

Exercice 6

(1) On a vu dans un exercice que la fonction $g : x \mapsto \sin(2x) - 2x$ était strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ . En déduire que l'on a $\sin(2x) < 2x$ pour tout $x > 0$.

(2) Faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) + 2x^2$
(Penser à utiliser la question 1) pour étudier le sens de variation !)

(3) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) \geq 1 - 2x^2$.

Exercice 53

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

(4) Donner le domaine de définition D_f de f . La fonction f est-elle paire, impaire, ou aucun des deux ?

(5)

(a) Expliquer pourquoi on a $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$ (et en particulier vérifier que cette expression est bien définie pour $x \in D_f$).

(b) En déduire que l'on a

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(6) Donnez les limites de f au bord du domaine de définition.

(7) Faites le tableau de variation de f et tracez son graphe.

(8) En utilisant les questions précédentes, résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation $(1-x^2)y' - y = 0$

(9) Bonus : quelles sont les solutions de l'équation $(1-x^2)y' - y = 0$ sur $]1, +\infty[$ et sur $] -\infty, -1[$?

(10) On pose $y_0(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

(a) Calculer la dérivée de y_0 .

(b) Démontrer que y_0 est une solution de l'équation

$$y' - \frac{1}{1-x^2}y = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

(c) En déduire toutes les solutions sur $] -1, 1[$ de l'équation

$$y' - \frac{1}{1-x^2}y = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Exercice 45 Exercice . 5min

Soit f une fonction.

(11) Quelle propriété de f peut s'écrire avec la phrase suivante :

$$\forall A > 0 \exists \eta > 0 \forall x |x - 2| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

(12) Faire la négation de la phrase ci-dessus.

Exercice 78 ♡♡ Placer dans le plan les points dont les affixes sont :

(1) $2i$

(5) $3 - 5i$

(2) -1

(6) $\sqrt{3}/2 + i/2$

(3) $1 + i$

(7) $\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)$

(4) $2 + 3i$

(8) $i(i + 1)$

Exercice 96 ♡ Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x) = e^{2x} - e^x,$

(3) $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}.$

(2) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1},$

Exercice 152 ♣ Calculez dans chaque cas une primitive des fonctions définies par les formules suivantes. Vous aurez parfois besoin d'une intégration par parties, parfois pas.

- | | |
|---|----------------------------|
| a) $x \cos(x)$ (dériver x et intégrer \cos) | f) $\frac{x}{(x^2 - 4)^2}$ |
| b) $x^2 \sin(x)$ (se ramener à l'exemple précédent) | g) $(2x + 1)e^x,$ |
| c) $x^2 e^x$ (se ramener à $x e^x$) | h) $\sin(x) \cos(x)^3$ |
| d) $\sin(5x) - 2 \cos(3x) + 4 \sin(2x)$ | i) $x \ln(x)$ |
| e) $\frac{x}{e^x}$ | j) $x^2 \ln(x)$ |
| | k) $\cos(x)^2$ |

1. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 5

(13) Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \cos(2x) - x$.

(14) Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \cos(2x) + 2x^2$.

On pourra utiliser le fait (démontré dans un exercice posé en classe) que pour tout $x > 0$ on a $\sin(2x) < 2x$

(15) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) < 1 - 2x^2$

Exercice 156 Exercice(). Calculez les dérivées des fonctions f définies

par :

(a) $f(x) = \frac{e^x \ln(x)}{x^2 + 2x^3},$

(b) $f(x) = 3^x \sin x,$

(c) $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1},$

- (d) $f(x) = \frac{4 \cos^2(x) - 3}{2 \cos(x)}$,
 (e) $f(x) = (x^4 - x^2 + 5)^4$,
 (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$,
 (g) $f(x) = (\ln(x))^3$,
 (h) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$,
 (i) $f(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 1}{x^2 + 2x + 5}$,
 (j) $f(x) = (1-x)\sqrt{x+1}$,
 (k) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$,
 (l) $f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 + 1}$,
 (m) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$,
 (n) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
 (o) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

2. COMPLEXES

Exercice 211♡♡

Donner un équivalent simple au voisinage du point demandé :

- | | |
|---|--|
| a) en 0, $\exp(\sqrt{1+x})$ | c) en 0, $\frac{5x^3 + 3\ln(x) + 2x}{4x^4 + 3x^2 + 1}$ |
| b) en $+\infty$, $\frac{5x^3 + 3\ln(x) + 2x}{4x^4 + 3x^2 + 1}$ | d) en 1, $\ln(x)$ |
| | e) en $+\infty$, $\ln(x+1) - \ln(x)$ |

Exercice 117♡

(16) Ecrivez (sans tricher!) les symboles de l'alphabet grec sur votre feuille : dans l'ordre,

alpha,bêta,gamma,delta,epsilon,zêta,êta,thêta, iota,kappa,
 lambda,mu,nu,xi,omicron,pi,rhê,sigma,tau,upsilon,phi,khi, psi, oméga

(17) Cachez l'énoncé, et lisez ce que vous avez écrit sur votre feuille.

Exercice 70♡

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Que signifient les assertions suivantes ? Dans chaque cas, donner un exemple de fonction vérifiant la propriété, et un exemple ne la vérifiant pas.

- (1) $\forall A > 0 \exists B > 0 \forall x > B \quad f(x) > A$
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x > A \quad |f(x)| < \varepsilon.$
- (3) $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x > A \quad |f(x) - 1| < \varepsilon.$
- (4) $\exists l \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x > A \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$
- (5) $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < \eta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon.$

$$(6) \forall \varepsilon > 0 \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| < \eta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

$$(7) \text{ Soit } x_0 \in \mathbb{R}. \forall \varepsilon > 0 \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$(8) \forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Exercice 67♥

On considère la phrase "Pour tout nombre réel x , il existe un entier naturel N tel que $N > x$."

(18) Traduire cette phrase à l'aide de quantificateurs.

(19) Écrire sa négation en français et avec des quantificateurs.

Exercice 65♣ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Voici plusieurs propriétés possibles de la fonction f . Quelles sont, en langage courant, leur signification ? Dans chaque cas, pouvez-vous trouver une fonction f qui vérifie cette propriété ? Et une autre qui ne la vérifie pas ?

$$(i) \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(y)$$

$$(ii) \forall x \in \mathbb{R} \exists T \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x + T)$$

$$(iii) \forall x \in \mathbb{R} \exists T \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = f(x + T)$$

$$(iv) \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$$

$$(v) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$$

Exercice 64♥

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(20) Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(i) f est croissante

(ii) f est impaire

(iii) f est constante

(iv) f est périodique de période 2π

(v) f n'est ni croissante ni décroissante

(vi) f est injective

(vii) f est surjective

(21) Écrire leur négation.

Exercice 57♥

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

$$(1) \text{ Pour tout réel } x, \text{ si } x \geq 3 \text{ alors } x^2 \geq 5.$$

$$(2) \text{ Pour tout entier naturel } n, \text{ si } n > 1 \text{ alors } n \geq 2.$$

$$(3) \text{ Pour tout réel } x, \text{ si } x > 1 \text{ alors } x \geq 2.$$

$$(4) \text{ Pour tout réel } x, x^2 \geq 1 \text{ est équivalent à } x \leq 1.$$

Exercice 55♥

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nier les propositions suivantes :

$$a) 0 \leq x \leq 1$$

$$b) x = 0 \text{ ou } (x \geq 0 \text{ et } x^2 = 1)$$

$$c) \forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 0 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Dans chaque cas, sont-elles vraies ou fausses ?