LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 3 : RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE - RELATIONS
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Exercice 1. On considère le raisonnement suivant.

a. S'il fait beau, je vais nager.
b. Si la piscine est fermée, je ne peux pas nager.
c. Lorsque l'équipe d'entretien travaille, la piscine est fermée.
d. l'équipe d'entretien travaille et il fait beau.

---

e. Je ne vais pas nager.

Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions. Le raisonnement est-il valide ?

Exercice 2. On considère le raisonnement suivant.

a. L'antilope est un animal herbivore.
b. Le lion est un animal féroce.
c. Un animal féroce est carnivore.
d. Un carnivore peut manger un herbivore.
e. Un animal chasse ce qu'il mange.

---

f. Le lion chasse l'antilope.

Le raisonnement est-il valide ?
Résolution
Considérons les prédicats suivants :
$H(x)$: x est un herbivore.
$F(x)$: x est un animal féroce.
$C(x)$: x est un carnivore.
$M(x, y)$: x mange y.
$Ch(x, y)$: x chasse y.
Soient les constantes l : lion et a : antilope. On a
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : H(a)$
$h_2 : F(l)$
$h_3 : F(x) \rightarrow C(x)$
$h_4 : C(x) \land H(y) \rightarrow M(x, y)$
$h_5 : M(x, y) \rightarrow Ch(x, y)$

$Ch(l, a)$

On a :

1	$F(x) \rightarrow C(x)$	h_3
2	$F(l) \rightarrow C(l)$	h_3 *et instanciation universelle*
3	$F(l)$	h_2
4	$C(l)$	h_2 *et étape* 2 *et règle du modus ponens*
5	$H(a)$	h_1
6	$C(l) \wedge H(a)$	*Conjonction des étapes* 4 *et* 5
7	$C(x) \wedge H(y) \rightarrow M(x, y)$	h_4
8	$C(l) \wedge H(a) \rightarrow M(l, a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_4 (*étape* 7)
9	$M(l, a)$	*Étapes* 6 *et* 8 *et règle du modus ponens*
10	$M(x, y) \rightarrow Ch(x, y)$	h_5
11	$M(l, a) \rightarrow Ch(l, a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_5 (*étape* 10)
12	$Ch(l, a)$	*Étapes* 9 *et* 11 *et règle du modus ponens*

Exercice 3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $n^3 - n$ est divisible par 6

   Solution

   Première méthode

   $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$

   $n^3 - n$ est le produit de 3 entiers consécutifs. Donc au moins un de ces entiers est pair, ce qui implique que $n^3 - n$ est pair. De plus, au moins un de ces entiers est multiple de 3, ce qui implique que $n^3 - n$ est divisible par 3.

   $n^3 - n$ est divisible à la fois par 2 et 3. Il est alors divisible par 6.

   Deuxième méthode

   On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, n \ mod \ 6 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   - Si $n \ mod \ 6 = 0$, alors $n^3 mod \ 6 = 0$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 1$, alors $n^3 mod \ 6 = 1$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 2$, alors $n^3 mod \ 6 = 2$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 3$, alors $n^3 mod \ 6 = 3$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 4$, alors $n^3 mod \ 6 = 4$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 5$, alors $n^3 mod \ 6 = 5$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$

   En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 6.
2. $n^5 - n$ est divisible par 30
3. $n^7 - n$ est divisible par 42

Exercice 4. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
- soit $n \times m$ est pair,
- soit $n^2 - m^2$ est multiple de 8.

Solution

Soient P et Q les propositions : "$n \times m$ est pair" et "$n^2 - m^2$ est multiple de 8", respectivement. L'exercice revient à montrer que $P \vee Q$ est vrai.

Raisonnons par cas.

En se basant sur la parité des entiers n et m, quatre cas sont à considérer : n pair et m pair, n pair et m impair, n impair et m pair, n impair et m impair.

Si n est pair ou m est pair, alors $n \times m$ est pair. Donc dans les 3 premiers cas (n pair et m pair, n pair et m impair, n impair et m pair) la proposition P est vrai. Il s'en suit que $P \vee Q$ est vrai.

Il ne reste à considérer que le cas n impair et m impair.

On a:

$\forall k \in \mathbb{Z}, k$ impair $\rightarrow$ $k \ mod \ 8 \in \{1, 3, 5, 7\}$

$k \ mod \ 8 \in \{1, 3, 5, 7\}$ $\rightarrow$ $k^2 \ mod \ 8 = 1$

Puis que n est impair et m est impair, on a $n^2 \ mod \ 8 = 1$ et $m^2 \ mod \ 8 = 1$

Par suite, $(n^2 - m^2 \ mod \ 8) = 0$, c'est à dire $(n^2 - m^2)$ est multiple de 8. Q est donc vrai. Il s'en suit que $P \vee Q$ est vrai.

Exercice 5. Démontrer pour tout entier naturel n, on a $n^2 + 3n$ qui est un entier pair.

Exercice 6. En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer qu'aucun entier $(6n + m)(n + 6m)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, n'est une puissance de 2.

Solution :

Supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $e = (6n + m)(n + 6m)$ soit une puissance de 2.
e étant une puissance de 2, alors $(6n + m)$ et $(n + 6m)$ sont aussi des puissances de 2 et par conséquent ils sont pairs. Il s'en suit que n et m sont aussi pairs (de plus ils sont non nuls).
Posons $n = 2k$ et $m = 2t$. On a $e = (12k + 2t)(2k + 12t) = 4(6k + t)(k + 6t) = 2^2(6k + t)(k + 6t)$.
En menant le même raisonnement que précédemment, on obtient que $(6k+t)$ et $(k+6t)$ sont des puissances de 2 et que k et t sont pairs. Le procédé pourrait donc continuer à l'infini. Ce qui prouve que e ne peut être une puissance de 2 (sinon le développement serait fini, on devrait s'arrêter à un moment donné).

Exercice 7. En utilisant le raisonnement par contraposée (preuve indirecte) démontrer que :
Soit a un réel. Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.

Solution

La contraposée s'écrit : si $a/2$ est un entier pair, alors a^2 est un multiple entier de 16.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que $a/2$ est un entier pair. Alors, $\exists k \in \mathbb{N}, a/2 = 2k$. Nous avons $a = 4k$ et $a^2 = 16k$. D'où a^2 est un multiple entier de 16.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier.

Solution

Nous avons à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier. Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^2 + 1}$ est entier.
On sait que $n^2 < n^2 + 1 < (n + 1)^2$. Donc en passant à la racine carrée, $n < \sqrt{n^2 + 1} < n + 1$ c'est-à-dire que $\sqrt{n^2 + 1}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est absurde.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

Solution : Preuve indirecte

Montrons la contraposée, soit que si n n'est pas un nombre premier, alors $2^n - 1$ n'est pas un nombre premier.
Supposons que n n'est pas un nombre premier et montrons $2^n - 1$ n'est pas un nombre premier et qu'il peut s'exprimer sous forme de produits de facteurs autres que 1 lui-même.
n étant supposé ne pas être un nombre premier, on a : $\exists p, q \in \mathbb{N}, p \neq 1, q \neq 1, p \neq n, q \neq n, n = pq$
$2^n - 1 = 2^{pq} - 1$
$$2^n - 1 = (2^p - 1) \underbrace{\left[(2^p)^{(q-1)} + (2^p)^{(q-2)} + ... + (2^p)^2 + 2^p + 1)\right]}_{q\ termes}$$
$p \neq 1$ alors $2^p \neq 2$ donc $2^p - 1 \neq 1$. De plus, $p \neq n$ alors $2^p \neq 2^n$ donc $2^p - 1 \neq 2^n - 1$
On en déduit que $2^n - 1$ est divisible par $2^p - 1$ qui est autre que 1 et $2^n - 1$.
$2^n - 1$ n'est donc pas premier. La contraposée étant vrai, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

2. Relations

Exercice 10. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d)\ si\ (a - c)\ est\ pair\ et\ (b - d)\ est\ divisible\ par\ 3$$

1. Donner le cardinal de $E \times E$. 16
2. Donner la matrice de $\mathcal{R}$.
   Pour construire la matrice, il faut considérer que :
   (1,1) est relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
   (1,2) est relation avec les couples suivants : (1,2), (3,2).

(1,3) est relation avec les couples suivants : (1,3), (3,3).
(1,4) est relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(2,1) est relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(2,2) est relation avec les couples suivants : (2,2), (4,2).
(2,3) est relation avec les couples suivants : (2,3), (4,3).
(2,4) est relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(3,1) est relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(3,2) est relation avec les couples suivants : (1,2), (3,2).
(3,3) est relation avec les couples suivants : (1,3), (3,3).
(3,4) est relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(4,1) est relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(4,2) est relation avec les couples suivants : (2,2), (4,2).
(4,3) est relation avec les couples suivants : (2,3), (4,3).
(4,4) est relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).

3. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
4. Donner le nombre total et la liste des différentes classes d'équivalentes. On désigne par $\overline{(a,b)}$, la classe d'équivalence de (a,b).
   Il y a six classes d'équivalence.
   $\{(1,1),(1,4),(3,1),(3,4)\}$
   $\{(1,2),(3,2)\}$
   $\{(1,3),(3,3)\}$
   $\{(2,1),(2,4),(4,1),(4,4)\}$
   $\{(2,3),(4,3)\}$
   $\{(2,2),(4,2)\}$
5. Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(1,1)}$, $\overline{(1,2)}$, $\overline{(1,3)}$.
6. Soit $b \in E$. Montrer que si $(x,y) \in \overline{(1,b)}$, alors $(x+1,y) \in \overline{(2,b)}$.
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ (x-1)$ *est pair et* $(y-b)$ *est divisible par* 3
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ (x-1+2-2)$ *est pair et* $(y-b)$ *est divisible par* 3
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ ((x-1+2)-2)$ *est pair et* $(y-b)$ *est divisible par* 3
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ ((x+1)-2)$ *est pair et* $(y-b)$ *est divisible par* 3
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ (x+1,y)\ \mathcal{R}\ (2,b)$
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ (x+1,y) \in \overline{(2,b)}$

Exercice 11. Soit l'ensemble $\mathcal{A}$ dont les éléments sont :

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

On définit la relation $\mathcal{R}$ suivante : $X\,\mathcal{R}Y \Leftrightarrow det(X) = det(Y)$, avec $det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = ad - bc$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.
2. Donner la partition de $\mathcal{A}$ définie par $\mathcal{R}$.
   Soit :

   $M_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $M_5 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

   $M_6 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

   La partition est : $\{\{M_1, M_4\}, \{M_2, M_3, M_5, M_6\}\}$

Exercice 12. Parmi les relations suivantes de l'ensemble de tous les habitants de la planète Terre,

- $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ le\ même\ âge\}$

- $\{(a, b),\ a\ et\ b\ ont\ les\ mêmes\ parents\}$
- $\{(a, b),\ a\ et\ b\ ont\ un\ parent\ en\ commun\}$
- $\{(a, b),\ a\ et\ b\ parlent\ une\ même\ langue\}$

1. Lesquelles sont-elles des relations d'équivalence ?
   Solution
   - $\{(a, b),\ a\ et\ b\ ont\ le\ même\ âge\}$ est une relation d'équivalence.
   - $\{(a, b),\ a\ et\ b\ ont\ les\ mêmes\ parents\}$ est une relation d'équivalence.
   - $\{(a, b),\ a\ et\ b\ parlent\ une\ même\ langue\}$ est une relation d'équivalence. On considère que chacun parle une seule langue.
2. Pour celles qui ne sont pas des relations d'equivalence, indiquer et justifier les propriétés qui manquent.
   Solution
   $\{(a, b),\ a\ et\ b\ ont\ un\ parent\ en\ commun\}$ n'est pas transitif.
3. Pour celles qui sont des relations d'equivalence, indiquer les classes d'équivalence respectives.
   Solution
   - $\{(a, b),\ a\ et\ b\ ont\ le\ même\ âge\}$ Chaque âge est une classe d'équivalence : $1, 2, ..., n$. L'ensemble des classes est donc $\mathbb{N}$.
   - $\{(a, b),\ a\ et\ b\ ont\ les\ mêmes\ parents\}$. L'ensemble des enfants de mêmes parents est une classe d'équivalence.
   - $\{(a, b),\ a\ et\ b\ parlent\ une\ même\ langue\}$. Chaque groupe linguistique est une classe d'équivalence.

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 10 (pages 10) ; 11 à 19 (pages 17) ; 28, 41, 44, 45, 46, 47(pages 171).