Partie A 4.5 points

Les questions de la partie A sont indépendantes.

Question A.1 (1.5 points)

Calculez le coefficient du terme x^4y^7 dans le développement de $(x+y)^{11}$.

Question A.2 (1.5 points)

Dessinez tous les graphes simples connexes non isomorphes qui possèdent 5 sommets et 5 arêtes.

Question A.3 (1.5 points)

Dans un traitement de texte (comme Word) on peut se trouver dans trois modes :

Mode N : Caractères normaux ;
Mode E : Caractères en exposant ;
Mode I : Caractères en indice.

On dispose de 2 boutons :

- Le bouton «mise en exposant» permet de passer dans le mode E, sauf si on est déjà dans le mode E, auquel cas on passe en mode N.
- Le bouton «mise en indice» permet de passer dans le mode I, sauf si on est déjà dans le mode I, auquel cas on passe en mode N.

Utiliser un automate d'états finis déterministe pour traduire la situation décrite ci-dessus. Représentez l'automate et précisez la signification de chaque état, ainsi que celle de chaque lettre de l'alphabet d'entrée.

Partie B 6.5 points

On étudie dans cette question un algorithme qui permet de construire (de manière récursive) l'ensemble des partitions sur l'ensemble {1, 2, …, n}. Dans la suite :

- A(n) désigne l'ensemble des partitions de l'ensemble {1, 2, …, n}.
- a(n) = | A(n) | ; autrement dit, a(n) représente le nombre de partitions de l'ensemble {1, 2, …, n}.

Pour construire A(n+1) à partir de A(n), on procède de la manière suivante :
Pour chaque partition P = {S_1, S_2, …, S_q} de A(n), on obtient:

- q nouvelles partitions, en ajoutant à S_i l'élément n+1
- et une autre partition qui est {S_1, S_2, …, S_q, {n+1}}.

Pour illustrer l'algorithme ci-dessus, voici comment on construit successivement A(1), A(2) et A(3).

A(1) contient un seul élément : la partition { {1} }

Construction des éléments de A(2) à partir de l'élément de A(1)
{ {1} } → { {1,**2**} } et { {1}, **{2}** }

Construction des éléments de A(3) à partir des éléments de A(2)
{ {1,2} } → { {1,2,**3**} } et { {1,2}, **{3}**}
{ {1}, {2} } → { {1,**3**}, {2} }, { {1}, {2,**3**} } et { {1}, {2}, **{3}** }

Question B.1 (2.5 points)

a) Construisez les éléments de A(4) à partir de chacun des cinq éléments de A(3).
b) Que vaut |A(4)| ?

Dans la suite, on veut dénombrer les partitions de {1, 2, …, n}, autrement dit, on veut calculer |A(n)|.

Nous utiliserons les nouvelles notations suivantes :
- A(n, p) désigne l'ensemble des partitions de {1, 2, …, n} qui contiennent p éléments (c'est-à-dire p sous-ensembles de {1, 2, …, n}).
- a(n, p) = | A(n, p)|.

Dans le tableau ci-dessous, on a représenté dans chaque case les éléments de A(n,p), pour n=1..3 et p=1..n

	p=1	**p=2**	**p=3**
n=1	{ {1} }		
n=2	{ {1,2} }	{ {1}, {2} }	
n=3	{ {1,2,3} }	{ {1,2}, {3}} { {1,3}, {2} } { {1}, {2,3} }	{ {1}, {2}, {3} }

Par exemple, A(3, 2) contient trois éléments et on a donc a(3,2)=3.

Question B.2 (1 point)

a) En observant le tableau ci-dessus, indiquez quelles sont les valeurs de a(1,1), a(2,1), a(2,2), a(3,1), a(3, 2) et a(3,3).
b) En observant l'ensemble A(4) que vous avez calculé à la question B.1, indiquez quelles sont les valeurs de a(4,1), a(4, 2) et a(4,3) et a(4,4).

Question B.3 (3 points)

a) Trouvez une formule de récurrence qui permet de calculer a(n+1, p), pour p = 1..n+1, à l'aide des termes a(n, p), pour p=1..n. Justifiez votre réponse.
Pour répondre à cette question, vous pouvez raisonner sur les deux manières possibles d'obtenir dans A(n+1) une partition de p éléments.
b) Construisez le tableau des valeurs de a(n, p), pour n = 1..5 et p = 1..n.
c) Quel est le nombre de partitions de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5} ?

Partie C 9 points

Les questions de la partie C sont indépendantes.

Soit A l'ensemble des chaînes binaires qui contiennent le même nombre de 0 et de 1. Par exemple, le mot '011100' appartient à A car il contient trois '0' et trois '1'.

Question C.1 (1.5 points)

Le langage A est-il régulier ? Justifiez votre réponse – on ne demande pas une preuve formelle.

Question C.2 (2 points)

On considère la grammaire G qui possède les productions suivantes :

$S \rightarrow 0S1$, $S \rightarrow 1S0$, $S \rightarrow \lambda$.

a) Le mot '011100' appartient-il à L(G) ? Justifiez votre réponse.
b) Le langage A est-il inclus dans L(G) ? Justifiez votre réponse.
c) Le langage L(G) est-il inclus dans A ? Justifiez votre réponse.

Question C.3 (1.5 points)

Proposez une grammaire algébrique aussi simple que possible qui reconnaît le langage A.

Question C.4 (4 points)

Vous devez proposer une machine de Turing qui reconnaît le langage A. Cette machine utilise un caractère supplémentaire noté 'X'. La machine remplace le premier caractère par un 'X'. Si ce premier caractère était un '0' (respectivement un '1'), la machine continue vers la droite jusqu'à ce qu'elle rencontre un '1' (respectivement un '0'). A ce moment-là, elle remplace ce caractère par 'X' et retourne (vers la gauche) au début de la chaîne. On recommence ces allers et retours de manière à remplacer à chaque fois un '0' et un '1' par des 'X'. A la fin, on fait en sorte de déterminer si le mot appartient au langage A ou non.

a) Indiquez l'ensemble des états de la machine que vous proposez, ainsi que la signification de chacun de ces états. Précisez l'état initial et l'ensemble des états finaux.
b) Indiquez dans un tableau l'ensemble des quintuplés de votre machine (dans la colonne de gauche). Pour chacun d'entre eux, indiquez le rôle de celui-ci dans le fonctionnement de votre machine de Turing (dans la colonne de droite).
c) On suppose que le contenu initial du ruban est '011100'. Indiquez, lorsque la machine s'arrête : le contenu (final) du ruban, la position de la tête sur le ruban et l'état dans lequel se trouve la machine.
d) Même question si le contenu initial du ruban est '00100'.