LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 2 : LOGIQUE ET ENSEMBLES
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Exercice 1. On considère les énoncés suivants.

a. Si les Belges aiment le fromage ou si les Équatoriens font de l'équitation, alors le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
b. Si le président du Ghana boit des smoothies aux bananes et que son chat est en surpoids, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
c. Soit il n'est pas vrai que si le chat du président du Ghana est en surpoids, alors les Belges aiment le fromage, soit il est vrai que si les Équatoriens font de l'équitation, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
d. Les Indonésiens ne fabriquent pas de chaises berçantes.

---

e. Conclusion.

Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions. Parmi les conclusions suivantes, lesquelles sont valides?

a. Les Belges n'aiment pas le fromage.
b. Les Belges n'aiment pas le fromage ou les Équatoriens ne font pas d'équitation.

Résolution
Considérons les prédicats suivants :
b : Les Belges aiment le fromage.
e : Les Équatoriens font de l'équitation.
g : Le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
c : Le chat du président du Ghana est en surpoids.
i : Les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : (b \vee e) \to g$
$h_2 : (g \wedge c) \to i$
$h_3 : \neg(c \to b) \vee (e \to i)$
$h_4 : \neg i$

Conclusion.
On a :

1	$\neg i$	h_4
2	$\neg(g \wedge c)$	h_2 *et* h_4, *Modus Tollens*
3	$\neg(b \vee e)$	h_1 *et* $\neg g$ *ou* $\neg c$ *vu en* 2
4	$(e \to i)$	h_3, *Syllogisme disjonctif et* $\neg g$ *ou* $\neg c$ *vu en* 2
5	$\neg e$	h_4, *Modus Tollens et* $(e \to i)$ *vu en* 4
6	$\neg e \vee \neg(b \vee e)$	*Selon les* 2 *possibilités.*

La seule conclusion qu'on peut tirer de ce raisonnement est donc que les Équatoriens ne font pas d'équitation. La seconde conclusion b est valide par addition.

Exercice 2. On considère le raisonnement suivant.

a. L'antilope est un animal herbivore.
b. Le lion est un animal féroce.
c. Un animal féroce est carnivore.
d. Un carnivore mange un herbivore.
e. Un animal chasse ce qu'il mange.

---

f. Le lion chasse l'antilope.

Le raisonnement est-il valide ?

Résolution

Considérons les prédicats suivants :
$H(x)$: x est un herbivore.
$F(x)$: x est un animal féroce.
$C(x)$: x est un carnivore.
$M(x, y)$: x mange y.
$Ch(x, y)$: x chasse y.
Soient les constantes l : lion et a : antilope. On a
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : H(a)$
$h_2 : F(l)$
$h_3 : F(x) \to C(x)$
$h_4 : C(x) \wedge H(y) \to M(x, y)$
$h_5 : M(x, y) \to Ch(x, y)$

$Ch(l, a)$
On a :

1	$F(x) \to C(x)$	h_3
2	$F(l) \to C(l)$	*h_3 et instanciation universelle*
3	$F(l)$	h_2
4	$C(l)$	*h_2 et étape 2 et règle du modus ponens*
5	$H(a)$	h_1
6	$C(l) \wedge H(a)$	*Conjonction des étapes 4 et 5*
7	$C(x) \wedge H(y) \to M(x, y)$	h_4
8	$C(l) \wedge H(a) \to M(l, a)$	*Instanciation universelle sur la base de h_4 (étape 7)*
9	$M(l, a)$	*Étapes 6 et 8 et règle du modus ponens*
10	$M(x, y) \to Ch(x, y)$	h_5
11	$M(l, a) \to Ch(l, a)$	*Instanciation universelle sur la base de h_5 (étape 10)*
12	$Ch(l, a)$	*Étapes 9 et 11 et règle du modus ponens*

Exercice 3. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que les trois énoncés suivants sont équivalents :

a. $n \mod 5 = x$ où $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.
b. n n'est pas divisible par 5.
c. $n^4 - 5n^2 + 5 \equiv 1(\mod 5)$.

Selon la première formule, le modulo 5 de n prend les valeurs 1, 2, 3 ou 4. Les valeurs possibles du modulo 5 sont 0, 1, 2, 3 et 4. Si une quelconque valeur y est divisible par 5,alors son modulo est 0. La contraposée de cette proposition est que si le modulo 5 d'une quelconque valeur y est différent de 0, alors y n'est pas divisible par 5. Si le modulo 5 de n peut prendre toutes les valeurs possibles sauf le 0, ce qui est le cas, alors n n'est pas divisible par 5 et réciproquement. Les deux premiers énoncés sont conséquemment équivalents.
Pour prouver que le troisième énoncé est lui aussi équivalent, calculons : $n^4 - 5n^2 + 5 \equiv 1(\mod 5)$
$n^4 - 5n^2 + 5 - 1 = 5k$ où $k \in \mathbb{N}$
$n^4 - 5n^2 + 4 = 5k$
$(n^2 - 1)(n^2 - 4) = 5k$
$(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) = 5k$
$\iff 5|(n - 1) \vee 5|(n + 1) \vee 5|(n - 2) \vee 5|(n + 2)$.

$\iff$
$5|(n-1) \to (n-1) \equiv 0 (\mod 5) \to n \equiv 1 (\mod 5)$
$\vee$
$5|(n-2) \to (n-2) \equiv 0 (\mod 5) \to n \equiv 2 (\mod 5)$
$\vee$
$5|(n+2) \to (n+2) \equiv 0 (\mod 5) \to n \equiv 3 (\mod 5)$
$\vee$
$5|(n+1) \to (n+1) \equiv 0 (\mod 5) \to n \equiv 4 (\mod 5)$
$\iff$
$n \mod 5 = x$ où $x \in \{1, 2, 3, 4\}$
Cette troisième formule est donc équivalente à la première et par la preuve que nous venons de faire juste avant, à la seconde. Les trois énoncés sont conséquemment équivalents.

Exercice 4. Démontrer, en considérant chaque cas, que si x et y sont des nombres réels, alors $|x| + |y| \geq |x + y|$.
Solution
Raisonnons par cas. Trois cas sont facilement identifiables, le premier étant lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, le second lorsque $x \leq 0$ et $y \leq 0$ et le dernier lorsque les deux variables sont de signe différent. Dans ce troisième cas, peu importe si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ ou le contraire, car nous avons des opérations commutatives. x et y sont donc des variables interchangeables.
Dans le premier cas, $x \geq 0 \to |x| = x$, $y \geq 0 \to |y| = y$ et $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \to |x + y| = x + y$. On se retrouve donc en présence d'un égalité. De façon similaire, dans le second cas, $x \leq 0 \to |x| = -x$, $y \leq 0 \to |y| = -y$ et $x \leq 0 \wedge y \leq 0 \to |x + y| = -(x + y) = -x - y$. On se retrouve donc en présence d'un égalité.
Dans le dernier cas, on a que $x \geq 0 \to |x| = x$ et $y \leq 0 \to |y| = -y$. D'un bord de l'équation, on a donc que $|x| + |y| = x - y$. De l'autre, on sait que $y \leq x + y \leq x$, et donc que $|x + y| \leq |x| = x$ si $|x| \geq |y|$ et que $|x + y| \leq |y| = -y$ si $|y| \geq |x|$. On peut donc écrire :
$|x| + |y| \geq |x| \geq |x + y|$ ou $|x| + |y| \geq |y| \geq |x + y|$
$\iff |x| + |y| \geq |x + y|$ est vraie quelque soit le cas.

Exercice 5. Utilisez le raisonnement par l'absurde pour démontrer que :

a. $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier.
Solution
«$\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier» est un énoncé qui peut prendre des valeurs de vérité différentes étant donné l'entier n que l'on utilise. En effet, si on pose $n = 0$, on obtient $\sqrt{0^2 + 1} = \pm 1$ (considérons uniquement la valeur positive de la racine, puisque la négative ne sera jamais entière), et donc qu'il est possible d'obtenir un entier. «$\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier» prend donc la valeur de vérité FAUX dans ce cas. Qu'en est-il pour un autre n que zéro?
Nous avons à montrer que $n \in \mathbb{N}^* \to \sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ est entier. Pour l'entier 1 on a $\sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ n'est pas entier. Donc $n \in \mathbb{N}^* \to \sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier lorsqu'on utilise $n = 1$, ce qui confère à notre énoncé de départ la valeur de vérité VRAI.
Maintenant, si on teste plusieurs autres valeurs après le 0, on se rend compte que jamais l'énoncé de départ ne donne un entier. Essayons de généraliser cette observation. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier. Raisonnons par l'absurde, ce qui fait que nous aurons une nouvelle version de notre supposition : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ est entier. Or, nous savons que, dans le cas de deux entiers consécutifs, leurs carrés ne seront jamais deux nombres consécutifs. Cela implique que si $\sqrt{n^2} = n$ est entière car $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ ne peut pas être entière car n^2 et $n^2 + 1$ sont deux nombres consécutifs. Cette conclusion est absurde d'après notre raisonnement, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier est VRAI.

b. si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.
Solution :
Posons qu'il existe un $a_j \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tel que la moyenne des $a_1, a_2, ..., a_n$ est plus petite ou égale à a_j. Si on raisonne par l'absurde, on poserait plutôt que $\forall a_j \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, la moyenne des $a_1, a_2, ..., a_n$ est plus grande que a_j. Or, dans le cas où on choisit le a_j comme étant plus grand

ou égal à tous les autres $a_1, a_2, ..., a_n$:
$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq a_j * n$
$(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n \leq a_j * n/n$
$moyenne(a_1, a_2, ..., a_n) \leq a_j$
Or, c'est absurde, car nous avions dit que la moyenne des $a_1, a_2, ..., a_n$ devait être plus grande que a_j. On peut donc affirmer que si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.

c. aucun entier $(6n + m)(n + 6m)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, n'est une puissance de 2.
Solution :
Supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $e = (6n + m)(n + 6m)$ soit une puissance de 2.
e étant une puissance de 2, alors $(6n + m)$ et $(n + 6m)$ sont aussi des puissances de 2 et par conséquent ils sont pairs. Il s'en suit que n et m sont aussi pairs (de plus ils sont non nuls).
Posons $n = 2k$ et $m = 2t$. On a $e = (12k + 2t)(2k + 12t) = 4(6k + t)(k + 6t) = 2^2(6k + t)(k + 6t)$.
En menant le même raisonnement que précédemment, on obtient que $(6k + t)$ et $(k + 6t)$ sont des puissances de 2 et que k et t sont pairs. Le procédé pourrait donc continuer à l'infini. Ce qui prouve que e ne peut être une puissance de 2 (sinon le développement serait fini, on devrait s'arrêter à un moment donné).

Exercice 6. Utilisez la contraposée en formant une preuve indirecte pour démontrer que :

a. soit a un réel, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si $a/2$ est un entier pair, alors a^2 est un multiple entier de 16.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que $a/2$ est un entier pair.
Alors, $\exists k \in \mathbb{N}, a/2 = 2k$. Nous avons $a = 4k$ et $a^2 = 16k$. D'où a^2 est un multiple entier de 16.

b. pour un entier n quelconque, si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si n est un entier impair quelconque, alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que n peut s'écrire $(2x+1)$, où $x \in \mathbb{Z}$ est un entier. Alors, $(n^2 - 1) = 4(x^2 + x)$. Nous avons que $\forall x$, $x^2 + x$ est pair et peut donc s'écrire sous la forme $x^2 + x = 2t$ D'où $n^2 - 1 = 4 * 2t = 8t$ est divisible par 8.

2. Relations

Exercice 7. Parmi les relations suivantes de l'ensemble de tous les Canadiens,

- $\{(a, b)$, a et b ont le même âge$\}$
- $\{(a, b)$, a et b ont les mêmes parents$\}$
- $\{(a, b)$, a et b ont un parent en commun$\}$
- $\{(a, b)$, a et b parlent une même langue maternelle$\}$ — on considère une seule langue maternelle par personne

a. Lesquelles sont des relations d'équivalence?
Solution
- $\{(a, b)$, a et b ont le même âge$\}$ est une relation d'équivalence.
- $\{(a, b)$, a et b ont les mêmes parents$\}$ est une relation d'équivalence.
- $\{(a, b)$, a et b parlent une même langue maternelle$\}$ est une relation d'équivalence.

b. Pour celles qui ne sont pas des relations d'équivalence, indiquer et justifier les propriétés manquantes.
Solution
$\{(a, b)$, a et b ont un parent en commun$\}$ n'est pas transitive. En effet, a et b peuvent avoir le même père, mais pas la même mère; b et c peuvent avoir la même mère, mais pas le même père. Dans ce cas-là, a est en relation avec b, et b est en relation avec c, mais a n'est pas en relation avec c.

c. Pour celles qui sont des relations d'équivalence, indiquer les classes d'équivalences respectives.
Solution

- $\{(a,b),\ a$ et b ont le même âge$\}$: chaque âge est une classe d'équivalence. On a donc l'ensemble des $\mathbb{N}$.
- $\{(a,b),\ a$ et b ont les mêmes parents$\}$: l'ensemble des enfants de mêmes parents est une classe d'équivalence.
- $\{(a,b),\ a$ et b parlent une même langue maternelle$\}$: chaque langue parlée comme langue maternelle est une classe d'équivalence.

Exercice 8. Soit $E = \{5,6,7,8\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d)\ si\ (a+c)\ est\ pair\ et\ (b-d)\ est\ divisible\ par\ 3$$

a. Donner le cardinal de $E \times E$. 16
b. Donner la matrice de $\mathcal{R}$. Pour construire la matrice, il faut considérer que :
(5,5) est relation avec les couples suivants : (5,5), (5,8), (7,5), (7,8).
(5,6) est relation avec les couples suivants : (5,6), (7,6).
(5,7) est relation avec les couples suivants : (5,7), (7,7).
(5,8) est relation avec les couples suivants : (5,5), (5,8), (7,5), (7,8).
(6,5) est relation avec les couples suivants : (6,5), (6,8), (8,5), (8,8).
(6,6) est relation avec les couples suivants : (6,6), (8,6).
(6,7) est relation avec les couples suivants : (6,7), (8,7).
(6,8) est relation avec les couples suivants : (6,5), (6,8), (8,5), (8,8).
(7,5) est relation avec les couples suivants : (5,5), (5,8), (7,5), (7,8).
(7,6) est relation avec les couples suivants : (5,6), (7,6).
(7,7) est relation avec les couples suivants : (5,7), (7,7).
(7,8) est relation avec les couples suivants : (5,5), (5,8), (7,5), (7,8).
(8,5) est relation avec les couples suivants : (6,5), (6,8), (8,5), (8,8).
(8,6) est relation avec les couples suivants : (6,6), (8,6).
(8,7) est relation avec les couples suivants : (6,7), (8,7).
(8,8) est relation avec les couples suivants : (6,5), (6,8), (8,5), (8,8).
c. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.Vérifier que les trois propriétés sont vérifiées.
d. Donner le nombre total et la liste des différentes classes d'équivalence. On désigne par $\overline{(a,b)}$, la classe d'équivalence de (a,b).
Il y a six classes d'équivalence.
$\{(5,5),(5,8),(7,5),(7,8)\}$
$\{(5,6),(7,6)\}$
$\{(5,7),(7,7)\}$
$\{(6,5),(6,8),(8,5),(8,8)\}$
$\{(6,7),(8,7)\}$
$\{(6,6),(8,6)\}$
e. Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(5,5)}$, $\overline{(5,6)}$, $\overline{(5,7)}$.Compter.

Exercice 9. Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$ par

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \iff (x,y) = (x',y') \text{ ou } y \leq x'$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E. Cette relation d'ordre est-elle totale ?
$\preccurlyeq$ est réflexive et transitive (trivial).
Antisymétrie : si $(x,y) \preccurlyeq (x',y')$ et $(x',y') \preccurlyeq (x,y)$ alors $(x,y) = (x',y')$ ou $x \leq y \leq x' \leq y' \leq x$, donc $(x,y) = (x,x) = (x',y')$ Il est clair que cette relation d'ordre est totale.

Exercice 10. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E à la fois réflexive et transitive.
On définit les nouvelles relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par:

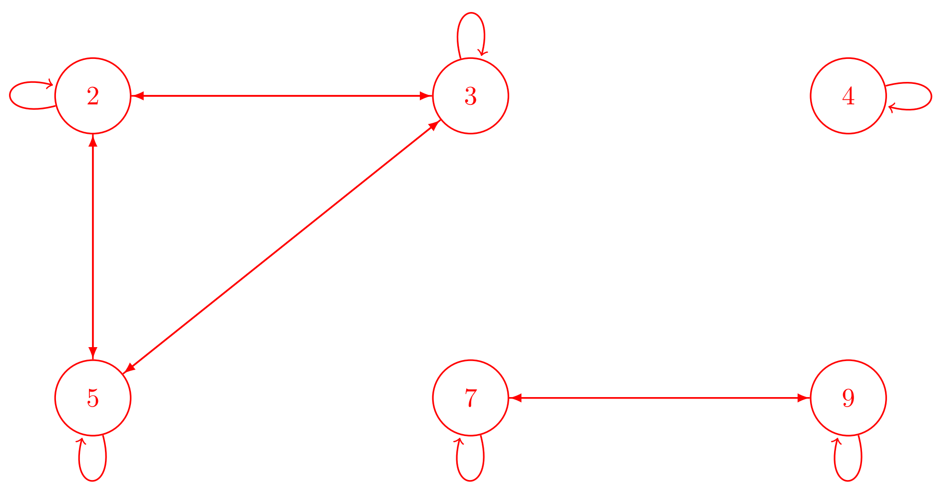
$$x\mathcal{S}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \text{ et } x\mathcal{T}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

Les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont-elles des relations d'équivalence?
$\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont réflexives et symétriques (trivial).
Transitivité : soient $x,y,z \in E$.

- $\mathcal{S}$: On suppose que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$.
  Ceci implique que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, donc $x\mathcal{R}z$ (par transitivité de $\mathcal{R}$)
  De même, $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y \implies z\mathcal{R}x$
  Donc $\mathcal{S}$ est transitive, c'est donc une relation d'équivalence.
- $\mathcal{T}$: on se doute que c'est faux. Construisons un contre-exemple :
  Posons $E = \{0, 1, 2\}$ et $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2), (0, 2)\}$.
  On a $2\mathcal{T}0$ (car $0\mathcal{R}2$) et $0\mathcal{T}1$ (car $0\mathcal{R}1$).
  Mais pas $2\not\mathcal{T}1$ (on n'a ni $2\mathcal{R}1$ ni $1\mathcal{R}2$).
  Donc $\mathcal{T}$ n'est pas transitive et n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice 11. Soit $E = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.
Soit $\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (7, 7), (7, 9), (9, 7), (9, 9)\}$.

(1) Représenter $\mathcal{R}$ par un graphe.
(2) $\mathcal{R}$ forme-t-elle une partition de E ?



Oui (deux possibilités : en montrant que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, ou en écrivant cette partition.)

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 10 (pages 10) ; 11 à 19 (pages 17) ; 28, 41, 44, 45, 46, 47(pages 171).