

PC2 : Notions de base théoriques

Systèmes Dissipatifs / Conservatifs

1 Introduction

Cette PC est divisée en trois parties. Premièrement, on revient sur certaines notions fondamentales de la théorie des équations différentielles, qui ont été vues en cours. Dans une deuxième partie, on étudie un système de mécanique classique simple : le pendule sans frottement. La dernière partie est consacrée à l'étude de quelques modèles de dynamiques de population, qui permettent d'illustrer les différences majeures entre systèmes conservatifs et dissipatifs. Pour les étudiants intéressés par le domaine de la dynamique des populations, on renvoie aux livres de Mark Kot et James Dickson Murray [1, 3] qui offrent une plus large perspective sur ces questions, et développent d'autres points qu'on abordera dans le reste du cours.

2 Fondamentaux

2.1 Solution et orbite

On considère un point $(u(t), v(t))$ dans \mathbb{R}^2 , dont la dynamique est décrite par le système suivant :

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u. \end{cases} \quad (1)$$

2.1.1 Trouver un invariant du système (1), également appelé intégrale première.

2.1.2 Trouver la solution passant par le point $(u_0, v_0) = (1, 0)$ au temps $t = 0$.

2.1.3 Quelle est l'orbite associée à la solution précédente ? Faire la distinction entre les ces deux notions.

2.2 Flot de gradient et solution globale

Soient $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = -\nabla V(y) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

2.2.1 Démontrer l'existence d'une unique solution maximale, définie pour tout $t > 0$. *On pourra étudier la quantité $V(y(t))$.*

2.2.2 En considérant le cas $n = 1$ et $V : x \mapsto \frac{x^4}{4}$, montrer que la solution maximale n'est pas forcément définie pour tout $t < 0$.

3 Systèmes mécaniques - pendule sans friction

Dans cette partie, on considère un système mécanique simple : le pendule sans frottements. Le système est représenté par une variable scalaire : $x \in \mathbb{R}$, qui représente l'angle du pendule par rapport à la verticale descendante. Après adimensionnement, l'équation qui régit le mouvement du pendule est donnée par :

$$x'' = -\sin(x). \quad (2)$$

3.1 Donner l'énergie cinétique et l'énergie potentielle associée à ce système.

3.2 En déduire l'énergie E et le Lagrangien L du système. Vérifier qu'on a bien

$$\frac{d}{dt}E = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

avec $q = x$ et $p = x'$.

3.3 Donner explicitement l'énergie en fonction des données initiales.

3.4 Reformuler l'équation (2) en un système de deux équations d'ordre un.

3.5 En utilisant l'invariance de l'énergie, expliquer comment on peut partitionner le plan de phase (x, x') en différents types d'orbites, comme sur la Figure 1. Quelles sont les orbites "observables" en pratique, et celles qui sont des cas limites. Identifier les ensembles α -limites et ω -limites associés aux différents types d'orbites.

3.6 En utilisant le notebook, étudier et décrire la dynamique du pendule sans frottement pour différentes données initiales (choisies de manière à obtenir les différents types d'orbites mises en évidence sur la Figure 1). Les ensembles α -limites et ω -limites dépendent-ils des données initiales ? Expliquer. Y a-t-il des ensembles α -limites où ω -limites qui sont difficiles/impossibles à obtenir avec ce type de simulation ?

3.7 Répéter cette étude, cette fois en considérant des frottements non nuls. Quelle influence ont les frottements sur le caractère conservatif/dissipatif du système ? Qu'advient-il des ensembles ω -limites et α -limites dans ce cas ?

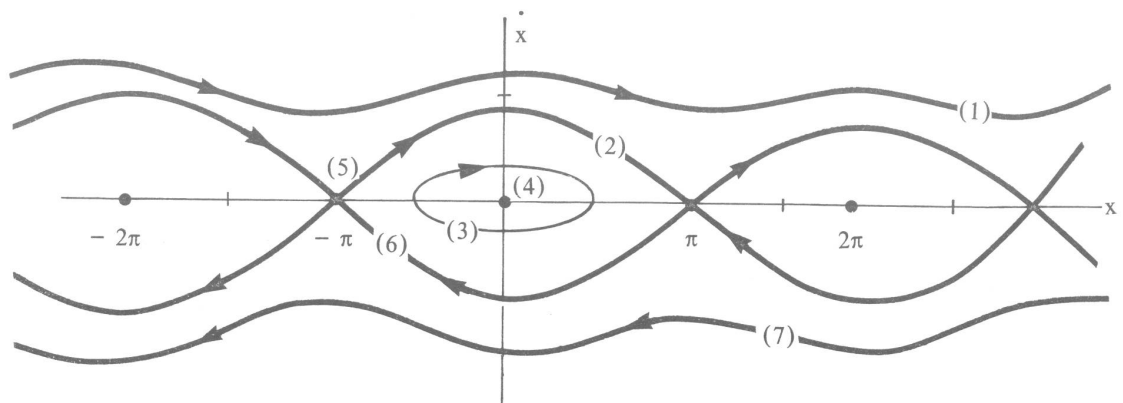


FIGURE 1 – Portrait de phase du pendule sans frottement. Les orbites (1), (3) et (7) correspondent à des situations où le pendule se meut de manière périodique, (4) et (5) à des solutions stationnaires (respectivement stable et instable), et (2) et (6) à des orbites hétéroclines (ou homoclines si on considère que $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

4 Dynamique des populations

Dans la dernière partie de cette PC, on s'intéresse à la dynamique des populations à travers trois modèles, afin notamment mettre en évidence les différences entre les systèmes conservatifs (comme

le pendule sans frottements étudié dans la partie 3, ou le modèle de Lotka-Volterra¹[2, 5]) qui admettent un invariant², et les systèmes dissipatifs comme le pendule avec frottements ou le modèle de Rosenzweig-MacArthur [4]. Si on peut observer des cycles limites à la fois pour des systèmes conservatifs et pour certains systèmes dissipatifs, une étude plus détaillée de la dynamique globale nous permettra de mettre en lumière des différences fondamentales.

4.1 Un modèle élémentaire

A.J. Lotka publie en 1925 un livre intitulé “Elements of Physical Biology” [2], où il se propose de représenter les cinétiques de populations vivant en communauté par des systèmes d’équations différentielles. Dans l’un des chapitres, il considère l’exemple d’une population d’animaux herbivores qui se nourrissent de plantes. Par analogie avec les équations utilisées pour la cinétique chimique, en représentant par $u_1(t)$ la masse totale des plantes et par $u_2(t)$ la masse totale des herbivores à l’instant t , Lotka propose le modèle suivant :

$$\begin{cases} u_1' = u_1(1 - u_2) \\ u_2' = u_2(-k + u_1). \end{cases} \quad (3)$$

L’intérêt de Volterra pour les problèmes d’équilibres entre espèces animales dans les écosystèmes a été initié par le zoologiste Umberto D’Ancona (1896-1964). D’Ancona s’occupait depuis quelques années de statistiques portant sur la pêche dans le nord de la mer Adriatique. Ces données concernaient le pourcentage des poissons prédateurs (sélaciens - tels les raies ou les requins) pêchés dans trois ports italiens. D’Ancona a constaté que la part de ces poissons était plus importante pendant la première guerre mondiale où la pêche est moins intense. Les prédateurs se nourrissant d’autres poissons qui à leur tour se nourrissent de plancton, il semble donc qu’une diminution de l’effort de pêche favorise les espèces prédatrices.

V. Volterra, sans lien ni connaissance du travail mené par Lotka, propose le même modèle pour expliquer cette dynamique. Il remarque, comme Lotka, que ce système oscille de manière périodique, “avec une période qui dépend de la condition initiale”. La démarche de Volterra est fidèle à ses conceptions mécanistes. Il schématise les populations par deux systèmes de particules se déplaçant au hasard dans un récipient fermé qui représente l’écosystème, ici la mer. C’est le modèle physique bien connu du gaz parfait où des particules se déplacent et se heurtent au hasard dans un récipient fermé. Dans le modèle de Volterra, chaque collision correspond à une rencontre une “particule-proie” et une “particule-prédateur”, donnant ainsi au prédateur l’occasion de dévorer une proie. Volterra publie ses travaux dans un article en italien en 1926, puis il publie en 1931 un livre intitulé “Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie”, dans lequel il étudie d’autres modèles.

4.1.1 Le but de cette question est d’obtenir des renseignements sur la structure qualitative des solutions du système (3).

4.1.1.a Montrer que le système (3) admet un invariant. L’exprimer en fonction des variables u_1 et u_2 ainsi que du paramètre k .

4.1.1.b Expliquer en quoi cet invariant contraint la dynamique du système. Quels sont les ensembles ω -limite et α -limite d’une solution ? Dépendent-ils des données initiales ?

4.1.1.c En utilisant le notebook, observer différentes solutions approchées du système (3). Le comportement en temps long de ces solutions numériques est-il conforme aux résultats théoriques obtenus ci-dessus ? Conjecturer pourquoi on ne peut pas utiliser n’importe quel type de solveur pour des systèmes conservatifs³.

1. Alfred James Lotka (1880 - 1949) et Vito Volterra (1860 - 1940).

2. L’ouvrage de Alfred J. Lotka et l’article original de Vito Volterra peuvent être consultés sur demande, tout comme les livres de Murray et Kot.

3. Le dernier cours de MAP551 sera dédié aux intégrateurs dits *symplectiques*, qui sont spécialement conçus pour préserver des invariants.

4.2 Prise en compte de la compétition intra-espèce, changement de dynamique

Le modèle de Lotka-Volterra est le plus simple que l'on puisse imaginer. Il présente forcément un certain nombre de défauts. Un des défauts majeurs est lié au fait qu'en l'absence de prédateurs, ($u_2 = 0$), les équations se réduisent à une seule équation : $u_1' = u_1$ (qui se résout facilement, $u_1(t) = u_1(0) \exp(t)$) qui entraîne une augmentation exponentielle de la population des proies avec le temps.

Un tel comportement est sans doute correct durant un court laps de temps. Mais la limitation des ressources fait que la population ne peut pas dépasser un certain seuil, appelé *capacité de charge* par les écologues. La façon la plus simple de modéliser cet effet est de poser $u_1' = u_1(1 - u_1)$ dans ce cas.

Il n'est pas difficile de se convaincre que les solutions de cette équations sont bornées. Si la population initiale est plus petite que la capacité de charge (qui vaut ici 1), elle commence par croître exponentiellement avant de subir un infléchissement et de tendre vers 1. Si la population initiale est au dessus de la capacité de charge, elle décroît exponentiellement vite vers 1.

Si nous revenons au modèle de Lotka-Volterra et si nous le modifions pour tenir compte de cette compétition entre proies, on obtient, après un changement d'unités approprié, le modèle suivant :

$$\begin{cases} u_1' = u_1(1 - u_1 - u_2) \\ u_2' = \beta(u_1 - \alpha)u_2. \end{cases} \quad (4)$$

4.2.1 Le but de cette question est d'obtenir des renseignements sur la structure qualitative des solutions du système (4).

4.2.1.a En utilisant le notebook, décrire la dynamique du système pour $\alpha \in [0.1, 1]$ et $\beta \in [0.1, 2]$.

Quels sont les points d'équilibre du système ? Comment dépendent-ils des paramètres ?

4.2.1.b Quels sont les ensembles ω -limites ? Dépendent-ils des données initiales ?

4.2.1.c Le comportement des solutions numériques est-il conforme aux résultats théoriques obtenus ci-dessus ? Comparer le comportement en temps long des systèmes (3) et (4). Commenter

La conclusion est qu'en prenant en compte le terme de compétition intra-espèce, qui empêche qu'elles prolifèrent sans borne en l'absence de prédateurs, on a complètement détruit le caractère oscillatoire périodique des solutions du modèle original. Pour retrouver de telles oscillations, il faut en fait modifier le terme d'interaction : c'est l'objet du modèle de Rosenzweig-McArthur.

4.3 Solutions périodiques de modèle Rosenzweig-MacArthur, cycles limites

Rapidement après l'introduction du modèle de Lotka-Volterra, diverses modifications ont été proposées pour le terme de prédation. En effet, le nombre de proies tuées par les prédateurs est dans ce modèle proportionnel au produit du nombre d'individus de chaque population, i.e. proportionnel à $u_1(t)u_2(t)$. Autrement dit, le nombre de proies tuées par prédateur croît proportionnellement au nombre de proies lui-même et il n'y a donc aucun effet de saturation ou de satiété. C'est qualitativement ce qu'on observe pour certaines populations de bactéries. Cependant, pour des organismes vivants plus complexes, comme des animaux, on s'attend à un comportement vraiment différent, où les prédateurs ne peuvent pas consommer plus qu'une quantité maximale de proies par unité de temps.

L'écologue américain Buzz Holling a proposé en 1959 trois grands types de modélisation du nombre de proies tuées par prédateur : la première est celle du modèle de Lotka-Volterra (type I) et les deux autres introduisent un effet de saturation lorsque le nombre de proies dépasse un certain seuil (types II et III). Les types II et III diffèrent quand le nombre de proies est très petit et permettent de distinguer les prédateurs *généralistes* des prédateurs *spécialistes*.

C'est en 1963 que les écologues américains Robert MacArthur et Michael L. Rosenzweig⁴ étudièrent le modèle proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} u_1' = u_1 \left(1 - \frac{u_1}{\gamma} \right) - \frac{u_1 u_2}{1 + u_1} \\ u_2' = \beta u_2 \left(\frac{u_1}{1 + u_1} - \alpha \right). \end{cases} \quad (5)$$

Le terme de prédation est de type II.

4. Robert MacArthur (1930-1972) et Michael L. Rosenzweig (né en 1941).

4.3.1 Le but de cette question est d'obtenir des renseignements sur la structure qualitative des solutions du système (5).

4.3.1.a En utilisant le notebook, décrire la dynamique du système pour $\alpha \in [0.34, 0.7]$, avec $\beta = 1$ et $\gamma = 2.5$. Quels sont les points d'équilibre du système? Comment dépendent-ils des paramètres? Déterminer numériquement α_{cr} , une valeur critique de α pour laquelle le comportement des solutions change de manière drastique (on parle alors de bifurcation).

4.3.1.b Quels sont les ensembles ω -limites pour $\alpha \in [0.34, \alpha_{cr}[$, et pour $\alpha \in]\alpha_{cr}, 0.7]$? Dépendent-ils des données initiales? Comparer le comportement en temps long du modèle de Rosenzweig-MacArthur (5) et celui de Lotka-Volterra (3). Quels sont les différences majeures?

4.3.1.c Comparées aux simulations effectuées dans la partie 4.1.1., les solutions obtenues dans le notebook pour le modèle (5) capturent-elles le bonne dynamique en temps long? Commenter.

Références

- [1] M. Kot. *Elements of mathematical ecology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [2] A.J. Lotka. *Elements of Physical Biology*. Williams & Wilkins Company, 1925.
- [3] J. D. Murray. *Mathematical biology. I*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. An introduction.
- [4] M. L. Rosenzweig and R. H. MacArthur. Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. *The American Naturalist*, 97(895) :209–223, 1963.
- [5] V. Volterra. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, 118 :558–560, 1926.