TD 3 : FONCTIONS ET NOTATION ASYMPTOTIQUE
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. FONCTIONS

Exercice 1. Dans les cas suivants, dites si l'application $f : A \to B$ est injective, surjective ou bijective. Si elle est bijective, donnez la réciproque.

a. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x + 1$
Solution : Bijective. $f^{-1}(x) = x - 1$.

b. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution : Non injective, non surjective. On peut voir dans la représentation graphique ci-dessous qu'il peut exister deux valeurs de x pour une valeur de y (non injective) et que les valeurs réelles plus petites que -3 ne sont pas dans le codomaine de la fonction $f(x)$, et donc qu'on ne couvre pas entièrement B (non surjective).

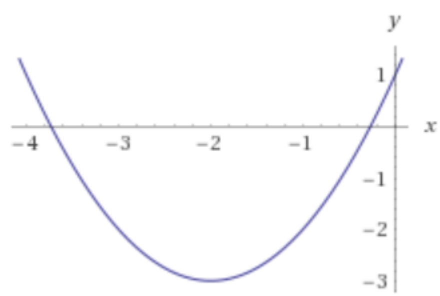

FIGURE 1. $y = x^2 + 4x + 1$.

c. $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, B = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq 1\}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution : Cette question reprend la même fonction qu'à l'item précédent, mais est utile pour souligner l'importance de prendre en considération l'ensemble de départ (A) et l'ensemble d'arrivée (B). Bijective. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 2$.

d. $A = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 0\}, B = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq 1\}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution : En essayant avec encore un autre A. Non surjective.

e. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6\lfloor x \rfloor$
Solution : Bijective. $f^{-1}(x) = x/3 - 2\lfloor x/3 \rfloor$.

f. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = 2^x$
Solution : Non surjective, injective.

Exercice 2. Soient A, B et C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$.

a. On suppose $g \circ f$ injective; montrer que f est injective. g est-elle obligatoirement injective?
Solution : Si $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$, on a $g(f(x)) = g(f(y))$, ce qui n'est pas possible. La fonction g n'est pas forcément injective (preuve par contre-exemple).

b. On suppose $g \circ f$ surjective; montrer que g est surjective. f est-elle obligatoirement surjective?
Solution : L'image de $g \circ f$ est un sous-ensemble de l'image de g; donc, si l'image de g n'est pas C tout entier, $g \circ f$ n'est pas surjective. La fonction f n'est pas forcément surjective (preuve par contre-exemple).

c. On suppose $g \circ f$ bijective. Que peut-on dire de f et g? Sont-elles bijectives?
Solution : On sait seulement que f est injective et que g est surjective. Elles ne sont pas forcément bijectives, par ce que nous avons conclu aux items précédents.

Exercice 3. Soit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
Solution :

a. Déterminer le domaine de définition D de f.
$D = \mathbb{R}$.

b. Évaluer l'image I de D.
$I =]-1, 1[$.

c. Vérifier que f est une bijection de D sur I.
Comme la fonction est toujours croissante et que le signe de la préimage sera le même que celui de l'image, on sait que $f(x)$ est inductive. On sait aussi que $f(x)$ est continue sur I, d'où que $f(x)$ est surjective. On a le tracé suivant :

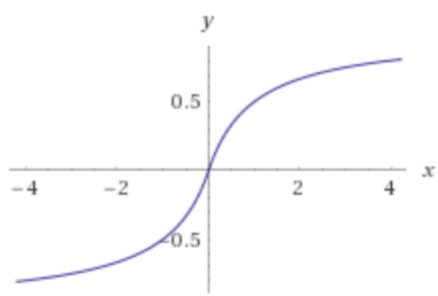

FIGURE 2. $y = x/(1+|x|)$.

d. Précisez la fonction inverse de f.
$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

Exercice 4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Solution : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

(1) Étape de base : Pour $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2}$, et on a bien : $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(2) Étape inductive : Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(3) On a : $u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)} = u_n \frac{2n+1}{2n+2}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = u_{n+1}$.
Vérifions que $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$. Autrement dit, $2n+3 > 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \iff (2n+3)^2 > 4(n+1)(n+2)$ Soit $4n^2+12n+9 > 4n^2+12n+8$ vrai.
Donc $u_{n+1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$.
Vérifions que $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Autrement dit, $\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} < 2n+2 \iff (2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2$. Puisque $4n^2+8n+3 < 4n^2+8n+4$ vrai, $u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

On réussi à établir l'encadrement voulu à l'ordre $n+1$. On conclut, par récurrence sur n, à l'encadrement demandé.

Exercice 5. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a $1 \leq U_n \leq 2$.
Solution : Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$.

(1) Étape de base : $U_0 = 2; 1 \leq 2 \leq 2$, donc $1 \leq U_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie.

(2) Étape inductive : Supposons jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie.

(3) $1 \leq U_n \leq 2 \iff 2 \leq 1 + U_n \leq 3 \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{2} \iff 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \iff 1 \leq 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2 \iff 1 \leq U_{n+1} \leq 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: $P(0)$ est vraie. En supposant jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie, on a $P(n+1)$ qui est vraie. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 2$.

2. Notation asymptotique

Exercice 6. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant des constantes C et k.

a. $f(x) = 6x^2 + 2x^4 + 7$
$n = 4, C = 3, k = 3\sqrt{2}$
b. $f(x) = \frac{x^3+8}{5x^2+3x}$
$n = 1, C = \frac{1}{5}, k = \sqrt{\frac{40}{3}}$
c. $f(x) = 3x^3 - x^2\ log(x)$
$n = 3, C = 1, k = 0$
d. $f(x) = 4x^4 - 4\ log^3(x)$
$n = 4, C = 5, k = 0$

Exercice 7. Soit la fonction $f : n \to \left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$ définie sur $\mathbb{N}$. Prouver que :

$$f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$$

(Θ : grand theta)

Solution :

- $2 + \cos(n) \geq 1$ et $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right)$ (prendre par exemple $C = 1, k = 1$) donc $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$
- $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})$ (prendre par exemple $C = 10^6 + 1, k = 1$) et $2 + \cos(n) \leq 3$ donc il suffit de prendre $C = (10^6 + 1) * 3$ et toujours $k = 1$ pour trouver un couple qui convient pour montrer que : $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})(2 + \cos(n))$.

Donc $f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$

Exercice 8. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = 3\sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^6}{12}$
c. $f_3(n) = 2 \cdot e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(n) = n \log(n)$
f. $f_6(n) = e^{-n}$

$e^{-n} \ll \sqrt{\log(n)} \ll 3\sqrt{n} \ll n\log(n) \ll \frac{n^6}{12} \ll 2 \cdot e^n$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 (pages 64) ; 15, 18, 20, 24 et 26 (pages 65) ; 8, 9 et 14 (pages 73) ; 26 et 27 (pages 83).