

BE : Etude d'une méthode de Galerkin discontinue pour résoudre les équations de Maxwell transitoires

L'objectif de ce BE est de résoudre le système des équations de Maxwell en mode transverse électrique dans un domaine bidimensionnel Ω . Plus précisément, nous cherchons à déterminer $\mathbf{E} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $H : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(x, t) - \mathbf{curl} H(x, t) &= \mathbf{J}(x, t) \quad \text{dans } \Omega \\ \mu(x) \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) + \mathbf{curl} \mathbf{E}(x, t) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{E}(x, 0) &= \mathbf{E}_0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ H(x, 0) &= H_0(x) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

où $\mathbf{curl} H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{curl} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$ avec $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$.

1 Partie I : Analyse numérique de la méthode GD pour un problème de cavité

Afin de fermer le problème (1), nous imposons sur la frontière Γ du domaine Ω une condition de type métal parfait c'est-à-dire $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ sur Γ où $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^t$ est la normale unitaire sortante à Ω et $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = n_x E_y - n_y E_x$.

Question 1 :

Q1.1 : En utilisant le formalisme vu en cours, montrer que la formulation de Galerkin discontinue du problème (1) sujette à la condition aux limites $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ s'écrit :

Trouver $(\mathbf{E}_h, H_h) \in \mathbf{V}_{h,k}^2 \times \mathbf{V}_{h,k}^1$ solution de $\forall (\mathbf{v}_h, w_h) \in \mathbf{V}_{h,k}^2 \times \mathbf{V}_{h,k}^1$ et $\forall T \in \mathcal{T}_h$,

$$\frac{d}{dt} \int_T \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_T \mathbf{curl} H_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\partial T \setminus \Gamma} [\![\mathbf{n} \times H_h]\!] \cdot \mathbf{v}_h|_T d\gamma \quad (2a)$$

$$+ \alpha_E \int_{\partial T \setminus \Gamma} [\![\mathbf{n} \times \mathbf{E}_h]\!] (\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h|_T) d\gamma = \int_T \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x}$$

$$\frac{d}{dt} \int_T \mu H_h w_h d\mathbf{x} + \int_T \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{curl} w_h d\mathbf{x} - \int_{\partial T \setminus \Gamma} \{\!\!\{ \mathbf{E}_h \}\!\!\} \cdot (\mathbf{n}_T \times w_h|_T) d\gamma \quad (2b)$$

$$+ \alpha_H \int_{\partial T \setminus \Gamma} [\![\mathbf{n} \times H_h]\!] \cdot (\mathbf{n} \times w_h|_T) d\gamma = 0$$

où $\mathbf{n} \times v := (n_y v, -n_x v)^t$, $\alpha_E, \alpha_H \geq 0$, \mathbf{n}_T est la normale unitaire sortante du triangle T et si $F = \overline{T} \cap \overline{T'}$, le saut et la moyenne sont définis par :

$$[\![\mathbf{n} \times z]\!]_F = \mathbf{n}_T \times z_T + \mathbf{n}_{T'} \times z_{T'} \quad (3a)$$

$$\{\{z\}\}_F = \frac{1}{2} (z_T + z_{T'}) . \quad (3b)$$

et avec

$$\mathbf{V}_{h,k}^d := \left\{ \mathbf{v}_h \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^d : \forall T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in [\mathcal{P}^k(T)]^d \right\} \quad (4)$$

et $\mathcal{P}^k(T)$ est l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égale à $k \in \mathbb{N}$.

Notons $E \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^2)}$ et $H \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{V}_{h,k}^1)}$ les vecteurs contenant respectivement les degrés de liberté de \mathbf{E}_h et H_h . On peut alors réécrire la formulation de Galerkin discontinue sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} M^E \frac{dE}{dt} - R^E H + P^E E = F \\ M^H \frac{dH}{dt} + R^H E + P^H H = 0 \\ E(0) = E_0 \text{ et } H(0) = H_0 \end{cases} \quad (5)$$

où $F_i := \int_T \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_i d\mathbf{x}$ pour $0 \leq i \leq \dim(\mathbf{V}_{h,k}^2)$ et E_0, H_0 sont les vecteurs correspondant à la projection des conditions initiales sur les espaces d'approximation.

Q1.2 : Donner les caractéristiques des matrices présentes dans (5).

Question 2 : Nous allons procéder à la discrétisation temporelle du système (5). Pour cela, nous utiliserons le schéma saut-mouton suivant :

$$\begin{cases} M^E \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} - R^E H^{n+\frac{1}{2}} + P^E E^n = F^{n+\frac{1}{2}} \\ M^H \frac{H^{n+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + R^H E^n + P^H H^{n-\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

où $E^n \approx E(t_n)$ avec $t_n := n \Delta t$ et $H^{n+\frac{1}{2}} \approx H(t_{n+\frac{1}{2}})$ avec $t_{n+\frac{1}{2}} := (n + \frac{1}{2}) \Delta t$.

Q2.1 : Définir l'étape d'initialisation du schéma c'est-à-dire donner E^0 et $H^{\frac{1}{2}}$.

Q2.2 : Supposons que $\alpha_E = \alpha_H = 0$ et $F = 0$. Montrer que

$$\mathcal{E}_h^n := (M^E E^n, E^n) + (M^H H^{n+\frac{1}{2}}, H^{n-\frac{1}{2}}) = \mathcal{E}_h^0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Q2.3 : Montrer que sous les hypothèses de la question Q2.2, le schéma est stable sous la condition CFL :

$$\Delta t < \frac{2}{\|(M^H)^{-\frac{1}{2}} R_H (M^E)^{-\frac{1}{2}}\|_2}. \quad (8)$$

Proposer une approche spectrale (i.e en utilisant les valeurs propres d'une matrice) pour calculer la norme matricielle contenue dans la condition CFL (8).

Question 3 : Nous allons terminer la mise en place de l'algorithme et débiter sa validation et son analyse sur un exemple. Ce dernier correspond à $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\mathbf{J} = 0$ et

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_0(x, y) = -\cos(m\pi x)\cos(m\pi y) \quad (9)$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$.

Q3.1 : Vérifier que

$$\mathbf{E}(x, y, t) = \frac{m\pi}{\omega\varepsilon_0} \sin(\omega t) \begin{pmatrix} \cos(m\pi x)\sin(m\pi y) \\ -\sin(m\pi x)\cos(m\pi y) \end{pmatrix} \quad (10a)$$

$$H(x, y, t) = -\cos(\omega t) \cos(m \pi x) \cos(m \pi y) \quad (10b)$$

est la solution exacte du problème lorsque $\omega = c_0 \pi m \sqrt{2}$ avec $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Q3.2 : Compléter les parties initialisation et avancée en temps du code.

Q3.3 : Validation et analyse numérique :

a) Prendre $\alpha_E = \alpha_H = 0$ et déterminer la condition CFL définie par

$$CFL = \frac{c_0}{h_{min}} \frac{2}{\|(M^H)^{-\frac{1}{2}} R_H (M^E)^{-\frac{1}{2}}\|_2}$$

pour le maillage cavity_pas01.mat et pour les ordres d'approximation $k = 1, 2, 3$. Ici, h_{min} est de l'ordre du plus petit diamètre du cercle circonscrit aux triangles du maillage et est déterminé en utilisant la fonction calcul_pas_maillage.m. Que pouvez-vous dire sur la dépendance de la CFL en fonction de l'ordre d'approximation ?

b) Prendre des valeurs α_E et α_H correspondant aux flux upwind, $k = 1$, le maillage cavity_pas01.mat et effectuer la simulation pour $T_f = 10^{-9}$ en utilisant le pas de temps associé à la condition CFL trouvée dans la question a. Que remarquez-vous ? Est-ce que ce résultat était prévisible ?

c) Refaire la simulation précédente en utilisant une condition CFL divisée par 4. Comparer visuellement la solution avec celle obtenue par le schéma centré en utilisant le même pas de temps. Pour cela, on utilisera la fonction visu_solution.m proposée. Quel effet ont les termes de pénalisation ?

d) En utilisant la fonction erreurL2_mode.m, déterminer les ordres de convergence en espace du schéma de Galerkin discontinu avec et sans pénalisation pour $k = 1, 2, 3$.

- Pour $k = 1$, nous utiliserons un mode défini par $m = 1$ et les maillages cavity_pas01.mat, cavity_pas0075.mat et cavity_pas005.mat.
- Pour $k = 2$, nous utiliserons un mode défini par $m = 1$ et les maillages cavity_pas02.mat, cavity_pas01.mat et cavity_pas0075.mat.
- Pour $k = 3$, nous utiliserons un mode défini par $m = 2$ et les maillages cavity_pas03.mat, cavity_pas02.mat et cavity_pas01.mat.

Il faudra faire attention à rendre au moins du même ordre l'erreur de discrétisation en temps et pour cela, on propose de faire ces simulations en prenant

$$\Delta t = 0.25 CFL \frac{h_{min}^\beta}{c_0}$$

avec $\beta = 2$ pour $k = 1$, $\beta = 3$ pour $k = 2$ et $\beta = 4$ pour $k = 3$.

e) Tracer sur une même figure l'évolution de l'erreur L^2 en fonction de la variable $\sqrt{Nbtri * N}$ pour le mode $m = 1$, pour le schéma d'ordre 1, 2 et 3 sans pénalisation et en considérant le pas de temps optimal.

- Pour $k = 1$, nous utiliserons les maillages cavity_pas01.mat, cavity_pas0075.mat et cavity_pas005.mat.
- Pour $k = 2$, nous utiliserons les maillages cavity_pas02.mat, cavity_pas01.mat et cavity_pas0075.mat.
- Pour $k = 3$, nous utiliserons les maillages cavity_pas03.mat, cavity_pas02.mat et cavity_pas01.mat.

Interpréter le sens de la variable $\sqrt{Nbtri * N}$ pour le mode $m = 1$ et conclure sur l'intérêt d'utiliser une méthode d'ordre élevé plutôt que de bas ordre.

2 Partie II : simulation en domaine non-bornée

Dans cette partie, nous voulons simuler la propagation d'une onde électromagnétique issue d'une source \mathbf{J} . Pour réaliser cela, nous allons imposer au bord du domaine de calcul la condition aux limites de Silver-Müller qui est une approximation locale de la condition de transparence exacte. Plus précisément le problème que nous allons résoudre numériquement s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(x, t) - \mathbf{curl} H(x, t) &= \mathbf{J}(x, t) \quad \text{dans } \Omega \\ \mu(x) \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) + \mathbf{curl} \mathbf{E}(x, t) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_{SM} \\ \mathbf{E}(x, 0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ H(x, 0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (11)$$

avec $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_{SM}$ et $\Gamma_D \cap \Gamma_{SM} = \emptyset$ et

$$\mathbf{J}(x, y, t) = \mathbf{curl} \left(e^{-\frac{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}{r_s^2}} \right) e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma_t^2}} \quad (12)$$

avec $t_0 = 10^{-10}$.

Question 4 : Montrer que la formulation de Galerkin discontinue du problème (11) s'écrit :
Trouver $(\mathbf{E}_h, H_h) \in \mathbf{V}_{h,k}^2 \times \mathbf{V}_{h,k}^1$ solution de $\forall (\mathbf{v}_h, w_h) \in \mathbf{V}_{h,k}^2 \times \mathbf{V}_{h,k}^1$ et $\forall T \in \mathcal{T}_h$,

$$\frac{d}{dt} \int_T \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_T \mathbf{curl} H_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\partial T \setminus \Gamma} [\![\mathbf{n} \times H_h]\!] \cdot \mathbf{v}_h d\gamma \quad (13a)$$

$$+ \alpha_E \int_{\partial T \setminus \Gamma} [\![\mathbf{n} \times \mathbf{E}_h]\!] (\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h) d\gamma = \int_T \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x}$$

$$\frac{d}{dt} \int_T \mu H_h w_h d\mathbf{x} + \int_T \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{curl} w_h d\mathbf{x} - \int_{\partial T \setminus \Gamma} \{ \{ \mathbf{E}_h \} \} \cdot (\mathbf{n}_T \times w_h) d\gamma \quad (13b)$$

$$- \int_{\partial T \cap \Gamma_{SM}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_h w_h d\gamma + \alpha_H \int_{\partial T \setminus \Gamma} [\![\mathbf{n} \times H_h]\!] \cdot (\mathbf{n} \times w_h) d\gamma = 0$$

Question 5 : Réaliser la simulation de la propagation d'un point source défini par $(x_s, y_s) = (0.5, 0.5)$ et $r_s = 0.2$ dans le carré unité pour lequel nous imposerons une condition de Silver-Müller sur tout le bord extérieur. Pour cela, utiliser le maillage `cavity_ptsource_pas01.mat`, un ordre d'approximation $k = 3$, un flux décentré et un pas de temps

$$\Delta t = \frac{1}{4} \frac{2}{\left\| (M^H)^{-\frac{1}{2}} R_H (M^E)^{-\frac{1}{2}} \right\|}.$$

Utiliser la routine `visu_solution_FilmE.m` pour visualiser l'évolution de la composante E_y jusqu'à un temps final $T_f = 2E - 9$ avec les paramètres $[X_{min} \ X_{max}] = [0 \ 1]$, $[Y_{min} \ Y_{max}] = [0 \ 1]$

et $[Z_{min} \ Z_{max}] = [-1 \ 1]$. Que constatez-vous ?

Question 6 : Nous allons à présent réaliser la simulation de la propagation d'un point source défini par $(x_s, y_s) = (1, 0.25)$ et $r_s = 0.2$ dans un rectangle "hétérogène" $]0, 2[\times]0, 1[$ pour lequel on impose la condition de Silver-Müller sur tout le bord extérieur. Les paramètres diélectriques sont définis par :

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, y) &= \varepsilon_0 \text{ si } y < 0.5 \\ \varepsilon(x, y) &= 4\varepsilon_0 \text{ si } y > 0.5\end{aligned}\tag{14}$$

et $\mu(x, y) = \mu_0$.

Pour réaliser la simulation, nous utiliserons le maillage `cavity_diel_pas01.mat`, un ordre d'approximation $k = 3$, un flux décentré et un pas de temps

$$\Delta t = \frac{1}{4} \frac{2}{\left\| (M^H)^{-\frac{1}{2}} R_H (M^E)^{-\frac{1}{2}} \right\|}.$$

En utilisant la routine `visu_solution_FilmE.m` avec les paramètres $[X_{min} \ X_{max}] = [0 \ 2]$, $[Y_{min} \ Y_{max}] = [0 \ 1]$ et $[Z_{min} \ Z_{max}] = [-1 \ 1]$, observer l'évolution des composantes x et y du champ électrique pour un temps final $t_f = 1E - 9$. Commenter la nature des continuités de ces deux composantes au passage du changement de matériaux. Le schéma de Galerkin discontinu, est-il physiquement correct ?

Question 7 : Dans ce dernier exemple, nous voulons simuler la diffraction par le disque unité $\mathcal{D}(0, 1)$ considéré parfaitement conducteur. Proposer un modèle continu et son approximation GD permettant de réaliser cette simulation. En utilisant, le maillage `cercle.mat` et un point source défini par $(x_s, y_s) = (0.5, 1)$ et $r_s = 0.25$, faites tourner le solveur GD choisi pour ce cas-test et vérifier qualitativement que la solution est bien physiquement correcte. Pour cela, utiliser la routine `visu_solution_FilmE.m` pour visualiser l'évolution de E_y jusqu'à un temps final $T_f = 1E - 8$ avec des paramètres $[X_{min} \ X_{max}] = [0 \ 3]$, $[Y_{min} \ Y_{max}] = [0 \ 2]$ et $[Z_{min} \ Z_{max}] = [-1 \ 1]$.

Question 8 : Proposer un bilan sur le schéma GD étudié dans ce BE.

Appendices

Annexe A : quelques questions pour aller plus loin

Pour écrire une méthode de Galerkin discontinue pour ce problème, nous considérons un maillage \mathcal{T}_h du domaine de calcul Ω composé uniquement de triangles. A partir de \mathcal{T}_h , nous définissons respectivement les espaces d'approximation pour \mathbf{E} (vectoriel) et H (scalaire) $\mathbf{V}_{h,k}^2$ et $\mathbf{V}_{h,k}^1$ où

$$\mathbf{V}_{h,k}^d := \left\{ \mathbf{v}_h \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^d : \forall T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in [\mathcal{P}^k(T)]^d \right\} \quad (15)$$

et $\mathcal{P}^k(T)$ est l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égale à $k \in \mathbb{N}$.

Question 1 : Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Sachant que la dimension de l'espace $\mathcal{P}^k(T)$ est égale à $N = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, vérifier que

$$\dim \left(\mathbf{V}_{h,k}^d \right) = (d N) * \text{Nbtri} \quad (16)$$

où Nbtri est le nombre de triangles de \mathcal{T}_h .

Question 2 : À chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, nous associons N fonctions $(\varphi_l^T)_{l=1,\dots,N}$ formant une base de $\mathcal{P}^k(T)$.

À partir de ces fonctions, on définit pour $j = 1, \dots, \text{Nbtri}$, $l = 1, \dots, N$ et $m = 1, \dots, d$, les fonctions

$$\varphi_{dN(j-1)+d(l-1)+m} := \varphi_l^{T_j} \mathbf{e}_m \quad (17)$$

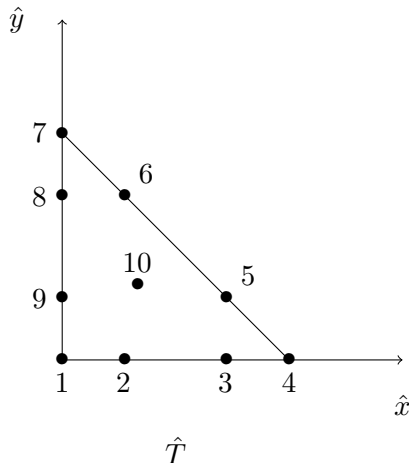
où T_j est le j ème triangle de \mathcal{T}_h et \mathbf{e}_m est le m ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d .

Montrer que $(\varphi_{dN(j-1)+d(l-1)+m})_{j,l,m}$ forme une base de $\mathbf{V}_{h,k}^d$.

Question 3 : Soient $\hat{T} := \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1 \text{ et } \hat{x} + \hat{y} - 1 \leq 0\}$ le triangle de référence et $(\hat{x}_l, \hat{y}_l)_{l=1,\dots,N}$ un ensemble de N points de \hat{T} qui seront appelés "points d'interpolation". Nous supposons que cet ensemble de points est unisolvant pour l'espace $\mathcal{P}^k(\hat{T})$ c'est-à-dire que si $\hat{p} \in \mathcal{P}^k(\hat{T})$ vérifie $\hat{p}(\hat{x}_l, \hat{y}_l) = 0$ pour tout $l = 1, \dots, N$, alors $\hat{p} = 0$. À chaque point (\hat{x}_l, \hat{y}_l) , nous associons la fonction $\hat{\varphi}_l \in \mathcal{P}^k(\hat{T})$ défini par : $\forall n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\hat{\varphi}_l(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = \delta_{l,n}. \quad (18)$$

Vérifier que $(\hat{\varphi}_l)_{l=1,\dots,N}$ est une base de $\mathcal{P}^k(\hat{T})$.



Exemple de points d'interpolation pour $k = 3$.

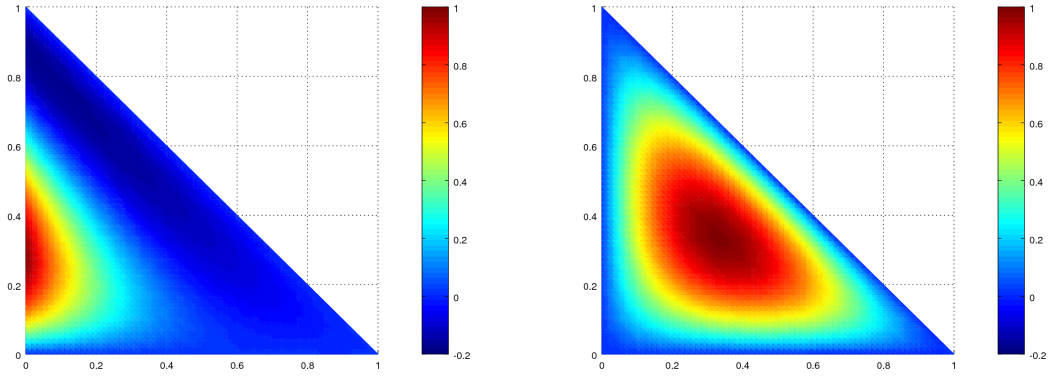


FIGURE 1 – Représentation de $\hat{\varphi}_9$ (à gauche) et $\hat{\varphi}_{10}$ (à droite)

Question 4 : Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Nous explicitons à présent les fonctions $(\varphi_l^T)_{l=1,\dots,N}$ de la façon suivante :

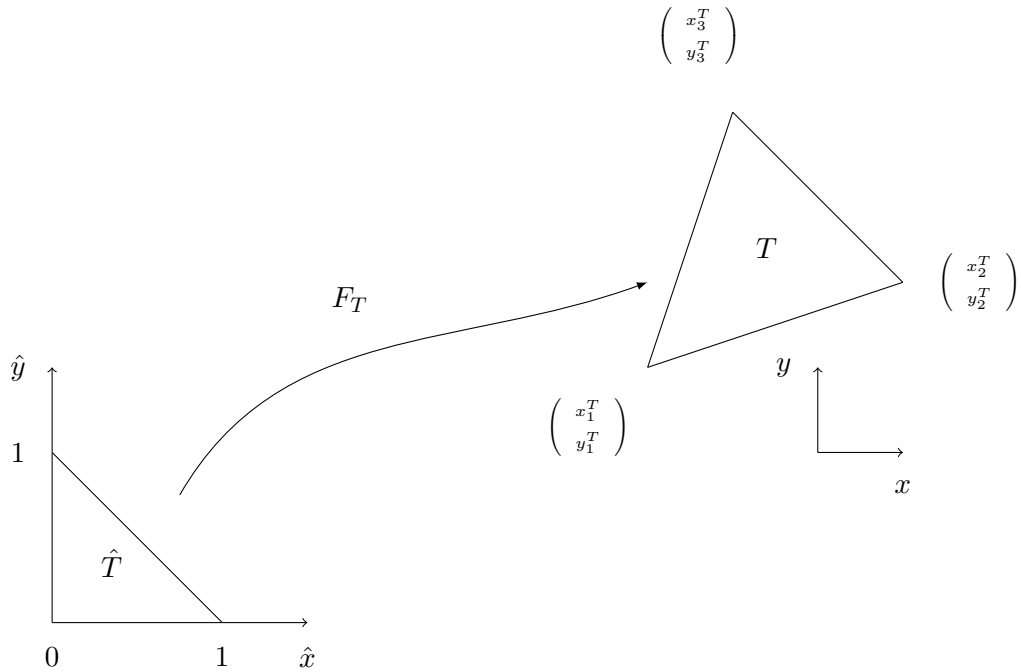
$$\varphi_l^T(x, y) := \hat{\varphi}_l(\hat{x}, \hat{y}) \quad (19)$$

où $(x, y) = F_T(\hat{x}, \hat{y})$ avec

$$F_T : \quad \hat{T} \quad \rightarrow \quad T$$

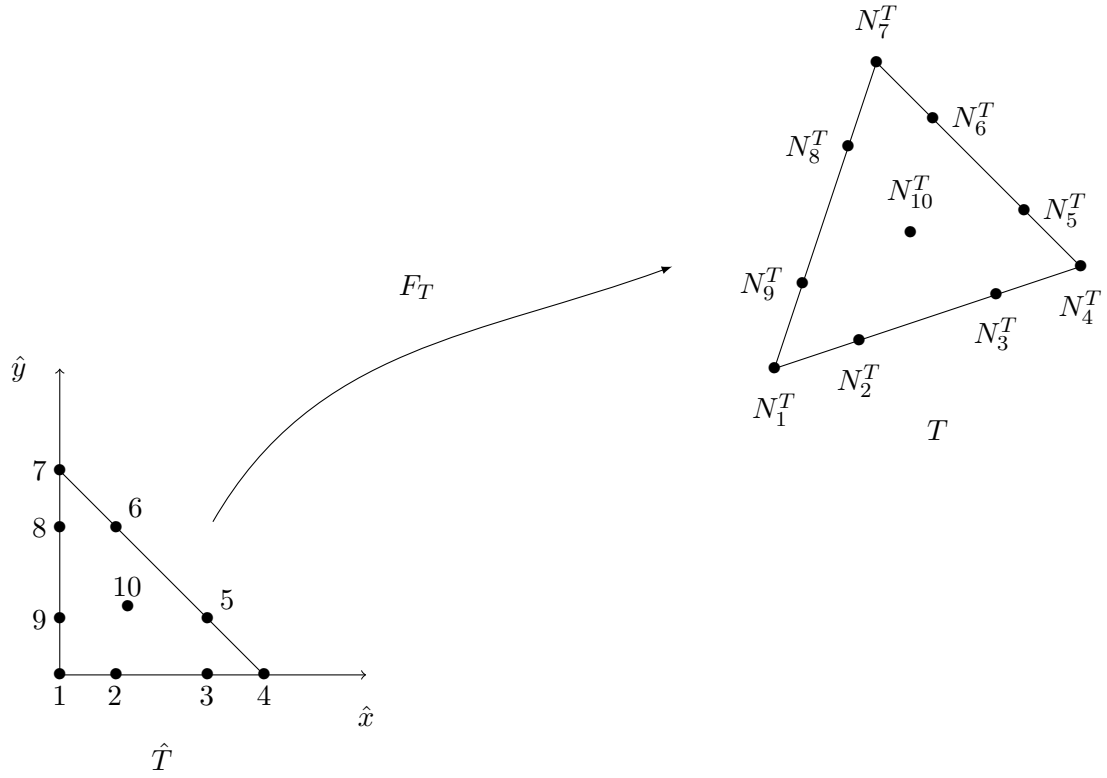
$$\begin{aligned} (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto F_T(\hat{x}, \hat{y}) = & \begin{pmatrix} x_1^T \\ y_1^T \end{pmatrix} (1 - \hat{x} - \hat{y}) \\ & + \begin{pmatrix} x_2^T \\ y_2^T \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} x_3^T \\ y_3^T \end{pmatrix} \hat{y} \end{aligned} \quad (20)$$

et $(x_i^T, y_i^T)_{i=1,2,3}$ sont les coordonnées des 3 sommets du triangle T .



Vérifier que $\varphi_l^T \in \mathcal{P}^k(T)$ et que si on note $(x_n^T, y_n^T) := F_T(\hat{x}_n, \hat{y}_n)$ pour $n = 1, \dots, N$ alors $\varphi_l^T(x_n^T, y_n^T) = \delta_{l,n}$. De plus, justifier que tous les éléments p de $\mathcal{P}^k(T)$ se décomposent de la façon suivante :

$$p(x, y) = \sum_{l=1}^N p(x_l^T, y_l^T) \varphi_l^T(x, y) \quad (21)$$



Exemple de points d'interpolation sur \hat{T} et T pour $k = 3$. N_l^T est le point de coordonnées (x_l^T, y_l^T) .

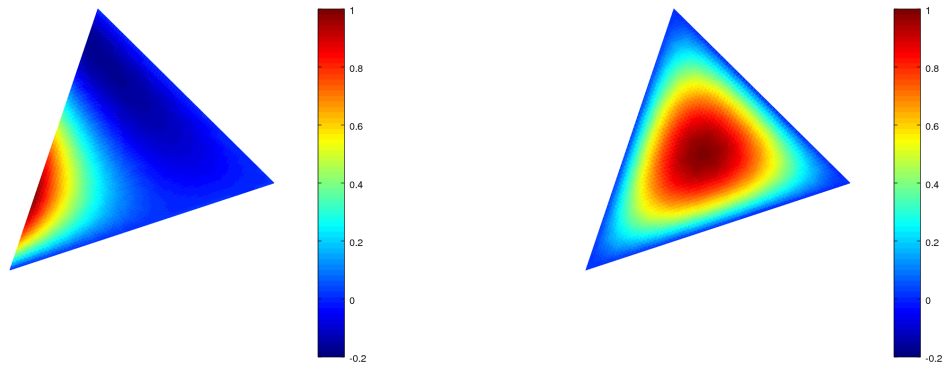


FIGURE 2 – Représentation de φ_9 (à gauche) et φ_{10} (à droite)