Convex optimisation
Homework 1
Paul CHAUVIN

Exercise 1

1). Un rectangle est un ensemble convexe en tant qu'intersection d'un nombre fini de demi-~~espaces~~ plans

2). L'ensemble hyperbolique $\{x \in \mathbb{R}_+^2 / x_1 x_2 \geq 1\}$ est un ensemble convexe.

3). L'ensemble $\{x / \|x - x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2 \ \forall y \in S\}$ avec $S \subset \mathbb{R}^n$ est egal à l'ensemble $\bigcap_{y \in S} \{x / \|x-x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2\}$

or $\forall y \in S$, $\{x / \|x-x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2\}$ est un ~~ensemble convexe~~. demi plan

donc l'ensemble $\{x / \|x-x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2 \ \forall y \in S\}$ avec $S \subset \mathbb{R}^n$ est aussi convex, en tant qu'intersection ~~d'ensembles convex~~ finie de demi-plans.

4). L'ensemble proposé n'est pas convexe.

Contre-exemple : Prenons $S = (-1, 1)$;
$T = 0$

Nous avons donc $\{x / dist(x, S) \leq dist(x, T)\}$
$= \{x / x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\}$

Or cet ensemble n'est pas convexe.

5) On a $\{x / x + S_2 \subseteq S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} \{x / x + y \in S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} (S_1 - y)$

Il s'agit d'une intersection d'ensembles convexes. Donc l'ensemble proposé est convexe.

Exercise 2 :

1). $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$ n'est ni convexe ni concave car on a : $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est ni positive semi definie ou negative semi definie.

2). $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1 x_2}$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$ est convexe car on a

$$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{x_1 x_2} \begin{pmatrix} 2/x_1^2 & 1/x_1 x_2 \\ 1/x_1 x_2 & 2/x_2^2 \end{pmatrix}$$ qui a

tous ses termes positifs.

3). $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$ n'est ni convexe ni concave

car $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1/x_2^2 \\ -\frac{1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{pmatrix}$ n'est ni positive semi definie ou negative semi definie.

4). $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ | sur $\mathbb{R}^2_{++}$ tq $0 \leq \alpha \leq 1$ est

concave car $\nabla^2 f(x) = \alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \begin{pmatrix} 1/x_1^2 & \frac{1}{x_1 x_2} \\ \frac{1}{x_1 x_2} & -\frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$

$\leqslant 0$

Exercise 3

1). Prouvons que $f(X) = Tr(X^{-1})$ est convexe sur S_{++}^n

Soit $h(t) = f(Z + tV)$ avec $Z \succ 0$, $V \in S^n$

$$h(t) = tr((Z + tV)^{-1})$$
$$= tr(Z^{-1}(I + tZ^{-1/2}VZ^{-1/2})^{-1})$$
$$= tr(Z^{-1}Q(I + t\Lambda)^{-1}Q^t)$$
$$= tr(Q^T Z^{-1} Q(I + t\Lambda)^{-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (Q^T Z^{-1} Q)_{ii} (1 + t\lambda_i)^{-1} \quad (1)$$

tel que $Z^{-1/2}VZ^{-1/2} = Q\Lambda Q^t$: décomposition selon les valeurs propres.

Dans (1), h est une somme de matrices convexes, donc est convexe.

2) Prouvons que $f(x,y) = y^T X^{-1} y$ est convexe sur $S_{++}^n \times \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = y^T X^{-1} y$$
$$= 2 \sup_x \left(y^T x - \frac{1}{2} x^T X x\right)$$
$$= 2g^*(y) \quad \text{avec } g(x) = \frac{1}{2} x^T X x$$

$f(x,y)$ est donc le conjugué d'une fonction et est donc convexe.

3)