LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

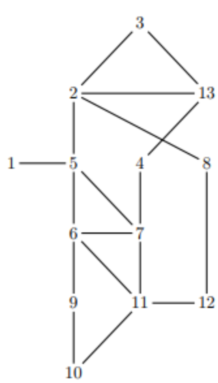
TD 6 : CHAÎNES, CYCLES ET ARBRES
CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 1. Montrer que pour un graphe T à n sommets les propriétés suivantes sont équivalentes :

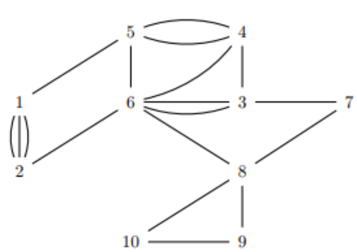
(1) T est un arbre
(2) Test un graphe connexe à $n-1$ arêtes
(3) T est connexe, et la suppression de toute arête le déconnecte
(4) T est acyclique à n-1 arêtes
(5) T est acyclique et l'ajout de toute arête le rend cyclique.

Solution
Pour montrer l'équivalence entre ces 5 propriétés, le plus simple est d'établir une série d'implications.
(1) $\Longrightarrow$ (2) : Le graphe T étant à la fois connexe et acyclique, il possède exactement $n-1$ arêtes. (cf propriété des graphes connexes et propriété des graphes acycliques).
(2) $\Longrightarrow$ (3) : La suppression d'une arête de T donne un graphe à $n-2$ arêtes : il ne peut être connexe (cf propriété des graphes connexes).
(3) $\Longrightarrow$ (4) : Par l'absurde si T possèdait un cycle, la suppression d'une arête de ce cycle ne saurait le déconnecter. Par suite T est acyclique. Puisqu'il est également connexe, il possède donc exactement $n-1$ arêtes.
(4) $\Longrightarrow$ (5) : L'ajout d'une arête à T donne un graphe à n arêtes : il ne peut être acyclique (cf propriété des graphes acycliques).

Exercice 2. Le graphe (a) admet-il une chaîne eulérienne ? Si oui, déterminez-en une.
Le graphe multigraphe (b) admet-il un cycle eulérien ? Si oui, déterminez-en un.



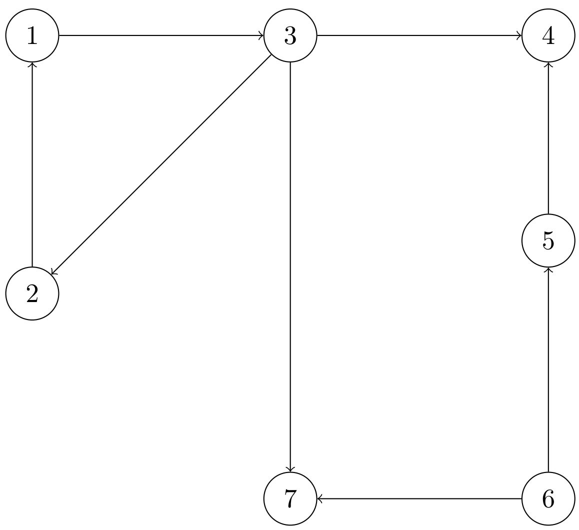
(a)



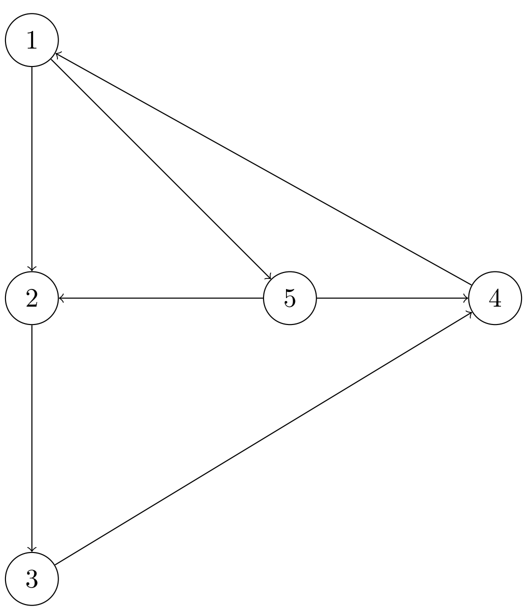
(b)

Solution:
(a) : Oui : 13-2-3-13-4-7-11-12-8-2-5-7-6-11-10-9-6-5-1
(b) : Oui : 1-5-4-5-6-4-3-7-8-9-10-8-6-3-6-2-1-2-1

Exercice 3. Les graphes ci-dessous admettent-ils des circuits eulériens ? des circuits hamiltoniens ? des cycles eulériens ? des cycles hamiltoniens ?



(a)



(b)
Solution
(a):Pas de circuit eulérien, mais un cycle eulérien. Ni circuit ni cycle hamiltoniens.
(b): Circuit hamiltonien : 4-1-5-2-3-4 (et donc il y a un cycle). Ni circuit ni cycle eulériens.

Exercice 4. Soit le graphe G_0 qui admet pour matrice (d'adjacence) M_0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

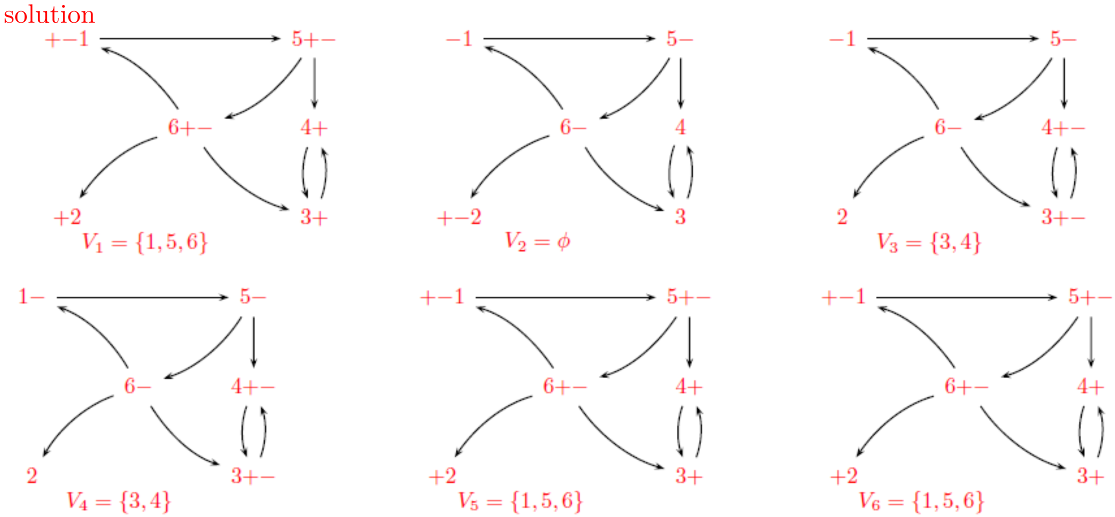
L'algorithme suivant permet de trouver la composante fortement connexe d'un sommet noté x_0 :

- Marquer x_0 avec les signes (+) et (-);
- Marquer du signe (+) tout successeur non encore marqué (+) d'un sommet marqué (+) ;
- Marquer du signe (-) tout prédécesseur non encore marqué (-) d'un sommet marqué (-) ;
- Quand on ne peut plus marquer de sommet, les sommets marqués (+) et (-) constituent la composante fortement connexe de x_0.

QUESTIONS

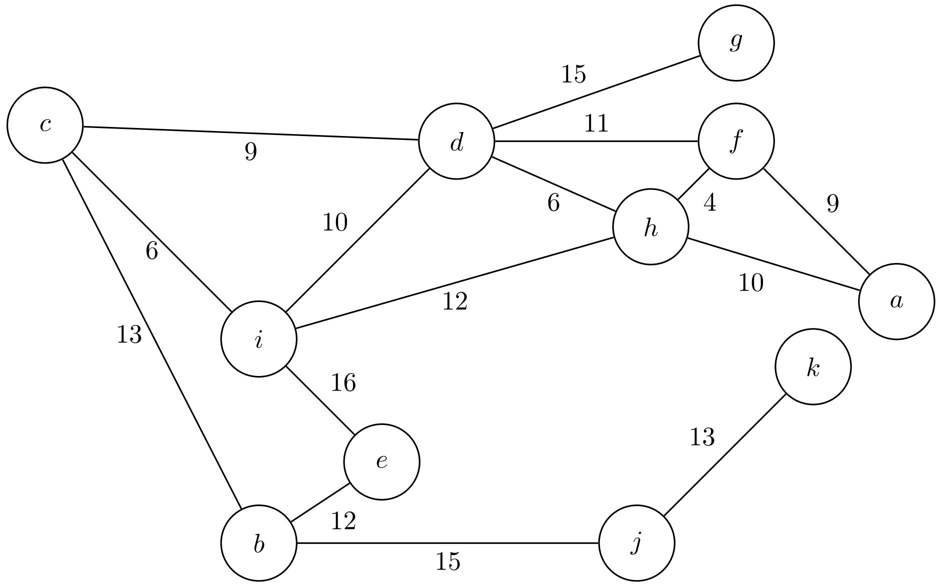
(1) Dessiner le graphe G_0
(2) Utilisez l'algorithme ci-dessus pour trouver toutes les composantes fortement connexes du graphe G_0.

solution



Il est à noter qu'on peut débuter l'algorithme de n'importe quel sommet x_0 afin de retrouver la composante fortement connexe de x_0, et que si on débute une deuxième fois l'algorithme par un sommet x_1 qui ne fait pas partie de la composante fortement connexe de x_0, on trouvera une autre composante fortement connexe dans laquelle x_1 est inclus.

Exercice 5. Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe suivant afin de trouver le plus court chemin du sommet a au sommet k.



Solution :

(1) $S = \{a\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (af, 9)\}$, le reste étant toujours à l'infini.

(2) $S = \{a, f\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (afd, 20), (afh, 13)\}$

(3) $S = \{a, f, h\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahd, 16), (ahi, 22)\}$

(4) $S = \{a, f, h, d\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$

(5) $S = \{a, f, h, d, i\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$

(6) $S = \{a, f, h, d, i, c\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(7) $S = \{a, f, h, d, i, c, g\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(8) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcb, 38)\}$

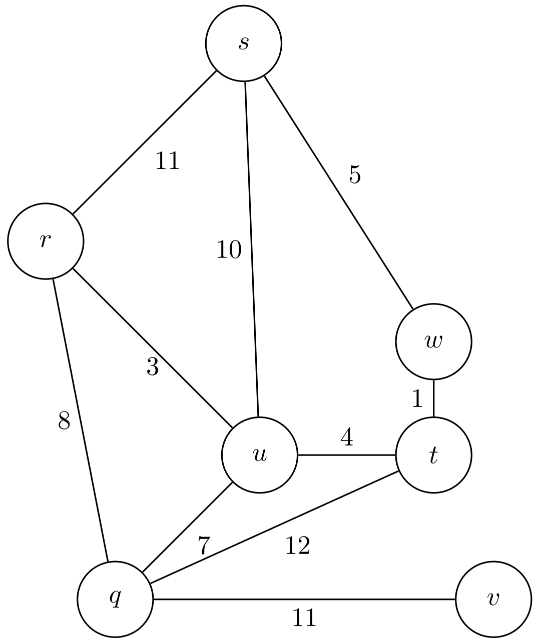
(9) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbj, 53)\}$

(10) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 53)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbjk, 66)\}$

(11) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j, k\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 53), (ahdcbjk, 66)\}$

Chemins connus : $C = \{\}$
L'algorithme s'arrête ici en raison de l'apparition du sommet visé dans l'ensemble des sommets connus S. Si on consulte le chemin emprunté pour s'y rendre, on obtient la suite des sommets a, h, d, c, b, j, k pour une distance minimale de 66.

Exercice 6. Appliquez l'algorithme de Floyd au graphe suivant afin de trouver la longueur du chemin minimal du sommet s au sommet v.



Solution : 28
Conseil : Implémenter l'algorithme parce qu'il n'est pas agréable à faire à la main.
Liste des distances initiale :
d(q, r) = 8,
d(q, s) = infinie,
d(q, t) = 12,
d(q, u) = 7,
d(q, v) = 11,
d(q, w) = infinie,
d(r, s) = 11,
d(r, t) = infinie,
d(r, u) = 3,
d(r, v) = infinie,
d(r, w) = infinie,
d(s, t) = infinie,
d(s, u) = 10,
d(s, v) = infinie,
d(s, w) = 5,
d(t, u) = 4,
d(t, v) = infinie,
d(t, w) = 1,
d(u, v) = infinie,
d(u, w) = infinie,
d(v, w) = infinie.
Première itération; entre q et r.
Il n'y a pas de chaîne plus courte.
Deuxième itération; entre q et s.
On a le choix d'une chaîne plus courte en passant par r (8+11 < infini) ou u (7+10 < infini). Les autres

sont infiniment loin de s ou de q. Celle avec u est plus courte et sera retenue.
Troisième itération; entre q et t.
La chaîne la plus courte passe par u ou directement entre q et t. Les autres sont infiniment loin de q ou t. Celle par u est de longueur 11 et celle directe est de longueur 12. Celle par u est plus courte et sera retenue.
...

Exercice 7. Un arbre m-aire complet M avec $m = 5$ a exactement :

a. $n = 21$ sommets. Combien a-t-il de feuilles? 17
b. $i = 12$ sommets internes. Combien a-t-il de sommets? 61
c. $l = 129$ feuilles. Combien a-t-il de sommets internes? 32

Exercice 8. Jeux avec les expressions arithmétiques :

a. Calculer la valeur des expressions suivantes, avec A = 1, B = 2, C = 2, D = 3 et E=4.
 a.a. Posfixées : $ABC + *CDE + \uparrow -$; $ADBCD * - + *$ -124 et -1
 a.b. Préfixées : $- * +ABC - DB$; $*A + D - B * CD$ 5 et -1
b. Dessiner l'arbre binaire représentant l'expression suivante et donnez-en une forme préfixe, infixe et postfixe : (A*B-C/D+E) + (A-B-C-D*D)/(A+B+C)
 Parcours :
 Préfixe : ++-*AB/CDE/—ABC*DD++ABC
 Infixe : A*B-C/D+E+A-B-C-D*D/A+B+C
 Postfixe : AB*CD/-E+AB-C-DD*-AB+C+/+

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 45, 46, 61 (page 440) ; 14, 20, 21, 22 (page 450) ; 22, 23 (page 464) ; 15, 16 (page 486) ; 16, 17, 18 (page 496) ; 38, 40 (page 502) ; 39, 40, 41 (page 574).