LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

**TD 8 : DÉNOMBREMENTS**
**CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES**

**Exercice 1.** Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 600 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5 ?
$600 - \lfloor \frac{600}{2} \rfloor - \lfloor \frac{600}{3} \rfloor - \lfloor \frac{600}{5} \rfloor + \left\lfloor \frac{600}{2\times 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{600}{2\times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{600}{3\times 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{600}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 160$

**Exercice 2.** A l'aide des chiffres : 2, 3, 5, 7, 9 :

1. combien de nombres de trois chiffres peut-on former ? Réponse : $5^3$
2. combien de ces nombres sont inférieurs à 500 ? Réponse : $2 \times 5^2$
3. combien de ces nombres sont supérieurs à 700 ? Réponse : $2 \times 5^2$
4. combien de ces nombres sont pairs ? Réponse : $5^2 \times 1$
5. combien de ces nombres sont impairs ? Réponse : $5^2 \times 4$ ou encore $5^3 - 5^2 \times 1$
6. combien de ces nombres sont des multiples de sept ? Réponse : 18.
   Ces nombres sont : 252, 259, 273, 322, 329, 357, 392, 399, 525, 532, 539, 553, 595, 735, 777, 952, 959, 973.

**Exercice 3.** Combien de chaînes binaires de longueur 10 :

1. commencent par 11 et finissent par '000'. Réponse : $2^5$
2. contiennent quatre 0 et six 1. Réponse : $C(10, 4) = C(10, 6)$
3. contiennent au moins deux 0. $2^{10} - C(10, 0) - C(10, 1) = 2^{10} - 11$
4. contiennent au moins deux 0 et au moins deux 1.C'est l'ensemble des possibilités de chaînes binaires moins le nombre de chaînes contenant respectivement : aucun 0, un seul 0, neuf 0 et dix 0. Soit $2^{10} - C(10, 10) - C(10, 9) - C(10, 1) - C(10, 0) = 2^{10} - 22$.
   On peut aussi l'obtenir en dénombrant directement ceux qui contiennent exactement deux fois zéro, trois fois zéro, ..., dix fois zéro. Soit : $C(10, 2) + C(10, 3) + \cdots + C(10, 9) + C(10, 10)$
5. contiennent soit quatre 1 consécutifs, soit quatre 0 consécutifs.
   Faire le dénombrement au cas par cas et ne pas oublier d'exclure les doublons.

**Exercice 4.** Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments. On appelle dérangement de $E$ toute permutation de $E$ ne laissant aucun élément invariant. On notera $D_n$ le nombre de dérangements de $E$. On pose $D_0 = 1$.

1. Si $E$ comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de $E$ ? En déduire $D_1$.
   Réponse : Pas de dérangement. $D_1 = 0$.
2. Si $E$ comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de $E$ ? En déduire $D_2$.
   Réponse : 1 dérangement. $D_2 = 1$.
3. On suppose $n$ quelconque, et on ecrit $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Soit $f$ une permutation de $E$. On suppose qu'elle laisse $k$ éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :
   $$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_k$$
   Réponse : Une permutation qui laisse $k$ éléments invariants contient $(n - k)$ dérangements, soit $D_{n-k}$.
   Il y a $C(n, k)$ façons d'avoir $k$ éléments invariants.
   Le nombre de permutations est donc $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k}$.
   Déduction : Le nombre de permutations de $E$ est $n!$. On peut donc établir que $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k}$.
   $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k} = C(n, 0) \times D_n + C(n, 1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n, n-1) \times D_1 + C(n, n) \times D_0$

En considérant que $C(n,k) = C(n,n-k)$, on a :
$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,n) \times D_n + C(n,n-1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,1) \times D_1 + C(n,0) \times D_0$
D'où $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$.

4. En déduire $D_3$, $D_4$, $D_5$.
   Réponse : $D_3 = 2$ car $3! = \sum_{k=0}^{3} C(3,k) \times D_k$. En faisant une démarche analogue on obtient $D_4 = 9$, $D_5 = 44$.
5. Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. À l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes. On numérote les femmes de 1 a 5 , et les hommes de 1 a 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque homme choississant au hasard une femme pour partenaire.
   5.1. A chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y a t-il d'associations possibles ?
   Réponse : Une telle association correspond à une permutation de $\{1, ..., 5\}$. Il y a $5! = 120$ possibilités.
   5.2. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué ?
   Réponse : Si aucun couple légitime n'est reconstitué, c'est qu'il y a un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ possibilités.
   5.3. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué ?
   Réponse : Si un seul couple légitime est reconstitué, il y a 5 choix pour ce couple. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ possibilités.
   5.4. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes ?
   Réponse :
   - On peut avoir trois (03) couples illégitimes et deux (02) couples légitimes. Or il y a $C(5,3) = 10$ choix de 2 couples légitimes parmi 5. Pour les 3 autres, il faut une association qui soit un dérangement $D_3$. On a donc : $10 \times D_3 = 20$ possibilités.
   - On peut avoir quatre (04) couples illégitimes et un (01) couple légitime. Ce cas est traité dans la question précédente (question 5.3.). On a donc : $5 \times D_4 = 45$ possibilités.
   - On peut avoir cinq (05) couples illégitimes et zéro (0) couple légitime. Ce cas est traité dans la question 5.2. On a donc : $D_5 = 44$ possibilités.

   Le nombre d'associations où il y a plus de couples illégitimes que de couples légitimes est donc : $20 + 45 + 44 = 109$.

**Exercice 5.** Parmi les permutations de l'ensemble E = {a, b, c, d, e, f} (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

**Première méthode**

- Nombre de permutations qui contiennent ab.
  Pour une position fixe de ab, il y a : 4! possibilités de placer les autres lettres. Or il y a 5 positions possibles pour ab. Donc pour ab on a : $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ef.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et cd
  Pour une position fixe de ab et cd, il y a : 2! possibilités de placer les autres lettres. Il y a 5 positions possibles pour ab. Une fois ab placé, il y a 3, 2, 2, 2, 3 positions respectives pour cd. Soit 10 possibilités. Donc pour ab et cd on a : $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab, cd et ef
  Il y a $3! = 6$ possibilités de permutations.

Le résultat recherché est alors $3(5 \times 4!) - 3(12 \times 2!) + 3! = 294$ possibilités de permutations.

**Deuxième méthode**

- Pour avoir ab seul on a : $5 \times 4! - 42$ possibilités. Pareil pour cd seul ou ef seul. Au total on a : $3(5 \times 4! - 42) = 234$ possibilités.
- Pour avoir ab et cd ensemble et sans ef on a : 18 possibilités. Pareil pour cd et ef sans ab puis ab et ef sans cd. Au total on a : 54 possibilités.
- Pour avoir ab, cd et ef ensemble on a : 6 possibilités.

Le résultat recherché est alors $6! - 3(5 \times 4! - 42) - (3 \times 18) - 6 = 234 + 54 + 6 = 294$ possibilités de permutations.

**Exercice 6.** On considère le mot MATRICE.

1. Dénombrer les anagrammes du mot.
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot :
   2.1. commençant et finissant par une voyelle ;
   2.2. commençant et finissant par une consonne ;
   2.3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   2.4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

**Exercices supplémentaires (livre de Rosen)**

Exercices numéros 8, 9, 10, 29,30, 32 (Pages 333-335).