POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 4 : RÉCURRENCE, FERMETURE DE RELATIONS ET ORDRES
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. RÉCURRENCE

Exercice 1. Utilisez le principe de l'induction pour démontrer que $3^n > n^3 + n$, où $n \in \mathbb{N}$ et $n > 3$.
Base : $3^4 = 81 > 4^3 + 4 = 68$. La condition de base est vérifiée.
Étape inductive : Supposons que pour n, on a $3^n > n^3 + n$ vrai.
Résolution : Tentons de montrer qu'alors, l'égalité tient aussi pour $n + 1$.
$3^n > n^3 + n$
$\iff 3 * 3^n > 3 * (n^3 + n)$
$\iff 3^{n+1} > 3 * (n^3 + n)$
Et si on pose l'équation de départ avec $n + 1$, on veut vérifier l'inégalité : $3^{n+1} > ((n + 1)^3 + n + 1)$
$\iff 3^{n+1} > n^3 + 3n^2 + 4n + 2$
On sait que cette inégalité serait vraie si : $3^{n+1} > 3 * (n^3 + n) > n^3 + 3n^2 + 4n + 2$; vérifions.
$3n^3 + 3n > n^3 + 3n^2 + 4n + 2$
$\iff 2n^3 > 3n^2 + n + 2$
Comme on sait qu'on travaille avec les entiers naturels plus grands que 3 et que la fonction de gauche croît plus vite que celle de droite, on a que $3^{n+1} > (n + 1)^3 + n + 1$ est vraie. Par induction, on peut alors conclure que $3^n > n^3 + n$, où n est un entier naturel plus grand que 3.

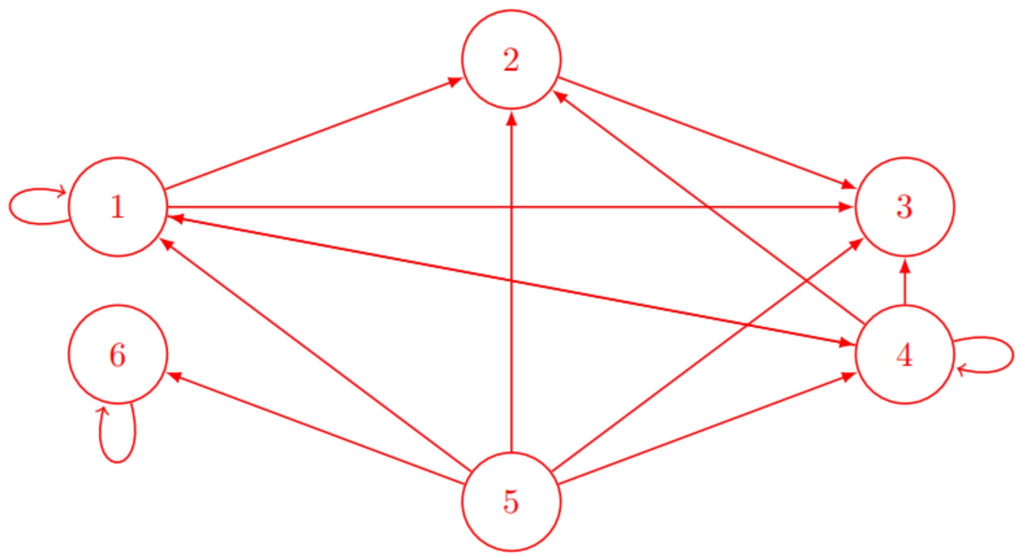
Exercice 2. Utilisez le principe de l'induction pour démontrer que $8|(5^{2n} - 1)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Base : $n = 1 \to 5^{2n} - 1 = 24$; $8|24$. La condition de base est vérifiée.
Étape inductive : Supposons que pour n, on a $8|(5^{2n} - 1)$ vrai.
Résolution : Tentons de montrer que 8 divise aussi l'expression pour $n + 1$.
$8|(5^{2(n+1)} - 1)$
$\iff 8|(5^{2n+2} - 1)$
$\iff 8|(25 * 5^{2n} - 1)$
$\iff 8|(24 * 5^{2n} + 5^{2n} - 1)$
$\iff 8|(24 * 5^{2n}) \land 8|(5^{2n} - 1)$
Comme on sait que 8 divise 24 et $(5^{2n} - 1)$ (par supposition), alors on trouve que 8 divise aussi l'expression pour $n + 1$. Par induction, on peut alors conclure que $8|(5^{2n} - 1)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. Construire un algorithme récursif qui calcule $n \cdot x$ lorsque n et x sont des entiers positifs.
Solution:
entier positif multiplier(entier positif n, entier positif x)
entier positif retour = 0.
si n = 1
retour = $retour + x$.
sinon
retour = retour $+x + multiplier(n - 1, x)$
retourner retour.

2. FERMETURE DE RELATIONS

Exercice 4. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble A = {1,2,3,4,5,6} par: {(1,2),(1,4),(2,3),(4,1),(5,4),(5,6),(6,6)}.

1. Donner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
   Solution: $\mathcal{R} \bigcup \{(2,1),(3,2),(4,5),(6,5)\}$.
4. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
   Solution: $\mathcal{R} \bigcup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.



Exercice 5. On considère les trois ensembles A = {2,3,4,6} , B= {a,b,c,d} , C= {0,3,5} et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ *telles que* : $\mathcal{R} = \{(4,a),(6,a),(6,b),(4,c),(6,c)\}$ *et* $\mathcal{S} = \{(a,0),(b,5),(c,5),(d,3)\}$

Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Solution : $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Soit la relation $\mathcal{R}$ definie sur $\mathcal{N}$ telle que: $\mathcal{R}$ = {(a,b) , pgcd(a,b)=1 }. Determiner la fermeture symétrique et la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.
Solution:

- Fermeture symétrique: trivial
- Fermeture transitive: en utilisant le théorème de BACHET BEZOUT on voit qu'il s'agit de a et c tels que ax - cy divisible par b avec x et y des entiers relatifs

3. ORDRES

Exercice 7. Ordre lexicographique : Un étudiant s'est fait donner la tâche de classer des boîtes selon ces instructions :

1. Le classement par code de gamme de produit doit suivre l'ordre alphanumérique $AB...Zab...yz0...89$.
2. Le classement par nom d'entreprise suivi du nom de produit doit suivre le même ordre alphanumérique.

3. Une boîte est dégagée lorsqu'il n'y a dans sa pile que des boîtes en-dessous d'elle. Par sécurité, le classement des boîtes dégagées doit se faire avant celui des boîtes pas encore dégagées, et deux boîtes dégagées peuvent être classées l'une avant l'autre selon une instruction ultérieure s'il y a lieu, ou indifféremment sinon.

Soit le tableau suivant la représentation de trois piles de boîtes, avec deux grandes boîtes couchées qui prennent deux piles en largeur.

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="2">13</td></tr>
</table>

On a les boîtes numérotées :

1. Code : m9C Marque et nom : Pom pain aux pommes
2. Code : m9C Marque et nom : Pom pain aux poires
3. Code : m9D Marque et nom : Pom pain blanc
4. Code : m9C Marque et nom : Pom pain aux raisins
5. Code : zz8 Marque et nom : Oasis jus de pomme
6. Code : S8z Marque et nom : Miele casque
7. Code : KVO Marque et nom : Bauer bâton de hockey
8. Code : zz8 Marque et nom : Oasis jus de melon
9. Code : zz1 Marque et nom : Oasis cocktail de fruits
10. Code : UA8 Marque et nom : Dole ananas
11. Code : UA7 Marque et nom : Dole bananes
12. Code : UA7 Marque et nom : Dole bananes plantain
13. Code : S8a Marque et nom : Miele bicyclette

Donnez le classement des boîtes en priorisant :

a. Instruction 3 » Instruction 2 » Instruction 1. $2 \prec 5 \prec 1 \prec 4 \prec 7 \prec 10 \prec 9 \prec 12 \prec 3 \prec 6 \prec 8 \prec 11 \prec 13$

b. Instruction 1 » Instruction 2. $7 \prec 13 \prec 6 \prec 11 \prec 12 \prec 10 \prec 2 \prec 1 \prec 4 \prec 3 \prec 9 \prec 8 \prec 5$

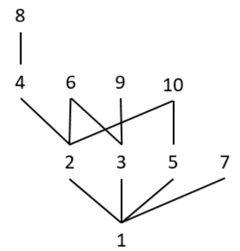
Exercice 8. Répondre aux questions suivantes sur les ensembles A et B.

- A muni de la relation $\subseteq$. $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}\}$
- $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ muni de la relation R.
  $R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(7,1),(8,1),(9,1),(2,2),(3,3),(4,2),(4,4),(5,5),$
  $(6,2),(6,3),(6,6),(7,7),(8,2),(8,4),(8,8),(9,9)\}$

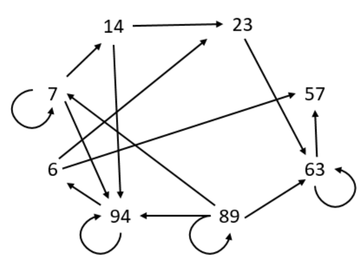
1. Trouvez les éléments maximaux.
   Maxima de A : {1,3}, {1,2,4} et {2,3,4}
   Maxima de B : 1
2. Trouvez les éléments minimaux.
   Minima de A : {1}, {2}, {3} et {4}
   Minima de B : 5, 7, 6, 8, 9
3. Y a-t-il un plus grand élément?
   A : Non. B : oui, 1.
4. Y a-t-il un plus petit élément?
   A : Non. B : Non.

Exercice 9. Trouver le diagramme de Hasse pour les relations suivantes :

1. divisibilité dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.



2. mots de deux lettres existants du dictionnaire francophone dans l'ensemble $E = \{a, b, e, l, m, u, w, x\}$.



3.

4. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2, 4, 5, 8 (page 197); 35 (page 198); 18, 21 (page 205); 29 (page 214); 40 (page 215).