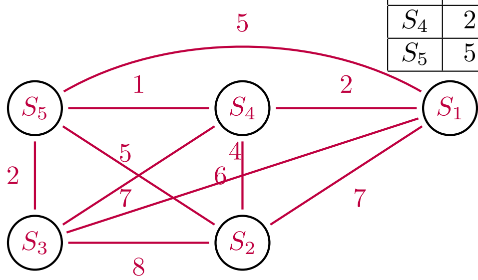
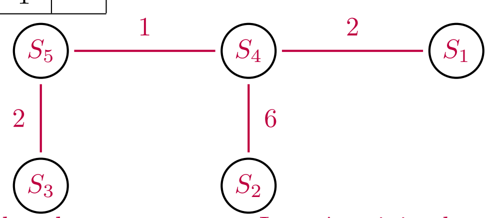
TD 7 : GRAPHES - DÉNOMBREMENTS
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

Exercice 1. Appliquer l'algorithme de Prim aux données du tableau ci-après pour trouver le coût minimal.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1					
S_2	7				
S_3	4	8			
S_4	2	6	5		
S_5	5	7	2	1	

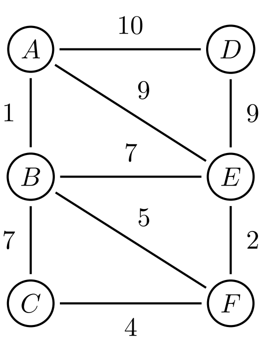


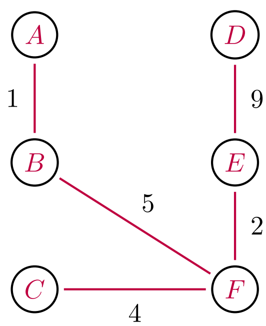
Graphe initial.



Arbre de recouvrement. Le coût minimal est 11.

Exercice 2. Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe pondéré ci-après.





Exercice 3. Une compagnie désire installer au moindre coût un réseau de transmission de données entre son siège et 7 de ces succursales numérotées S_1, S_2, ..., S_7. Le coût d'une ligne entre deux agences est donnée par le tableau suivant :

1. Appliquer Prim pour trouver le coût minimal du projet.
2. Appliquer Kruskal pour trouver le coût minimal du projet.
3. Comparer les deux solutions.

TABLE 1. Coût d'installation d'un réseau de transmission

	Siège	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	5						
S_2	18	17					
S_3	9	11	27				
S_4	13	7	23	20			
S_5	7	12	15	15	15		
S_6	38	38	20	40	40	35	
S_7	22	15	25	25	30	10	45

Exercice 4. *Parcours d'arbres*

1. Calculer la valeur des expressions suivantes, avec A = 2, B = 2, C = 3, D = 4 et E=1.
   1.1. Posfixées : ABC**CDE+/- ; ADBCD*-+*
   1.2. Prefixées : -*+ABC/DB ; *A+D-B*CD
2. Dessiner l'arbre binaire représentant l'expression suivante et donnez-en une forme préfixe et une forme postfixe : (A*B-C/D+E) + (A-B-C-D*D)/(A+B+C)

Exercice 5. Résoudre les relations de récurrence suivantes :

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$
   Réponse : $a_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$
   Réponse : $a_n = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
3. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$
4. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 6a_{n-3}$; $a_0 = 1$, $a_1 = -4$ et $a_2 = -4$
5. $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$
   Réponse : $a_n = (2 + \frac{3n}{2}) \times 2^n - 2 \times 3^n$

Exercice 6. Donner un ordre de grandeur asymptotique pour $T(n)$.

1. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$. Réponse : $O(n^3)$
2. $T(n) = 8T(n/2) + n^2$. Réponse : $O(n^3)$
3. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note : $\sum_n^p$ le nombre de n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$.

1. Déterminer $\sum_n^0$, $\sum_n^1$, $\sum_n^2$, $\sum_1^p$, $\sum_2^p$.
   - $\sum_n^0 = 1$. Le seul n-uplet dont la somme des termes est zéro est : (0).
   - $\sum_n^1 = n$. Les n-uplets contiennent $n-1$ fois le chiffre 0 et seul chiffre 1. Il y a n façons de positionner le chiffre 1 dans un n-uplet.
   - $\sum_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Les n-uplets contiennent un seul chiffre 2 et $n-1$ zéros ou deux fois le chiffre 1 et $n-2$ zéros. Il y a n façons de positionner le chiffre 2 dans un n-uplet et il y a $C(n,2) = \frac{n(n-1)}{2}$ façons de positionner deux fois le chiffre 1 dans un n-uplet. Le nombre recherché est donc $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
   - $\sum_1^p = 1$. On a (x_1) tel que $x_1 = p$. Le seul n-uplet possible est (p).
   - $\sum_2^p = p+1$. On a (x_1, x_2) tel que $x_1 + x_2 = p$. Soit $x_2 = p - x_1$ et $(x_1, x_2) = (x_1, p - x_1)$. Il y a $p+1$ façons de choisir x_1, soit $x_1 \in \{0, \ldots, p\}$
   .
2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \cdots + \sum_n^p$
   - Par définition, $\sum_{n+1}^p$ est le nombre de $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = p$. C'est donc le nombre de n-uplets tels $x_1 + x_2 + ... + x_n = p - x_{n+1}$, soit $\sum_n^{p-x_{n+1}}$ (par définition).
   On a $x_{n+1} \in \{0, \ldots, p\}$, donc $p+1$ choix possibles de x_{n+1}.

Par suite, $\sum_{n+1}^{p} = \sum_{n}^{p-0} + \sum_{n}^{p-1} + \cdots + \sum_{n}^{p-(p-1)} + \sum_{n}^{p-p}$. D'où la relation.

- Il est également possible de démontrer la relation par récurrence en montrant le cas de base comme suit :
  $\sum_{1}^{0} + \sum_{1}^{1} + \cdots + \sum_{1}^{p} = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{(p+1)fois} = p+1$ car $\sum_{1}^{k} = 1$ avec comme seul uplet (k). De plus on a $\sum_{2}^{p} = p+1$ (question 1). Donc $\sum_{2}^{p} = \sum_{1}^{0} + \sum_{1}^{1} + \cdots + \sum_{1}^{p}$.

3. En déduire que $\sum_{n}^{p} = C(n+p-1,p)$
   Preuve par induction :
   $\sum_{1}^{p} = 1 = C(p,p) = C(1-1+p,p)$. La relation est vraie pour $n=1$.
   Supposons que $\sum_{n}^{p} = C(n+p-1,p)$ pour n quelconque ($n \geq 1$).
   $\sum_{n+1}^{p} = \sum_{n}^{0} + \sum_{n}^{1} + \sum_{n}^{2} + \cdots + \sum_{n}^{p}$ (d'après la question 2)
   $\sum_{n+1}^{p} = C(n+0-1,0) + C(n+1-1,1) + C(n+2-1,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   $\sum_{n+1}^{p} = C(n-1,0) + C(n,1) + C(n+1,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   C(n-1,0)=C(n,0) donc $\sum_{n+1}^{p} = (C(n,0) + C(n,1)) + C(n+1,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   $\sum_{n+1}^{p} = (C(n+1,1) + C(n+1,2)) + \cdots + C(n+p-1,p)$ car C(n,0) + C(n,1)=C(n+1,1)
   $\sum_{n+1}^{p} = C(n+2,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   De proche en proche on a $\sum_{n+1}^{p} = C(n+p-2,p-1) + C(n+p-1,p)$
   d'où $\sum_{n+1}^{p} = C(n+p,p)$
   On peut donc conclure que $\sum_{n}^{p} = C(n+p-1,p)$.

Exercice 8. Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = Card\ A$.

1. Combien y-a-t-il de parties X de E contenant A ?
   - Premier raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A peut avoir $p, p+1, p+2, \ldots, n$ éléments. Ainsi, si X contient A et a $(p+k)$ éléments avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$, les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E - A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p,k)$.
     Le nombre de parties X de E contenant A est alors :
     $\sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 1^k \times 1^{n-p-k} = (1+1)^{n-p} = 2^{n-p}$
   - Deuxième raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A est obtenue par la réunion de A et d'un sous-ensemble de $E - A$. Les sous-ensemble de $E - A$ constitutent son ensemble des parties $\mathcal{P}(E-A)$. Le nombre de sous ensembles de $E - A$ est donc 2^{n-p}, avec $Card(E-A) = n-p$. Donc la réponse cherchée est : 2^{n-p}.

2. Combien y-a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A, $m \in \{p, \ldots, n\}$?
   On a $m = p+k$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$. Les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E - A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p,k)$.
   D'où le nombre de parties X de E à m éléments contenant A est alors : $C(n-p, m-p)$

3. Combien y-a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?
   Les éléments de $E - A$ qui s'ajoutent à A pour former X sont distincts de ceux qui s'ajoutent à A pour former Y car $X \cap Y = A$. Si X contient m éléments incluant ceux de A ($C(n-p, m-p)$ possibilités), alors Y peut contenir jusqu'à $(n-m)$ éléments en plus de ceux de A. On a donc $\sum_{i=0}^{n-m} C(n-m,i) = \sum_{k=0}^{n-m} C(n-m,k)1^i 1^{n-m-i} = (1+1)^{n-m} = 2^{n-m}$ possibilités de constitution de Y connaissant les m éléments de X.
   Le nombre de couples (X,Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$ est alors :
   $\sum_{m=p}^{n} C(n-p,m-p) \times 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{n-(k+p)} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{(n-p)-k} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{(n-p)-k} \times 1^k = (2+1)^{n-p} = 3^{n-p}$

Exercice 9. Soit la relation : $k \times C(n,k) = n \times C(n-1,k-1)$

1. Démontrez la relation.
   $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times k(k-1)!}$.
   En multipliant les deux membres par k puis en simplifiant le membre de gauche par k on a:
   $k \times C(n,k) = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k-1+1)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]! \times (k-1)!} = n \times C(n-1,k-1)$

2. En déduire pour tout entier positif n, la somme :
   $$C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$$
   $C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$
   $= n \times C(n-1,1-1) + n \times C(n-1,2-1) + \cdots + n \times C(n,k-1) + \cdots + n \times C(n-1,n-1)$
   $= n(C(n-1,0) + C(n-1,1) + \cdots + C(n,k-1) + \cdots + C(n-1,n-1))$
   $= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i)$
   $= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i) \times 1^i \times 1^{n-1-i}$
   $= n \times (1+1)^{n-1}$
   $= n \times 2^{n-1}$

3. En déduire pour tout entier positif non nul n, la somme :
   $$C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$$
   $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
   $= (2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   Or $2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n) = n \times 2^{n-1} - C(n,1)$,
   donc $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
   $= n \times 2^{n-1} - C(n,1) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} - (C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} + C(n,0) - (C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} + 1 - 2^n$
   $= 1 + (n-2) \times 2^{n-1}$

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 13, 20, 21, 32, 39 (Pages 300-301) ; 8, 18 (Page 308) ; 11, 17 (Page 331).