Samuel Bergina & Paul Cailleu

Cycle Ingénieur ENSTA Paris, Énergies en Transition

Rapport Scientifique

Production optimale d'un ensemble d'unité de production couplé à un réseau de stockage hydraulique

Projet d'optimisation discrète

Décembre 2025 – Février 2026

Table des matières

1 Formulation MILP UC hydro-thermique **2**
1.1 Ensembles . . . 2
1.2 Paramètres . . . 2
1.3 Variables de décision . . . 3
1.4 Objectif . . . 3
1.5 Contraintes thermiques . . . 3
1.6 Contraintes hydrauliques . . . 4
1.7 Linéarisation de la courbe débit–puissance (PWLC) . . . 4
1.8 Bilan volumétrique des réservoirs (topologie DAG générale) . . . 5
1.9 Bilan puissance (équilibre offre–demande) . . . 5

1 Formulation MILP UC hydro-thermique

Le problème de *Unit Commitment* (UC) consiste à décider, à chaque pas de temps, quelles unités de production sont en marche (*commitment*) et à quelle puissance elles fonctionnent (*dispatch*), de façon à satisfaire la demande au coût minimum tout en respectant les contraintes techniques (rampes, durées minimales de marche/arrêt, bilans hydrauliques). La formulation est un programme mixte en nombres entiers (MILP) couplant un parc thermique et une cascade hydraulique.

1.1 Ensembles

— $\mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$: pas de temps (horizon de planification).
— $\mathcal{L}$: unités thermiques (centrales à flamme, turbines à gaz, etc.).
— $\mathcal{K}$: arcs du réseau hydraulique. Chaque arc $k \in \mathcal{K}$ correspond à un groupe turbine/pompe reliant un réservoir amont r_k^{src} à un réservoir aval r_k^{dst}. La topologie est un graphe orienté acyclique (DAG) quelconque : chaîne simple, arcs parallèles et bifurcations sont tous supportés.
— $\mathcal{R} = \{1, \ldots, |\mathcal{K}| + 1\}$: réservoirs. Le nœud $r = |\mathcal{K}| + 1$ est le *réservoir de décharge* (exutoire/rivière aval), modélisé par $V^{\max} = +\infty$ et $V^0 = 0$.
— $\mathcal{S} = \{1, \ldots, S\}$: segments de la linéarisation par morceaux de la courbe débit–puissance de chaque turbine.

1.2 Paramètres

dt	durée d'un pas de temps
$\tau_l^+,\ \tau_l^-$	durées minimales de marche / d'arrêt de l'unité l
d_t	demande électrique totale au pas t (MW)
$c_{l,t}$	coût marginal variable de l'unité l au pas t (€/MWh)
su_l	coût fixe de démarrage de l'unité l (€/démarrage)
$P_{l,t}^{\min},\ P_{l,t}^{\max}$	bornes de puissance thermique de l (MW)
$g_{l,t}$	rampe max de l (MW/h) : variation de puissance autorisée par pas
$r_k^{\mathrm{src}},\ r_k^{\mathrm{dst}}$	réservoir source / destination de l'arc k (topologie DAG)
$F_{k,t}^{\min+},\ F_{k,t}^{\max+}$	débit turbine min/max sur l'arc k au pas t
g_k^+	rampe turbine (variation de débit autorisée par pas, en débit/h)
$P_k^{\min+},\ P_k^{\max+}$	puissance turbine min/max sur l'arc k (MW)
$F_{k,t}^{\min-},\ F_{k,t}^{\max-}$	débit pompe min/max sur l'arc k
g_k^-	rampe pompe (débit/h)
ρ_k	consommation spécifique de pompage (MW/débit)
$f_{k,i},\ P_{k,i}$	points de rupture de la courbe turbine ($i = 1 \ldots S{+}1$)
$V_r^{\min},\ V_r^{\max}$	bornes de volume du réservoir r
$a_{r,t}$	apport naturel (pluie/fonte) au réservoir r au pas t
V_r^0	volume initial du réservoir r

1.3 Variables de décision

Thermique.

$p_{l,t} \geq 0$	puissance injectée par l'unité l au pas t (MW)
$y_{l,t} \in \{0,1\}$	1 si l'unité l est en marche au pas t, 0 sinon
$u_{l,t} \in \{0,1\}$	1 si l démarre entre $t-1$ et t
$d_{l,t} \in \{0,1\}$	1 si l s'arrête entre $t-1$ et t

Hydraulique.

$f^{+}_{k,t} \geq 0$	débit turbiné sur l'arc k au pas t
$f^{-}_{k,t} \geq 0$	débit pompé sur l'arc k au pas t (sens aval$\to$amont)
$z_{k,t} \in \{0,1\}$	1 si la pompe de l'arc k est en marche au pas t
$P^{+}_{k,t} \geq 0$	puissance électrique produite par la turbine k (MW)
$z_{k,s,t} \in \{0,1\}$	indicatrice du segment s actif sur l'arc k au pas t
$\theta_{k,s,t} \in [0,1]$	position relative dans le segment s (interpolation)
$V_{r,t} \geq 0$	volume stocké dans le réservoir r au début du pas t

1.4 Objectif

On minimise le coût total de production sur l'horizon :

$$\min \quad \underbrace{\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{l\in\mathcal{L}} c_{l,t}\, p_{l,t}\, dt}_{\text{coût variable de fonctionnement}} \quad + \quad \underbrace{\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{l\in\mathcal{L}} su_l\, u_{l,t}}_{\text{coût de démarrage}}$$

La production hydraulique n'a pas de coût variable explicite (l'eau est gratuite) : elle contribue indirectement en réduisant le recours aux unités thermiques coûteuses.

1.5 Contraintes thermiques

Bornes de puissance. Une unité ne produit que si elle est en marche ($y_{l,t} = 1$) et doit alors rester entre sa puissance minimale technique et sa puissance maximale :

$$p_{l,t} \geq P^{\min}_{l,t}\, y_{l,t} \qquad \forall l \in \mathcal{L},\ t \in \mathcal{T} \tag{1}$$

$$p_{l,t} \leq P^{\max}_{l,t}\, y_{l,t} \qquad \forall l \in \mathcal{L},\ t \in \mathcal{T} \tag{2}$$

Rampes. La variation de puissance entre deux pas consécutifs est limitée par la rampe physique de l'unité (montée et descente symétriques ici) :

$$p_{l,t} - p_{l,t-1} \leq g_{l,t}\, dt \qquad \forall l \in \mathcal{L},\ t > 1 \tag{3}$$

$$p_{l,t-1} - p_{l,t} \leq g_{l,t}\, dt \qquad \forall l \in \mathcal{L},\ t > 1 \tag{4}$$

Transitions d'état (démarrage / arrêt). La variable binaire $u_{l,t}$ (resp. $d_{l,t}$) vaut 1 exactement quand y passe de 0 à 1 (resp. de 1 à 0) ; les deux événements s'excluent mutuellement :

$$u_{l,t} - d_{l,t} = y_{l,t} - y_{l,t-1} \qquad \forall l \in \mathcal{L},\ t > 1 \tag{5}$$

$$u_{l,t} + d_{l,t} \leq 1 \qquad \forall l \in \mathcal{L},\ t \in \mathcal{T} \tag{6}$$

Durées minimales de marche et d'arrêt. Après un démarrage, l'unité doit rester en marche au moins τ_l^+ pas ; après un arrêt, elle doit rester arrêtée au moins τ_l^- pas :

$$\sum_{t'=t}^{t+\tau_l^+-1} y_{l,t'} \geq \tau_l^+ \, u_{l,t} \qquad \forall l \in \mathcal{L},\ t:\ t+\tau_l^+-1 \leq T \tag{7}$$

$$\sum_{t'=t}^{t+\tau_l^--1} (1-y_{l,t'}) \geq \tau_l^- \, d_{l,t} \qquad \forall l \in \mathcal{L},\ t:\ t+\tau_l^--1 \leq T \tag{8}$$

Ces contraintes ne sont posées que lorsque la fenêtre $[t, t+\tau-1]$ tient entièrement dans l'horizon.

1.6 Contraintes hydrauliques

Bornes de débit turbine. Le débit turbiné sur l'arc k est borné à chaque pas :

$$F_{k,t}^{\min+} \leq f_{k,t}^+ \leq F_{k,t}^{\max+} \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t \in \mathcal{T} \tag{9}$$

Rampes turbine. Le débit ne peut varier trop vite (cavitation, contraintes mécaniques) :

$$f_{k,t}^+ - f_{k,t-1}^+ \leq g_k^+ \, dt \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t > 1 \tag{10}$$

$$f_{k,t-1}^+ - f_{k,t}^+ \leq g_k^+ \, dt \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t > 1 \tag{11}$$

Pompe : débit et rampe. La pompe ne peut fonctionner que si $z_{k,t} = 1$, et son débit est nul sinon (contrainte de type *on/off*) :

$$F_{k,t}^{\min-} \, z_{k,t} \leq f_{k,t}^- \leq F_{k,t}^{\max-} \, z_{k,t} \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t \in \mathcal{T} \tag{12}$$

$$f_{k,t}^- - f_{k,t-1}^- \leq g_k^- \, dt \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t > 1 \tag{13}$$

$$f_{k,t-1}^- - f_{k,t}^- \leq g_k^- \, dt \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t > 1 \tag{14}$$

Bornes de puissance turbine. La puissance produite par la turbine doit rester dans sa plage de fonctionnement (indépendamment du débit, les bornes sont vérifiées via la courbe PWLC ci-dessous) :

$$P_k^{\min+} \leq P_{k,t}^+ \leq P_k^{\max+} \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t \in \mathcal{T} \tag{15}$$

1.7 Linéarisation de la courbe débit–puissance (PWLC)

La relation $P_{k,t}^+ = \varphi_k(f_{k,t}^+)$ entre débit turbiné et puissance produite est non linéaire (rendement variable avec la hauteur de chute). On l'approche par une fonction linéaire par morceaux à S segments, définie par $S+1$ points de rupture $(f_{k,i},\ P_{k,i})$.

La technique SOS-2 (*Special Ordered Set*) sélectionne un unique segment actif s via la variable $z_{k,s,t}$, puis interpole linéairement à l'intérieur de ce segment via $\theta_{k,s,t}$:

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} z_{k,s,t} = 1 \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t \in \mathcal{T} \quad \text{(exactement un segment actif)} \tag{16}$$

$$\theta_{k,s,t} \leq z_{k,s,t} \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ s \in \mathcal{S},\ t \in \mathcal{T} \quad (\theta \text{ nul si segment inactif}) \tag{17}$$

$$f_{k,t}^+ = \sum_{s \in \mathcal{S}} \left(f_{k,s} \, z_{k,s,t} + (f_{k,s+1} - f_{k,s}) \, \theta_{k,s,t} \right) \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t \in \mathcal{T} \tag{18}$$

$$P_{k,t}^+ = \sum_{s \in \mathcal{S}} \left(P_{k,s} \, z_{k,s,t} + (P_{k,s+1} - P_{k,s}) \, \theta_{k,s,t} \right) \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ t \in \mathcal{T} \tag{19}$$

Les deux dernières contraintes imposent simultanément f^+ et P^+ sur le même segment : la courbe $P(f)$ est ainsi respectée de façon exacte sur chaque morceau.

1.8 Bilan volumétrique des réservoirs (topologie DAG générale)

On définit pour chaque réservoir r les ensembles d'arcs incidents :

$$\mathcal{K}_r^{\text{in}} = \{k \in \mathcal{K} : r_k^{\text{dst}} = r\} \quad \text{(arcs } \textit{arrivant} \text{ en } r\text{)}, \qquad \mathcal{K}_r^{\text{out}} = \{k \in \mathcal{K} : r_k^{\text{src}} = r\} \quad \text{(arcs } \textit{partant} \text{ de } r\text{)}.$$

Le bilan d'eau à chaque pas de temps s'écrit :

$$V_{r,t+1} = V_{r,t} \;+\; a_{r,t}\,dt \;+ \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}_r^{\text{in}}} f_{k,t}^{+}\,dt}_{\substack{\text{eau amenée}\\ \text{par turbinage}}} - \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}_r^{\text{out}}} f_{k,t}^{+}\,dt}_{\substack{\text{eau prélevée}\\ \text{par turbinage}}} - \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}_r^{\text{in}}} f_{k,t}^{-}\,dt}_{\substack{\text{eau remontée}\\ \text{par pompage}}} + \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}_r^{\text{out}}} f_{k,t}^{-}\,dt}_{\substack{\text{eau renvoyée}\\ \text{par pompage}}} \quad \forall r \in \mathcal{R},\; t < T \tag{20}$$

Lecture intuitive. Le turbinage sur un arc k *entrant* en r remplit le réservoir ; le turbinage sur un arc k *sortant* le vide. Le pompage inverse le sens : sur un arc entrant en r, la pompe *reprend* de l'eau dans r pour la renvoyer en amont ; sur un arc sortant de r, elle *rapporte* de l'eau depuis l'aval. La convention $\sum_{\emptyset}(\cdot) = 0$ gère naturellement les nœuds sources (aucun arc entrant) et le nœud de décharge (aucun arc sortant) sans condition particulière.
Bornes et condition initiale :

$$V_r^{\min} \le V_{r,t} \le V_r^{\max} \quad \forall r, t, \qquad V_{r,1} = V_r^{0} \quad \forall r.$$

Cas particulier : chaîne simple. Si $r_k^{\text{src}} = k$ et $r_k^{\text{dst}} = k+1$ pour tout k (cascade linéaire), alors $\mathcal{K}_r^{\text{in}} = \{r-1\}$ et $\mathcal{K}_r^{\text{out}} = \{r\}$, et l'équation (23) se réduit à :

$$V_{r,t+1} = V_{r,t} + a_{r,t}\,dt + f_{r-1,t}^{+}\,dt - f_{r,t}^{+}\,dt - f_{r-1,t}^{-}\,dt + f_{r,t}^{-}\,dt.$$

1.9 Bilan puissance (équilibre offre–demande)

À chaque pas de temps, la somme des injections (thermique + hydro) moins la consommation des pompes doit exactement couvrir la demande :

$$\underbrace{\sum_{l \in \mathcal{L}} p_{l,t}}_{\text{thermique}} + \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}} P_{k,t}^{+}}_{\text{hydro}} - \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}} \rho_k\, f_{k,t}^{-}}_{\text{pompage (conso)}} = d_t \quad \forall t \in \mathcal{T} \tag{21}$$

Le pompage est une charge électrique : il consomme $\rho_k\, f_{k,t}^{-}$ MW sur l'arc k pour refouler du débit $f_{k,t}^{-}$ en amont.
Lien du repo github : *github.com/PaulCailleu/Optimisation_discrete*