LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 7 : ARBRES DE RECOUVREMENT ET DÉNOMBREMENT
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. ARBRES DE RECOUVREMENT

Exercice 1. Une compagnie ferroviaire désire installer des chemins de fer entre les villes Sainte-Hélène-de-Chester (H), Saints-Martyrs-Canadiens (M), Sacré-Coeur-de-Marie-Partie-Sud (C), Sainte-Praxède (P), Saint-Hilaire-de-Dorset (D), Saint-Gédéon-de-Beauce (G), Saint-Évariste-de-Forsyth (E), Saint-Louis-de-Gonzague (L) et Saint-Joseph-de-Coleraine (J). Elle a calculé les coûts des travaux pour les chemins suivants :

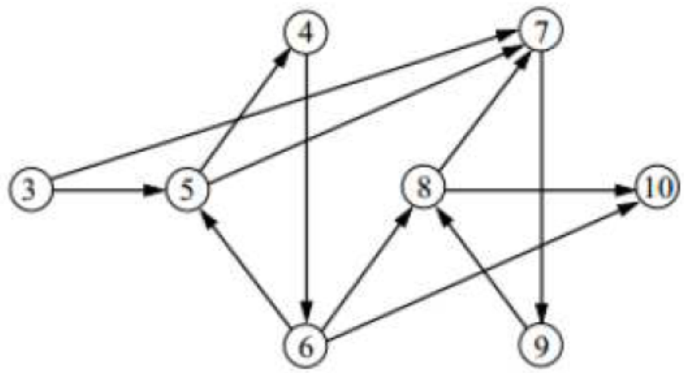
	C	D	E	G	H	J	L	M	P
C	-								
D	-	-							
E	7	2	-						
G	-	1	3	-					
H	2	-	8	-	-				
J	3	-	2	-	1	-			
L	1	-	2	-	-	5	-		
M	-	4	-	-	3	2	-	-	
P	-	4	2	-	-	3	-	1	-

a. Appliquez l'algorithme de Kruskal pour déterminer le réseau de chemins de fer qui coûte le moins cher, mais qui relie toutes les villes.
b. Appliquez l'algorithme de Prim pour déterminer le réseau de chemins de fer qui coûte le moins cher, mais qui relie toutes les villes.

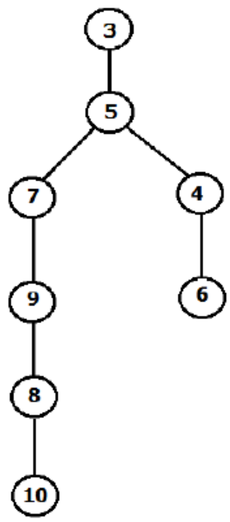
Solution :
Plusieurs réponses sont valides, par exemple :

a. G-D-E-L-C-H-J-M-P.
b. H-J-M-P-E-{L-C}{D-G}.

Exercice 2. En réalisant un parcours en profondeur du graphe suivant à partir du sommet 3, donnez-en un arbre de recouvrement.



Solution: PLusieurs solutions sont valides pour cette exercice.



2. DÉNOMBREMENT

Exercice 3. Principe d'inclusion-exclusion : combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 700 qui ne sont

a. divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 7 ?

$$700 - \left\lfloor \frac{700}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{700}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{700}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{700}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{700}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{700}{3 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{700}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor = 200$$

b. divisibles ni par 3, ni par 6, ni par 9, ni par 11?

$$700 - \left\lfloor \frac{700}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{700}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{700}{3 \cdot 11} \right\rfloor = 425$$

Exercice 4. Quel est le coefficient de x^a lorsque $b = 12$ pour y^b dans le développement de $(2x + y)^{16}$?

Solution

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) x^{n-k} y^k$

$(2x + y)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C(16, k) 2^{16-k} x^{16-k} y^k$

Si on prend $k = b = 12$, $C(16, 12) = 16!/(12!(16 - 12)!) = 1820$

Le coefficient de x^a avec $a = 4$ est $1820 * 2^4 = 29120$

Exercice 5. Dans un jeu de 52 cartes, on choisit 5 cartes au hasard. (ces 5 cartes s'appellent une "main").

a. Combien de mains contiennent exactement 2 dames et 1 roi ? $\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{44}{2} = 22704$

b. Combien de mains contiennent au moins 3 rois? $\binom{4}{3} \times \binom{48}{2} + \binom{48}{1} \times \binom{4}{4} = 4560$

Exercice 6. Dans une boite contenant 20 balles dont 6 sont rouges, 6 vertes et 8 bleues:

a. De combien de manières peut-on sélectionner 5 balles si toutes les balles sont considérées comme distinctes ? $\binom{20}{5}$
b. De combien de manières peut-on sélectionner 2 rouges, 3 vertes, et 2 bleues si toutes les balles sont considérées comme distinctes ?$\binom{6}{2} \times \binom{6}{3} \times \binom{8}{2}$
c. On retire 5 balles, puis on les replace, puis on retire encore 5 balles. De combien de manières différentes peut-on effectuer cela si les balles sont considérées comme distinctes ? $\binom{20}{5} \times \binom{20}{5}$
d. On retire 5 balles, sans les replacer, puis on retire encore 5 balles. De combien de manières différentes peut-on effectuer cela si les balles sont considérées comme distinctes ? $\binom{20}{5} \times \binom{15}{5}$

Exercice 7. Un alphabet de 40 symboles est utilisé pour transmettre des messages de 25 symboles.

a. Combien de messages peut-on transmettre si les répétitions de symboles sont permises ?40^{25}
b. Combien de messages peut-on transmettre si les répétitions de symboles ne sont pas permises ? $P(40, 25)$
c. Combien de messages peut-on transmettre si 10 parmi les 40 symboles ne peuvent apparaitre que comme premiers ou derniers symboles avec :
   c.a. les répétitions permises ? $30^{25} + (10 \times 30^{24}) + (10 \times 30^{23} \times 10) + (10 \times 30^{24})$
   c.b. les répétitions non permises ? $P(30, 25) + (P(10, 1) \times P(30, 24)) + (P(10, 1) \times P(30, 23) \times P(9, 1)) + (P(10, 1) \times P(30, 24))$

Exercice 8. Parmi les permutations de l'ensemble E = a, b, c, d, e, f (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

Pour avoir ab seul on a : $5 \times 4! - 42$ possibilités. Pareil pour cd seul ou ef seul. Au total on a : $3(5 \times 4! - 42) = 234$ possibilités.
Pour avoir ab et cd ensemble et sans ef on a : 18 possibilités. Pareil pour cd et ef sans ab puis ab et ef sans cd. Au total on a : 54 possibilités.
Pour avoir ab, cd et ef ensemble on a : 6 possibilités.
Le résultat recherché est alors $6! - 3(5 \times 4! - 42) - (3 \times 18) - 6 = 426$ possibilités de permutations

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 13, 20, 21, 32, 39 (Pages 300-301) ; 8, 18 (Page 308) ; 11, 17 (Page 331).