CHAUVIN
Paul

Continuous time-reversal.

Q1) Prouvons que $\forall t \in [0,T]$, $E[\|M_t^f\|] < +\infty$

$\forall t \in [0,T]$, $E[\|M_t^f\|] \leq E[\|f(Y_t)\|] + E[\|f(Y_0)\|]$
$+ E[\|\int_0^t \langle -b(T-s, Y_s) + \nabla \log p_{T-s}(Y_s), \nabla f(Y_s)\rangle\|]$
$+ E[\|\int_0^t \frac{1}{2} \Delta f(Y_s)\|]$

- On a : $E[\|f(Y_t)\|] < E[|C| \|f\|_\infty] < +\infty$ car $f \in \mathcal{C}^\infty$
  et $E[\|f(Y_0)\|] < +\infty$ car espérance $\in \mathbb{R}$

- $E[\|\int_0^t \langle -b(T-s, Y_s), \nabla f(Y_s)\rangle ds\|]$
  $\leq E[\|\int_0^t \|b(T-s, Y_s)\| \|\nabla f(Y_s)\| ds\|]$ Cauchy-Schwartz.
  $\leq E[t\, C_b \|\nabla f\|_\infty |C_{\nabla f}|] < +\infty$
  avec C_b borne de b
  $C_{\nabla f}$ support de ∇f.

- $E\|\int_0^t \langle \nabla \log p_{T-s}(Y_s), \nabla f(Y_s)\rangle ds\|]$
  $\leq E[\|\int_0^t \underbrace{\|\nabla \log p_{T-s}(Y_s)\|}_{\leq C(1+\|Y_s\|)} \underbrace{\|\nabla f(Y_s)\|}_{\leq \|\nabla f\|_\infty |C_{\nabla f}|} ds\|]$
  $\leq E[\|\int_0^t C(1+\|Y_s\|) \|\nabla f\|_\infty |C_{\nabla f}| ds\|]$
  $\leq E[t[C(1+\|Y\|_{max}) \|\nabla f\|_\infty |C_{\nabla f}|]] < +\infty$

- $E[\|\int_0^t \frac{1}{2} \nabla f(Y_s)\|] \leq E[\frac{t}{2} d |C_{imax}| \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_{imax}^2}\|_\infty] < +\infty$

car ∇f est $\mathcal{C}^\infty$, $\|\nabla f(Y_s)\| = \|\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(Y_s)\| \leq \sum_{i=1}^d |C_i| \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\|_\infty$
$\leq d |C_{imax}| \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\|_\infty$

conclusion : $\forall t \in [0,T]$, $E[\|M_t^f\|] < +\infty$

CHAUVIN
Paul

Q2)

Montrons que :

$(M_t^f)_{t\in[0,T]}$ est une $(Y_t)_{t\in[0,T]}$-Martingale

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \text{ et } t, s \in [0,T] \text{ avec } t \geq s \\ E\left[(M_t^f - M_s^f)\, g(Y_s)\right] = 0 \end{cases}$$

• $\Rightarrow$: Soit M_t^f une Y_t Martingale, $g \in \mathcal{C}^\infty$, $t,s \in [0,T]$

$$\begin{aligned} E\left[(M_t^f - M_s^f)\, g(Y_s)\right] &= E\left[E\left[(M_t^f - M_s^f)\, g(Y_s) \mid Y_s\right]\right] \\ &= g(Y_s)\, E\left[M_t^f - M_s^f \mid Y_s\right] \\ &= g(Y_s)\left(M_s^f - M_s^f\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

• $\Leftarrow$: $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\forall (t,s) \in [0,T]^2$

$$E\left[g(Y_s)(M_t^f - M_s^f)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow E\left[g(Y_s)\, M_t^f\right] = E\left[g(Y_s)\, M_s^f\right]$$

$$\Leftrightarrow E\left[E\left[g(Y_s)\, M_t^f \mid Y_s\right]\right] = E\left[E\left[g(Y_s)\, M_s^f \mid Y_s\right]\right]$$

$$\Leftrightarrow g(Y_s)\, E\left[M_t^f \mid Y_s\right] = g(Y_s)\, E\left[M_s^f \mid Y_s\right]$$

$$\Leftrightarrow E\left[M_t^f \mid Y_s\right] = E\left[M_s^f \mid Y_s\right] \quad \text{car } g(Y_s) \neq 0$$

or
$$M_s^f = \underbrace{f(Y_s)}_{\in \mathcal{C}^\infty} - \underbrace{f(Y_0)}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\int_0^s \left\{ \langle -b(T-u, Y_u) + \nabla \log p_{T-u}(Y_u), \nabla f(Y_u) \rangle + \frac{1}{2} \nabla f(Y_u) \right\} du}_{\text{continue donc fonction mesurable.}}$$

$\Rightarrow M_s^f$ est Y_s-mesurable $\Rightarrow E[M_s^f | Y_s] = M_s^f \Rightarrow E[M_t^f \mid Y_s] = M_s^f$

CHAUVIN Paul

Q3]

Avec Q2], on a : $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\forall (t,s) \in [0,T]^2$

$$E\left[(M_t^f - M_s^f)\, g(X_{t-s})\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow E\left[g(X_{t-s}) \left\{ f(Y_t) - f(Y_s) - \int_0^t \langle -b(T-v), Y_v) + \nabla \log P_{T-v}(Y_v), \nabla f(Y_v) \rangle + \frac{1}{2} \Delta f(Y_v)\, dv \right\} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow E\left[g(X_{t-s}) (f(Y_t) - f(Y_s)) \right] = E\, g(X_{T-s}) \int_{T-s}^{T-t} \langle -b(u, Y_{t-u}) + \nabla \log P_u(Y_{T-u}), \nabla f(Y_{T-u}) \rangle + \frac{1}{2} \Delta f(Y_{T-u})\, du]$$

$$\Leftrightarrow E\left[g(X_{t-s}) f(X_{T-t}) - f(X_{T-s}) \right] = E\left[g(X_{T-s}) \int_{T-s}^{T-t} \langle -b(u, X_u) + \nabla \log P_u(X_u), \nabla f(X_u) \rangle + \frac{1}{2} \Delta f(X_u) du \right]$$

cela est vrai $\forall (t,s) \in [0,T]^2$, $t \geq s$, c'est donc aussi vrai $(T-t, T-s)$

$$\Rightarrow E\left[g(X_{t'}) (f(X_{s'}) - f(X_{t'})) \right] \cdot E\left[g(X_{s'}) \int_{t'}^{s'} \langle b(u, X_u) - \nabla \log p_u(X_u), \nabla f(X_u) \rangle - \frac{1}{2} \Delta f(X_u)\, du \right]$$

on a bien $T-s > T-t$ (donc $s' \leq t'$)

Q4] Soit $t \in [0, T_1]$, $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Soit $s \in [0, t]$ et $x \in \mathbb{R}^d$:

$$h^{g,t}(s, x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(u)\, p_{t|s}(u \mid X_1 = x)\, du$$

avec $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

et $(u, s, x_u, x_s) \longmapsto p_{u|s}(x_u \mid x_s) \in \mathcal{C}^\infty$

Ainsi, $h^{g,t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que primitives sur $\mathbb{R}^d$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

CHAUVIN Paul

Q5). On applique la formule d'Ito à la fonction $h^{g,t} \in \mathcal{C}^{\infty}([0,t] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Soit $(u,s) \in [0,t]$ avec $u \geq s$. On a alors :

$$\mathbb{E}\Big(\overbrace{h^{g,t}(u,X_u) - h^{g,t}(s,X_s)}^{①} \,\Big|\, X_s\Big)$$
$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\int_s^u \Big\{\partial_\omega h^{g,t}(\omega,X_\omega) + \langle b(\omega,X_\omega), \nabla h^{g,t}(\omega,X_\omega)\rangle + \frac{1}{2}\nabla h^{g,t}(\omega,X_\omega)\Big\} d\omega}_{②} \,\Big|\, X_s\Big]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(① \mid X_s) - \mathbb{E}[② \mid X_s] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[① - ② \mid X_s] = 0$$

$$\Rightarrow \psi(X_s)\,\mathbb{E}[① - ② \mid X_s] = 0 \quad \text{avec } \psi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\big[\psi(X_s)\,\mathbb{E}[① - ② \mid X_s]\big] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\Big[\psi(X_s)\Big\{h^{g,t}(u,X_u) - h^{g,t}(s,X_s) - \int_s^u \Big\{\partial_\omega h^{g,t}(\omega,X_\omega) + \langle b(\omega,X_\omega), \nabla h^{g,t}(\omega,X_\omega)\rangle + \frac{1}{2}\nabla h^{g,t}(\omega,X_\omega)\Big\} d\omega\Big]\Big] = 0$$

Ce qui prouve le résultat voulu.

Q6].

On a :

(1) $E\left[h^{g,t}(u,X_u) - h^{g,t}(s,X_s) \mid X_s\right]$

$$= E\left[\int_s^u \partial_\omega h^{g,t}(\omega,X_\omega) + \langle b(\omega,X_\omega), Dh^{g,t}(\omega,X_\omega)\rangle + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(\omega,X_\omega) \} d\omega \mid X_s\right]$$

et $E\left[h^{g,t}(u,X_u) \mid X_s\right] = E\left[E\left[g(X_t) \mid X_u\right] \mid X_s\right]$

$$= E\left[g(X_t) \mid X_s\right]$$
$$= h^{g,t}(s,X_s)$$

donc $E\left[h^{g,t}(u,X_u) - h^{g,t}(s,X_s) \mid X_s\right] = 0$

on dérive le membre de droite de (1), ce qui est possible grâce au théorème de convergence dominée (fonctions dérivables, majorées et à support compact). D'où :

$$0 = \partial_u E\left[\int_s^u \{ \partial_\omega h^{g,t}(\omega,X_\omega) + \langle b(\omega,X_\omega), Dh^{g,t}(\omega,X_\omega)\rangle + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(\omega,X_\omega)\} d\omega \mid X_s\right]$$

$(\Rightarrow)$ $0 = E\left[\partial_u h^{g,t}(u,X_u) + \langle b(u,X_u), Dh^{g,t}(u,X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(u,X_u) \mid X_s\right]$

D'où : $\partial_s h^{g,t}(s,x) + \langle b(s,x), Dh^{g,t}(s,x)\rangle + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(s,x) = 0$

en évaluant en $u = s$ et car X_s est une constante et l'espérance disparait.

Q7)

Appliquons la formule d'Ito à la fonction $f \times h^{g,t}$:

$$E\left[f(X_t)\,h^{g,t}(x,t) - f(X_s)\,h^{g,t}(s,x_s) \mid X_s\right]$$

$$= E\left[\int_s^t \partial_u (f\,h^{g,t})(u,X_u) + \langle b(u,X_u), \nabla(f\,h^{g,t})(u,X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta(f\,h^{g,t})(u,X_u)\,du \mid X_s\right]$$

$$= E\int_s^t f(X_u)\,\partial_u h^{g,t}(u,X_u) + \langle b(u,X_u), \nabla(h^{g,t}(u,\cdot)f)(X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta(h^{g,t}(u,\cdot)f)(X_u)\,du \mid X_s]$$

$$E\left[f(X_t)\,h^{g,t}(t,X_t) \mid X_s\right] = E\left[f(X_t)\,E\left[g(X_t) \mid X_t = X_t\right] \mid X_s\right]$$
$$= E\left[f(X_t)\,g(X_t) \mid X_t = X_t, X_s\right]$$

$$E\left[f(X_s)\,h^{g,t}(s,X_s) \mid X_s\right] = E\left[f(X_s)\,g(X_t) \mid X_s = X_s, X_s\right]$$

Par passage à l'espérance, nous obtenons le résultat voulu.

Q8] On a :

$$\nabla(h^{g,t}(u,\cdot)f) = h^{g,t}(u,\cdot)\nabla f + f\nabla h^{g,t}(u,\cdot)$$

et $\Delta(h^{g,t}(u,\cdot)f) = h^{g,t}\cdot\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla h^{g,t}(u,\cdot)\rangle + f\Delta h^{g,t}(u,\cdot)$

Avec Q6] et Q7], on obtient :

$$E[g(X_t)f(X_t) - g(X_t)f(X_s)]$$
$$= E\left[\int_0^t \left\{ h^{g,t}(u,X_u)\langle b(u,X_u), \nabla f(X_u)\rangle + h^{g,t}(u,X_u)\frac{1}{2}\Delta f(X_u) + \langle \nabla f(X_u), \nabla h^{g,t}(u,X_u)\rangle\right\} du\right]$$

car $\partial_s h^{g,t}(s,x) + \langle b(s,x); \nabla h^{g,t}(s,x)\rangle + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(s,x) = 0$ (Q6)

Q9] On utilise la formule du sujet appliquée à $h^{g,t}$ et $p_u \cdot \nabla f$:

$$E\int_s^t \langle \nabla f(X_u), \nabla h^{g,t}(u,X_u)\rangle du$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_s^t \langle \nabla f(X_u), \nabla h^{g,t}(u,X_u)\rangle p_u(X)\, du\, dX$$
$$= \int_s^t\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(X_u)p_u(X), \nabla h^{g,t}(u,X_u)\rangle dX\, du$$
$$= -\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d} h^{g,t}(u,X)\, \mathrm{div}(p_u\cdot\nabla f)(X)\, dX\, du$$
$$= -\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d} h^{g,t}(u,X)\{\Delta f(X)p_u(X) + \langle \nabla p_u(X), \nabla f(X)\rangle\}dX\, du$$
$$= -\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d} h^{g,t}(u,X)\left\{\Delta f(X) + \left\langle \frac{\nabla p_u(X)}{p_u(X)}, \nabla f(X)\right\rangle\right\}p_u(X)\, dX\, du$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^d}\int_s^t h^{g,t}(u,X)\{\Delta f(X)p_u(X) + \langle \nabla \log p_u(X), \nabla f(X)\rangle\}p_u(X)\, du\, dX$$
$$= -E\left[\int_s^t h^{g,t}(u,X_u)\{\Delta f(X_u) + \langle \nabla \log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\rangle\}du\right]$$

Q10)

Avec Q8 et Q9, on a :

$$E\left[g(X_t)f(X_t) - g(X_t)f(X_s)\right]$$
$$= E\left[\int_s^t h^{g,t}(u, X_u) < b(u, X_u), \nabla f(X_u) > du\right]$$
$$+ E\left[\int_s^t h^{g,t}(u, X_u) \frac{1}{2} \Delta f(X_u)\, du\right]$$
$$- E\left[\int_s^t \{\Delta f(X_u) + < \nabla \log p_u(X_u), \nabla f(X_u) > h^{g,t}(u, X_u)\} du\right]$$

$$= E\left[\int_s^t h^{g,t}(u, X_u)\left\{\underbrace{< b(u,X_u) - \nabla \log p_u(X_u), \nabla f(X_u) > - \frac{1}{2}\nabla f(X_u)}_{a}\right\} du\right]$$
$$= E\left[\int_s^t E(g(X_t) | X_s = X_u)\{a\} du\right]$$
$$= E\left[g(X_t) \int_s^t \{< b(u,X_u) - \nabla \log p_u(X_u), \nabla f(X_u) - \frac{1}{2}\nabla f(X_u)\} du\right.$$

Cela prouve le fait que pour tout $f \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ $(M_t^f)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{Y}_t$ -martingale, en utilisant la réponse à la question 3.