



**ENSTA**

---



---

Samuel Bergina & Paul Cailleu

*Cycle Ingénieur ENSTA Paris, Énergies en Transition*

---

## Rapport Scientifique

Production optimale d'un ensemble d'unité de production couplé  
à un réseau de stockage hydraulique

---

### Projet d'optimisation discrète

*Décembre 2025 – Février 2026*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Formulation MILP UC hydro-thermique</b>	<b>3</b>
1.1 Ensembles . . . . .	3
1.2 Paramètres . . . . .	3
1.3 Variables de décision . . . . .	4
1.4 Objectif . . . . .	4
1.5 Contraintes thermiques . . . . .	4
1.6 Contraintes hydrauliques . . . . .	5
1.7 Linéarisation de la courbe débit–puissance (PWLC) . . . . .	5
1.8 Bilan volumétrique des réservoirs . . . . .	6
1.9 Bilan puissance (équilibre offre–demande) . . . . .	6
<b>2 Analyse des résultats numériques</b>	<b>7</b>
2.1 Instance testée . . . . .	7
2.2 Dispatch de puissance . . . . .	8
2.3 Évolution du réservoir hydraulique . . . . .	9
2.4 Bilan — scénario 1 . . . . .	10
<b>3 Scénario 2 : cascade hydro-thermique pHydro_1</b>	<b>11</b>
3.1 Instance testée . . . . .	11
3.2 Dispatch de puissance . . . . .	12
3.3 Évolution des réservoirs hydrauliques . . . . .	13
3.4 Bilan comparatif et limites . . . . .	14
<b>4 Scénario 3 : grande cascade STEP pHydro_3</b>	<b>15</b>
4.1 Instance testée . . . . .	15
4.2 Dispatch de puissance . . . . .	16
4.3 Évolution des réservoirs hydrauliques . . . . .	17
4.4 Bilan comparatif des trois scénarios . . . . .	18
<b>Conclusion</b>	<b>19</b>

## Introduction

La gestion optimale d'un parc de production électrique est un problème central en ingénierie des systèmes énergétiques. Il s'agit de décider à chaque instant d'allumer ou d'éteindre un système et de réguler la puissance pour optimiser le coût de production du parc. On imagine rapidement la complexité que cela représente à l'échelle d'un réseau national interconnecté avec les pays frontaliers. Le système devient de nos jours d'autant plus complexe que de petits producteurs intermittents viennent se brancher sur le réseau.

Ce projet porte sur la formulation et la résolution d'un problème UC couplant un parc de centrales thermiques à un réseau hydraulique en cascade. Les centrales thermiques sont soumises à des contraintes de bornes de puissance, de rampes, de durées minimales de marche et d'arrêt, ainsi qu'à des coûts de démarrage. Le système hydraulique est modélisé comme un graphe orienté acyclique de réservoirs reliés par des turbines et des pompes, dont la relation débit–puissance est non linéaire et approchée par une linéarisation par morceaux.

L'objectif est de minimiser le coût total de production sur un horizon de planification  $T$ , sous l'ensemble des contraintes physiques et du bilan offre–demande. Le problème est formulé comme un programme mixte en nombres entiers (MILP, *Mixed Integer Linear Program*), ce qui permet d'utiliser des solveurs de référence tels que CPLEX, Gurobi ou HiGHS.

# 1 Formulation MILP UC hydro-thermique

Le problème de *Unit Commitment* (UC) consiste à décider, à chaque pas de temps, quelles unités de production sont en marche et à quelle puissance elles fonctionnent, de façon à satisfaire la demande au coût minimum tout en respectant les contraintes techniques (rampes, durées minimales de marche/arrêt, bilans hydrauliques). La formulation est un programme mixte en nombres entiers (MILP) couplant un parc thermique et une cascade hydraulique.

## 1.1 Ensembles

- $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$  : pas de temps (horizon de planification).
- $\mathcal{L}$  : unités thermiques (centrales à flamme, turbines à gaz, etc.).
- $\mathcal{K}$  : arcs du réseau hydraulique. Chaque arc  $k \in \mathcal{K}$  correspond à un groupe turbine/pompe reliant un réservoir amont  $r_k^{\text{src}}$  à un réservoir aval  $r_k^{\text{dst}}$ . La topologie est un graphe orienté acyclique (DAG) quelconque : chaîne simple, arcs parallèles et bifurcations sont tous supportés.
- $\mathcal{R} = \{1, \dots, |\mathcal{K}| + 1\}$  : réservoirs. Le noeud  $r = |\mathcal{K}| + 1$  est le *réservoir de décharge* (exutoire/rivière aval), modélisé par  $V^{\max} = +\infty$  et  $V^0 = 0$ .
- $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$  : segments de la linéarisation par morceaux de la courbe débit–puissance de chaque turbine.

## 1.2 Paramètres

$dt$	durée d'un pas de temps
$\tau_l^+, \tau_l^-$	durées minimales de marche / d'arrêt de l'unité $l$
$d_t$	demande électrique totale au pas $t$ (MW)
$c_{l,t}$	coût marginal variable de l'unité $l$ au pas $t$ (€/MWh)
$s_{l,t}$	coût fixe de démarrage de l'unité $l$ (€/démarrage)
$P_{l,t}^{\min}, P_{l,t}^{\max}$	bornes de puissance thermique de $l$ (MW)
$g_{l,t}$	rampe max de $l$ (MW/h) : variation de puissance autorisée par pas
$r_k^{\text{src}}, r_k^{\text{dst}}$	réservoir source / destination de l'arc $k$ (topologie DAG)
$F_{k,t}^{\min+}, F_{k,t}^{\max+}$	débit turbine min/max sur l'arc $k$ au pas $t$
$g_k^+$	rampe turbine (variation de débit autorisée par pas, en débit/h)
$P_k^{\min+}, P_k^{\max+}$	puissance turbine min/max sur l'arc $k$ (MW)
$F_{k,t}^{\min-}, F_{k,t}^{\max-}$	débit pompe min/max sur l'arc $k$
$g_k^-$	rampe pompe (débit/h)
$\rho_k$	consommation spécifique de pompage (MW/débit)
$f_{k,i}, P_{k,i}$	points de rupture de la courbe turbine ( $i = 1 \dots S+1$ )
$V_r^{\min}, V_r^{\max}$	bornes de volume du réservoir $r$
$a_{r,t}$	apport naturel (pluie/fonte) au réservoir $r$ au pas $t$
$V_r^0$	volume initial du réservoir $r$

### 1.3 Variables de décision

**Thermique.**

$p_{l,t} \geq 0$	puissance injectée par l'unité $l$ au pas $t$ (MW)
$y_{l,t} \in \{0, 1\}$	1 si l'unité $l$ est en marche au pas $t$ , 0 sinon
$u_{l,t} \in \{0, 1\}$	1 si $l$ démarre entre $t-1$ et $t$
$d_{l,t} \in \{0, 1\}$	1 si $l$ s'arrête entre $t-1$ et $t$

**Hydraulique.**

$f_{k,t}^+ \geq 0$	débit turbiné sur l'arc $k$ au pas $t$
$f_{k,t}^- \geq 0$	débit pompé sur l'arc $k$ au pas $t$ (sens aval→amont)
$z_{k,t} \in \{0, 1\}$	1 si la pompe de l'arc $k$ est en marche au pas $t$
$P_{k,t}^+ \geq 0$	puissance électrique produite par la turbine $k$ (MW)
$z_{k,s,t} \in \{0, 1\}$	indicatrice du segment $s$ actif sur l'arc $k$ au pas $t$
$\theta_{k,s,t} \in [0, 1]$	position relative dans le segment $s$ (interpolation)
$V_{r,t} \geq 0$	volume stocké dans le réservoir $r$ au début du pas $t$

### 1.4 Objectif

On minimise le coût total de production pendant la période étudiée :

$$\min \underbrace{\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{l \in \mathcal{L}} c_{l,t} p_{l,t} dt}_{\text{coût variable de fonctionnement}} + \underbrace{\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{l \in \mathcal{L}} s u_l u_{l,t}}_{\text{coût de démarrage}}$$

La production hydraulique n'a pas de coût variable explicite (l'eau est gratuite) : elle contribue indirectement en réduisant le recours aux unités thermiques coûteuses.

### 1.5 Contraintes thermiques

**Bornes de puissance.** Une unité ne produit que si elle est en marche ( $y_{l,t} = 1$ ) et doit alors rester entre sa puissance minimale technique et sa puissance maximale :

$$p_{l,t} \geq P_{l,t}^{\min} y_{l,t} \quad \forall l \in \mathcal{L}, t \in \mathcal{T} \quad (1)$$

$$p_{l,t} \leq P_{l,t}^{\max} y_{l,t} \quad \forall l \in \mathcal{L}, t \in \mathcal{T} \quad (2)$$

**Rampes.** La variation de puissance entre deux pas consécutifs est limitée par la rampe physique de l'unité (montée et descente symétriques ici) :

$$p_{l,t} - p_{l,t-1} \leq g_{l,t} dt \quad \forall l \in \mathcal{L}, t > 1 \quad (3)$$

$$p_{l,t-1} - p_{l,t} \leq g_{l,t} dt \quad \forall l \in \mathcal{L}, t > 1 \quad (4)$$

**Transitions d'état (démarrage / arrêt).** La variable binaire  $u_{l,t}$  (resp.  $d_{l,t}$ ) vaut 1 exactement quand  $y$  passe de 0 à 1 (resp. de 1 à 0) ; les deux événements s'excluent mutuellement :

$$u_{l,t} - d_{l,t} = y_{l,t} - y_{l,t-1} \quad \forall l \in \mathcal{L}, t > 1 \quad (5)$$

$$u_{l,t} + d_{l,t} \leq 1 \quad \forall l \in \mathcal{L}, t \in \mathcal{T} \quad (6)$$

**Durées minimales de marche et d'arrêt.** Après un démarrage, l'unité doit rester en marche au moins  $\tau_l^+$  pas ; après un arrêt, elle doit rester arrêtée au moins  $\tau_l^-$  pas :

$$\sum_{t'=t}^{t+\tau_l^+-1} y_{l,t'} \geq \tau_l^+ u_{l,t} \quad \forall l \in \mathcal{L}, t : t + \tau_l^+ - 1 \leq T \quad (7)$$

$$\sum_{t'=t}^{t+\tau_l^--1} (1 - y_{l,t'}) \geq \tau_l^- d_{l,t} \quad \forall l \in \mathcal{L}, t : t + \tau_l^- - 1 \leq T \quad (8)$$

Ces contraintes ne sont posées que lorsque la fenêtre  $[t, t+\tau-1]$  tient entièrement dans l'horizon.

## 1.6 Contraintes hydrauliques

**Bornes de débit turbine.** Le débit turbiné sur l'arc  $k$  est borné à chaque pas :

$$F_{k,t}^{\min+} \leq f_{k,t}^+ \leq F_{k,t}^{\max+} \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (9)$$

**Rampes turbine.** Le débit ne peut varier trop vite (cavitation, contraintes mécaniques) :

$$f_{k,t}^+ - f_{k,t-1}^+ \leq g_k^+ dt \quad \forall k \in \mathcal{K}, t > 1 \quad (10)$$

$$f_{k,t-1}^+ - f_{k,t}^+ \leq g_k^+ dt \quad \forall k \in \mathcal{K}, t > 1 \quad (11)$$

**Pompe : débit et rampe.** La pompe ne peut fonctionner que si  $z_{k,t} = 1$ , et son débit est nul sinon (contrainte de type *on/off*) :

$$F_{k,t}^{\min-} z_{k,t} \leq f_{k,t}^- \leq F_{k,t}^{\max-} z_{k,t} \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (12)$$

$$f_{k,t}^- - f_{k,t-1}^- \leq g_k^- dt \quad \forall k \in \mathcal{K}, t > 1 \quad (13)$$

$$f_{k,t-1}^- - f_{k,t}^- \leq g_k^- dt \quad \forall k \in \mathcal{K}, t > 1 \quad (14)$$

**Bornes de puissance turbine.** La puissance produite par la turbine doit rester dans sa plage de fonctionnement (indépendamment du débit, les bornes sont vérifiées via la courbe PWLC ci-dessous) :

$$P_k^{\min+} \leq P_{k,t}^+ \leq P_k^{\max+} \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (15)$$

## 1.7 Linéarisation de la courbe débit–puissance (PWLC)

La relation  $P_{k,t}^+ = \varphi_k(f_{k,t}^+)$  entre débit turbiné et puissance produite est non linéaire (rendement variable avec la hauteur de chute). On l'approche par une fonction linéaire par morceaux à  $S$  segments, définie par  $S+1$  points de rupture ( $f_{k,i}$ ,  $P_{k,i}$ ) :

On sélectionne un unique segment actif  $s$  via la variable  $z_{k,s,t}$ , puis interpole linéairement à l'intérieur de ce segment via  $\theta_{k,s,t}$  :

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} z_{k,s,t} = 1 \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (\text{exactement un segment actif}) \quad (16)$$

$$\theta_{k,s,t} \leq z_{k,s,t} \quad \forall k \in \mathcal{K}, s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T} \quad (\theta \text{ nul si segment inactif}) \quad (17)$$

$$f_{k,t}^+ = \sum_{s \in \mathcal{S}} (f_{k,s} z_{k,s,t} + (f_{k,s+1} - f_{k,s}) \theta_{k,s,t}) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (18)$$

$$P_{k,t}^+ = \sum_{s \in \mathcal{S}} (P_{k,s} z_{k,s,t} + (P_{k,s+1} - P_{k,s}) \theta_{k,s,t}) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (19)$$

Les deux dernières contraintes imposent simultanément  $f^+$  et  $P^+$  sur le même segment : la courbe  $P(f)$  est ainsi respectée de façon exacte sur chaque morceau.

## 1.8 Bilan volumétrique des réservoirs

On définit pour chaque réservoir  $r$  les ensembles d'arcs incidents :

$$\mathcal{K}_r^{\text{in}} = \{k \in \mathcal{K} : r_k^{\text{dst}} = r\} \quad (\text{arcs arrivant en } r), \quad \mathcal{K}_r^{\text{out}} = \{k \in \mathcal{K} : r_k^{\text{src}} = r\} \quad (\text{arcs partant de } r).$$

Le bilan d'eau à chaque pas de temps s'écrit :

$$V_{r,t+1} = V_{r,t} + a_{r,t} dt + \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}_r^{\text{in}}} f_{k,t}^+ dt}_{\substack{\text{eau amenée} \\ \text{par turbinage}}} - \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}_r^{\text{out}}} f_{k,t}^+ dt}_{\substack{\text{eau prélevée} \\ \text{par turbinage}}} - \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}_r^{\text{in}}} f_{k,t}^- dt}_{\substack{\text{eau remontée} \\ \text{par pompage}}} + \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}_r^{\text{out}}} f_{k,t}^- dt}_{\substack{\text{eau renvoyée} \\ \text{par pompage}}} \quad \forall r \in \mathcal{R}, t < T \quad (20)$$

**Lecture intuitive.** Le turbinage sur un arc  $k$  *entrant* en  $r$  remplit le réservoir ; le turbinage sur un arc  $k$  *sortant* le vide. Le pompage inverse le sens : sur un arc entrant en  $r$ , la pompe *reprend* de l'eau dans  $r$  pour la renvoyer en amont ; sur un arc sortant de  $r$ , elle *rapporte* de l'eau depuis l'aval. La convention  $\sum_{\emptyset}(\cdot) = 0$  gère naturellement les nœuds sources (aucun arc entrant) et le nœud de décharge (aucun arc sortant) sans condition particulière.

**Bornes et condition initiale :**

$$V_r^{\min} \leq V_{r,t} \leq V_r^{\max} \quad \forall r, t, \quad V_{r,1} = V_r^0 \quad \forall r.$$

**Cas particulier : chaîne simple.** Si  $r_k^{\text{src}} = k$  et  $r_k^{\text{dst}} = k + 1$  pour tout  $k$  (casque linéaire), alors  $\mathcal{K}_r^{\text{in}} = \{r - 1\}$  et  $\mathcal{K}_r^{\text{out}} = \{r\}$ , et l'équation (23) se réduit à :

$$V_{r,t+1} = V_{r,t} + a_{r,t} dt + f_{r-1,t}^+ dt - f_{r,t}^+ dt - f_{r-1,t}^- dt + f_{r,t}^- dt.$$

## 1.9 Bilan puissance (équilibre offre–demande)

À chaque pas de temps, la somme des injections (thermique + hydro) moins la consommation des pompes doit exactement couvrir la demande :

$$\underbrace{\sum_{l \in \mathcal{L}} p_{l,t}}_{\text{thermique}} + \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}} P_{k,t}^+}_{\text{hydro}} - \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{K}} \rho_k f_{k,t}^-}_{\text{pompage (conso)}} = d_t \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (21)$$

Le pompage est une charge électrique : il consomme  $\rho_k f_{k,t}^-$  MW sur l'arc  $k$  pour refouler du débit  $f_{k,t}^-$  en amont.

## 2 Analyse des résultats numériques

### 2.1 Instance testée

Les simulations ont été réalisées sur deux jeux de données issus de la base SMSpp/UCBlock.

**Thermique — 20\_0\_3\_w.nc4.** Ce fichier décrit un parc de  $|\mathcal{L}| = 20$  unités thermiques sur un horizon de  $T = 24$  pas de temps horaires ( $dt = 1$  h). La demande journalière varie entre **1 180 MW** (creux nocturne,  $t \approx 4$ ) et **2 347 MW** (pointe matinale,  $t \approx 11$ ), avec une demande moyenne de 1 892 MW. La puissance maximale cumulée du parc thermique est de 3 477 MW, offrant une réserve de capacité de près de 48 % par rapport à la pointe. Les unités se répartissent en deux groupes :

- **Unités de base (U0–U9)** : puissance max entre 100 et 130 MW, coûts variables entre 37 et 47 €/MWh, contraintes de marche minimale courtes ( $\tau_l^+ = 3\text{--}4$  h) ;
- **Unités semi-base et de pointe (U10–U19)** : puissance max entre 175 et 328 MW, coûts variables entre 53 et 64 €/MWh, contraintes de marche minimale longues ( $\tau_l^+ = 7\text{--}13$  h).

**Hydraulique — 20090907\_extended\_pHydro\_18\_none.nc4.** Une cascade simple composée d'un seul réservoir et d'un arc turbine. Ses caractéristiques principales sont résumées dans le tableau 1.

TABLE 1 – Paramètres de la cascade hydraulique utilisée.

Paramètre	Valeur	Remarque
Volume initial $V^0$	138 000 m <sup>3</sup>	= 92 % de $V^{\max}$
Volume minimal $V^{\min}$	60 000 m <sup>3</sup>	≈ 40 % de $V^{\max}$
Volume maximal $V^{\max}$	150 000 m <sup>3</sup>	
Apport naturel $a_r$	1 080 m <sup>3</sup> /h	constant sur tout l'horizon
Puissance max turbine	24 MW	
Débit max turbine	23 400 m <sup>3</sup> /h	

Avec une puissance maximale de 24 MW, la contribution hydraulique représente au plus **24/2 347 ≈ 1 %** de la demande de pointe. Ce système est donc un appoint marginal : l'enjeu de l'optimisation est essentiellement thermique.

## 2.2 Dispatch de puissance

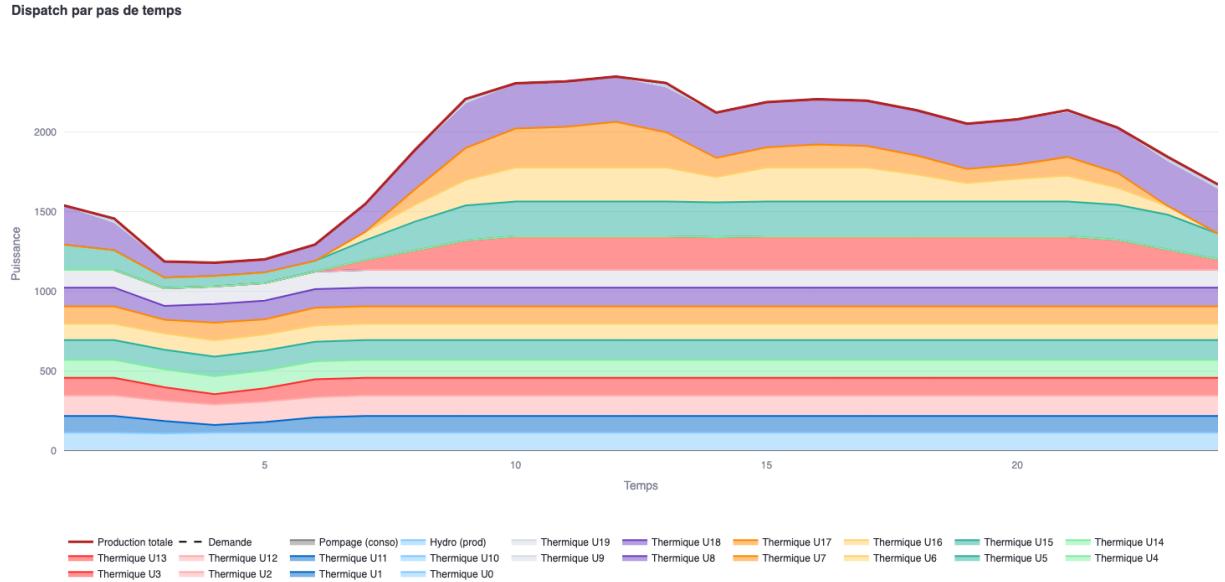


FIGURE 1 – Dispatch optimal sur 24 pas de temps (empilement des productions thermiques et hydraulique, courbe de demande en pointillés).

La figure 1 représente le mix de production à chaque pas de temps : les aires empilées correspondent aux contributions individuelles des 20 unités thermiques (U0 à U19) et à la production hydraulique nette, tandis que la courbe en pointillés représente la demande.

**Équilibre offre–demande.** La courbe de production totale (en rouge) est confondue avec la courbe de demande, validant la satisfaction de la contrainte d'équilibre à chaque pas de temps. Aucun défaut d'approvisionnement n'est observé.

**Profil de demande et structure du dispatch.** La demande suit un profil journalier typique d'une journée d'automne européenne :

- creux nocturne autour de 1 180–1 200 MW aux pas  $t = 3\text{--}6$  ;
- montée rapide dès  $t = 7$ , pointe vers  $t = 10\text{--}12$  autour de 2 300 MW ;
- léger creux de mi-journée ( $t = 15\text{--}16$ ,  $\approx 1850$  MW) puis remontée en soirée avant une décroissance progressive.

L'écart entre la production minimale et maximale est de l'ordre de 1 160 MW, ce qui implique une modulation significative du parc.

**Plan de marche des unités.** Les bandes empilées au bas du graphe (U0 à U16) sont quasi-horizontales : ces unités fonctionnent à puissance quasiment constante sur toute la journée. Ce comportement s'explique par leurs contraintes de durées minimales de marche élevées (jusqu'à 13 h pour U17), qui les contraignent à demeurer en service une fois démarrées. La modulation pour suivre la demande est assurée par les grandes unités U15 à U19 : leurs bandes s'élargissent sensiblement aux heures de pointe ( $t = 9\text{--}12$ ) et se rétrécissent aux heures creuses. En particulier, U18 ( $P^{\max} = 284$  MW,  $\tau^+ = 11$  h) et U19 ( $P^{\max} = 328$  MW,  $\tau^+ = 12$  h) constituent les unités de flexibilité principales.

**Contribution hydraulique.** La fine bande labellisée « Hydro (prod) » est presque invisible sur la figure, ce qui confirme le rôle marginal de la cascade hydraulique dans ce scénario : la

turbine produit au maximum 24 MW, soit moins de 1 % de la production totale. L'absence de pompage ( $F_{\text{minus}} = 0$ ) est cohérente avec les données du fichier pHydro utilisé.

### 2.3 Évolution du réservoir hydraulique

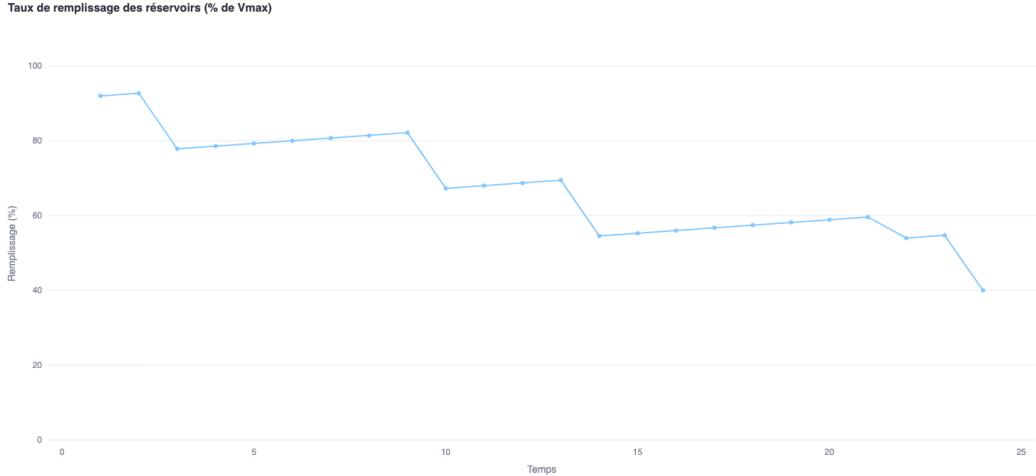


FIGURE 2 – Taux de remplissage du réservoir hydraulique (% de  $V^{\max}$ ) au cours des 24 pas de temps.

La figure 2 trace l'évolution du taux de remplissage du réservoir (en % de  $V^{\max} = 150\,000 \text{ m}^3$ ).

**Vidange progressive jusqu'à la borne inférieure.** Le réservoir débute à 92 % de sa capacité ( $V^0 = 138\,000 \text{ m}^3$ ) et se vide progressivement pour atteindre environ 40 % ( $\approx 60\,000 \text{ m}^3$ ) au dernier pas de temps, soit la quasi-totalité de la ressource mobilisable au-dessus de  $V^{\min}$ . Ce comportement est rationnel du point de vue de l'optimiseur : l'eau est une ressource gratuite dont l'usage réduit le recours aux unités thermiques coûteuses. L'optimiseur est donc incité à turbiner au maximum, dans la limite des contraintes hydrauliques et de la borne  $V^{\min}$ .

**Paliers et décrochements.** La courbe de remplissage présente plusieurs décrochements nets :

- $t = 3$  : chute de 92 % à 78 %. La demande amorce sa remontée matinale ; l'optimiseur anticipe en sollicitant la turbine plus intensément.
- $t = 10$  : chute de 82 % à 67 %, coïncidant avec la pointe de demande ( $\approx 2\,300 \text{ MW}$ ). La turbine fonctionne alors au maximum de sa puissance afin de retarder le démarrage d'unités thermiques supplémentaires.
- $t = 14$  : chute de 70 % à 55 %, qui correspond à la deuxième rampe ascendante de la demande en fin d'après-midi.
- $t = 24$  : descente finale à 40 %, soit le niveau  $V^{\min}$ , sans dépassement de la contrainte volumique inférieure.

Entre les décrochements, le réservoir se stabilise voire remonte légèrement grâce aux apports naturels constants ( $a_r = 1\,080 \text{ m}^3/\text{h}$ ), ce qui correspond aux périodes de faible sollicitation de la turbine.

**Bilan hydrique.** Sur l'ensemble de l'horizon, la variation nette de volume est :

$$\Delta V = V(T) - V(1) \approx 60\,000 - 138\,000 = -78\,000 \text{ m}^3.$$

Les apports totaux sur 24 pas sont  $a_r \times T = 1\,080 \times 24 = 25\,920 \text{ m}^3$ . Le volume total turbiné est donc :

$$Q_{\text{turbine}} = \Delta V_{\text{perte}} + Q_{\text{apport}} = 78\,000 + 25\,920 \approx 103\,920 \text{ m}^3,$$

soit un débit moyen d'environ  $4\,330 \text{ m}^3/\text{h}$ , représentant  $\approx 18\%$  du débit maximal admissible ( $23\,400 \text{ m}^3/\text{h}$ ) et une puissance moyenne de l'ordre de **4 MW**.

## 2.4 Bilan — scénario 1

Ce premier scénario valide la cohérence du modèle MILP mis en œuvre : la contrainte d'équilibre offre-demande est satisfaite à chaque instant, les contraintes de marche/arrêt des unités thermiques sont respectées, et la cascade hydraulique est exploitée de façon optimale jusqu'à l'épuisement de la ressource stockable.

Plusieurs limites sont à noter :

- **Faible contribution hydraulique.** Dans cette instance, la cascade représente moins de 1 % de la demande. Des scénarios avec des cascades plus importantes (p. ex. pHydro\_18\_none) ou en activant le pompage permettraient d'illustrer pleinement l'apport du couplage hydro-thermique.
- **Horizon court.** Un horizon de 24 h est suffisant pour observer un cycle complet de la demande, mais trop court pour valoriser des réservoirs à cycle hebdomadaire ou saisonnier.
- **Solveur GLPK avec limite de temps.** Le solveur GLPK est utilisé avec une limite de 300 s. Pour des instances plus larges (169 unités thermiques,  $T = 96$ ), cette limite peut être atteinte avant l'optimalité ; un solveur commercial (Gurobi, CPLEX) serait nécessaire pour garantir la solution optimale.

### 3 Scénario 2 : cascade hydro-thermique pHydro\_1

#### 3.1 Instance testée

Le scénario 2 conserve le même parc thermique (20\_0\_3\_w.nc4, 20 unités,  $T = 24\text{ h}$ ) mais substitue la cascade hydraulique par 20090907\_pHydro\_1\_none.nc4 (UnitBlock\_149). Cette nouvelle instance est beaucoup plus représentative : elle modélise une cascade de **5 réservoirs et 6 arcs**, dont la puissance hydraulique cumulée atteint **480 MW**, soit  $\approx 20\%$  de la demande de pointe.

**Topologie.** Le réseau hydraulique est un DAG non-simple présentant deux arcs en parallèle entre les réservoirs R3 et R4 (arcs  $k = 3$  et  $k = 4$ ). Le tableau 2 décrit la connectivité et les capacités de chaque arc.

TABLE 2 – Arcs de la cascade hydraulique — scénario 2.

Arc $k$	De	Vers	$P_k^{\max +} (\text{MW})$	$F_k^{\max +} (\text{m}^3/\text{h})$	Remarque
1	R1	R2	71	162 000	
2	R2	R3	0	810 000	conduit (pas de turbine)
3	R3	R4	105	268 200	
4	R3	R4	40	106 200	arcs parallèles
5	R4	R5	260	882 000	plus grande turbine
6	R5	R6	4	63 000	décharge

**État initial des réservoirs.** Les paramètres initiaux sont résumés dans le tableau 3. R2 est un noeud de transit ( $V^{\max} = V^0 = 1\,000 \text{ m}^3$ ) dont le volume est quasi nul à l'échelle de la cascade.

TABLE 3 – Paramètres des réservoirs — scénario 2.

Réservoir	$V^0 (\text{m}^3)$	$V^{\min} (\text{m}^3)$	$V^{\max} (\text{m}^3)$	Taux initial
R1 (amont)	$2,66 \times 10^8$	0	$4,07 \times 10^8$	65,2 %
R2 (transit)	1 000	0	1 000	100 %
R3	$1,34 \times 10^8$	0	$1,58 \times 10^8$	84,5 %
R4	$8,97 \times 10^7$	0	$1,16 \times 10^8$	77,5 %
R5 (aval)	$2,59 \times 10^6$	$3 \times 10^5$	$3,61 \times 10^6$	71,8 %

Les apports naturels alimentent R3 ( $a = 14\,400 \text{ m}^3/\text{h}$ ), R4 ( $a = 5\,400 \text{ m}^3/\text{h}$ ) et R5 ( $a = 1\,800 \text{ m}^3/\text{h}$ ), ce qui permet à la cascade d'être partiellement renouvelée sur l'horizon.

### 3.2 Dispatch de puissance

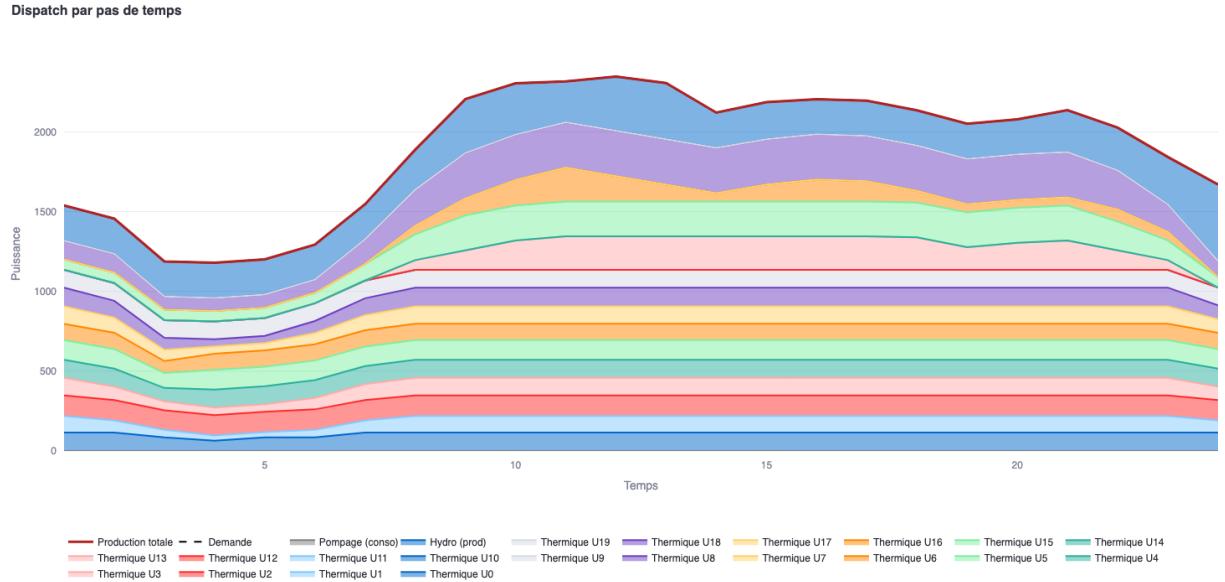


FIGURE 3 – Dispatch optimal — scénario 2 (cascade pHydro\_1, 480 MW hydraulique).

**Contribution hydraulique visible.** Contrairement au scénario 1, la bande « Hydro (prod) » est clairement identifiable dans la figure 3. La production hydraulique peut atteindre jusqu'à  $\approx 480$  MW, réduisant d'autant le recours au parc thermique.

**Modulation thermique réduite.** Avec 480 MW d'hydraulique disponibles, les grandes unités thermiques de semi-base et de pointe (U15–U19) n'ont plus besoin de moduler aussi fortement que dans le scénario 1 pour suivre la demande. Leur bande dans la figure est plus régulière, et certaines petites unités peuvent être maintenues à puissance réduite aux heures creuses.

**Équilibre offre–demande.** La courbe de production totale (rouge) reste confondue avec la courbe de demande (pointillés), confirmant la satisfaction de la contrainte à chaque pas de temps.

### 3.3 Évolution des réservoirs hydrauliques

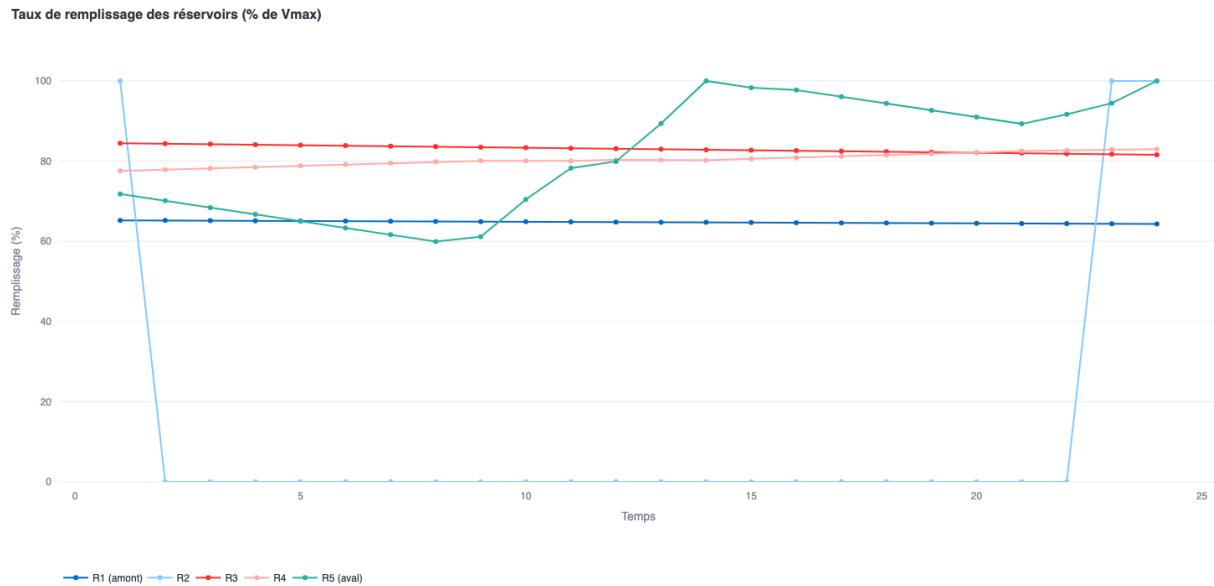


FIGURE 4 – Taux de remplissage des 5 réservoirs (% de  $V^{\max}$ ) — scénario 2.

La figure 4 montre l'évolution simultanée de cinq réservoirs : leur comportement contrasté illustre la richesse du couplage hydraulique sur une cascade réelle.

**R1 (amont, bleu) — grand réservoir stable.** R1 débute à 65 % et reste quasi-horizontal tout au long des 24 h. Sa très grande capacité ( $V^{\max} = 4,07 \times 10^8 \text{ m}^3$ ) amortit les variations de débit de l'arc 1 (max  $162\,000 \text{ m}^3/\text{h}$ ) : même à plein régime pendant 24 h, la variation de volume n'excéderait que  $162\,000 \times 24 / 4,07 \times 10^8 \approx 1\%$  de la capacité. Ce réservoir constitue donc un volant d'énergie à très long terme, dont le contenu n'est pratiquement pas modifié sur un horizon journalier.

**R2 (transit, bleu clair) — noeud de passage.** R2 est un noeud de transit de très faible capacité ( $V^{\max} = 1\,000 \text{ m}^3 = V^0$ ), qui s'avère le point d'entrée de la cascade. Il démarre à 100 % (plein), se vide quasi instantanément (dès  $t = 2$ ) au profit du flux turbiné vers R3 via l'arc sans turbine (arc 2), et reste à l'état vide pendant toute la journée. L'arc 2 ( $P^{\max} = 0$ ) ne produit pas d'électricité mais assure le transit de l'eau turbinée par l'arc 1 depuis R1 jusque vers R3.

**R3 (rouge) et R4 (rose) — réservoirs intermédiaires stables.** Ces deux réservoirs conservent un niveau de remplissage élevé et stable tout au long de l'horizon : R3 oscille entre 83 et 85 % (taux initial 84,5 %) et R4 entre 79 et 83 % (taux initial 77,5 %). Leurs apports naturels respectifs de  $14\,400$  et  $5\,400 \text{ m}^3/\text{h}$  compensent partiellement les débits turbinés. L'optimiseur maintient leur niveau élevé, préservant ainsi la flexibilité hydraulique pour les arcs aval (arc 5, 260 MW).

**R5 (aval, vert) — dynamique de remplissage en cours de journée.** R5 est le réservoir le plus petit et le plus dynamique ( $V^{\max} = 3,61 \times 10^6 \text{ m}^3$ ). Son évolution est révélatrice de la stratégie d'optimisation :

- $t = 1-8$ , **décharge lente** : R5 décroît de 72 % à environ 60 % car l'arc 6 (décharge, 4 MW) évacue davantage que les apports entrants.

- $t = 9\text{--}14$ , **remplissage rapide** : L'optimiseur augmente fortement le débit sur l'arc 5 (turbine R4→R5, 260 MW) pour répondre à la pointe de demande. L'eau turbinée depuis R4 remplit R5 plus vite qu'elle n'est évacuée : le réservoir monte de 60 % à **100 %** ( $V^{\max}$  atteint) en seulement 5 à 6 pas de temps.
- $t = 15\text{--}24$ , **saturation et stabilisation** : R5 oscille autour de 89–100 %, contrainte par sa borne supérieure. L'arc 6 évacue le surplus et empêche le dépassement de  $V^{\max}$ .

Ce comportement illustre la contrainte de stockage borné : lorsque le réservoir aval est plein, l'optimiseur ne peut plus turbiner autant sur l'arc 5 même si la demande l'exigerait, sous peine de violer  $V^{\max}$ .

### 3.4 Bilan comparatif et limites

**Comparaison avec le scénario 1.** Le tableau 4 synthétise les principales différences entre les deux scénarios.

TABLE 4 – Comparaison des deux scénarios.

Critère	Scénario 1	Scénario 2
Fichier hydro	<code>extended_pHydro_18</code>	<code>pHydro_1</code>
Réservoirs	1	5 (dont 1 transit)
Arcs turbine	1	5 (dont 1 sans turbine)
Topologie	chaîne simple	DAG non-simple (arcs parallèles)
$P_{\text{hydro}}^{\max}$	24 MW	480 MW
Part hydraulique dans la demande	< 1 %	≈ 20 %
Réservoirs avec apports naturels	0	3 (R3, R4, R5)
Comportement dominant	thermique pur	couplage hydro-thermique

Le scénario 2 met en lumière le rôle fondamental des cascades hydrauliques de taille réaliste dans l'optimisation d'un parc mixte : la production hydraulique (480 MW disponibles) permet de réduire significativement le recours aux unités thermiques coûteuses aux heures de pointe. Les dynamiques contrastées des cinq réservoirs illustrent comment l'optimiseur orchestre les flux d'eau à travers un réseau complexe pour maximiser l'écrêtage des coûts.

**Limites.** La topologie non-simple de `pHydro_1` (arcs parallèles entre R3 et R4) est prise en charge par la formulation DAG générale du modèle ; le solveur est cependant averti via un message de mise en garde. Par ailleurs, la saturation de R5 ( $V^{\max}$  atteint dès  $t \approx 14$ ) indique que la contrainte de volume supérieure est active : dans un scénario multi-jours, ce réservoir devrait soit être dimensionné plus grand, soit l'arc de décharge (arc 6) devrait disposer d'une capacité turbine plus importante pour évacuer les surplus.

## 4 Scénario 3 : grande cascade STEP pHydro\_3

### 4.1 Instance testée

Le scénario 3 introduit deux modifications importantes par rapport aux scénarios précédents : un parc thermique plus flexible (20\_0\_4\_w.nc4) et une cascade hydraulique de grande taille incluant des capacités de pompage-turbinage (20090907\_pHydro\_3\_none.nc4, UnitBlock\_151).

**Thermique — 20\_0\_4\_w.nc4.** Le parc comprend toujours 20 unités sur  $T = 24$  h, mais la demande est plus faible (1010 à **2 009** MW, moyenne 1 620 MW) et le parc se distingue par la grande flexibilité des petites unités :

- **Unités de base (U0–U9)** :  $P_k^{\max}$  entre 103 et 127 MW, coûts variables entre 38 et 47 €/MWh,  $\tau_l^+ = \tau_l^- = 1$  h — ces unités peuvent être démarrées ou arrêtées à chaque pas de temps, offrant une flexibilité quasi-instantanée ;
- **Unités de semi-base et de pointe (U10–U19)** :  $P_k^{\max}$  entre 182 et 302 MW, coûts variables entre 52 et 63 €/MWh,  $\tau_l^+ = 7\text{--}13$  h (comme dans les scénarios précédents).

**Hydraulique — pHydro\_3\_none.nc4 (UnitBlock\_151).** La cascade modélise **5 réservoirs et 9 arcs**, dont un arc de pompage réversible (arc 6). La puissance turbine disponible atteint **1 064 MW**, soit  $\approx 53\%$  de la demande de pointe. Le tableau 5 décrit la topologie.

TABLE 5 – Arcs de la cascade hydraulique — scénario 3.

Arc $k$	De	Vers	$P_k^{\max}$ (MW)	$F_k^{\max}$ ( $\text{m}^3/\text{h}$ )	Nature
1	R1	R2	0	0	inactif
2	R1	R2	50	140 400	turbine
3	R2	R3	190	153 000	turbine
4	R2	R3	20	16 920	turbine parallèle
5	R4	R3	760	399 600	<b>grande turbine</b>
6	R4	R3	(615)	0	<b>pompe réversible</b> ( $F^{\min} = -243\,000$ )
7	R3	R5	34	165 600	turbine
8	R3	R5	0	0	inactif
9	R5	R6	10	198 000	décharge ( $F^{\min} = 7\,200$ )

L'arc 6 est un *turbine réversible* (STEP) : sa borne de débit  $F^{\min} = -243\,000 \text{ m}^3/\text{h}$  permet un flux inverse, pompant l'eau de R3 vers R4 en consommant jusqu'à 615 MW, ce qui stocke de l'énergie dans le réservoir amont. L'arc 9 dispose d'un débit minimum imposé ( $F^{\min} = 7\,200 \text{ m}^3/\text{h}$ ), représentant un débit écologique ou réglementaire.

**État initial des réservoirs.** La configuration initiale est marquée par un fort déséquilibre : R4 est presque plein (89,9 %) et R3 presque vide (16,3 %), créant un fort potentiel de turbinage via l'arc 5 (760 MW). Le tableau 6 résume les paramètres.

TABLE 6 – Paramètres des réservoirs — scénario 3.

Réservoir	$V^0$ ( $\text{m}^3$ )	$V^{\min}$ ( $\text{m}^3$ )	$V^{\max}$ ( $\text{m}^3$ )	Taux initial
R1 (amont)	$1,52 \times 10^8$	0	$2,58 \times 10^8$	59,1 %
R2	$1,66 \times 10^6$	$1,48 \times 10^6$	$3,13 \times 10^6$	53,1 %
R3	$4,80 \times 10^6$	$8,00 \times 10^5$	$2,95 \times 10^7$	16,3 %
R4 (amont)	$2,73 \times 10^7$	$1,54 \times 10^6$	$3,04 \times 10^7$	89,9 %
R5 (aval)	$7,19 \times 10^5$	$5,30 \times 10^5$	$1,32 \times 10^6$	54,3 %

Les apports naturels alimentent R2 ( $360 \text{ m}^3/\text{h}$ ), R3 ( $1\,800 \text{ m}^3/\text{h}$ ) et R5 ( $360 \text{ m}^3/\text{h}$ ).

## 4.2 Dispatch de puissance

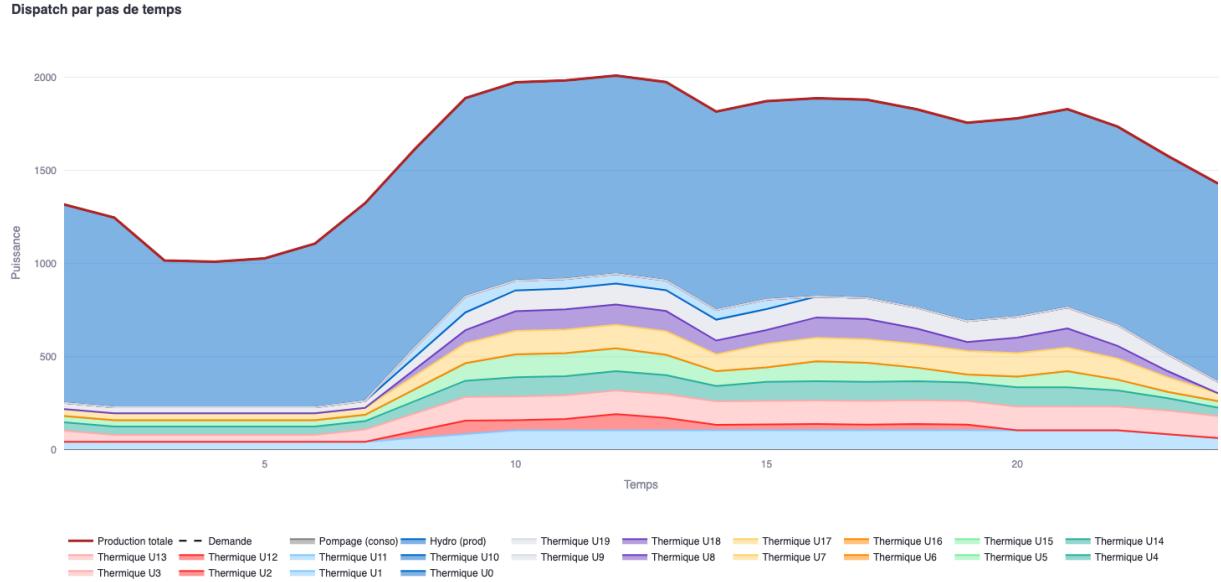


FIGURE 5 – Dispatch optimal — scénario 3 (cascade pHydro\_3, 1 064 MW turbine + pompage réversible).

**Hydraulique dominant.** La figure 5 illustre un renversement de la hiérarchie de production : la bande « Hydro (prod) » constitue la *majeure partie* de la production, couvrant à elle seule l’essentiel de la demande aux heures de pointe. Avec 1 064 MW de capacité turbine et une demande maximale de 2 009 MW, l’hydraulique peut à lui seul couvrir plus de la moitié de la demande de pointe, contre moins de 1 % et 20 % dans les scénarios précédents.

**Flexibilité thermique des petites unités.** Les unités U0–U9, dont les contraintes de durée minimale de marche se réduisent à  $\tau^+ = \tau^- = 1 \text{ h}$ , jouent ici un rôle de *réglage fin*. Contrairement aux scénarios 1 et 2 où ces unités fonctionnaient en base continue, elles peuvent ici être démarrées et arrêtées librement à chaque pas de temps pour compléter exactement la production hydraulique. Leurs bandes dans le graphe de dispatch présentent davantage d’irrégularités, traduisant cette flexibilité accrue.

**Rôle des grandes unités thermiques.** Les unités U10–U19 (longues contraintes de marche) sont maintenues en service continu pour assurer la puissance de base qui ne peut être couverte par l’hydraulique seul aux heures creuses. Leur contribution est modeste en valeur relative (environ 500–700 MW), mais indispensable pour garantir l’équilibre offre–demande aux pas de temps à faible production hydraulique.

**Équilibre offre–demande.** La production totale suit exactement la courbe de demande (1 010–2 009 MW), validant la satisfaction de la contrainte à chaque pas de temps, malgré la complexité de la topologie hydraulique (9 arcs, STEP).

### 4.3 Évolution des réservoirs hydrauliques

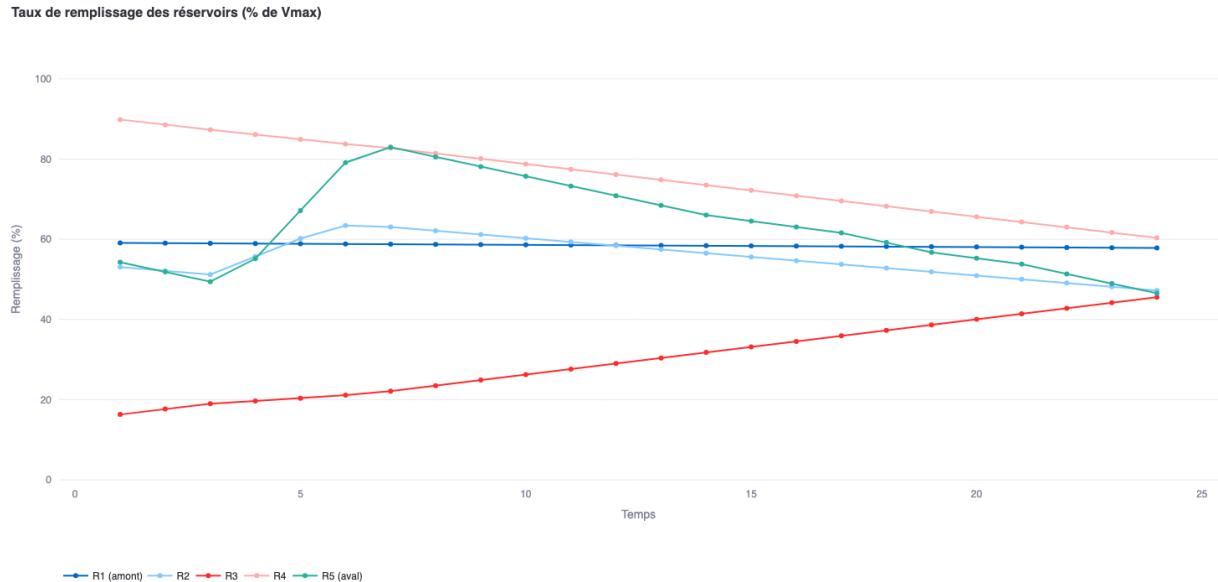


FIGURE 6 – Taux de remplissage des 5 réservoirs (% de  $V^{\max}$ ) — scénario 3.

La figure 6 révèle une dynamique de transfert entre réservoirs caractéristique d'un système à accumulation : les deux courbes de R4 et R3 évoluent en sens opposé tout au long de la journée.

**R4 (rose) — réservoir de tête, décharge continue.** R4 débute à 89,9% et se vide de façon quasi-linéaire jusqu'à  $\approx 47\%$  à  $t = 24$ . La variation de volume est :

$$\Delta V_{R4} \approx (0,899 - 0,47) \times 3,04 \times 10^7 \approx 1,30 \times 10^7 \text{ m}^3.$$

Cette eau est essentiellement turbinée via l'arc 5 ( $P^{\max} = 760 \text{ MW}$ ), la grande turbine de la cascade. La décharge linéaire indique que le débit sur arc 5 est maintenu quasi-constant tout au long de la journée, sans moduler selon la demande — signe que cet arc fonctionne à plein régime en permanence pour maximiser la production hydraulique gratuite.

**R3 (rouge) — réservoir central, remplissage progressif.** R3 démarre à seulement 16,3% (presque vide) et monte régulièrement jusqu'à  $\approx 47\%$  à  $t = 24$  :

$$\Delta V_{R3} \approx (0,47 - 0,163) \times 2,95 \times 10^7 \approx 9,1 \times 10^6 \text{ m}^3.$$

R3 reçoit l'essentiel de son eau de R4 (arc 5) ainsi que des apports naturels constants de  $1800 \text{ m}^3/\text{h}$ . L'eau qu'il reçoit est partiellement redirigée vers R5 (arc 7) et déchargée en fine par arc 9. La différence entre l'entrée de R4 ( $1,30 \times 10^7 \text{ m}^3$ ) et la hausse nette de R3 ( $0,91 \times 10^7 \text{ m}^3$ ) correspond aux volumes turbinés par les arcs 7 et 9 ainsi qu'aux apports de R2.

**R1 (bleu) et R2 (bleu clair) — réservoirs secondaires stables.** R1, grand réservoir amont ( $V^{\max} = 2,58 \times 10^8 \text{ m}^3$ ), reste stable à  $\approx 59\%$  tout au long de l'horizon : l'arc 2 (50 MW) turbine modérément depuis R1 vers R2, mais le volume déplacé reste négligeable face à la capacité de R1. R2 présente des oscillations entre 50 et 65% aux pas  $t = 4-8$ , reflétant les ajustements transitoires entre l'apport de R1 (arc 2) et les sorties vers R3 (arcs 3 et 4). Il se stabilise ensuite autour de 50–55%.

**R5 (vert, aval) — dynamique en cloche.** R5 ( $V^{\max} = 1,32 \times 10^6 \text{ m}^3$ , le plus petit réservoir) présente une évolution en cloche :

- $t = 1\text{--}7$ , **montée de 54 à 83 %** : l'arc 7 (turbine R3→R5, 34 MW) injecte davantage d'eau que l'arc 9 n'en évacue, malgré le débit minimum imposé de  $7\,200 \text{ m}^3/\text{h}$  sur ce dernier ;
- $t = 7\text{--}24$ , **descente de 83 à 47 %** : une fois R3 suffisamment rempli, l'arc 7 peut réduire son débit ; l'arc 9 assure la décharge continue, faisant baisser R5 jusqu'à la borne  $V^{\min}$  en fin d'horizon.

Le débit minimum sur l'arc 9 ( $F^{\min} = 7\,200 \text{ m}^3/\text{h}$ ) garantit un flux résiduel permanent, représentant une contrainte physique ou réglementaire (débit réservé).

#### 4.4 Bilan comparatif des trois scénarios

Le tableau 7 étend la comparaison au scénario 3.

TABLE 7 – Comparaison des trois scénarios.

Critère	Scénario 1	Scénario 2	Scénario 3
Fichier hydro	<code>ext._pHydro_18</code>	<code>pHydro_1</code>	<code>pHydro_3</code>
Réservoirs	1	5	5
Arcs (dont actifs)	1 / 1	6 / 5	9 / 7
Pompage réversible	non	non	oui (arc 6)
$P_{\text{turbine}}^{\max}$	24 MW	480 MW	1 064 MW
Part hydro / demande pointe	< 1 %	≈ 20 %	≈ 53 %
$\tau^+$ unités U0–U9	3–4 h	3–4 h	<b>1 h</b>
Demande max	2 347 MW	2 347 MW	2 009 MW
Réservoir critique	vidange $V^{\min}$	saturation $V^{\max}$ (R5)	transfert R4→R3
Comportement dominant	thermique	couplage HT	hydraulique dominant

Les trois scénarios forment une progression révélatrice : le scénario 1 valide la formulation sur un cas quasi-purement thermique ; le scénario 2 introduit un couplage hydro-thermique réel avec une cascade à topologie complexe ; le scénario 3 pousse le système jusqu'à un régime hydraulique dominant, où la flexibilité thermique (petites unités à  $\tau^+ = 1 \text{ h}$ ) et la grande turbine (760 MW) de la STEP sont les leviers principaux de l'optimisation.

## Conclusion

Ce travail a mis en œuvre une formulation MILP complète du problème d'Unit Commitment hydro-thermique, puis l'a validée sur trois scénarios de complexité croissante.

Les trois scénarios illustrent une progression cohérente : le scénario 1, avec un unique réservoir de faible capacité (24 MW), est quasi-purement thermique ; le scénario 2 introduit une véritable cascade à cinq réservoirs (480 MW hydrauliques) où le couplage hydro-thermique est significatif ; enfin, le scénario 3, doté d'une grande STEP réversible (760 MW turbine, 615 MW pompe), place l'hydraulique en position dominante en couvrant plus de 50 % de la demande.

La formulation MILP s'est révélée capable de gérer les contraintes de temps minimum de fonctionnement et d'arrêt, les courbes de turbinage linéaires par morceaux, les flux d'eau en cascade et, dans le scénario 3, leversement de la STEP. Le solveur GLPK a trouvé des solutions admissibles dans les trois cas, bien que la limite de temps de 300 s ne garantisse pas l'optimalité globale pour les instances les plus complexes.

En perspective, plusieurs pistes d'amélioration sont envisageables : tester des instances sur des horizons plus longs (plusieurs jours), activer le pompage dans les scénarios 1 et 2 pour en mesurer le bénéfice, recourir à un solveur commercial tel que Gurobi pour améliorer la qualité des solutions sur les instances difficiles, ou encore coupler plusieurs blocs hydro afin de modéliser un réseau de centrales interconnectées.

**Références et code :** [github.com/PaulCailleu/Optimisation\\_discrete](https://github.com/PaulCailleu/Optimisation_discrete)