

MAP551 - PC 2 - Notions de base théoriques Systèmes  
Dissipatifs / Conservatifs

Paul Calot

8 octobre 2020

## 0.1 Introduction

## 0.2 Fondamentaux

### 0.2.1

#### 0.2.1.a

On pose :  $c = u^2 + v^2$ .

On a donc :  $(u^2 + v^2)' = 2(uu' + vv') = 0$  en notant avec un ' les dérivés.

Donc  $c$  est un invariant du système.

#### 0.2.1.b

On voit rapidement que  $u(t) = \cos(t)$  et  $v(t) = \sin(t)$  vérifie (1) et est telle que :  $(u(0), v(0)) = (1, 0)$ .

#### 0.2.1.c

L'orbite associée est un cercle de centre l'origine  $(0, 0)$  et de rayon 1.

L'orbite associée à la solution précédente est une courbe dans le plan de phase sans présence de sens (même si on le rajoute parfois) ni de temps, contrairement à la solution qui possède ces informations.

## 0.2.2 Introduction

### 0.2.2.a Fondamentaux

On prend  $T$ , un réel strictement positif tel que la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n \times [0, T[ &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto -\nabla V(x) \end{aligned}$$

est C1 et donc localement lipzchietzienne (et pour une condition de Cauchy fixée). Par un théorème du cours, on a l'existence et l'unicité d'une solution locale au problème de Cauchy.

On cherche maintenant à avoir plus d'information sur  $T$ .

En dérivant  $V(y(t))$  par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial V(y(t))}{\partial t} = -\|\nabla V(y(t))\|^2 < 0 \quad (1)$$

Donc :

$$\exists T > 0, \forall t \in [0, T[, V(y(t)) \leq V(y(0)) = V(y_0)$$

Or par hypothèse,  $V(x)$  explose quand  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Comme ici, de toute évidence,  $V(y(t))$  est bornée sur  $[0, T[$ , c'est donc que  $y(t)$  n'explose pas sur cet intervalle.

Or d'après le cours, si  $t$  s'approche de  $T = \omega_t$  avec  $T$  fini, alors  $y(t)$  doit exploser. Ce qui n'est pas le cas ici. Donc  $T$  est infini, autrement dit :  $T = +\infty$ .

D'où, il existe une unique solution maximale définie pour tout  $t > 0$  au problème de Cauchy donné.

### 0.2.2.b Cas $n = 1$

Dans ce cas, on a :  $\nabla V(x) = x^3$ .

Le problème se réécrit alors :

$$\begin{cases} y' = -y^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

On suppose de plus que  $y_0 \neq 0$  (utile par la suite).

On reconnaît ici une équation différentielle de Bernoulli (du type :  $a(x)y' + b(x)y = c(x)y^\alpha$ ).

On pose donc pour  $y \neq 0$  :  $z = \frac{1}{y^2}$  d'où  $z' = \frac{-2y'}{y^3}$

Et donc notre problème se réécrit :

$$\begin{cases} z' = 2 \\ z(0) = \frac{1}{y_0^2} \end{cases} \quad (3)$$

Qui après résolution et retour en  $y(t)$  donne pour  $z > 0$ , soit  $t > -\frac{y_0^2}{2}$  :  $y(t) = \sqrt{\frac{1}{z(t)}} = \sqrt{\frac{1}{2t + y_0^2}}$ .

On a donc trouvé une solution maximale non définie pour tout  $t < 0$ .

## 0.3 Systèmes mécaniques - pendule sans friction

### 0.3.1

On a :  $x'' + \sin(x) = 0$

D'où :  $x''x' + \sin(x)x' = 0$

Soit en intégrant :

$$\frac{1}{2}x'^2 - \cos(x) = \text{constante}$$

On identifie le premier terme à l'énergie cinétique  $T = \frac{1}{2}x'^2$  et le second terme à l'énergie potentielle à une constante prêt que l'on prend égale à 1 pour avoir une énergie potentielle nulle pour  $x = 0$  :  $V = 1 - \cos(x)$

### 0.3.2

On en déduit l'énergie et le lagrangien :

$E = T + V$  et  $L = T - V$ .

On a d'après la question précédente :  $\frac{dE}{dt} = 0$ .

De plus, en posant :  $q = x$  et  $p = x'$ , on a :  $L(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - 1 + \cos(q)$  qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right) = \frac{d}{dt}(p) = -\sin(q) \text{ par (2)} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = -\sin(q) \end{cases} \quad (4)$$

D'où l'égalité sur le Lagrangien.

### 0.3.3

Comme  $\frac{dE}{dt} = 0$  alors  $E(q, p) = \text{cte} = E(q_0, p_0) = \frac{1}{2}p_0^2 + 1 - \cos(q_0)$ .

$E$	$q_0$	$p_0$	$\omega_{lim} = \alpha_{lim}$	plans de phase associés
0	0 $[2\pi]$	0	$\{0\}$	(4)
$]0, 2[$	$ q_0  < q_{max}(p_0)$	$ p_0  < p_{max}(q_0)$	$[- \arccos(1-E) ,  \arccos(1-E) ]$	(3)
2	$ q_0  = q_{max}(p_0)$	$ p_0  = p_{max}(q_0)$	$\{\pi\}$ ou $\{-\pi\}$	(2), (6)
$E > 2$	$ q_0  > q_{max}(p_0)$	$ p_0  > p_{max}(q_0)$	$\emptyset$	(1), (7)

TABLE 1 – Résumé des différentes partitions possibles

### 0.3.4

On pose :  $(x', -\sin(x)) = (u, v)$  ce qui donne :

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\sin(u) \\ u' = v \end{cases} \quad (5)$$

### 0.3.5

Rappel :  $E = \frac{1}{2}p_0^2 + 1 - \cos(q_0) \geq 0$ .

On prendra ici une condition initiale  $x \in ]-\pi, \pi]$ . On remarque que selon les valeurs de  $E$ , l'intervalle sur  $x$  sera différent. On peut ainsi différencier 4 régimes donnés dans la Table 1.

Physiquement :

1. Pour une énergie nulle, on est en position d'équilibre  $x = 0$  et on n'en bouge pas.
2. Pour une énergie légèrement plus importante mais inférieure strictement à 2, on voit qu'à aucun moment on ne pourra dépasser  $\pi$  (ou  $-\pi$ ). On aura alors des oscillations entre les deux valeurs extrêmes inférieures strictement à  $\pi$  (en valeur absolue).
3. Pour  $E = 2$ , on a exactement l'énergie nécessaire pour arriver avec une vitesse nulle en  $x = \pm\pi$  pour  $t \rightarrow \infty$ .
4. Et finalement, pour  $E > 2$ , on dépassé la valeurs  $x = \pm\pi$  et on va maintenant continuer d'évoluer vers  $|x| \rightarrow \infty$  en des temps infinis, rendant les ensembles limites vides.

Toutes ces orbites sont observables sauf celles correspondant à une énergie égale exactement à 2 (sans compter sur les erreurs numériques qui nous feront dévier de l'équilibre bien avant d'avoir un  $t$  suffisamment grand pour voire quelque chose de la convergence de ce type de solution).

### 0.3.6

Des exemples pour chaque partition sont donnés sur la figure 1.

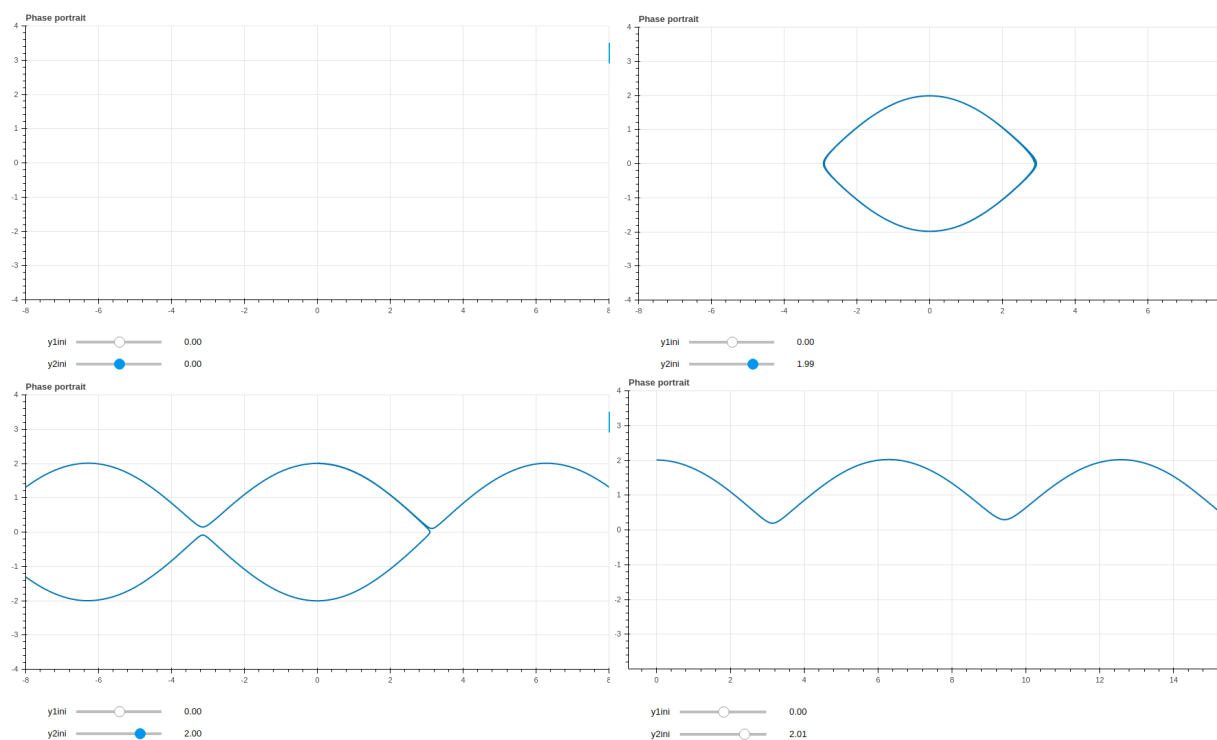


FIGURE 1 – Exemple de partitionnement de l'espace en Energie avec de gauche à droite puis de haut en bas :  $E = 0, E < 2, E = 2, E > 2$ . Noter la divergence observée pour  $E = 2$  à cause de la représentation inexacte des nombres en machine.

Les ensembles limites dépendent des conditions initiales comme nous l'avons vu à la question précédente. Un exemple est donné en figure 2.

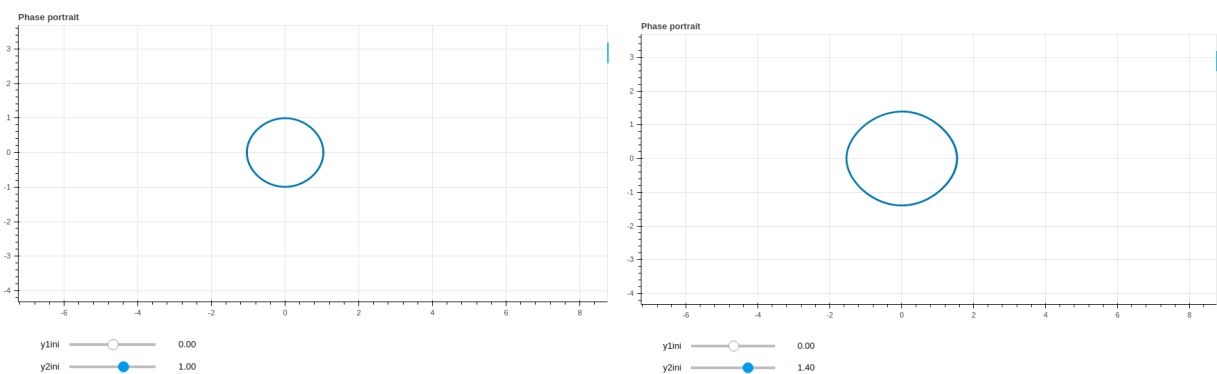


FIGURE 2 – Exemples d'ensembles limites différents pour deux conditions initiales différentes.

Comme vu sur l'exemple  $E = 2$ , il n'est pas toujours possible d'obtenir l'ensemble limite car le schéma utilisé ne préserve pas forcément les invariants du système (ici l'énergie). Ainsi, les erreurs machines empêchent en général d'avoir exactement l'orbite recherchée et de façon plus spécifique ici cause un comportement différent de la solution que celui prédit théoriquement.

### 0.3.7

Cette fois,  $E$  n'est plus conservée, le système est dissipatif. Toute solution périodique n'est dès lors plus possible. Toute solution convergera vers une solution d'équilibre précédemment étudiée, c'est-à-dire  $x = 0[2\pi]$  avec vitesse nulle ( $E_\infty = 0$ ).

Cela donne :

1. Pour une énergie nulle, on est en position d'équilibre  $x = 0$  et on n'en bouge pas (aucun changement).
2. Pour une énergie légèrement plus importante mais inférieure strictement à 2, on voit qu'à aucun moment on ne pourra dépasser  $\pi$  (ou  $-\pi$ ). On aura alors des oscillations amorties entre les deux valeurs extrêmes inférieures strictement à  $\pi$  avec convergence vers  $x = 0$  en temps infini.
3. Pour  $E = 2$ , on a exactement l'énergie nécessaire pour arriver avec une vitesse nulle en  $x = \pm\pi$  pour  $t \rightarrow \infty$ , cependant les frottements empêcheront cette convergence et on se retrouve dans le cas précédent.
4. Et finalement, pour  $E > 2$ , on peut dans le cas général dépasser la valeur  $x = \pm\pi$  et on évolue donc sur  $x \in \mathbb{R}$ . Cependant, les frottements finiront par dissiper suffisamment d'énergie de façon à avoir  $E < 2$  à un moment donné et on se retrouve alors dans le cas  $E_0 < 2$  mais cette fois avec convergence possible vers  $0[2\pi]$  donc.

Ce ce que l'on constate expérimentalement (cf. figure 3).

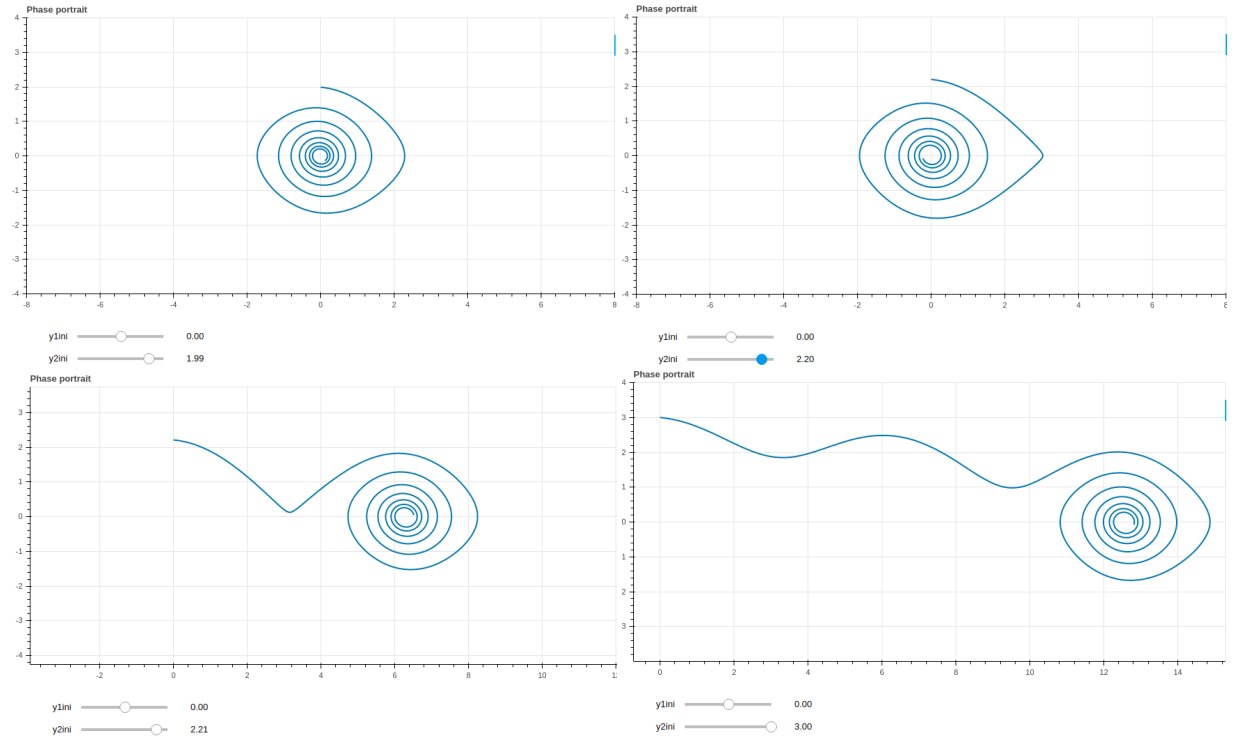


FIGURE 3 – Exemple de partitionnement de l'espace en Energie pour un pendule avec frottement de coefficient 0.1.

## 0.4 Dynamique des populations

### 0.4.1

#### 0.4.1.a

On cherche un invariant  $L(u_1, u_2)$  de (3), i.e. tel que :  $\frac{dL}{dt} = 0$ . Or  $L = \frac{\partial L}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial L}{\partial u_2} du_2$ .  
D'où :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}(u_1, u_2) &= \frac{\partial L}{\partial u_1} u_1' + \frac{\partial L}{\partial u_2} u_2' \\ &= \frac{\partial L}{\partial u_1} u_1(1 - u_2) + \frac{\partial L}{\partial u_2} u_2(u_1 - k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Puis en prenant,  $u_1(0) > 0$  et  $u_2(0) > 0$  (sinon l'étude actuelle n'a aucun intérêt), on a :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, u_1(t) &> 0 \\ u_2(t) &> 0 \end{aligned}$$

On peut donc diviser (6) par  $u_1 u_2 \neq 0$  pour obtenir :

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} \frac{1 - u_2}{u_2} + \frac{\partial L}{\partial u_2} \frac{u_1 - k}{u_1} = 0$$

Et en prenant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_1} = \frac{u_1 - k}{u_1} \\ \frac{\partial L}{\partial u_2} = \frac{u_2 - 1}{u_2} \end{cases} \tag{7}$$

On a l'équation 6 qui est vérifiée.

#### 0.4.1.b

Cet invariant permet de relier la quantité  $u_2$  à celle de  $u_1$  à tout instant puisque

$$L = \frac{u_1 - k}{u_1} du_1 + \frac{u_2 - 1}{u_2} du_2 = \text{constante}$$

On perd ainsi un degré de liberté.

Concernant les ensembles  $\omega$  et  $\alpha$  limites, on remarque que tant que  $u_0(0)$  et  $u_1(0)$  sont supérieurs à 0, on va oscillé entre deux valeurs. Physiquement, l'espèce prédatrice ( $u_2$ ) va voir son nombre s'accroître et consommer de plus en plus de l'espèce proie, diminuant ainsi le nombre d'individus de cette dernière, jusqu'à une valeur critique au-delà de laquelle il n'y a plus assez de proies pour nourrir la population prédatrice.

#### 0.4.1.c

On retrouve un comportement en temps **courts** compatibles avec les résultats théoriques précédents (cf. figure 0.4.1.c) mais on voit que l'invariant n'est pas exactement conservé.

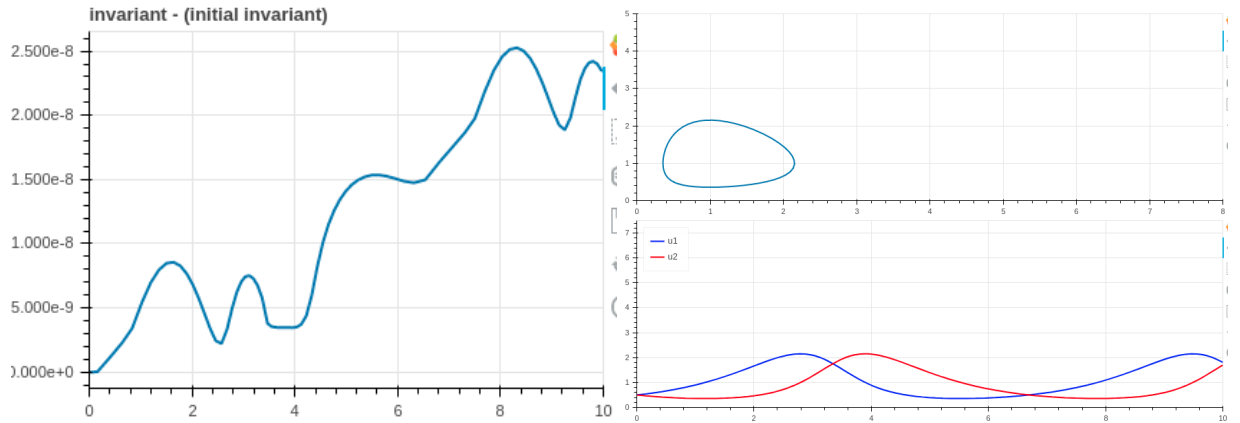


FIGURE 4 – Comportement en temps court (10 secondes) du modèle élémentaire conforme à la théorie sur l'image de gauche. A droite, l'évolution de l'invariant trouvé au cours du temps.

La conséquence de la non conservation de l'invariant est une divergence de l'orbite théorique d'un point de vue numérique. La figure 0.4.1.c illustre cela.

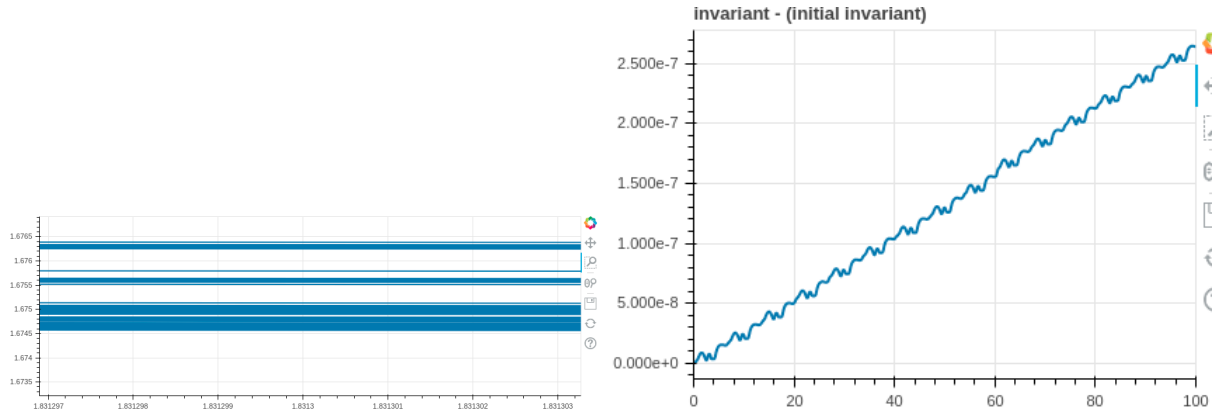


FIGURE 5 – Pour le même modèle avec les mêmes conditions initiales que celui de la figure 0.4.1.c, une partie du plan de phase a été sélectionné et laisse voir de façon plus précise les conséquences de la non conservation de l'invariant, dû au schéma numérique utilisé, sur le comportement du système. Pour des raisons de temps de calcul, seulement les 10000 premières secondes ont été plot.

La raison pour laquelle on ne peut pas utiliser n'importe quel type de solveur provient du fait que si le solveur ne conserve pas explicitement les invariants du système d'un temps à un autre, alors la représentation inexacte des nombres en machine empêchera le maintien de l'invariant au cours du temps.



## 0.4.2 Ajout de compétition intra-espèce

### 0.4.2.a

On remarque que le paramètre  $\alpha$  joue sur le caractère décroissant ou non de la population prédatrice. Plus il est élevé, plus il faut d'individus de l'espèce proie pour empêcher la décroissance de la population de prédateurs. On peut comprendre cela comme le nombre de proies moyen qu'un prédateur doit manger afin de ne pas mourir. On s'attend à ce que ce paramètre joue sur les ensembles limites du système. En effet, on peut penser que  $u_1$  (la population de proies) converge vers la valeur  $\alpha$ .

Le paramètre  $\beta$  joue quant à lui sur la rapidité de la croissance / décroissance de la population de prédateurs. Plus  $\beta$  est grand, plus vite la population augmentera dans le cas où il y a suffisamment de proies. On peut comprendre cela comme un facteur englobant la vitesse de reproduction de la population des prédateurs, ou autrement, la rapidité avec laquelle l'espèce s'adaptera à son nouvel environnement dans lequel le nombre de proies a changé. Ainsi, on se doute que plus  $\beta$  est élevé, plus on aura plus de chance de créer des comportements oscillants voire explosifs.

Un premier exemple est donné en figure 6. On remarque des comportements différents selon les couples  $(\alpha, \beta)$ . Un coefficient  $\alpha$  rend bien la tâche difficile pour l'espèce prédatrice jusqu'à provoquer sa disparition lorsqu'il n'y a pas assez de proies. Le coefficient  $\beta$  a surtout un intérêt sur le régime transitoire du système en le rendant plus sujet à oscillation, ce qui est mieux sur le cas  $(1, 1)$  pour l'espèce prédatrice. On voit donc qu'ici, on a tout le temps convergence vers des états dépendants des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  choisis.

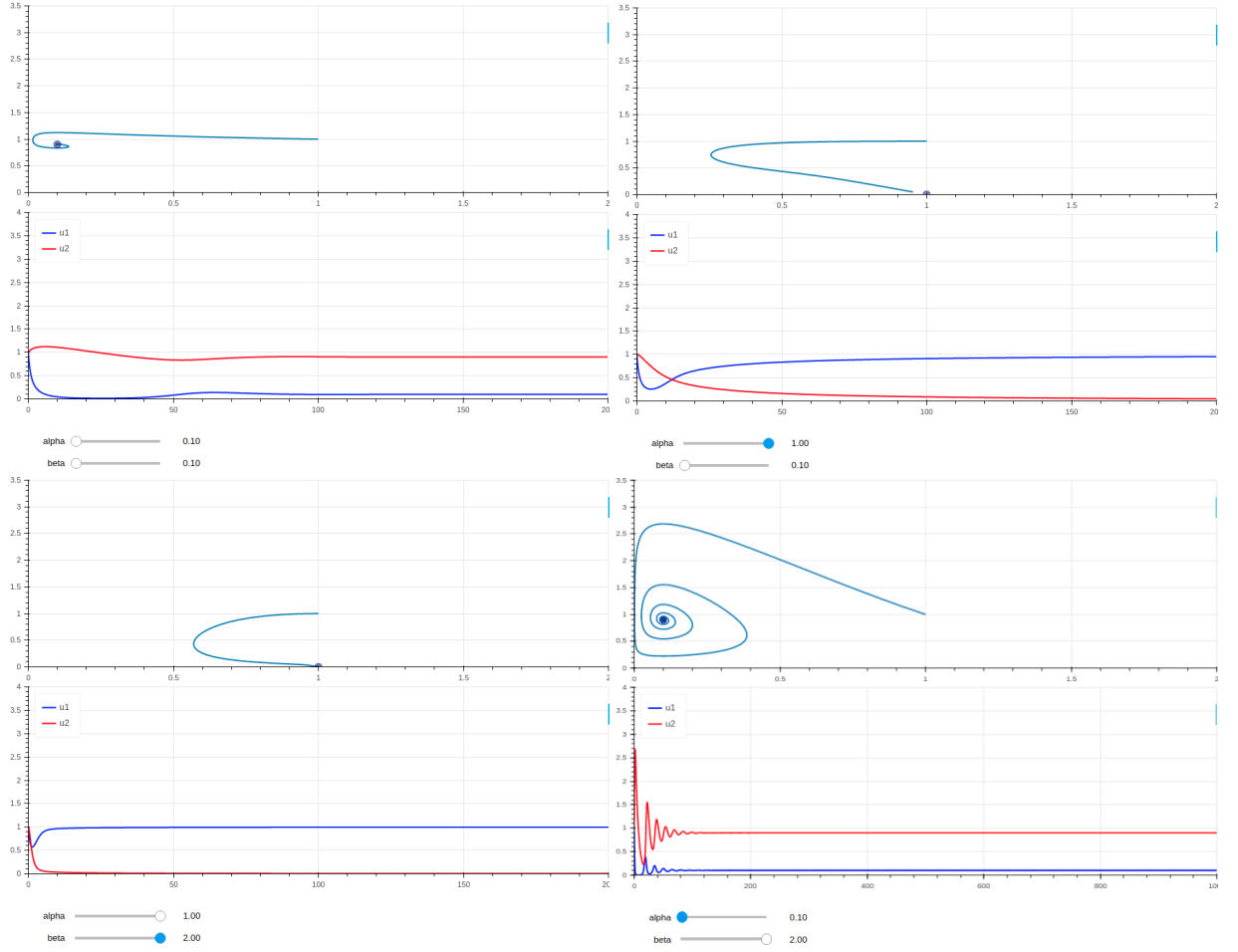


FIGURE 6 – Comportement du système pour une condition initiale  $(u_0(0), u_1(0)) = (1, 1)$  et pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

#### 0.4.2.b

On peut maintenant chercher à comparer pour des conditions initiales différentes (cf. figure 7). On remarque alors qu'elles ne semblent pas influencer sur les comportements longs termes des solutions et donc sur les ensembles limites. Seuls les régimes transitoires sont affectés.

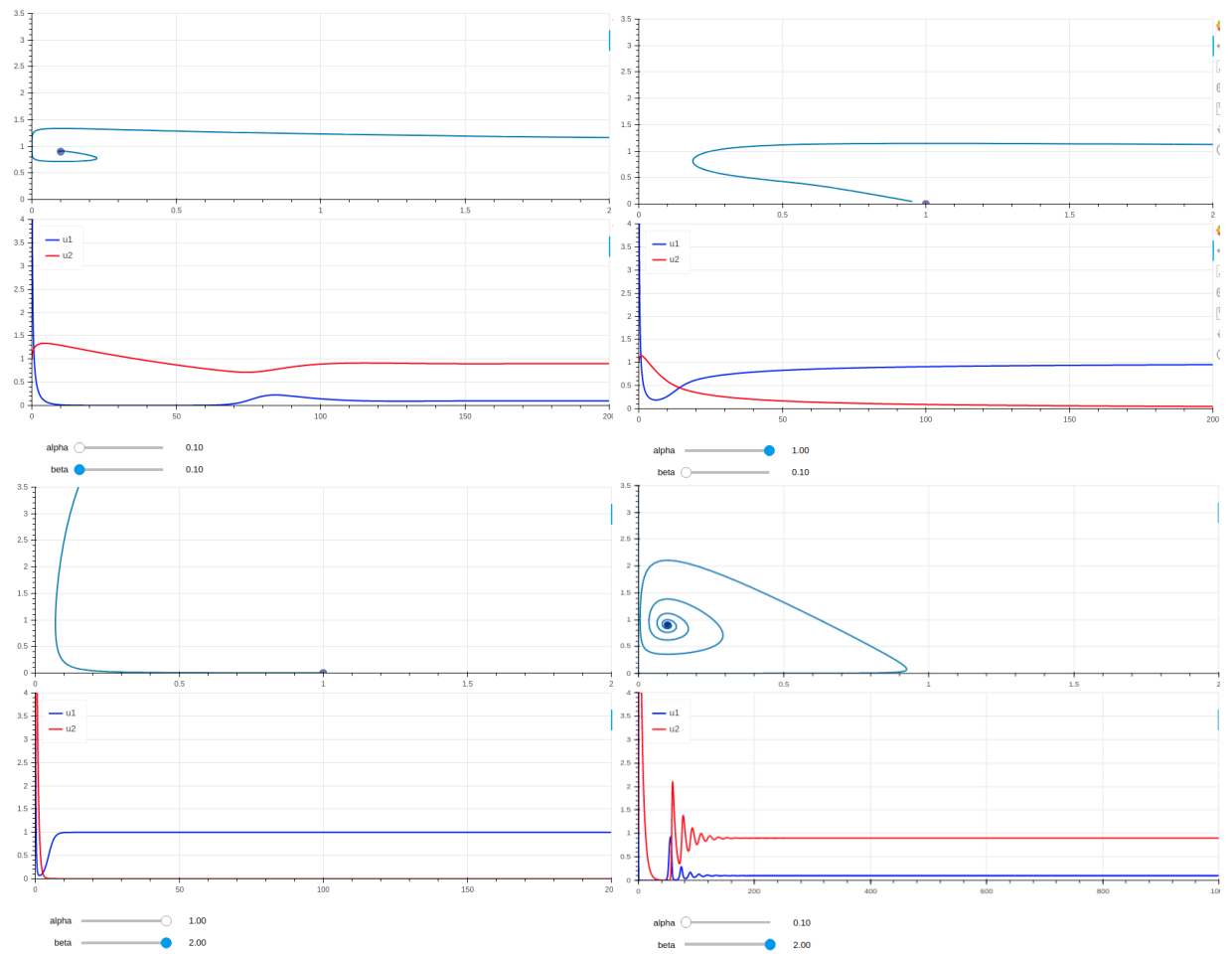


FIGURE 7 – Comportement du système pour une condition initiale  $(u_0(0), u_1(0)) = (10, 1)$  et pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

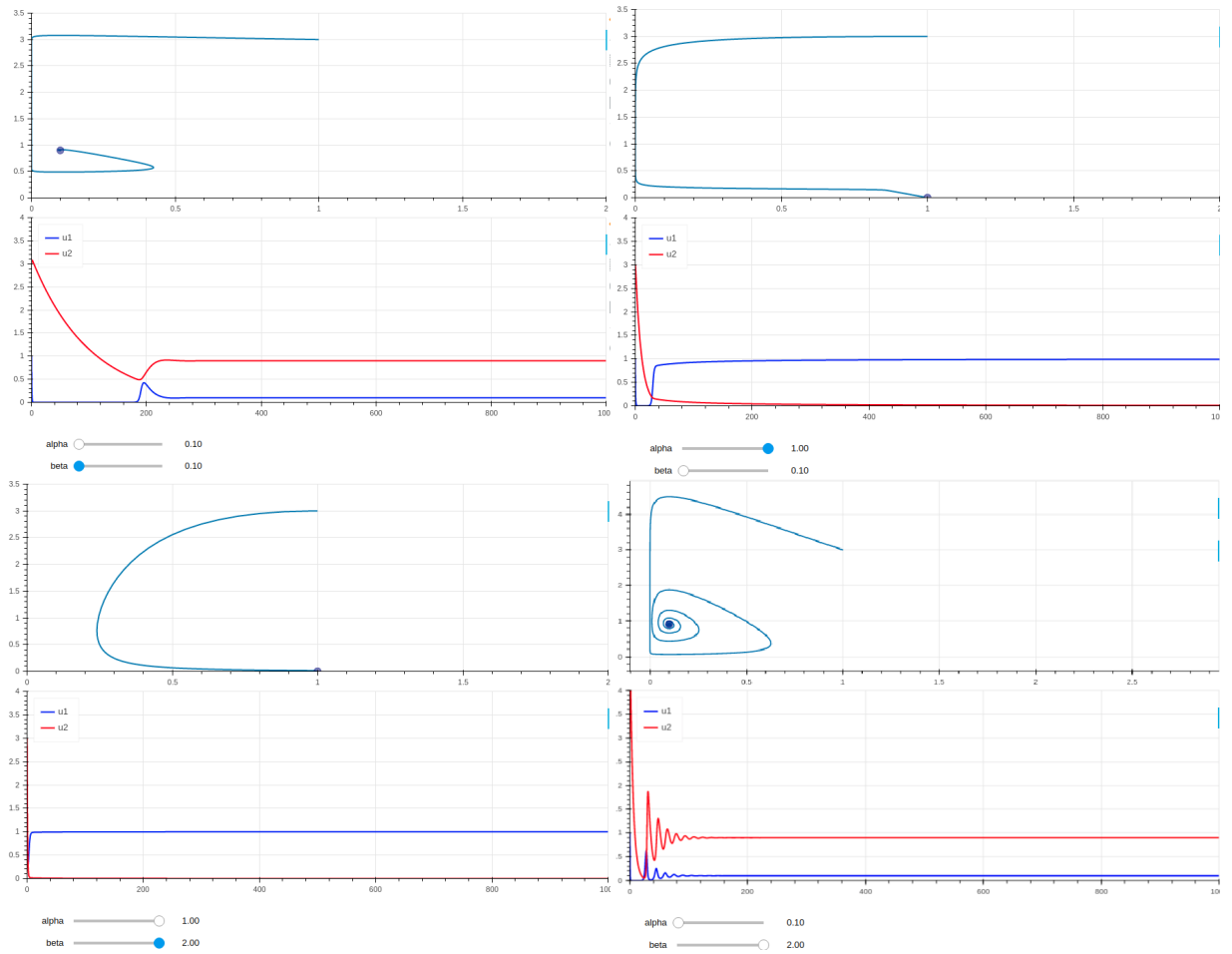


FIGURE 8 – Comportement du système pour une condition initiale  $(u_0(0), u_1(0)) = (1, 3)$  et pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

#### 0.4.2.c

Le comportement théorique des solutions est ici cohérent avec les considérations théoriques lorsque  $u_2 = 0$ , l'espèce proie a bien sa population croissant vers 1.

Concernant la comparaison des modèles (3) et (4), on remarque que le modèle (3) permettait des oscillations de population à long terme. Ce n'est plus le cas avec le système (4) qui atténue ces oscillations, s'il y en a, rapidement (ainsi les ensembles limites sont réduits à des points pour le système (4)).

### 0.4.3 Ajout de compétition intra-espèce

#### 0.4.3.a

Dans ce modèle,  $\alpha$  joue un rôle qu'on peut assimiler à la "quantité de proies nécessaire à la survie d'un prédateur en moyenne".

Un premier exemple est donné en figure 9.

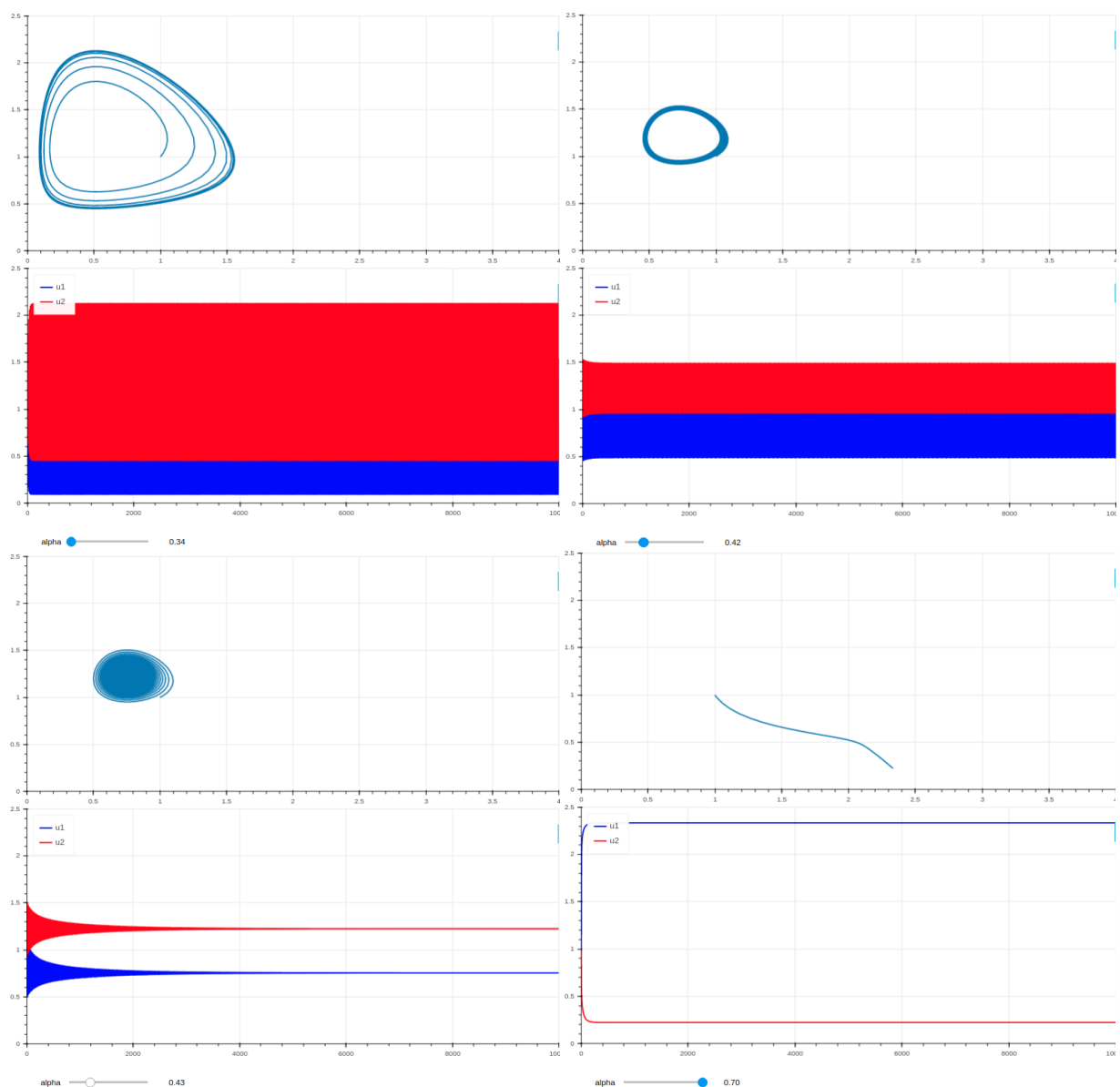


FIGURE 9 – Comportement du système pour une condition initiale  $(u_0(0), u_1(0)) = (1, 1)$  et pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Une bifurcation apparaît autour de  $\alpha_c \in ]0.42, 0.43[$ .

On remarque donc une valeur critique  $\alpha_c \in ]0.42, 0.43[$ . En dessous de cette valeur, le système oscille entre des valeurs qui dépendent de  $\alpha$  (comparaison  $\alpha = 0.34$  et  $\alpha = 0.42$ ).

Remarque : Un temps long a été choisi afin d'identifier plus facilement la bifurcation. Malheureusement cela cache le caractère oscillant des solutions sur les courbes d'évolution des grandeurs  $u_1$  et  $u_2$  solutions du système. Le portrait de phase aide cependant à identifier ce qui se passe.

Au-delà de cette valeur critique, le système converge vers un unique couple qui augmente avec  $\alpha$  (comparaison  $\alpha = 0.43$  et  $\alpha = 0.70$ ).

On peut maintenant essayer de modifier  $\beta$  puis  $\gamma$ . On remarque, que la diminution de  $\gamma$  à

faire converger plus rapidement le système et à empêcher tout comportement oscillatoire. . Le paramètre  $\beta$  joue quand à lui sur la période d'oscillation des solutions oscillantes : plus il est grand, plus le système sera oscillant.

#### 0.4.3.b

On peut maintenant chercher à comparer pour des conditions initiales différentes (cf. figure ??).

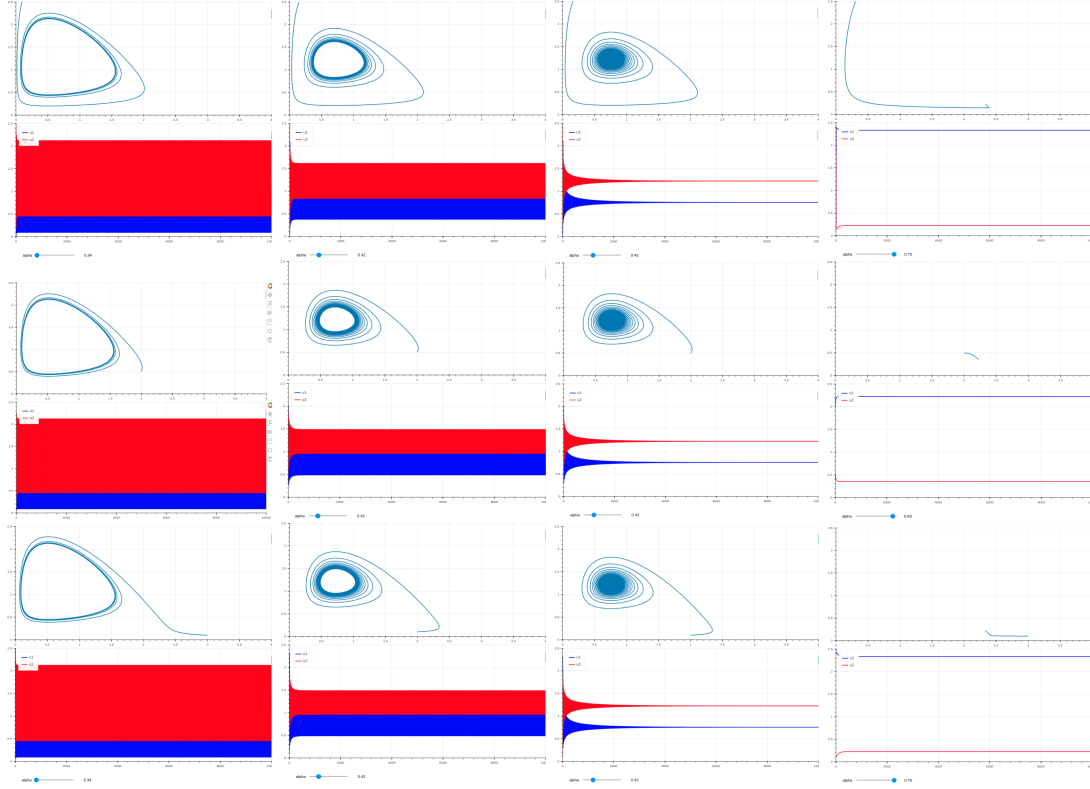


FIGURE 10 – Comportement du système pour trois conditions initiales différentes (de haut en bas) :  $(0.5, 3)$ ,  $(2, 0.5)$  et  $(3, 0.1)$ .

Il apparaît sur la figure 10 que le comportement limite (en temps longs) est toujours le même à  $\alpha$  fixé (et bien sûr  $\beta$  et  $\gamma$  fixés également), peu importe les conditions initiales.

#### 0.4.3.c

De même que pour le modèle (3), le modèle (5) permet des oscillations. Cependant, la période de ces oscillations ne dépend pas des conditions initiales contrairement à ce que Volterra a observé (cf. figure 11). Les oscillations du système (5) dépendent des différents paramètres, en particulier du paramètre  $\alpha$ . On peut cependant associer la pêche à une augmentation de  $\alpha$  rendant le travail plus difficile pour les espèces prédatrices, cela reviendrait à considérer qu'il faut davantage de proies pour nourrir les espèces prédatrices comme les humains en capturent une partie. De manière générale,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  permettent de gérer le comportement du système

(oscillation et période d'oscillations, convergence, ensemble limite, valeurs finales etc.) qui ne dépend pas (dans les cas non pathologiques) des conditions initiales des populations  $u_1$  et  $u_2$ .

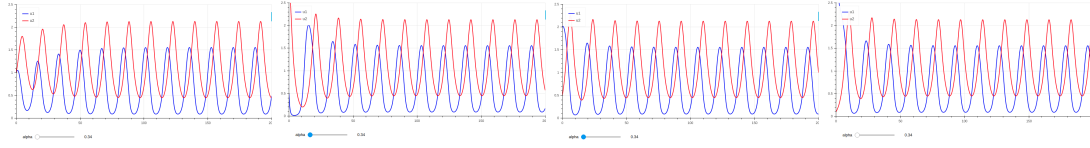


FIGURE 11 – Observation de la période du système pour différentes conditions initiales pour les mêmes paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .