

MAP551 - PC 1 - Théorie de l'explosion thermique & PC
2 - Notions de base théoriques Systèmes Dissipatifs /
Conservatifs

Paul Calot

9 octobre 2020

Table des matières

1	PC 1 - Théorie de l'explosion thermique	2
1.1	Introduction	2
1.2	Explosion dans un réacteur homogène	2
1.2.1	Modèle simplifié 1 - explosion adiabatique	2
1.2.2	Modèle simplifié 2 - explosion avec prise en compte des pertes thermiques	5
1.2.3	Modèle simplifié 3 - explosion avec prise en compte de la convection . . .	10
2	PC2 - Notions de base théoriques Systèmes Dissipatifs / Conservatifs	14
2.1	Introduction	14
2.2	Fondamentaux	14
2.2.1	Solution et orbite	14
2.2.2	Flot de gradient et solution globale	14
2.3	Systèmes mécaniques - pendule sans friction	15
2.3.1	15
2.3.2	16
2.3.3	16
2.3.4	16
2.3.5	16
2.3.6	17
2.3.7	18
2.4	Dynamique des populations	19
2.4.1	Un modèle élémentaire	19
2.4.2	Prise en compte de la compétition intra-espèce, changement de dynamique	21
2.4.3	Solutions périodiques de modèle Rosenzweig-MacArthur, cycles limites . .	24

Chapitre 1

PC 1 - Théorie de l'explosion thermique

1.1 Introduction

1.2 Explosion dans un réacteur homogène

1.2.1 Modèle simplifié 1 - explosion adiabatique

1.2.1.1

1.2.1.1.a En posant : $H = T_r Y + T$ on obtient $d_t H = T_r d_t Y + d_t T = 0$.

Par conséquent :

$$\forall t \geq 0, H(t) = cte = H(0) = T_r Y(0) + T(0) = T_r + T_0 = T_b$$

Donc :

$$\forall t \geq 0, H(t) = T_b$$

Puis, on a $T = H - T_r Y$ d'où :

$$d_t Y = -B e^{-\frac{E}{RT}} Y = -B e^{-\frac{E}{R(T_b - T_r Y)}} Y = \Phi(Y)$$

On a également $Y = \frac{T_b - T}{T_r}$ donc :

$$d_t T = T_r B e^{-\frac{E}{RT}} \left(\frac{T_b - T}{T_r} \right) = B(T_b - T) e^{-\frac{E}{RT}} = \Lambda(T)$$

1.2.1.1.b On remarque que :

$$d_t T > 0 \Leftrightarrow T_b > T$$

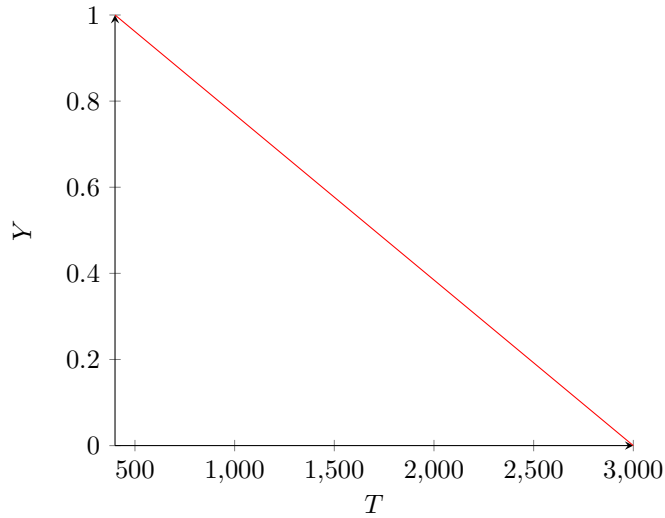
car $B > 0$ et la fonction exponentielle est toujours strictement positive. Et $T_b = T \Leftrightarrow d_t T = 0$.

De plus et par hypothèse, $T_r > 0$ donc $T_b > T(0)$ donc $d_t T(0) > 0$. Donc T est strictement croissante tant qu'elle est inférieure à T_b . Lorsque $T = T_b$, $d_t T = 0$ et donc T n'évolue plus. Par conséquent, T_b est une borne supérieure de T pour une condition initiale $T(0) < T_b$ que T atteindra, au pire, en un temps infini.

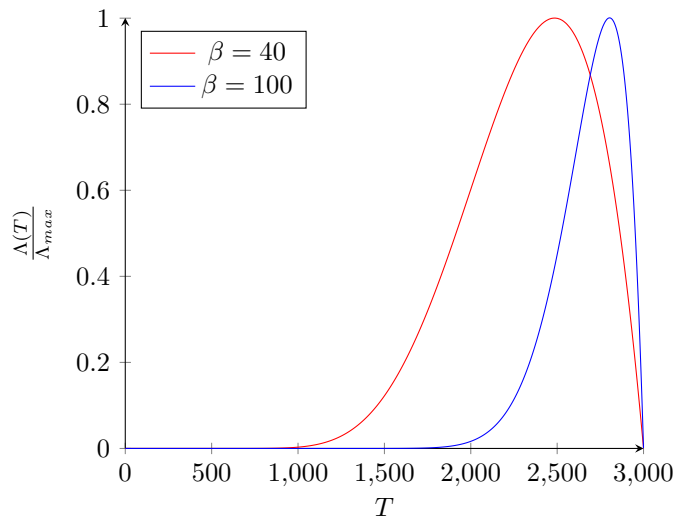
Donc,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T_b - T}{T_r} = 0$$

1.2.1.1.c On a $Y = \frac{T_b - T}{T_r}$, donc :



1.2.1.1.d Traçons quelques graphs pour commencer :



On a :

T (K) β	30	100
1000	3.0e-3	≈ 0
2400	0.98	0.28

TABLE 1.1 – Valeur de $\Lambda(T)$ pour certaines valeurs de T et de β .

"Forte non linéarité dépendant de l'énergie d'activation" : plus E_a augmente, plus β augmente et plus Λ augmente. Cependant cette augmentation n'est pas proportionnelle à l'augmentation de β à température égale.

ne pas hésiter à donner plus de détails qualitatifs

1.2.1.2

1.2.1.2.a On a : $d_t \Theta = d_t T \frac{1}{T_{FK}} = \frac{\Lambda(T)}{T_{FK}}$

Puis en utilisant $T = T_{FK} \Theta + T_0$, on obtient :

$$d_t \Theta = B(T_r - T_{FK} \Theta) e^{-\frac{E}{R(T_{FK} \Theta + T_0)}}$$

1.2.1.2.b Sous les hypothèses (H0) et (H1) ainsi que celle de cette question, on a :

1. $T_r - T_{FK} \Theta = T_r - \frac{T_0 \Theta}{\beta} = T_r(1 + o(1))$ car $\Theta \ll \beta$ et par (H2).

2. $\frac{E}{R(T_{FK} \Theta + T_0)} = \frac{E}{RT_0(1 + \frac{\Theta}{\beta})} = \frac{E}{RT_0} (1 - \frac{\Theta}{\beta} + o(\frac{\Theta}{\beta}))$

D'où :

$$d_t \Theta = \frac{BT_r}{T_{FK}} (1 + o(1)) e^{-\frac{E}{RT_0} (1 - \frac{\Theta}{\beta} + o(\frac{\Theta}{\beta}))} \approx \frac{BT_r}{T_{FK}} e^{-\frac{E}{RT_0}} e^{\Theta} = \frac{1}{t_I} e^{\Theta}$$

avec $t_I = \frac{T_{FK}}{B(T_r - T_0) e^{\frac{E}{RT_0}}} = \frac{T_{FK} e^{\beta}}{BT_r}$.

En repassant en coordonnées non adimensionnée, on obtient : $e^{\Theta} = e^{\frac{T - T_0}{T_{FK}}}$ qui est donc la fonction exponentielle appliquée à une forme linéaire de T . Partant de T qui était au dénominateur de la fraction dans l'exponentielle, on comprendre l'appellation "linéarisation de Frank-Kamenetskii".

✓

1.2.1.2.c Notons que : $\tau = \frac{t}{t_I} \Rightarrow d\tau = \frac{dt}{t_I}$.

En utilisant (5) et le changement de variable $\tau = \frac{t}{t_I}$, on obtient :

$$d_\tau \tilde{\theta}(\tau) = t_I d_t \tilde{\Theta}(t) = e^{\tilde{\Theta}(t)} = e^{\tilde{\theta}(\tau)}$$

Afin de résoudre cette équation, commençons par séparer les variables :

$$d_\tau \tilde{\theta}(\tau) = e^{\tilde{\theta}(\tau)} \Leftrightarrow \frac{d\tilde{\theta}(\tau)}{e^{\tilde{\theta}(\tau)}} = d\tau$$

Pour résoudre cela, il suffit de remarquer que :

$$\frac{u'}{e^u} = \frac{u'}{e^{-u}} = -d(e^{-u})$$

Ce qui dans notre cas, permet d'écrire :

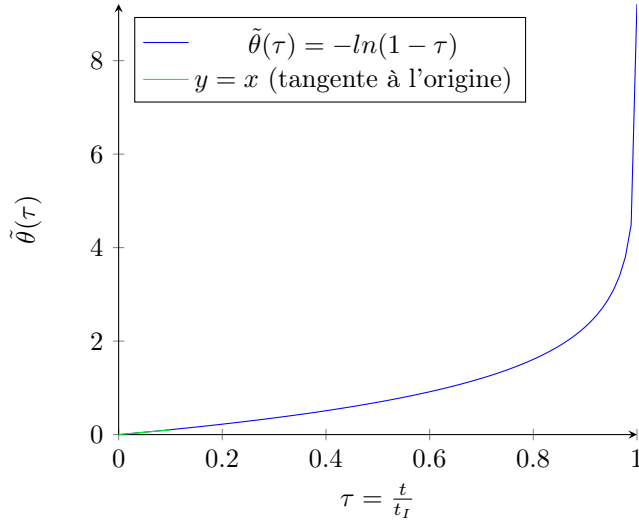
$$d_\tau \tilde{\theta}(\tau) = e^{\tilde{\theta}(\tau)} \Leftrightarrow -(e^{-\tilde{\theta}(\tau)} - 1) = t \text{ par intégration entre 0 et } t \text{ avec } \tilde{\theta}(0) = 0.$$

Ce qui donne dans le cas $\tilde{\theta}(\tau) > 0$ (ce qui est toujours vrai donc on garde l'équivalence) :

$$\tilde{\theta}(\tau) = -\ln(1 - \tau)$$

Graphiquement, cela donne :

↑ commentaire du point de vue de la simplification du modèle?



1.2.2 Modèle simplifié 2 - explosion avec prise en compte des pertes thermiques

On suppose que la température reste homogène et que la température des parois sont constantes (terme physique).

1.2.2.1

1.2.2.1.a

Minoration de T Supposons qu'il existe \bar{t} tel que $\bar{t} = \inf\{t > 0, T(t) = T_0\}$.

Dans ce cas, on aurait $d_t T(\bar{t}) = T_r B e^{-\frac{E}{RT}} Y > 0$ car $Y(\bar{t}) \neq 0$. Ce qui voudrait dire que dans un voisinage de \bar{t} , $dt_T(t) \geq 0$ et que donc : $\exists \tilde{t} < \bar{t}, T(\tilde{t}) \leq T_0$ ce qui par définition de \bar{t} est exclu.

D'où il n'existe pas de moment $t > 0$ tel que $T(t) = T_0$ et donc : $\forall t > 0, T(t) > T_0$.

Etude de H Si on pose : $H = T_r Y + T$ alors $d_t H(t) = -\frac{T-T_0}{t_p} < 0, \forall t > 0$ par la démonstration précédente. Par conséquent, H n'est plus constant. De plus, H diminue, donc : $\forall t > 0, H(t) < H(t=0) = T_b$ d'après la partie précédente.

Majoration de T Par ce qui précède, on a immédiatement : $\forall t > 0, T(t) < T_r Y(t) + T(t) = H(t) < T_b$. De plus, comme $T(0) = T_0 < T_b$, alors :

$$\forall t \geq 0, T(t) < T_b$$

Conjecture sur le comportement du système Initialement, $d_t T(t) \approx T_r B e^{-\frac{E}{RT}} Y$ car T est très proche de T_0 . Par conséquent on retrouve le comportement explosif de la partie précédente. Cependant, dès lorsque $T - T_0 > K$ où $K < T_r$ (car $T < T_b$) est la différence de température telle que le second terme de (8) domine le premier terme, on récupère : $dt_T = -\frac{T-T_0}{t_p} < 0$, ce qui a pour conséquence de diminuer la température et d'empêcher l'explosion de la température. Pendant ce temps, on a toujours $d_t Y(t) < 0$ et donc Y diminue. Donc plus le temps passe plus le premier terme va diminuer indépendamment de T , avec une fois $Y \approx 0$,

$d_t T < 0$ jusqu'à ce que $T = T_0$. Un comportement oscillatoire amorti (avec convergence vers T_0 avec $T > T_0$) semble possible mais dépendra probablement des constantes utilisées.

1.2.2.1.b On peut imaginer les formes de $Y(t)$ et $T(t)$ visiblement en figure 1.2.2.1.b.

Adimensionnement de Y et T On commence par poser : $\Theta = \frac{T-T_0}{T_{FK}} \Rightarrow d_t T = T_{FK} d_t \Theta$.
On a alors :

$$(8) \Leftrightarrow d_t \Theta = B \frac{T_r}{T_{FK}} e^{-\frac{E}{R(T_{FK}\Theta + T_0)}} Y - \frac{\Theta}{t_p}$$

Puis on pose : $\tau = \frac{t}{t_I} \Rightarrow d\tau = \frac{dt}{t_I}$

Et également : $\tilde{Y}(\tau) = Y(t)$ et $\tilde{\Theta}(\tau) = \Theta(t)$

D'où :

$$(8) \Leftrightarrow d_\tau \tilde{\Theta} = B t_I \frac{T_r}{T_{FK}} e^{-\frac{E}{R(T_{FK}\tilde{\Theta} + T_0)}} \tilde{Y} - t_I \frac{\tilde{\Theta}}{t_p}$$

Et également :

$$(7) \Leftrightarrow d_\tau \tilde{Y} = -t_I B e^{-\frac{E}{R(T_{FK}\tilde{\Theta} + T_0)}} \tilde{Y}$$

1.2.2.2

1.2.2.2.a On a :

$$d_\tau \tilde{\Theta} = B t_I \frac{T_r}{T_{FK}} e^{-\frac{E}{R(T_{FK}\tilde{\Theta} + T_0)}} \tilde{Y} - t_I \frac{\tilde{\Theta}}{t_p} = k_1 e^{-\frac{\beta}{\beta-1}\tilde{\Theta}+1}} \tilde{Y} - k_2 \tilde{\Theta}$$

Or : $-\frac{\beta}{\beta-1}\tilde{\Theta}+1} = \Theta - 1 + o(\frac{\Theta}{\beta})$ car on a montré que $T < T_b$, donc on peut supposer que $\tilde{\Theta} \ll \beta$ avec par (H1) : $\beta \gg 1$. Il faudra vérifier sur quel intervalle cette hypothèse tient.

En faisant cela, on se ramène donc à une situation analogue au modèle 1) du point de vue des calculs et on obtient :

$$d_\tau \tilde{\Theta} \approx k e^{\tilde{\Theta}} \tilde{Y} - k_2 \tilde{\Theta}$$

où $k = k_1 e^{-\beta} = B t_I \frac{T_r}{T_{FK}} e e^{-\beta} = 1$ car on avait posé : $t_I = \frac{T_{FK} e^\beta}{T_r B}$.

Par l'hypothèse (H2) d'une grande enthalpie de réaction, on a que \tilde{Y} sera relativement constant jusqu'à ce qu'on dépasse une certaine température élevée devant T_0 . Cela revient à supposer que pour l'intervalle que l'on étudie, on a $\tilde{Y} \approx 1$.

Finalement et en posant $\tilde{\Theta} = \tilde{\theta}$, on obtient :

$$d_\tau \tilde{\theta} = e^{\tilde{\theta}} - \alpha_0 \tilde{\theta}$$

où $\alpha_0 = \frac{t_I}{t_p}$ et sur un intervalle de "pas trop grande température" que l'on devra qualifier par la suite.

Intervalle temporel de validité Plusieurs paramètres sont à l'oeuvre pour la validité du modèle. Notamment, $\tilde{\Theta} \ll \beta$ ce qui implique qu'on ne doit pas avoir d'explosion en température. Plus α_0 est élevé et plus les pertes thermiques limiteront cette divergence et donc plus longtemps sera valide le modèle. Une forte contrainte est également appliquée à \tilde{Y} qui doit demeurer quasiment constante.

En utilisant le notebook et notamment la cellule du modèle de l'explosion avec prise en compte des pertes thermiques et consommation de combustible (cf. figure 1.2), on a :

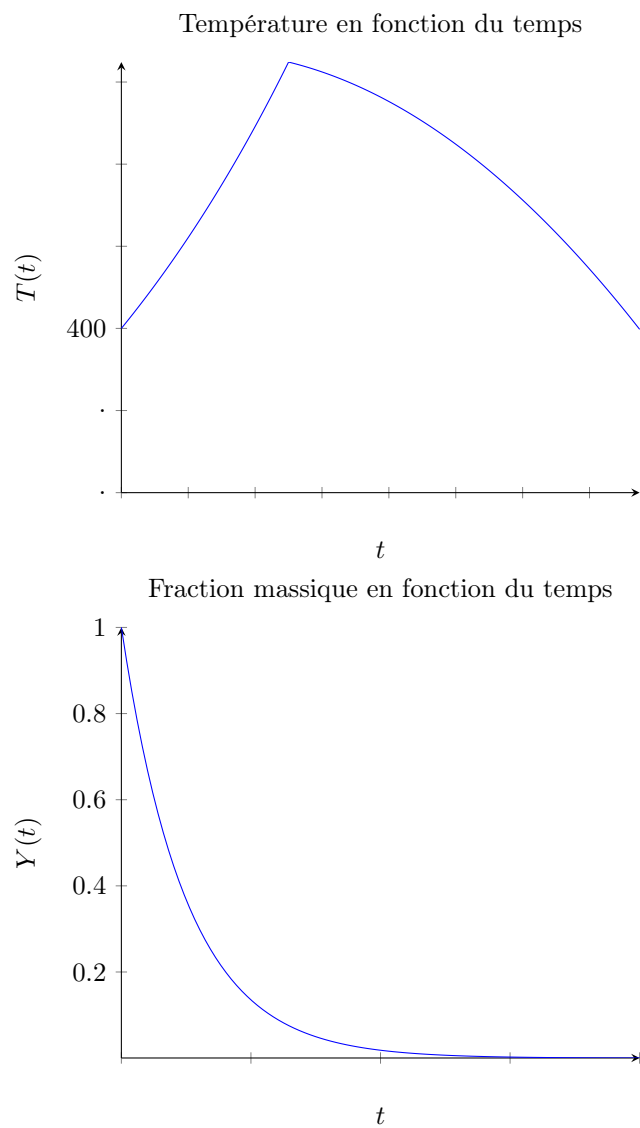


FIGURE 1.1 – Forme de Y et T en fonction du temps. En pratique bien sûr, la température est C^1 .

1. $\alpha_0 = 0$: on retrouve le comportement du modèle précédent puisqu'on ignore les pertes thermiques. Pour ce modèle, on peut considérer que l'approximation que l'on fait est valable sur l'intervalle $[0,1]$ sec (avant l'explosion en température).
2. $\alpha_0 = 0.1$: on constate cette fois une décroissance de la température à partir d'un certain temps (lorsque $Y \approx 0$). Pour ce modèle, on peut considérer également que l'approximation que l'on fait est valable sur l'intervalle $[0,1]$ sec.
3. $\alpha_0 = 2.4$: Pour ce modèle, on peut considérer que l'approximation que l'on fait est valable sur l'intervalle $[0,7]$ sec. En effet, les pertes thermiques retardent vraiment la montée en température qui invalide le modèle et permet ainsi de limiter l'énergie disponible pour l'accélération de la cinétique de la réaction. Ainsi, Y décroît lentement sur l'intervalle $[0,7]$ sec. Au bout de sept secondes, Y a environ perdu 10% de sa valeur initiale (si on fixe une tolérance à 10% qui me semble bien trop élevée pour une réaction de combustion dans un réacteur cependant).
4. $\alpha_0 = 2.5$: on semble ici avoir passé un palier sur α_0 puisque la température semble rester égale à sa valeur initiale (aucun pic n'est visible contrairement à précédemment). Physiquement, toute l'énergie produite par la réaction est quasi-immédiatement dégagée via les pertes thermiques empêchant ainsi tout effet d'emballement de la réaction. Cependant, Y décroît plus rapidement que précédemment (je n'explique pas ce phénomène) [REVOIR CELA].

Notons que $\beta = 30.0$ a été utilisé pour tracer cela. Un β plus grand permet d'augmenter $T_{max-valid}$.

1.2.2.2.b Ce diagramme est disponible sur le notebook et permet de tracer le tableau suivant :

Avec $\alpha_{cr} \approx 2.72$ d'après les graphs.

Physiquement, on a :

1. $\alpha_0 < \alpha_{cr}$: les pertes thermiques ne sont pas suffisantes pour empêcher l'emballement de la réaction et l'explosion de la température.
2. $\alpha_0 = \alpha_{cr}$: les pertes thermiques sont tout juste suffisantes pour empêcher l'emballement de la réaction mais le moindre apport d'énergie extérieur fait exploser la température (équilibre instable). Si T_0 est trop important cependant, il y a divergence.
3. $\alpha_0 > \alpha_{cr}$: les pertes thermiques sont suffisamment importantes pour empêcher l'emballement de la réaction et avoir un équilibre stable si la température initiale est suffisamment faible. Si tel n'est pas le cas, on peut avoir une convergence vers un équilibre instable ou une explosion.

1.2.2.2.c Les dynamiques possibles pour l'équation (9) sont détaillés dans la question précédente. Concernant les comportements limites :

1. $\alpha_0 \rightarrow 0$: on retrouve le cas adiabatique de la partie précédente.
2. $\alpha_0 \rightarrow +\infty$: dans ce cas, la position d'équilibre stable est de plus en plus proche de $\tilde{\theta}_0 = 0$ et la position d'équilibre instable devient très très grande.

1.2.2.2.d Il y a trois possibilités :

1. Lorsque $\alpha_0 < \alpha_{cr}$, il n'y a pas de point stationnaire.
2. Lorsque $\alpha_0 = \alpha_{cr}$, il n'y a un point stationnaire qui est instable.
3. Lorsque $\alpha_0 > \alpha_{cr}$, il y a pas deux points stationnaires $\tilde{\theta}_l$ et $\tilde{\theta}_r$ avec $\tilde{\theta}_l < \tilde{\theta}_r$. Dans ce cas, le premier est stable et le second instable.

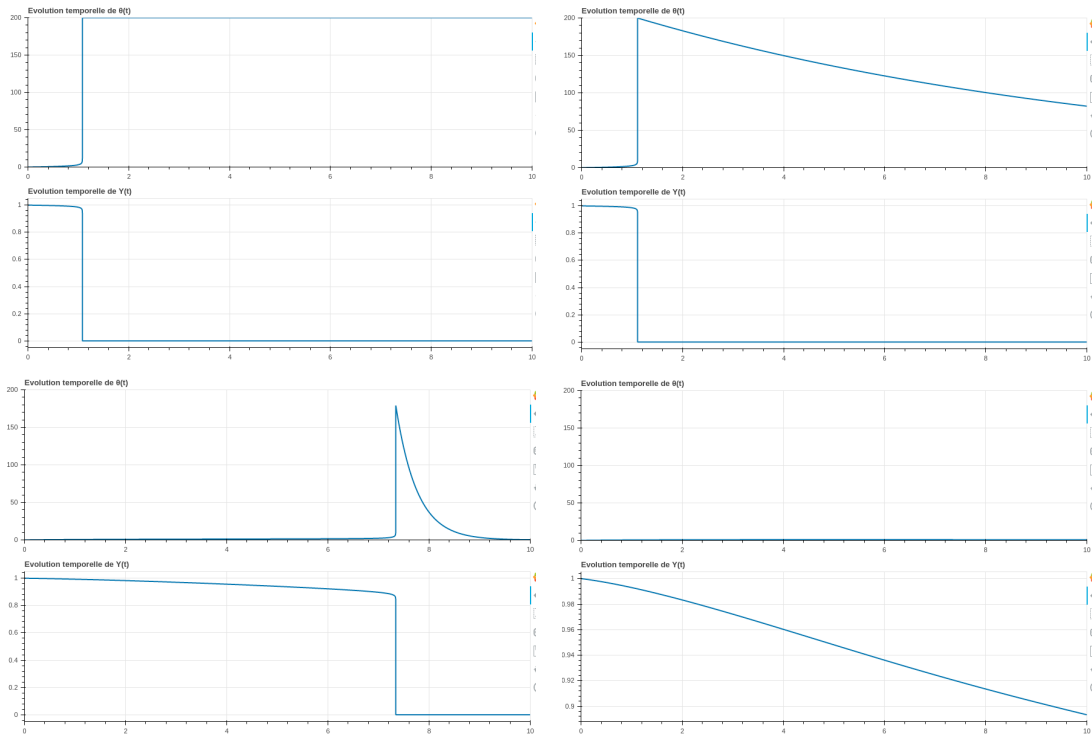


FIGURE 1.2 – Comportement du modèle (7)-(8) pour différentes valeurs de α_0 , respectivement : 0, 0.1, 2.4 et 2.5. Ces valeurs ont été choisies car une modification de comportement se faisait voir.

$\tilde{\theta}_0$	0	$\tilde{\theta}_l$	$\tilde{\theta}_r$	$+\infty$
$\alpha_0 < \alpha_{cr}$				
$\alpha_0 = \alpha_{cr}$	CV vers $\tilde{\theta}_l = \tilde{\theta}_r$ (instable)			
$\alpha_0 > \alpha_{cr}$	CV vers $\tilde{\theta}_l = \tilde{\theta}_r$ (stable)			

FIGURE 1.3 – Comportement

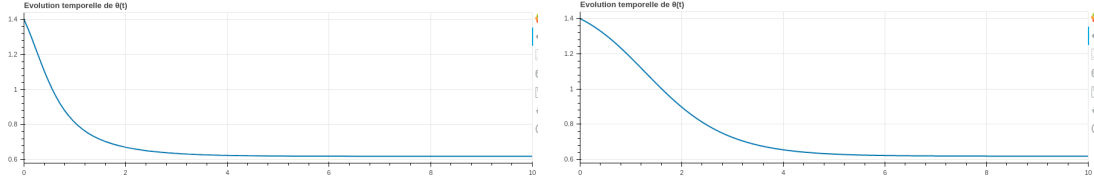


FIGURE 1.4 – Comportement des modèles (9) (à gauche) et (11) (à droite) pour $\alpha_0 = 3.0$ et $1.4 = \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_{cr}$

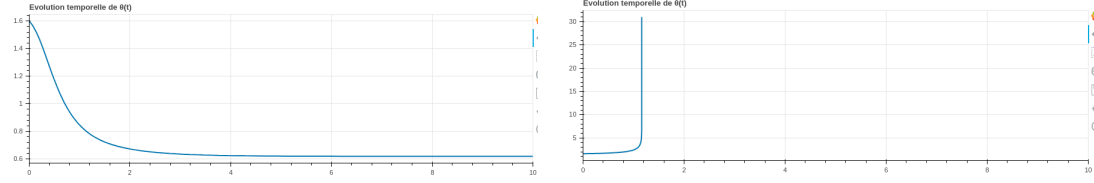


FIGURE 1.5 – Comportement des modèles (9) (à gauche) et (11) (à droite) pour $\alpha_0 = 3.0$ et $1.6 = \tilde{\theta}_0 \geq \tilde{\theta}_{cr}$

1.2.3 Modèle simplifié 3 - explosion avec prise en compte de la convection

1.2.3.1

Quand $\Psi = 0$, on retrouve :

$$d_\tau \tilde{\theta} = e^{\tilde{\theta}} - \alpha_0 \tilde{\theta}$$

soit (9), soit le modèle où l'on a $Y \approx Y(0)$ et une température homogène dans le réacteur et donc aucun phénomène convectif.

1.2.3.2

On avait déterminé un $\alpha_{cr} \approx 2.72$ dans la partie précédente. On prend donc ici : $\alpha_0 = 3.0$ afin de ne prendre aucun risque.

On a également sélectionné différents $\tilde{\theta}_0$ puisqu'on avait vu que la convergence / divergence du système dépendait de cette condition initiale (cf. figure 1.3). On voit sur la comparaison entre e^θ et $q^-(\theta)$ que $\tilde{\theta}_{cr} \approx 1.5$.

Ainsi, la figure 1.4 présente la comparaison des deux modélisation pour $1.4 = \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_{cr} \approx 1.5$. La figure 1.5 présente la comparaison des deux modélisation pour $1.6 = \tilde{\theta}_0 \geq \tilde{\theta}_{cr}$. A gauche sur la figure est la modélisation sans convection et à droite avec convection.

On remarque immédiatement que la présence de la convection n'a aucune incidence lorsque la dissipation thermique au bord est suffisamment importante ($\alpha_0 = 3.0 > \alpha_{cr} \approx 2.72$) et que $\tilde{\theta}_0$ est suffisamment faible.

Cependant, lorsque $\tilde{\theta}_0 \geq \tilde{\theta}_{cr}$, alors on distingue une différence de comportement. En effet, alors que le modèle (9) explose (comme nous l'avons étudié précédemment), on voit que le modèle (11) converge vers la même valeurs que précédemment (environ 0.62 ici) **avec** $\theta_c = 1.030$. En pratique, on doit attendre $\tilde{\theta}_0 \approx 2.2874$ pour avoir une explosion du modèle (11). Avant cela, la température peut augmenter (jusqu'à $\theta_0 \approx 3.2$ mais redescend toujours vers 0.62).

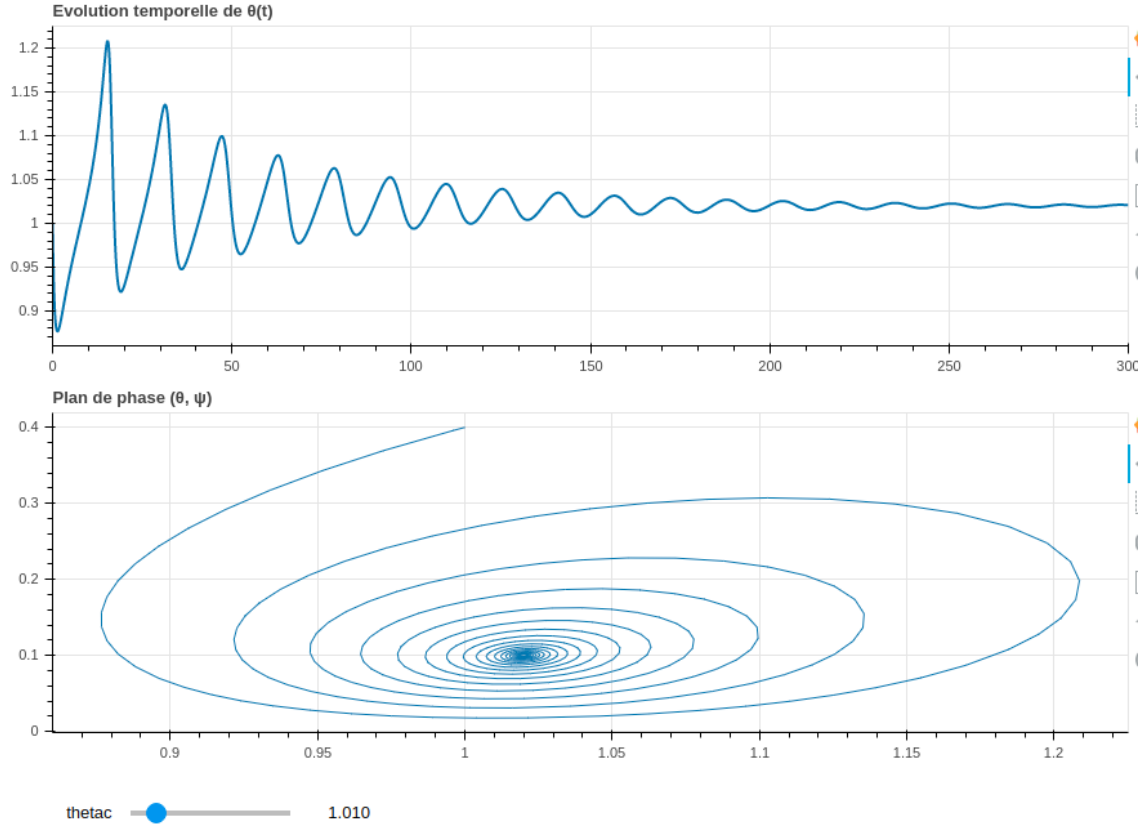


FIGURE 1.6 – Comportement du modèle (11)-(12) pour $\alpha_0 = 2.7$ et $\theta_c = 1.01$.

θ_c permet de jouer sur la divergence du système. En effet, à un α_0 et $\tilde{\theta}_0$ fixés (disons à 3.0 et 2.2874), la diminution de θ_c entraîne la convergence du système. De même, l'augmenter pour $\tilde{\theta}_0 = 2.2873$ entraîne la divergence alors qu'on avait convergence dans le cas $\theta_c = 1.030$.

La prise en compte de l'influence de la convection apporte donc de nouvelles informations puisqu'on peut maintenant se dire que $\tilde{\theta}_{cr}$ est maintenant plus élevé.

1.2.3.3

Dans le cas $\Psi = 0$, on retrouve un contexte divergent du modèle (9) d'après le tableau 1.3 puisque $\alpha_0 < \alpha_{cr}$.

On obtient le comportement suivante pour le modèle (11)-(12) visible en figure 1.6 :

On remarque qu'un comportement périodique amorti se met en place (comportement de θ). Au fur et à mesure que la température diminue, le phénomène de convection thermique se fait moins fort jusqu'au point où la convection est quasiment inexistante et que la diffusion ne suffit pas à évacuer le surplus de chaleur. La réaction se ré-emballe alors et redéclenche de puissants courants convectifs qui suffisent à empêcher l'explosion et font diminuer la température jusqu'à un nouveau minimum local plus élevé que le précédent et pour lequel la convection est également presque nulle. Petit à petit ces phénomènes se font moins forts et s'amortissent. L'amortissement

est dû aux pertes thermiques qui s'effectuent au bord.

Dans le cas sans convection, la diffusion est incapable d'amener le surplus d'énergie thermique présente au coeur du réacteur aux bords suffisamment rapidement pour empêcher l'explosion de la réaction.

1.2.3.4

1.2.3.4.a De façon générale, on remarque qu'augmenter le paramètre de bifurcation diminue l'amortissement jusqu'à provoquer l'explosion. On remarque également que lorsqu'il y a une oscillation qui se met en place, une période dure environ 30 secondes.

1. Cas (1.0, 0.01) : dans ce cas la convection est faible. On a un comportement presque parfaitement oscillant pour $\theta_c = 1.045$. Au-delà on diverge (en temps très long), en deça, il semble qu'on arrive à converger également pour des temps très longs (sauf si on diminue franchement θ_c où là la convergence est plus rapide). Je ne suis pas monter au-delà de $t_{end} = 10000$ secondes cependant.
2. Cas (1.0, 1.1) : dans ce cas la convection initiale est forte. On a un comportement qui a cependant tendance à faire exploser la température pour $\theta_c > 1.025$ environ.
3. Cas (1.0, 0.5) : c'est le cas intermédiaire au deux précédents. La convergence de la température semble se faire pour $\theta_c > 1.050$.

Dans tous les cas, on observe pour θ_c "petit", une convergence, puis lorsqu'on augmente θ_c , on commence à avoir des oscillations avant de diverger pour θ_c plus grand encore.

On remarque donc qu'un phénomène de convection initial trop faible peut être insuffisant pour empêcher l'explosion si θ_c est trop important, mais qu'un phénomène de convection trop important initialement peut également provoquer l'emballement de la réaction. Ainsi, si on traçait la courbe des valeurs de θ_c à partir desquelles il y a explosion en fonction de la convection initiale on aurait une forme de chaînette dont le minimum se situerait autour de 0.5 (ou en tout cas entre 0.01 et 1.1).

On a déjà expliqué physiquement pourquoi une convection insuffisante permet une explosion de la réaction. Essayons de comprendre pourquoi une convection initiale trop importante pourrait aussi causer une explosion. On remarque que pour de telles conditions initiales, la convection diminue rapidement (sous l'effet du rééquilibrage de la température au sein du milieu) jusqu'à être particulièrement très faible (cf. figure 1.7). On se retrouve alors dans un système pour lequel la réaction n'a pas débuté (ou presque pas) et une convection très faible, analogue au cas (1.0, 0.01).

1.2.3.4.b Comme vu précédemment, l'explosion au sein du système peut également être dû à un régime de convection initialement trop important en étant passer (selon les valeurs initiales de la convection) par un passage en régime oscillant. Cela est en accord avec la simulation directe des équation de la dynamique des fluides.

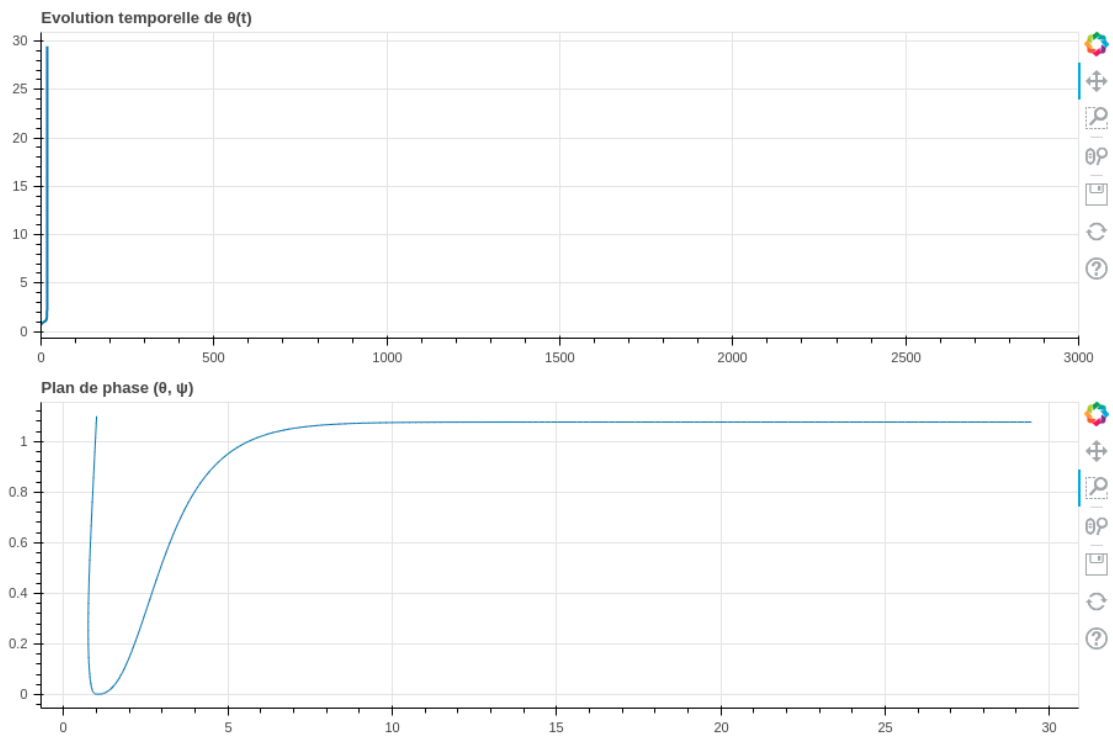


FIGURE 1.7 – Explosion lorsque la convection initiale est trop forte. Au point le plus bas du portrait de phase pour Ψ , on a $\Psi_{min} \approx 0.002$.

Chapitre 2

PC 2 - Notions de base théoriques Systèmes Dissipatifs / Conservatifs

2.1 Introduction

2.2 Fondamentaux

2.2.1 Solution et orbite

2.2.1.1

On pose : $c = u^2 + v^2$.

On a donc : $(u^2 + v^2)' = 2(uu' + vv') = 0$ en notant avec un ' les dérivés.

Donc c est un invariant du système.

2.2.1.2

On voit rapidement que $u(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \sin(t)$ vérifie (1) et est telle que : $(u(0), v(0)) = (1, 0)$.

2.2.1.3

L'orbite associée est un cercle de centre l'origine $(0, 0)$ et de rayon 1.

L'orbite associée à la solution précédente est une courbe dans le plan de phase sans présence de sens (même si on le rajoute parfois) ni de temps, contrairement à la solution qui possède ces informations.

2.2.2 Flot de gradient et solution globale

2.2.2.1

On prend T , un réel strictement positif tel que la fonction

$$f: \mathbb{R}^n \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x) \mapsto -\nabla V(x)$$

est C1 et donc localement lipschitzienne (et pour une condition de Cauchy fixée). Par un théorème du cours, on a l'existence et l'unicité d'une solution locale au problème de Cauchy.

On cherche maintenant à avoir plus d'information sur T .

En dérivant $V(y(t))$ par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial V(y(t))}{\partial t} = -\|\nabla V(y(t))\|^2 < 0 \quad (2.1)$$

Donc :

$$\exists T > 0, \forall t \in [0, T[, V(y(t)) \leq V(y(0)) = V(y_0)$$

Or par hypothèse, $V(x)$ explose quand $\|x\| \rightarrow \infty$. Comme ici, de toute évidence, $V(y(t))$ est bornée sur $[0, T[$, c'est donc que $y(t)$ n'explose pas sur cet intervalle.

Or d'après le cours, si t s'approche de $T = \omega_t$ avec T fini, alors $y(t)$ doit exploser. Ce qui n'est pas le cas ici. Donc T est infini, autrement dit : $T = +\infty$.

D'où, il existe une unique solution maximale définie pour tout $t > 0$ au problème de Cauchy donné.

2.2.2.2 Cas $n = 1$

Dans ce cas, on a : $\nabla V(x) = x^3$.

Le problème se réécrit alors :

$$\begin{cases} y' = -y^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

On suppose de plus que $y_0 \neq 0$ (utile par la suite).

On reconnaît ici une équation différentielle de Bernoulli (du type : $a(x)y' + b(x)y = c(x)y^\alpha$).

On pose donc pour $y \neq 0$: $z = \frac{1}{y^2}$ d'où $z' = \frac{-2y'}{y^3}$

Et donc notre problème se réécrit :

$$\begin{cases} z' = 2 \\ z(0) = \frac{1}{y_0^2} \end{cases} \quad (2.3)$$

Qui après résolution et retour en $y(t)$ donne pour $z > 0$, soit $t > -\frac{y_0^2}{2}$: $y(t) = \sqrt{\frac{1}{z(t)}} = \sqrt{\frac{1}{2t + y_0^2}}$.

On a donc trouvé une solution maximale non définie pour tout $t < 0$. ✓

2.3 Systèmes mécaniques - pendule sans friction

2.3.1

On a : $x'' + \sin(x) = 0$

D'où : $x''x' + \sin(x)x' = 0$

Soit en intégrant :

E	q_0	p_0	$\omega_{lim} = \alpha_{lim}$	plans de phase associés
0	0 $[2\pi]$	0	$\{0\}$	(4)
$]0, 2[$	$ q_0 < q_{max}(p_0)$	$ p_0 < p_{max}(q_0)$	$[- \arccos(1-E) , \arccos(1-E)]$	(3)
2	$ q_0 = q_{max}(p_0)$	$ p_0 = p_{max}(q_0)$	$\{\pi\}$ ou $\{-\pi\}$	(2), (6)
$E > 2$	$ q_0 > q_{max}(p_0)$	$ p_0 > p_{max}(q_0)$	\emptyset	(1), (7)

TABLE 2.1 – Résumé des différentes partitions possibles

$$\frac{1}{2}x'^2 - \cos(x) = \text{constante}$$

On identifie le premier terme à l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}x'^2$ et le second terme à l'énergie potentielle à une constante prêt que l'on prend égale à 1 pour avoir une énergie potentielle nulle pour $x = 0$: $V = 1 - \cos(x)$

2.3.2

On en déduit l'énergie et le lagrangien :

$$E = T + V \text{ et } L = T - V.$$

On a d'après la question précédente : $\frac{dE}{dt} = 0$.

De plus, en posant : $q = x$ et $p = x'$, on a : $L(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - 1 + \cos(q)$ qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p}) = \frac{d}{dt}(p) = -\sin(q) \text{ par (2)} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = -\sin(q) \end{cases} \quad (2.4)$$

D'où l'égalité sur le Lagrangien.

2.3.3

Comme $\frac{dE}{dt} = 0$ alors $E(q, p) = cte = E(q_0, p_0) = \frac{1}{2}p_0^2 + 1 - \cos(q_0)$.

2.3.4

On pose : $(x', -\sin(x)) = (u, v)$ ce qui donne :

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\sin(u) \\ u' = v \end{cases} \quad (2.5)$$

2.3.5

Rappel : $E = \frac{1}{2}p_0^2 + 1 - \cos(q_0) \geq 0$.

On prendra ici une condition initiale $x \in]-\pi, \pi]$. On remarque que selon les valeurs de E , l'intervalle sur x sera différent. On peut ainsi différencier 4 régimes donnés dans la Table 2.1.

Physiquement :

1. Pour une énergie nulle, on est en position d'équilibre $x = 0$ et on n'en bouge pas.
2. Pour une énergie légèrement plus importante mais inférieure strictement à 2, on voit qu'à aucun moment on ne pourra dépasser π (ou $-\pi$). On aura alors des oscillations entre les deux valeurs extrêmes inférieures strictement à π (en valeur absolue).

donner plus lairent les variables et w limite

3. Pour $E = 2$, on a exactement l'énergie nécessaire pour arriver avec une vitesse nulle en $x = \pm\pi$ pour $t \rightarrow \infty$.
4. Et finalement, pour $E > 2$, on dépasse la valeurs $x = \pm\pi$ et on va maintenant continuer d'évoluer vers $|x| \rightarrow \infty$ en des temps infinis, rendant les ensembles limites vides.

Toutes ces orbites sont observables sauf celles correspondant à une énergie égale exactement à 2 (sans compter sur les erreurs numériques qui nous feront dévier de l'équilibre bien avant d'avoir un t suffisamment grand pour voire quelque chose de la convergence de ce type de solution).

2.3.6

Des exemples pour chaque partition sont donnés sur la figure 2.1.

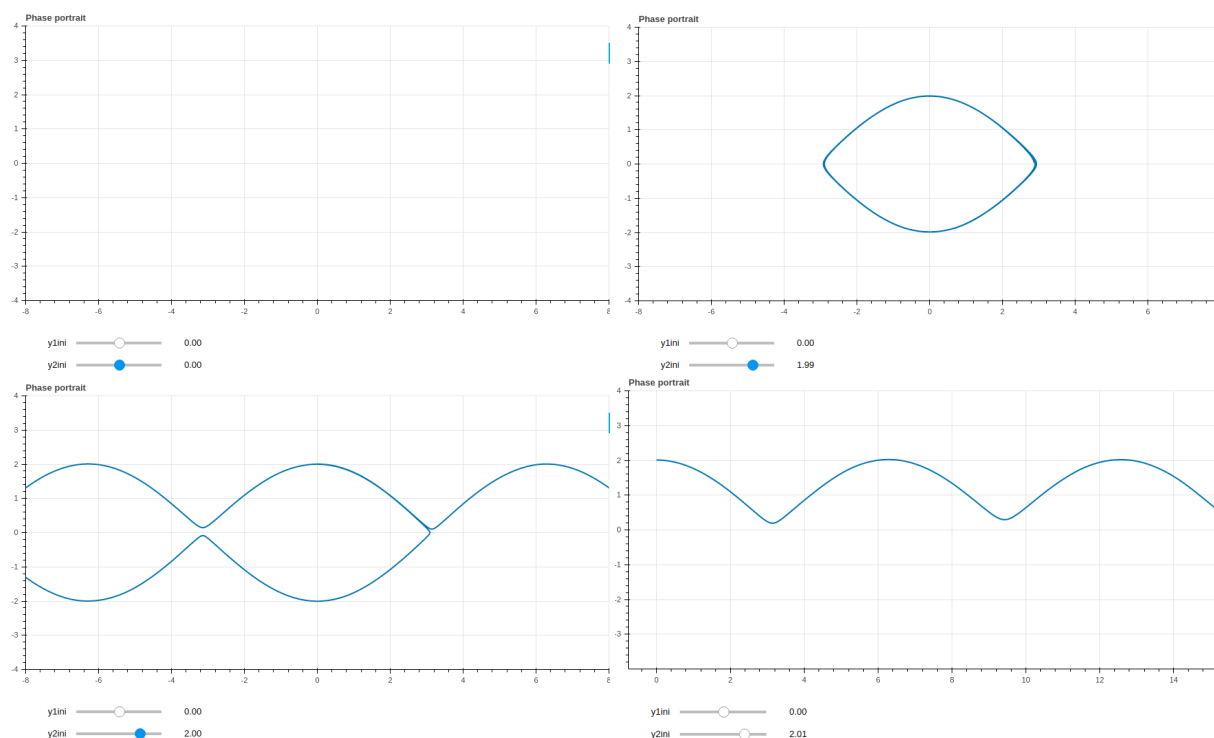


FIGURE 2.1 – Exemple de partitionnement de l'espace en Energie avec de gauche à droite puis de haut en bas : $E = 0, E < 2, E = 2, E > 2$. Noter la divergence observée pour $E = 2$ à cause de la représentation inexacte des nombres en machine.

Les ensembles limites dépendent des conditions initiales comme nous l'avons vu à la question précédente. Un exemple est donné en figure 2.2.

Comme vu sur l'exemple $E = 2$, il n'est pas toujours possible d'obtenir l'ensemble limite car le schéma utilisé ne préserve pas forcément les invariants du système (ici l'énergie). Ainsi, les erreurs machines empêchent en général d'avoir exactement l'orbite recherchée et de façon plus spécifique ici causent un comportement différent de la solution que celui prédit théoriquement. ✓

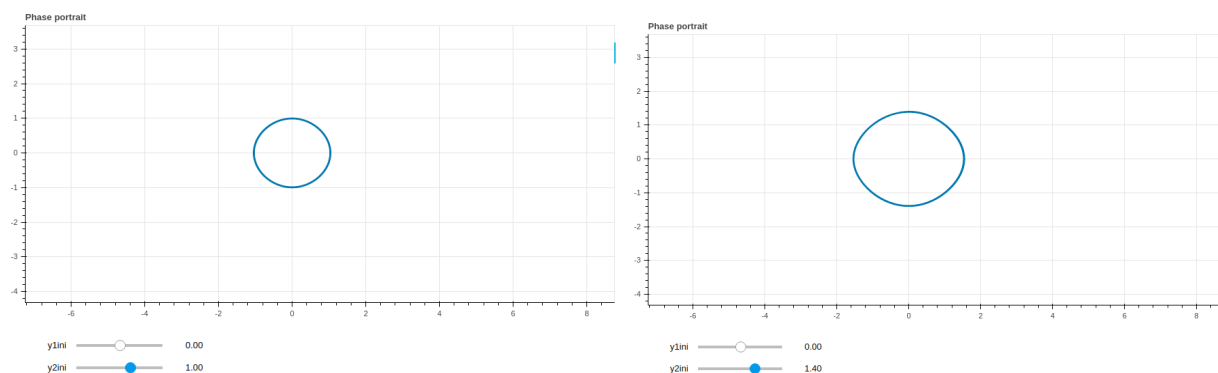


FIGURE 2.2 – Exemples d'ensembles limites différents pour deux conditions initiales différentes.

2.3.7

Cette fois, E n'est plus conservée, le système est dissipatif. Toute solution périodique n'est dès lors plus possible. Toute solution convergera vers une solution d'équilibre précédemment étudiée, c'est-à-dire $x = 0[2\pi]$ avec vitesse nulle ($E_\infty = 0$).

Cela donne :

1. Pour une énergie nulle, on est en position d'équilibre $x = 0$ et on n'en bouge pas (aucun changement).
2. Pour une énergie légèrement plus importante mais inférieure strictement à 2, on voit qu'à aucun moment on ne pourra dépasser π (ou $-\pi$). On aura alors des oscillations amorties entre les deux valeurs extrêmes inférieures strictement à π avec convergence vers $x = 0$ en temps infini.
3. Pour $E = 2$, on a exactement l'énergie nécessaire pour arriver avec une vitesse nulle en $x = \pm\pi$ pour $t \rightarrow \infty$, cependant les frottements empêcheront cette convergence et on se retrouve dans le cas précédent.
4. Et finalement, pour $E > 2$, on peut dans le cas général dépasser la valeur $x = \pm\pi$ et on évolue donc sur $x \in \mathbb{R}$. Cependant, les frottements finiront par dissiper suffisamment d'énergie de façon à avoir $E < 2$ à un moment donné et on se retrouve alors dans le cas $E_0 < 2$ mais cette fois avec convergence possible vers $0[2\pi]$ donc.

Ce ce que l'on constate expérimentalement (cf. figure 2.3).



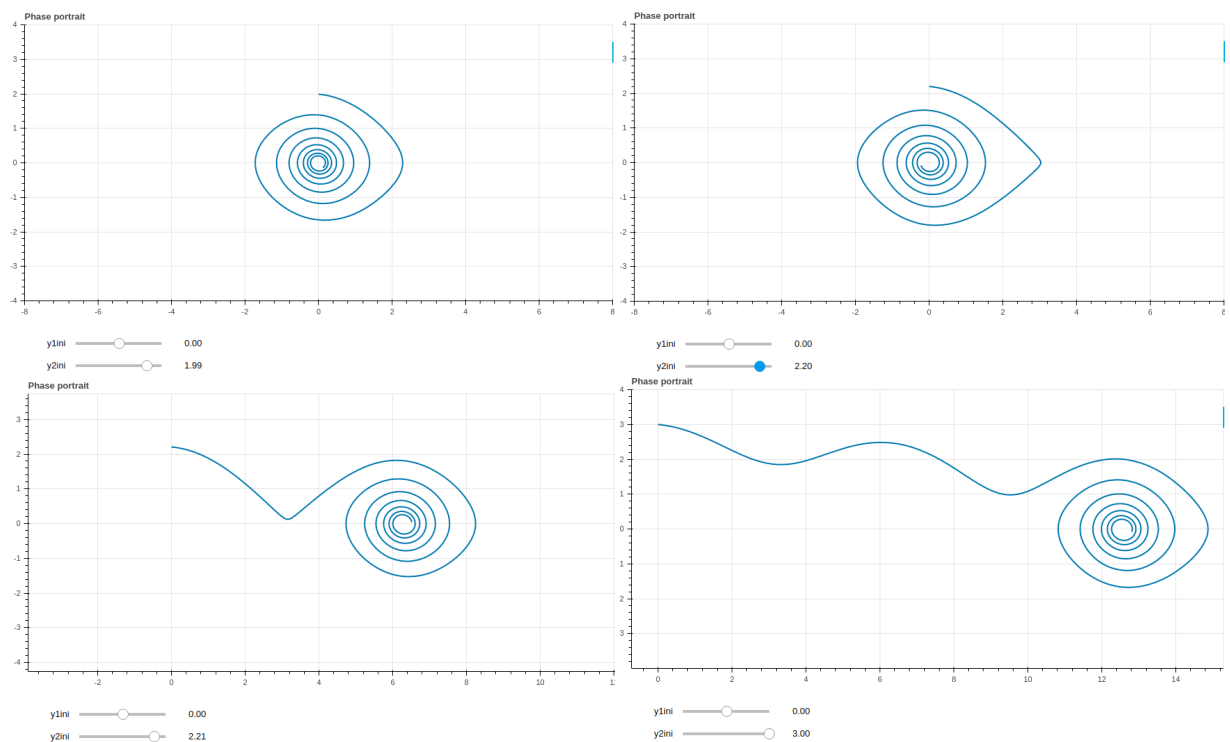


FIGURE 2.3 – Exemple de partitionnement de l'espace en Energie pour un pendule avec frottement de coefficient 0.1.

2.4 Dynamique des populations

2.4.1 Un modèle élémentaire

2.4.1.1

On cherche un invariant $L(u_1, u_2)$ de (3), i.e. tel que : $\frac{dL}{dt} = 0$. Or $L = \frac{\partial L}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial L}{\partial u_2} du_2$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}(u_1, u_2) &= \frac{\partial L}{\partial u_1} u_1' + \frac{\partial L}{\partial u_2} u_2' \\ &= \frac{\partial L}{\partial u_1} u_1(1 - u_2) + \frac{\partial L}{\partial u_2} u_2(u_1 - k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Puis en prenant, $u_1(0) > 0$ et $u_2(0) > 0$ (sinon l'étude actuelle n'a aucun intérêt), on a :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, u_1(t) &> 0 \\ u_2(t) &> 0 \end{aligned}$$

On peut donc diviser (2.6) par $u_1 u_2 \neq 0$ pour obtenir :

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} \frac{1 - u_2}{u_2} + \frac{\partial L}{\partial u_2} \frac{u_1 - k}{u_1} = 0$$

Et en prenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial u_1} = \frac{u_1 - k}{u_1} \\ \frac{\partial L}{\partial u_2} = \frac{u_2 - 1}{u_2} \end{array} \right. \text{ à intégrer} \quad (2.7)$$

On a l'équation 2.6 qui est vérifiée.

2.4.1.2

Cet invariant permet de relier la quantité u_2 à celle de u_1 à tout instant puisque

$$L = \frac{u_1 - k}{u_1} du_1 + \frac{u_2 - 1}{u_2} du_2 = \text{constante}$$

On perd ainsi un degré de liberté.

Concernant les ensembles ω et α limites, on remarque que tant que $u_0(0)$ et $u_1(0)$ sont supérieurs à 0, on va osciller entre deux valeurs. Physiquement, l'espèce prédatrice (u_2) va voir son nombre s'accroître et consommer de plus en plus de l'espèce proie, diminuant ainsi le nombre d'individus de cette dernière, jusqu'à une valeur critique au-delà de laquelle il n'y a plus assez de proies pour nourrir la population prédatrice.

2.4.1.3

On retrouve un comportement en temps **courts** compatibles avec les résultats théoriques précédents (cf. figure 2.4.1.3) mais on voit que l'invariant n'est pas exactement conservé.

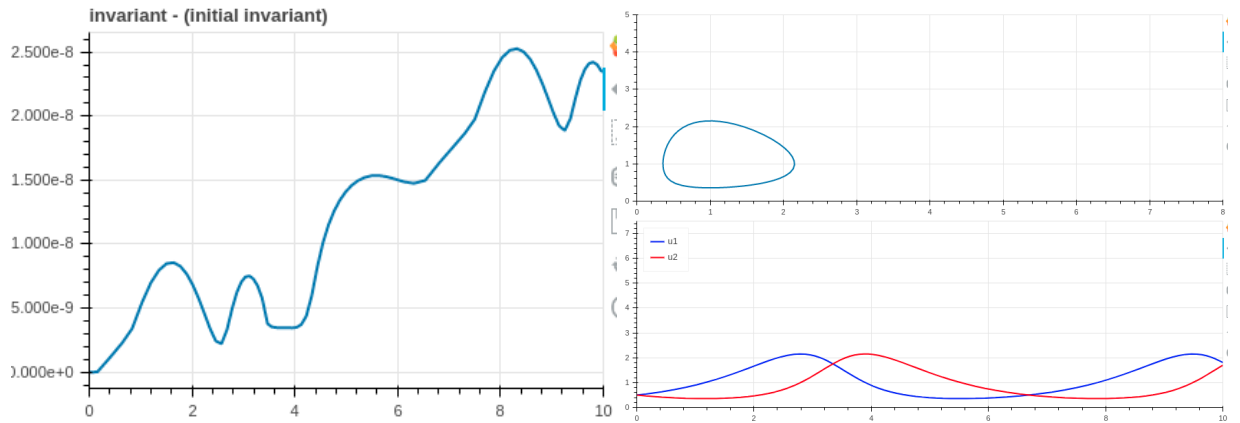


FIGURE 2.4 – Comportement en temps court (10 secondes) du modèle élémentaire conforme à la théorie sur l'image de gauche. A droite, l'évolution de l'invariant trouvé au cours du temps.

La conséquence de la non conservation de l'invariant est une divergence de l'orbite théorique d'un point de vue numérique. La figure 2.4.1.3 illustre cela.

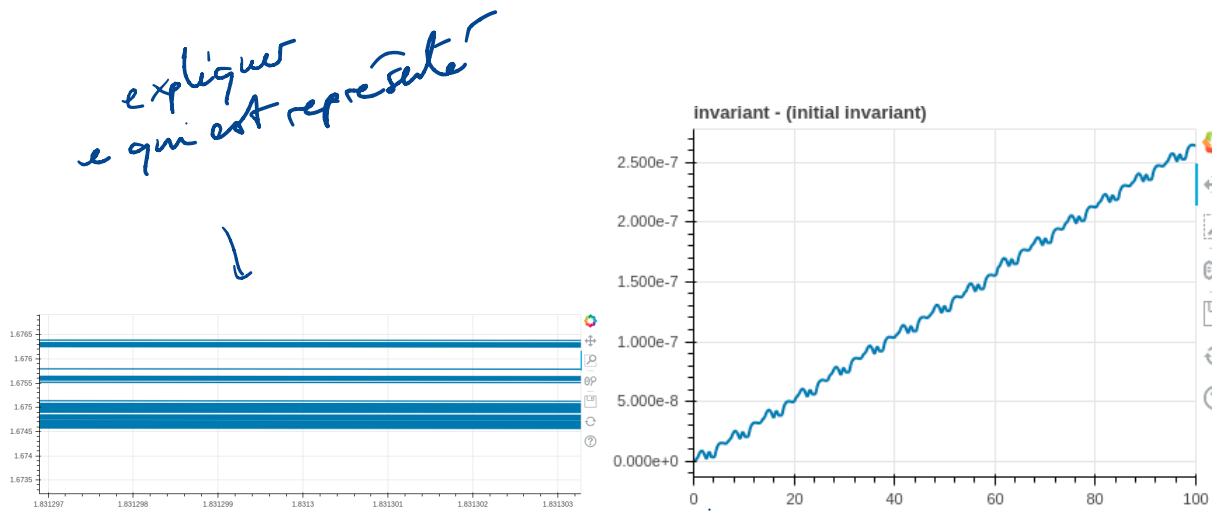


FIGURE 2.5 – Pour le même modèle avec les mêmes conditions initiales que celui de la figure 2.4.1.3, une partie du plan de phase a été sélectionné et l’on voit de façon plus précise les conséquences de la non conservation de l’invariant, dû au schéma numérique utilisé, sur le comportement du système. Pour des raisons de temps de calcul, seulement les 10000 premières secondes ont été plot.

La raison pour laquelle on ne peut pas utiliser n’importe quel type de solveur provient du fait que si le solveur ne conserve pas explicitement les invariants du système d’un temps à un autre, alors la représentation inexacte des nombres en machine empêchera le maintien de l’invariant au cours du temps.

2.4.2 Prise en compte de la compétition intra-espèce, changement de dynamique

2.4.2.1

On remarque que le paramètre α joue sur le caractère décroissant ou non de la population prédatrice. Plus il est élevé, plus il faut d’individus de l’espèce proie pour empêcher la décroissance de la population de prédateurs. On peut comprendre cela comme le nombre de proies moyen qu’un prédateur doit manger afin de ne pas mourir. On s’attend à ce que ce paramètre joue sur les ensembles limites du système. En effet, on peut penser que u_1 (la population de proies) converge vers la valeur α .

Le paramètre β joue quant à lui sur la rapidité de la croissance / décroissance de la population de prédateurs. Plus β est grand, plus vite la population augmentera dans le cas où il y a suffisamment de proies. On peut comprendre cela comme un facteur englobant la vitesse de reproduction de la population des prédateurs, ou autrement, la rapidité avec laquelle l’espèce s’adaptera à son nouvel environnement dans lequel le nombre de proies a changé. Ainsi, on se doute que plus β est élevé, plus on aura plus de chance de créer des comportements oscillants voire explosifs.

Un premier exemple est donné en figure 2.6. On remarque des comportements différents selon les couples (α, β) . Un coefficient α rend bien la tâche difficile pour l’espèce prédatrice jusqu’à provoquer sa disparition lorsqu’il n’y a pas assez de proies. Le coefficient β a surtout un intérêt sur le régime transitoire du système en le rendant plus sujet à oscillation, ce qui est mieux sur le cas $(1, 1)$ pour l’espèce prédatrice. On voit donc qu’ici, on a tout le temps convergence vers des états dépendants des paramètres α et β choisis.

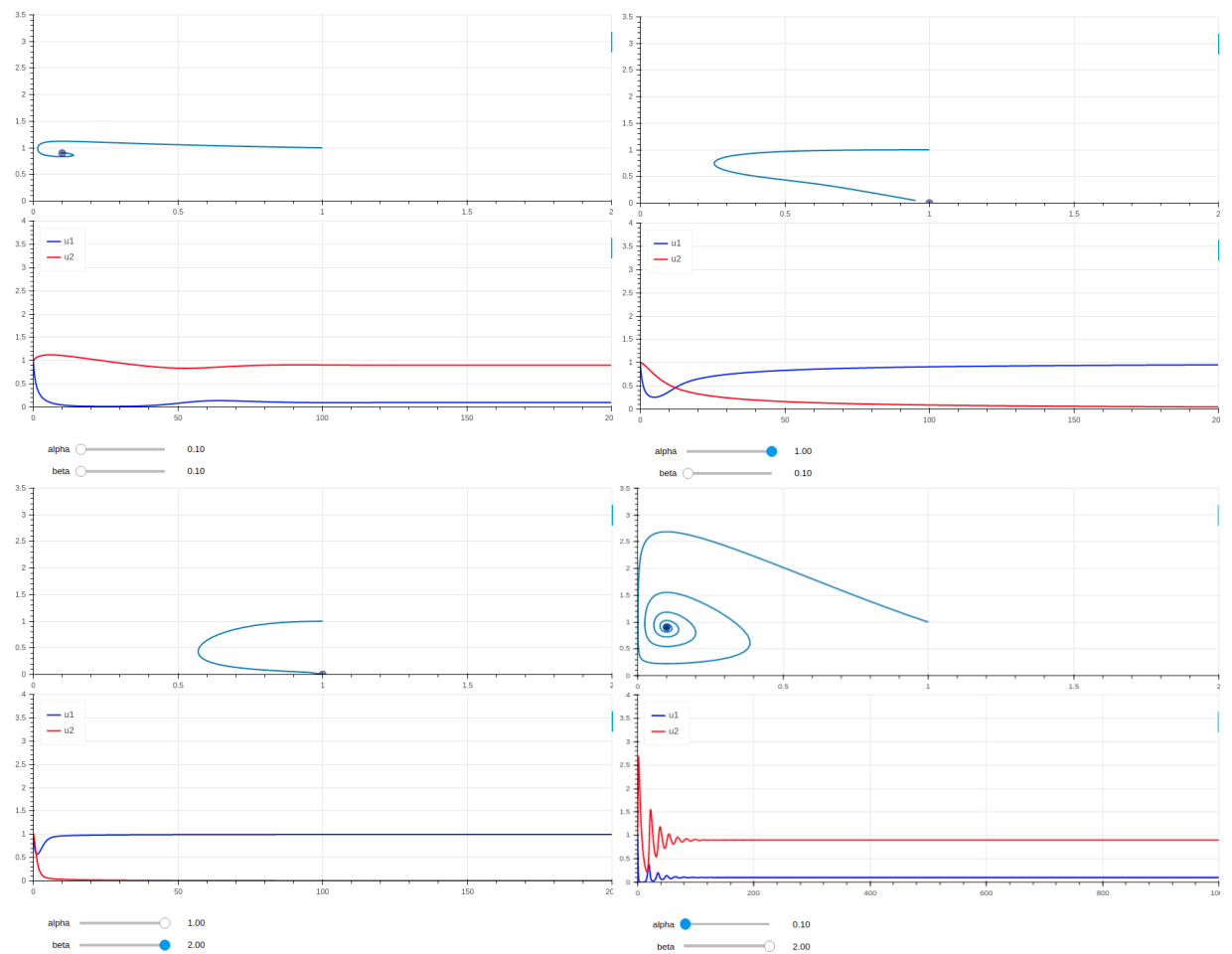


FIGURE 2.6 – Comportement du système pour une condition initiale $(u_0(0), u_1(0)) = (1, 1)$ et pour différentes valeurs de α et β .

2.4.2.2

On peut maintenant chercher à comparer pour des conditions initiales différentes (cf. figure 2.7 et 2.8). On remarque alors qu'elles ne semblent pas influencer sur les comportements longs termes des solutions et donc sur les ensembles limites. Seuls les régimes transitoires sont affectés.

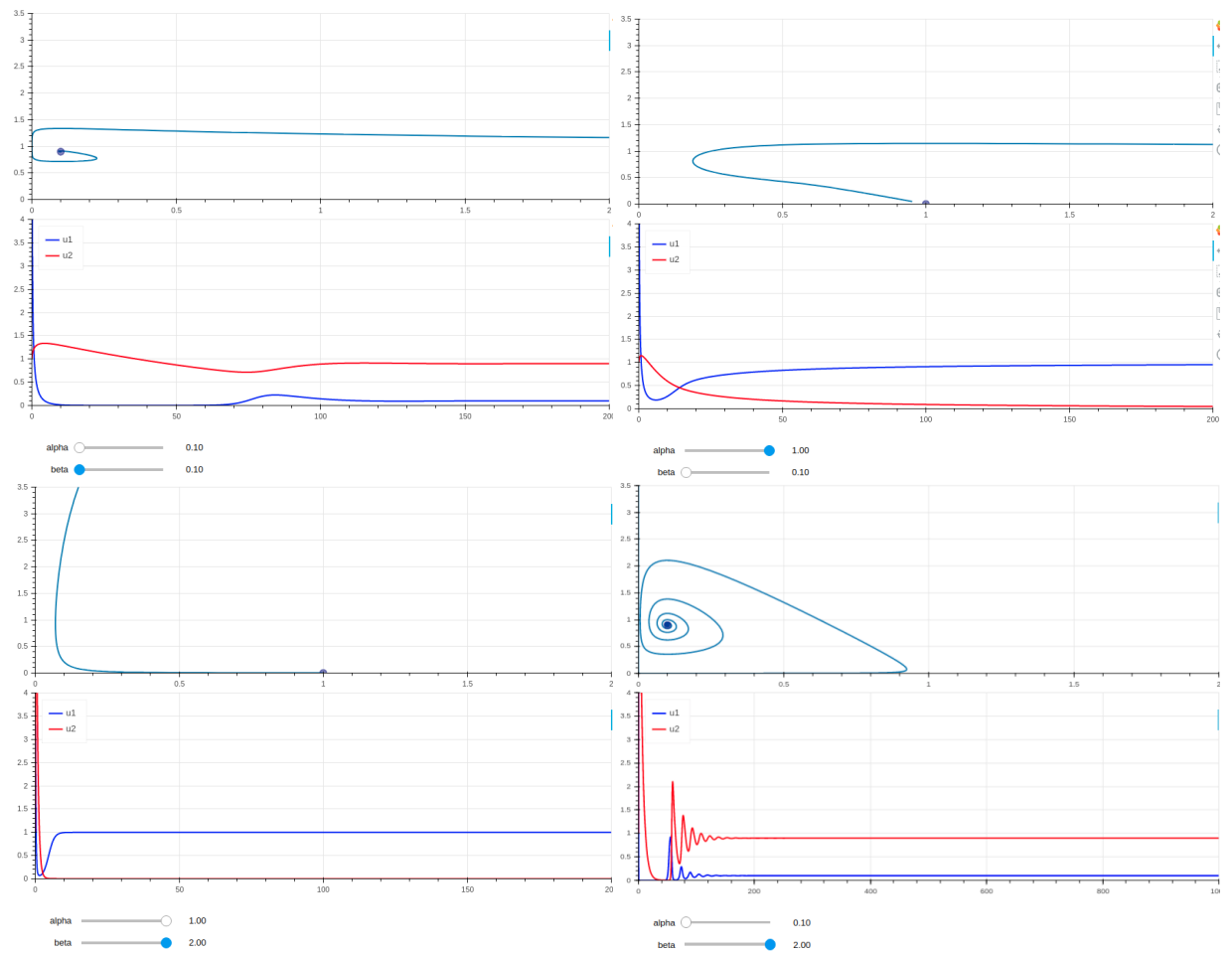


FIGURE 2.7 – Comportement du système pour une condition initiale $(u_0(0), u_1(0)) = (10, 1)$ et pour différentes valeurs de α et β .

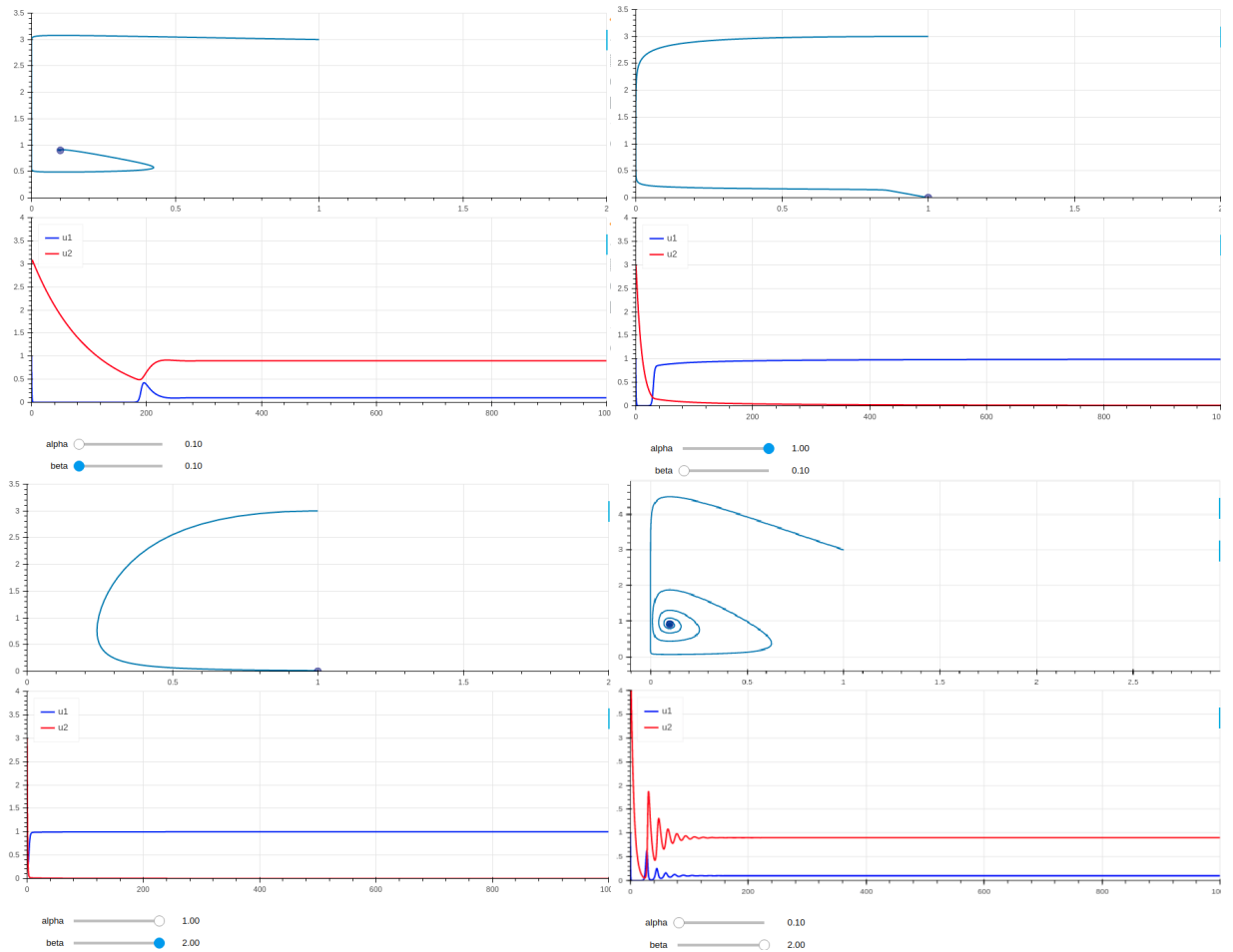


FIGURE 2.8 – Comportement du système pour une condition initiale $(u_0(0), u_1(0)) = (1, 3)$ et pour différentes valeurs de α et β .

2.4.2.3

Le comportement théorique des solutions est ici cohérent avec les considérations théoriques lorsque $u_2 = 0$, l'espèce proie a bien sa population croissant vers 1.

Concernant la comparaison des modèles (3) et (4), on remarque que le modèle (3) permettait des oscillations de population à long terme. Ce n'est plus le cas avec le système (4) qui atténue ces oscillations, s'il y en a, rapidement (ainsi les ensembles limites sont réduits à des points pour le système (4)). ✓

2.4.3 Solutions périodiques de modèle Rosenzweig-MacArthur, cycles limites

2.4.3.1

Dans ce modèle, α joue un rôle qu'on peut assimiler à la "quantité de proies nécessaire à la survie d'un prédateur en moyenne".

Un premier exemple est donné en figure 2.9.

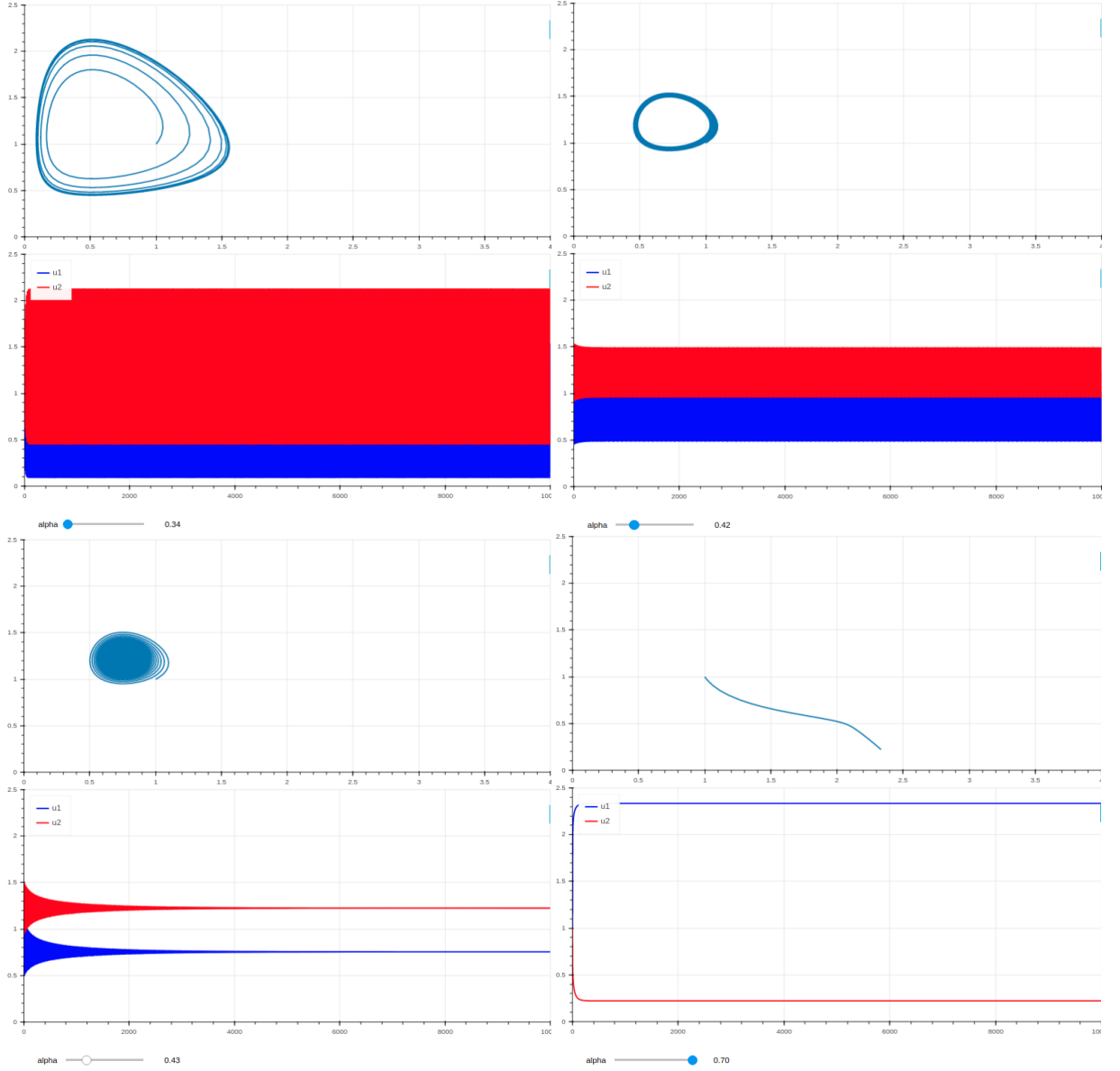


FIGURE 2.9 – Comportement du système pour une condition initiale $(u_0(0), u_1(0)) = (1, 1)$ et pour différentes valeurs de α . Une bifurcation apparaît autour de $\alpha_c \in]0.42, 0.43[$.

On remarque donc une valeur critique $\alpha_c \in]0.42, 0.43[$. En dessous de cette valeur, le système oscille entre des valeurs qui dépendent de α (comparaison $\alpha = 0.34$ et $\alpha = 0.42$).

Remarque : Un temps long a été choisi afin d'identifier plus facilement la bifurcation. Malheureusement cela cache le caractère oscillant des solutions sur les courbes d'évolution des grandeurs u_1 et u_2 solutions du système. Le portrait de phase aide cependant à identifier ce qui se passe.

Au-delà de cette valeur critique, le système converge vers un unique couple qui augmente

avec α (comparaison $\alpha = 0.43$ et $\alpha = 0.70$).

On peut maintenant essayer de modifier β puis γ . On remarque, que la diminution de γ à faire converger plus rapidement le système et à empêcher tout comportement oscillatoire. Le paramètre β joue quand à lui sur la période d'oscillation des solutions oscillantes : plus il est grand, plus le système sera oscillant.

2.4.3.2

On peut maintenant chercher à comparer pour des conditions initiales différentes (cf. figure 2.10).

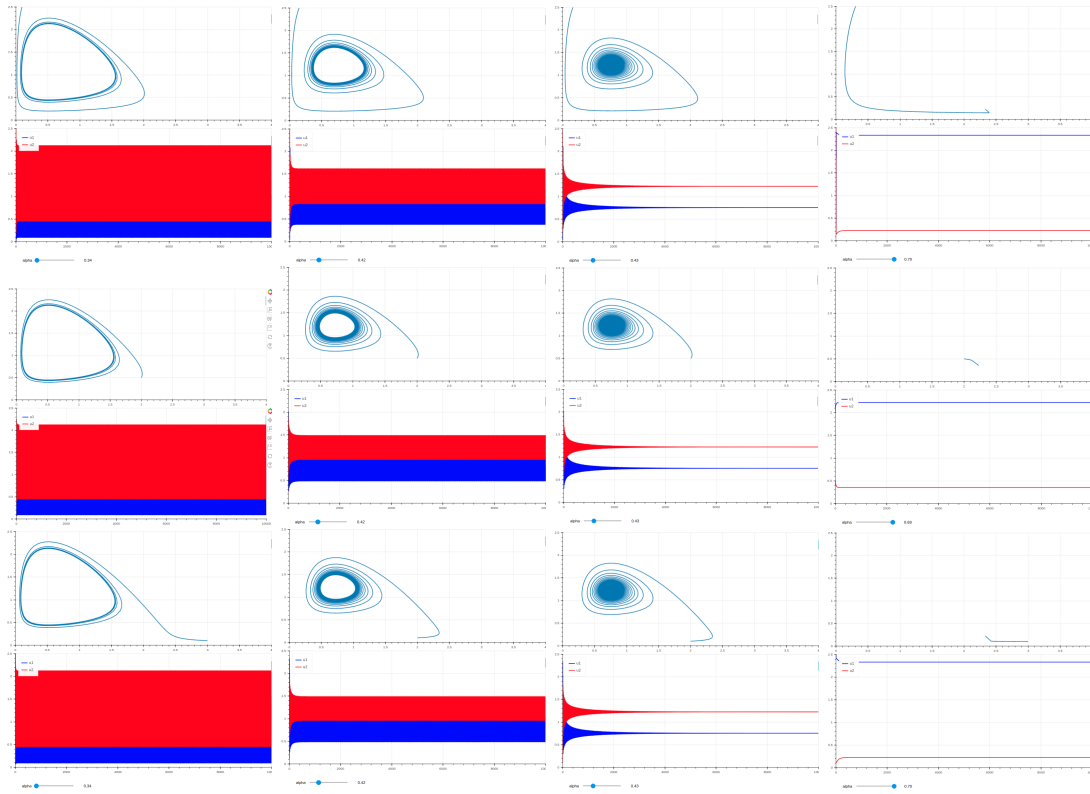


FIGURE 2.10 – Comportement du système pour trois conditions initiales différentes (de haut en bas) : $(0.5, 3)$, $(2, 0.5)$ et $(3, 0.1)$.

Il apparaît sur la figure 2.10 que le comportement limite (en temps longs) est toujours le même à α fixé (et bien sûr β et γ fixés également), peu importe les conditions initiales.

2.4.3.3

De même que pour le modèle (3), le modèle (5) permet des oscillations. Cependant, la période de ces oscillations ne dépend pas des conditions initiales contrairement à ce que Volterra a observé (cf. figure 2.11). Les oscillations du système (5) dépendent des différents paramètres, en particulier du paramètre α . On peut cependant associer la pêche à une augmentation de α rendant le travail plus difficile pour les espèces prédatrices, cela reviendrait à considérer qu'il



faut davantage de proies pour nourrir les espèces prédatrices comme les huamins en capturent une partie. De manière générale, α , β et γ permettent de gérer le comportement du système (oscillation et période d'oscillations, convergence, ensemble limite, valeurs finales etc.) qui ne dépend pas (dans les cas non pathologiques) des conditions initiales des populations u_1 et u_2 .

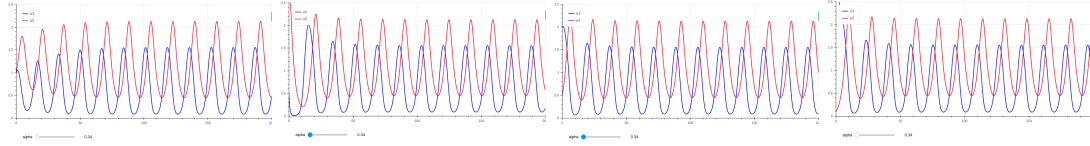


FIGURE 2.11 – Observation de la période du système pour différentes conditions initiales pour les mêmes paramètres α , β et γ .