

Antwort Seien A und B ähnlich Matrizen zueinander. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
det(B) &= det(S^{-1} * A * S) \\
&= det(S^{-1}) * det(A) * det(S) \\
&= det(S^{-1}) * det(S) * det(A) \\
&= det(S^{-1} * S) * det(A) \\
&= det(Id) * det(A) \\
&= 1 * det(A) \\
&= det(A)
\end{aligned}$$

25. Frage Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von A und die Dimension vom Kern von A. Was lässt sich über die Eigenwerte sagen?

Antwort Der Rang der Matrix ist 2. $dim(Kern(A)) = 1$, da $dim(Bild(A)) = dim(A) - dim(Bild(A)) = 3 - 2 = 1$.
Da A keinen vollen Rang hat, gilt:
$det(A) = 0 \iff det(A - 0 * Id) = 0 \iff 0 \in Spec(A)$

26. Frage Beweisen Sie die Dimensionsformel: $dim(U+W) = dim(U)+dim(W)-dim(U \cap W)$

Antwort Sei B_1 eine Basis von $U \cap W$. Mithilfe der Basisergänzung lässt sich B_1 zu einer Basis B von U ergänzen, analog lässt sich B_1 zu einer Basis C von W ergänzen. Dann gilt $B \cap C = B_1$, denn die Elemente von $B \cap C$ liegen ja alle in $U \cap W$, also in dem von B_1 erzeugten Vektorraum. Außerdem ist $B \cup C$ linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{v \in B \cup C} \lambda_v v = 0, \lambda_v \in K$$

folgt:

$$\sum_{v \in B} \lambda_v v = - \sum_{v \in C \setminus B_1} \lambda_v v$$

Die rechte Seite liegt in W, die linke Seite in U, also sind linke und rechte Seite im Durchschnitt $U \cap W$. Das geht für die rechte Seite nur, wenn alle $\lambda_v, v \in C \setminus B_1$, verschwinden (also Null sind). Damit sind überhaupt alle λ_v's Null, also $B \cup C$ linear unabhängig. Also ist $B \cup C$ eine Basis von $U + W$, und es gilt:
$dim(U + W) = |B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$

27. Frage Was sagt der Basisergänzungssatz aus?

Antwort Eine linear unabhängige Teilmenge kann zu einer Basis ergänzt werden.

28. Frage Wie hängt der Kern mit Injektivität zusammen?

Antwort Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt
Φ injektiv $\iff Kern(\Phi) = \{0\}$.

29. Frage Zeigen Sie: $\text{Kern}(\Phi) = 0 \Rightarrow \Phi$ injektiv

Antwort Sei $Kern(\Phi) = 0$. Dann gilt für alle $v_1, v_2 \in V$ mit $\Phi(v_1) = \Phi(v_2)$:
$\Rightarrow \Phi(v_1) - \Phi(v_2) = 0$
$\Rightarrow \Phi(v_1 - v_2) = 0$
$\Rightarrow (v_1 - v_2) \in Kern(\Phi)$
$\Rightarrow$ da $Kern(\Phi) = \{0\} \Rightarrow (v_1 - v_2) = 0$
$\Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \Phi$ ist injektiv.

30. Frage Für was benutzt man Determinanten?

Antwort Eigenwerte bestimmen durch das charakteristische Polynom, Matrizen auf Invertierbarkeit prüfen

31. Frage Zählen Sie Ähnlichkeitsinvarianten auf.

Antwort Spur, Rang, Determinante, charakteristisches Polynom, Minimalpolynom, Eigenwerte, Jordan-Normalform

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

32. Frage Berechnen Sie den Rang von A.

Antwort Der Rang von A ist 2.

33. Frage Bestimmen Sie die Dimension vom Kern von A.

Antwort Der $Kern(A)$ ist gleich 1. (-1-Trick oder Dimensionsformel)

34. Frage Geben Sie die allgemeine Formel für die Dimension vom Kern, in der der Rang vorkommt.

Antwort Sei $A \in R^{p \times q}$. Dann gilt:
$dim(Kern(A)) = q - Rang(A)$

35. Frage Was ist ein Vektorraumhomomorphismus?

Antwort Ein Vektorraumhomomorphismus ist eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.
Für $\Phi : V \to W$ muss also gelten:

$$\forall u, v \in V : \Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$$

$$\forall a \in K, v \in V : \Phi(av) = a\Phi(v)$$

36. Frage Wie lautet die Ungleichung zwischen der algebraischen und geometrischen Vielfachheit?

Antwort Für $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ gilt $1 \leq \mu_g(\Phi, \lambda) \leq \mu_a(\Phi, \lambda)$

37. Frage Beweisen Sie die Ungleichung der algebraischen und geometrischen Vielfachheit.

Antwort Es ist klar, dass $\mu_g(\Phi, \lambda) \geq 1 \iff \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) \iff \mu_a(\Phi, \lambda) \geq 1$.

Denn die erste Äquivalenz definiert geradezu die Eigenwerte und die zweite Äquivalenz nutzt aus, dass $CP_\Phi(X)$ genau dann durch $(X-\lambda)$ teilbar ist, wenn $CP_\Phi(\lambda) = 0$ (siehe Teilbarkeit im Polynomring).
Nun sei $\lambda \in Spec(\Phi)$. Wir wählen eine Basis $\{b_1, ..., b_d\}$ von $Eig(\Phi, \lambda)$ und ergänzen sie zu einer Basis $B := \{b_1, ..., b_e\}$ von V.
8.2.4 sagt uns $D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda * I_d & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, mit $C \in K^{d\times(e-d)}$ und $D \in K^{(e-d)\times(e-d)}$.
Daraus aber ergibt sich:

$$\begin{aligned} CP_\Phi(X) &= det\begin{pmatrix} (X-\lambda) * I_D & -C \\ 0 & XI_{e-d} - D \end{pmatrix} \\ &= det((X-\lambda) * I_d) * det(XI_{e-d} - D) \\ &= (X-\lambda)^d * CP_D(X) \end{aligned}.$$

Nach Konstruktion ist $d = \mu_g(\Phi, \lambda)$, und es folgt:
Für $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ gilt $1 \leq \mu_g(\Phi, \lambda) \leq \mu_a(\Phi, \lambda)$

38. Frage Was ist der Rang des Charakteristischen Polynoms?

Antwort Das charakteristische Polynom ist ein normiertes Polynom vom Grad n.

39. Frage Was muss gelten, damit man aus Injektivität auch Surjektivität folgern kann?

Antwort Sei $f : A \to B$. Falls A und B Vektorräume sind, muss gelten: $dim(A) = dim(B)$. Ansonsten muss $|A| = |B|$ gelten, wobei A, B endlich sind.

40. Frage Nennen Sie die Dimensionsformel, die Untervektorräume behandelt.

Antwort Seien U, W Untervektorräume von dem Vektorraum V. Dann gilt:
$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$

41. Frage Was sagt der Satz von Cayley-Hamilton?

Antwort Sei Φ ein Endomorphismus von dem Vektorraum V. Dann gilt:
$CP_\Phi(\Phi) = 0$

42. Frage Wie ist das Bild von einem Homomorphismus definiert?

Antwort Sei $\Phi : V \to W$ ein Homomorphismus. Dann ist $Bild(\Phi) = \{\Phi(v)|v \in V\}$

43. Frage Nennen Sie einen endlich-dimensionalen Körper.

Antwort Z/pZ ist ein Körper, wobei p eine Primzahl ist.

44. Frage Was ist ein Vektorraum?

Antwort Es sei K ein Körper. Ein Vektorraum über K ist eine kommutative Gruppe $(V, +)$ für die zusätzlich die Abbildung der skalaren Multiplikation definiert ist:
$\cdot : K \times V$ mit $(a, v) \mapsto a \cdot v$
Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:
$\forall v \in V : 1_K \cdot v = v$
$\forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
$\forall a, b \in K, u, v \in V$

$$a \cdot (u + w) = a \cdot u + a \cdot v$$
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

45. Frage Beweisen Sie, dass $0_K * v = 0$

Antwort Sei $n := 0_K * v$. Dann gilt:
$n = 0_K * v = (0_K + 0_K) * v = 0_K * v + 0_K * v = n + n$
Wenn wir nun auf beiden Seiten das additive Inverse zu n addieren, folgt $n = 0_V$.

46. Frage Was ist eine Basis?

Antwort Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt eine Basis von V, falls sich jeder Vektor $v \in V$ auf genau eine Art als Linearkombination von B schreiben lässt.

47. Frage Was sind Ähnlichkeitsinvarianten?

Antwort Eine Ähnlichkeitsinvariante ist eine Größe, die sich beim Übergang von einer Matrix A zu einer ähnlichen Matrix B nicht ändert.

48. Frage Was ist ein Endomorphismus?

Antwort Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ein Endomorphismus ist eine Abbildung $\Phi : V \to V$, für die gilt:

$$\forall u, v \in V : \Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$$
$$\forall a \in K, v \in V : \Phi(av) = a\Phi(v)$$

49. Frage Was ist ein Körper?

Antwort Ein Körper ist ein kommutativer Ring K, indem $0_K \neq 1_K$ gilt und jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist: $K^\times = K \setminus \{0\}$

50. Frage Warum gibt es Eigenwerte gleich 0, wenn die Matrix nicht vollen Rang besitzt?

Antwort Da die Matrix A keinen vollen Rang hat, gilt:
$det(A) = 0 \iff det(A - 0 * Id) = 0 \iff 0 \in Spec(A)$

Oder: $0 \in Spec(A) \Rightarrow Eig(\Phi, 0) \neq \{0\}$. Aber $Eig(\Phi, 0) = Kern(\Phi)$.
$\Rightarrow$ Kern ist nicht trivial $\Rightarrow$ Matrix hat nicht vollen Rang

51. Frage Was ist der Zusammenhang zwischen Eigenwerte und Kern?

Antwort Es gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(v) = \lambda * v &\iff \Phi(v) - \lambda * v = 0 \\ &\iff (\Phi - \lambda * Id_V)(v) = 0 \\ &\iff v \in Kern(\Phi - \lambda * Id_V)\end{aligned}$$

$Eig(\Phi, \lambda) := Kern(\Phi - \lambda * Id_V)$

52. Frage Was ist die Spur?

Antwort Für eine Matrix $A \in K^{d \times d}$ ist die Summe der Diagonalelemente die Spur von A.
$Spur(A) := \sum_{i=1}^{d} a_{ii}$

53. Frage Nennen Sie ein Beispiel für eine lineare Abbildung.

Antwort Matrixmultiplikation $\Phi_A(x) = A * x$, Identität, Nullabbildung

54. Frage Kann man bei gleicher Spur die Ähnlichkeit zweier Matrizen folgern?

Antwort Nein, kann man nicht. Man kann nur aus Ähnlichkeit die gleiche Spur folgern.

55. Frage Nennen Sie zwei Matrizen mit gleicher Spur, die aber nicht ähnlich sind.

Antwort Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $A' := Id_3$. Offensichtlich gilt $Spur(A) = Spur(A') = 3$, aber A ist nicht zu A' ähnlich.

56. Frage Was ist die algebraische und geometrische Vielfachheit?

Antwort Sei Φ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraum und $\lambda \in K$.
Dann heißt $\mu_g(\Phi, \lambda) := dim(Eig(\Phi, \lambda))$ die geometrische Vielfachheit.
Die Zahl $\mu_a(\Phi, \lambda) := max\{e \in N_0 | 0 \leq e \leq dim(V)$ und $(X - \lambda)^e$ teilt $CP_\Phi(X)\}$ heißt algebraische Vielfachheit von λ für Φ (Nullstellenordnung).

57. Frage Bleibt die Diagonalisierbarkeit durch Spiegelung erhalten?

Antwort Ja, da bei einer Spiegelung lediglich die Spalten getauscht werden.

58. Frage Was heißt Lineare Abhängigkeit?

Antwort Es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors und innerhalb der Menge lässt sich ein Vektor als Linearkombination der anderen darstellen.

59. Frage Wie viele Nullstellen kann ein Polynom maximal haben?

Antwort Ein Polynom des Grads n kann maximal n Nullstellen haben.

60. Frage Was ist der Kern einer Abbildung?

Antwort Für eine lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ ist der Kern definiert als $Kern(\Phi) := \{v \in V | \Phi(v) = 0\} = \Phi^{-1}(\{0\})$.

61. Frage Was ist die Dimension eines Vektorraums?

Antwort Sei V ein K-Vektorraum, der ein endliches Erzeugendensystem enthält. Dann wird die Mächtigkeit einer Basis B von V die Dimension von V genannt.

62. Frage Was bedeutet Injektivität?

Antwort Eine Abbildung $f : A \to B$ ist injektiv, wenn gilt:
$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

63. Frage Warum kann der Kern einer injektiven Abbildung nur den Nullvektor enthalten?

Antwort Es gilt $\Phi(0) = 0 \in Kern(\Phi)$. Sobald ein anderer Vektor auf die Null abgebildet wird, ist die Abbildung nicht mehr injektiv.

64. Frage Welche Eigenschaft haben zwei Matrizen, die bei der Verwendung unterschiedlicher Basen den selben Endomorphismus beschreiben?

Antwort Sie sind ähnlich zueinander.

65. Frage Beweisen Sie, dass die Spur eine Ähnlichkeitsinvariante ist.

Antwort Es gilt $A' = S^{-1} * A * S$. Weiter gilt $Spur(A * B) = Spur(B * A)$. Daraus folgt:
$Spur(A') = Spur(S^{-1} * A * S) = Spur(A * S * S^{-1}) = Spur(A * Id) = Spur(A)$

66. Frage Was ist ein LGS?

Antwort Ein lineares Gleichungssystem ist eine Menge von linearen Gleichungen der Form $a_1 * x_1 + ... + a_n * x_n = b_1$.

67. Frage Ist $Z/6Z$ ein Körper?

Antwort Nein, nur für Primzahlen bilde die Menge einen Körper. Es gilt nämlich $3 * 2 = 0$. 3 ist also Nullteiler und zu Nullteilern gibt es kein Inverses.

68. Frage Wie sieht f^2 aus, wenn $f : V \to W$ und $Bild(f) \subseteq Kern(f)$?

Antwort f^2 muss die Nullabbildung sein.

69. Frage Welche Matrizen sind nicht invertierbar?

Antwort Die Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist nicht invertierbar, falls $det(A) = 0$ oder $\nexists B \in K^{n \times n}$: $A * B = B * A = Id_n$

70. Frage Was sagt der Zeilen- bzw. der Spaltenrang aus?

Antwort Das gibt den Rang der Matrix an und ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten. Weiter ist es die Dimension vom Bild der Matrix.

71. Frage Was ist der Betrag einer komplexen Zahlen?

Antwort Sei $z \in C$ mit $z = a + b * i$. Dann ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

72. Frage Was ist die Basiswechselmatrix?

Antwort Eine Matrix, die durch Multiplikation einen Basiswechsel hervorruft.

73. Frage Wann ist ein LGS eindeutig lösbar?

Antwort Ein LGS $A * x = b$ ist eindeutig lösbar, wenn $Rang(A) = Rang(A|b)$ und A vollen Rang hat.

74. Frage Wie kann man eine Matrix als Homomorphismus darstellen?

Antwort Jede Matrix stellt eine lineare Abbildung dar (siehe Abbildungsmatrix).

75. Frage Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von A.

Antwort Der Rang von A ist 1.

76. Frage Wieso hat eine $n \times n$-Matrix höchstens n Eigenwerte?

Antwort Angenommen eine $n \times n$ Matrix A hätte mehr als n Eigenwerte. Weiter sei $T := diag(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$. Weiter müsste gelten $T = S^{-1}AS$. Da aber $A \in K^{n \times n}$ ist, würde die Matrixmultiplikation nicht mehr funktionieren.

77. Frage Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von A und die Determinante.

Antwort Der Rang der Matrix ist 2. $\Rightarrow det(A) = 0$

78. Frage Beweisen Sie die Dimensionsformel: $dim(V) = dim(Bild(\Phi)) + dim(Kern(\Phi))$

Antwort

79. Frage Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen.

Antwort Eine lineare Abbildung kann mittels Abbildungsmatrix beschrieben werden.

80. Frage Was ist das Besondere an Matrizen, die die selbe Abbildung bezüglich unterschiedlicher Basen beschreiben?

Antwort Die Matrizen sind ähnlich zueinander.

81. Frage Was ist das Besondere an den Vektoren der Basiswechselmatrix, wenn man die Matrix diagonalisiert?

Antwort Die Spalten sind die Eigenvektoren.

82. Frage Wann hat das CP $X^2 + 1$ Nullstellen?

Antwort Falls $K = C$. Die zugehörigen Nullstellen wären $\pm i$.

83. Frage Wann ist eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ invertierbar?

Antwort Es gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist invertierbar} &\iff \exists S \in K^{n\times n} : AS = Id_n \\ &\iff Rang(A) = n \text{ bzw. } dim(Bild(\Phi)) = dim(V) \\ &\iff \text{Kern ist trivial} \\ &\iff 0 \text{ ist kein Eigenwert} \\ &\iff det(A) \neq 0 \\ &\iff \Phi \text{ ist bijektiv} \end{aligned}$$