POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 8 : THÉORIE DES LANGAGES
CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 1. Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à 7 éléments dans un ensemble à 5 éléments? $5^7 - C(5,1) * 4^7 + C(5,2) * 3^7 - C(5,3) * 2^7 + C(5,4) * 1^7 = 16800$

Exercice 2. Un employé de quincaillerie effectue le ménage des tiroirs à vis de son département. Il choisit d'effectuer sa tâche selon un protocole de ménage qu'il imagine, car il est très consciencieux : il divise la quantité de vis en deux parties égales; si la quantité de vis est égale à un, il la nettoie et la met de côté pour la replacer. Sinon, pour chacune des parties, il répétera deux fois le protocole de ménage des tiroirs. À chaque fois qu'il divise une quantité de vis en deux, il sait qu'il devra les replacer correctement dans les tiroirs, ce qui lui prend un temps équivalent au nettoyage du carré du nombre de vis dans la quantité qu'il vient de diviser. Quelle est la complexité, en termes d'opérations de nettoyage, de l'algorithme qu'il vient d'inventer? $f(n) = 4 * f(n/2) + n^2$; On a la complexité $O(n^2 \log(n))$

Exercice 3. Des quintuplées décident de jouer un tour à leurs parents et d'échanger leurs vêtements afin qu'ils les confondent. Après l'échange de vêtements, aucune ne se retrouve avec son habillement original. Combien y a-t-il de façons de parvenir à ce résultat? Il s'agit d'un dérangement, puisqu'on ne peut pas se retrouver avec un élément inchangé. $D_5 = 5! * (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) = 44$

Exercice 4. Un algorithme a trois cas particuliers; il se résout en $a_0 = 5$ opérations lorsqu'il ne s'opère sur aucun argument, en $a_1 = -1$ opérations lorsqu'il s'opère sur un seul argument (il saute une étape qui est toujours faite dans les autres cas), et il se résout en $a_2 =???$ lorsqu'il s'opère sur deux arguments (on a oublié de tester ce cas). Par contre, on sait que pour tout nombre d'arguments suivant, on peut résoudre l'algorithme en $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}$. Trouver la solution de la relation de récurrence. $a_n = (4\alpha_3 - 11)3^n + (-5\alpha_3 + 16)2^n + \alpha_3(-2)^n$

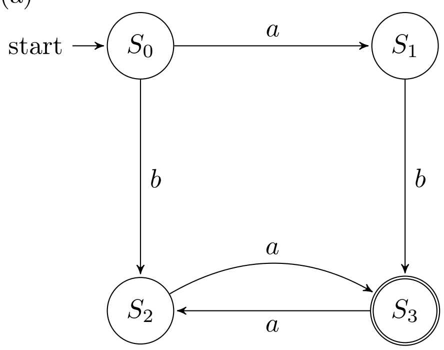
Exercice 5. Quelle est la borne asymptotique des relations de récurrence avec fractionnement suivantes?
(1) $T(n) = 3T(n/5) + \Theta(n)$ $O(n)$
(2) $T(n) = 4T(n/4) + \Theta(n)$ $O(n \log(n))$
(3) $T(n) = 6T(n/5) + \Theta(n^2)$ $O(n^2)$

Exercice 6. Soit la grammaire G définie par G = (V, T, S, P) où V = $\{a, b, S, A\}$, T = $\{a, b\}$, S symbole de départ et P = $\{S \to bS, S \to aS, A \to aS, A \to bA, A \to a, S \to b\}$.
(1) Quel est le type de la grammaire de G.
(2) Montrer que la chaîne *bbabbab* est dans L(G) en donnant une dérivation.

Solution
(1) Grammaire de type 3
(2) $S \to bS$
$S \to bbS (car S \to bS)$
$S \to bbaS (car S \to aS)$
$S \to bbabS (car S \to bS)$
$S \to bbabbS (car S \to bS)$
$S \to bbabbaS (car S \to aS)$
$S \to bbabbab (car S \to b)$

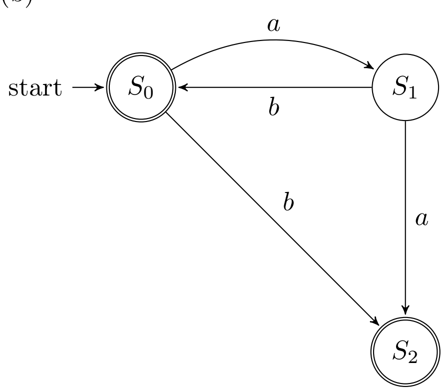
Exercice 7. Donnez les grammaires générées par les langages reconnus par les automates suivants :

(a)



G = (V, T, $S_0, P), V = \{a, b, S_0, S_1, S_2, S_3\}, T = \{a, b\}$, S_0 symbole de départ et P = $\{S_0 \to aS_1, S_0 \to bS_2, S_1 \to bS_3, S_1 \to b, S_2 \to aS_3, S_2 \to a, S_3 \to aS_2\}$.

(b)

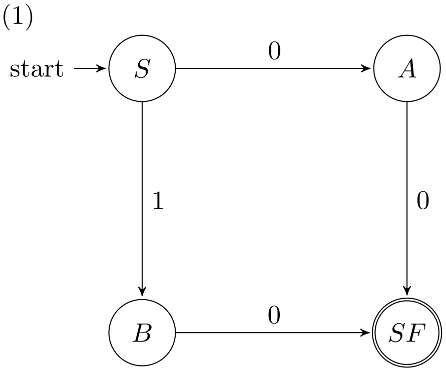


G = (V, T, $S_0, P), V = \{a, b, S_0, S_1, S_2\}, T = \{a, b\}$, S_0 symbole de départ et P = $\{S_0 \to aS_1, S_0 \to bS_2, S_1 \to bS_0, S_1 \to aS_2,\ S_0 \to \epsilon,\ S_2 \to \epsilon\}$.

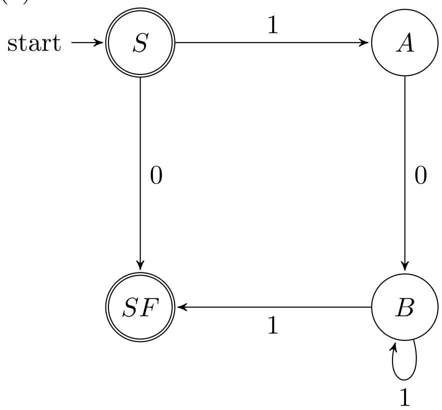
Exercice 8. Donnez un automate fini qui reconnaît le langage produit par la grammaire G = (V, T, S, P) avec V = {0, 1, S, A, B}, T = {0, 1}, S le symbole de départ et ayant l'ensemble de productions :

(1) $S \to 0A, S \to 1B, A \to 0, B \to 0$
(2) $S \to 1A, S \to 0, S \to \lambda, A \to 0B, B \to 1, B \to 1B$

solution
(1)



(2)



Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 11 (page 625); 10, 17 (page 634); 8 (page 655).