LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 1 : LOGIQUE ET ENSEMBLES
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. Logique

Exercice 1. Construisez une table de vérité pour chacune des propositions composées suivantes et indiquez si elles sont des tautologies, des contradictions ou des contingences :

a. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ *Vrai si p et q sont vrais ou si p et q sont faux, faux autrement. Contingence.*
Exemple de résolution avec équivalences logiques
$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
$\iff \neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
$\iff (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
$\iff ((\neg p \wedge \neg q) \vee p) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee q)$
$\iff ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q))$
$\iff (VRAI \wedge (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee q) \wedge VRAI)$
$\iff (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$
Comme continuer la résolution avec ces mêmes techniques ne ferait que tourner en rond, on arrête ici. On voit qu'il s'agit d'une contingence, car il est possible d'obtenir VRAI pour certaines valeurs de p et q et FAUX dans d'autres cas. Testons les valeurs pour chaque ligne de la table.

p	q	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

b. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ *Tautologie.*
Exemple de résolution avec équivalences logiques
$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
Avec la double équivalence, on peut séparer l'expression en deux parties comme suit :
$a \leftrightarrow b \iff a \to b \wedge b \to a$
Commençons par l'expression de gauche à droite.
$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
$\iff \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p)$
$\iff (p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p$
$\iff ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$
$\iff ((p \vee q) \wedge VRAI) \vee \neg p$
$\iff p \vee q \vee \neg p$
$\iff p \vee \neg p$
Comme on obtient que les valeurs de vérité dépendent d'une variable ou son contraire, ce qui est toujours VRAI, on peut conclure qu'il s'agit d'une tautologie.
Continuons par l'expression de droite à gauche.
$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$
$\iff \neg(q \vee \neg p) \vee (\neg p \vee q)$
$\iff (\neg q \wedge p) \vee \neg p \vee q$

$\iff ((\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p)) \vee q$
$\iff ((\neg q \vee \neg p) \wedge VRAI) \vee q$
$\iff \neg q \vee \neg p \vee q$
$\iff q \vee \neg q$
On obtient aussi, pour ce côté de l'expression, que les valeurs de vérité dépendent d'une variable ou son contraire, ce qui est toujours VRAI. Donc,
$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \wedge (\neg q \to \neg p) \to (p \to q) \iff VRAI \wedge VRAI \iff VRAI$

p	q	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	V

c. $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ *Tautologie.*
d. $(p \wedge q) \vee \neg r$ *Faux si p est faux et r est vrai, ou que p et r sont vrai alors que q est faux. Vrai autrement. Contingence.*
e. $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$ *Tautologie.*
f. $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$ *Faux lorsque tout est faux, ou alors lorsque p et r sont faux et q est vrai, ou lorsque p est vrai et q est faux. Vrai autrement. Contingence.*

Exercice 2. Si les énoncés p, q et r sont en français :
p: Les fantômes me font peur.
q : Je crie très fort.
r : Je n'appelle pas S.O.S. fantômes.
Traduisez en français les propositions composées du numéro précédent.

a. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ *Si les fantômes me font peur ou si je crie très fort, alors les fantômes me font peur et je crie très fort.*
b. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ *Si lorsque les fantômes me font peur, je crie très fort, alors lorsque je ne crie pas les fantômes ne me font pas peur et réciproquement.*
c. $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ *Soit les fantômes me font peur ou je crie très fort, mais pas les deux, ou soit les fantômes me font peur ou je ne crie pas, mais pas les deux.*
d. $(p \wedge q) \vee \neg r$ *Soit les fantômes me font peur et je crie très fort, ou soit j'appelle S.O.S. fantômes.*
e. $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$ *Soit si les fantômes me font peur, alors je crie très fort, ou soit si les fantômes ne me font pas peur alors je n'apelle pas S.O.S. fantômes.*
f. $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$ *Si les fantômes me font peur, alors je crie très fort et si les fantômes ne me font pas peur, alors je n'appelle pas S.O.S. fantômes.*

Exercice 3. Écrivez la contraposée, la réciproque ainsi que la contraposée de la réciproque des implications suivantes :

a. Si je suis au régime, alors je mange une pomme ou une poire mais pas une barre de chocolat.
Contraposée : Si je mange une barre de chocolat, mais pas une pomme ni une poire alors je ne suis pas au régime.
Réciproque : Si je mange une pomme ou une poire mais pas une barre de chocolat, alors je suis au régime.
C. de R. : Si je ne suis pas au régime, alors je mange une barre de chocolat, mais pas une pomme ni une poire.
b. Lorsqu'il pleut, je ne vais pas au cinéma ni chez le coiffeur.
Contraposée : Lorsque je vais au cinéma ou chez le coiffeur, il ne pleut pas.
Réciproque : Lorsque je ne vais pas au cinéma ni chez le coiffeur, il pleut.
C. de R. : Lorsqu'il ne pleut pas, je vais au cinéma ou chez le coiffeur.
c. Si je ne vais pas visiter Sept-Îles, alors ma soeur ne me prête pas sa voiture ou je n'ai pas assez d'argent.

Contraposée :Si je ne vais pas visiter Sept-Îles, alors ma soeur ne me prête pas sa voiture ou je n'ai pas assez d'argent.
Réciproque : Si je vais visiter Sept-îles, alors ma soeur me prête sa voiture et j'ai assez d'argent.
C. de R. : Si ma soeur ne me prête pas sa voiture ou si je n'ai pas assez d'argent, alors je ne vais pas visiter Sept-Îles.

d. Étudier en sciences est nécessaire pour devenir médecin ou ingénieur.
Contraposée : Ne pas devenir médecin ni ingénieur est nécessaire pour ne pas étudier en sciences.
Réciproque : Devenir médecin ou ingénieur est nécessaire pour étudier en sciences.
C. de R. : Ne pas étudier en sciences est nécessaire pour ne pas devenir médecin ni ingénieur.

Exercice 4. Soit $P(x)$ l'énoncé «x chante souvent au karaoké.». Soit $Q(x)$ l'énoncé «x fausse horriblement.». L'univers du discours est l'ensemble des journalistes du Polyscope. Exprimez les qualifications suivantes en langage courant.

a. $\exists(x,y)|P(x,y)Q(y)$
Il existe au moins deux journalistes du Polyscope tels qu'ils vont souvent au karaoké, et dont au moins un fausse horriblement.

b. $\forall x Q(x) \neg P(x)$
Tous les journalistes du Polyscope faussent horriblement, mais ne chantent pas souvent au karaoké.

c. $\exists!(x,y)|\neg Q(x,y)$
Il existe exactement 2 journalistes du Polyscope tels qu'ils ne faussent pas horriblement.

d. $\forall x|P(x)\exists!(y)Q(y)$
Pour tous les journalistes du Polyscope tels qu'ils chantent souvent au karaoké, il en existe exactement un qui fausse horriblement.

Exercice 5. On considère les propositions ci-dessous. L'univers du discours est l'ensemble des réels.

1. Donner la négation de chacune des propositions.
2. Écrire chacune des propositions à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques.

***Propositions* :**

a. Le carré de tout réel est positif.
Il y a un ou plusieurs réels dont le carré est négatif.
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

b. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
Tous les réels sont inférieurs ou égaux à leur carré.
$\exists x \in \mathbb{R},\ x > x^2$

c. Aucun réel n'est supérieur à tous les autres.
Il existe un réel supérieur à tous les autres réels. Comme il doit être supérieur à tous les autres, il n'y en a qu'un qui réponde à ce critère ($\exists!$).
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$

d. Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
Étant donné trois réels non nuls, tous sont de signes différents.
$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^*, (x>0 \wedge y>0 \wedge z<0) \vee (x<0 \wedge y<0 \wedge z>0) \vee (x>0 \wedge y>0 \wedge z>0) \vee (x<0 \wedge y<0 \wedge z<0)$

e. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
Il y a des réels qui peuvent s'exprimer comme un quotient d'entier.
$\neg(\forall x \in \mathbb{R}, \exists\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{a}{b})$
On peut aussi utiliser l'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$ pour exprimer les nombres qui s'écrivent comme le quotient de deux entiers relatifs, dont celui au dénominateur ne peut pas prendre la valeur nulle.

Exercice 6. Soit $P(x,y)$ l'énoncé "$x+y>10$". L'univers du discours étant l'ensemble des nombres relatifs, déterminez quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

a. $P(3,9)$ Cette proposition est vraie.

b. $P(x,4)$ Cette proposition est vraie pour les x supérieurs à 6.

c. $\forall y P(2, y)$ Cette proposition est fausse.
d. $\forall x \exists y P(x, y)$ Cette proposition est vraie.
e. $\exists x \exists y P(x, y)$ Cette proposition est vraie.
f. $\forall y \exists x P(x, y)$ Cette proposition est vraie.
g. $\exists x \forall y P(x, y)$ Cette proposition est fausse.

2. Ensembles

Exercice 7. Les élèves de l'école primaire de Grand-mère vont à l'écurie pour faire des tours de chevaux. On peut y trouver trois couleurs de robes, car il y a des chevaux alezans, bais et noirs. Chaque élève ne peut monter qu'un cheval de chaque couleur. On sait que, parmi ces élèves :

- 15 montent un cheval de chaque couleur;
- 13 ne montent qu'un cheval noir;
- 31 ne montent qu'un cheval alezan ou un cheval bai;
- 13 montent exactement deux chevaux dont un cheval noir;
- 62 montent un cheval alezan ou un cheval noir;
- 58 ne montent pas plus d'un cheval;
- 48 ne montent pas de cheval alezan;
- 54 ont monté un cheval bai ou pas de cheval du tout.

a. Combien d'élèves montent un cheval alezan et un cheval noir? 21
b. Combien d'élèves sont allés à l'écurie? 90

Exercice 8. Soient les ensembles $A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{0, 3, 7, 8, 9\}$ et $C = \{5, 6, 7, 9\}$. Déterminer les ensembles suivants :

a. $A \cup B$ $\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b. $B - C$ $\{0, 3, 8\}$
c. $(C - B) - A\{\}$
d. $A \cap (B \cup C)\{0, 3, 5, 6, 7\}$
e. $B - (A \cap B \cap C)\{0, 3, 8, 9\}$

Exercice 9. Quelle est la cardinalité des ensembles suivants :

a. {a} 1
b. {{a}} 1
c. {a, {a}, {a, {a}}} 3
d. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ 2
e. $\{\varnothing\}$ 1
f. $P(\{\varnothing, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$ 16
g. $P(P(\varnothing))$ 2

Exercice 10. Soit A, B, E et F quatre ensembles. On sait que $A \subset E$ et que $B \subset F$. Soit P l'énoncé $A \times B \subset E \times F$.

a. Si P est vraie, et que $E \times F = \varnothing$. Que peut-on affirmer de A, B et $A \times B$?
Si $E \times F = \varnothing$, alors $E = \varnothing$ ou $F = \varnothing$.
Dans ce cas, $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ comme $A \subset E$ et $B \subset F$.
Donc, $A \times B = \varnothing$.
b. Prouvez que P est vraie.
Soit $A \subset E$ et $B \subset F$
$\forall (x, y) \in A \times B$, $x \in A$ et $y \in B$
$(x \in A$ et $y \in B)$ et $(A \subset E$ et $B \subset F)$, alors $x \in E$ et $y \in F$
$x \in E$ et $y \in F$, alors $(x, y) \in E \times F$
Donc $\forall (x, y) \in A \times B$, $(x, y) \in E \times F$
D'où $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 11. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Notons $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B. Soit C un autre sous-ensemble de E.

a. Vérifier que : $A\Delta B = B\Delta A$
Utiliser la commutativité de $\cup$ dans la formule donnée par l'énoncé.

b. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
La soustraction d'un ensemble par un autre ensemble n'enlève que les éléments contenus dans l'intersection des deux ensembles. Si le second ensemble contient des éléments qui ne se retrouvent pas dans le premier ensemble, on ne peut pas les soustraire. On a donc : $A - B = A - (A \cap B)$.
Également, si on soustrait de deux ensembles le même ensemble puis qu'on fait leur union, on soustrait ni plus ni moins les mêmes éléments que lorsqu'on fait l'union des deux premiers ensembles puis qu'on soustrait le troisième. Autrement dit : $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
$A\Delta B = (A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B)) \rightarrow$ Avec la première formule.
$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \rightarrow$ Avec la seconde formule.

c. Montrer que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$
Soit $x \in \overline{A}\Delta\overline{B}$
$\iff (x \in (\overline{A} - \overline{B})) \vee (x \in (\overline{B} - \overline{A}))$
$\iff (x \in \overline{A} \wedge x \notin \overline{B}) \vee (x \in \overline{B} \wedge x \notin \overline{A})$
$\iff (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \notin B \wedge x \in A)$
$\iff x \in ((B - A) \cup (A - B))$
$\iff x \in B\Delta A = A\Delta B$

d. Montrer que $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$
Avec la contraposée :
Disons que $x \in B$ et que $x \notin C$.
Avec la formule un peu plus haut, on peut écrire :
$A\Delta B = A\Delta C$
$\iff (A - B) \cup (B - A) = (A - C) \cup (C - A)$
$\iff (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup C) - (A \cap C)$.
Dans le premier cas, on a $x \notin A$:
$x \in (A \cup B); x \notin (A \cap B)$; Donc $x \in ((A \cup B) - (A \cap B))$.
$x \notin ((A \cup C) - (A \cap C))$.
Dans le second cas, on a $x \in A$:
$x \in (A \cup B); x \in (A \cap B)$; Donc $x \notin ((A \cup B) - (A \cap B))$.
$x \in (A \cup C); x \notin (A \cap C)$; Donc $x \in ((A \cup C) - (A \cap C))$.
Dans les deux cas, $A\Delta B \neq A\Delta C$ si $B \neq C$, donc $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$.

e. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\overline{A}$, $A\Delta E$, $A\Delta\varnothing$
$A\Delta A = \varnothing$, $A\Delta\overline{A} = E$, $A\Delta E = \overline{A}$, $A\Delta\varnothing = A$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 et 4 (Page 9) ; 7, 9 (Page 10) ; 13 (Page 11) ; 8 (Page 30) ; 10, 15 (Page 31) ; 29 (Page 32) ; 6, 10, 19 (Page 51) ; 31, 32 (Page 52).