SOD333 - Rapport

Paul-Antoine Leveilley & Mila Rocco

Septembre 2022

Chaque rapport de TP doit faire environ 5 pages.

1 TP1: titre du TP

1.1 Introduction

On étudie la loi d'espérance µ définie ci-dessous, où la fonction de densité q de l'échantillon étudié est inconnue:

$$\mu = \int_0^1 g(x)q(x)dx = \int_0^1 cos(\frac{\pi x}{2})dx \ (= \frac{2}{\pi})$$

1.2 Application "brute" de la Méthode de Monte Carlo

On décide d'étudier l'échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq N}$, qui suit la loi uniforme sur $[0;1]$ afin de vérifier qu'on estime bien µ avec la méthode de Monte Carlo. Sa fonction de densité est donc $q = U([0;1])$. On choisira $N = 50$ pour l'étude empirique du problème.

Pour évaluer µ, on applique la méthode de Monte Carlo, et on obtient l'approximation

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)$$

- Calculer la variance théorique

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_N) &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var(g(X_i)) \\
&= \frac{1}{N^2} \times NVar(cos(\frac{\pi X}{2})) \\
&= \frac{1}{N}\left(\int_0^1 cos^2(\frac{\pi x}{2})dx - \left(\int_0^1 cos(\frac{\pi x}{2})dx\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\int_0^1 \frac{1+cos(\pi x)}{2}dx - \frac{4}{\pi^2}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right) \\
&\approx \frac{0,095}{N}
\end{aligned}$$

- Estimer empiriquement la variance (prendre N = 50)

résultats du TP. On applique la méthode de Monte Carlo et on en tire un échantillon de $NbMC = 1000$ tirages.

1.3 Echantillonage pondéré

On génère un nouvel échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ suivant maintenant une fonction d'importance (FI) $\tilde{q}$ au plus proche de $g(x)$: $X_i \hookrightarrow \tilde{q}$. Le changement de probabilité donne:

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)\frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)} \xrightarrow{p.s.} \mu$$

- Chercher une bonne FI

(idée: DL au voisinage de 0)

On approxime la fonction g par son développement à l'ordre 2 en 0 (l'ordre 2 ne suffit pas pour que gq et $\tilde{q}$ gardent le même signe sur $[0,1]$. Rappelons le développement limité en 0 de la fonction cosinus: $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On prend donc pour Fonction d'Importance:

$$\tilde{q}_1(x) := 1 - \frac{\pi^2}{8}x^2$$

TP1/MC_brute_TCL.png

Figure 1: résultat du TCL

Il est important de prendre en compte le fait que $\tilde{q}$ ne doit pas s'annuler si gq ne s'annule pas. Le DL doit donc être corrigé d'un facteur pour que $\tilde{q}$ ne devienne pas négatif en $x = 1$. En $x = 1$, la fonction précédente vaut $\delta = 1 - \frac{\pi^2}{8} < 0$, donc on soustrait δ à $\tilde{q}$ pour obtenir notre nouvelle fonction d'importance :

$$\tilde{q}_2(x) := \frac{\pi^2}{8}(1 - x^2)$$

- Calculer la variance théorique

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_N) &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var\left(g(X_i)\frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)}\right) \\
&= \frac{1}{N} Var\left(\frac{cos(\frac{\pi X}{2})}{\frac{\pi^2}{8}(1 - X^2)}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\int_0^1 \left(\frac{cos(\frac{\pi x}{2})}{\frac{\pi^2}{8}(1 - x^2)}\right)^2 dx - \left(\int_0^1 \frac{cos(\frac{\pi x}{2})}{\frac{\pi^2}{8}(1 - x^2)} dx\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Application numérique (TP):

Les résultats du TCL appliqués aux échantillons produits mettent ici en valeur l'importance d'avoir une fonction d'importance du même signe que gq, et que notre développement limité en 0 de gq semble être une bonne approximation pour notre problème.

- Utiliser la méthode de rejet pour générer suivant la FI
(Comparer la probabilité d'acceptation théorique à celle obtenue par simulations)
On génère un échantillon suivant p, et on choisit pour majorant de g, $C = 1$ tels que

$$p(x) = \frac{g(x)q(x)}{\int_0^1 g(x)q(x)dx} \quad \& \quad g(x) \leq C, \ \forall x \in [0;1]$$

Probabilité d'acceptation théorique:

$$P_a = \frac{1}{C}\int_0^1 g(x)q(x)dx = \int_0^1 cos(\frac{\pi x}{2})dx = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$$

TP1/DL_ordre2_g.png

TP1/DL_ordre2_corrige.png

Figure 2: représentation des fonctions gq (en orange) et $\tilde{q}$ (en bleu): à gauche $\tilde{q}_1$, à droite $\tilde{q}_2$

TP1/IS_TCL_DL_ordre2.png

TP1/IS_TCL_DL_ordre2_corrige.png

Figure 3: TCL appliqués respectivement à $\tilde{q}_1$ (à gauche) et $\tilde{q}_2$ (à droite)

- Estimer empiriquement la variance.

application numérique (TP): On obtient ...

1.4 Conclusion

On cherche maintenant à comparer les deux méthodes précédemment appliquées.

- Comparer le rapport des variances des 2 méthodes. Théoriquement et par simulations

- Valider par simulations les TCL pour les 2 méthodes en comparant la loi théorique (loi normale) à la loi empirique (histogramme)

- Comparer les budgets pour chaque méthode

- Calculer la variance de l'estimateur en prenant la FI optimale

- Même travail avec $\tilde{q} = 2(1 - x)$, ici on simule la FI par la méthode d'inversion de la CDF

2 TP2: titre du TP

2.1 Introduction

Dans ce TP, nous allons simuler la trajectoire d'un mobile, et tenter de retrouver ces valeurs grâce à des observations que nous aurons de sa trajectoire.

`TP2/position_relle.png` `TP2/vitesse_reelle.png`

Figure 4: Trajectoire et vitesse associée, que l'on cherche à retrouver

2.2 Titre intermédiaire

2.3 Conclusion

3 TP3: titre du TP

3.1 Introduction

3.2 Titre intermédiaire

3.3 Conclusion

4 TP4: titre du TP

4.1 Introduction

4.2 Titre intermédiaire

4.3 Conclusion