LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 4 : RELATIONS - FONCTIONS - NOTATION ASYMPTOTIQUE
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Relations

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{T}$ suivante :

$$(x, y)\ \mathcal{T}\ (x', y')\ si\ |x - x'| \leq\ y - y'$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.
   - Réflexivité. Il faut montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y)\ \mathcal{T}\ (x, y)$.
     Trivial.
   - Anti-symétrie. Montrons que
     $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ (x, y)\ \mathcal{T}\ (x', y')$ et $(x', y')\ \mathcal{T}\ (x, y) \leftrightarrow (x, y) = (x', y')$
     $(x, y)\ \mathcal{T} (x', y') \leftrightarrow\ |x - x'| \leq\ y - y'$ et $(x', y')\ \mathcal{T}\ (x, y) \leftrightarrow\ |x' - x| \leq\ y' - y$
     $|x - x'|\ =\ |x' - x|$, $|x - x'| \leq\ y - y'$ et $|x - x'| \leq\ -(y - y')$ donc $y - y' = 0$, soit $y = y'$. On en déduit que $|x - x'| = 0$, soit $x = x'$.
   - Transitivité. Montrons que
     $\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2,\ (x, y)\ \mathcal{T}\ (x', y')\ et\ (x', y')\ \mathcal{T}\ (x'', y'')\ \rightarrow\ (x, y)\ \mathcal{T}\ (x'', y'')$
     $(x, y)\ \mathcal{T}\ (x', y')\ et\ (x', y')\ \mathcal{T}\ (x'', y'') \rightarrow |x - x'| \leq\ y - y'$ et $|x' - x''| \leq\ y' - y''$
     En sommant les deux inégalités on a : $|x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$.
     Or $|(x - x') + (x' - x'')| \leq |x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$, donc $|x - x''| \leq y - y''$
2. $\mathcal{T}$ est-elle une relation d'ordre total ?
   Non. Il suffit de montrer un contre-exemple, soit les couples (10,2) et (1,0).

Exercice 2. Dans $\mathbb{N}^*$ on définit la relation $<<$ suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ x\ <<\ y\ s'il\ existe\ n \in \mathbb{N}^*\ tel\ que\ y = x^n$$

Montrer que $<<$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

$<<$ est une relation d'ordre si $<<$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

- Réflexivité : Montrons que $\forall x \in \mathbb{N}^*,\ il\ existe\ n\ \in \mathbb{N}^*\ tel\ que\ x = x^n$.
  $x = x^n \rightarrow log(x) = log(x^n)$
  $x = x^n \rightarrow log(x) = nlog(x)$
  En prenant $n = 1$, on conclut la réflexivité de $<<$.
- Antisymétrie : Montrons que $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $x\ <<\ y\ et\ y\ <<\ x$, alors $x = y$.
  $x\ <<\ y \rightarrow\ y = x^n$ et $y\ <<\ x \rightarrow\ x = y^n$
  En combinant, on obtient : $y = (y^n)^n$, soit $y = y^{n^2}$. Ainsi, $n = 1$ et $x = y$.
- Transitivité : Montrons que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$, si $x\ <<\ y$ et $y\ <<\ z$, alors $\exists\ n \in \mathbb{N}^*,\ x\ <<\ z$.
  $x\ <<\ y \rightarrow\ y = x^n$ et $y\ <<\ z \rightarrow\ z = y^n$
  En combinant, on obtient : $z = (x^n)^n \rightarrow z = x^{n^2}$
  En posant $N = n^2$, on a $N \in \mathbb{N}^*$ et $z = x^N$ donc $x\ <<\ z$.

$<<$ est donc une relation d'ordre. C'est un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$ car pour le couple (2,6), il n'existe aucun entier $n \in \mathbb{N}^*\ tel\ que\ 6 = 2^n$.

2. Fonctions

Exercice 3. Soient

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 3n$ $\qquad$ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

Où $\lfloor n \rfloor$ désigne la fonction plancher de n (encore appelée la partie entière de n).

1. f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1. Déterminez $F = f(E)$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 + |x|$

   $\forall x \in \mathbb{R}, -(1 + |x|) < x < 1 + |x|$

   $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-(1+|x|)}{1+|x|} < \frac{x}{1+|x|} < \frac{1+|x|}{1+|x|}$

   $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{x}{1+|x|} < 1$

   On a : $F = f(E) =]-1, 1[$
2. Vérifiez que f est une bijection de E sur F.
3. Précisez f^{-1}.
   $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$

Exercice 5. À 14h durant l'été, sous une température avoisinant 35°C, on dépose un morceau de viande sur un comptoir. Le morceau de viande contient 100 bactéries. On fait l'hypothèse que dans ces conditions, le nombre de bactéries double toutes les 15 minutes.
Soit $\mathcal{U}_n$ est le nombre de bactéries à un moment déterminé, $\mathcal{U}_{n+1}$ le nombre de bactéries 15 minutes plus tard.

1. Préciser la nature et la raison de la suite $(\mathcal{U}_n)$.
   Suite géométrique de raison 2.
2. Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n.
   $\mathcal{U}_n = 100 \times 2^n$
3. Calculer le nombre de bactéries à 16h.
   25600
4. En supposant que les conditions ne changent pas, à quelle heure (arrondie au quart d'heure supérieur) aurait-on 150 000 bactéries sur le morceau de viande ?
   16h45

Exercice 6. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 8$, $U_{n+1} = 2U_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 3$.

1. Exprimer V_{n+1} en fonction de U_{n+1}, puis V_{n+1} en fonction de U_n.
   $V_{n+1} = U_{n+1} - 3$ et $V_{n+1} = 2U_n - 6$.
2. Donner l'expression de V_{n+1} en fonction de V_n. Que peut-on dire de la suite (V_n) ?
   $V_{n+1} = 2V_n$
   V_n est une suite géométrique de raison 2.
3. Donner l'expression de V_{n+1} en fonction de n. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
   $V_{n+1} = V_0 \times 2^n$; $V_0 = 5$ et on a $V_{n+1} = 10 \times 2^n$
   $U_n = V_n + 3$; $U_n = 5 \times 2^n + 3$
4. Justifier que tous les nombres U_n sauf U_0 ont une écriture décimale se terminant par le chiffre 3.
   On sait que 2^n est divisible par 2, donc 5×2^n est divisible par 5 et par 2. On en déduit que 5×2^n est divisible 10.
   $U_n = 5 \times 2^n + 3$, alors tous les entiers $U_n - 3 = V_n$ sont donc divisibles par 10. Ainsi, leur écriture décimale se termine toujours par 0. L'écriture décimale de tout $U_n = V_n + 3$ se termine par le chiffre 3.

Exercice 7. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 2$.
Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$

- Étape de base
  $U_0 = 2$; $1 \leq 2 \leq 2$, donc $1 \leq U_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie.
- Étape inductive
  Supposons jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie.
  $1 \leq U_n \leq 2 \rightarrow 2 \leq 1 + U_n \leq 3$
  $1 \leq U_n \leq 2 \rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+U_n} \leq \frac{1}{2}$
  $1 \leq U_n \leq 2 \rightarrow 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 1 + \frac{1}{2}$
  $1 \leq U_n \leq 2 \rightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2$
  $1 \leq U_n \leq 2 \rightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 2$
  $1 \leq U_n \leq 2 \rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2$
  Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion
  $P(0)$ est vraie. En supposant jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie, on a $P(n+1)$ qui est vraie.
  D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 2$.

Exercice 8. Soit C_n la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n : $C_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Notation asymptotique

Exercice 9. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant les constantes c et k les plus petites possibles.

a. $f(x) = 5x^2 + 2x^3 + 7$
   n = 3, c = 14, k = 1.

b. $f(x) = \frac{x^4+8x}{x^2+3}$
   n = 2, c = 9/4, k = 1.

c. $f(x) = 3x^2 - x\ log(x)$
   n = 2, c = 3, k = 1.

d. $f(x) = 2x^4 - 4\ log^3(x)$
   n = 4, c = 2, k = 1.

Exercice 10. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = \sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^4}{16}$
c. $f_3(n) = e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(n) = 2^{log_2(n)}$

$f_4(n) \subseteq f_1(n) \subseteq f_5(n) \subseteq f_2(n) \subseteq f_3(n)$

4. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 (pages 64) ; 15, 18, 20, 24 et 26 (pages 65) ; 8, 9 et 14 (pages 73) ; 26 et 27 (pages 83).