

Exercice 67♥

On considère la phrase "Pour tout nombre réel x , il existe un entier naturel N tel que $N > x$."

- (1) Traduire cette phrase à l'aide de quantificateurs.
- (2) Écrire sa négation en français et avec des quantificateurs.

Exercice 64♥

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- (1) Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
 - (i) f est croissante
 - (ii) f est impaire
 - (iii) f est constante
 - (iv) f est périodique de période 2π
 - (v) f n'est ni croissante ni décroissante
 - (vi) f est injective
 - (vii) f est surjective

- (2) Écrire leur négation.

Exercice 57♥

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

- (1) Pour tout réel x , si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$.
- (2) Pour tout entier naturel n , si $n > 1$ alors $n \geq 2$.
- (3) Pour tout réel x , si $x > 1$ alors $x \geq 2$.
- (4) Pour tout réel x , $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \leq 1$.

Exercice 55♥

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nier les propositions suivantes :

- a) $0 \leq x \leq 1$
- b) $x = 0$ ou $(x \geq 0 \text{ et } x^2 = 1)$
- c) $\forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 0$ ou $x = 0$ ou $y = 0$.

Dans chaque cas, sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 117♥

- (1) Écrivez (sans tricher !) les symboles de l'alphabet grec sur votre feuille : dans l'ordre,
alpha,bêta,gamma,delta,epsilon,zêta,êta,thêta, iota,kappa,
lambda,mu,nu,xi,omicron,pi,rhô,sigma,tau,upsilon,phi,khi, psi, oméga

- (2) Cachez l'énoncé, et lisez ce que vous avez écrit sur votre feuille.

Exercice 70♥

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Que signifient les assertions suivantes ? Dans chaque cas, donner un exemple de fonction vérifiant la propriété, et un exemple ne la vérifiant pas.

- (1) $\forall A > 0 \exists B > 0 \forall x > B \quad f(x) > A$

- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x > A \quad |f(x)| < \varepsilon.$
- (3) $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x > A \quad |f(x) - 1| < \varepsilon.$
- (4) $\exists l \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x > A \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$
- (5) $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < \eta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon.$
- (6) $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| < \eta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon.$
- (7) Soit $x_0 \in \mathbb{R}. \forall \varepsilon > 0 \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- (8) $\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Exercice 45 Exercice . 5min

Soit f une fonction.

- (1) Quelle propriété de f peut s'écrire avec la phrase suivante :

$$\forall A > 0 \exists \eta > 0 \forall x \quad |x - 2| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

- (2) Faire la négation de la phrase ci-dessus.

Exercice 15

Soit f une fonction.

- (1) Faites la négation des phrases suivantes :

- a) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(y) \text{ ou } x < 0$
- b) $\exists \varepsilon > 0 \exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x < \varepsilon \Rightarrow f(x) = y$

- (2) Ecrire avec des quantificateurs la propriété : " f n'est pas bornée".

Exercice 12

Soit f une fonction à valeur réelle et D son ensemble de définition.

Pouvez-vous donner une fonction f qui vérifie chacune des phrases suivantes? Et une qui ne la vérifie pas?

- a) $\forall x \in D \exists y \in D \quad f(x) > f(y)$
- b) $\exists x \in D \forall y \in D \quad f(x) = f(y)^2$

Exercice 8

Comment écrivez-vous avec des quantificateurs les phrases suivantes :

- a) f est surjective
- b) f n'est pas injective
- c) f est bornée
- d) f n'est pas croissante