LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

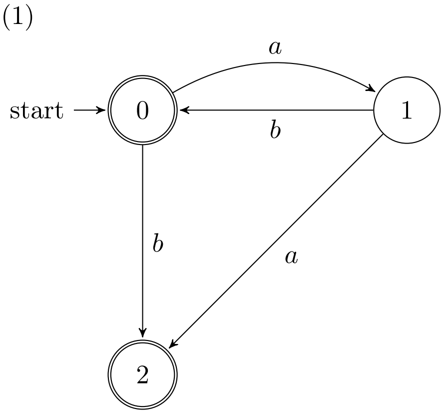
TD 10 : MACHINES DÉTERMINISTES ET NON DÉTERMINISTES
CORRIGÉ DES EXERCICES

Notez que, dans la plupart des cas, il existe plusieurs solutions possibles à un problème.

Exercice 1. Déterminez si 1011 appartient à chacun des ensembles réguliers ci-après :

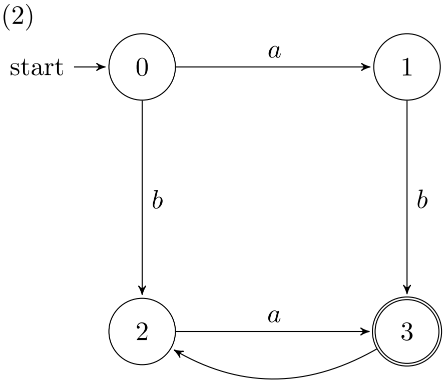
(1) 10^*1^*.Oui
(2) $0^*(10 \cup 11)^*$. Oui
(3) $0(01)^*1^*$. Non
(4) $1^*01(0 \cup 1)$. Oui
(5) $(10)^*(11)^*$. Oui
(6) $1(00)^*(11)^*$. Non
(7) $(10)^*1011$. Oui

Exercice 2. Donner une expression régulière représentant les langages reconnus par chacun des automates suivants :
(1)



$(ab)^*(b + aa + \epsilon)$

(2)

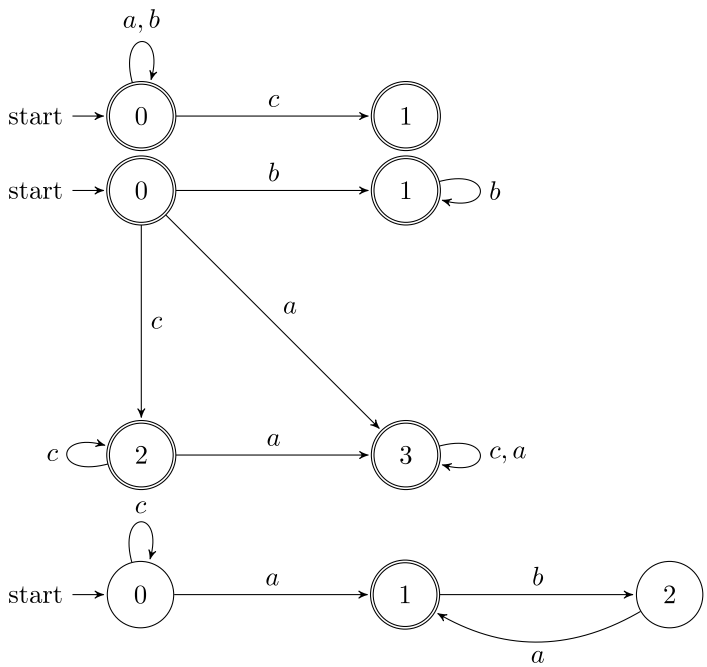


$(ab + ba)(aa)^*$

Exercice 3. Donner, pour chaque langage sur A = {a, b,c} donné par les expressions régulières suivantes,un automate fini déterministe qui le reconnaisse:

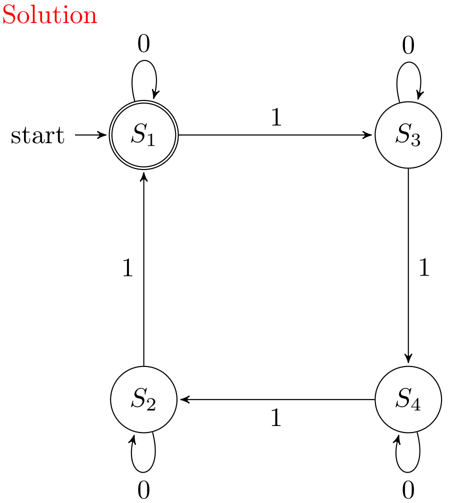
(1) $(a+b)^*(\epsilon + c)$
(2) $(b)^* + c^*(c+a)^*$
(3) $(c)^*(a + a(ba)^*)$

Solution



Exercice 4. Construisez un automate fini déterministe qui reconnait le langage suivant: $L = \{x \in \{0,\ 1\}^*,\ nb1(x) \equiv 0 \mod 4\}$
$nb1(x)$ représente le nombre de 1 dans x , $\equiv$ la relation de congruence.

Solution

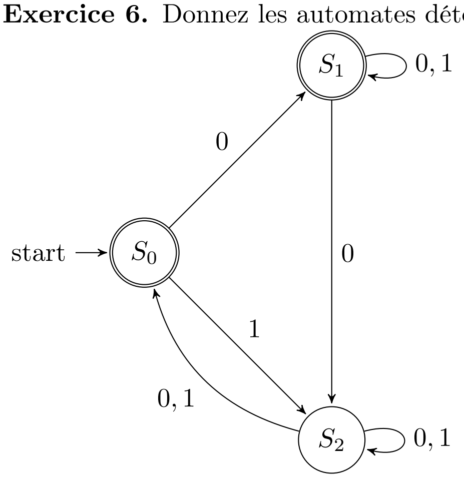


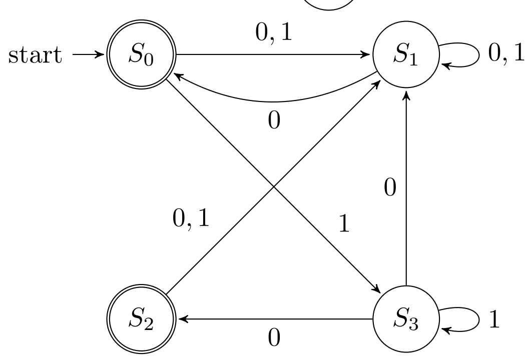
Exercice 5. La machine à états du Père Noël

Le Père Noël aimerait livrer trois cadeaux à la maison des Bélanger, puisque les trois enfants de la maison ont respectivement demandé pour Noël un hamster, un chat et des brioches à la cannelle. Malheureusement, son habituel traîneau magique casse durant la livraison et il ne peut plus l'utiliser pour transporter plusieurs cadeaux à la fois. Il devra donc faire plusieurs allers-retours entre la carcasse du traîneau et la maison des Bélanger afin d'achever la livraison. Toutefois, il est conscient que s'il laisse sans surveillance le hamster avec les brioches à la cannelle, celui-ci en profitera pour grignoter les brioches. Également, il sait que s'il laisse sans surveillance le chat avec le hamster, le chat mangera sans aucune arrière-pensée le hamster. Comment doit-il procéder afin d'achever le transport des cadeaux sans jamais laisser le chat et le

hamster seuls ou alors les brioches et le hamster seuls que ce soit dans la maison des Bélanger ou à côté de la carcasse du traîneau ? Faites une machine à états qui représente cette situation en considérant toutes les fins possibles c'est-à-dire HM : le hamster est mangé, BM : les brioches sont mangées et NR : Le Père Noël réussit à se rendre chez les Bélanger en ayant transféré les trois cadeaux sans aucune catastrophe.
Solution : Plusieurs formes de machines sont possibles. On peut par exemple utiliser des états qui représentent les positions des cadeaux au traîneau ou à la maison, et des arcs qui représentent le transport d'un des cadeaux.

Exercice 6. Donnez les automates déterministes correspondant aux automates ci-après.

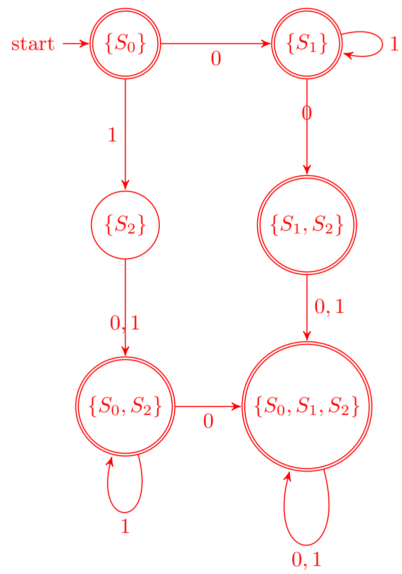




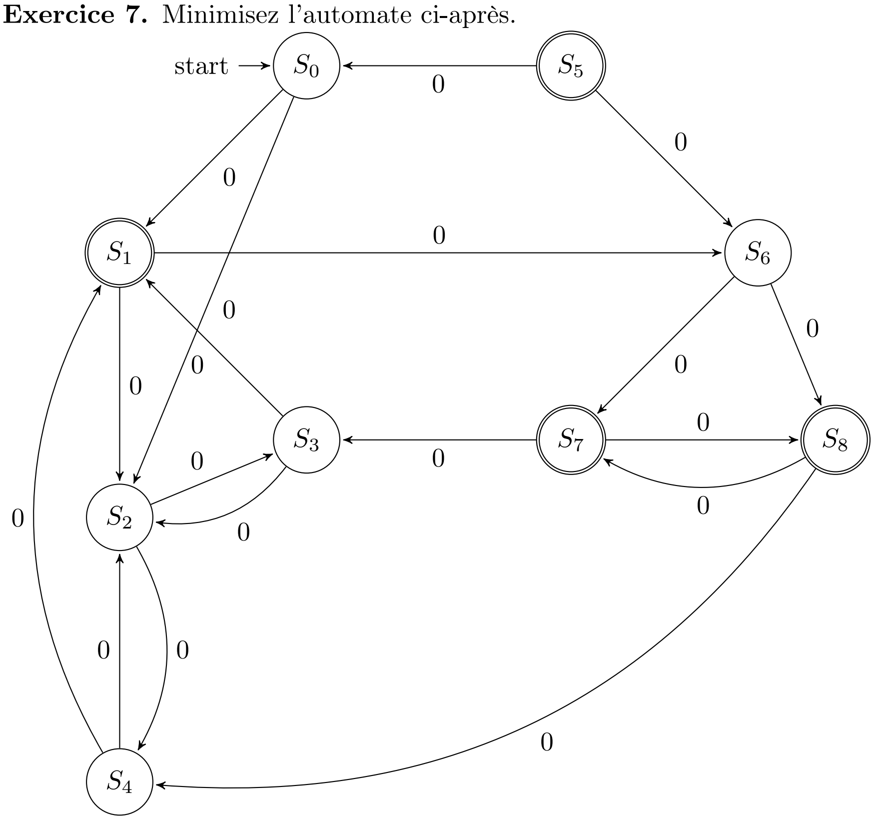
Solution

Premier automate :

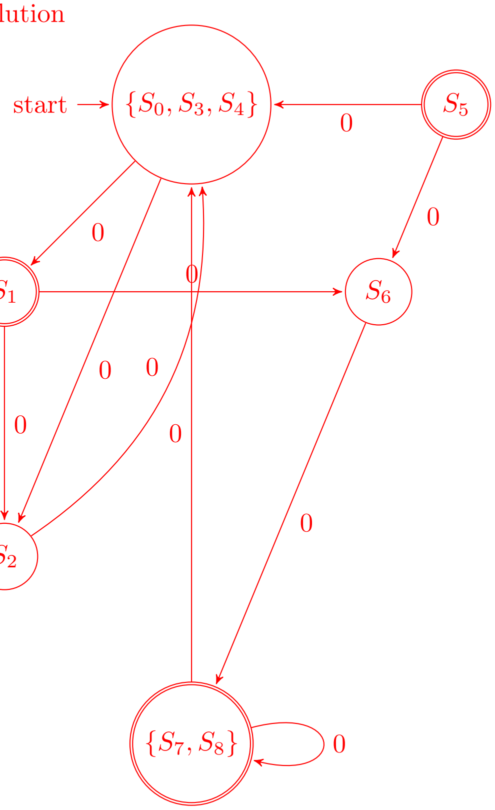
États	f (I) : 0	f (I) : 1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$	$\{S_1\}$
$\{S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$
$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$



Exercice 7. Minimisez l'automate ci-après.



Solution



Exercice 8. Soit L le langage constitué de tous les palindromes. Montrez que L n'est pas régulier.

Solution

Supposons L régulier. Soit p l'entier du lemme de pompage. Quel que soit $m \in L$ avec $|m| \geq p$, il existe une décomposition uvw de m telle que $|uv| \leq p$, $v \neq \epsilon$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, $uv^iw \in L$. Il suffit donc de prendre un mot dans L (puisque le lemme s'applique quel que soit le mot) et de montrer qu'aucune décomposition de ce mot ne respecte les trois conditions à la fois (puisque le lemme dit qu'il en existe une). Posons $m = a^pba^p$. m est un palindrome de longueur $2p + 1 \geq p$. Ses décompositions uvw respectant les deux premières conditions sont de la forme : $u = a^j$, $v = a^k$, $w = a^{p\text{-}j\text{-}k}ba^p$ avec $j + k \leq p$, $k \geq 1$. Pour $i = 2$: $uv^2w = a^ja^{2k}a^{p\text{-}j\text{-}k}ba^p = a^{p+k}ba^p$ qui n'est pas un palindrome puisque $k \neq 0$. Donc, L n'est pas régulier.