TD 1 ET 2 : LOGIQUE ET ENSEMBLES
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Logique

Exercice 1. Construisez une table de vérité pour chacune des propositions composées suivantes :

1. $(p \wedge q) \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$
3. $(p \oplus q) \vee (\neg p \oplus q)$
4. $(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg p)$

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$(p \oplus q) \vee (\neg p \oplus q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

p	q	r	$p \rightarrow (\neg q \vee r)$	$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
V	V	V	V	F
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Exercice 2. Relevez parmi les formules suivantes celles qui sont des tautologies, des contradictions ou des contingences.

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ - Réponse : tautologie
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ - Réponse : contingence
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ - Réponse : tautologie
4. $(p \leftrightarrow (r \vee q)) \rightarrow (\neg q \rightarrow p \vee r)$ - Réponse : contingence
5. $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$ - Réponse : contradiction
6. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ - Réponse : tautologie

Exercice 3. Ecrivez la réciproque et la contraposée de chacune des implications suivantes :

a. Si 2 * 3 = 7, alors je suis joueur du Canadiens de Montréal.
Réponse : Soit P la proposition “2 * 3 = 7” et Q la proposition “Je suis joueur du Canadiens de Montréal”. Nous avons donc $P \rightarrow Q$.
La réciproque est $Q \rightarrow P$. Elle se traduit par : “Si je suis joueur du Canadiens de Montréal, alors 2 * 3 = 7”.
La contraposée est $\neg Q \rightarrow \neg P$. Elle se traduit par : “Si je ne suis pas joueur du Canadiens de Montréal, alors $2 * 3 \neq 7$”.

b. S'il fait beau et si je ne suis pas fatigué, alors je vais à la plage.
Réponse : Soit P la proposition "Il fait beau", Q la proposition "Je ne suis pas fatigué" et R la proposition "Je vais à la plage". Nous avons donc $(P \wedge Q) \to R$.
La réciproque est $R \to (P \wedge Q)$. Elle se traduit par : "Si je vais à la plage, alors il fait beau et je ne suis pas fatigué".
La contraposée est $\neg R \to \neg(P \wedge Q)$, soit $\neg R \to (\neg P \vee \neg Q)$. Elle se traduit par : "Si je ne vais pas à la plage, alors il ne fait pas beau ou je suis fatigué".

c. Si je deviens chevalier Jedi, alors je vais sur la Lune ou je me couronne empereur.
Réponse : Soit P la proposition "Je deviens chevalier Jedi", Q la proposition "Je vais sur la Lune" et R la proposition "Je me couronne empereur". Nous avons donc $P \to (Q \vee R)$.
La réciproque est $(Q \vee R) \to P$. Elle se traduit par : "Si je vais sur le Lune ou si je me couronne empereur, alors je deviens chevalier Jedi".
La contraposée est $\neg(Q \vee R) \to \neg P$, soit $(\neg Q \wedge \neg R) \to \neg P$. Elle se traduit par : "Si je ne vais pas sur le Lune et si je ne me couronne pas empereur, alors je ne deviens pas chevalier Jedi".

Exercice 4. Soit $P(x, y)$ l'énoncé "$x + y > 10$". L'univers du discours étant l'ensemble des nombres relatifs, déterminez quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. $P(3, 9)$
2. $P(x, 4)$
3. $\forall\, y\ P(2, y)$
4. $\exists\, x\ P(x, 100)$
5. $\exists\, x\ \exists\, y\ P(x, y)$
6. $\forall\, x\ \exists\, y\ P(x, y)$
7. $\exists\, x\ \forall\, y\ P(x, y)$
8. $\forall\, y\ \exists\, x\ P(x, y)$
9. $\forall\, x\ \forall\, y\ P(x, y)$

Exercice 5. Montrez les équivalences qui suivantes :

1. $(P \to (Q \to R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R)$
2. $((P \vee Q) \to R) \Leftrightarrow ((P \to R) \wedge (Q \to R))$
3. $((P \wedge Q) \to R) \Leftrightarrow ((P \to R) \vee (Q \to R))$
4. $(P \to (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (P \to R))$
5. $(P \to (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \to Q) \vee (P \to R))$

Exercice 6. Isabelle souhaite reconstituer l'arbre généalogique de sa famille. Mais, elle ne dispose que des données suivantes :

- son père avait deux oncles et une tante : Arthur, Bernard et Cécile ;
- Arthur, Bernard et Cécile ont eu six enfants : Urbain, Vincent, Walter, Xavier, Yvette et Zoé ;
- Bernard a eu la famille la plus nombreuse ;
- Yvette est enfant unique ;
- Walter et Xavier n'ont qu'un frère et pas de soeur ;
- Zoé est la soeur d'Urbain et est plus âgée que lui ;
- Arthur n'a pas eu de fille.

À partir de ces informations, peut-on conclure que :

a. Cécile est la mère d'Yvette? Réponse : Oui.
b. Walter et Urbain sont frères ? Réponse : Faux.
c. Bernard a plus de fils qu'Arthur ? Réponse : Oui.
d. Zoé est l'aînée des enfants de Bernard ? Réponse : On ne peut pas conclure. Aucune information ne permet d'établir qui de Vincent ou Zoé est né(e) avant l'autre.

Exercice 7. On considère les propositions P, Q, R, S représentant respectivement les assertions : "*Paul est régulier au cours*", "*Paul est régulier aux séances de TD*", "*Paul étudie pour le cours*" et "*Paul réussit le cours*". Énoncer des phrases simples qui traduisent chacune des propositions suivantes :

a. $\neg P$

b. $\neg(P \vee Q)$
c. $\neg P \vee \neg Q$
d. $R \rightarrow (P \vee Q)$
Réponse : Si Paul étudie pour le cours, alors il est régulier au cours ou aux séances de TD.
e. $P \vee Q \wedge \neg R \rightarrow \neg S$
Réponse : Si Paul est régulier au cours ou aux séances de TD et s'il n'étudie pas pour le cours, alors il ne réussit pas le cours.
f. $P \wedge Q \wedge R \rightarrow S$
Réponse : Si Paul est régulier au cours et aux séances de TD et s'il étudie pour le cours, alors il réussit le cours.
g. $S \rightarrow (P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R)$
Réponse : Paul réussit le cours seulement s'il est régulier au cours si et seulement s'il est régulier aux séances de TD si et seulement s'il étudie pour le cours.

Exercice 8. Indiquer quel (s) est (sont) la (les) traduction (s) correcte (s) des énoncés suivants :

1. "*Ne pas perdre ce n'est pas obligatoirement gagner, alors que gagner c'est toujours ne pas perdre.*"
Soit p : "*Perdre*" et q : "*Gagner*".
a. $q \rightarrow \neg p$
b. $\neg p \leftrightarrow q$
c. $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
d. $\neg(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
e. $(q \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow q)$
f. $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$

Réponse : d. $\neg(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$

2. "*Tous les enfants ne sont pas des anges.*"
Soit P le prédicat "*est un enfant*" et Q le prédicat "*est un ange*".
a. $P \rightarrow \neg Q$
b. $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
c. $\forall x(Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
d. $\neg\, \forall x(Q(x) \Leftrightarrow P(x))$
e. $\neg\, \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
f. $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
g. $\exists x(P(x) \wedge\ \neg Q(x))$
h. $\exists x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

Réponse : e, g et h.

Exercice 9. On considère les propositions ci-dessous. L'univers du discours est l'ensemble des réels.
1. Donner la négation de chacune des propositions.
2. Écrire chacune des propositions à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques.

Propositions :
a. Le carré de tout réel est positif. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
b. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré. $\exists x \in \mathbb{R},\ x > x^2$
c. Aucun réel n'est supérieur à tous les autres. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$
d. Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0) \vee (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0)$
e. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers. $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, \exists\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{a}{b})$

Exercice 10. Comparer les différentes phrases. Quelles sont celles qui sont équivalentes ? Quelles sont celles qui sont contraires ? Quelles sont celles qui impliquent les autres ?
1. $\forall x,\, \exists y,\, x = y$

2. $\exists x, \forall y, y < x$
3. $\exists x, \exists y, x \leq y$
4. $\forall x, \exists y, x \leq y$
5. $\exists x, \exists y, y < x$
6. $\exists x, \forall y, x \leq y$
7. $\forall x, \forall y, x \leq y$

Solution
Soit P_i la phrase de rang i. On a :

a. Phrases équivalentes
   - Aucune

b. Phrases contraires
   - P_7 et P_5 ; P_4 et P_2.

c. Implications
   - $P_1 \to P_3$; $P_1 \to P_4$
   - $P_2 \to P_5$
   - $P_4 \to P_3$
   - $P_6 \to P_3$
   - $P_7 \to P_1$; $P_7 \to P_3$; $P_7 \to P_4$; $P_7 \to P_6$

2. Ensembles

Exercice 11. Soient les ensembles A = { 3, 4, 5, 6, 9 }, B = { 0, 1, 5, 6, 7, 9 } et C = { 1, 2, 3, 6, 8 }. Déterminez les ensembles suivants :

- $A \cup B$
- $B - C$
- $(C - B) - A$
- $A \cap (B \cup C)$
- $B - (A \cap B \cap C)$

Exercice 12. Les 124 étudiantes et étudiants d'une école secondaire peuvent choisir d'étudier l'anglais, l'espagnol ou le mandarin. On sait que :

- 65 étudient l'anglais
- 33 étudient l'espagnol
- 25 n'étudient que le mandarin
- 9 étudient les trois langues
- 15 n'étudient aucune langue
- 22 étudient au moins deux langues
- 7 n'étudient que le mandarin et l'espagnol

1. Combien de personnes étudient-elles l'anglais ou l'espagnol ? Réponse : 84.
2. Combien de personnes étudient-elles l'anglais et l'espagnol ? Réponse : 14.
3. Combien de personnes n'étudient que l'espagnol ? Réponse : 12.
4. Combien de personnes étudient-elles le mandarin et l'anglais mais pas l'espagnol ? Réponse : 1.
5. Combien de personnes n'étudient que l'anglais ? Réponse : 50.

Exercice 13. Soit E et F deux ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que : $A \times B \subset E \times F$.
Solution :
Soit $A \subset E$ et $B \subset F$
$\forall (x, y) \in A \times B$, $x \in A$ et $y \in B$
$(x \in A$ et $y \in B)$ et $(A \subset E$ et $B \subset F)$, alors $x \in E$ et $y \in F$
$x \in E$ et $y \in F$, alors $(x, y) \in E \times F$
Donc $\forall (x, y) \in A \times B$, $(x, y) \in E \times F$
D'où $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 14. Soit E, F et G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 15. Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E. On suppose que : $A \cap B \neq \phi$, $A \cup B \neq E$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$. Montrer que :

1. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cup B}$ sont non vides.
   - $A \cap B \neq \phi$ d'après l'énoncé.
   - $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x \in A \wedge x \notin B$
     $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x \in A \wedge x \in \overline{B}$
     $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x \in A \cap \overline{B}$
     Donc $A \cap \overline{B} \neq \phi$
   - $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x \in B \wedge x \notin A$
     $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x \in B \wedge x \in \overline{A}$
     $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x \in B \cap \overline{A}$
     Donc $B \cap \overline{A} \neq \phi$
   - $A \cup B \neq E \rightarrow \exists x \in E, x \notin A \cup B$
     $A \cup B \neq E \rightarrow \exists x \in E, x \in \overline{A \cup B}$
     Donc $\overline{A \cup B} \neq \phi$
2. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cup B}$ sont deux à deux disjoints.
   - $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap B \cap \overline{B}$
     $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap \phi$, car $B \cap \overline{B} = \phi$
     $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \phi$, car $A \cap \phi = \phi$
     Donc $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont disjoints.
   - $(A \cap B) \cap (B \cap \overline{A}) = A \cap B \cap \overline{A}$
     $(A \cap B) \cap (B \cap \overline{A}) = B \cap \phi$, car $\cap$ est commutatif et $A \cap \overline{A} = \phi$
     $(A \cap B) \cap (B \cap \overline{A}) = \phi$, car $B \cap \phi = \phi$
     Donc $A \cap B$ et $B \cap \overline{A}$ sont disjoints.
   - $(A \cap B) \cap (\overline{A \cup B}) = A \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
     $(A \cap B) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi$, car $\cap$ est commutatif et $A \cap \overline{A} = \phi, B \cap \overline{B} = \phi$
     Donc $A \cap B$ et $\overline{A \cup B}$ sont disjoints.
   - $(A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) = A \cap \overline{B} \cap B \cap \overline{A}$
     $(A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) = \phi$, car $\cap$ est commutatif et $A \cap \overline{A} = \phi, B \cap \overline{B} = \phi$
     Donc $A \cap \overline{B}$ et $B \cap \overline{A}$ sont disjoints.
   - $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
     $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi \cap \overline{B}$, car $\cap$ est commutatif et $A \cap \overline{A} = \phi$
     $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi$
     Donc $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$ sont disjoints.
   - $(B \cap \overline{A}) \cap (\overline{A \cup B}) = B \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
     $(B \cap \overline{A}) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi \cap \overline{A}$, car $\cap$ est commutatif et $B \cap \overline{B} = \phi$
     $(B \cap \overline{A}) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi$
     Donc $B \cap \overline{A}$ et $\overline{A \cup B}$ sont disjoints.
3. $(A \cap B) \bigcup (A \cap \overline{B}) \bigcup (B \cap \overline{A}) \bigcup (\overline{A \cup B}) = E$
   $(A \cap B) \bigcup (A \cap \overline{B}) \bigcup (B \cap \overline{A}) \bigcup (\overline{A \cup B}) = (A \cap B) \bigcup (A \cap \overline{B}) \bigcup (B \cap \overline{A}) \bigcup (\overline{A} \cap \overline{B})$
   $= [(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] \bigcup [(B \cap \overline{A}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})]$
   $= [(A \cup (A \cap \overline{B})) \cap (B \cup (A \cap \overline{B}))] \bigcup [(B \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) \cap (\overline{A} \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))]$
   $= [A \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A) \cap (B \cup \overline{B})] \bigcup [(B \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{A}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$
   $= [A \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A) \cap E)] \bigcup [(B \cup \overline{A}) \cap E \cap \overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$
   $= [A \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A))] \bigcup [(B \cup \overline{A}) \cap \overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$
   $= [A \cap (B \cup A)] \bigcup [\overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$
   $= A \cup \overline{A}$
   $= E$

Exercice 16. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A \Delta B$, le sous ensemble de E :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}$$

1. Montrer que $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

2. Démontrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \phi$
3. Calculer $A\Delta A,\ A\Delta\overline{A},\ A\Delta E,\ A\Delta\phi$
   $A\Delta A = \phi,\ A\Delta\overline{A} = E,\ A\Delta E = \overline{A},\ A\Delta\phi = A$
4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E, on a :

$$(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$$

$$(A\Delta B)\cap\overline{C} = (A\cup C)\Delta(B\cup C)$$

- **Première méthode de démonstration de** $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$
  Il s'agit de démontrer que $((A\Delta B)\cap C)\subset((A\cap C)\Delta(B\cap C))$ et $((A\cap C)\Delta(B\cap C))\subset((A\Delta B)\cap C)$
  - Démontrons que $((A\Delta B)\cap C)\subset((A\cap C)\Delta(B\cap C))$
    Si $x\in(A\Delta B)\cap C$, alors $x\in A\Delta B$ et $x\in C$
    Si $x\in A\Delta B$ et $x\in C$, alors $x\in A$ et $x\notin B$ et $x\in C$
    Si $x\in A$ et $x\notin B$ et $x\in C$, alors $(x\in A$ et $x\in C)$ et $(x\notin B$ et $x\in C)$
    Si $(x\in A$ et $x\in C)$ et $(x\notin B$ et $x\in C)$, alors $x\in A\cap C$ et $x\notin B\cap C$
    Si $x\in A\cap C$ et $x\notin B\cap C$, alors $x\in(A\cap C)\Delta(B\cap C)$
    On déduit que $((A\Delta B)\cap C)\subset((A\cap C)\Delta(B\cap C))$
  - Démontrons que $((A\cap C)\Delta(B\cap C))\subset((A\Delta B)\cap C)$
    Si $x\in(A\cap C)\Delta(B\cap C)$, alors $x\in A\cap C$ et $x\notin B\cap C$
    Si $x\in A\cap C$ et $x\notin B\cap C$, alors $x\in A$ et $x\in C$ et $x\notin B\cap C$
    Si $x\in A$ et $x\in C$ et $x\notin B\cap C$, alors $x\in A$ et $x\in C$ et $x\notin B$
    Si $x\in A$ et $x\in C$ et $x\notin B$, alors $x\in A$ et $x\in\overline{B}$ et $x\in C$
    Si $x\in A$ et $x\in\overline{B}$ et $x\in C$, alors $x\in A\cap\overline{B}$ et $x\in C$
    Or $A\cap\overline{B}\subset A\Delta B$ car $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$
    Donc si $x\in A\cap\overline{B}$ et $x\in C$, alors $x\in A\Delta B$ et $x\in C$
    Si $x\in A\Delta B$ et $x\in C$, alors $x\in A\Delta B\cap C$
    On déduit que $((A\cap C)\Delta(B\cap C))\subset((A\Delta B)\cap C)$
- **Deuxième méthode de démonstration de** $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$
  Pour démontrer que $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$, il suffit de développer chacune des deux parties de l'égalité de manière à trouver une même expression, puis conclure.
  - $(A\Delta B)\cap C = \left[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]\cap C$
    $(A\Delta B)\cap C = \left[(A\cap\overline{B})\cap C\right]\cup\left[(\overline{A}\cap B)\cap C\right]$
    $(A\Delta B)\cap C = (A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$
  - $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[(A\cap C)\cap\overline{B\cap C}\right]\cup\left[\overline{A\cap C}\cap(B\cap C)\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[(A\cap C)\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\right]\cup\left[(\overline{A}\cup\overline{C})\cap(B\cap C)\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[A\cap C\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\right]\cup\left[(\overline{A}\cup\overline{C})\cap B\cap C\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[A\cap(C\cap(\overline{B}\cup\overline{C}))\right]\cup\left[((\overline{A}\cup\overline{C})\cap C)\cap B\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[A\cap(C\cap\overline{B})\right]\cup\left[(\overline{A}\cap C)\cap B\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = (A\cap\overline{B}\cup C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$

- **Première méthode de démonstration de** $(A\Delta B)\cap\overline{C} = (A\cup C)\Delta(B\cup C)$
  Il s'agit de démontrer que $((A\Delta B)\cap\overline{C})\subset((A\cup C)\Delta(B\cup C))$ et $((A\cup C)\Delta(B\cup C))\subset((A\Delta B)\cap\overline{C})$
- **Deuxième méthode de démonstration de** $(A\Delta B)\cap\overline{C} = (A\cup C)\Delta(B\cup C)$
  Pour démontrer que $(A\Delta B)\cap\overline{C} = (A\cup C)\Delta(B\cup C)$, il suffit de développer chacune des deux parties de l'égalité de manière à trouver une même expression, puis conclure.
  - $(A\Delta B)\cap\overline{C} = \left[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]\cap\overline{C}$
    $(A\Delta B)\cap C = \left[(A\cap\overline{B})\cap C\right]\cup\left[(\overline{A}\cap B)\cap\overline{C}\right]$
    $(A\Delta B)\cap C = (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})$
  - $(A\cup C)\Delta(B\cup C) = \left[(A\cup C)\cap\overline{B\cup C}\right]\cup\left[\overline{A\cup C}\cap(B\cup C)\right]$
    $(A\cup C)\Delta(B\cup C) = \left[(A\cup C)\cap(\overline{B}\cap\overline{C})\right]\cup\left[(\overline{A}\cap\overline{C})\cap(B\cup C)\right]$
    $(A\cup C)\Delta(B\cup C) = \left[(A\cup C)\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right]\cup\left[\overline{A}\cap\overline{C}\cap(B\cup C)\right]$
    $(A\cup C)\Delta(B\cup C) = \left[((A\cup C)\cap\overline{C})\cap\overline{B}\right]\cup\left[\overline{A}\cap(\overline{C}\cap(B\cup C))\right]$

$(A \cup C)\Delta(B \cup C) = (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C} \cap B)$
$(A \cup C)\Delta(B \cup C) = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$

Exercice 17. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Notons $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B

1. Vérifier que : $A\Delta B = B\Delta A$
   Indication : Utiliser la commutativité de $\cup$ dans la formule donnée par l'énoncé.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
3. Montrer que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$
4. Démontrer que $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 et 4 (Page 9) ; 7, 9 (Page 10) ; 13 (Page 11) ; 8 (Page 30) ; 10, 15 (Page 31) ; 29 (Page 32) ; 6, 10, 19 (Page 51) ; 31, 32 (Page 52).