

# SOD333 - Rapport

Paul-Antoine Leveilley & Mila Rocco

Septembre 2022

Chaque rapport de TP doit faire environ 5 pages.

# 1 TP1: titre du TP

## 1.1 Introduction

On étudie la loi d'espérance  $\mu$  définie ci-dessous, où la fonction de densité  $q$  de l'échantillon étudié est inconnue:

$$\mu = \int_0^1 g(x)q(x)dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \left(= \frac{2}{\pi}\right)$$

## 1.2 Application "brute" de la Méthode de Monte Carlo

On décide d'étudier l'échantillon  $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ , qui suit la loi uniforme sur  $[0; 1]$  afin de vérifier qu'on estime bien  $\mu$  avec la méthode de Monte Carlo. Sa fonction de densité est donc  $q = U([0; 1])$ . On choisira  $N = 50$  pour l'étude empirique du problème.

Pour évaluer  $\mu$ , on applique la méthode de Monte Carlo, et on obtient l'approximation

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i)$$

- Calculer la variance théorique

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\mu}_N) &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}(g(X_i)) \\ &= \frac{1}{N^2} \times N \text{Var}\left(\cos\left(\frac{\pi X}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{N} \left( \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx - \left( \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{N} \left( \int_0^1 \frac{1 + \cos(\pi x)}{2} dx - \frac{4}{\pi^2} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right) \\ &\approx \frac{0,095}{N} \end{aligned}$$

- Estimer empiriquement la variance (prendre  $N = 50$ )

**résultats du TP.** On applique la méthode de Monte Carlo et on en tire un échantillon de  $NbMC = 1000$  tirages.

## 1.3 Echantillonnage pondéré

On génère un nouvel échantillon  $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$  suivant maintenant une fonction d'importance (FI)  $\tilde{q}$  au plus proche de  $g(x)$ :  $X_i \hookrightarrow \tilde{q}$ . Le changement de probabilité donne:

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)} \xrightarrow{p.s.} \mu$$

- Chercher une bonne FI

(idée: DL au voisinage de 0)

On approxime la fonction  $g$  par son développement à l'ordre 2 en 0 (l'ordre 2 ne suffit pas pour que  $g$  et  $\tilde{q}$  gardent le même signe sur  $[0, 1]$ . Rappelons le développement limité en 0 de la fonction cosinus:  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ . On prend donc pour Fonction d'Importance:

$$\tilde{q}_1(x) := 1 - \frac{\pi^2}{8} x^2$$

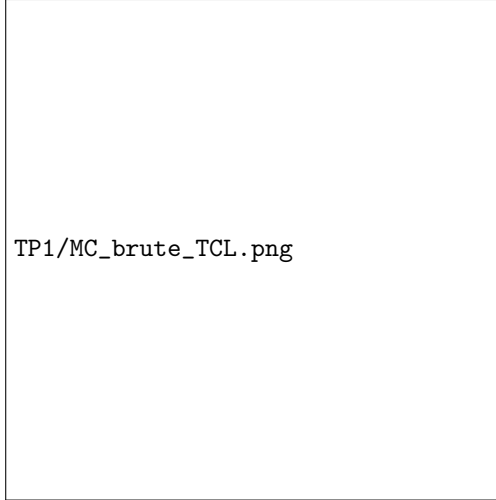


Figure 1: résultat du TCL

Il est important de prendre en compte le fait que  $\tilde{q}$  ne doit pas s'annuler si  $gq$  ne s'annule pas. Le DL doit donc être corrigé d'un facteur pour que  $\tilde{q}$  ne devienne pas négatif en  $x = 1$ . En  $x = 1$ , la fonction précédente vaut  $\delta = 1 - \frac{\pi^2}{8} < 0$ , donc on soustrait  $\delta$  à  $\tilde{q}$  pour obtenir notre nouvelle fonction d'importance :

$$\tilde{q}_2(x) := \frac{\pi^2}{8}(1 - x^2)$$

- Calculer la variance théorique

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_N) &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N Var \left( g(X_i) \frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)} \right) \\ &= \frac{1}{N} Var \left( \frac{\cos(\frac{\pi X}{2})}{\frac{\pi^2}{8}(1 - X^2)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left( \int_0^1 \left( \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{\frac{\pi^2}{8}(1 - x^2)} \right)^2 dx - \left( \int_0^1 \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{\frac{\pi^2}{8}(1 - x^2)} dx \right)^2 \right) \end{aligned}$$

### Application numérique (TP):

Les résultats du TCL appliqués aux échantillons produits mettent ici en valeur l'importance d'avoir une fonction d'importance du même signe que  $gq$ , et que notre développement limité en 0 de  $gq$  semble être une bonne approximation pour notre problème.

- Utiliser la méthode de rejet pour générer suivant la FI  
(Comparer la probabilité d'acceptation théorique à celle obtenue par simulations)  
On génère un échantillon suivant  $p$ , et on choisit pour majorant de  $g$ ,  $C = 1$  tels que

$$p(x) = \frac{g(x)q(x)}{\int_0^1 g(x)q(x)dx} \quad \& \quad g(x) \leq C, \quad \forall x \in [0; 1]$$

Probabilité d'acceptation théorique:

$$P_a = \frac{1}{C} \int_0^1 g(x)q(x)dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$$



Figure 2: représentation des fonctions  $g_q$  (en orange) et  $\tilde{q}$  (en bleu): à gauche  $\tilde{q}_1$ , à droite  $\tilde{q}_2$

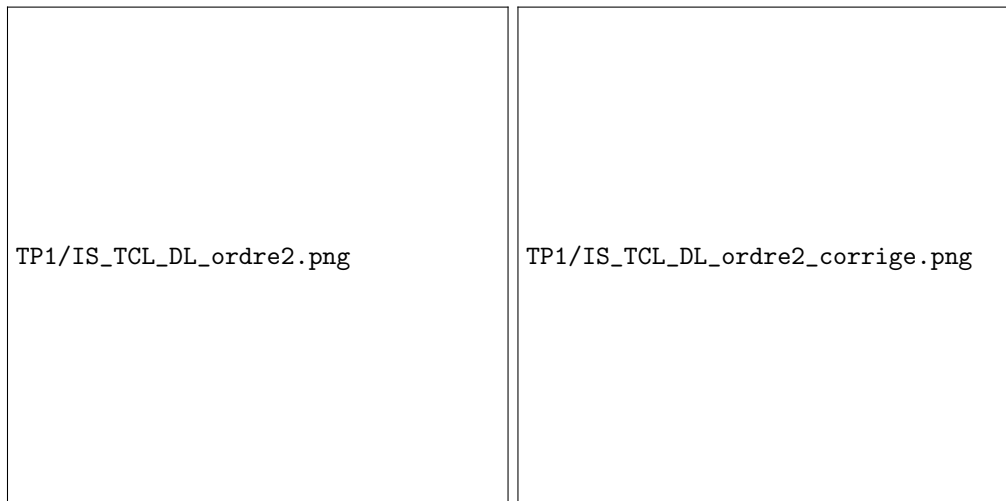


Figure 3: TCL appliqués respectivement à  $\tilde{q}_1$  (à gauche) et  $\tilde{q}_2$  (à droite)

- Estimer empiriquement la variance.

**application numérique (TP):** On obtient ...

## 1.4 Conclusion

On cherche maintenant à comparer les deux méthodes précédemment appliquées.

- Comparer le rapport des variances des 2 méthodes. Théoriquement et par simulations
- Valider par simulations les TCL pour les 2 méthodes en comparant la loi théorique (loi normale) à la loi empirique (histogramme)
- Comparer les budgets pour chaque méthode
- Calculer la variance de l'estimateur en prenant la FI optimale
- Même travail avec  $\tilde{q} = 2(1 - x)$ , ici on simule la FI par la méthode d'inversion de la CDF



## 2 TP2: titre du TP

### 2.1 Introduction

Dans ce TP, nous allons simuler la trajectoire d'un mobile, et tenter de retrouver ces valeurs grâce à des observations que nous aurons de sa trajectoire.

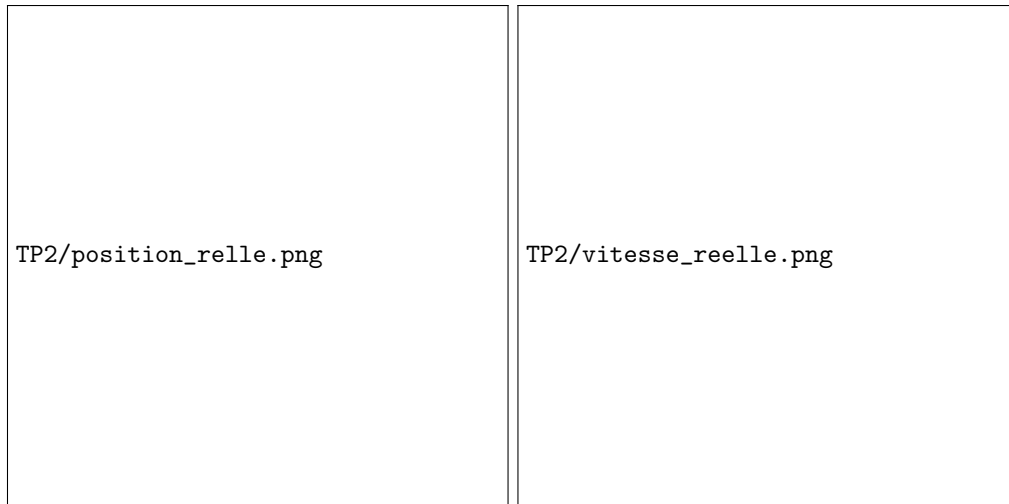


Figure 4: Trajectoire et vitesse associée, que l'on cherche à retrouver

### 2.2 Titre intermédiaire

### 2.3 Conclusion

### **3 TP3: titre du TP**

#### **3.1 Introduction**

#### **3.2 Titre intermédiaire**

#### **3.3 Conclusion**

## 4 TP4: titre du TP

### 4.1 Introduction

### 4.2 Titre intermédiaire

### 4.3 Conclusion