LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 4 : INDUCTION, RECURSIVITÉ
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Récursivité

Exercice 1. Donnez une définition récursive de l'ensemble des entiers positifs congrus à 3 modulo 7 ou congrus à 5 modulo 7.
$a_0 = 3$; $a_1 = 5$; $a_{n+2} = a_n + 7$

Exercice 2. Donnez une définition récursive de l'ensemble des entiers positifs congrus à 3 modulo 5 et congrus à 4 modulo 7.
$a_0 = 18$; $a_{n+1} = a_n + 35$

Exercice 3. Donnez une définition récursive de la suite a_n.

1. $a_n = 2n + 1$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2$
2. $a_n = 3 - 2^n$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Indication : Utiliser la suite $b_n = a_n - 3$.
3. $a_n = 2^{2^n}$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = a_n^2$
4. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$

Exercice 4. La fonction d'Ackermann est une fonction récursive à deux paramètres entiers définie par :

$$f(n,m) = \begin{cases} m+1 & Si\ n = 0 \\ f(n-1,1) & Si\ n \geq 1\ et\ m = 0 \\ f(n-1, f(n, m-1)) & Si\ n \geq 1\ et\ m \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $f(1,0), f(2,0), f(3,0)$ Réponse : $f(1,0) = 2; f(2,0) = 3; f(3,0) = 5$
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(1,k) = k+2$ Indication : Preuve par induction
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(2,k) = 2k+3$ Indication : Preuve par induction
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(3,k) = 2^{k+3} - 3$ Indication : Preuve par induction

Exercice 5. Pour tout réel x et pour tout entier positif non nul n on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

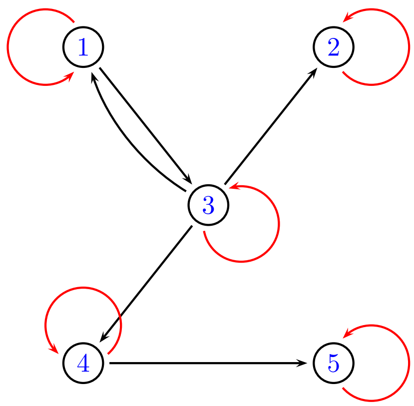
En utilisant la notion d'itération, donner l'algorithme d'une fonction qui calcule $S_n(x)$.

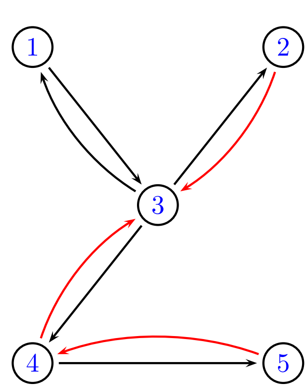
2. Fermeture des relations

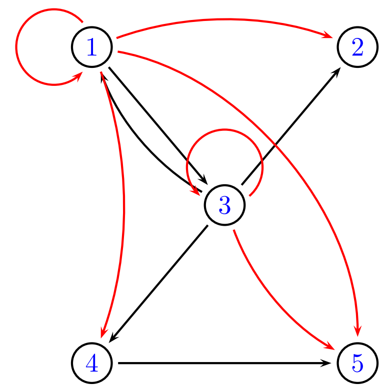
Exercice 6. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $A = \{1,2,3,4,5\}$ par : $\{(1,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,5)\}$.

1. Dessiner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
4. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.

Les graphes des fermetures réflexive, symétrique et transitive de la relation $\mathcal{R}$ sont respectivement :







Exercice 7. On considère les trois ensembles $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{0, 3, 5\}$ et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ et $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ définies par : $\mathcal{R} = \{(4, a), (6, a), (6, b), (4, c), (6, c)\}$ et $\mathcal{S} = \{(a, 0), (b, 5), (c, 5), (d, 3)\}$

1. Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
2. Donner la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.

$$M_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(4, 0), (6, 0), (6, 5), (4, 5)\}$$

Exercice 8. Soit la relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par : $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a \times b \leq a + b\}$.

1. Donner la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.
2. En déduire que $\mathcal{R} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 35 (page 198) ; 18, 21 (page 205) ; 29 (page 214) ; 40 (page 215)