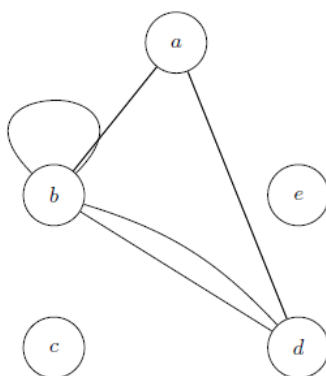
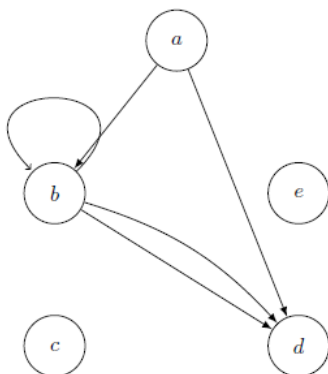


TD 5 : GRAPHS
CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 1. Indiquez pour chacun des graphes suivants s'il s'agit d'un graphe simple, d'un multigraphe, d'un pseudographe d'un graphe orienté ou d'un graphe multigraphe orienté. //



- (1) Graphe:
(2) $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ avec $\mathcal{V}=\{a,b,c,d\}$ et $\mathcal{E}=\{\{a,c\},\{a,d\},\{b,d\}\}$



- (3) Graphe
(4) $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ avec $\mathcal{V}=\{a,b,c,d\}$ et $\mathcal{E}=\{(a,c),(a,d),(b,d)\}$

Solution

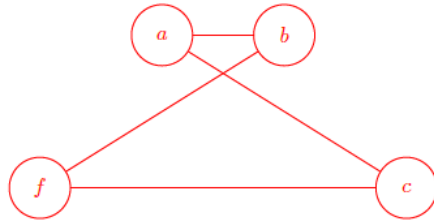
- (1) Pseudographe
(2) Graphe simple
(3) Multigraphe orienté
(4) Graphe orienté

Exercice 2. Soit $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ avec $\mathcal{V}=\{a,b,c,d,e,f\}$ et $\mathcal{E}=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,f\},\{c,f\},\{d,e\}\}$

- (1) Dessiner G

- (2) Ce graphe est-il biparti ? Si oui, quels sont les deux ensembles de sommets ?
 (3) Ce graphe est-il régulier ? Si oui, de quel degré ?

Solution:



- (1)
 (2) Oui. ($V_1 = \{a, e, f\}$ et $V_2 = \{b, c, d\}$) ou ($V_1 = \{a, d, f\}$ et $V_2 = \{b, c, e\}$)
 (3) Non

Exercice 3. Un groupe formé de 15 personnes se propose de constituer un réseautage particulier de sorte que chaque membre du groupe échange son numéro de téléphone avec exactement 3 autres personnes du groupe pour les ajouter dans ses contacts. Est-ce possible ?

Solution

La réponse est non. En effet, considérons le graphe dont les sommets sont les 15 personnes composant le groupe et les arcs sont les liaisons (contacts). Alors pour tout sommet x on a $d(x) = 3$. Ainsi $\sum d(x) = 3 \times 15 = 45$. D'après le lemme des poignées de mains, on devrait avoir $45 = 2 \times e$ avec e l'ensemble des arcs du graphe. Ce qui est impossible car 45 est impair.

Exercice 4. Déterminez si les graphes suivants, donnés par leur matrice d'incidence, sont bipartis.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

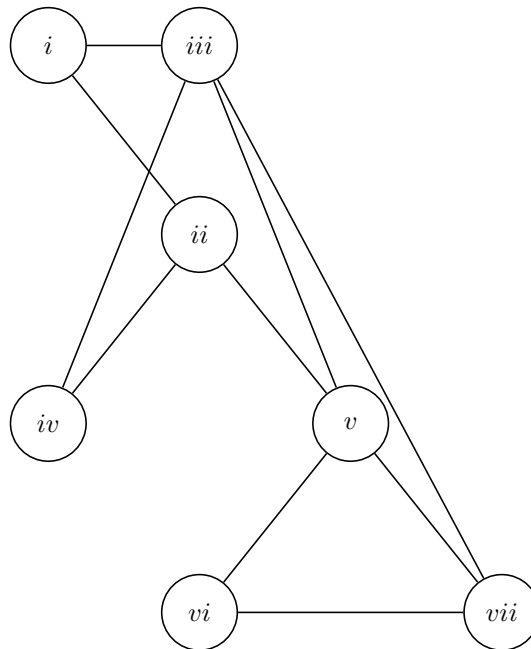
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

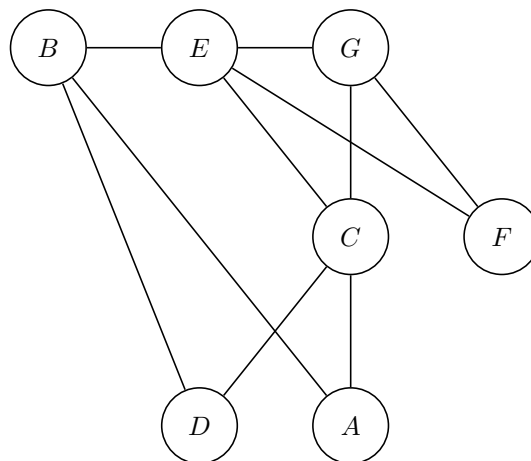
A n'est pas biparti. B est biparti. C n'est pas biparti. D n'est pas biparti.

Exercice 5. Parmi les 3 graphes suivants, lesquels sont isomorphes? **Le graphe A est isomorphe au graphe B.**

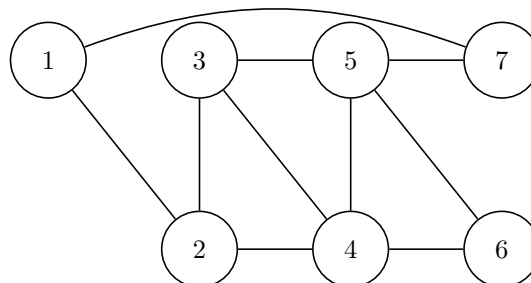
- Graphe A :



- Graphe B :



- Graphe C :

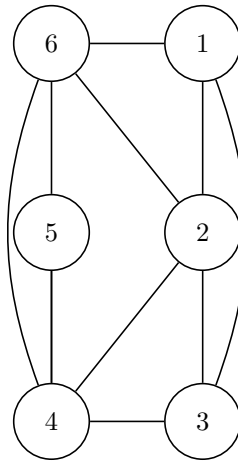


Exercice 6. Combien y a-t-il de graphes simples non isomorphes et où un chemin existe entre chaque paire de sommets qui comprennent 3 sommets, 4 sommets?

2 graphes simples à 3 sommets, 6 graphes simples à 4 sommets.

Exercice 7. Donnez les matrices d'adjacence et d'incidence du graphe.

- Graphe :



• Matrice d'adjacence :

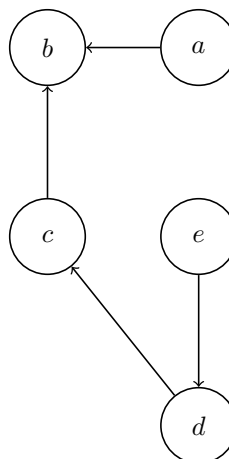
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Matrice d'incidence :

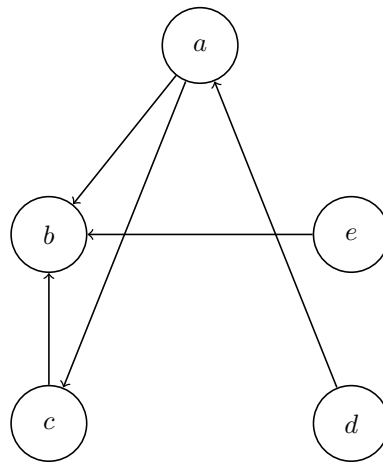
	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 6\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 6\}$	$\{3, 4\}$	$\{4, 5\}$	$\{4, 6\}$	$\{5, 6\}$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1

Exercice 8. Donnez l'union des graphes A et B, puis trouvez le diagramme de Hasse associé :

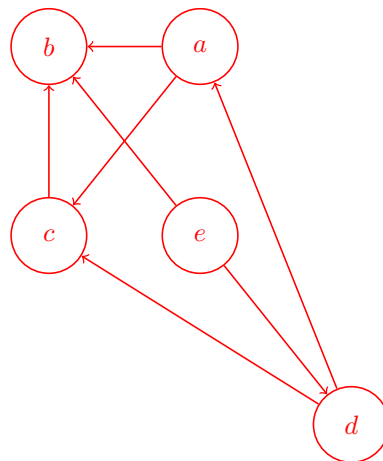
- Graphe A :



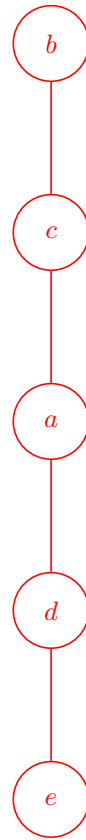
- Graphe B :



- $A \cup B$:



- Diagramme de Hasse de $A \cup B$:



1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES (LIVRE DE ROSEN)

Exercices numéros : 29, 31, 33, 35 (page 348); 11, 15, 27 (page 399).