SXS - Cours Multi-Echelles
BE : Couplage Eulerien - Lagrangien

Vendredi 28 Janvier 2022

Nous nous intéressons au cours de ce BE à la simulation numérique des brouillards de gouttes dans un écoulement gazeux U_{gaz} donné.

1 Modélisation du problème

Dans un souci de simplification, les gouttes seront supposées sphériques, et de même taille, et ne seront donc décrites que par leur position et leur vitesse. Le domaine de calcul Ω considéré est un carré dans $\mathbb{R}^2$, de longueur de côté égale à 1.

On note $X = (X_1, X_2, ..., X_N)$ et $V = (V_1, V_2, ..., V_N)$ respectivement les positions et les vitesses des particules $\{1, 2, ..., N\}$. Nous supposons que les gouttes sont soumises à une force de traînée qui suit une loi de Stokes. Comme les gouttes ont toutes la même taille, on note τ le temps caractéristique associé. Nous avons alors pour chaque goutte les équations d'évolution suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_i(t) & = & V_i(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_i(t) & = & \frac{U_{gaz}(X_i(t)) - V_i(t)}{\tau} = F(X_i(t), V_i(t)) \end{array} \right. \tag{1}$$

Question 1. Introduisons f^N la fonction de distribution du système de N gouttes. f^N dépend de (X, V, t) et est telle que $f^N(X, V, t)dXdV$ représente la probabilité pour que le système de N gouttes soit dans le volume $dXdV$ autour de (X, V) à l'instant t. Comme dans le cours, nous notons également, pour $1 \leq k \leq N$:

$$f^k(X_1, .., X_k, V_1, .., V_k, t) = \int_{\substack{X_{k+1}, .., X_N \\ V_{k+1}, .., V_N}} f^N(X, V, t) dX_{k+1} dV_{k+1} .. dX_N dV_N \tag{2}$$

On suppose que les collisions entre gouttes, et donc leurs interactions, sont négligeables. On rappelle dans ce cas, l'équation de Liouville vérifiée par f^N :

$$\partial_t f^N(X(t), V(t), t) + \sum_{i=1}^{N} \left(\nabla_{X_i}.(V_i.f^N) + \nabla_{V_i}.(F(X_i, V_i)f^N) \right) = 0 \qquad (3)$$

En supposant que les fonctions de distribution tendent vers 0 quand x et v tendent vers $+\infty$, montrer que cette équation est également vérifiée par f^1. On notera ensuite $f = f^1$.

Question 2. A partir de l'équation vérifiée par f, montrer que l'on obtient un système d'équations sur les quantités macroscopiques

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f dv \quad ; \quad \rho u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f v dv \quad ; \quad E(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v^2}{2} f dv$$

et que l'on peut le mettre sous la forme (la partie gauche a été vue en cours et n'a pas besoin d'être redémontrée) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \rho + \nabla_x.(\rho u) & = & 0 \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x.(\rho u \otimes u + \Pi) & = & \dfrac{\rho U_{gaz}(x) - \rho u(t, x)}{\tau} \\ \partial_t E + \nabla_x. (E u + \Pi u + q) & = & S \end{array} \right. \qquad (4)$$

avec $\Pi = \int (v-u) \otimes (v-u) f dv$ la pression thermodynamique, $q = \int \frac{(v-u)^3}{2} f dv$ le flux de chaleur et S à préciser. On rappelle que si on choisit f^1 comme une Maxwellienne que l'on précisera, on peut noter $q = 0$ et $\Pi = \rho T Id$. Que vaut alors S ?

Question 3. On envisage de représenter la distribution f et l'évolution de ses moments en utilisant une méthode Lagrangienne :

$$f(t, x, v) \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta_{x = x_i(t)} \delta_{v = v_i(t)}$$

Soit $\mathcal{M}$ un maillage de Ω. De combien de particules numériques par cellule du maillage a-t-on au minimum besoin afin de représenter correctement les 3 moments ρ, ρu et E de la distribution "réelle" ?

Question 4. Dans toute la suite, on se place dans le cas $T = 0$. Quelle conséquence cette hypothèse a-t-elle sur le système 4 ? De combien de particules numériques par cellule du maillage a-t-on maintenant au minimum besoin ? Quelle asymptotique permet (formellement) de justifier cette hypothèse ?

2 Résolution par méthode Eulerienne

Considérons un maillage $\mathcal{M}$ de Ω, régulier selon les deux directions x et y. Nous notons Lx et Ly les longueurs respectivement selon x et y du rectangle Ω et posons $\Delta x = Lx/Nx$, $\Delta y = Ly/Ny$. On résout :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \rho + \nabla_x.(\rho u) & = & 0 \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x.(\rho u \otimes u + \Pi) & = & \dfrac{\rho U_{gaz}(x) - \rho u(t,x)}{\tau} \end{array} \right. \tag{5}$$

La cellule $C_{i,j}$ sera constituée du pavé $[(i-1)\Delta x, i\Delta x] \times [(j-1)\Delta y, j\Delta y]$ et le schéma Volumes Finis utilisé fera intervenir pour cette cellule quatre flux, à savoir Nord :$FV_{i,j+1}$, Sud : $FV_{i,j}$, Est : $FH_{i+1,j}$ et Ouest : $FH_{i,j}$

On utilise pour le calcul des flux une méthode décentrée d'ordre un en espace, donnant :

$$\begin{array}{rcl} FV_{i,j}(1) & = & \Delta x.(\rho_{i,j-1}.max((u_y)_{i,j-1}, 0) + \rho_{i,j}.min((u_y)_{i,j}, 0)), \\ FH_{i,j}(1) & = & \Delta y.(\rho_{i-1,j}.max((u_x)_{i-1,j}, 0) + \rho_{i,j}.min((u_x)_{i,j}, 0)), \\ \rho_{i,j}(t+\Delta t) & = & \rho_{i,j}(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}(FV_{i,j+1} - FV_{i,j} + FH_{i+1,j} - FH_{i,j}) \end{array} \tag{6}$$

Question 5. Dans le fichier `Schema_Euler.m`, compléter les valeurs des flux à partir des conditions aux limites. Ecrire ensuite dans le fichier principal `main_mono.m` les Conditions aux Limites correspondant respectivement :
— à une entrée de densité 1 et de vitesse $(1, 0)$ sur les 5 cellules centrales du côté Ouest,
— à une entrée de densité 1 et de vitesse $(0, 1)$ sur les 5 cellules centrales du côté Sud.

Question 6. Dans le fichier `Schema_Euler.m`, écrire les formules d'évolution de la vitesse due à la force de traînée en utilisant un schéma de type Euler explicite d'ordre un. Quel est le splitting utilisé pour coupler transport et traînée ?

Question 7. Calculer l'évolution "sur un temps suffisamment long", en monodomaine et selon la méthode Eulerienne, du brouillard de gouttes pour $\tau = 200$ et $\tau = 1$. Interpréter les résultats obtenus. Que vous attendiez-vous à observer ? Ce comportement était-il prévisible ?

3 Résolution avec une méthode Lagrangienne

On s'intéresse maintenant à une résolution particulaire de l'équation

$$\partial_t f^1(x, v, t) + \nabla_x.(v.f^1) + \nabla_v.(F(x, v)f^1) = 0 \tag{7}$$

On garde le même maillage pour représenter les champs de densité et de vitesse. Une particule numérique i sera vue comme un vecteur $fl(i,:)$ à 5 composantes :

— $fl(i,1)$: poids de la particule i,
— $fl(i,2)$ et $fl(i,3)$: vitesses horizontale et verticale de la particule i,
— $fl(i,4)$ et $fl(i,5)$: abscisse et ordonnée de la position de la particule i.

Question 8. Dans le fichier `Schema_Lagrange.m`, déterminer les caractéristiques des particules numériques à injecter pour représenter les conditions aux limites. Attention, on se donne la possibilité de représenter le flux entrant avec plus d'une particule numérique. Une attention particulière à la localisation de celles-ci sera demandée.

Question 9. Toujours dans le fichier `Schema_Lagrange.m`, écrire les effets de la traînée et du transport libre avec une méthode d'Euler Explicite d'ordre un en temps. Quelle est la particularité de l'effet de traînée par rapport à la méthode Lagrangienne ?

Question 10. Calculer l'évolution "sur un temps suffisamment long", en monodomaine et selon la méthode Lagrangienne, du brouillard de gouttes pour $\tau = 200$ et $\tau = 1$. Interpréter les résultats obtenus.

4 Couplage Euler-Lagrange

On couple les deux approches grâce à une méthode de décomposition de domaines. On supposera que le domaine initial est découpé en 9 morceaux (3 selon x et 3 selon y), et nous utiliserons pour cela la structure `cell` (voir aide de Matlab).

Question 11. Dans le fichier `main_multi.m`, étudier la méthode de décomposition en multi-domaines et écrire les relations de transfert des conditions aux limites. Intégrer les modifications des conditions aux limites Sud et Ouest effectuées dans la question 5.

Question 12. Dans le fichier `Schema_Euler.m`, écrire les valeurs des conditions aux limites « sortantes du domaine ». Effectuer ensuite une simulation multi-domaines, tout Eulerien.

Question 13. Dans le fichier `Schema_Lagrange.m`, écrire les valeurs des conditions aux limites "sortantes du domaine". Effectuer ensuite une simulation multi-domaines, tout Lagrangien. Que pouvez-vous dire de l'effet du découpage ?

Question 14. Effectuer une simulation couplée en choisissant judicieusement le modèle numérique selon la zone considérée. Quelles sont vos conclusions ?