SOD333 - Rapport

Paul-Antoine Leveilley & Mila Rocco

September 2022

Chaque rapport de TP doit faire environ 5 pages.

1 TP1 : titre du TP

1.1 Introduction

On étudie la loi d'espérance µ définie ci-dessous, où la fonction de densité q de l'échantillon étudié est inconnue :

$$\mu = \int_0^1 g(x)q(x)dx = \int_0^1 cos(\frac{\pi x}{2})dx\ (= \frac{2}{\pi})$$

1.2 Application "brute" de la Méthode de Monte Carlo

On décide d'étudier l'échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq N}$, qui suit la loi uniforme sur $[0;1]$ afin de vérifier qu'on estime bien µ avec la méthode de Monte Carlo. Sa fonction de densité est donc $q = U([0;1])$. On choisira $N = 50$ pour l'étude empirique du problème.

Pour évaluer µ, on applique la méthode de Monte Carlo, et on obtient l'approximation

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)$$

- Calculer la variance théorique

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_N) &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var(g(X_i)) \\
&= \frac{1}{N^2} \times NVar(cos(\frac{\pi X}{2})) \\
&= \frac{1}{N}\left(\int_0^1 cos^2(\frac{\pi x}{2})dx - \left(\int_0^1 cos(\frac{\pi x}{2})dx\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\int_0^1 \frac{1+cos(\pi x)}{2}dx - \frac{4}{\pi^2}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right) \\
&\approx \frac{0,095}{N}
\end{aligned}$$

- Estimer empiriquement la variance (prendre N = 50)

résultats du TP. On applique la méthode de Monte Carlo et on en tire un échantillon de $NbMC = 1000$ tirages.

1.3 Echantillonage pondéré

On génère un nouvel échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ suivant maintenant une fonction d'importance (FI) $\tilde{q}$ au plus proche de $g(x)$: $X_i \hookrightarrow \tilde{q}$. Le changement de probabilité donne :

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)\frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)} \xrightarrow{p.s.} \mu$$

- Chercher une bonne FI

(idée : DL à l'ordre 2 au voisinage de 0)

On approxime la fonction g par son développement à l'ordre 2 en 0. Rappelons le développement limité en 0 de la fonction cosinus: $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On prend donc pour Fonction d'Importance :

$$\tilde{q}(x) := 1 - \frac{\pi^2}{8}x^2$$

$$(Prof: \ \tilde{q}(x) := \frac{3}{2}(1-x^2)$$

- Calculer la variance théorique

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_N) &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var\left(g(X_i)\frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)}\right) \\ &= \frac{1}{N} Var\left(\frac{cos(\frac{\pi X}{2})}{1-\frac{\pi^2}{8}X^2}\right) \\ &= \frac{1}{N}\left(\int_0^1 \left(\frac{cos(\frac{\pi x}{2})}{1-\frac{\pi^2}{8}x^2}\right)^2 dx - \left(\int_0^1 \frac{cos(\frac{\pi x}{2})}{1-\frac{\pi^2}{8}x^2} dx\right)^2\right) \end{aligned}$$

Application numérique (TP) :

- Utiliser la méthode de rejet pour générer suivant la FI
(Comparer la probabilité d'acceptation théorique à celle obtenue par simulations)
On génère un échantillon suivant p, et on choisit pour majorant de g, $C = 1$ tels que

$$p(x) = \frac{g(x)q(x)}{\int_0^1 g(x)q(x)dx} \quad \& \quad g(x) \leq C, \ \forall x \in [0;1]$$

Probabilité d'acceptation théorique :

$$P_a = \frac{1}{C}\int_0^1 g(x)q(x)dx = \int_0^1 cos(\frac{\pi x}{2})dx = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$$

- Estimer empiriquement la variance.
résultats du TP.

1.4 Conclusion

On cherche maintenant à comparer les deux méthodes précédemment appliquées.
- Comparer le rapport des variances des 2 méthodes. Théoriquement et par simulations

- Valider par simulations les TCL pour les 2 méthodes en comparant la loi théorique (loi normale) à la loi empirique (histogramme)

- Comparer les budgets pour chaque méthode

- Calculer la variance de l'estimateur en prenant la FI optimale

- Même travail avec $\tilde{q} = 2(1-x)$, ici on simule la FI par la méthode d'inversion de la CDF

2 TP2 : titre du TP

2.1 Introduction

2.2 Titre intermédiaire

2.3 Conclusion

3 TP3 : titre du TP

3.1 Introduction

3.2 Titre intermédiaire

3.3 Conclusion

4 TP4 : titre du TP

4.1 Introduction

4.2 Titre intermédiaire

4.3 Conclusion