Exercice 6

(1) On a vu dans un exercice que la fonction $g : x \mapsto \sin(2x) - 2x$ était strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que l'on a $\sin(2x) < 2x$ pour tout $x > 0$.

(2) Faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) + 2x^2$
(Penser à utiliser la question 1) pour étudier le sens de variation !)

(3) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) \geq 1 - 2x^2$.
Exercice 53
Soit f la fontion définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

(1) Donner le domaine de définition D_f de f. La fonction f est-elle paire, impaire, ou aucun des deux ?

(2)

(a) Expliquer pourquoi on a $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$ (et en particulier vérifier que cette expression est bien définie pour $x \in D_f$..
(b) En déduire que l'on a

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(3) Donnez les limites de f au bord du domaine de définition.

(4) Faites le tableau de variation de f et tracez son graphe.

(5) En utilisant les questions précédentes, résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation $(1-x^2)y' - y = 0$

(6) Bonus : quelles sont les solutions de l'équation $(1-x^2)y' - y = 0$ sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1[$?

(7) On pose $y_0(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$
(a) Calculer la dérivée de y_0.
(b) Démontrer que y_0 est une solution de l'équation

$$y' - \frac{1}{1-x^2}y = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

(c) En déduire toutes les solutions sur $]-1, 1[$ de l'équation

$$y' - \frac{1}{1-x^2}y = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Exercice 45Exercice . *5min*

Soit f une fonction.

(1) Quelle propriété de f peut s'écrire avec la phrase suivante :

$$\forall A > 0\ \exists \eta > 0 \forall x\ |x-2| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

(2) Faire la négation de la phrase ci-dessus.

Exercice 78♡♡ Placer dans le plan les points dont les affixes sont :

(1) $2i$
(2) -1
(3) $1+i$
(4) $2+3i$
(5) $3-5i$
(6) $\sqrt{3}/2+i/2$
(7) $\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$
(8) $i(i+1)$

Exercice 96♡ Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x) = e^{2x} - e^x$,
(2) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}$,
(3) $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$.

Exercice 152♣ Calculez dans chaque cas une primitive des fonctions définies par les formules suivantes. Vous aurez parfois besoin d'une intégration par parties, parfois pas.

a) $x\cos(x)$ (dériver x et intégrer cos)
b) $x^2\sin(x)$ (se ramener à l'exemple précédent)
c) x^2e^x (se ramener à xe^x)
d) $\sin(5x) - 2\cos(3x) + 4\sin(2x)$
e) $\dfrac{x}{e^x}$
f) $\dfrac{x}{(x^2-4)^2}$
g) $(2x+1)e^x$,
h) $\sin(x)\cos(x)^3$
i) $x\ln(x)$
j) $x^2\ln(x)$
k) $\cos(x)^2$

1. Equations différentielles

Exercice 5

(1) Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \cos(2x) - x$.

(2) Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \cos(2x) + 2x^2$.
On pourra utiliser le fait (démontré dans un exercice posé en classe) que pour tout $x > 0$ on a $\sin(2x) < 2x$

(3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) < 1 - 2x^2$

Exercice 156Exercice(). Calculez les dérivées des fonctions f définies par :

(a) $f(x) = \dfrac{e^x\ln(x)}{x^2+2x^3}$,
(b) $f(x) = 3^x\sin x$,
(c) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$,

(d) $f(x) = \dfrac{4\cos^2(x) - 3}{2\cos(x)}$,

(e) $f(x) = (x^4 - x^2 + 5)^4$,

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$,

(g) $f(x) = (\ln(x))^3$,

(h) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$,

(i) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 4x - 1}{x^2 + 2x + 5}$,

(j) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x + 1}$,

(k) $f(x) = \ln(\dfrac{2x - 1}{x - 3})$,

(l) $f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 + 1}$,

(m) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$,

(n) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

(o) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

2. Complexes

Exercice 211♡♡

Donner un équivalent simple au voisinage du point demandé :

a) en 0, $\exp(\sqrt{1+x})$

b) en $+\infty$, $\dfrac{5x^3 + 3\ln(x) + 2x}{4x^4 + 3x^2 + 1}$

c) en 0, $\dfrac{5x^3 + 3\ln(x) + 2x}{4x^4 + 3x^2 + 1}$

d) en 1, $\ln(x)$

e) en $+\infty$, $\ln(x + 1) - \ln(x)$

Exercice 117♡

(1) Ecrivez (sans tricher !) les symboles de l'alphabet grec sur votre feuille : dans l'ordre,
alpha,bêta,gamma,delta,epsilon,zêta,êta,thêta, iota,kappa, lambda,mu,nu,xi,omicron,pi,rhô,sigma,tau,upsilon,phi,khi, psi, oméga

(2) Cachez l'énoncé, et lisez ce que vous avez écrit sur votre feuille.

Exercice 70♡

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Que signifient les assertions suivantes ? Dans chaque cas, donner un exemple de fonction vérifiant la propriété, et un exemple ne la vérifiant pas.

(1) $\forall A > 0\ \exists B > 0\ \forall x > B \quad f(x) > A$
(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ \forall x > A \quad |f(x)| < \varepsilon$.
(3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ \forall x > A \quad |f(x) - 1| < \varepsilon$.
(4) $\exists l \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ \forall x > A \quad |f(x) - l| < \varepsilon$.
(5) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < \eta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$.

(6) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \eta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.

(7) Soit $x_0 \in \mathbb{R}.\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(8) $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Exercice 67♡

On considère la phrase "Pour tout nombre réel x, il existe un entier naturel N tel que $N > x$.

(1) Traduire cette phrase à l'aide de quantificateurs.

(2) Écrire sa négation en français et avec des quantificateurs.

Exercice 65♣ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Voici plusieurs propriétés possibles de la fonction f. Quelles sont, en langage courant, leur signification ? Dans chaque cas, pouvez-vous trouver une fonction f qui vérifie cette propriété ? Et une autre qui ne la vérifie pas ?

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ f(x) < f(y)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists T \in \mathbb{R}\ \ f(x) = f(x+T)$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists T \in \mathbb{R}^*\ \ f(x) = f(x+T)$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ f(x) = y$

(v) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ f(x) = y$

Exercice 64♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

(1) Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(i) f est croissante

(ii) f est impaire

(iii) f est constante

(iv) f est périodique de période 2π

(v) f n'est ni croissante ni décroissante

(vi) f est injective

(vii) f est surjective

(2) Écrire leur négation.

Exercice 57♡

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

(1) Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$.

(2) Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$.

(3) Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$.

(4) Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \leq 1$.

Exercice 55♡

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nier les propositions suivantes :

a) $0 \leq x \leq 1$

b) $x = 0$ ou ($x \geq 0$ et $x^2 = 1$)

c) $\forall y \in \mathbb{R}$, $xy \neq 0$ ou $x = 0$ ou $y = 0$.

Dans chaque cas, sont-elles vraies ou fausses ?