POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 1 : LOGIQUE ET ENSEMBLES
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. Logique

Exercice 1. Construisez une table de vérité pour chacune des propositions composées suivantes et indiquez si elles sont des tautologies, des contradictions ou des contingences :

a. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ *Vrai si p et q sont vrais ou si p et q sont faux, faux autrement. Contingence.*
Exemple de résolution avec équivalences logiques
$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
$\Longleftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
$\Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
$\Longleftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee p) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee q)$
$\Longleftrightarrow ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q))$
$\Longleftrightarrow (VRAI \wedge (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee q) \wedge VRAI)$
$\Longleftrightarrow (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$
Comme continuer la résolution avec ces mêmes techniques ne ferait que tourner en rond, on arrête ici. On voit qu'il s'agit d'une contingence, car il est possible d'obtenir VRAI pour certaines valeurs de p et q et FAUX dans d'autres cas. Testons les valeurs pour chaque ligne de la table.

p	q	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

b. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ *Tautologie.*
Exemple de résolution avec équivalences logiques
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Avec la double équivalence, on peut séparer l'expression en deux parties comme suit :
$a \leftrightarrow b \Longleftrightarrow a \rightarrow b \wedge b \rightarrow a$
Commençons par l'expression de gauche à droite.
$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
$\Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p)$
$\Longleftrightarrow (\ p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p$
$\Longleftrightarrow ((\ p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$
$\Longleftrightarrow ((\ p \vee q) \wedge VRAI) \vee \neg p$
$\Longleftrightarrow\ p \vee q \vee \neg p$
$\Longleftrightarrow\ p \vee \neg p$
Comme on obtient que les valeurs de vérité dépendent d'une variable ou son contraire, ce qui est toujours VRAI, on peut conclure qu'il s'agit d'une tautologie.
Continuons par l'expression de droite à gauche.
$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$
$\Longleftrightarrow \neg(q \vee \neg p) \vee (\neg p \vee q)$
$\Longleftrightarrow (\neg q \wedge p) \vee \neg p \vee q$

$\Longleftrightarrow ((\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p)) \vee q$
$\Longleftrightarrow ((\neg q \vee \neg p) \wedge VRAI) \vee q$
$\Longleftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee q$
$\Longleftrightarrow \ q \vee \neg q$
On obtient aussi, pour ce côté de l'expression, que les valeurs de vérité dépendent d'une variable ou son contraire, ce qui est toujours VRAI. Donc,
$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \wedge (\neg q \to \neg p) \to (p \to q) \Longleftrightarrow VRAI \wedge VRAI \Longleftrightarrow VRAI$

p	q	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	V

c. $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ *Tautologie.*
d. $(p \wedge q) \vee \neg r$ *Faux si p est faux et r est vrai, ou que p et r sont vrai alors que q est faux. Vrai autrement. Contingence.*
e. $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$ *Tautologie.*
f. $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$ *Faux lorsque tout est faux, ou alors lorsque p et r sont faux et q est vrai, ou lorsque p est vrai et q est faux. Vrai autrement. Contingence.*

Exercice 2. Si les énoncés p, q et r sont en français :
p: Les fantômes me font peur.
q : Je crie très fort.
r : Je n'appelle pas S.O.S. fantômes.
Traduisez en français les propositions composées du numéro précédent.

a. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ *Si les fantômes me font peur ou si je crie très fort, alors les fantômes me font peur et je crie très fort.*
b. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ *Si lorsque les fantômes me font peur, je crie très fort, alors lorsque je ne crie pas les fantômes ne me font pas peur et réciproquement.*
c. $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ *Soit les fantômes me font peur ou je crie très fort, mais pas les deux, ou soit les fantômes me font peur ou je ne crie pas, mais pas les deux.*
d. $(p \wedge q) \vee \neg r$ *Soit les fantômes me font peur et je crie très fort, ou soit j'appelle S.O.S. fantômes.*
e. $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$ *Soit si les fantômes me font peur, alors je crie très fort, ou soit si les fantômes ne me font pas peur alors je n'apelle pas S.O.S. fantômes.*
f. $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$ *Si les fantômes me font peur, alors je crie très fort et si les fantômes ne me font pas peur, alors je n'appelle pas S.O.S. fantômes.*

Exercice 3. Écrivez la contraposée, la réciproque ainsi que la contraposée de la réciproque des implications suivantes :

a. Si je suis au régime, alors je mange une pomme ou une poire mais pas une barre de chocolat.
Contraposée : Si je mange une barre de chocolat, mais pas une pomme ni une poire alors je ne suis pas au régime.
Réciproque : Si je mange une pomme ou une poire mais pas une barre de chocolat, alors je suis au régime.
C. de R. : Si je ne suis pas au régime, alors je mange une barre de chocolat, mais pas une pomme ni une poire.
b. Lorsqu'il pleut, je ne vais pas au cinéma ni chez le coiffeur.
Contraposée : Lorsque je vais au cinéma ou chez le coiffeur, il ne pleut pas.
Réciproque : Lorsque je ne vais pas au cinéma ni chez le coiffeur, il pleut.
C. de R. : Lorsqu'il ne pleut pas, je vais au cinéma ou chez le coiffeur.
c. Si je ne vais pas visiter Sept-Îles, alors ma soeur ne me prête pas sa voiture ou je n'ai pas assez d'argent.

Contraposée :Si je ne vais pas visiter Sept-Îles, alors ma soeur ne me prête pas sa voiture ou je n'ai pas assez d'argent.
Réciproque : Si je vais visiter Sept-îles, alors ma soeur me prête sa voiture et j'ai assez d'argent.
C. de R. : Si ma soeur ne me prête pas sa voiture ou si je n'ai pas assez d'argent, alors je ne vais pas visiter Sept-Îles.

d. Étudier en sciences est nécessaire pour devenir médecin ou ingénieur.
Contraposée : Ne pas devenir médecin ni ingénieur est nécessaire pour ne pas étudier en sciences.
Réciproque : Devenir médecin ou ingénieur est nécessaire pour étudier en sciences.
C. de R. : Ne pas étudier en sciences est nécessaire pour ne pas devenir médecin ni ingénieur.

Exercice 4. Soit $P(x)$ l'énoncé «x chante souvent au karaoké.». Soit $Q(x)$ l'énoncé «x fausse horriblement.». L'univers du discours est l'ensemble des journalistes du Polyscope. Exprimez les qualifications suivantes en langage courant.

a. $\exists(x,y)|P(x,y)Q(y)$
Il existe au moins deux journalistes du Polyscope tels qu'ils vont souvent au karaoké, et dont au moins un fausse horriblement.

b. $\forall x Q(x)\neg P(x)$
Tous les journalistes du Polyscope faussent horriblement, mais ne chantent pas souvent au karaoké.

c. $\exists!(x,y)|\neg Q(x,y)$
Il existe exactement 2 journalistes du Polyscope tels qu'ils ne faussent pas horriblement.

d. $\forall x|P(x)\exists!(y)Q(y)$
Pour tous les journalistes du Polyscope tels qu'ils chantent souvent au karaoké, il en existe exactement un qui fausse horriblement.

Exercice 5. On considère les propositions ci-dessous. L'univers du discours est l'ensemble des réels.

1. Donner la négation de chacune des propositions.
2. Écrire chacune des propositions à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques.

***Propositions* :**

a. Le carré de tout réel est positif.
Il y a un ou plusieurs réels dont le carré est négatif.
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

b. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
Tous les réels sont inférieurs ou égaux à leur carré.
$\exists x \in \mathbb{R},\ x > x^2$

c. Aucun réel n'est supérieur à tous les autres.
Il existe un réel supérieur à tous les autres réels. Comme il doit être supérieur à tous les autres, il n'y en a qu'un qui réponde à ce critère ($\exists!$).
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$

d. Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
Étant donné trois réels non nuls, tous sont de signes différents.
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0) \vee (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0)$

e. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
Il y a des réels qui peuvent s'exprimer comme un quotient d'entier.
$\neg(\forall x \in \mathbb{R}, \exists\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{a}{b})$
On peut aussi utiliser l'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$ pour exprimer les nombres qui s'écrivent comme le quotient de deux entiers relatifs, dont celui au dénominateur ne peut pas prendre la valeur nulle.

Exercice 6. Soit $P(x,y)$ l'énoncé "$x + y > 10$". L'univers du discours étant l'ensemble des nombres relatifs, déterminez quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

a. $P(3,9)$ Cette proposition est vraie.
b. $P(x,4)$ Cette proposition est vraie pour les x supérieurs à 6.

c. $\forall y P(2, y)$ Cette proposition est fausse.
d. $\forall x \exists y P(x, y)$ Cette proposition est vraie.
e. $\exists x \exists y P(x, y)$ Cette proposition est vraie.
f. $\forall y \exists x P(x, y)$ Cette proposition est vraie.
g. $\exists x \forall y P(x, y)$ Cette proposition est fausse.

2. Ensembles

Exercice 7. Les élèves de l'école primaire de Grand-mère vont à l'écurie pour faire des tours de chevaux. On peut y trouver trois couleurs de robes, car il y a des chevaux alezans, bais et noirs. Chaque élève ne peut monter qu'un cheval de chaque couleur. On sait que, parmi ces élèves :

- 15 montent un cheval de chaque couleur;
- 13 ne montent qu'un cheval noir;
- 31 ne montent qu'un cheval alezan ou un cheval bai;
- 13 montent exactement deux chevaux dont un cheval noir;
- 62 montent un cheval alezan ou un cheval noir;
- 58 ne montent pas plus d'un cheval;
- 48 ne montent pas de cheval alezan;
- 54 ont monté un cheval bai ou pas de cheval du tout.

a. Combien d'élèves montent un cheval alezan et un cheval noir? 21
b. Combien d'élèves sont allés à l'écurie? 90

Exercice 8. Soient les ensembles $A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{0, 3, 7, 8, 9\}$ et $C = \{5, 6, 7, 9\}$. Déterminer les ensembles suivants :

a. $A \cup B$ $\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b. $B - C$ $\{0, 3, 8\}$
c. $(C - B) - A\{\}$
d. $A \cap (B \cup C)\{0, 3, 5, 6, 7\}$
e. $B - (A \cap B \cap C)\{0, 3, 8, 9\}$

Exercice 9. Quelle est la cardinalité des ensembles suivants :

a. {a} 1
b. {{a}} 1
c. {a, {a}, {a, {a}}} 3
d. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ 2
e. $\{\varnothing\}$ 1
f. $P(\{\varnothing, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$ 16
g. $P(P(\varnothing))$ 2

Exercice 10. Soit A, B, E et F quatre ensembles. On sait que $A \subset E$ et que $B \subset F$. Soit P l'énoncé $A \times B \subset E \times F$.

a. Si P est vraie, et que $E \times F = \varnothing$. Que peut-on affirmer de A, B et $A \times B$?
Si $E \times F = \varnothing$, alors $E = \varnothing$ ou $F = \varnothing$.
Dans ce cas, $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ comme $A \subset E$ et $B \subset F$.
Donc, $A \times B = \varnothing$.

b. Prouvez que P est vraie.
Soit $A \subset E$ et $B \subset F$
$\forall (x, y) \in A \times B$, $x \in A$ et $y \in B$
$(x \in A$ et $y \in B)$ et $(A \subset E$ et $B \subset F)$, alors $x \in E$ et $y \in F$
$x \in E$ et $y \in F$, alors $(x, y) \in E \times F$
Donc $\forall (x, y) \in A \times B$, $(x, y) \in E \times F$
D'où $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 11. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Notons $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B. Soit C un autre sous-ensemble de E.

a. Vérifier que : $A\Delta B = B\Delta A$
Utiliser la commutativité de $\cup$ dans la formule donnée par l'énoncé.

b. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
La soustraction d'un ensemble par un autre ensemble n'enlève que les éléments contenus dans l'intersection des deux ensembles. Si le second ensemble contient des éléments qui ne se retrouvent pas dans le premier ensemble, on ne peut pas les soustraire. On a donc : $A - B = A - (A \cap B)$. Également, si on soustrait de deux ensembles le même ensemble puis qu'on fait leur union, on soustrait ni plus ni moins les mêmes éléments que lorsqu'on fait l'union des deux premiers ensembles puis qu'on soustrait le troisième. Autrement dit : $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
$A\Delta B = (A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B)) \rightarrow$ Avec la première formule.
$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \rightarrow$ Avec la seconde formule.

c. Montrer que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$
Soit $x \in \overline{A}\Delta\overline{B}$
$\iff (x \in (\overline{A} - \overline{B})) \vee (x \in (\overline{B} - \overline{A}))$
$\iff (x \in \overline{A} \wedge x \notin \overline{B}) \vee (x \in \overline{B} \wedge x \notin \overline{A})$
$\iff (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \notin B \wedge x \in A)$
$\iff x \in ((B - A) \cup (A - B))$
$\iff x \in B\Delta A = A\Delta B$

d. Montrer que $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$
Avec la contraposée :
Disons que $x \in B$ et que $x \notin C$.
Avec la formule un peu plus haut, on peut écrire :
$A\Delta B = A\Delta C$
$\iff (A - B) \cup (B - A) = (A - C) \cup (C - A)$
$\iff (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup C) - (A \cap C)$.
Dans le premier cas, on a $x \notin A$:
$x \in (A \cup B); x \notin (A \cap B)$; Donc $x \in ((A \cup B) - (A \cap B))$.
$x \notin ((A \cup C) - (A \cap C))$.
Dans le second cas, on a $x \in A$:
$x \in (A \cup B); x \in (A \cap B)$; Donc $x \notin ((A \cup B) - (A \cap B))$.
$x \in (A \cup C); x \notin (A \cap C)$; Donc $x \in ((A \cup C) - (A \cap C))$.
Dans les deux cas, $A\Delta B \neq A\Delta C$ si $B \neq C$, donc $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$.

e. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\overline{A}$, $A\Delta E$, $A\Delta\varnothing$
$A\Delta A = \varnothing$, $A\Delta\overline{A} = E$, $A\Delta E = \overline{A}$, $A\Delta\varnothing = A$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 et 4 (Page 9) ; 7, 9 (Page 10) ; 13 (Page 11) ; 8 (Page 30) ; 10, 15 (Page 31) ; 29 (Page 32) ; 6, 10, 19 (Page 51) ; 31, 32 (Page 52).

TD 1 ET 2 : LOGIQUE ET ENSEMBLES
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Logique

Exercice 1. Construisez une table de vérité pour chacune des propositions composées suivantes :

1. $(p \wedge q) \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$
3. $(p \oplus q) \vee (\neg p \oplus q)$
4. $(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg p)$

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$(p \oplus q) \vee (\neg p \oplus q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

p	q	r	$p \rightarrow (\neg q \vee r)$	$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
V	V	V	V	F
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Exercice 2. Relevez parmi les formules suivantes celles qui sont des tautologies, des contradictions ou des contingences.

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ - Réponse : tautologie
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ - Réponse : contingence
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ - Réponse : tautologie
4. $(p \leftrightarrow (r \vee q)) \rightarrow (\neg q \rightarrow p \vee r)$ - Réponse : contingence
5. $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$ - Réponse : contradiction
6. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ - Réponse : tautologie

Exercice 3. Ecrivez la réciproque et la contraposée de chacune des implications suivantes :

a. Si 2 * 3 = 7, alors je suis joueur du Canadiens de Montréal.
Réponse : Soit P la proposition "2 * 3 = 7" et Q la proposition "Je suis joueur du Canadiens de Montréal". Nous avons donc $P \rightarrow Q$.
La réciproque est $Q \rightarrow P$. Elle se traduit par : "Si je suis joueur du Canadiens de Montréal, alors 2 * 3 = 7".
La contraposée est $\neg Q \rightarrow \neg P$. Elle se traduit par : "Si je ne suis pas joueur du Canadiens de Montréal, alors $2 * 3 \neq 7$".

b. S'il fait beau et si je ne suis pas fatigué, alors je vais à la plage.
Réponse : Soit P la proposition "Il fait beau", Q la proposition "Je ne suis pas fatigué" et R la proposition "Je vais à la plage". Nous avons donc $(P \wedge Q) \rightarrow R$.
La réciproque est $R \rightarrow (P \wedge Q)$. Elle se traduit par : "Si je vais à la plage, alors il fait beau et je ne suis pas fatigué".
La contraposée est $\neg R \rightarrow \neg(P \wedge Q)$, soit $\neg R \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$. Elle se traduit par : "Si je ne vais pas à la plage, alors il ne fait pas beau ou je suis fatigué".

c. Si je deviens chevalier Jedi, alors je vais sur la Lune ou je me couronne empereur.
Réponse : Soit P la proposition "Je deviens chevalier Jedi", Q la proposition "Je vais sur la Lune" et R la proposition "Je me couronne empereur". Nous avons donc $P \rightarrow (Q \vee R)$.
La réciproque est $(Q \vee R) \rightarrow P$. Elle se traduit par : "Si je vais sur le Lune ou si je me couronne empereur, alors je deviens chevalier Jedi".
La contraposée est $\neg(Q \vee R) \rightarrow \neg P$, soit $(\neg Q \wedge \neg R) \rightarrow \neg P$. Elle se traduit par : "Si je ne vais pas sur le Lune et si je ne me couronne pas empereur, alors je ne deviens pas chevalier Jedi".

Exercice 4. Soit $P(x, y)$ l'énoncé "$x + y > 10$". L'univers du discours étant l'ensemble des nombres relatifs, déterminez quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. $P(3, 9)$
2. $P(x, 4)$
3. $\forall\, y\ P(2, y)$
4. $\exists\, x\ P(x, 100)$
5. $\exists\, x\ \exists\, y\ P(x, y)$
6. $\forall\, x\ \exists\, y\ P(x, y)$
7. $\exists\, x\ \forall\, y\ P(x, y)$
8. $\forall\, y\ \exists\, x\ P(x, y)$
9. $\forall\, x\ \forall\, y\ P(x, y)$

Exercice 5. Montrez les équivalences qui suivantes :

1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
2. $((P \vee Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R))$
3. $((P \wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))$
4. $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$
5. $(P \rightarrow (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$

Exercice 6. Isabelle souhaite reconstituer l'arbre généalogique de sa famille. Mais, elle ne dispose que des données suivantes :

- son père avait deux oncles et une tante : Arthur, Bernard et Cécile ;
- Arthur, Bernard et Cécile ont eu six enfants : Urbain, Vincent, Walter, Xavier, Yvette et Zoé ;
- Bernard a eu la famille la plus nombreuse ;
- Yvette est enfant unique ;
- Walter et Xavier n'ont qu'un frère et pas de soeur ;
- Zoé est la soeur d'Urbain et est plus âgée que lui ;
- Arthur n'a pas eu de fille.

À partir de ces informations, peut-on conclure que :

a. Cécile est la mère d'Yvette? Réponse : Oui.
b. Walter et Urbain sont frères ? Réponse : Faux.
c. Bernard a plus de fils qu'Arthur ? Réponse : Oui.
d. Zoé est l'aînée des enfants de Bernard ? Réponse : On ne peut pas conclure. Aucune information ne permet d'établir qui de Vincent ou Zoé est né(e) avant l'autre.

Exercice 7. On considère les propositions P, Q, R, S représentant respectivement les assertions : "*Paul est régulier au cours*", "*Paul est régulier aux séances de TD*", "*Paul étudie pour le cours*" et "*Paul réussit le cours*". Énoncer des phrases simples qui traduisent chacune des propositions suivantes :

a. $\neg P$

b. $\neg(P \vee Q)$
c. $\neg P \vee \neg Q$
d. $R \to (P \vee Q)$
Réponse : Si Paul étudie pour le cours, alors il est régulier au cours ou aux séances de TD.
e. $P \vee Q \wedge \neg R \to \neg S$
Réponse : Si Paul est régulier au cours ou aux séances de TD et s'il n'étudie pas pour le cours, alors il ne réussit pas le cours.
f. $P \wedge Q \wedge R \to S$
Réponse : Si Paul est régulier au cours et aux séances de TD et s'il étudie pour le cours, alors il réussit le cours.
g. $S \to (P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R)$
Réponse : Paul réussit le cours seulement s'il est régulier au cours si et seulement s'il est régulier aux séances de TD si et seulement s'il étudie pour le cours.

Exercice 8. Indiquer quel (s) est (sont) la (les) traduction (s) correcte (s) des énoncés suivants :

1. "*Ne pas perdre ce n'est pas obligatoirement gagner, alors que gagner c'est toujours ne pas perdre.*"
Soit p : "*Perdre*" et q : "*Gagner*".
   a. $q \to \neg p$
   b. $\neg p \leftrightarrow q$
   c. $(\neg p \to \neg q) \wedge (q \to \neg p)$
   d. $\neg(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)$
   e. $(q \to \neg p) \wedge (\neg p \to q)$
   f. $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \to (q \leftrightarrow \neg p)$

   Réponse : d. $\neg(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)$

2. "*Tous les enfants ne sont pas des anges.*"
Soit P le prédicat "*est un enfant*" et Q le prédicat "*est un ange*".
   a. $P \to \neg Q$
   b. $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
   c. $\forall x(Q(x) \to \neg P(x))$
   d. $\neg\, \forall x(Q(x) \Leftrightarrow P(x))$
   e. $\neg\, \forall x(P(x) \to Q(x))$
   f. $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$
   g. $\exists x(P(x) \wedge\ \neg Q(x))$
   h. $\exists x(P(x) \to \neg Q(x))$

   Réponse : e, g et h.

Exercice 9. On considère les propositions ci-dessous. L'univers du discours est l'ensemble des réels.
1. Donner la négation de chacune des propositions.
2. Écrire chacune des propositions à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques.

***Propositions* :**
a. Le carré de tout réel est positif. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
b. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré. $\exists x \in \mathbb{R},\ x > x^2$
c. Aucun réel n'est supérieur à tous les autres. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$
d. Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0) \vee (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0)$
e. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers. $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, \exists\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{a}{b})$

Exercice 10. Comparer les différentes phrases. Quelles sont celles qui sont équivalentes ? Quelles sont celles qui sont contraires ? Quelles sont celles qui impliquent les autres ?
1. $\forall x,\ \exists y,\ x = y$

2. $\exists x,\ \forall y,\ y < x$
3. $\exists x,\ \exists y,\ x \leq y$
4. $\forall x,\ \exists y,\ x \leq y$
5. $\exists x,\ \exists y,\ y < x$
6. $\exists x,\ \forall y,\ x \leq y$
7. $\forall x,\ \forall y,\ x \leq y$

Solution

Soit P_i la phrase de rang i. On a :

a. Phrases équivalentes
   - Aucune

b. Phrases contraires
   - P_7 et P_5 ; P_4 et P_2.

c. Implications
   - $P_1 \to P_3$; $P_1 \to P_4$
   - $P_2 \to P_5$
   - $P_4 \to P_3$
   - $P_6 \to P_3$
   - $P_7 \to P_1$; $P_7 \to P_3$; $P_7 \to P_4$; $P_7 \to P_6$

2. Ensembles

Exercice 11. Soient les ensembles A = { 3, 4, 5, 6, 9 }, B = { 0, 1, 5, 6, 7, 9 } et C = { 1, 2, 3, 6, 8 }. Déterminez les ensembles suivants :

- $A \cup B$
- $B - C$
- $(C - B) - A$
- $A \cap (B \cup C)$
- $B - (A \cap B \cap C)$

Exercice 12. Les 124 étudiantes et étudiants d'une école secondaire peuvent choisir d'étudier l'anglais, l'espagnol ou le mandarin. On sait que :

- 65 étudient l'anglais
- 33 étudient l'espagnol
- 25 n'étudient que le mandarin
- 9 étudient les trois langues
- 15 n'étudient aucune langue
- 22 étudient au moins deux langues
- 7 n'étudient que le mandarin et l'espagnol

1. Combien de personnes étudient-elles l'anglais ou l'espagnol ? Réponse : 84.
2. Combien de personnes étudient-elles l'anglais et l'espagnol ? Réponse : 14.
3. Combien de personnes n'étudient que l'espagnol ? Réponse : 12.
4. Combien de personnes étudient-elles le mandarin et l'anglais mais pas l'espagnol ? Réponse : 1.
5. Combien de personnes n'étudient que l'anglais ? Réponse : 50.

Exercice 13. Soit E et F deux ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que : $A \times B \subset E \times F$.

Solution :

Soit $A \subset E$ et $B \subset F$

$\forall (x, y) \in A \times B$, $x \in A$ et $y \in B$

$(x \in A$ et $y \in B)$ et $(A \subset E$ et $B \subset F)$, alors $x \in E$ et $y \in F$

$x \in E$ et $y \in F$, alors $(x, y) \in E \times F$

Donc $\forall (x, y) \in A \times B$, $(x, y) \in E \times F$

D'où $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 14. Soit E, F et G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 15. Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E. On suppose que : $A \cap B \neq \phi$, $A \cup B \neq E$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$. Montrer que :

1. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cup B}$ sont non vides.
   - $A \cap B \neq \phi$ d'après l'énoncé.
   - $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x \in A \wedge x \notin B$
     $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x \in A \wedge x \in \overline{B}$
     $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x \in A \cap \overline{B}$
     Donc $A \cap \overline{B} \neq \phi$
   - $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x \in B \wedge x \notin A$
     $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x \in B \wedge x \in \overline{A}$
     $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x \in B \cap \overline{A}$
     Donc $B \cap \overline{A} \neq \phi$
   - $A \cup B \neq E \rightarrow \exists x \in E, x \notin A \cup B$
     $A \cup B \neq E \rightarrow \exists x \in E, x \in \overline{A \cup B}$
     Donc $\overline{A \cup B} \neq \phi$
2. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cup B}$ sont deux à deux disjoints.
   - $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap B \cap \overline{B}$
     $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap \phi$, car $B \cap \overline{B} = \phi$
     $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \phi$, car $A \cap \phi = \phi$
     Donc $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont disjoints.
   - $(A \cap B) \cap (B \cap \overline{A}) = A \cap B \cap \overline{A}$
     $(A \cap B) \cap (B \cap \overline{A}) = B \cap \phi$, car $\cap$ est commutatif et $A \cap \overline{A} = \phi$
     $(A \cap B) \cap (B \cap \overline{A}) = \phi$, car $B \cap \phi = \phi$
     Donc $A \cap B$ et $B \cap \overline{A}$ sont disjoints.
   - $(A \cap B) \cap (\overline{A \cup B}) = A \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
     $(A \cap B) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi$, car $\cap$ est commutatif et $A \cap \overline{A} = \phi, B \cap \overline{B} = \phi$
     Donc $A \cap B$ et $\overline{A \cup B}$ sont disjoints.
   - $(A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) = A \cap \overline{B} \cap B \cap \overline{A}$
     $(A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) = \phi$, car $\cap$ est commutatif et $A \cap \overline{A} = \phi, B \cap \overline{B} = \phi$
     Donc $A \cap \overline{B}$ et $B \cap \overline{A}$ sont disjoints.
   - $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
     $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi \cap \overline{B}$, car $\cap$ est commutatif et $A \cap \overline{A} = \phi$
     $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi$
     Donc $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$ sont disjoints.
   - $(B \cap \overline{A}) \cap (\overline{A \cup B}) = B \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
     $(B \cap \overline{A}) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi \cap \overline{A}$, car $\cap$ est commutatif et $B \cap \overline{B} = \phi$
     $(B \cap \overline{A}) \cap (\overline{A \cup B}) = \phi$
     Donc $B \cap \overline{A}$ et $\overline{A \cup B}$ sont disjoints.
3. $(A \cap B) \bigcup (A \cap \overline{B}) \bigcup (B \cap \overline{A}) \bigcup (\overline{A \cup B}) = E$
   $(A \cap B) \bigcup (A \cap \overline{B}) \bigcup (B \cap \overline{A}) \bigcup (\overline{A \cup B}) = (A \cap B) \bigcup (A \cap \overline{B}) \bigcup (B \cap \overline{A}) \bigcup (\overline{A} \cap \overline{B})$
   $= [(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] \bigcup [(B \cap \overline{A}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})]$
   $= [(A \cup (A \cap \overline{B})) \cap (B \cup (A \cap \overline{B}))] \bigcup [(B \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) \cap (\overline{A} \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))]$
   $= [A \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A) \cap (B \cup \overline{B})] \bigcup [(B \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{A}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$
   $= [A \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A) \cap E)] \bigcup [(B \cup \overline{A}) \cap E \cap \overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$
   $= [A \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A))] \bigcup [(B \cup \overline{A}) \cap \overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$
   $= [A \cap (B \cup A)] \bigcup [\overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$
   $= A \cup \overline{A}$
   $= E$

Exercice 16. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A \Delta B$, le sous ensemble de E :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}$$

1. Montrer que $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

2. Démontrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \phi$
3. Calculer $A\Delta A,\ A\Delta\overline{A},\ A\Delta E,\ A\Delta\phi$
   $A\Delta A = \phi,\ A\Delta\overline{A} = E,\ A\Delta E = \overline{A},\ A\Delta\phi = A$
4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E, on a :

$$(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$$

$$(A\Delta B)\cap\overline{C} = (A\cup C)\Delta(B\cup C)$$

- **Première méthode de démonstration de** $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$
  Il s'agit de démontrer que $((A\Delta B)\cap C)\subset((A\cap C)\Delta(B\cap C))$ et $((A\cap C)\Delta(B\cap C))\subset((A\Delta B)\cap C)$
  - Démontrons que $((A\Delta B)\cap C)\subset((A\cap C)\Delta(B\cap C))$
    Si $x\in(A\Delta B)\cap C$, alors $x\in A\Delta B$ et $x\in C$
    Si $x\in A\Delta B$ et $x\in C$, alors $x\in A$ et $x\notin B$ et $x\in C$
    Si $x\in A$ et $x\notin B$ et $x\in C$, alors $(x\in A$ et $x\in C)$ et $(x\notin B$ et $x\in C)$
    Si $(x\in A$ et $x\in C)$ et $(x\notin B$ et $x\in C)$, alors $x\in A\cap C$ et $x\notin B\cap C$
    Si $x\in A\cap C$ et $x\notin B\cap C$, alors $x\in(A\cap C)\Delta(B\cap C)$
    On déduit que $((A\Delta B)\cap C)\subset((A\cap C)\Delta(B\cap C))$
  - Démontrons que $((A\cap C)\Delta(B\cap C))\subset((A\Delta B)\cap C)$
    Si $x\in(A\cap C)\Delta(B\cap C)$, alors $x\in A\cap C$ et $x\notin B\cap C$
    Si $x\in A\cap C$ et $x\notin B\cap C$, alors $x\in A$ et $x\in C$ et $x\notin B\cap C$
    Si $x\in A$ et $x\in C$ et $x\notin B\cap C$, alors $x\in A$ et $x\in C$ et $x\notin B$
    Si $x\in A$ et $x\in C$ et $x\notin B$, alors $x\in A$ et $x\in\overline{B}$ et $x\in C$
    Si $x\in A$ et $x\in\overline{B}$ et $x\in C$, alors $x\in A\cap\overline{B}$ et $x\in C$
    Or $A\cap\overline{B}\subset A\Delta B$ car $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$
    Donc si $x\in A\cap\overline{B}$ et $x\in C$, alors $x\in A\Delta B$ et $x\in C$
    Si $x\in A\Delta B$ et $x\in C$, alors $x\in A\Delta B\cap C$
    On déduit que $((A\cap C)\Delta(B\cap C))\subset((A\Delta B)\cap C)$
- **Deuxième méthode de démonstration de** $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$
  Pour démontrer que $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$, il suffit de développer chacune des deux parties de l'égalité de manière à trouver une même expression, puis conclure.
  - $(A\Delta B)\cap C = \left[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]\cap C$
    $(A\Delta B)\cap C = \left[(A\cap\overline{B})\cap C\right]\cup\left[(\overline{A}\cap B)\cap C\right]$
    $(A\Delta B)\cap C = (A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$
  - $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[(A\cap C)\cap\overline{B\cap C}\right]\cup\left[\overline{A\cap C}\cap(B\cap C)\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[(A\cap C)\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\right]\cup\left[(\overline{A}\cup\overline{C})\cap(B\cap C)\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[A\cap C\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\right]\cup\left[(\overline{A}\cup\overline{C})\cap B\cap C\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[A\cap(C\cap(\overline{B}\cup\overline{C}))\right]\cup\left[((\overline{A}\cup\overline{C})\cap C)\cap B\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \left[A\cap(C\cap\overline{B})\right]\cup\left[(\overline{A}\cap C)\cap B\right]$
    $(A\cap C)\Delta(B\cap C) = (A\cap\overline{B}\cup C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$

- **Première méthode de démonstration de** $(A\Delta B)\cap\overline{C} = (A\cup C)\Delta(B\cup C)$
  Il s'agit de démontrer que $((A\Delta B)\cap\overline{C})\subset((A\cup C)\Delta(B\cup C))$ et $((A\cup C)\Delta(B\cup C))\subset((A\Delta B)\cap\overline{C})$
- **Deuxième méthode de démonstration de** $(A\Delta B)\cap\overline{C} = (A\cup C)\Delta(B\cup C)$
  Pour démontrer que $(A\Delta B)\cap\overline{C} = (A\cup C)\Delta(B\cup C)$, il suffit de développer chacune des deux parties de l'égalité de manière à trouver une même expression, puis conclure.
  - $(A\Delta B)\cap\overline{C} = \left[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]\cap\overline{C}$
    $(A\Delta B)\cap C = \left[(A\cap\overline{B})\cap C\right]\cup\left[(\overline{A}\cap B)\cap\overline{C}\right]$
    $(A\Delta B)\cap C = (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})$
  - $(A\cup C)\Delta(B\cup C) = \left[(A\cup C)\cap\overline{B\cup C}\right]\cup\left[\overline{A\cup C}\cap(B\cup C)\right]$
    $(A\cup C)\Delta(B\cup C) = \left[(A\cup C)\cap(\overline{B}\cap\overline{C})\right]\cup\left[(\overline{A}\cap\overline{C})\cap(B\cup C)\right]$
    $(A\cup C)\Delta(B\cup C) = \left[(A\cup C)\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right]\cup\left[\overline{A}\cap\overline{C}\cap(B\cup C)\right]$
    $(A\cup C)\Delta(B\cup C) = \left[((A\cup C)\cap\overline{C})\cap\overline{B}\right]\cup\left[\overline{A}\cap(\overline{C}\cap(B\cup C))\right]$

$(A \cup C)\Delta(B \cup C) = (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C} \cap B)$
$(A \cup C)\Delta(B \cup C) = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$

Exercice 17. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Notons $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B

1. Vérifier que : $A\Delta B = B\Delta A$
   Indication : Utiliser la commutativité de $\cup$ dans la formule donnée par l'énoncé.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
3. Montrer que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$
4. Démontrer que $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 et 4 (Page 9) ; 7, 9 (Page 10) ; 13 (Page 11) ; 8 (Page 30) ; 10, 15 (Page 31) ; 29 (Page 32) ; 6, 10, 19 (Page 51) ; 31, 32 (Page 52).

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 2 : LOGIQUE ET ENSEMBLES
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Exercice 1. On considère les énoncés suivants.

a. Si les Belges aiment le fromage ou si les Équatoriens font de l'équitation, alors le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
b. Si le président du Ghana boit des smoothies aux bananes et que son chat est en surpoids, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
c. Soit il n'est pas vrai que si le chat du président du Ghana est en surpoids, alors les Belges aiment le fromage, soit il est vrai que si les Équatoriens font de l'équitation, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
d. Les Indonésiens ne fabriquent pas de chaises berçantes.

---

e. Conclusion.

Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions. Parmi les conclusions suivantes, lesquelles sont valides?

a. Les Belges n'aiment pas le fromage.
b. Les Belges n'aiment pas le fromage ou les Équatoriens ne font pas d'équitation.

Résolution
Considérons les prédicats suivants :
b : Les Belges aiment le fromage.
e : Les Équatoriens font de l'équitation.
g : Le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
c : Le chat du président du Ghana est en surpoids.
i : Les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : (b \vee e) \to g$
$h_2 : (g \wedge c) \to i$
$h_3 : \neg(c \to b) \vee (e \to i)$
$h_4 : \neg i$

Conclusion.
On a :

1	$\neg i$	h_4
2	$\neg(g \wedge c)$	h_2 *et* h_4, *Modus Tollens*
3	$\neg(b \vee e)$	h_1 *et* $\neg g$ *ou* $\neg c$ *vu en* 2
4	$(e \to i)$	h_3, *Syllogisme disjonctif et* $\neg g$ *ou* $\neg c$ *vu en* 2
5	$\neg e$	h_4, *Modus Tollens et* $(e \to i)$ *vu en* 4
6	$\neg e \vee \neg(b \vee e)$	*Selon les* 2 *possibilités.*

La seule conclusion qu'on peut tirer de ce raisonnement est donc que les Équatoriens ne font pas d'équitation. La seconde conclusion b est valide par addition.

Exercice 2. On considère le raisonnement suivant.

a. L'antilope est un animal herbivore.
b. Le lion est un animal féroce.
c. Un animal féroce est carnivore.
d. Un carnivore mange un herbivore.
e. Un animal chasse ce qu'il mange.

---

f. Le lion chasse l'antilope.

Le raisonnement est-il valide ?

Résolution

Considérons les prédicats suivants :
$H(x)$: x est un herbivore.
$F(x)$: x est un animal féroce.
$C(x)$: x est un carnivore.
$M(x,y)$: x mange y.
$Ch(x,y)$: x chasse y.
Soient les constantes l : lion et a : antilope. On a
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : H(a)$
$h_2 : F(l)$
$h_3 : F(x) \to C(x)$
$h_4 : C(x) \wedge H(y) \to M(x,y)$
$h_5 : M(x,y) \to Ch(x,y)$

$Ch(l,a)$
On a :

1	$F(x) \to C(x)$	h_3
2	$F(l) \to C(l)$	h_3 *et instanciation universelle*
3	$F(l)$	h_2
4	$C(l)$	h_2 *et étape 2 et règle du modus ponens*
5	$H(a)$	h_1
6	$C(l) \wedge H(a)$	*Conjonction des étapes 4 et 5*
7	$C(x) \wedge H(y) \to M(x,y)$	h_4
8	$C(l) \wedge H(a) \to M(l,a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_4 *(étape 7)*
9	$M(l,a)$	*Étapes 6 et 8 et règle du modus ponens*
10	$M(x,y) \to Ch(x,y)$	h_5
11	$M(l,a) \to Ch(l,a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_5 *(étape 10)*
12	$Ch(l,a)$	*Étapes 9 et 11 et règle du modus ponens*

Exercice 3. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que les trois énoncés suivants sont équivalents :

a. $n \mod 5 = x$ où $x \in \{1,2,3,4\}$.
b. n n'est pas divisible par 5.
c. $n^4 - 5n^2 + 5 \equiv 1 (\mod 5)$.

Selon la première formule, le modulo 5 de n prend les valeurs 1, 2, 3 ou 4. Les valeurs possibles du modulo 5 sont 0, 1, 2, 3 et 4. Si une quelconque valeur y est divisible par 5,alors son modulo est 0. La contraposée de cette proposition est que si le modulo 5 d'une quelconque valeur y est différent de 0, alors y n'est pas divisible par 5. Si le modulo 5 de n peut prendre toutes les valeurs possibles sauf le 0, ce qui est le cas, alors n n'est pas divisible par 5 et réciproquement. Les deux premiers énoncés sont conséquemment équivalents.
Pour prouver que le troisième énoncé est lui aussi équivalent, calculons : $n^4 - 5n^2 + 5 \equiv 1 (\mod 5)$
$n^4 - 5n^2 + 5 - 1 = 5k$ où $k \in \mathbb{N}$
$n^4 - 5n^2 + 4 = 5k$
$(n^2 - 1)(n^2 - 4) = 5k$
$(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) = 5k$
$\iff 5|(n-1) \vee 5|(n+1) \vee 5|(n-2) \vee 5|(n+2)$.

$\iff$
$5|(n-1) \to (n-1) \equiv 0 (\mod 5) \to n \equiv 1 (\mod 5)$
$\vee$
$5|(n-2) \to (n-2) \equiv 0 (\mod 5) \to n \equiv 2 (\mod 5)$
$\vee$
$5|(n+2) \to (n+2) \equiv 0 (\mod 5) \to n \equiv 3 (\mod 5)$
$\vee$
$5|(n+1) \to (n+1) \equiv 0 (\mod 5) \to n \equiv 4 (\mod 5)$
$\iff$
$n \mod 5 = x$ où $x \in \{1, 2, 3, 4\}$
Cette troisième formule est donc équivalente à la première et par la preuve que nous venons de faire juste avant, à la seconde. Les trois énoncés sont conséquemment équivalents.

Exercice 4. Démontrer, en considérant chaque cas, que si x et y sont des nombres réels, alors $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Solution

Raisonnons par cas. Trois cas sont facilement identifiables, le premier étant lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, le second lorsque $x \leq 0$ et $y \leq 0$ et le dernier lorsque les deux variables sont de signe différent. Dans ce troisième cas, peu importe si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ ou le contraire, car nous avons des opérations commutatives. x et y sont donc des variables interchangeables.
Dans le premier cas, $x \geq 0 \to |x| = x$, $y \geq 0 \to |y| = y$ et $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \to |x + y| = x + y$. On se retrouve donc en présence d'un égalité. De façon similaire, dans le second cas, $x \leq 0 \to |x| = -x$, $y \leq 0 \to |y| = -y$ et $x \leq 0 \wedge y \leq 0 \to |x + y| = -(x + y) = -x - y$. On se retrouve donc en présence d'un égalité.
Dans le dernier cas, on a que $x \geq 0 \to |x| = x$ et $y \leq 0 \to |y| = -y$. D'un bord de l'équation, on a donc que $|x| + |y| = x - y$. De l'autre, on sait que $y \leq x + y \leq x$, et donc que $|x + y| \leq |x| = x$ si $|x| \geq |y|$ et que $|x + y| \leq |y| = -y$ si $|y| \geq |x|$. On peut donc écrire :
$|x| + |y| \geq |x| \geq |x + y|$ ou $|x| + |y| \geq |y| \geq |x + y|$
$\iff |x| + |y| \geq |x + y|$ est vraie quelque soit le cas.

Exercice 5. Utilisez le raisonnement par l'absurde pour démontrer que :

a. $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier.

Solution

«$\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier» est un énoncé qui peut prendre des valeurs de vérité différentes étant donné l'entier n que l'on utilise. En effet, si on pose $n = 0$, on obtient $\sqrt{0^2 + 1} = \pm 1$ (considérons uniquement la valeur positive de la racine, puisque la négative ne sera jamais entière), et donc qu'il est possible d'obtenir un entier. «$\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier» prend donc la valeur de vérité FAUX dans ce cas. Qu'en est-il pour un autre n que zéro?
Nous avons à montrer que $n \in \mathbb{N}^* \to \sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ est entier. Pour l'entier 1 on a $\sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ n'est pas entier. Donc $n \in \mathbb{N}^* \to \sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier lorsqu'on utilise $n = 1$, ce qui confère à notre énoncé de départ la valeur de vérité VRAI.
Maintenant, si on teste plusieurs autres valeurs après le 0, on se rend compte que jamais l'énoncé de départ ne donne un entier. Essayons de généraliser cette observation. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier. Raisonnons par l'absurde, ce qui fait que nous aurons une nouvelle version de notre supposition : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ est entier. Or, nous savons que, dans le cas de deux entiers consécutifs, leurs carrés ne seront jamais deux nombres consécutifs. Cela implique que si $\sqrt{n^2} = n$ est entière car $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ ne peut pas être entière car n^2 et $n^2 + 1$ sont deux nombres consécutifs. Cette conclusion est absurde d'après notre raisonnement, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier est VRAI.

b. si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.

Solution :

Posons qu'il existe un $a_j \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tel que la moyenne des $a_1, a_2, ..., a_n$ est plus petite ou égale à a_j. Si on raisonne par l'absurde, on poserait plutôt que $\forall a_j \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, la moyenne des $a_1, a_2, ..., a_n$ est plus grande que a_j. Or, dans le cas où on choisit le a_j comme étant plus grand

ou égal à tous les autres $a_1, a_2, ..., a_n$:
$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq a_j * n$
$(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n \leq a_j * n/n$
$moyenne(a_1, a_2, ..., a_n) \leq a_j$
Or, c'est absurde, car nous avions dit que la moyenne des $a_1, a_2, ..., a_n$ devait être plus grande que a_j. On peut donc affirmer que si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.

c. aucun entier $(6n + m)(n + 6m)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, n'est une puissance de 2.
Solution :
Supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $e = (6n + m)(n + 6m)$ soit une puissance de 2.
e étant une puissance de 2, alors $(6n + m)$ et $(n + 6m)$ sont aussi des puissances de 2 et par conséquent ils sont pairs. Il s'en suit que n et m sont aussi pairs (de plus ils sont non nuls).
Posons $n = 2k$ et $m = 2t$. On a $e = (12k + 2t)(2k + 12t) = 4(6k + t)(k + 6t) = 2^2(6k + t)(k + 6t)$.
En menant le même raisonnement que précédemment, on obtient que $(6k + t)$ et $(k + 6t)$ sont des puissances de 2 et que k et t sont pairs. Le procédé pourrait donc continuer à l'infini. Ce qui prouve que e ne peut être une puissance de 2 (sinon le développement serait fini, on devrait s'arrêter à un moment donné).

Exercice 6. Utilisez la contraposée en formant une preuve indirecte pour démontrer que :

a. soit a un réel, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si $a/2$ est un entier pair, alors a^2 est un multiple entier de 16.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que $a/2$ est un entier pair.
Alors, $\exists k \in \mathbb{N}, a/2 = 2k$. Nous avons $a = 4k$ et $a^2 = 16k$. D'où a^2 est un multiple entier de 16.

b. pour un entier n quelconque, si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si n est un entier impair quelconque, alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que n peut s'écrire $(2x+1)$, où $x \in \mathbb{Z}$ est un entier. Alors, $(n^2 - 1) = 4(x^2 + x)$. Nous avons que $\forall x$, $x^2 + x$ est pair et peut donc s'écrire sous la forme $x^2 + x = 2t$ D'où $n^2 - 1 = 4 * 2t = 8t$ est divisible par 8.

2. Relations

Exercice 7. Parmi les relations suivantes de l'ensemble de tous les Canadiens,

- $\{(a, b)$, a et b ont le même âge$\}$
- $\{(a, b)$, a et b ont les mêmes parents$\}$
- $\{(a, b)$, a et b ont un parent en commun$\}$
- $\{(a, b)$, a et b parlent une même langue maternelle$\}$ — on considère une seule langue maternelle par personne

a. Lesquelles sont des relations d'équivalence?
Solution
- $\{(a, b)$, a et b ont le même âge$\}$ est une relation d'équivalence.
- $\{(a, b)$, a et b ont les mêmes parents$\}$ est une relation d'équivalence.
- $\{(a, b)$, a et b parlent une même langue maternelle$\}$ est une relation d'équivalence.

b. Pour celles qui ne sont pas des relations d'équivalence, indiquer et justifier les propriétés manquantes.
Solution
$\{(a, b)$, a et b ont un parent en commun$\}$ n'est pas transitive. En effet, a et b peuvent avoir le même père, mais pas la même mère; b et c peuvent avoir la même mère, mais pas le même père. Dans ce cas-là, a est en relation avec b, et b est en relation avec c, mais a n'est pas en relation avec c.

c. Pour celles qui sont des relations d'équivalence, indiquer les classes d'équivalences respectives.
Solution

- $\{(a,b),\ a$ et b ont le même âge$\}$: chaque âge est une classe d'équivalence. On a donc l'ensemble des $\mathbb{N}$.
- $\{(a,b),\ a$ et b ont les mêmes parents$\}$: l'ensemble des enfants de mêmes parents est une classe d'équivalence.
- $\{(a,b),\ a$ et b parlent une même langue maternelle$\}$: chaque langue parlée comme langue maternelle est une classe d'équivalence.

Exercice 8. Soit $E = \{5, 6, 7, 8\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d)\ \textit{si}\ (a + c)\ \textit{est pair et}\ (b - d)\ \textit{est divisible par}\ 3$$

a. Donner le cardinal de $E \times E$. 16

b. Donner la matrice de $\mathcal{R}$. Pour construire la matrice, il faut considérer que :
(5,5) est relation avec les couples suivants : (5,5), (5,8), (7,5), (7,8).
(5,6) est relation avec les couples suivants : (5,6), (7,6).
(5,7) est relation avec les couples suivants : (5,7), (7,7).
(5,8) est relation avec les couples suivants : (5,5), (5,8), (7,5), (7,8).
(6,5) est relation avec les couples suivants : (6,5), (6,8), (8,5), (8,8).
(6,6) est relation avec les couples suivants : (6,6), (8,6).
(6,7) est relation avec les couples suivants : (6,7), (8,7).
(6,8) est relation avec les couples suivants : (6,5), (6,8), (8,5), (8,8).
(7,5) est relation avec les couples suivants : (5,5), (5,8), (7,5), (7,8).
(7,6) est relation avec les couples suivants : (5,6), (7,6).
(7,7) est relation avec les couples suivants : (5,7), (7,7).
(7,8) est relation avec les couples suivants : (5,5), (5,8), (7,5), (7,8).
(8,5) est relation avec les couples suivants : (6,5), (6,8), (8,5), (8,8).
(8,6) est relation avec les couples suivants : (6,6), (8,6).
(8,7) est relation avec les couples suivants : (6,7), (8,7).
(8,8) est relation avec les couples suivants : (6,5), (6,8), (8,5), (8,8).

c. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.Vérifier que les trois propriétés sont vérifiées.

d. Donner le nombre total et la liste des différentes classes d'équivalence. On désigne par $\overline{(a,b)}$, la classe d'équivalence de (a, b).
Il y a six classes d'équivalence.
$\{(5, 5), (5, 8), (7, 5), (7, 8)\}$
$\{(5, 6), (7, 6)\}$
$\{(5, 7), (7, 7)\}$
$\{(6, 5), (6, 8), (8, 5), (8, 8)\}$
$\{(6, 7), (8, 7)\}$
$\{(6, 6), (8, 6)\}$

e. Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(5,5)}$, $\overline{(5,6)}$, $\overline{(5,7)}$.Compter.

Exercice 9. Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$ par

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ ou } y \leq x'$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E. Cette relation d'ordre est-elle totale ?
$\preccurlyeq$ est réflexive et transitive (trivial).
Antisymétrie : si $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ et $(x', y') \preccurlyeq (x, y)$ alors $(x, y) = (x', y')$ ou $x \leq y \leq x' \leq y' \leq x$, donc $(x, y) = (x, x) = (x', y')$ Il est clair que cette relation d'ordre est totale.

Exercice 10. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E à la fois réflexive et transitive.
On définit les nouvelles relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par:

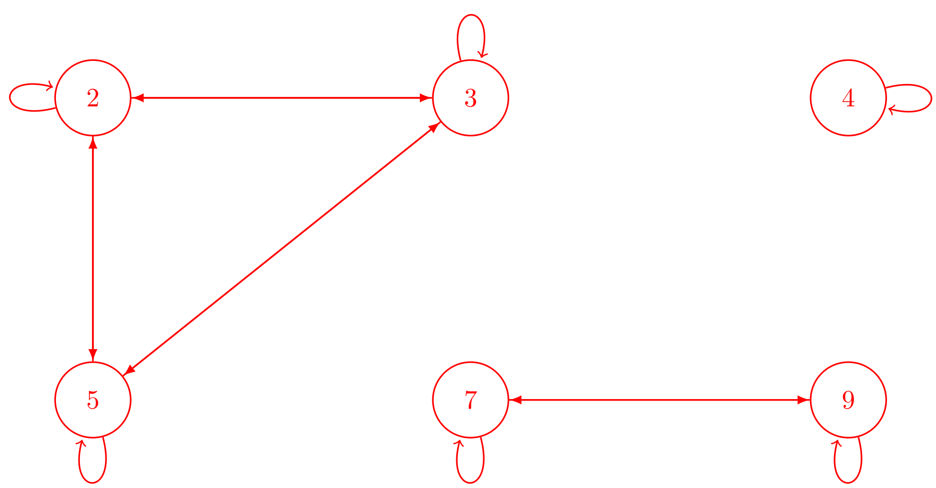
$$x\mathcal{S}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \text{ et } x\mathcal{T}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

Les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont-elles des relations d'équivalence?
$\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont réflexives et symétriques (trivial).
Transitivité : soient $x, y, z \in E$.

- $\mathcal{S}$: On suppose que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$.
  Ceci implique que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, donc $x\mathcal{R}z$ (par transitivité de $\mathcal{R}$)
  De même, $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y \implies z\mathcal{R}x$
  Donc $\mathcal{S}$ est transitive, c'est donc une relation d'équivalence.
- $\mathcal{T}$: on se doute que c'est faux. Construisons un contre-exemple :
  Posons $E = \{0, 1, 2\}$ et $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2), (0, 2)\}$.
  On a $2\mathcal{T}0$ (car $0\mathcal{R}2$) et $0\mathcal{T}1$ (car $0\mathcal{R}1$).
  Mais pas $2\not\mathcal{T}1$ (on n'a ni $2\mathcal{R}1$ ni $1\mathcal{R}2$).
  Donc $\mathcal{T}$ n'est pas transitive et n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice 11. Soit $E = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.
Soit $\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (7, 7), (7, 9), (9, 7), (9, 9)\}$.

(1) Représenter $\mathcal{R}$ par un graphe.
(2) $\mathcal{R}$ forme-t-elle une partition de E ?



Oui (deux possibilités : en montrant que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, ou en écrivant cette partition.)

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 10 (pages 10) ; 11 à 19 (pages 17) ; 28, 41, 44, 45, 46, 47(pages 171).

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 3 : RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE - RELATIONS
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Exercice 1. On considère le raisonnement suivant.

a. S'il fait beau, je vais nager.
b. Si la piscine est fermée, je ne peux pas nager.
c. Lorsque l'équipe d'entretien travaille, la piscine est fermée.
d. l'équipe d'entretien travaille et il fait beau.

---

e. Je ne vais pas nager.

Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions. Le raisonnement est-il valide ?

Exercice 2. On considère le raisonnement suivant.

a. L'antilope est un animal herbivore.
b. Le lion est un animal féroce.
c. Un animal féroce est carnivore.
d. Un carnivore peut manger un herbivore.
e. Un animal chasse ce qu'il mange.

---

f. Le lion chasse l'antilope.

Le raisonnement est-il valide ?
Résolution
Considérons les prédicats suivants :
$H(x)$: x est un herbivore.
$F(x)$: x est un animal féroce.
$C(x)$: x est un carnivore.
$M(x, y)$: x mange y.
$Ch(x, y)$: x chasse y.
Soient les constantes l : lion et a : antilope. On a
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : H(a)$
$h_2 : F(l)$
$h_3 : F(x) \to C(x)$
$h_4 : C(x) \wedge H(y) \to M(x, y)$
$h_5 : M(x, y) \to Ch(x, y)$

$Ch(l, a)$

On a :

1	$F(x) \to C(x)$	h_3
2	$F(l) \to C(l)$	h_3 *et instanciation universelle*
3	$F(l)$	h_2
4	$C(l)$	h_2 *et étape* 2 *et règle du modus ponens*
5	$H(a)$	h_1
6	$C(l) \wedge H(a)$	*Conjonction des étapes* 4 *et* 5
7	$C(x) \wedge H(y) \to M(x,y)$	h_4
8	$C(l) \wedge H(a) \to M(l,a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_4 (*étape* 7)
9	$M(l,a)$	*Étapes* 6 *et* 8 *et règle du modus ponens*
10	$M(x,y) \to Ch(x,y)$	h_5
11	$M(l,a) \to Ch(l,a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_5 (*étape* 10)
12	$Ch(l,a)$	*Étapes* 9 *et* 11 *et règle du modus ponens*

Exercice 3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $n^3 - n$ est divisible par 6

   Solution

   Première méthode

   $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$

   $n^3 - n$ est le produit de 3 entiers consécutifs. Donc au moins un de ces entiers est pair, ce qui implique que $n^3 - n$ est pair. De plus, au moins un de ces entiers est multiple de 3, ce qui implique que $n^3 - n$ est divisible par 3.

   $n^3 - n$ est divisible à la fois par 2 et 3. Il est alors divisible par 6.

   Deuxième méthode

   On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, n \ mod \ 6 \in \{0,1,2,3,4,5\}$
   - Si $n \ mod \ 6 = 0$, alors $n^3 mod \ 6 = 0$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 1$, alors $n^3 mod \ 6 = 1$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 2$, alors $n^3 mod \ 6 = 2$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 3$, alors $n^3 mod \ 6 = 3$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 4$, alors $n^3 mod \ 6 = 4$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 5$, alors $n^3 mod \ 6 = 5$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$

   En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 6.
2. $n^5 - n$ est divisible par 30
3. $n^7 - n$ est divisible par 42

Exercice 4. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
- soit $n \times m$ est pair,
- soit $n^2 - m^2$ est multiple de 8.

Solution

Soient P et Q les propositions : "$n \times m$ est pair" et "$n^2 - m^2$ est multiple de 8", respectivement. L'exercice revient à montrer que $P \vee Q$ est vrai.

Raisonnons par cas.

En se basant sur la parité des entiers n et m, quatre cas sont à considérer : n pair et m pair, n pair et m impair, n impair et m pair, n impair et m impair.

Si n est pair ou m est pair, alors $n \times m$ est pair. Donc dans les 3 premiers cas (n pair et m pair, n pair et m impair, n impair et m pair) la proposition P est vrai. Il s'en suit que $P \vee Q$ est vrai.

Il ne reste à considérer que le cas n impair et m impair.

On a:

$\forall k \in \mathbb{Z}, k$ impair $\ \to \ k \ mod \ 8 \in \{1,3,5,7\}$

$k \ mod \ 8 \in \{1,3,5,7\} \ \to \ k^2 \ mod \ 8 = 1$

Puis que n est impair et m est impair, on a $n^2 \ mod \ 8 = 1$ et $m^2 \ mod \ 8 = 1$

Par suite, $(n^2 - m^2 \ mod \ 8) = 0$, c'est à dire $(n^2 - m^2)$ est multiple de 8. Q est donc vrai. Il s'en suit que $P \vee Q$ est vrai.

Exercice 5. Démontrer pour tout entier naturel n, on a $n^2 + 3n$ qui est un entier pair.

Exercice 6. En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer qu'aucun entier $(6n+m)(n+6m)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, n'est une puissance de 2.
Solution :
Supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $e = (6n+m)(n+6m)$ soit une puissance de 2.
e étant une puissance de 2, alors $(6n+m)$ et $(n+6m)$ sont aussi des puissances de 2 et par conséquent ils sont pairs. Il s'en suit que n et m sont aussi pairs (de plus ils sont non nuls).
Posons $n = 2k$ et $m = 2t$. On a $e = (12k+2t)(2k+12t) = 4(6k+t)(k+6t) = 2^2(6k+t)(k+6t)$.
En menant le même raisonnement que précédemment, on obtient que $(6k+t)$ et $(k+6t)$ sont des puissances de 2 et que k et t sont pairs. Le procédé pourrait donc continuer à l'infini. Ce qui prouve que e ne peut être une puissance de 2 (sinon le développement serait fini, on devrait s'arrêter à un moment donné).

Exercice 7. En utilisant le raisonnement par contraposée (preuve indirecte) démontrer que :
Soit a un réel. Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si $a/2$ est un entier pair, alors a^2 est un multiple entier de 16.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que $a/2$ est un entier pair. Alors, $\exists k \in \mathbb{N}, a/2 = 2k$. Nous avons $a = 4k$ et $a^2 = 16k$. D'où a^2 est un multiple entier de 16.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier.
Solution
Nous avons à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier. Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^2+1}$ est entier.
On sait que $n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$. Donc en passant à la racine carrée, $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$ c'est-à-dire que $\sqrt{n^2+1}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est absurde.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.
Solution : Preuve indirecte
Montrons la contraposée, soit que si n n'est pas un nombre premier, alors $2^n - 1$ n'est pas un nombre premier.
Supposons que n n'est pas un nombre premier et montrons $2^n - 1$ n'est pas un nombre premier et qu'il peut s'exprimer sous forme de produits de facteurs autres que 1 lui-même.
n étant supposé ne pas être un nombre premier, on a : $\exists p, q \in \mathbb{N}, p \neq 1, q \neq 1, p \neq n, q \neq n, n = pq$
$2^n - 1 = 2^{pq} - 1$
$$2^n - 1 = (2^p - 1)\underbrace{\left[(2^p)^{(q-1)} + (2^p)^{(q-2)} + ... + (2^p)^2 + 2^p + 1)\right]}_{q\ termes}$$
$p \neq 1$ alors $2^p \neq 2$ donc $2^p - 1 \neq 1$. De plus, $p \neq n$ alors $2^p \neq 2^n$ donc $2^p - 1 \neq 2^n - 1$
On en déduit que $2^n - 1$ est divisible par $2^p - 1$ qui est autre que 1 et $2^n - 1$.
$2^n - 1$ n'est donc pas premier. La contraposée étant vrai, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

2. Relations

Exercice 10. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d)\ \textit{si}\ (a - c)\ \textit{est pair et}\ (b - d)\ \textit{est divisible par}\ 3$$

1. Donner le cardinal de $E \times E$. 16
2. Donner la matrice de $\mathcal{R}$.
   Pour construire la matrice, il faut considérer que :
   (1,1) est relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
   (1,2) est relation avec les couples suivants : (1,2), (3,2).

(1,3) est relation avec les couples suivants : (1,3), (3,3).
(1,4) est relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(2,1) est relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(2,2) est relation avec les couples suivants : (2,2), (4,2).
(2,3) est relation avec les couples suivants : (2,3), (4,3).
(2,4) est relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(3,1) est relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(3,2) est relation avec les couples suivants : (1,2), (3,2).
(3,3) est relation avec les couples suivants : (1,3), (3,3).
(3,4) est relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(4,1) est relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(4,2) est relation avec les couples suivants : (2,2), (4,2).
(4,3) est relation avec les couples suivants : (2,3), (4,3).
(4,4) est relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).

3. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
4. Donner le nombre total et la liste des différentes classes d'équivalentes. On désigne par $\overline{(a,b)}$, la classe d'équivalence de (a,b).
   Il y a six classes d'équivalence.
   $\{(1,1),(1,4),(3,1),(3,4)\}$
   $\{(1,2),(3,2)\}$
   $\{(1,3),(3,3)\}$
   $\{(2,1),(2,4),(4,1),(4,4)\}$
   $\{(2,3),(4,3)\}$
   $\{(2,2),(4,2)\}$
5. Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(1,1)}$, $\overline{(1,2)}$, $\overline{(1,3)}$.
6. Soit $b \in E$. Montrer que si $(x,y) \in \overline{(1,b)}$, alors $(x+1,y) \in \overline{(2,b)}$.
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ (x-1)$ *est pair et* $(y-b)$ *est divisible par* 3
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ (x-1+2-2)$ *est pair et* $(y-b)$ *est divisible par* 3
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ ((x-1+2)-2)$ *est pair et* $(y-b)$ *est divisible par* 3
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ ((x+1)-2)$ *est pair et* $(y-b)$ *est divisible par* 3
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ (x+1,y)\ \mathcal{R}\ (2,b)$
   $(x,y) \in \overline{(1,b)} \rightarrow\ (x+1,y) \in \overline{(2,b)}$

Exercice 11. Soit l'ensemble $\mathcal{A}$ dont les éléments sont :

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

On définit la relation $\mathcal{R}$ suivante : $X\,\mathcal{R}Y \Leftrightarrow det(X) = det(Y)$, avec $det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = ad - bc$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.
2. Donner la partition de $\mathcal{A}$ définie par $\mathcal{R}$.
   Soit :

$$M_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$M_6 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

   La partition est : $\{\{M_1, M_4\}, \{M_2, M_3, M_5, M_6\}\}$

Exercice 12. Parmi les relations suivantes de l'ensemble de tous les habitants de la planète Terre,

- $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ le\ même\ âge\}$

- $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ les\ mêmes\ parents\}$
- $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ un\ parent\ en\ commun\}$
- $\{(a,b),\ a\ et\ b\ parlent\ une\ même\ langue\}$

1. Lesquelles sont-elles des relations d'équivalence ?
   Solution
   - $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ le\ même\ âge\}$ est une relation d'équivalence.
   - $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ les\ mêmes\ parents\}$ est une relation d'équivalence.
   - $\{(a,b),\ a\ et\ b\ parlent\ une\ même\ langue\}$ est une relation d'équivalence. On considère que chacun parle une seule langue.
2. Pour celles qui ne sont pas des relations d'equivalence, indiquer et justifier les propriétés qui manquent.
   Solution
   $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ un\ parent\ en\ commun\}$ n'est pas transitif.
3. Pour celles qui sont des relations d'equivalence, indiquer les classes d'équivalence respectives.
   Solution
   - $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ le\ même\ âge\}$ Chaque âge est une classe d'équivalence : $1, 2, ..., n$. L'ensemble des classes est donc $\mathbb{N}$.
   - $\{(a,b),\ a\ et\ b\ ont\ les\ mêmes\ parents\}$. L'ensemble des enfants de mêmes parents est une classe d'équivalence.
   - $\{(a,b),\ a\ et\ b\ parlent\ une\ même\ langue\}$. Chaque groupe linguistique est une classe d'équivalence.

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 10 (pages 10) ; 11 à 19 (pages 17) ; 28, 41, 44, 45, 46, 47(pages 171).

TD 3 : FONCTIONS ET NOTATION ASYMPTOTIQUE
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. FONCTIONS

Exercice 1. Dans les cas suivants, dites si l'application $f : A \to B$ est injective, surjective ou bijective. Si elle est bijective, donnez la réciproque.

a. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x + 1$
Solution : Bijective. $f^{-1}(x) = x - 1$.

b. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution : Non injective, non surjective. On peut voir dans la représentation graphique ci-dessous qu'il peut exister deux valeurs de x pour une valeur de y (non injective) et que les valeurs réelles plus petites que -3 ne sont pas dans le codomaine de la fonction $f(x)$, et donc qu'on ne couvre pas entièrement B (non surjective).

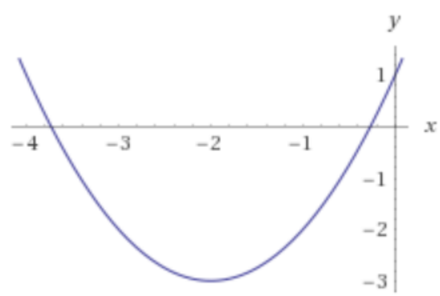


FIGURE 1. $y = x^2 + 4x + 1$.

c. $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, B = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq 1\}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution : Cette question reprend la même fonction qu'à l'item précédent, mais est utile pour souligner l'importance de prendre en considération l'ensemble de départ (A) et l'ensemble d'arrivée (B). Bijective. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 2$.

d. $A = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 0\}, B = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq 1\}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution : En essayant avec encore un autre A. Non surjective.

e. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6\lfloor x \rfloor$
Solution : Bijective. $f^{-1}(x) = x/3 - 2\lfloor x/3 \rfloor$.

f. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = 2^x$
Solution : Non surjective, injective.

Exercice 2. Soient A, B et C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$.

a. On suppose $g \circ f$ injective; montrer que f est injective. g est-elle obligatoirement injective?
Solution : Si $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$, on a $g(f(x)) = g(f(y))$, ce qui n'est pas possible. La fonction g n'est pas forcément injective (preuve par contre-exemple).

b. On suppose $g \circ f$ surjective; montrer que g est surjective. f est-elle obligatoirement surjective?
Solution : L'image de $g \circ f$ est un sous-ensemble de l'image de g; donc, si l'image de g n'est pas C tout entier, $g \circ f$ n'est pas surjective. La fonction f n'est pas forcément surjective (preuve par contre-exemple).

c. On suppose $g \circ f$ bijective. Que peut-on dire de f et g? Sont-elles bijectives?
Solution : On sait seulement que f est injective et que g est surjective. Elles ne sont pas forcément bijectives, par ce que nous avons conclu aux items précédents.

Exercice 3. Soit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
Solution :

a. Déterminer le domaine de définition D de f.
$D = \mathbb{R}$.
b. Évaluer l'image I de D.
$I =]-1, 1[$.
c. Vérifier que f est une bijection de D sur I.
Comme la fonction est toujours croissante et que le signe de la préimage sera le même que celui de l'image, on sait que $f(x)$ est inductive. On sait aussi que $f(x)$ est continue sur I, d'où que $f(x)$ est surjective. On a le tracé suivant :

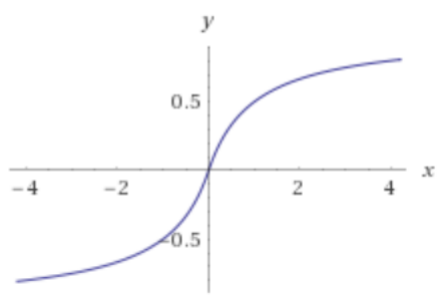


FIGURE 2. $y = x/(1 + |x|)$.

d. Précisez la fonction inverse de f.
$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

Exercice 4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
Solution : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$.

(1) Étape de base : Pour $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2}$, et on a bien : $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
(2) Étape inductive : Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(3) On a : $u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)} = u_n \frac{2n+1}{2n+2}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = u_{n+1}$.
Vérifions que $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$. Autrement dit, $2n + 3 > 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \iff (2n+3)^2 > 4(n+1)(n+2)$ Soit $4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 8$ vrai.
Donc $u_{n+1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$.
Vérifions que $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Autrement dit, $\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} < 2n+2 \iff (2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2$. Puisque $4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4$ vrai, $u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

On réussi à établir l'encadrement voulu à l'ordre $n+1$. On conclut, par récurrence sur n, à l'encadrement demandé.

Exercice 5. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a $1 \leq U_n \leq 2$.
Solution : Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$.

(1) Étape de base : $U_0 = 2; 1 \leq 2 \leq 2$, donc $1 \leq U_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie.

(2) Étape inductive : Supposons jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie.

(3) $1 \leq U_n \leq 2 \iff 2 \leq 1 + U_n \leq 3 \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{2} \iff 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \iff 1 \leq 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2 \iff 1 \leq U_{n+1} \leq 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: $P(0)$ est vraie. En supposant jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie, on a $P(n+1)$ qui est vraie. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 2$.

2. Notation asymptotique

Exercice 6. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant des constantes C et k.

a. $f(x) = 6x^2 + 2x^4 + 7$
   $n = 4, C = 3, k = 3\sqrt{2}$
b. $f(x) = \frac{x^3+8}{5x^2+3x}$
   $n = 1, C = \frac{1}{5}, k = \sqrt{\frac{40}{3}}$
c. $f(x) = 3x^3 - x^2\ log(x)$
   $n = 3, C = 1, k = 0$
d. $f(x) = 4x^4 - 4\ log^3(x)$
   $n = 4, C = 5, k = 0$

Exercice 7. Soit la fonction $f : n \to \left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$ définie sur $\mathbb{N}$. Prouver que :

$$f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$$

(Θ : grand theta)

Solution :

- $2 + \cos(n) \geq 1$ et $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right)$ (prendre par exemple $C = 1, k = 1$) donc $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$
- $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})$ (prendre par exemple $C = 10^6 + 1, k = 1$) et $2 + \cos(n) \leq 3$ donc il suffit de prendre $C = (10^6 + 1) * 3$ et toujours $k = 1$ pour trouver un couple qui convient pour montrer que : $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})(2 + \cos(n))$.

Donc $f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$

Exercice 8. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = 3\sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^6}{12}$
c. $f_3(n) = 2 \cdot e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(n) = n \log(n)$
f. $f_6(n) = e^{-n}$

$e^{-n} \ll \sqrt{\log(n)} \ll 3\sqrt{n} \ll n\log(n) \ll \frac{n^6}{12} \ll 2 \cdot e^n$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 (pages 64) ; 15, 18, 20, 24 et 26 (pages 65) ; 8, 9 et 14 (pages 73) ; 26 et 27 (pages 83).

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 4 : RÉCURRENCE, FERMETURE DE RELATIONS ET ORDRES
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. RÉCURRENCE

Exercice 1. Utilisez le principe de l'induction pour démontrer que $3^n > n^3 + n$, où $n \in \mathbb{N}$ et $n > 3$.
Base : $3^4 = 81 > 4^3 + 4 = 68$. La condition de base est vérifiée.
Étape inductive : Supposons que pour n, on a $3^n > n^3 + n$ vrai.
Résolution : Tentons de montrer qu'alors, l'égalité tient aussi pour $n + 1$.
$3^n > n^3 + n$
$\Longleftrightarrow 3 * 3^n > 3 * (n^3 + n)$
$\Longleftrightarrow 3^{n+1} > 3 * (n^3 + n)$
Et si on pose l'équation de départ avec $n + 1$, on veut vérifier l'inégalité : $3^{n+1} > ((n + 1)^3 + n + 1)$
$\Longleftrightarrow 3^{n+1} > n^3 + 3n^2 + 4n + 2$
On sait que cette inégalité serait vraie si : $3^{n+1} > 3 * (n^3 + n) > n^3 + 3n^2 + 4n + 2$; vérifions.
$3n^3 + 3n > n^3 + 3n^2 + 4n + 2$
$\Longleftrightarrow 2n^3 > 3n^2 + n + 2$
Comme on sait qu'on travaille avec les entiers naturels plus grands que 3 et que la fonction de gauche croît plus vite que celle de droite, on a que $3^{n+1} > (n+1)^3 + n + 1$ est vraie. Par induction, on peut alors conclure que $3^n > n^3 + n$, où n est un entier naturel plus grand que 3.

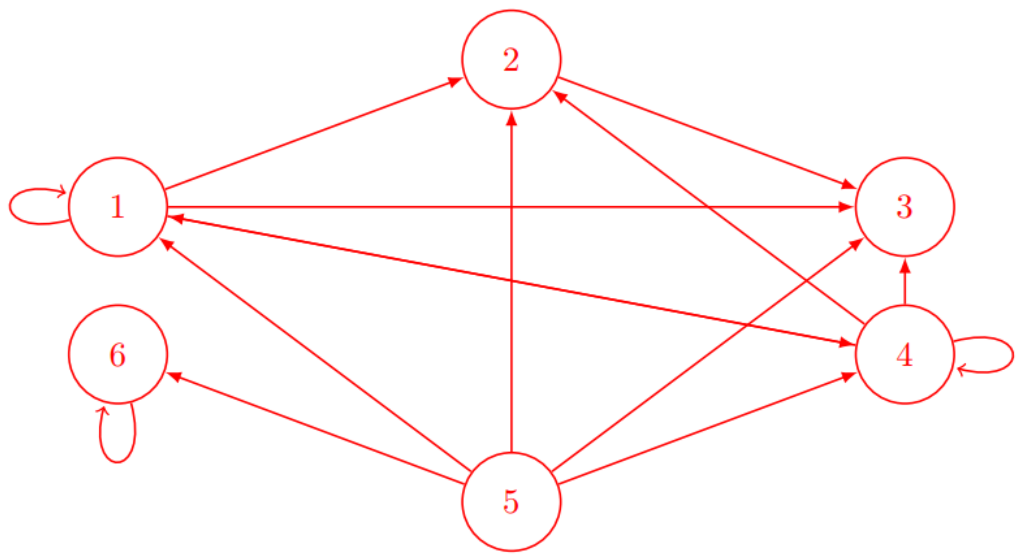
Exercice 2. Utilisez le principe de l'induction pour démontrer que $8|(5^{2n} - 1)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Base : $n = 1 \rightarrow 5^{2n} - 1 = 24;\ 8|24$. La condition de base est vérifiée.
Étape inductive : Supposons que pour n, on a $8|(5^{2n} - 1)$ vrai.
Résolution : Tentons de montrer que 8 divise aussi l'expression pour $n + 1$.
$8|(5^{2(n+1)} - 1)$
$\Longleftrightarrow 8|(5^{2n+2} - 1)$
$\Longleftrightarrow 8|(25 * 5^{2n} - 1)$
$\Longleftrightarrow 8|(24 * 5^{2n} + 5^{2n} - 1)$
$\Longleftrightarrow 8|(24 * 5^{2n}) \wedge 8|(5^{2n} - 1)$
Comme on sait que 8 divise 24 et $(5^{2n} - 1)$ (par supposition), alors on trouve que 8 divise aussi l'expression pour $n + 1$. Par induction, on peut alors conclure que $8|(5^{2n} - 1)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. Construire un algorithme récursif qui calcule $n \cdot x$ lorsque n et x sont des entiers positifs.
Solution:
entier positif multiplier(entier positif n, entier positif x)
entier positif retour = 0.
si n = 1
retour = $retour + x$.
sinon
retour = retour $+x + multiplier(n - 1, x)$
retourner retour.

2. FERMETURE DE RELATIONS

Exercice 4. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble A = {1,2,3,4,5,6} par: {(1,2),(1,4),(2,3),(4,1),(5,4),(5,6),(6,6)}.

1. Donner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
   Solution: $\mathcal{R} \bigcup \{(2,1),(3,2),(4,5),(6,5)\}$.
4. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
   Solution: $\mathcal{R} \bigcup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.



Exercice 5. On considère les trois ensembles A = {2,3,4,6} , B= {a,b,c,d} , C= {0,3,5} et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ *telles que* : $\mathcal{R} = \{(4,a),(6,a),(6,b),(4,c),(6,c)\}$ *et* $\mathcal{S} = \{(a,0),(b,5),(c,5),(d,3)\}$

Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Solution : $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Soit la relation $\mathcal{R}$ definie sur $\mathcal{N}$ telle que: $\mathcal{R}$ = {(a,b) , pgcd(a,b)=1 }. Determiner la fermeture symétrique et la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.
Solution:

- Fermeture symétrique: trivial
- Fermeture transitive: en utilisant le théorème de BACHET BEZOUT on voit qu'il s'agit de a et c tels que ax - cy divisible par b avec x et y des entiers relatifs

3. ORDRES

Exercice 7. Ordre lexicographique : Un étudiant s'est fait donner la tâche de classer des boîtes selon ces instructions :

1. Le classement par code de gamme de produit doit suivre l'ordre alphanumérique $AB...Zab...yz0...89$.
2. Le classement par nom d'entreprise suivi du nom de produit doit suivre le même ordre alphanumérique.

3. Une boîte est dégagée lorsqu'il n'y a dans sa pile que des boîtes en-dessous d'elle. Par sécurité, le classement des boîtes dégagées doit se faire avant celui des boîtes pas encore dégagées, et deux boîtes dégagées peuvent être classées l'une avant l'autre selon une instruction ultérieure s'il y a lieu, ou indifféremment sinon.

Soit le tableau suivant la représentation de trois piles de boîtes, avec deux grandes boîtes couchées qui prennent deux piles en largeur.

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="2">13</td></tr>
</table>

On a les boîtes numérotées :

1. Code : m9C Marque et nom : Pom pain aux pommes
2. Code : m9C Marque et nom : Pom pain aux poires
3. Code : m9D Marque et nom : Pom pain blanc
4. Code : m9C Marque et nom : Pom pain aux raisins
5. Code : zz8 Marque et nom : Oasis jus de pomme
6. Code : S8z Marque et nom : Miele casque
7. Code : KVO Marque et nom : Bauer bâton de hockey
8. Code : zz8 Marque et nom : Oasis jus de melon
9. Code : zz1 Marque et nom : Oasis cocktail de fruits
10. Code : UA8 Marque et nom : Dole ananas
11. Code : UA7 Marque et nom : Dole bananes
12. Code : UA7 Marque et nom : Dole bananes plantain
13. Code : S8a Marque et nom : Miele bicyclette

Donnez le classement des boîtes en priorisant :

a. Instruction 3 » Instruction 2 » Instruction 1. $2 \prec 5 \prec 1 \prec 4 \prec 7 \prec 10 \prec 9 \prec 12 \prec 3 \prec 6 \prec 8 \prec 11 \prec 13$

b. Instruction 1 » Instruction 2. $7 \prec 13 \prec 6 \prec 11 \prec 12 \prec 10 \prec 2 \prec 1 \prec 4 \prec 3 \prec 9 \prec 8 \prec 5$

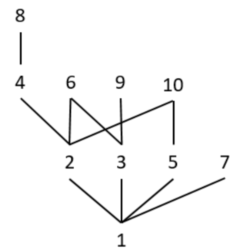
Exercice 8. Répondre aux questions suivantes sur les ensembles A et B.

- A muni de la relation $\subseteq$. $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}\}$
- $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ muni de la relation R.
  $R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(7,1),(8,1),(9,1),(2,2),(3,3),(4,2),(4,4),(5,5),$ $(6,2),(6,3),(6,6),(7,7),(8,2),(8,4),(8,8),(9,9)\}$

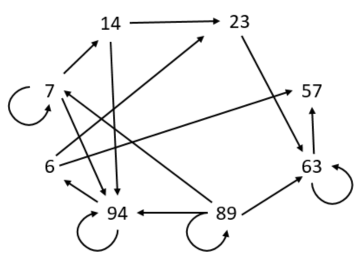
1. Trouvez les éléments maximaux.
   Maxima de A : {1,3}, {1,2,4} et {2,3,4}
   Maxima de B : 1
2. Trouvez les éléments minimaux.
   Minima de A : {1}, {2}, {3} et {4}
   Minima de B : 5, 7, 6, 8, 9
3. Y a-t-il un plus grand élément?
   A : Non. B : oui, 1.
4. Y a-t-il un plus petit élément?
   A : Non. B : Non.

Exercice 9. Trouver le diagramme de Hasse pour les relations suivantes :

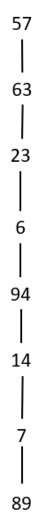
1. divisibilité dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.



2. mots de deux lettres existants du dictionnaire francophone dans l'ensemble $E = \{a, b, e, l, m, u, w, x\}$.



3.



4. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2, 4, 5, 8 (page 197); 35 (page 198); 18, 21 (page 205); 29 (page 214); 40 (page 215).

TD 4 : RELATIONS - FONCTIONS - NOTATION ASYMPTOTIQUE
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Relations

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{T}$ suivante :

$$(x, y)\ \mathcal{T}\ (x', y')\ si\ |x - x'| \leq\ y - y'$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.
   - Réflexivité. Il faut montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y)\ \mathcal{T}\ (x, y)$.
     Trivial.
   - Anti-symétrie. Montrons que
     $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ (x, y)\ \mathcal{T}\ (x', y')$ et $(x', y')\ \mathcal{T}\ (x, y) \leftrightarrow (x, y) = (x', y')$
     $(x, y)\ \mathcal{T}(x', y') \leftrightarrow\ |x - x'| \leq\ y - y'$ et $(x', y')\ \mathcal{T}\ (x, y) \leftrightarrow\ |x' - x| \leq\ y' - y$
     $|x - x'| = |x' - x|$, $|x - x'| \leq\ y - y'$ et $|x - x'| \leq\ -(y - y')$ donc $y - y' = 0$, soit $y = y'$. On en déduit que $|x - x'| = 0$, soit $x = x'$.
   - Transitivité. Montrons que
     $\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2,\ (x, y)\ \mathcal{T}\ (x', y')\ et\ (x', y')\ \mathcal{T}\ (x'', y'')\ \rightarrow\ (x, y)\ \mathcal{T}\ (x'', y'')$
     $(x, y)\ \mathcal{T}\ (x', y')\ et\ (x', y')\ \mathcal{T}\ (x'', y'') \rightarrow |x - x'| \leq\ y - y'$ et $|x' - x''| \leq\ y' - y''$
     En sommant les deux inégalités on a : $|x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$.
     Or $|(x - x') + (x' - x'')| \leq |x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$, donc $|x - x''| \leq y - y''$
2. $\mathcal{T}$ est-elle une relation d'ordre total ?
   Non. Il suffit de montrer un contre-exemple, soit les couples (10,2) et (1,0).

Exercice 2. Dans $\mathbb{N}^*$ on définit la relation $<<$ suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ x\ <<\ y\ s'il\ existe\ n \in \mathbb{N}^*\ tel\ que\ y = x^n$$

Montrer que $<<$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

$<<$ est une relation d'ordre si $<<$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

- Réflexivité : Montrons que $\forall x \in \mathbb{N}^*,\ il\ existe\ n\ \in \mathbb{N}^*\ tel\ que\ x = x^n$.
  $x = x^n \rightarrow log(x) = log(x^n)$
  $x = x^n \rightarrow log(x) = nlog(x)$
  En prenant $n = 1$, on conclut la réflexivité de $<<$.
- Antisymétrie : Montrons que $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $x\ <<\ y\ et\ y\ <<\ x$, alors $x = y$.
  $x\ <<\ y \rightarrow\ y = x^n$ et $y\ <<\ x \rightarrow\ x = y^n$
  En combinant, on obtient : $y = (y^n)^n$, soit $y = y^{n^2}$. Ainsi, $n = 1$ et $x = y$.
- Transitivité : Montrons que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$, si $x\ <<\ y$ et $y\ <<\ z$, alors $\exists\ n \in \mathbb{N}^*,\ x\ <<\ z$.
  $x\ <<\ y \rightarrow\ y = x^n$ et $y\ <<\ z \rightarrow\ z = y^n$
  En combinant, on obtient : $z = (x^n)^n \rightarrow z = x^{n^2}$
  En posant $N = n^2$, on a $N \in \mathbb{N}^*$ et $z = x^N$ donc $x\ <<\ z$.

$<<$ est donc une relation d'ordre. C'est un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$ car pour le couple (2,6), il n'existe aucun entier $n \in \mathbb{N}^*\ tel\ que\ 6 = 2^n$.

2. Fonctions

Exercice 3. Soient

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad$ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \mapsto 3n$ $\quad$ $n \mapsto \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

Où $\lfloor n \rfloor$ désigne la fonction plancher de n (encore appelée la partie entière de n).

1. f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1. Déterminez $F = f(E)$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 + |x|$

   $\forall x \in \mathbb{R}, -(1 + |x|) < x < 1 + |x|$

   $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-(1+|x|)}{1+|x|} < \frac{x}{1+|x|} < \frac{1+|x|}{1+|x|}$

   $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{x}{1+|x|} < 1$

   On a : $F = f(E) =]-1, 1[$
2. Vérifiez que f est une bijection de E sur F.
3. Précisez f^{-1}.
   $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$

Exercice 5. À 14h durant l'été, sous une température avoisinant 35°C, on dépose un morceau de viande sur un comptoir. Le morceau de viande contient 100 bactéries. On fait l'hypothèse que dans ces conditions, le nombre de bactéries double toutes les 15 minutes.
Soit $\mathcal{U}_n$ est le nombre de bactéries à un moment déterminé, $\mathcal{U}_{n+1}$ le nombre de bactéries 15 minutes plus tard.

1. Préciser la nature et la raison de la suite $(\mathcal{U}_n)$.
   Suite géométrique de raison 2.
2. Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n.
   $\mathcal{U}_n = 100 \times 2^n$
3. Calculer le nombre de bactéries à 16h.
   25600
4. En supposant que les conditions ne changent pas, à quelle heure (arrondie au quart d'heure supérieur) aurait-on 150 000 bactéries sur le morceau de viande ?
   16h45

Exercice 6. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 8$, $U_{n+1} = 2U_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 3$.

1. Exprimer V_{n+1} en fonction de U_{n+1}, puis V_{n+1} en fonction de U_n.
   $V_{n+1} = U_{n+1} - 3$ et $V_{n+1} = 2U_n - 6$.
2. Donner l'expression de V_{n+1} en fonction de V_n. Que peut-on dire de la suite (V_n) ?
   $V_{n+1} = 2V_n$
   V_n est une suite géométrique de raison 2.
3. Donner l'expression de V_{n+1} en fonction de n. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
   $V_{n+1} = V_0 \times 2^n$; $V_0 = 5$ et on a $V_{n+1} = 10 \times 2^n$
   $U_n = V_n + 3$; $U_n = 5 \times 2^n + 3$
4. Justifier que tous les nombres U_n sauf U_0 ont une écriture décimale se terminant par le chiffre 3.
   On sait que 2^n est divisible par 2, donc 5×2^n est divisible par 5 et par 2. On en déduit que 5×2^n est divisible 10.
   $U_n = 5 \times 2^n + 3$, alors tous les entiers $U_n - 3 = V_n$ sont donc divisibles par 10. Ainsi, leur écriture décimale se termine toujours par 0. L'écriture décimale de tout $U_n = V_n + 3$ se termine par le chiffre 3.

Exercice 7. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 2$.
Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$

- Étape de base
  $U_0 = 2$; $1 \leq 2 \leq 2$, donc $1 \leq U_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie.
- Étape inductive
  Supposons jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie.
  $1 \leq U_n \leq 2 \to 2 \leq 1 + U_n \leq 3$
  $1 \leq U_n \leq 2 \to \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+U_n} \leq \frac{1}{2}$
  $1 \leq U_n \leq 2 \to 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 1 + \frac{1}{2}$
  $1 \leq U_n \leq 2 \to 1 \leq 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2$
  $1 \leq U_n \leq 2 \to 1 \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 2$
  $1 \leq U_n \leq 2 \to 1 \leq U_{n+1} \leq 2$
  Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion
  $P(0)$ est vraie. En supposant jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie, on a $P(n+1)$ qui est vraie.
  D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 2$.

Exercice 8. Soit C_n la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n : $C_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Notation asymptotique

Exercice 9. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant les constantes c et k les plus petites possibles.

a. $f(x) = 5x^2 + 2x^3 + 7$
   n = 3, c = 14, k = 1.

b. $f(x) = \frac{x^4+8x}{x^2+3}$
   n = 2, c = 9/4, k = 1.

c. $f(x) = 3x^2 - x\ log(x)$
   n = 2, c = 3, k = 1.

d. $f(x) = 2x^4 - 4\ log^3(x)$
   n = 4, c = 2, k = 1.

Exercice 10. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = \sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^4}{16}$
c. $f_3(n) = e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(n) = 2^{log_2(n)}$

$f_4(n) \subseteq f_1(n) \subseteq f_5(n) \subseteq f_2(n) \subseteq f_3(n)$

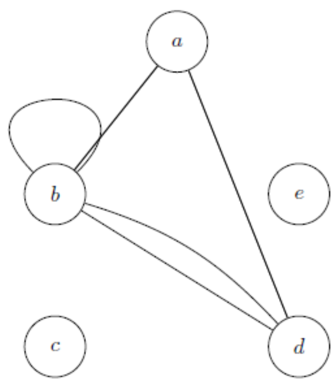
4. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 (pages 64) ; 15, 18, 20, 24 et 26 (pages 65) ; 8, 9 et 14 (pages 73) ; 26 et 27 (pages 83).

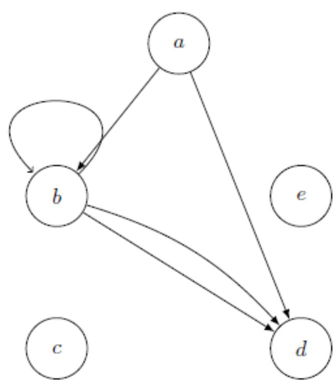
LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 5 : GRAPHES
CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 1. Indiquez pour chacun des graphes suivants s'il s'agit d'un graphe simple, d'un multigraphe, d'un pseudographe d'un graphe orienté ou d'un graphe multigraphe orienté.//



(1) Graphe:
(2) $\mathcal{G}$=($\mathcal{V}$,$\mathcal{E}$) avec $\mathcal{V}$={a,b,c,d} et $\mathcal{E}$={{a,c},{a,d},{b,d}}



(3) Graphe
(4) $\mathcal{G}$=($\mathcal{V}$,$\mathcal{E}$) avec $\mathcal{V}$={a,b,c,d} et $\mathcal{E}$={(a,c),(a,d),(b,d)}

Solution

(1) Pseudographe

(2) Graphe simple

(3) Multigraphe orienté

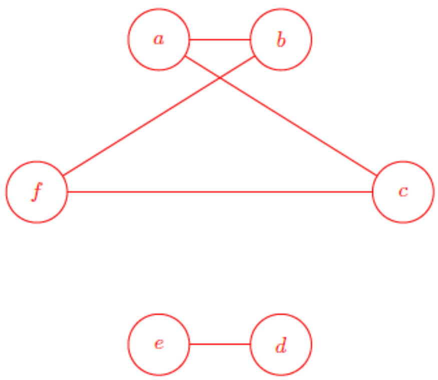
(4) Graphe orienté

Exercice 2. Soit $\mathcal{G}$=($\mathcal{V}$,$\mathcal{E}$) avec $\mathcal{V}$={a,b,c,d,e,f} et $\mathcal{E}$={{a,b},{a,c},{b,f},{c,f},{d,e}}

(1) Dessiner G

(2) Ce graphe est-il biparti ? Si oui, quels sont les deux ensembles de sommets ?
(3) Ce graphe est-il régulier ? Si oui, de quel degré ?

Solution:



(1)
(2) Oui. (V_1={a,e,f} et V_2={b,c,d}) ou (V_1={a,d,f} et V_2={b,c,e})
(3) Non

Exercice 3. Un groupe formé de 15 personnes se propose de constituer un réseautage particulier de sorte que chaque membre du groupe échange son numéro de téléphone avec exactement 3 autres personnes du groupe pour les ajouter dans ses contacts. Est-ce possible ?
Solution
La réponse est non. En effet, considérons le graphe dont les sommets sont les 15 personnes composant le groupe et les arcs sont les liaisons (contacts). Alors pour tout sommet x on a d(x) = 3. Ainsi $\sum d(x) = 3$ $15 = 45$. D'après le lemme des poignées de mains, on devrait avoir 45 =$2 \times e$ avec e l'ensemble des arcs du graphe. Ce qui est impossible car 45 est impair.

Exercice 4. Déterminez si les graphes suivants, donnés par leur matrice d'incidence, sont bipartis.

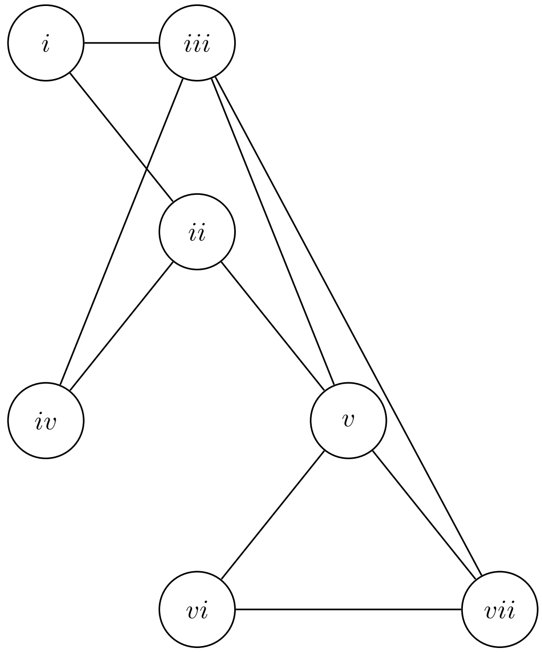
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

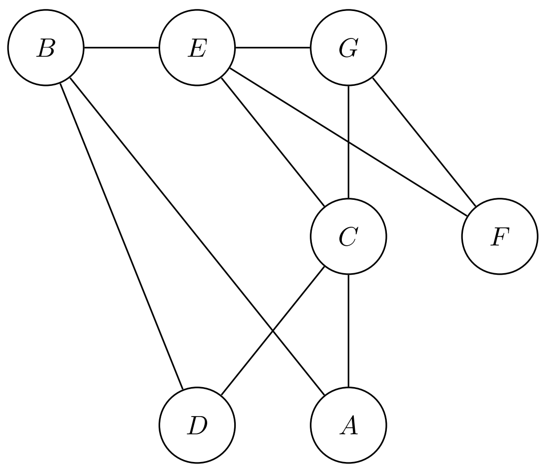
Solution
A n'est pas biparti. B est biparti. C n'est pas biparti. D n'est pas biparti.

Exercice 5. Parmi les 3 graphes suivants, lesquels sont isomorphes? Le graphe A est isomorphe au graphe B.

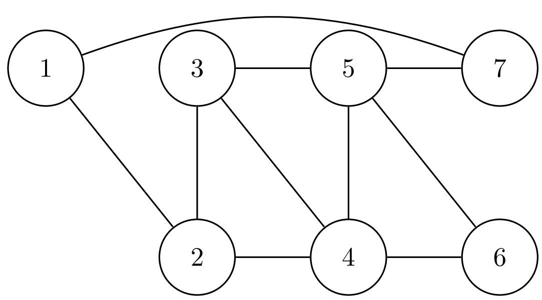
- Graphe A :



- Graphe B :



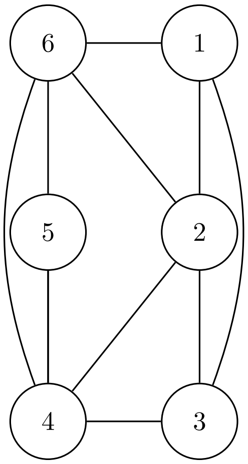
- Graphe C :



Exercice 6. Combien y a-t-il de graphes simples non isomorphes et où un chemin existe entre chaque paire de sommets qui comprennent 3 sommets, 4 sommets?
2 graphes simples à 3 sommets, 6 graphes simples à 4 sommets.

Exercice 7. Donnez les matrices d'adjacence et d'incidence du graphe.

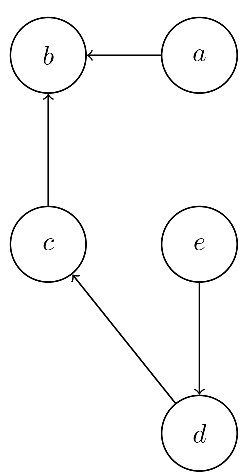
- Graphe :



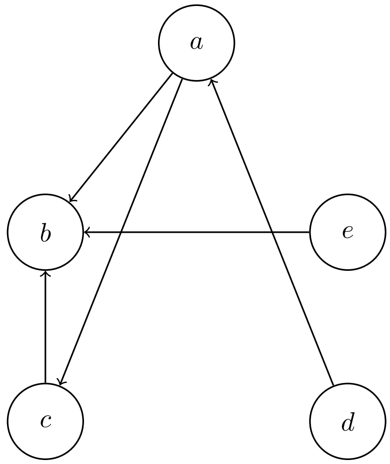
- Matrice d'adjacence : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Matrice d'incidence : $\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,6\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{2,6\} & \{3,4\} & \{4,5\} & \{4,6\} & \{5,6\} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

Exercice 8. Donnez l'union des graphes A et B, puis trouvez le diagramme de Hasse associé :

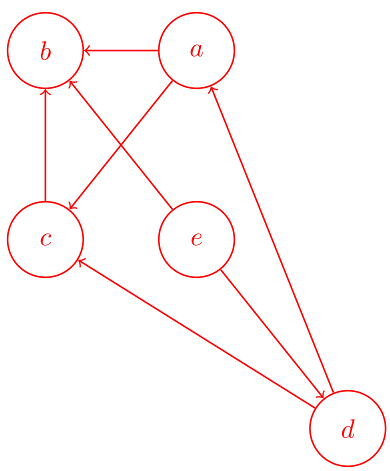
- Graphe A :



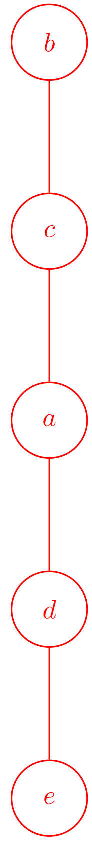
- Graphe B :



- $A \cup B$:



- Diagramme de Hasse de $A \cup B$:



1. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

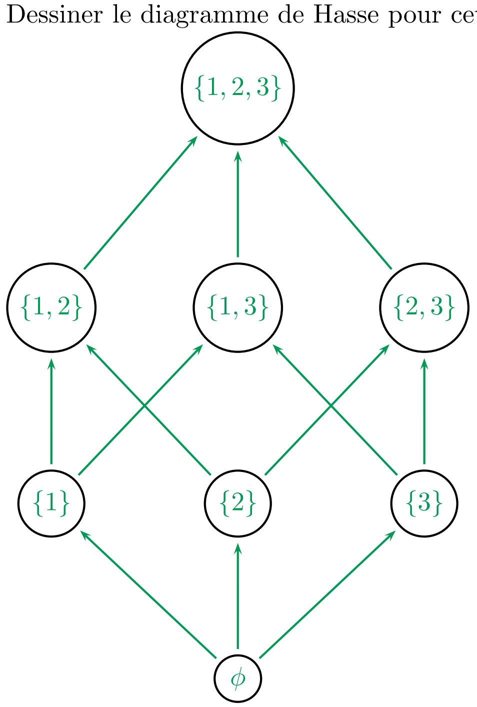
Exercices numéros : 29, 31, 33, 35 (page 348); 11, 15, 27 (page 399).

TD 5 : ORDRES - GRAPHES
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Ordres

Exercice 1. On considère la relation d'ordre $\subset$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

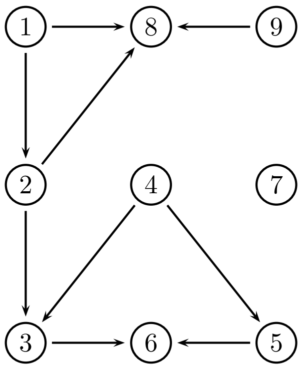
1. Dessiner le diagramme de Hasse pour cette relation.



2. Quels sont les éléments minimaux, maximaux ?
   Élément minimal : ϕ ; Élément maximal : $\{1, 2, 3\}$
3. Donner le plus petit élément, s'il y a lieu.
   Plus petit élément : ϕ
4. Donner le plus grand élément, s'il y a lieu.
   Plus grand élément : $\{1, 2, 3\}$

Exercice 2. Trouver le diagramme de Hasse pour la relation "plus grand ou égal à " dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exercice 3. Proposer un tri topologique pour le graphe suivant :



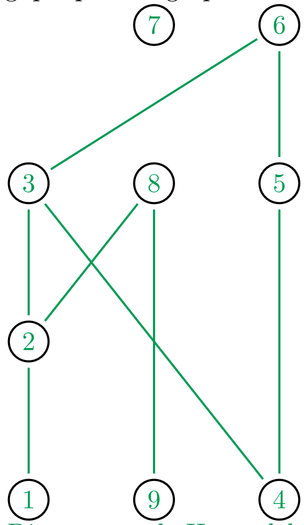
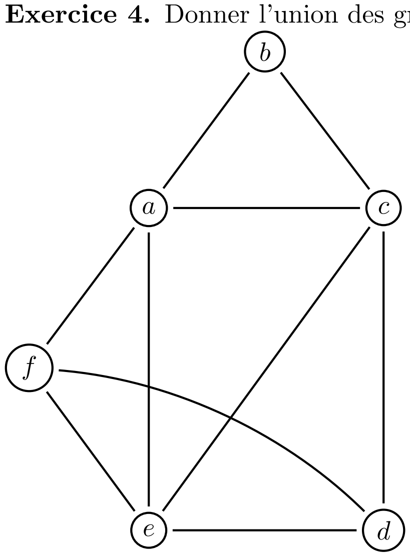


Diagramme de Hasse dela relation

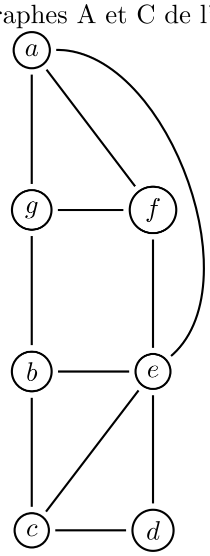
Exemples de tri topologique (la liste n'est pas exhaustive)
1-9-2-4-7-3-8-5-6 ; 7-9-1-4-2-5-8-3-6 ; 1-9-2-4-5-7-3-8-6 ; 9-4-5-1-2-3-6-8-7 ; 7-4-5-9-1-2-8-3-6

2. Graphes

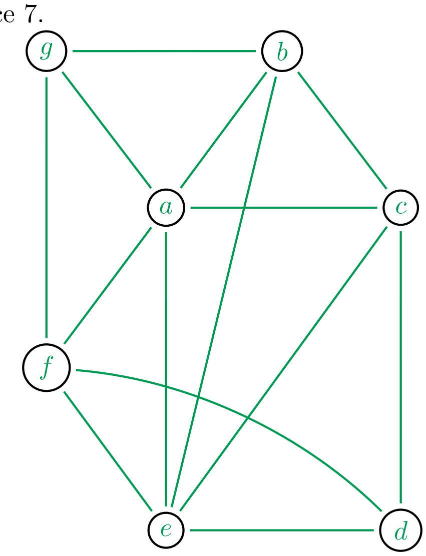
Exercice 4. Donner l'union des graphes A et C de l'exercice 7.



A



C



A ∪ C

Exercice 5. Écrire la matrice d'incidence associée au graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, avec $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{2, 3\}$, $e_3 = \{3, 1\}$, $e_4 = \{4, 1\}$ et $e_5 = \{4, 4\}$.
Matrice d'incidence :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

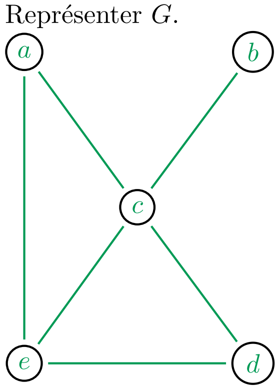
1. Que vaut la somme des éléments d'une colonne. Réponse : 2
2. Que représente la somme des éléments d'une ligne. Réponse : Le degré de chacun des sommets.

3. En déduire que dans un graphe non orienté $G = (V, E)$, on a

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2\,|E|$$

Exercice 6. Soit $G = (V, E)$ le graphe non orienté défini par :
$V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$.

1. Représenter G.

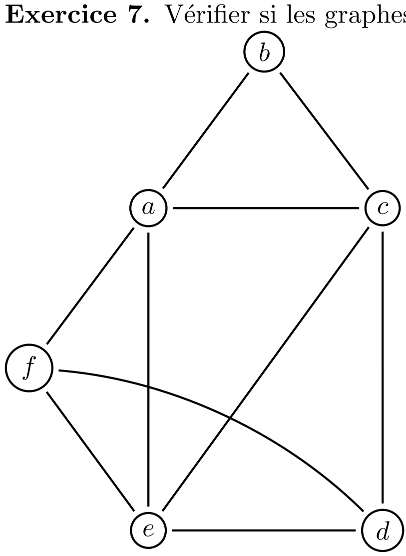


2. Écrire sa matrice d'adjacence et sa liste d'adjacence.

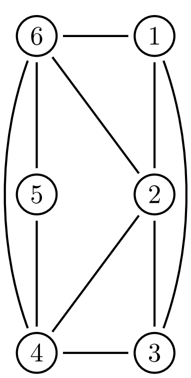
$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Le graphe G est-il régulier ? Réponse : Non

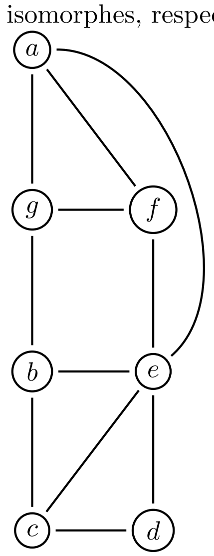
Exercice 7. Vérifier si les graphes A et B, C et D sont isomorphes, respectivement.



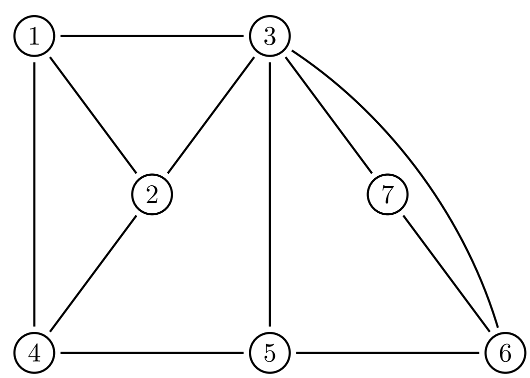
A



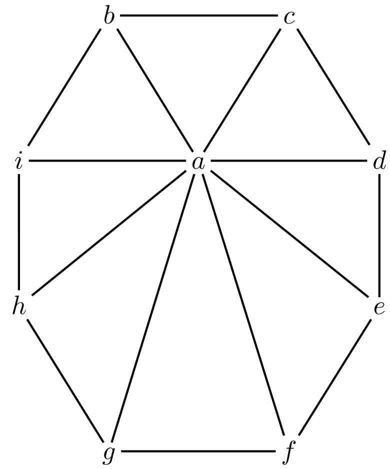
B

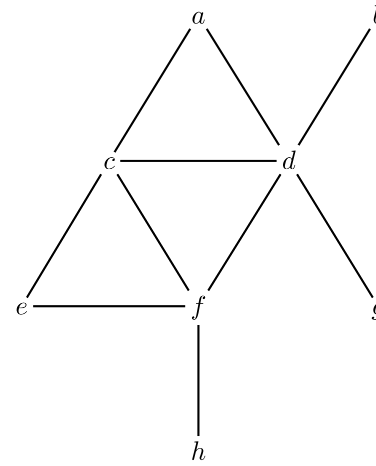


C

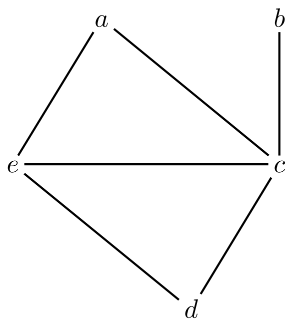


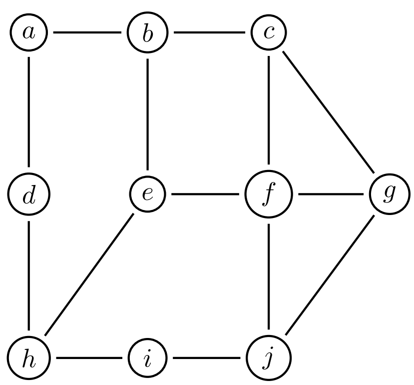
D





Exercice 8. Déterminer si les graphes sont bipartis.





3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 11, 15 (page 399) ; 26, 33, 34, 35, 41 (page 428)

TD 4 : INDUCTION, RECURSIVITÉ
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Récursivité

Exercice 1. Donnez une définition récursive de l'ensemble des entiers positifs congrus à 3 modulo 7 ou congrus à 5 modulo 7.
$a_0 = 3$; $a_1 = 5$; $a_{n+2} = a_n + 7$

Exercice 2. Donnez une définition récursive de l'ensemble des entiers positifs congrus à 3 modulo 5 et congrus à 4 modulo 7.
$a_0 = 18$; $a_{n+1} = a_n + 35$

Exercice 3. Donnez une définition récursive de la suite a_n.

1. $a_n = 2n + 1$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2$
2. $a_n = 3 - 2^n$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Indication : Utiliser la suite $b_n = a_n - 3$.
3. $a_n = 2^{2^n}$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = a_n^2$
4. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$

Exercice 4. La fonction d'Ackermann est une fonction récursive à deux paramètres entiers définie par :

$$f(n,m) = \begin{cases} m+1 & Si\ n = 0 \\ f(n-1,1) & Si\ n \geq 1\ et\ m = 0 \\ f(n-1, f(n, m-1)) & Si\ n \geq 1\ et\ m \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $f(1,0), f(2,0), f(3,0)$ Réponse : $f(1,0) = 2; f(2,0) = 3; f(3,0) = 5$
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(1,k) = k + 2$ Indication : Preuve par induction
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(2,k) = 2k + 3$ Indication : Preuve par induction
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(3,k) = 2^{k+3} - 3$ Indication : Preuve par induction

Exercice 5. Pour tout réel x et pour tout entier positif non nul n on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

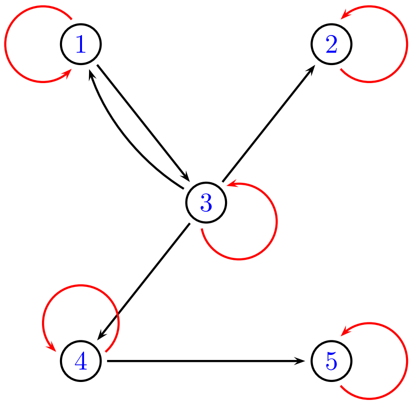
En utilisant la notion d'itération, donner l'algorithme d'une fonction qui calcule $S_n(x)$.

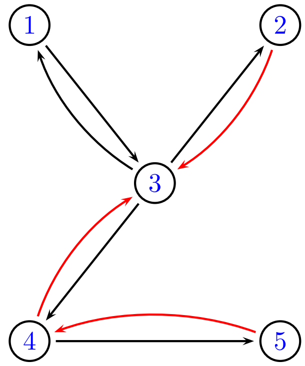
2. Fermeture des relations

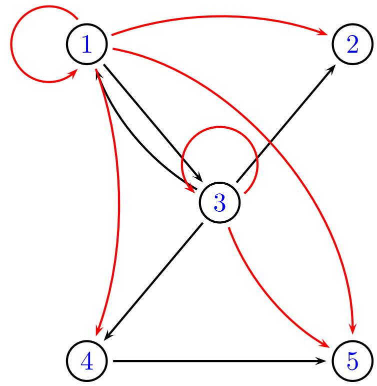
Exercice 6. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $A = \{1,2,3,4,5\}$ par : $\{(1,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,5)\}$.

1. Dessiner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
4. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.

Les graphes des fermetures réflexive, symétrique et transitive de la relation $\mathcal{R}$ sont respectivement :







Exercice 7. On considère les trois ensembles $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{0, 3, 5\}$ et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ et $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ définies par : $\mathcal{R} = \{(4, a), (6, a), (6, b), (4, c), (6, c)\}$ et $\mathcal{S} = \{(a, 0), (b, 5), (c, 5), (d, 3)\}$

1. Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
2. Donner la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.

$$M_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(4, 0), (6, 0), (6, 5), (4, 5)\}$$

Exercice 8. Soit la relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par : $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a \times b \leq a + b\}$.

1. Donner la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.
2. En déduire que $\mathcal{R} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 35 (page 198) ; 18, 21 (page 205) ; 29 (page 214) ; 40 (page 215)

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

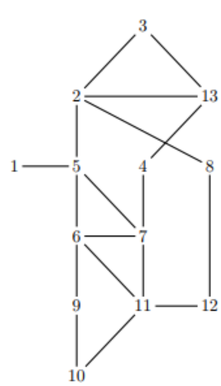
TD 6 : CHAÎNES, CYCLES ET ARBRES
CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 1. Montrer que pour un graphe T à n sommets les propriétés suivantes sont équivalentes :

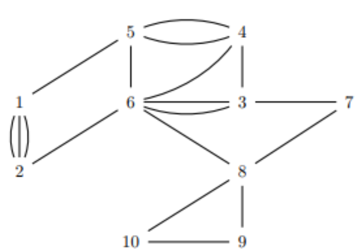
(1) T est un arbre
(2) Test un graphe connexe à $n-1$ arêtes
(3) T est connexe, et la suppression de toute arête le déconnecte
(4) T est acyclique à n-1 arêtes
(5) T est acyclique et l'ajout de toute arête le rend cyclique.

Solution
Pour montrer l'équivalence entre ces 5 propriétés, le plus simple est d'établir une série d'implications.
(1) $\Longrightarrow$ (2) : Le graphe T étant à la fois connexe et acyclique, il possède exactement $n-1$ arêtes. (cf propriété des graphes connexes et propriété des graphes acycliques).
(2) $\Longrightarrow$ (3) : La suppression d'une arête de T donne un graphe à $n-2$ arêtes : il ne peut être connexe (cf propriété des graphes connexes).
(3) $\Longrightarrow$ (4) : Par l'absurde si T possèdait un cycle, la suppression d'une arête de ce cycle ne saurait le déconnecter. Par suite T est acyclique. Puisqu'il est également connexe, il possède donc exactement $n-1$ arêtes.
(4) $\Longrightarrow$ (5) : L'ajout d'une arête à T donne un graphe à n arêtes : il ne peut être acyclique (cf propriété des graphes acycliques).

Exercice 2. Le graphe (a) admet-il une chaîne eulérienne ? Si oui, déterminez-en une.
Le graphe multigraphe (b) admet-il un cycle eulérien ? Si oui, déterminez-en un.



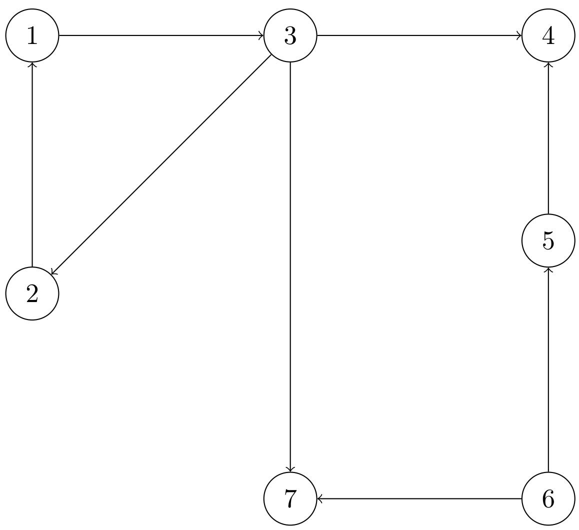
(a)



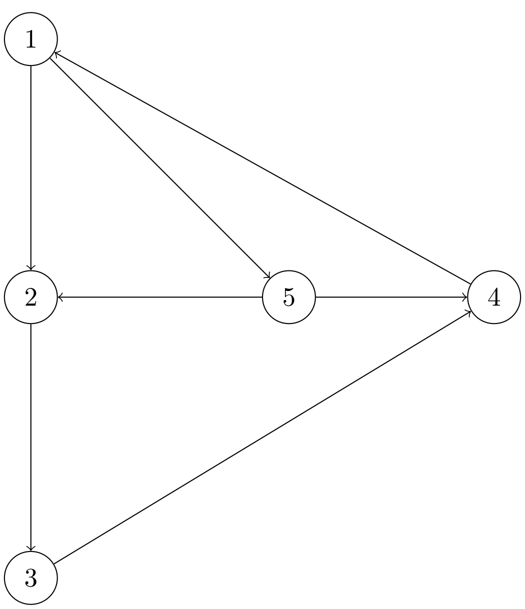
(b)

Solution:
(a) : Oui : 13-2-3-13-4-7-11-12-8-2-5-7-6-11-10-9-6-5-1
(b) : Oui : 1-5-4-5-6-4-3-7-8-9-10-8-6-3-6-2-1-2-1

Exercice 3. Les graphes ci-dessous admettent-ils des circuits eulériens ? des circuits hamiltoniens ? des cycles eulériens ? des cycles hamiltoniens ?



(a)



(b)

Solution
(a):Pas de circuit eulérien, mais un cycle eulérien. Ni circuit ni cycle hamiltoniens.
(b): Circuit hamiltonien : 4-1-5-2-3-4 (et donc il y a un cycle). Ni circuit ni cycle eulériens.

Exercice 4. Soit le graphe G_0 qui admet pour matrice (d'adjacence) M_0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme suivant permet de trouver la composante fortement connexe d'un sommet noté x_0 :

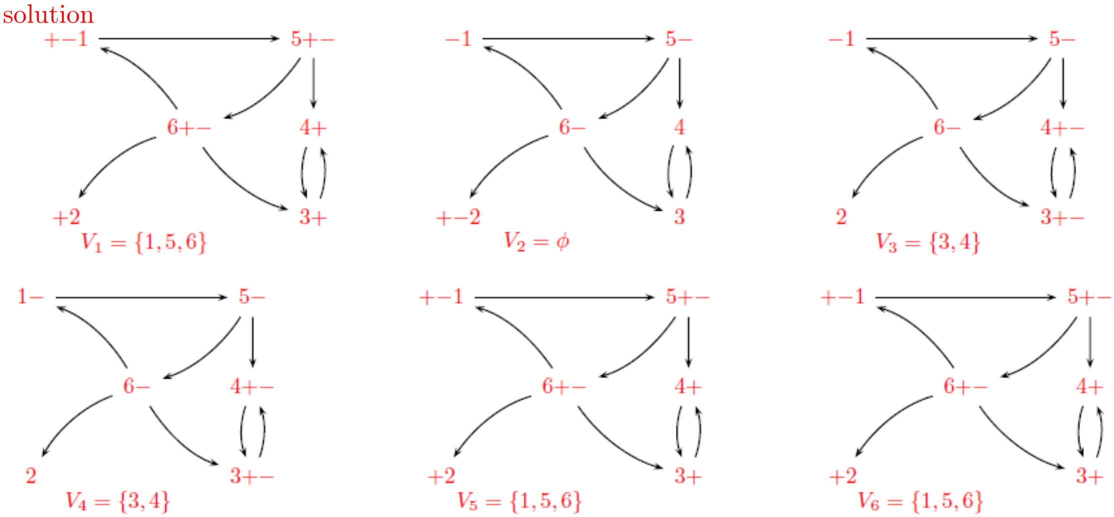
- Marquer x_0 avec les signes (+) et (-);
- Marquer du signe (+) tout successeur non encore marqué (+) d'un sommet marqué (+) ;
- Marquer du signe (-) tout prédécesseur non encore marqué (-) d'un sommet marqué (-) ;
- Quand on ne peut plus marquer de sommet, les sommets marqués (+) et (-) constituent la composante fortement connexe de x_0.

QUESTIONS

(1) Dessiner le graphe G_0

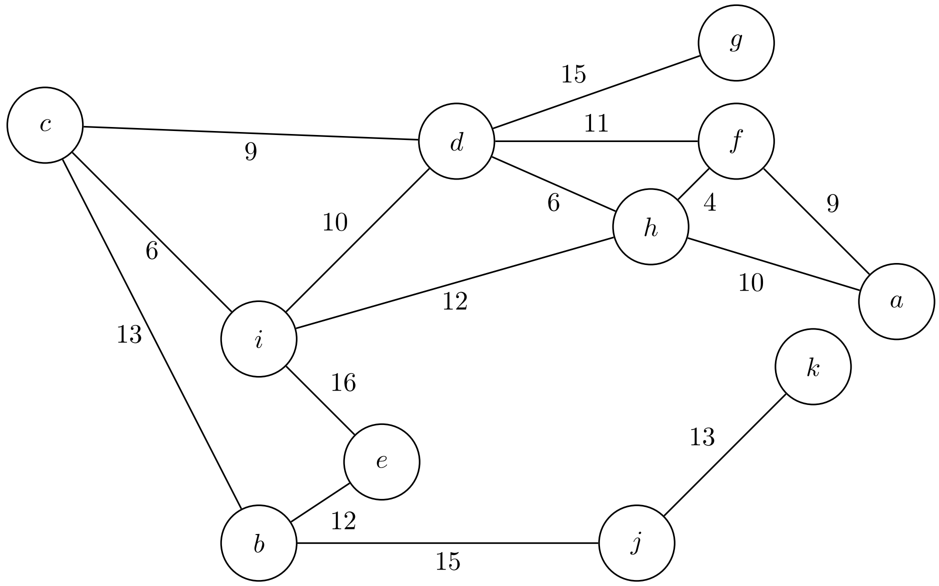
(2) Utilisez l'algorithme ci-dessus pour trouver toutes les composantes fortement connexes du graphe G_0.

solution



Il est à noter qu'on peut débuter l'algorithme de n'importe quel sommet x_0 afin de retrouver la composante fortement connexe de x_0, et que si on débute une deuxième fois l'algorithme par un sommet x_1 qui ne fait pas partie de la composante fortement connexe de x_0, on trouvera une autre composante fortement connexe dans laquelle x_1 est inclus.

Exercice 5. Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe suivant afin de trouver le plus court chemin du sommet a au sommet k.



Solution :

(1) $S = \{a\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (af, 9)\}$, le reste étant toujours à l'infini.

(2) $S = \{a, f\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (afd, 20), (afh, 13)\}$

(3) $S = \{a, f, h\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahd, 16), (ahi, 22)\}$

(4) $S = \{a, f, h, d\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$

(5) $S = \{a, f, h, d, i\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$

(6) $S = \{a, f, h, d, i, c\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(7) $S = \{a, f, h, d, i, c, g\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(8) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcb, 38)\}$

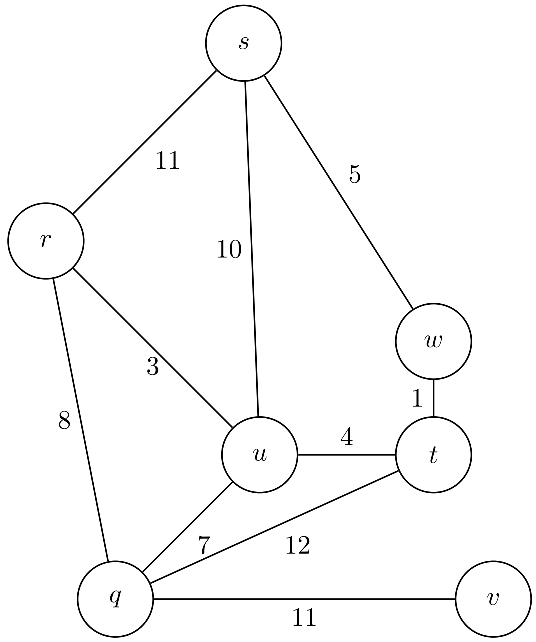
(9) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbj, 53)\}$

(10) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 53)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbjk, 66)\}$

(11) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j, k\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 53), (ahdcbjk, 66)\}$

Chemins connus : $C = \{\}$
L'algorithme s'arrête ici en raison de l'apparition du sommet visé dans l'ensemble des sommets connus S. Si on consulte le chemin emprunté pour s'y rendre, on obtient la suite des sommets a, h, d, c, b, j, k pour une distance minimale de 66.

Exercice 6. Appliquez l'algorithme de Floyd au graphe suivant afin de trouver la longueur du chemin minimal du sommet s au sommet v.



Solution : 28
Conseil : Implémenter l'algorithme parce qu'il n'est pas agréable à faire à la main.
Liste des distances initiale :
d(q, r) = 8,
d(q, s) = infinie,
d(q, t) = 12,
d(q, u) = 7,
d(q, v) = 11,
d(q, w) = infinie,
d(r, s) = 11,
d(r, t) = infinie,
d(r, u) = 3,
d(r, v) = infinie,
d(r, w) = infinie,
d(s, t) = infinie,
d(s, u) = 10,
d(s, v) = infinie,
d(s, w) = 5,
d(t, u) = 4,
d(t, v) = infinie,
d(t, w) = 1,
d(u, v) = infinie,
d(u, w) = infinie,
d(v, w) = infinie.
Première itération; entre q et r.
Il n'y a pas de chaîne plus courte.
Deuxième itération; entre q et s.
On a le choix d'une chaîne plus courte en passant par r (8+11 < infini) ou u (7+10 < infini). Les autres

sont infiniment loin de s ou de q. Celle avec u est plus courte et sera retenue.
Troisième itération; entre q et t.
La chaîne la plus courte passe par u ou directement entre q et t. Les autres sont infiniment loin de q ou t. Celle par u est de longueur 11 et celle directe est de longueur 12. Celle par u est plus courte et sera retenue.
...

Exercice 7. Un arbre m-aire complet M avec $m = 5$ a exactement :

a. $n = 21$ sommets. Combien a-t-il de feuilles? 17
b. $i = 12$ sommets internes. Combien a-t-il de sommets? 61
c. $l = 129$ feuilles. Combien a-t-il de sommets internes? 32

Exercice 8. Jeux avec les expressions arithmétiques :

a. Calculer la valeur des expressions suivantes, avec A = 1, B = 2, C = 2, D = 3 et E=4.
   a.a. Posfixées : $ABC + *CDE + \uparrow -$; $ADBCD * - + *$ -124 et -1
   a.b. Préfixées : $- * +ABC - DB$; $*A + D - B * CD$ 5 et -1
b. Dessiner l'arbre binaire représentant l'expression suivante et donnez-en une forme préfixe, infixe et postfixe : (A*B-C/D+E) + (A-B-C-D*D)/(A+B+C)
   Parcours :
   Préfixe : ++-*AB/CDE/—ABC*DD++ABC
   Infixe : A*B-C/D+E+A-B-C-D*D/A+B+C
   Postfixe : AB*CD/-E+AB-C-DD*-AB+C+/+

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 45, 46, 61 (page 440) ; 14, 20, 21, 22 (page 450) ; 22, 23 (page 464) ; 15, 16 (page 486) ; 16, 17, 18 (page 496) ; 38, 40 (page 502) ; 39, 40, 41 (page 574).

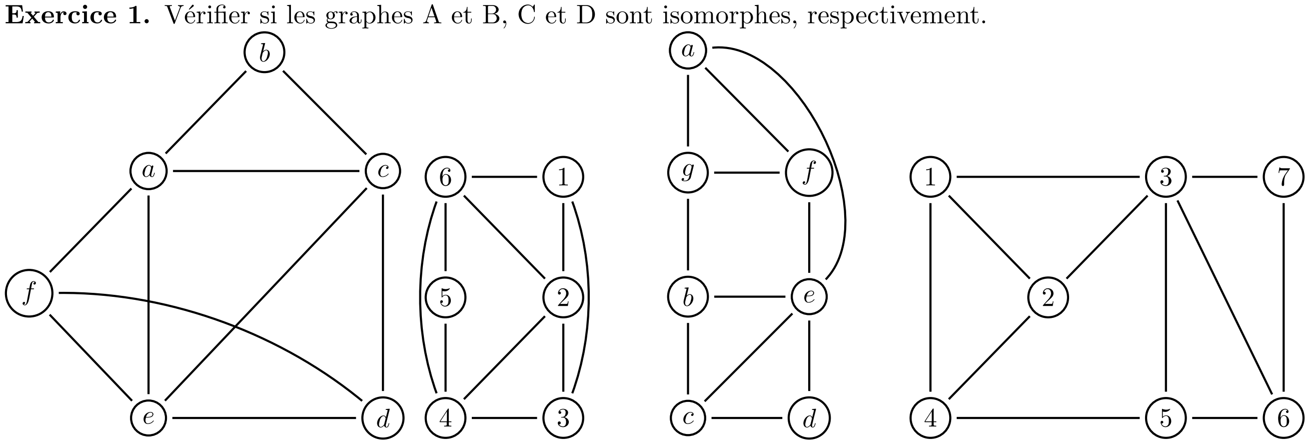
POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 6 : GRAPHES
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Graphes

Exercice 1. Vérifier si les graphes A et B, C et D sont isomorphes, respectivement.



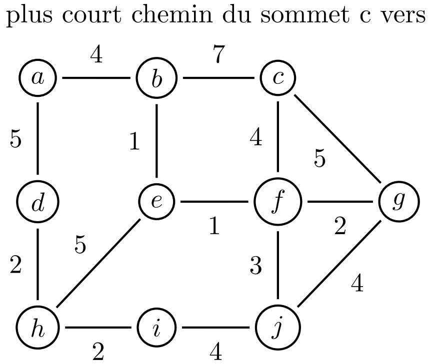
A B C D

Solution :
A et B sont isomorphes. On a : (a, 4), (b, 5), (c, 6), (d, 1), (e, 2), (f, 3).
C et D sont isomorphes. On a : (a, 1), (b, 5), (c, 6), (d, 7), (e, 3), (f, 2), (g, 4).

Exercice 2. Soit F une forêt à n sommets et m arêtes dont le nombre de composantes connexes est égal à k. Montrer que $m = n - k$.
Solution
Soient $F_1, ..., F_k$ les composantes connexes de F. Chaque F_i est un arbre. Soit n_i et m_i le nombre de sommets et d'arêtes de l'arbre F_i, avec $i \in \{1, 2, ..., k\}$.
On a : $m_i = n_i - 1$. D'où

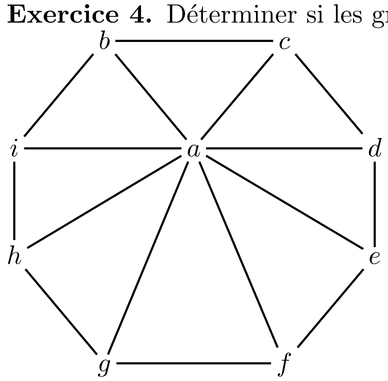
$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = (\sum_{i=1}^{k} n_i) - \sum_{i=1}^{k} 1 = n - k$$

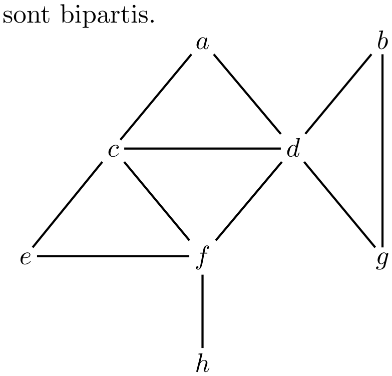
Exercice 3. Déterminer le plus court chemin du sommet c vers tous les autres sommets.

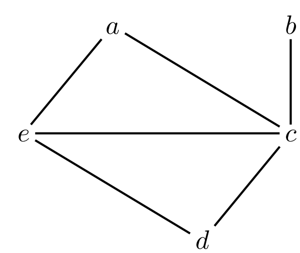


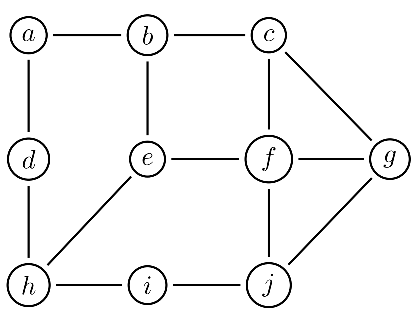
Sommet	Plus court chemin	Coût
a	c-f-e-b-a	10
b	c-f-e-b	6
c	c-c	0
d	c-f-e-h-d	12
e	c-f-e	5
f	c-f	4
g	c-g	5
h	c-f-e-h	10
i	c-f-j-i	11
j	c-f-j	7

Exercice 4. Déterminer si les graphes sont bipartis.



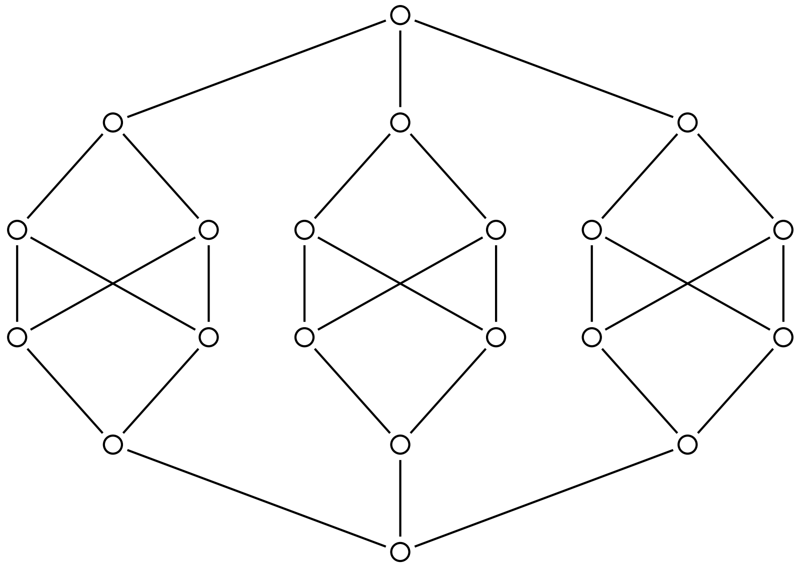






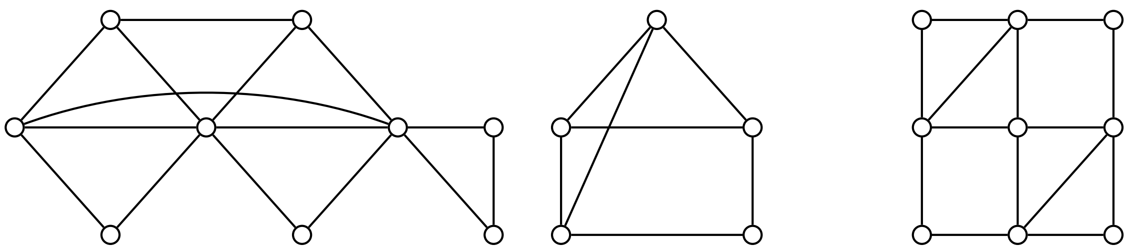
Réponse : Aucun des graphes n'est biparti.

Exercice 5. Le graphe ci-dessous contient-il un cycle hamiltonien ?

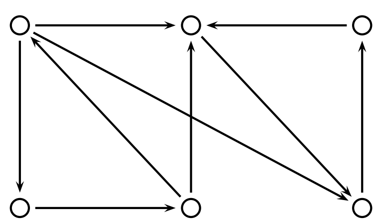


Réponse : Non. Il contient par contre une chaîne hamiltonienne.

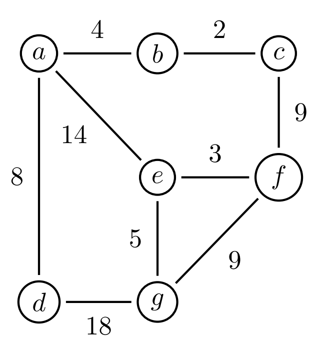
Exercice 6. En considérant chacun des graphes suivants, déterminer s'il contient un cycle eulérien. Si oui, construire un tel cycle. Si non, déterminer s'il contient un chemin eulérien et construire un tel chemin s'il existe.



Exercice 7. Donner toutes les composantes connexes du graphe ci-dessous.

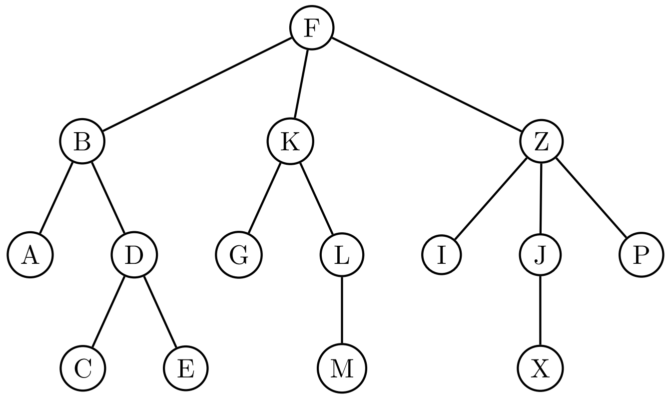


Exercice 8. Déterminer le plus court chemin du sommet d au sommet f.



Plus court chemin de d à f : $d - a - b - c - f$. Coût correspondant : 23.

Exercice 9. Donner les parcours préfixe, infixe et postfixe de l'arbre ci-dessous.



Parcours préfixe : F-B-A-D-C-E-K-G-L-M-Z-I-J-X-P
Parcours infixe : A-B-C-D-E-F-G-K-M-L-I-Z-X-J-P
Parcours postfixe : A-C-E-D-B-G-M-L-K-I-X-J-P-Z-F

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 45, 46, 61 (page 440) ; 14, 20, 21, 22 (page 450) ; 22, 23 (page 464) ; 15, 16 (page 486) ; 16, 17, 18 (page 496) ; 38, 40 (page 502) ; 39, 40, 41 (page 574).

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 7 : ARBRES DE RECOUVREMENT ET DÉNOMBREMENT
CORRIGÉ DES EXERCICES

1. ARBRES DE RECOUVREMENT

Exercice 1. Une compagnie ferroviaire désire installer des chemins de fer entre les villes Sainte-Hélène-de-Chester (H), Saints-Martyrs-Canadiens (M), Sacré-Coeur-de-Marie-Partie-Sud (C), Sainte-Praxède (P), Saint-Hilaire-de-Dorset (D), Saint-Gédéon-de-Beauce (G), Saint-Évariste-de-Forsyth (E), Saint-Louis-de-Gonzague (L) et Saint-Joseph-de-Coleraine (J). Elle a calculé les coûts des travaux pour les chemins suivants :

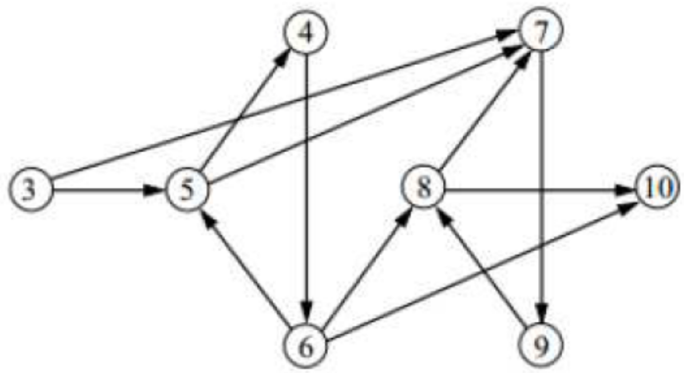
	C	D	E	G	H	J	L	M	P
C	-								
D	-	-							
E	7	2	-						
G	-	1	3	-					
H	2	-	8	-	-				
J	3	-	2	-	1	-			
L	1	-	2	-	-	5	-		
M	-	4	-	-	3	2	-	-	
P	-	4	2	-	-	3	-	1	-

a. Appliquez l'algorithme de Kruskal pour déterminer le réseau de chemins de fer qui coûte le moins cher, mais qui relie toutes les villes.
b. Appliquez l'algorithme de Prim pour déterminer le réseau de chemins de fer qui coûte le moins cher, mais qui relie toutes les villes.

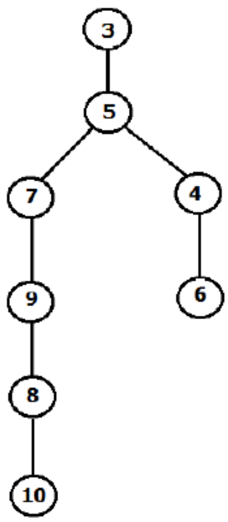
Solution :
Plusieurs réponses sont valides, par exemple :

a. G-D-E-L-C-H-J-M-P.
b. H-J-M-P-E-{L-C}{D-G}.

Exercice 2. En réalisant un parcours en profondeur du graphe suivant à partir du sommet 3, donnez-en un arbre de recouvrement.



Solution: PLusieurs solutions sont valides pour cette exercice.



2. DÉNOMBREMENT

Exercice 3. Principe d'inclusion-exclusion : combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 700 qui ne sont

a. divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 7 ?

$$700 - \left\lfloor \frac{700}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{700}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{700}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{700}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{700}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{700}{3 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{700}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor = 200$$

b. divisibles ni par 3, ni par 6, ni par 9, ni par 11?

$$700 - \left\lfloor \frac{700}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{700}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{700}{3 \cdot 11} \right\rfloor = 425$$

Exercice 4. Quel est le coefficient de x^a lorsque $b = 12$ pour y^b dans le développement de $(2x + y)^{16}$?
Solution
$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)x^{n-k}y^k$
$(2x + y)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C(16, k)2^{16-k}x^{16-k}y^k$
Si on prend $k = b = 12$, $C(16, 12) = 16!/(12!(16 - 12)!) = 1820$
Le coefficient de x^a avec $a = 4$ est $1820 * 2^4 = 29120$

Exercice 5. Dans un jeu de 52 cartes, on choisit 5 cartes au hasard. (ces 5 cartes s'appellent une "main").

a. Combien de mains contiennent exactement 2 dames et 1 roi ? $\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{44}{2} = 22704$

b. Combien de mains contiennent au moins 3 rois? $\binom{4}{3} \times \binom{48}{2} + \binom{48}{1} \times \binom{4}{4} = 4560$

Exercice 6. Dans une boite contenant 20 balles dont 6 sont rouges, 6 vertes et 8 bleues:

a. De combien de manières peut-on sélectionner 5 balles si toutes les balles sont considérées comme distinctes ? $\binom{20}{5}$
b. De combien de manières peut-on sélectionner 2 rouges, 3 vertes, et 2 bleues si toutes les balles sont considérées comme distinctes ?$\binom{6}{2} \times \binom{6}{3} \times \binom{8}{2}$
c. On retire 5 balles, puis on les replace, puis on retire encore 5 balles. De combien de manières différentes peut-on effectuer cela si les balles sont considérées comme distinctes ? $\binom{20}{5} \times \binom{20}{5}$
d. On retire 5 balles, sans les replacer, puis on retire encore 5 balles. De combien de manières différentes peut-on effectuer cela si les balles sont considérées comme distinctes ? $\binom{20}{5} \times \binom{15}{5}$

Exercice 7. Un alphabet de 40 symboles est utilisé pour transmettre des messages de 25 symboles.

a. Combien de messages peut-on transmettre si les répétitions de symboles sont permises ?40^{25}
b. Combien de messages peut-on transmettre si les répétitions de symboles ne sont pas permises ? $P(40, 25)$
c. Combien de messages peut-on transmettre si 10 parmi les 40 symboles ne peuvent apparaitre que comme premiers ou derniers symboles avec :
   c.a. les répétitions permises ? $30^{25} + (10 \times 30^{24}) + (10 \times 30^{23} \times 10) + (10 \times 30^{24})$
   c.b. les répétitions non permises ? $P(30, 25) + (P(10, 1) \times P(30, 24)) + (P(10, 1) \times P(30, 23) \times P(9, 1)) + (P(10, 1) \times P(30, 24))$

Exercice 8. Parmi les permutations de l'ensemble E = a, b, c, d, e, f (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

Pour avoir ab seul on a : $5 \times 4! - 42$ possibilités. Pareil pour cd seul ou ef seul. Au total on a : $3(5 \times 4! - 42) = 234$ possibilités.
Pour avoir ab et cd ensemble et sans ef on a : 18 possibilités. Pareil pour cd et ef sans ab puis ab et ef sans cd. Au total on a : 54 possibilités.
Pour avoir ab, cd et ef ensemble on a : 6 possibilités.
Le résultat recherché est alors $6! - 3(5 \times 4! - 42) - (3 \times 18) - 6 = 426$ possibilités de permutations

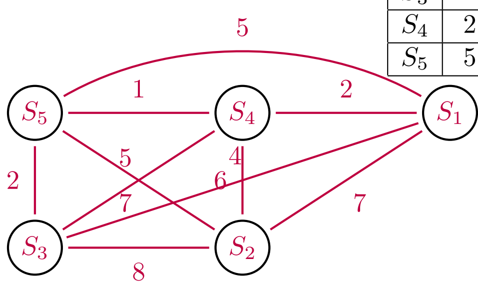
Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 13, 20, 21, 32, 39 (Pages 300-301) ; 8, 18 (Page 308) ; 11, 17 (Page 331).

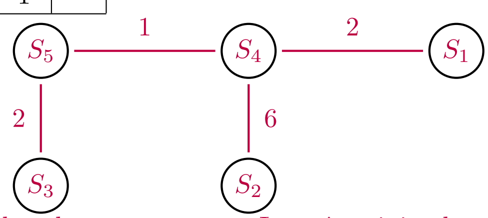
TD 7 : GRAPHES - DÉNOMBREMENTS
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

Exercice 1. Appliquer l'algorithme de Prim aux données du tableau ci-après pour trouver le coût minimal.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1					
S_2	7				
S_3	4	8			
S_4	2	6	5		
S_5	5	7	2	1	

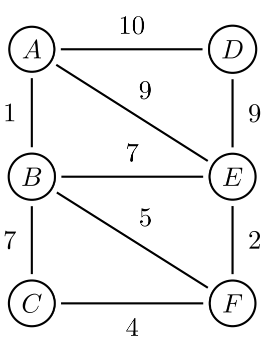


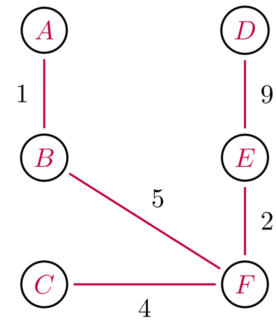
Graphe initial.



Arbre de recouvrement. Le coût minimal est 11.

Exercice 2. Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe pondéré ci-après.





Exercice 3. Une compagnie désire installer au moindre coût un réseau de transmission de données entre son siège et 7 de ces succursales numérotées S_1, S_2, ..., S_7. Le coût d'une ligne entre deux agences est donnée par le tableau suivant :

1. Appliquer Prim pour trouver le coût minimal du projet.
2. Appliquer Kruskal pour trouver le coût minimal du projet.
3. Comparer les deux solutions.

Table 1. Coût d'installation d'un réseau de transmission

	Siège	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	5						
S_2	18	17					
S_3	9	11	27				
S_4	13	7	23	20			
S_5	7	12	15	15	15		
S_6	38	38	20	40	40	35	
S_7	22	15	25	25	30	10	45

Exercice 4. *Parcours d'arbres*

1. Calculer la valeur des expressions suivantes, avec A = 2, B = 2, C = 3, D = 4 et E=1.
   1.1. Posfixées : ABC**CDE+/- ; ADBCD*-+*
   1.2. Prefixées : -*+ABC/DB ; *A+D-B*CD
2. Dessiner l'arbre binaire représentant l'expression suivante et donnez-en une forme préfixe et une forme postfixe : (A*B-C/D+E) + (A-B-C-D*D)/(A+B+C)

Exercice 5. Résoudre les relations de récurrence suivantes :

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$
   Réponse : $a_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$
   Réponse : $a_n = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
3. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$
4. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 6a_{n-3}$; $a_0 = 1$, $a_1 = -4$ et $a_2 = -4$
5. $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$
   Réponse : $a_n = (2 + \frac{3n}{2}) \times 2^n - 2 \times 3^n$

Exercice 6. Donner un ordre de grandeur asymptotique pour $T(n)$.

1. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$. Réponse : $O(n^3)$
2. $T(n) = 8T(n/2) + n^2$. Réponse : $O(n^3)$
3. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note : $\sum_n^p$ le nombre de n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$.

1. Déterminer $\sum_n^0$, $\sum_n^1$, $\sum_n^2$, $\sum_1^p$, $\sum_2^p$.
   - $\sum_n^0 = 1$. Le seul n-uplet dont la somme des termes est zéro est : (0).
   - $\sum_n^1 = n$. Les n-uplets contiennent $n-1$ fois le chiffre 0 et seul chiffre 1. Il y a n façons de positionner le chiffre 1 dans un n-uplet.
   - $\sum_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Les n-uplets contiennent un seul chiffre 2 et $n-1$ zéros ou deux fois le chiffre 1 et $n-2$ zéros. Il y a n façons de positionner le chiffre 2 dans un n-uplet et il y a $C(n,2) = \frac{n(n-1)}{2}$ façons de positionner deux fois le chiffre 1 dans un n-uplet. Le nombre recherché est donc $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
   - $\sum_1^p = 1$. On a (x_1) tel que $x_1 = p$. Le seul n-uplet possible est (p).
   - $\sum_2^p = p+1$. On a (x_1, x_2) tel que $x_1 + x_2 = p$. Soit $x_2 = p - x_1$ et $(x_1, x_2) = (x_1, p - x_1)$. Il y a $p+1$ façons de choisir x_1, soit $x_1 \in \{0, \dots, p\}$
   .
2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \cdots + \sum_n^p$
   - Par définition, $\sum_{n+1}^p$ est le nombre de $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = p$. C'est donc le nombre de n-uplets tels $x_1 + x_2 + ... + x_n = p - x_{n+1}$, soit $\sum_n^{p-x_{n+1}}$ (par définition).
     On a $x_{n+1} \in \{0, \dots, p\}$, donc $p+1$ choix possibles de x_{n+1}.

Par suite, $\sum_{n+1}^{p} = \sum_{n}^{p-0} + \sum_{n}^{p-1} + \cdots + \sum_{n}^{p-(p-1)} + \sum_{n}^{p-p}$. D'où la relation.

- Il est également possible de démontrer la relation par récurrence en montrant le cas de base comme suit :
  $\sum_1^0 + \sum_1^1 + \cdots + \sum_1^p = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{(p+1)fois} = p+1$ car $\sum_1^k = 1$ avec comme seul uplet (k). De plus on a $\sum_2^p = p+1$ (question 1). Donc $\sum_2^p = \sum_1^0 + \sum_1^1 + \cdots + \sum_1^p$.

3. En déduire que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$
   Preuve par induction :
   $\sum_1^p = 1 = C(p,p) = C(1-1+p, p)$. La relation est vraie pour $n = 1$.
   Supposons que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$ pour n quelconque $(n \geq 1)$.
   $\sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \sum_n^2 + \cdots + \sum_n^p$ (d'après la question 2)
   $\sum_{n+1}^p = C(n+0-1, 0) + C(n+1-1, 1) + C(n+2-1, 2) + \cdots + C(n+p-1, p)$
   $\sum_{n+1}^p = C(n-1, 0) + C(n, 1) + C(n+1, 2) + \cdots + C(n+p-1, p)$
   C(n-1,0)=C(n,0) donc $\sum_{n+1}^p = (C(n,0) + C(n,1)) + C(n+1, 2) + \cdots + C(n+p-1, p)$
   $\sum_{n+1}^p = (C(n+1,1) + C(n+1,2)) + \cdots + C(n+p-1, p)$ car C(n,0) + C(n,1)=C(n+1,1)
   $\sum_{n+1}^p = C(n+2, 2) + \cdots + C(n+p-1, p)$
   De proche en proche on a $\sum_{n+1}^p = C(n+p-2, p-1) + C(n+p-1, p)$
   d'où $\sum_{n+1}^p = C(n+p, p)$
   On peut donc conclure que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$.

Exercice 8. Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = Card\ A$.

1. Combien y-a-t-il de parties X de E contenant A ?
   - Premier raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A peut avoir $p, p+1, p+2, \ldots, n$ éléments. Ainsi, si X contient A et a $(p+k)$ éléments avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$, les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E - A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p, k)$.
     Le nombre de parties X de E contenant A est alors :
     $\sum_{k=0}^{n-p} C(n-p, k) = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p, k) \times 1^k \times 1^{n-p-k} = (1+1)^{n-p} = 2^{n-p}$

   - Deuxième raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A est obtenue par la réunion de A et d'un sous-ensemble de $E - A$. Les sous-ensemble de $E - A$ constitutent son ensemble des parties $\mathcal{P}(E - A)$. Le nombre de sous ensembles de $E - A$ est donc 2^{n-p}, avec $Card(E - A) = n - p$. Donc la réponse cherchée est : 2^{n-p}.

2. Combien y-a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A, $m \in \{p, \ldots, n\}$?
   On a $m = p+k$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$. Les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E - A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p, k)$.
   D'où le nombre de parties X de E à m éléments contenant A est alors : $C(n-p, m-p)$

3. Combien y-a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?
   Les éléments de $E - A$ qui s'ajoutent à A pour former X sont distincts de ceux qui s'ajoutent à A pour former Y car $X \cap Y = A$. Si X contient m éléments incluant ceux de A ($C(n-p, m-p)$ possibilités), alors Y peut contenir jusqu'à $(n-m)$ éléments en plus de ceux de A. On a donc $\sum_{i=0}^{n-m} C(n-m, i) = \sum_{k=0}^{n-m} C(n-m, k) 1^i 1^{n-m-i} = (1+1)^{n-m} = 2^{n-m}$ possibilités de constitution de Y connaissant les m éléments de X.
   Le nombre de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$ est alors :
   $\sum_{m=p}^{n} C(n-p, m-p) \times 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p, k) \times 2^{n-(k+p)} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p, k) \times 2^{(n-p)-k} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p, k) \times 2^{(n-p)-k} \times 1^k = (2+1)^{n-p} = 3^{n-p}$

Exercice 9. Soit la relation : $k \times C(n,k) = n \times C(n-1,k-1)$

1. Démontrez la relation.
   $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times k(k-1)!}$.
   En multipliant les deux membres par k puis en simplifiant le membre de gauche par k on a:
   $k \times C(n,k) = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k-1+1)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]! \times (k-1)!} = n \times C(n-1,k-1)$

2. En déduire pour tout entier positif n, la somme :
$$C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$$
   $C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$
   $= n \times C(n-1,1-1) + n \times C(n-1,2-1) + \cdots + n \times C(n,k-1) + \cdots + n \times C(n-1,n-1)$
   $= n(C(n-1,0) + C(n-1,1) + \cdots + C(n,k-1) + \cdots + C(n-1,n-1))$
   $= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i)$
   $= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i) \times 1^i \times 1^{n-1-i}$
   $= n \times (1+1)^{n-1}$
   $= n \times 2^{n-1}$

3. En déduire pour tout entier positif non nul n, la somme :
$$C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$$
   $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
   $= (2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   Or $2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n) = n \times 2^{n-1} - C(n,1)$,
   donc $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
   $= n \times 2^{n-1} - C(n,1) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} - (C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} + C(n,0) - (C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} + 1 - 2^n$
   $= 1 + (n-2) \times 2^{n-1}$

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)
Exercices numéros 13, 20, 21, 32, 39 (Pages 300-301) ; 8, 18 (Page 308) ; 11, 17 (Page 331).

LOG 2810

STRUCTURES DISCRETES

TD 8 : THÉORIE DES LANGAGES
CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 1. Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à 7 éléments dans un ensemble à 5 éléments? $5^7 - C(5,1) * 4^7 + C(5,2) * 3^7 - C(5,3) * 2^7 + C(5,4) * 1^7 = 16800$

Exercice 2. Un employé de quincaillerie effectue le ménage des tiroirs à vis de son département. Il choisit d'effectuer sa tâche selon un protocole de ménage qu'il imagine, car il est très consciencieux : il divise la quantité de vis en deux parties égales; si la quantité de vis est égale à un, il la nettoie et la met de côté pour la replacer. Sinon, pour chacune des parties, il répétera deux fois le protocole de ménage des tiroirs. À chaque fois qu'il divise une quantité de vis en deux, il sait qu'il devra les replacer correctement dans les tiroirs, ce qui lui prend un temps équivalent au nettoyage du carré du nombre de vis dans la quantité qu'il vient de diviser. Quelle est la complexité, en termes d'opérations de nettoyage, de l'algorithme qu'il vient d'inventer? $f(n) = 4 * f(n/2) + n^2$; On a la complexité $O(n^2 \log(n))$

Exercice 3. Des quintuplées décident de jouer un tour à leurs parents et d'échanger leurs vêtements afin qu'ils les confondent. Après l'échange de vêtements, aucune ne se retrouve avec son habillement original. Combien y a-t-il de façons de parvenir à ce résultat? Il s'agit d'un dérangement, puisqu'on ne peut pas se retrouver avec un élément inchangé. $D_5 = 5! * (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) = 44$

Exercice 4. Un algorithme a trois cas particuliers; il se résout en $a_0 = 5$ opérations lorsqu'il ne s'opère sur aucun argument, en $a_1 = -1$ opérations lorsqu'il s'opère sur un seul argument (il saute une étape qui est toujours faite dans les autres cas), et il se résout en $a_2 =???$ lorsqu'il s'opère sur deux arguments (on a oublié de tester ce cas). Par contre, on sait que pour tout nombre d'arguments suivant, on peut résoudre l'algorithme en $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}$. Trouver la solution de la relation de récurrence. $a_n = (4\alpha_3 - 11)3^n + (-5\alpha_3 + 16)2^n + \alpha_3(-2)^n$

Exercice 5. Quelle est la borne asymptotique des relations de récurrence avec fractionnement suivantes?

(1) $T(n) = 3T(n/5) + \Theta(n)$ $O(n)$
(2) $T(n) = 4T(n/4) + \Theta(n)$ $O(n\log(n))$
(3) $T(n) = 6T(n/5) + \Theta(n^2)$ $O(n^2)$

Exercice 6. Soit la grammaire G définie par G = (V, T, S, P) où V = $\{a, b, S, A\}$, T = $\{a, b\}$, S symbole de départ et P = $\{S \to bS, S \to aS, A \to aS, A \to bA, A \to a, S \to b\}$.

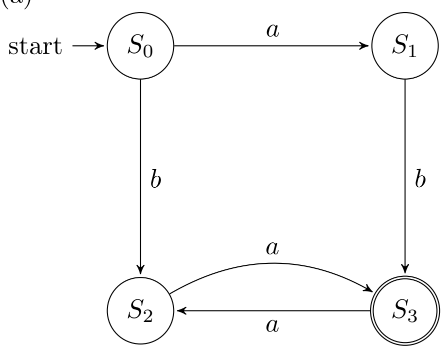
(1) Quel est le type de la grammaire de G.
(2) Montrer que la chaîne *bbabbab* est dans L(G) en donnant une dérivation.

Solution

(1) Grammaire de type 3
(2) $S \to bS$
$S \to bbS(car S \to bS)$
$S \to bbaS(car S \to aS)$
$S \to bbabS(car S \to bS)$
$S \to bbabbS(car S \to bS)$
$S \to bbabbaS(car S \to aS)$
$S \to bbabbab(car S \to b)$

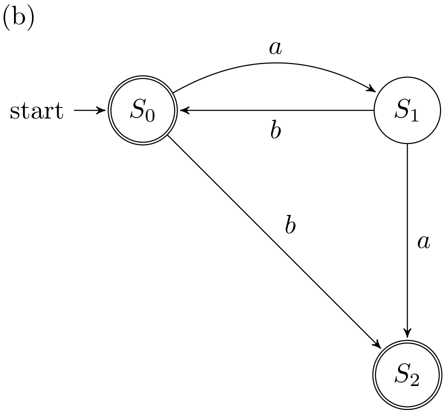
Exercice 7. Donnez les grammaires générées par les langages reconnus par les automates suivants :

(a)



G = (V, T, $S_0, P), V = \{a, b, S_0, S_1, S_2, S_3\}, T = \{a, b\}$, S_0 symbole de départ et P = $\{S_0 \to aS_1, S_0 \to bS_2, S_1 \to bS_3, S_1 \to b, S_2 \to aS_3, S_2 \to a, S_3 \to aS_2\}$.

(b)

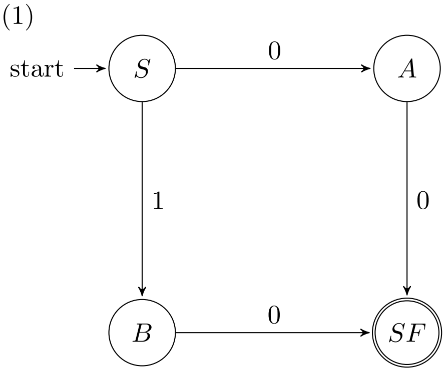


G = (V, T, $S_0, P), V = \{a, b, S_0, S_1, S_2\}, T = \{a, b\}$, S_0 symbole de départ et P = $\{S_0 \to aS_1, S_0 \to bS_2, S_1 \to bS_0, S_1 \to aS_2,\ S_0 \to \epsilon,\ S_2 \to \epsilon\}$.

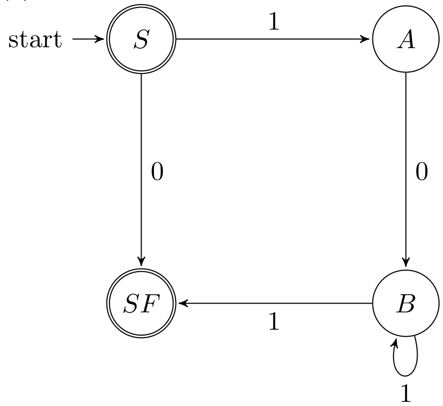
Exercice 8. Donnez un automate fini qui reconnaît le langage produit par la grammaire G = (V, T, S, P) avec V = {0, 1, S, A, B}, T = {0, 1}, S le symbole de départ et ayant l'ensemble de productions :

(1) $S \to 0A, S \to 1B, A \to 0, B \to 0$
(2) $S \to 1A, S \to 0, S \to \lambda, A \to 0B, B \to 1, B \to 1B$

solution
(1)



(2)



Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 11 (page 625); 10, 17 (page 634); 8 (page 655).

LOG 2810

STRUCTURES DISCRETES

TD 8 : DÉNOMBREMENTS
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

Exercice 1. Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 600 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5 ?
$600 - \lfloor \frac{600}{2} \rfloor - \lfloor \frac{600}{3} \rfloor - \lfloor \frac{600}{5} \rfloor + \left\lfloor \frac{600}{2\times 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{600}{2\times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{600}{3\times 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{600}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 160$

Exercice 2. A l'aide des chiffres : 2, 3, 5, 7, 9 :

1. combien de nombres de trois chiffres peut-on former ? Réponse : 5^3
2. combien de ces nombres sont inférieurs à 500 ? Réponse : 2×5^2
3. combien de ces nombres sont supérieurs à 700 ? Réponse : 2×5^2
4. combien de ces nombres sont pairs ? Réponse : $5^2 \times 1$
5. combien de ces nombres sont impairs ? Réponse : $5^2 \times 4$ ou encore $5^3 - 5^2 \times 1$
6. combien de ces nombres sont des multiples de sept ? Réponse : 18.
   Ces nombres sont : 252, 259, 273, 322, 329, 357, 392, 399, 525, 532, 539, 553, 595, 735, 777, 952, 959, 973.

Exercice 3. Combien de chaînes binaires de longueur 10 :

1. commencent par 11 et finissent par '000'. Réponse : 2^5
2. contiennent quatre 0 et six 1. Réponse : $C(10, 4) = C(10, 6)$
3. contiennent au moins deux 0. $2^{10} - C(10, 0) - C(10, 1) = 2^{10} - 11$
4. contiennent au moins deux 0 et au moins deux 1.C'est l'ensemble des possibilités de chaînes binaires moins le nombre de chaînes contenant respectivement : aucun 0, un seul 0, neuf 0 et dix 0. Soit $2^{10} - C(10, 10) - C(10, 9) - C(10, 1) - C(10, 0) = 2^{10} - 22$.
   On peut aussi l'obtenir en dénombrant directement ceux qui contiennent exactement deux fois zéro, trois fois zéro, ..., dix fois zéro. Soit : $C(10, 2) + C(10, 3) + \cdots + C(10, 9) + C(10, 10)$
5. contiennent soit quatre 1 consécutifs, soit quatre 0 consécutifs.
   Faire le dénombrement au cas par cas et ne pas oublier d'exclure les doublons.

Exercice 4. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E. On pose $D_0 = 1$.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.
   Réponse : Pas de dérangement. $D_1 = 0$.
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.
   Réponse : 1 dérangement. $D_2 = 1$.
3. On suppose n quelconque, et on ecrit $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :
   $$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_k$$
   Réponse : Une permutation qui laisse k éléments invariants contient $(n - k)$ dérangements, soit D_{n-k}.
   Il y a $C(n, k)$ façons d'avoir k éléments invariants.
   Le nombre de permutations est donc $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k}$.
   Déduction : Le nombre de permutations de E est $n!$. On peut donc établir que $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k}$.
   $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k} = C(n, 0) \times D_n + C(n, 1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n, n-1) \times D_1 + C(n, n) \times D_0$

En considérant que $C(n,k) = C(n,n-k)$, on a :
$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,n) \times D_n + C(n,n-1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,1) \times D_1 + C(n,0) \times D_0$
D'où $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$.

4. En déduire D_3, D_4, D_5.
   Réponse : $D_3 = 2$ car $3! = \sum_{k=0}^{3} C(3,k) \times D_k$. En faisant une démarche analogue on obtient $D_4 = 9$, $D_5 = 44$.
5. Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. À l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes. On numérote les femmes de 1 a 5 , et les hommes de 1 a 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque homme choississant au hasard une femme pour partenaire.
   5.1. A chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y a t-il d'associations possibles ?
   Réponse : Une telle association correspond à une permutation de $\{1, ..., 5\}$. Il y a $5! = 120$ possibilités.
   5.2. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué ?
   Réponse : Si aucun couple légitime n'est reconstitué, c'est qu'il y a un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ possibilités.
   5.3. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué ?
   Réponse : Si un seul couple légitime est reconstitué, il y a 5 choix pour ce couple. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ possibilités.
   5.4. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes ?
   Réponse :
   - On peut avoir trois (03) couples illégitimes et deux (02) couples légitimes. Or il y a $C(5,3) = 10$ choix de 2 couples légitimes parmi 5. Pour les 3 autres, il faut une association qui soit un dérangement D_3. On a donc : $10 \times D_3 = 20$ possibilités.
   - On peut avoir quatre (04) couples illégitimes et un (01) couple légitime. Ce cas est traité dans la question précédente (question 5.3.). On a donc : $5 \times D_4 = 45$ possibilités.
   - On peut avoir cinq (05) couples illégitimes et zéro (0) couple légitime. Ce cas est traité dans la question 5.2. On a donc : $D_5 = 44$ possibilités.

   Le nombre d'associations où il y a plus de couples illégitimes que de couples légitimes est donc : $20 + 45 + 44 = 109$.

Exercice 5. Parmi les permutations de l'ensemble E = {a, b, c, d, e, f} (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

Première méthode

- Nombre de permutations qui contiennent ab.
  Pour une position fixe de ab, il y a : 4! possibilités de placer les autres lettres. Or il y a 5 positions possibles pour ab. Donc pour ab on a : $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ef.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et cd
  Pour une position fixe de ab et cd, il y a : 2! possibilités de placer les autres lettres. Il y a 5 positions possibles pour ab. Une fois ab placé, il y a 3, 2, 2, 2, 3 positions respectives pour cd. Soit 10 possibilités. Donc pour ab et cd on a : $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab, cd et ef
  Il y a $3! = 6$ possibilités de permutations.

Le résultat recherché est alors $3(5 \times 4!) - 3(12 \times 2!) + 3! = 294$ possibilités de permutations.

Deuxième méthode

- Pour avoir ab seul on a : $5 \times 4! - 42$ possibilités. Pareil pour cd seul ou ef seul. Au total on a : $3(5 \times 4! - 42) = 234$ possibilités.
- Pour avoir ab et cd ensemble et sans ef on a : 18 possibilités. Pareil pour cd et ef sans ab puis ab et ef sans cd. Au total on a : 54 possibilités.
- Pour avoir ab, cd et ef ensemble on a : 6 possibilités.

Le résultat recherché est alors $6! - 3(5 \times 4! - 42) - (3 \times 18) - 6 = 234 + 54 + 6 = 294$ possibilités de permutations.

Exercice 6. On considère le mot MATRICE.

1. Dénombrer les anagrammes du mot.
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot :
   2.1. commençant et finissant par une voyelle ;
   2.2. commençant et finissant par une consonne ;
   2.3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   2.4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 8, 9, 10, 29,30, 32 (Pages 333-335).

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

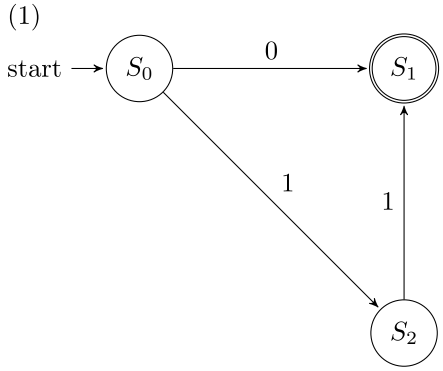
TD 9 : AUTOMATES
CORRIGÉ DES EXERCICES

Notez que, dans la plupart des cas, il existe plusieurs solutions possibles à un problème.

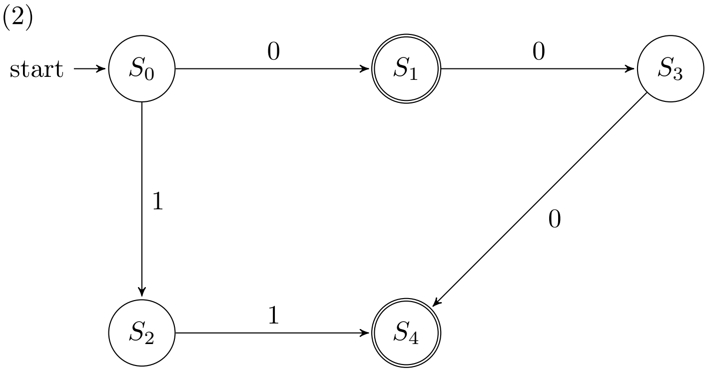
Exercice 1. Trouver un automate fini qui reconnaît :

(1) {0,11}
(2) {0,11,000}

Solution
(1)



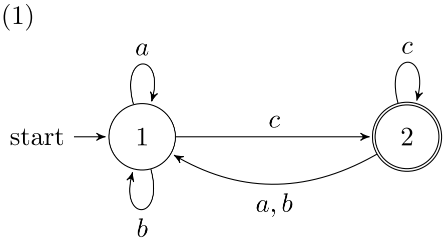
(2)



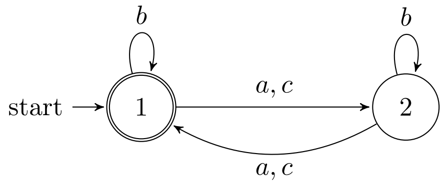
Exercice 2. Donner les automates finis déterministes sur E={a,b,c } reconnaissant

(1) Les mots se terminant par une suite d'au moins un c.
(2) Les mots ayant un nombre pair de x, où x est un symbole égal à a ou c.
(3) Les mots ayant un nombre pair de a et un nombre pair de c.
(4) L'ensemble des mots ayant pour préfixe ac.
(5) L'ensemble des mots ayant au plus une occurrence de b.

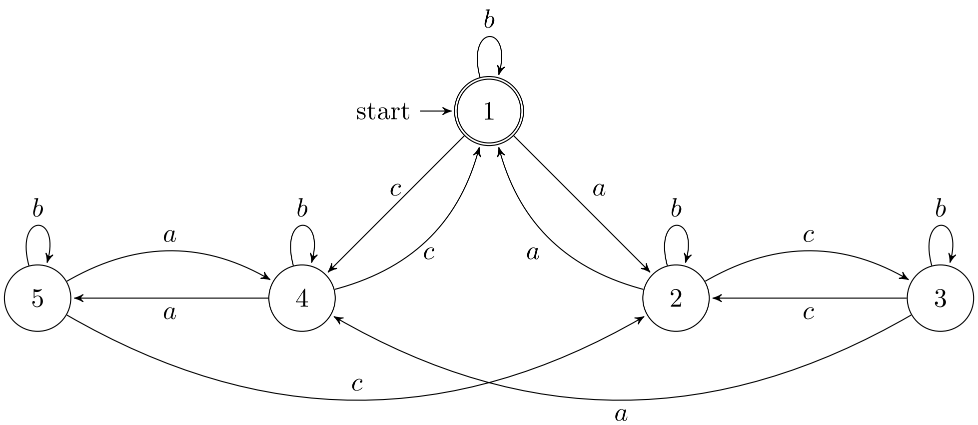
Solution
(1)



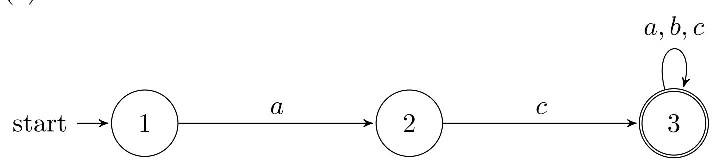
(2)



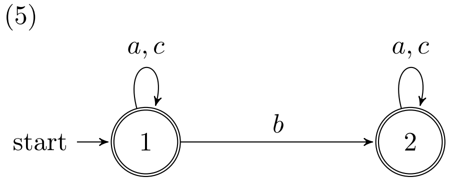
(3)



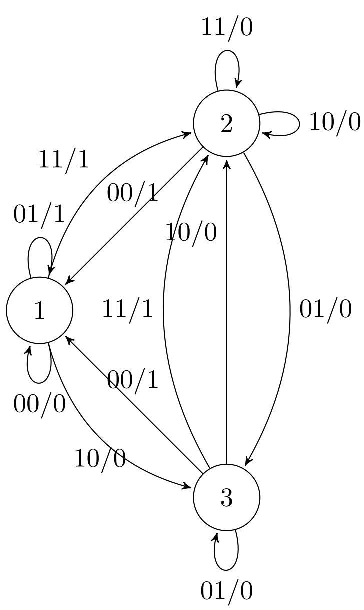
(4)



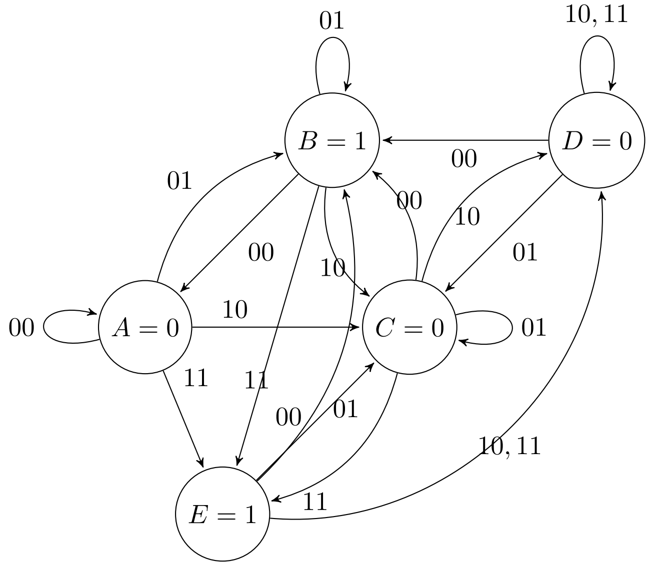
(5)



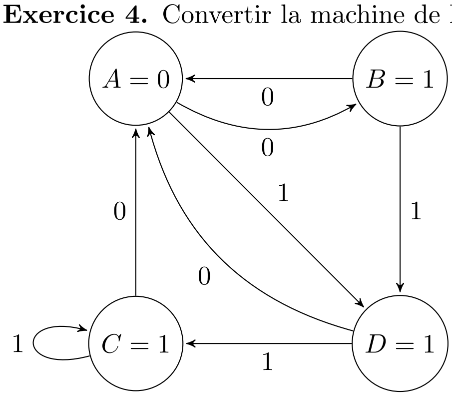
Exercice 3. Convertir la machine de Mealy suivante en machine de Moore.



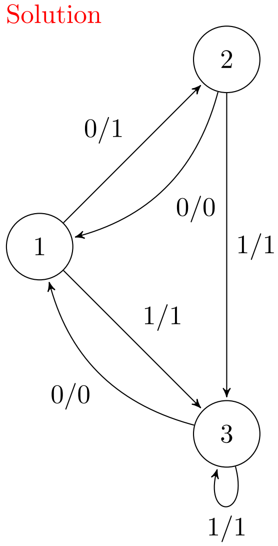
Solution



Exercice 4. Convertir la machine de Moore suivante en machine de Mealy.



Solution



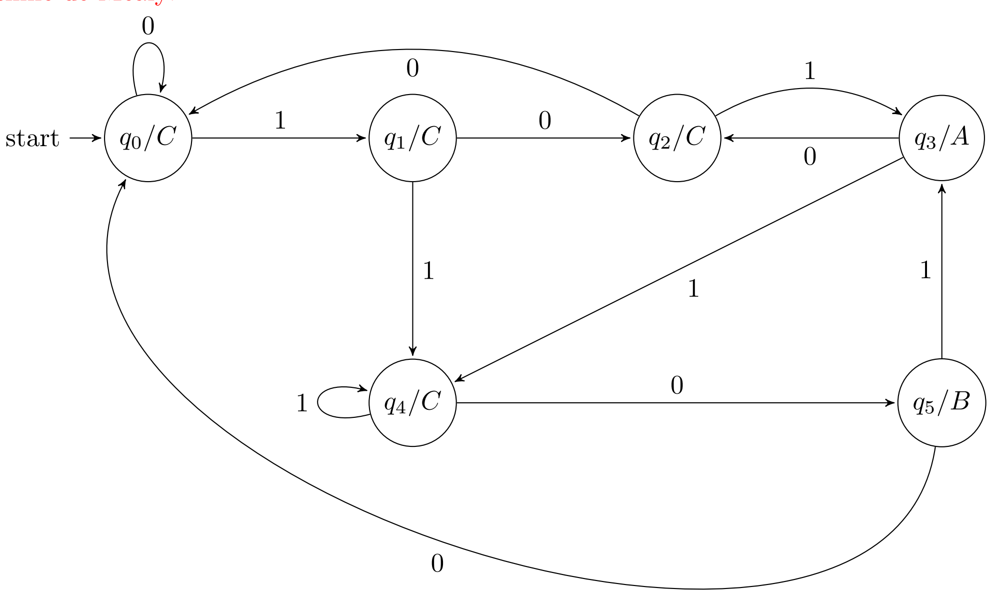
Exercice 5. Donnez des grammaires syntagmatiques pour produire chacun des ensembles suivants :

(1) $\{01^n\}$: P $= \{S \to 0A, A \to 1A, A \to \epsilon\}$

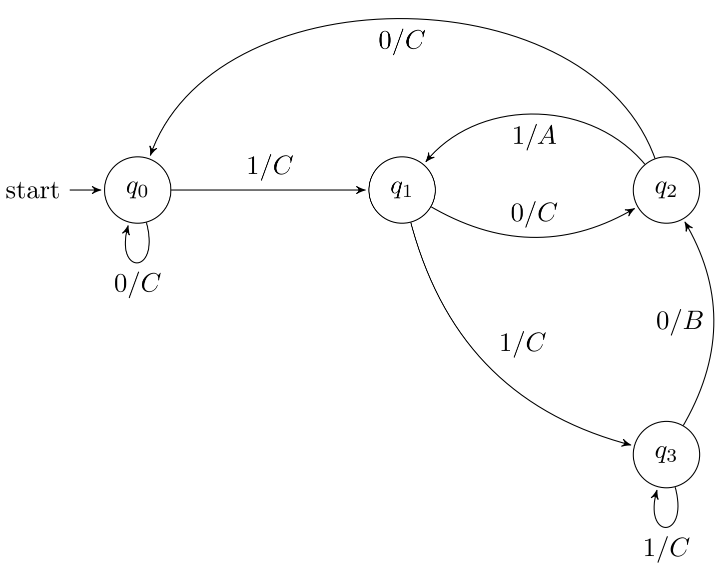
(2) $\{0^n 1^{2n}\}$: P $= \{S \to 0S11, S \to \epsilon\}$.
(3) $\{0^n 1^m 0^n\}$: P $= \{S \to 1A, S \to 0S0, S \to \epsilon, A \to 1A, A \to \epsilon\}$

On a seulement donné P dans la réponse ici, mais ne pas oublier de spécifier chacun des ensembles de la grammaire.

Exercice 6. Donnez une machine de Mealy et une machine de Moore qui, si elles trouvent la séquence `101`, sortent 'A', si elles trouvent la séquence `110`, sortent 'B', et sinon sortent 'C'.
Solution
Machine de Mealy:

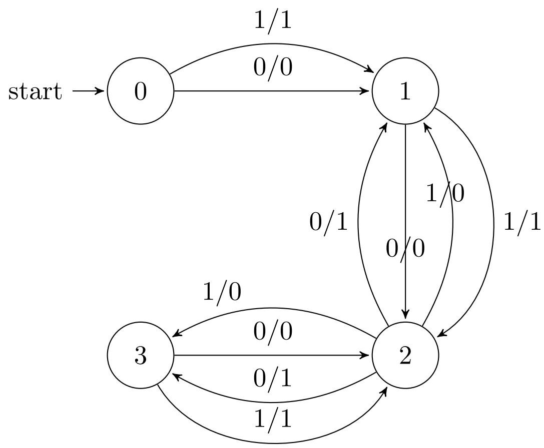


Machine de Moore:



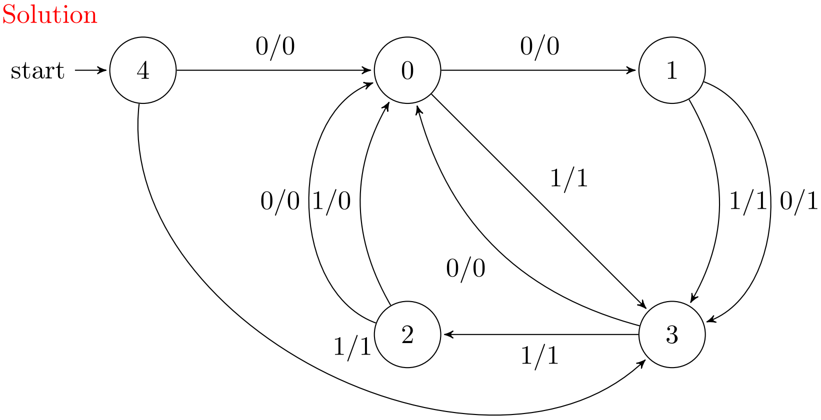
Exercice 7. Construisez une machine à états finis qui modifie les bits en position d'indice impair dans une chaîne d'entrée, en commençant par le deuxième bit, et qui ne modifie pas les autres. Utilisez une machine à 4 états.

Solution



Exercice 8. Construisez une machine à états finis qui modifie un bit lorsqu'il y a une suite de plus de deux bits identiques dans une chaîne d'entrée et qui ne modifie pas les autres, de sorte qu'on a une chaîne de sortie avec au plus deux bits identiques qui se suivent. Utilisez une machine à 5 états.

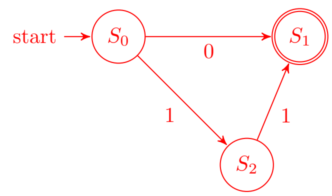
Solution



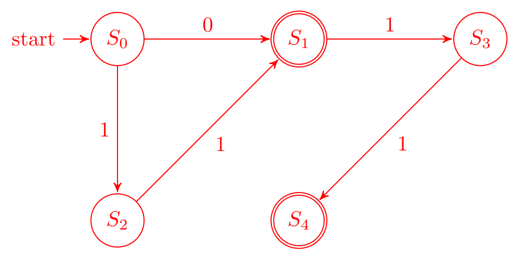
TD 9 : THÉORIE DES LANGAGES
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

Exercice 1. Trouvez un automate fini qui reconnaît :

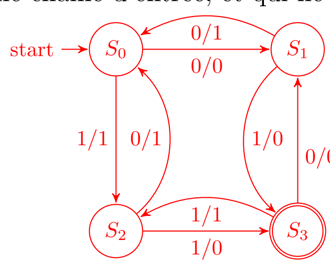
a. $\{0, 11\}$



b. $\{0, 11, 000\}$



Exercice 2. Construisez une machine à états finis qui modifie les bits en position d'indice pair, en commençant par le deuxième bit, d'une chaîne d'entrée, et qui ne modifie pas les autres lettres.



Exercice 3. Soit $V = \{S, A, B, a, b\}$ et $T = \{a, b\}$. Trouvez le langage produit par la grammaire $\{V, T, S, P\}$ lorsque l'ensemble P des productions est composé de :

a. $S \to AB,\ A \to ab,\ B \to bb$ Réponse : $L = \{abbb\}$

b. $S \to AB,\ S \to aA,\ A \to a,\ B \to ba$ Réponse : $L = \{aba, aa\}$

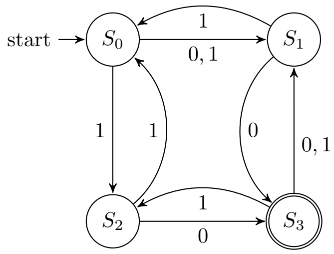
c. $S \to AB,\ S \to AA,\ A \to aB,\ A \to ab,\ B \to b$ Réponse : $L = \{abb, abab\}$

d. $S \to AA,\ S \to B,\ A \to aaA,\ A \to aa,\ B \to bB,\ B \to b$ Réponse : $L = \left\{b^{n+1}, a^{2n+2m+4}\right\}$

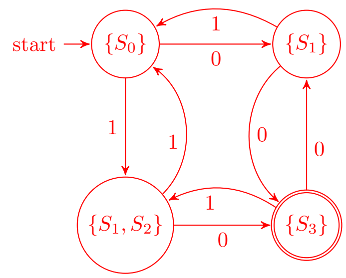
e. $S \to AB,\ A \to aAb,\ B \to bBa,\ A \to \lambda,\ B \to \lambda$ Réponse : $L = \{a^n b^{n+m} a^m\}$

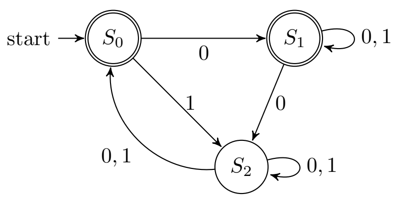
Exercice 4. Construisez une grammaire syntagmatique pour l'ensemble de toutes les fractions de la forme a/b, où a est un entier signé en notation décimale et b est un entier positif. Construisez un arbre de dérivation pour $+311/17$ dans cette grammaire.

Exercice 5. Pour chacun des automates ci-après, donnez un automate déterministe correspondant.

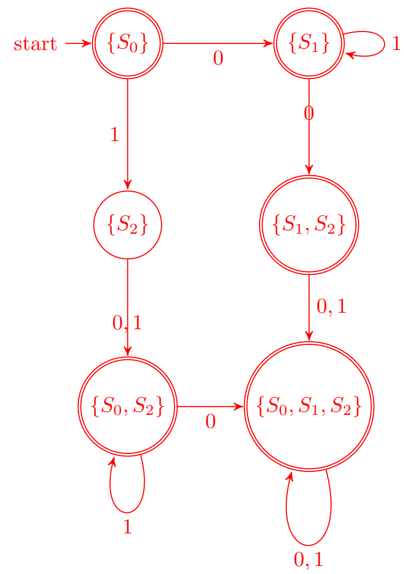


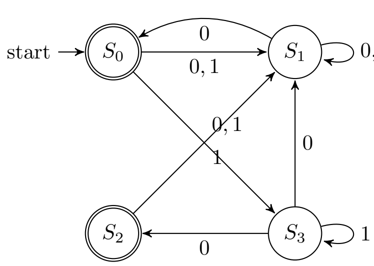
États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_3\}$	$\{S_0\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_3\}$	$\{S_0\}$
$\{S_3\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$



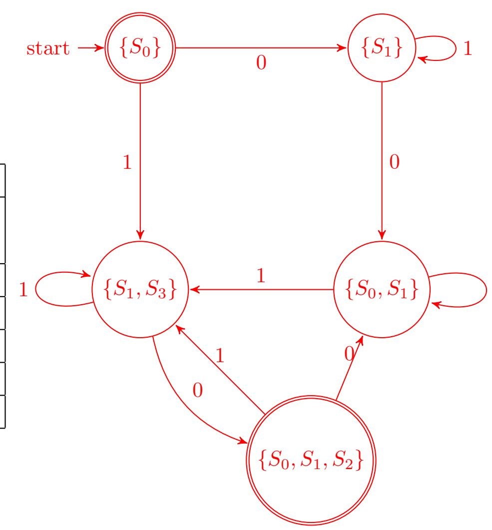


États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$	$\{S_1\}$
$\{S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$
$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$





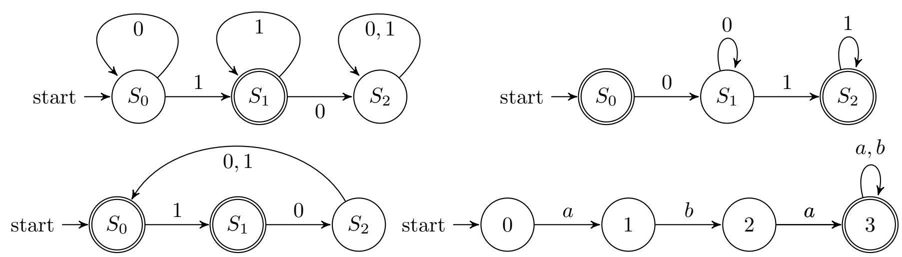
États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_1\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1\}$
$\{S_1, S_3\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_0, S_1\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$



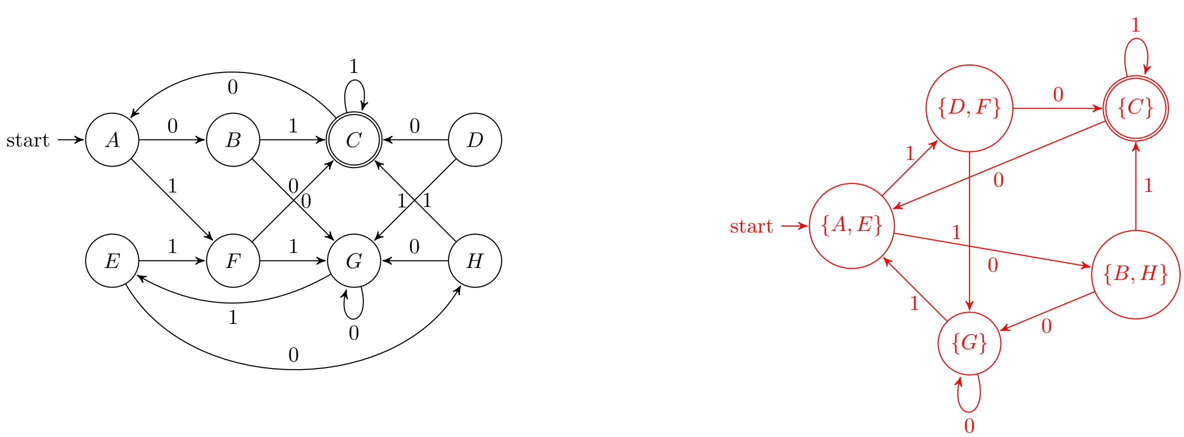
Exercice 6. Déterminez si 1011 appartient à chcun des ensembles réguliers ci-après.

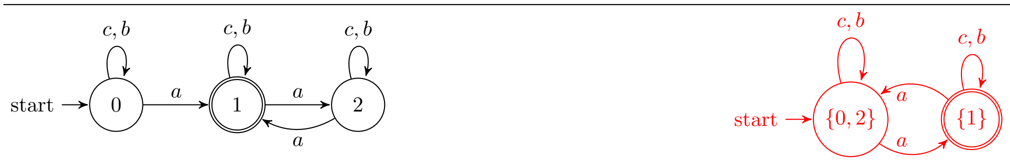
a. 10^*1^* - Réponse : Oui.
b. $0^*(10 \cup 11)^*$ - Réponse : Oui.
c. $0(01)^*1^*$ - Réponse : Non.
d. $1^*01(0 \cup 1)$ - Réponse : Oui.
e. $(10)^*(11)^*$ - Réponse : Oui.
f. $1(00)^*(11)^*$ - Réponse : Non.
g. $(10)^*1011$ - Réponse : Oui.
h. $(1 \cup 00)(01 \cup 0)1^*$ - Réponse : Oui.

Exercice 7. Trouvez le langage reconnu par chacun des automates finis non déterministes.



Exercice 8. Minimisez les automates :





Exercice 9. Donnez des grammaires syntagmatiques pour produire chacun des ensembles suivants :

1. $\{01^n\}$
$S \to 0A$
$A \to 1A,\ \lambda$
2. $\{0^n1^{2n}\}$
$S \to 0A11,\ \lambda$
$A \to 0A11,\ \lambda$

3. $\{0^n 1^m 0^n\}$
   $S \to \lambda,\ 0A0,\ 1B$
   $A \to 0A0,\ 0B0$
   $B \to 1B,\ \lambda$

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 11 (page 625) ; 10, 17 (page 634) ; 8 (page 655).

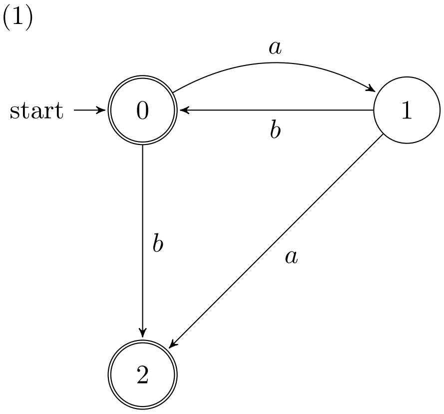
TD 10 : MACHINES DÉTERMINISTES ET NON DÉTERMINISTES
CORRIGÉ DES EXERCICES

Notez que, dans la plupart des cas, il existe plusieurs solutions possibles à un problème.

Exercice 1. Déterminez si 1011 appartient à chacun des ensembles réguliers ci-après :

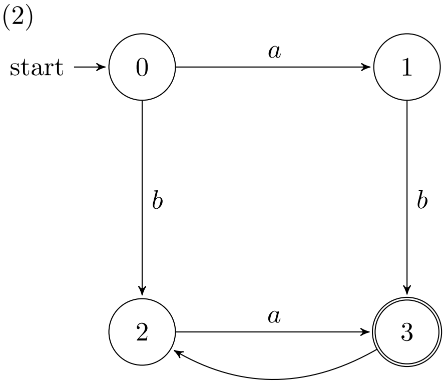
(1) 10^*1^*.Oui
(2) $0^*(10 \cup 11)^*$. Oui
(3) $0(01)^*1^*$. Non
(4) $1^*01(0 \cup 1)$. Oui
(5) $(10)^*(11)^*$. Oui
(6) $1(00)^*(11)^*$. Non
(7) $(10)^*1011$. Oui

Exercice 2. Donner une expression régulière représentant les langages reconnus par chacun des automates suivants :
(1)



$(ab)^*(b + aa + \epsilon)$

(2)

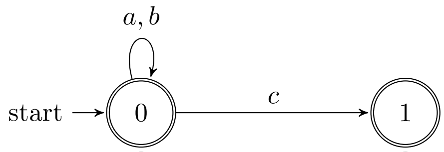


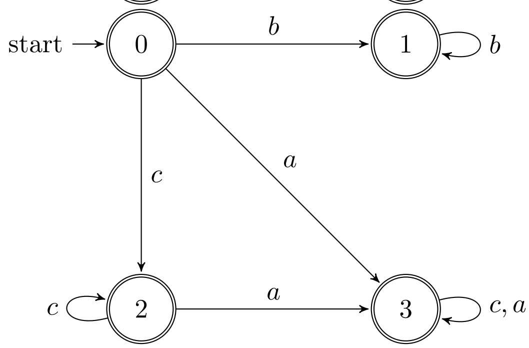
$(ab + ba)(aa)^*$

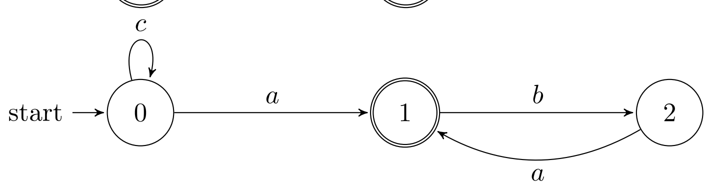
Exercice 3. Donner, pour chaque langage sur A = {a, b,c} donné par les expressions régulières suivantes,un automate fini déterministe qui le reconnaisse:

(1) $(a+b)^*(\epsilon + c)$
(2) $(b)^* + c^*(c+a)^*$
(3) $(c)^*(a + a(ba)^*)$

Solution

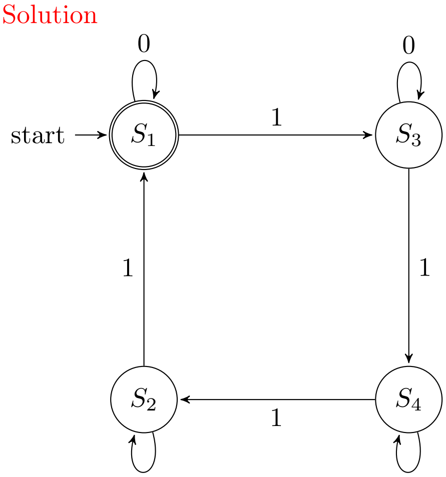






Exercice 4. Construisez un automate fini déterministe qui reconnait le langage suivant: $L = \{x \in \{0,\ 1\}^*,\ nb1(x) \equiv 0 \mod 4\}$
$nb1(x)$ représente le nombre de 1 dans x , $\equiv$ la relation de congruence.

Solution

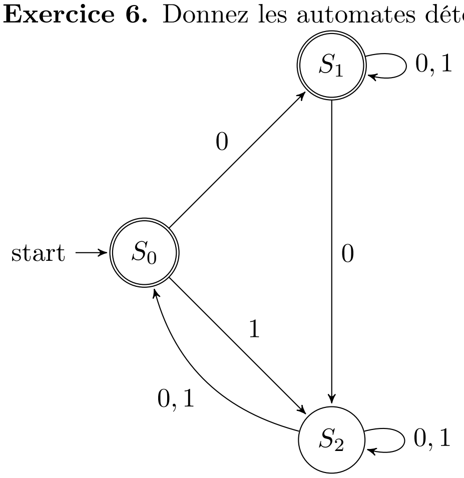


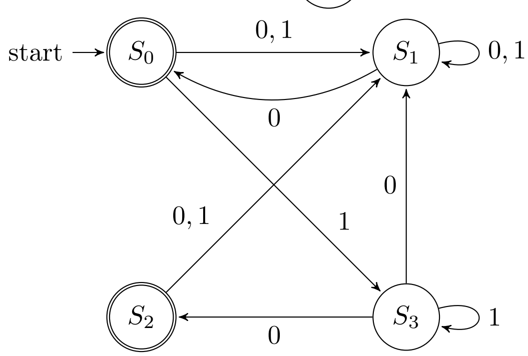
Exercice 5. La machine à états du Père Noël

Le Père Noël aimerait livrer trois cadeaux à la maison des Bélanger, puisque les trois enfants de la maison ont respectivement demandé pour Noël un hamster, un chat et des brioches à la cannelle. Malheureusement, son habituel traîneau magique casse durant la livraison et il ne peut plus l'utiliser pour transporter plusieurs cadeaux à la fois. Il devra donc faire plusieurs allers-retours entre la carcasse du traîneau et la maison des Bélanger afin d'achever la livraison. Toutefois, il est conscient que s'il laisse sans surveillance le hamster avec les brioches à la cannelle, celui-ci en profitera pour grignoter les brioches. Également, il sait que s'il laisse sans surveillance le chat avec le hamster, le chat mangera sans aucune arrière-pensée le hamster. Comment doit-il procéder afin d'achever le transport des cadeaux sans jamais laisser le chat et le

hamster seuls ou alors les brioches et le hamster seuls que ce soit dans la maison des Bélanger ou à côté de la carcasse du traîneau ? Faites une machine à états qui représente cette situation en considérant toutes les fins possibles c'est-à-dire HM : le hamster est mangé, BM : les brioches sont mangées et NR : Le Père Noël réussit à se rendre chez les Bélanger en ayant transféré les trois cadeaux sans aucune catastrophe.
Solution : Plusieurs formes de machines sont possibles. On peut par exemple utiliser des états qui représentent les positions des cadeaux au traîneau ou à la maison, et des arcs qui représentent le transport d'un des cadeaux.

Exercice 6. Donnez les automates déterministes correspondant aux automates ci-après.

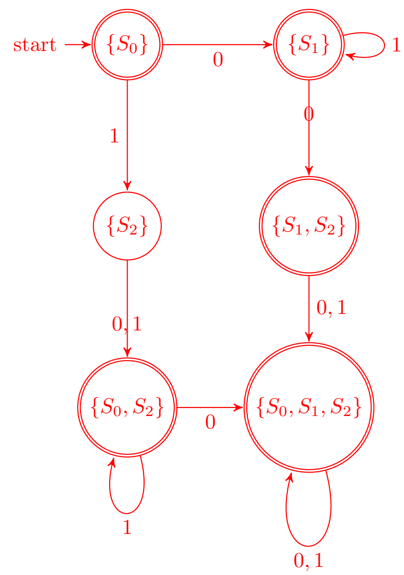




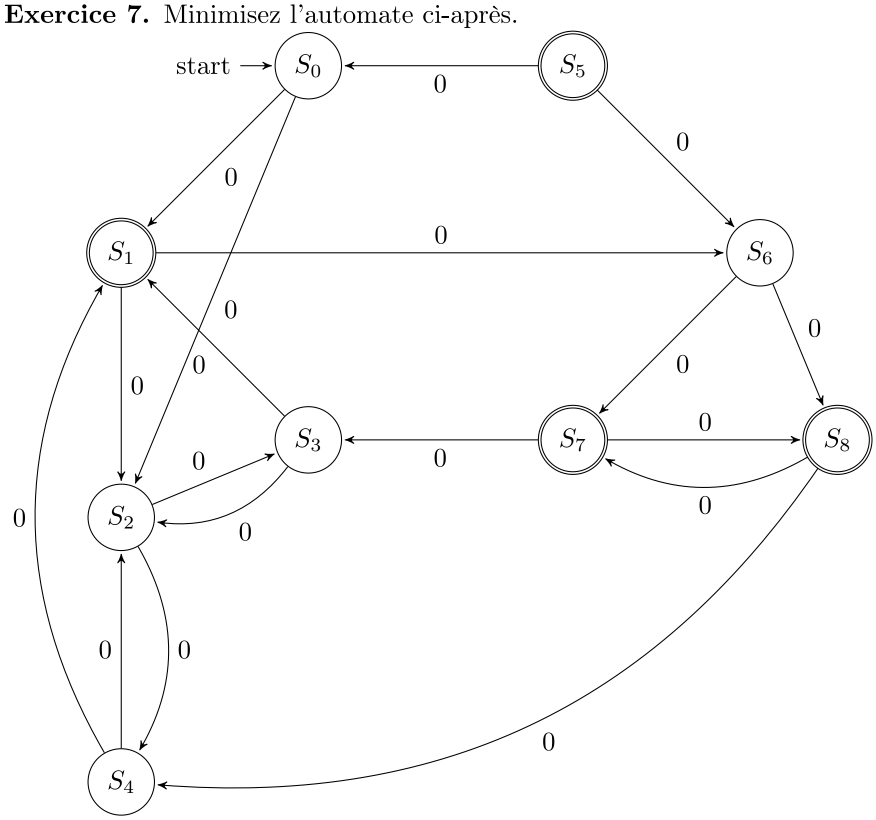
Solution

Premier automate :

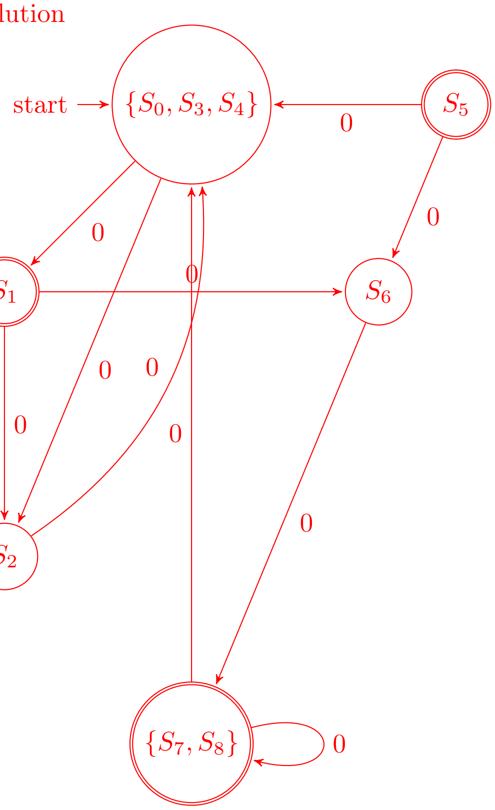
États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$	$\{S_1\}$
$\{S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$
$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$



Exercice 7. Minimisez l'automate ci-après.



Solution



Exercice 8. Soit L le langage constitué de tous les palindromes. Montrez que L n'est pas régulier.

Solution

Supposons L régulier. Soit p l'entier du lemme de pompage. Quel que soit $m \in L$ avec $|m| \geq p$, il existe une décomposition uvw de m telle que $|uv| \leq p$, $v \neq \epsilon$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, $uv^iw \in L$. Il suffit donc de prendre un mot dans L (puisque le lemme s'applique quel que soit le mot) et de montrer qu'aucune décomposition de ce mot ne respecte les trois conditions à la fois (puisque le lemme dit qu'il en existe une). Posons $m = a^pba^p$. m est un palindrome de longueur $2p+1 \geq p$. Ses décompositions uvw respectant les deux premières conditions sont de la forme : $u = a^j$, $v = a^k$, $w = a^{p\text{-}j\text{-}k}ba^p$ avec $j+k \leq p$, $k \geq 1$. Pour $i = 2$: $uv^2w = a^ja^{2k}a^{p\text{-}j\text{-}k}ba^p = a^{p+k}ba^p$ qui n'est pas un palindrome puisque $k \neq 0$. Donc, L n'est pas régulier.