– PHS1102 –
Champs électromagnétiques

Chapitre 11 – Équations de Maxwell

Opérateurs divergence et rotationnel
Équations de Maxwell
Équation d'onde dans le vide
Onde plane uniforme

Objectifs de la semaine

Divergence et rotationnel	• Calculer la divergence et le rotationnel d'un champ vectoriel.
Équations de Maxwell	• **Expliquer le sens physique** de chaque équation de Maxwell. • **Vérifier qu'un champ** électrique ou magnétique donné **vérifie les équations de Maxwell**. • **Calculer** le champ électrique à partir du champ magnétique et vice versa.
Équation d'onde dans le vide	• **Vérifier qu'un champ** électrique ou magnétique est bel et bien **solution à l'équation d'onde**.
Onde plane uniforme	• **Décrire** la forme mathématique ainsi que l'utilité d'une **onde plane** uniforme. • **Calculer la vitesse d'une onde plane** uniforme dans un milieu.

Rappel – Opérateur divergence

Les expressions de l'opérateur divergence dans les différents systèmes de coordonnées se retrouvent à l'annexe 4 du manuel.

Champ vectoriel — Divergence → Champ scalaire

$$\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} \longrightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques

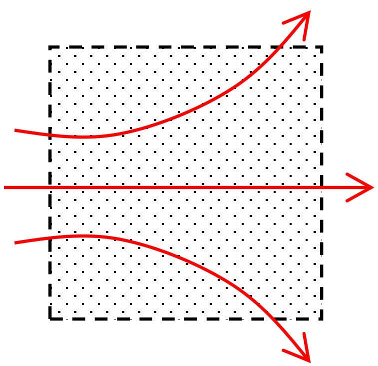
$$\nabla\cdot\vec{F}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques

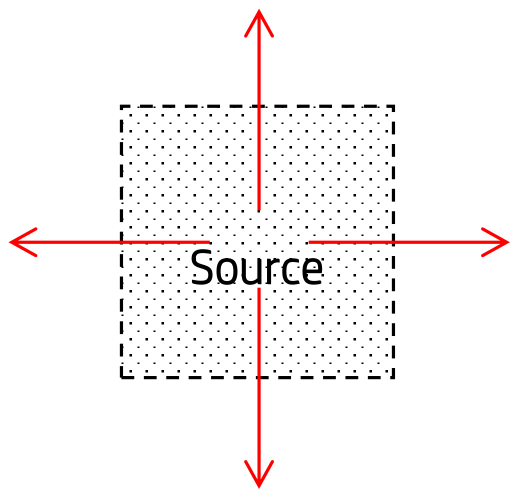
$$\nabla\cdot\vec{F}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

Rappel – Interprétation de l’opérateur divergence

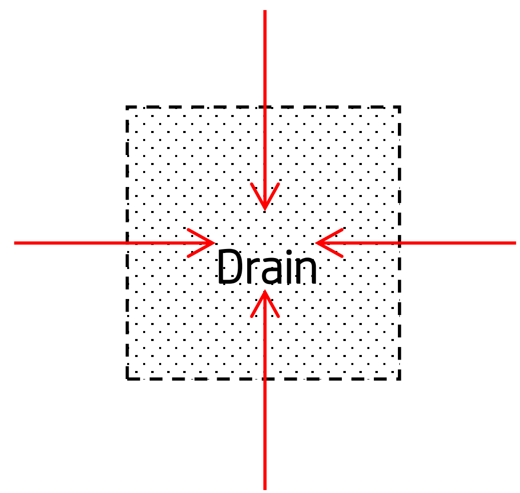
La divergence d’une quantité en un point donné représente le flux total de cette quantité qui sort d’un volume infinitésimal situé en ce point.



$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{D} > 0$$



$$\nabla \cdot \vec{D} < 0$$

Opérateur rotationnel

Les expressions de l'opérateur rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées se retrouvent à l'annexe 4 du manuel.

Champ vectoriel	Rotationnel	Champ vectoriel
$\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$	$\longrightarrow$	$\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

Coordonnées cartésiennes

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

Coordonnées cylindriques

$$\nabla \times \vec{F}(\rho,\phi,z) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho F_\phi\right) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$

Coordonnées sphériques

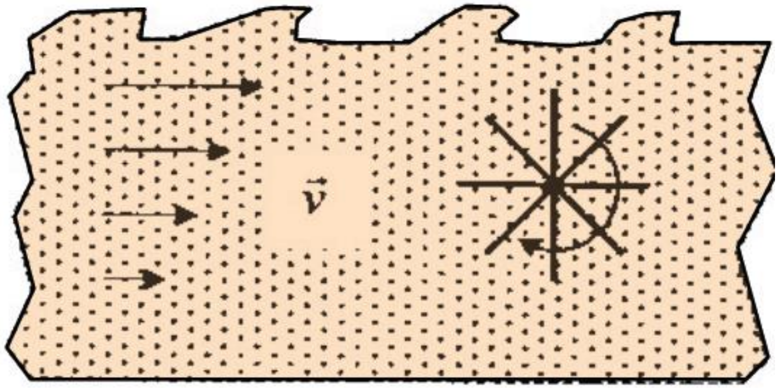
$$\nabla \times \vec{F}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\phi \sin\theta\right) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\theta\right) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{\phi}$$

Interprétation de l'opérateur rotationnel

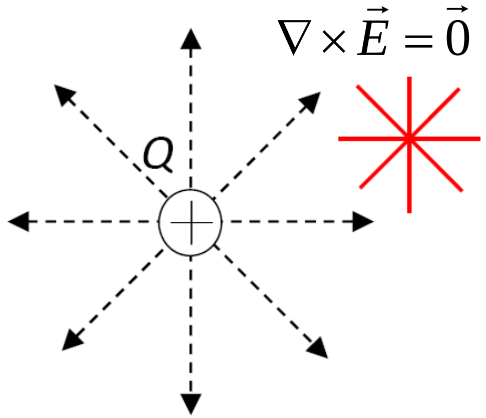
Le rotationnel exprime la capacité du champ à engendrer de la rotation autour d'un point.
Les composantes du rotationnel expriment la tendance à faire tourner autour de chacun des trois axes de l'espace qui passent par ce point.

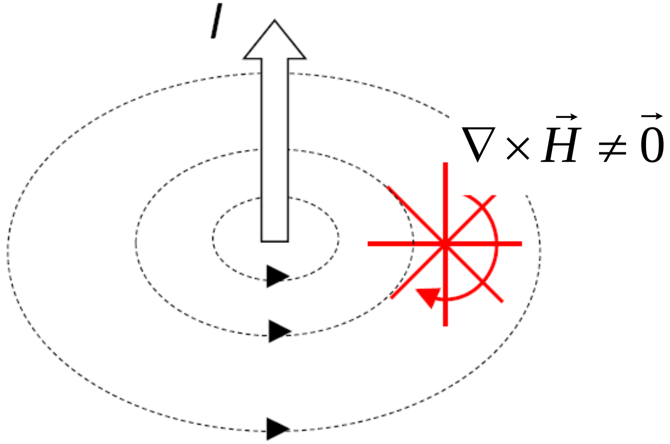
Exemple – Mécanique des fluides

Le champ de vitesse du fluide a un rotationnel non nul : si l'on plaçait une turbine, elle tournerait en sens horaire (la vitesse du haut plus élevée que la vitesse du bas).



Exemples – Électromagnétisme





Théorèmes de la divergence et de Stokes

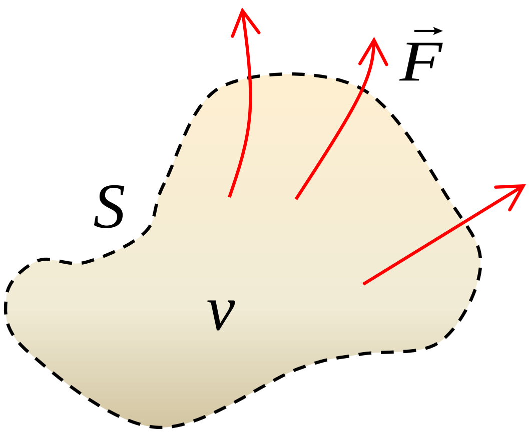
Ces théorèmes permettent d'écrire les équations de Maxwell sous forme différentielle.

Théorème de la divergence

$$\int_v \left(\nabla\cdot\vec{F}\right)\mathrm{d}v = \oint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Ce qui est créé moins ce qui est perdu dans le volume v.

Ce qui traverse la surface fermée S entourant le volume v vers l'extérieur, moins ce qui traverse S vers l'intérieur.

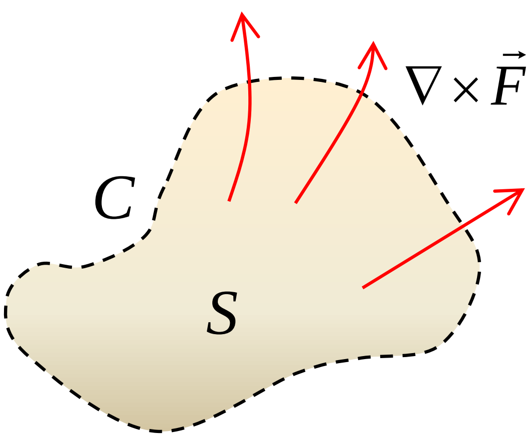


Théorème de Stokes

$$\int_S \left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

La partie de $\nabla\times\vec{F}$ qui traverse la surface S vers l'extérieur, moins ce qui traverse S vers l'intérieur.

La circulation (en sens antihoraire) de $\vec{F}$ sur la courbe fermée C entourant S.



Équations de Maxwell sous forme intégrale

	Forme intégrale
I Théorème de Gauss	$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q}$
II Champ magnétique solénoïdal	$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$
III Équation de Maxwell-Faraday	$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$
IV Théorème d'Ampère généralisé	$\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$

Comment utiliser les théorèmes de la divergence et de Stokes pour écrire ces équations sous forme différentielle ?

Équations de Maxwell et théorème de la divergence

Théorème de la divergence

$$\int_v \left(\nabla \cdot \vec{F}\right) \mathrm{d}v = \oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

I Théorème de Gauss

La charge Q est l'intégrale de la densité volumique de charge ρ_v sur tout le volume. On applique le théorème avec $\vec{F} = \vec{D}$.

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q$$

$$Q = \int_v \rho_v dv$$

$$\Rightarrow \int_v \rho_v \, \mathrm{d}v = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \xRightarrow{\vec{F} = \vec{D}} \boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$$

II Champ magnétique solénoïdal

On applique le théorème avec $\vec{F} = \vec{B}$.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \xRightarrow{\vec{F} = \vec{B}} \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

Équations de Maxwell et théorème de Stokes

Théorème de Stokes

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

III Équation de Maxwell-Faraday

On applique le théorème avec $\vec{F} = \vec{E}$. Sous forme différentielle, la surface S est infinitésimale (les lois s'appliquent en chaque point de l'espace) : on peut donc entrer la dérivée par rapport au temps dans l'intégrale et l'appliquer à $\vec{B}$ directement.

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \xRightarrow{\vec{F} = \vec{E}} \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

IV Théorème d'Ampère généralisé

On applique le théorème avec $\vec{F} = \vec{H}$.

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \xRightarrow{\vec{F} = \vec{H}} \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Équations de Maxwell sous forme différentielle

	Forme intégrale	Forme différentielle
I Théorème de Gauss	$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q}$	$\boxed{\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v}$
II Champ magnétique solénoïdal	$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$	$\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$
III Équation de Maxwell-Faraday	$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$	$\boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$
IV Théorème d'Ampère généralisé	$\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$	$\boxed{\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

Quelle est l'interprétation physique de chaque équation ?

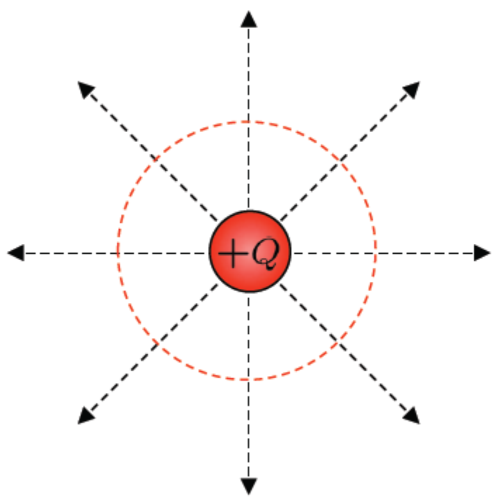
Interprétation des équations de Maxwell

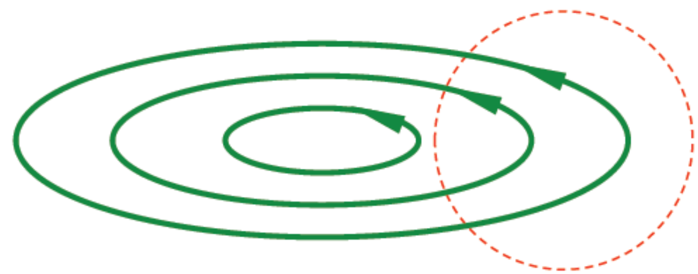
Les 1re et 2e équations sont des lois de conservation des flux électrique et magnétique.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

lois de conservation du FLUX





Les lignes de flux électrostatique démarrent sur des charges positives et se terminent sur des charges négatives (ou à l'infini)

Les lignes de flux magnétique n'ont ni origine ni fin, donc ni source, ni drain.

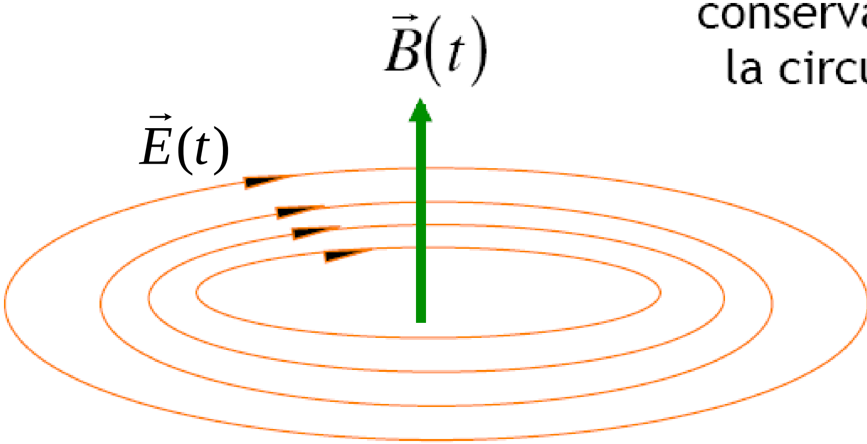
Interprétation des équations de Maxwell

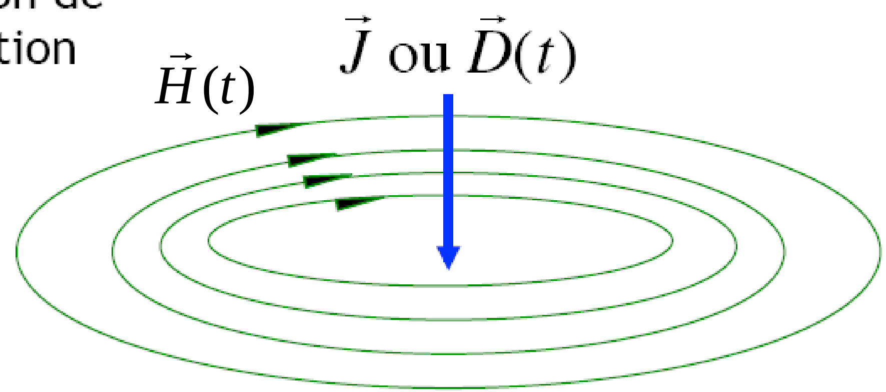
Les 3e et 4e équations sont des lois de conservation
de la circulation des champs électrique et magnétique.

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

lois de conservation de la circulation





une variation de champ magnétique induit un champ électrique (par l'entremise de la F.E.M.)

une variation de courant (J) ou de champ électrique (J_D) induit un champ magnétique perpendiculaire au courant.

Équations de Maxwell dans le vide

Que deviennent les équations de Maxwell dans le vide ?

Équations générales → Équations dans le vide

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dans le vide :

1. Il n'y a pas de charges libres : on a donc $\rho_v = 0$;
2. Sans charges libres, il ne peut y avoir de courant de conduction : on a donc $\vec{J} = \vec{0}$;
3. La permittivité vaut ε_0 et donc $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$;
4. La perméabilité vaut μ_0 et donc $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = 0}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{H} = 0}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Que prédisent les équations de Maxwell dans le vide ?

L'équation d'onde dans le vide

Lorsque l'on combine les équations de Maxwell dans le vide, on obtient l'équation d'onde.

Équations dans le vide

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Rotationnel de Maxwell-Faraday (3e)

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla \times \left(-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)$$

On inverse les dérivées spatiales (rotationnel) et temporelle.

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

Théorème d'Ampère généralisé (4e)

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Il nous faut une identité vectorielle afin de développer le membre de gauche.

L'équation d'onde dans le vide

Lorsque l'on combine les équations de Maxwell dans le vide, on obtient l'équation d'onde.

Il nous faut une identité vectorielle afin de développer le membre de gauche.

Identité vectorielle

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{F}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F}$$

Loi de Gauss dans le vide
(1re équation de Maxwell)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\left(\cancel{\nabla \cdot \vec{E}}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Équation d'onde dans le vide

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$

Si l'on effectue la même démarche avec le champ magnétique $\vec{H}$, on trouve qu'il respecte également l'équation d'onde.

Équation d'onde dans le vide

Laplacien vectoriel

Il ne faut pas confondre le laplacien scalaire, qui s'applique à une fonction scalaire, et le laplacien vectoriel qui s'applique à un champ vectoriel.

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \qquad \boxed{\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$

Laplacien vectoriel

Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes

Le laplacien vectoriel consiste à appliquer le laplacien scalaire à chaque composante d'un champ vectoriel (chaque composante étant une fonction scalaire de x, y, z). Le résultat est un champ vectoriel.

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 E_x(x,y,z)\hat{x} + \nabla^2 E_y(x,y,z)\hat{y} + \nabla^2 E_z(x,y,z)\hat{z}$$

En utilisant la définition du laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes, on a donc :

$$\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial E_x}{\partial z^2} \right)\hat{x} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial E_y}{\partial z^2} \right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial E_z}{\partial z^2} \right)\hat{z}$$

Onde plane uniforme - Solution à l'équation d'onde dans le vide

Une onde plane uniforme est une fonction qui a la même valeur partout sur un plan de l'espace à tout instant.

RAPPEL – Définition d'un plan dans l'espace

$$\hat{n}\cdot\vec{r}+\theta = n_x x + n_y y + n_z z + \theta = 0$$

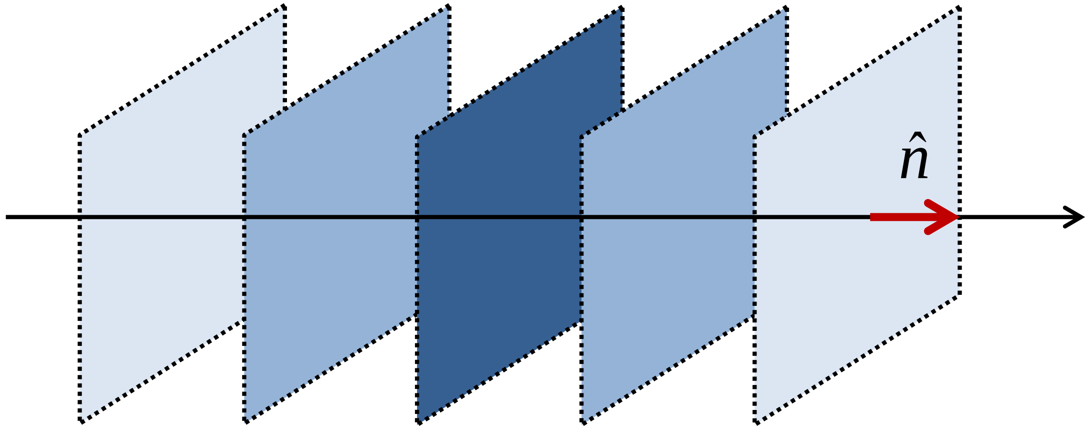
Vecteur unitaire normal au plan $\hat{n} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y} + n_z\hat{z}$

Vecteur position $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

Constante qui sélectionne un plan spécifique dans une famille de plans parallèles θ

Équation générale d'une onde plane uniforme se déplaçant à vitesse v dans la direction $\hat{n}$.

$$f\,(\hat{n}\cdot\vec{r} - vt + \theta)$$



Sur chaque plan (en bleu), la valeur de l'onde f est la même, car la valeur de $\hat{n}\cdot\vec{r} - vt + \theta$ est la même sur un même plan.

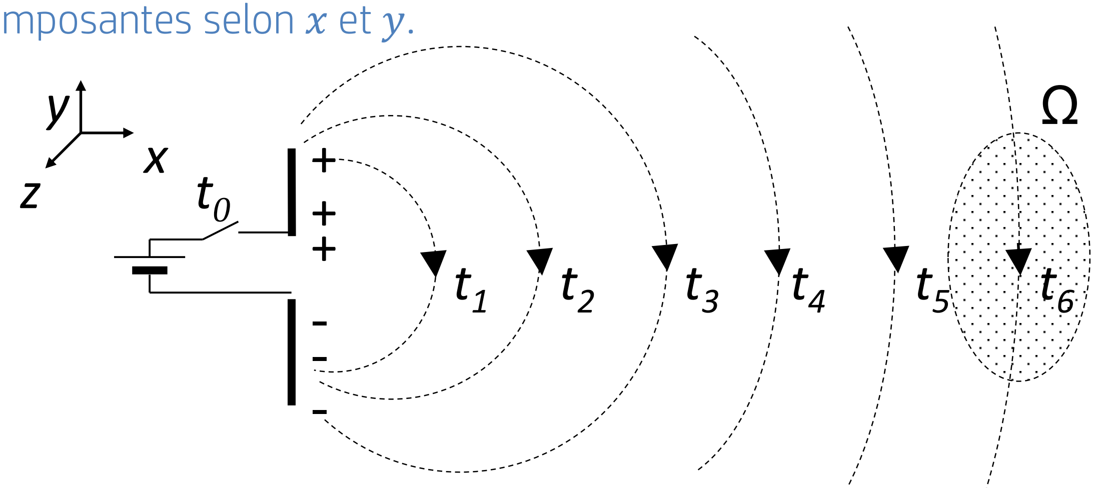
Sur deux plans différents, la valeur de f n'est pas forcément la même.

Où retrouve-t-on des ondes planes en pratique ?

Onde plane uniforme

Loin d'une source d'ondes électromagnétiques (antenne),
l'onde plane uniforme est une bonne approximation de l'onde électromagnétique.

Près de l'antenne
Lignes de champ courbées : $\vec{E}$ a des composantes selon x et y.



Loin de l'antenne (dans Ω)
Lignes de champ presque verticales : $\vec{E}$ orienté selon y seulement et sa valeur est la même sur une même ligne de champ : **onde plane uniforme**.

$$\vec{E}(x,y,z,t) \approx E_y(x,t)\hat{y}$$

Équation d'onde

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Calcul du laplacien vectoriel

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 E_y(x,t)\hat{y}$$

$$= \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2}\hat{y}$$

Quelle est la solution à cette équation ?

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}}$$

Onde plane uniforme et équation d'onde

L'onde plane uniforme est la solution la plus générale à l'équation d'onde.

On suppose que l'onde se propage à vitesse v vers les x positifs pour simplifier la démarche.

Onde plane uniforme ($\hat{n} = \hat{x}$)

$$f(\hat{n}\cdot\vec{r} - vt + \theta) \Rightarrow f(x,t) = f(x - vt + \theta)$$

Équation d'onde

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}}$$

En notant f' la dérivée première de f par rapport à son argument et en utilisant la dérivation en chaîne, on trouve :

Dérivées par rapport à x

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = f'(x,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = f''(x,t)$$

Dérivées par rapport à t

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -vf'(x,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2 f''(x,t)$$

$$f''(x,t) = \varepsilon_0 \mu_0 v^2 f''(x,t)$$

$$1 = \varepsilon_0 \mu_0 v^2$$

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

Vitesse d'une onde plane uniforme dans le vide

Vitesse d'une onde plane uniforme

Vitesse d'une onde plane dans le vide

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3\times 10^{8} \text{ m/s}}$$

La vitesse de la lumière dans le vide est définie exactement à 299 792 458 m/s dans le système SI.

Qu'est-ce qui se déplace à cette vitesse dans le vide ?

Les ondes électromagnétiques! (Les équations de Maxwell décrivent toutes les ondes électromagnétiques, ce qui inclut la lumière visible.)

Vitesse d'une onde plane dans un diélectrique (linéaire)

Si $\rho_v = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$ dans le diélectrique, alors il suffit de remplacer ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, et μ_0 par $\mu = \mu_r \mu_0$ dans le résultat ci-dessus.

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}}$$

Remarque

La lumière est ralentie dans un diélectrique.

$$\frac{c}{v} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{1/\sqrt{\varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} > 1$$

Comment appelle-t-on le ratio c/v ?

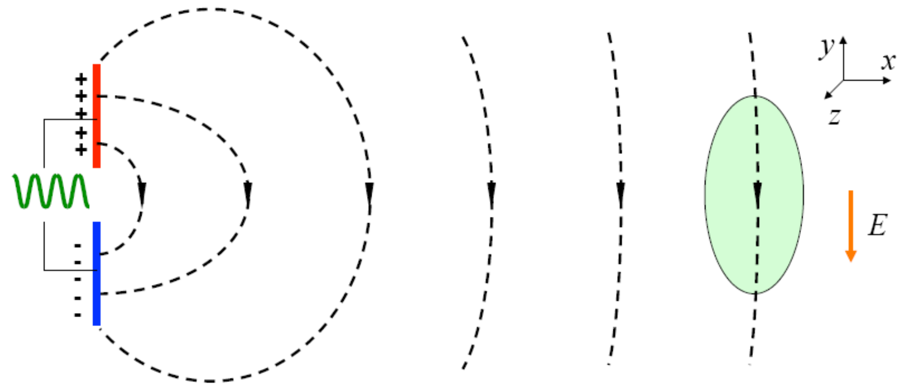
C'est l'indice de réfraction du milieu!

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

Propriétés des ondes électromagnétiques dans le vide

Validité de l'hypothèse

Plus la distance entre la source électromagnétique (antenne) et le point d'observation est grande comparée aux dimensions de l'antenne, plus les fronts d'onde ressemblent à des plans.



Les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ peuvent alors être décrits par des ondes planes, car ils respectent chacun l'équation d'onde.

Si on suppose que l'onde se propage à vitesse v vers les x positifs, alors :

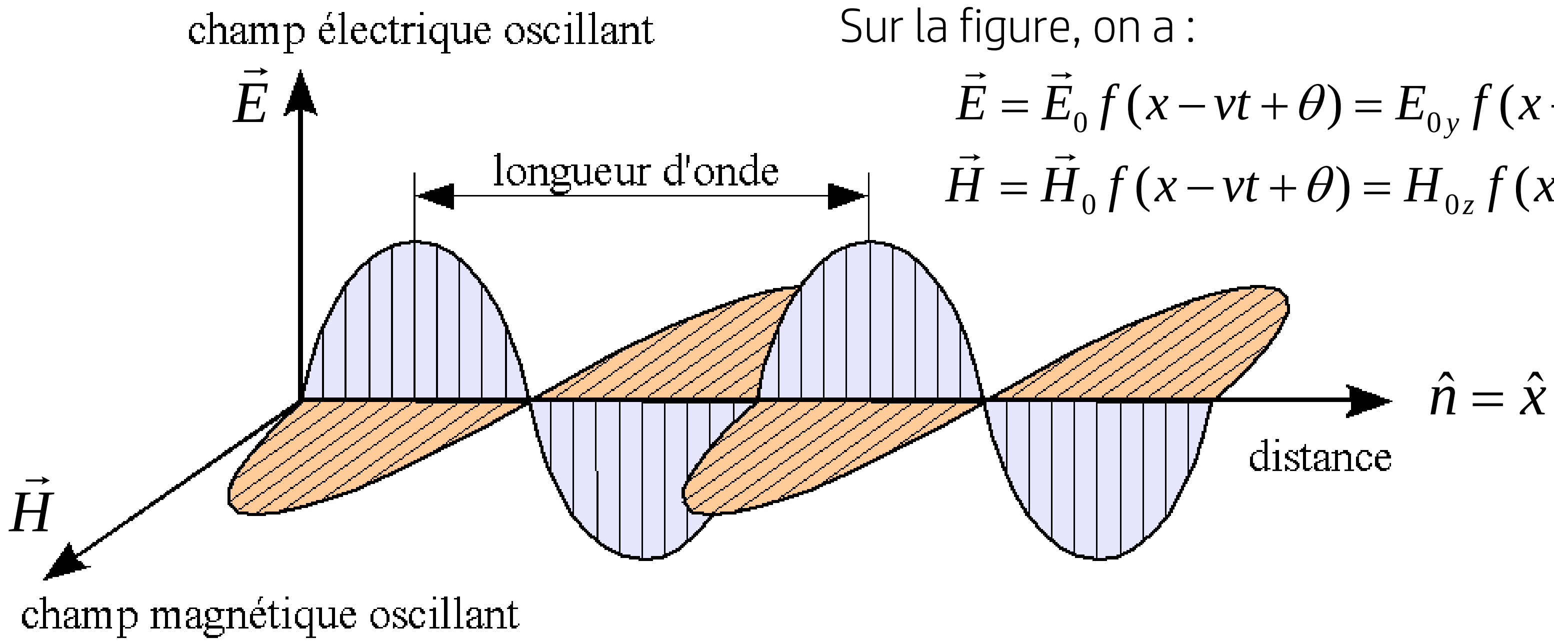
$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 f(x - vt + \theta) \qquad \vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 f(x - vt + \theta)$$

$\vec{E}_0$ et $\vec{H}_0$ sont des vecteurs constants (ne dépendent pas de x, y, z et t) qui représentent l'amplitude de l'onde plane dans chacune des directions de l'espace (x, y, z).

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y} + E_{0z}\hat{z} \qquad \vec{H}_0 = H_{0x}\hat{x} + H_{0y}\hat{y} + H_{0z}\hat{z}$$

Propriétés des ondes électromagnétiques dans le vide et dans un diélectrique ($\rho_v = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$)

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation $\hat{n}$.
Les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont perpendiculaires entre eux.



Sur la figure, on a :

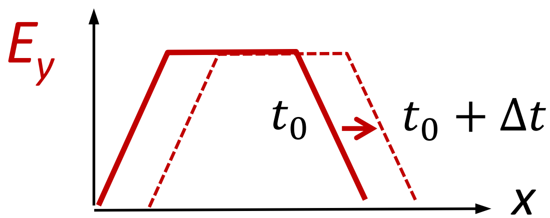
$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(x - vt + \theta) = E_{0y} f(x - vt + \theta)\hat{y}$$

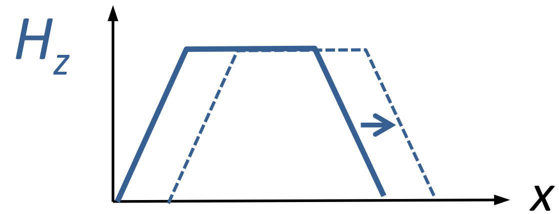
$$\vec{H} = \vec{H}_0 f(x - vt + \theta) = H_{0z} f(x - vt + \theta)\hat{z}$$

On peut démontrer que d'avoir les conditions $\vec{E} \perp \vec{H}$, $\vec{E} \perp \hat{n}$ et $\vec{H} \perp \hat{n}$ est la seule façon de respecter les équations de Maxwell dans un diélectrique ($\rho_v = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$).
Si $\rho_v \neq 0$ ou $\vec{J} \neq \vec{0}$, alors ces conditions peuvent ne plus être vérifiées.

Onde électromagnétique (EM)

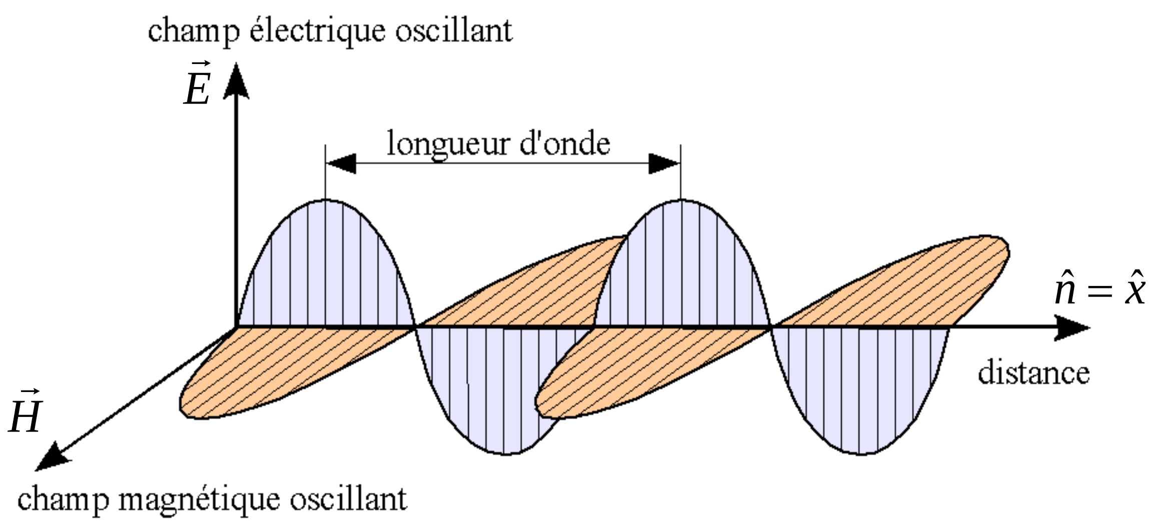
Une variation temporelle de $\vec{E}$ crée un champ $\vec{H}$ perpendiculaire à $\vec{E}$, et vice versa.





$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \Rightarrow -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

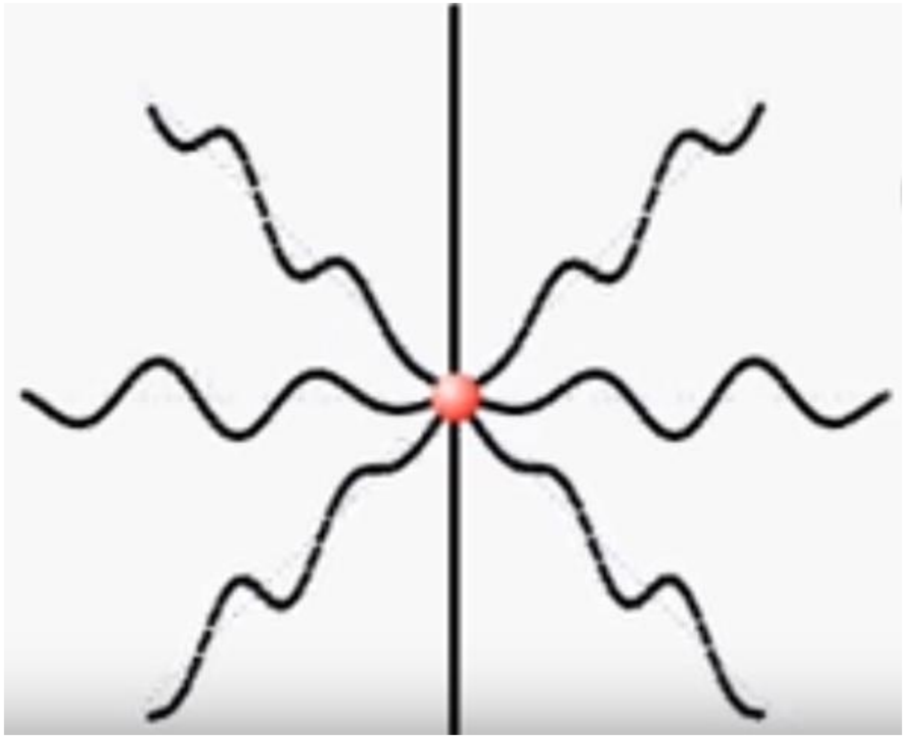
$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$$



Animation
http://www.walter-fendt.de/html5/phen/electromagneticwave_en.htm

Comment générer une onde EM ?

En faisant circuler une courant alternatif dans une antenne, le mouvement périodique des charges crée des perturbations dans le champ électrique qu'elles produisent.
De plus, ce mouvement de charges génère des perturbations de champ magnétique.



https://www.youtube.com/watch?v=DOBNo654pwQ

Exemple 11.1 – Calcul du champ $\vec{E}$ à partir du champ $\vec{H}$ d'une onde

Le champ magnétique d'une onde plane qui se propage dans le vide est décrit par :

$$\vec{H} = 0{,}5\hat{x}\cos(120\times10^6 t - 0{,}4z)$$

a) Vérifier que la 2e équation de Maxwell est respectée.

La 2e équation de Maxwell dans le vide s'écrit :

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0} \qquad \boxed{\vec{B} = \mu_0\vec{H}} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{H} = 0$$

On vérifie que l'équation est respectée en calculant la divergence de $\vec{H}$:

$$\nabla\cdot\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[0{,}5\cos\left(120\times10^6 t - 0{,}4z\right)\right] + 0 + 0 = 0$$

La 2e équation de Maxwell est respectée.

Exemple 11.1 – Calcul du champ $\vec{E}$ à partir du champ $\vec{H}$ d'une onde

Le champ magnétique d'une onde plane qui se propage dans le vide est décrit par :

$$\vec{H} = 0{,}5\hat{x}\cos(120\times10^{6}t - 0{,}4z)$$

b) Calculer l'expression du champ électrique de cette onde.

La 4ᵉ équation de Maxwell permet de calculer $\vec{E}$ à partir de $\vec{H}$:

$$\boxed{\nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\left(\nabla\times\vec{H}\right)dt$$

Calcul du rotationnel de $\vec{H}$: $$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z}\hat{y} = 0{,}5\cdot0{,}4\sin\left(120\times10^{6}t - 0{,}4z\right)\hat{y}$$

Calcul du champ $\vec{E}$: $$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\hat{y}\int 0{,}2\sin\left(120\times10^{6}t - 0{,}4z\right)dt$$

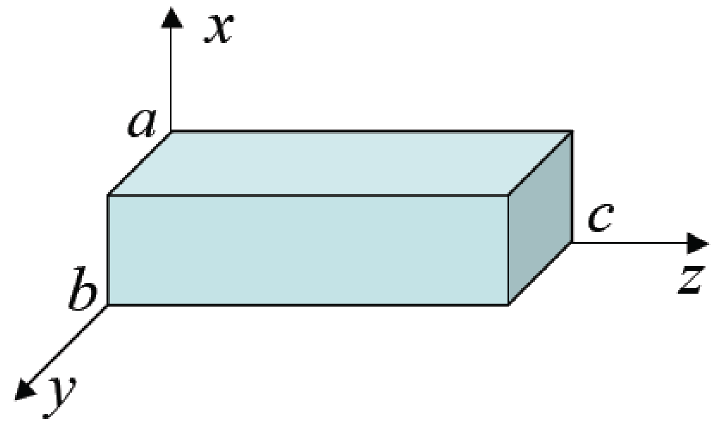
$$\boxed{\vec{E} = -188\hat{y}\cos\left(120\times10^{6}t - 0{,}4z\right)}$$

Exemple 11.2 – Onde EM dans une cavité résonante

Soit une cavité résonante :

- De section rectangulaire (voir figure) ;
- Dont l'intérieur est vide.

Le champ électrique à l'intérieur est décrit par :



$$E_x = 0$$

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)\sin(\omega t)$$

$$E_z = 0$$

Onde stationnaire qui s'annule (nœuds) sur les parois $x = 0, a$ et $z = 0, c$ de la cavité !

Quelle doit être la valeur de ω pour que $\vec{E}$ soit une solution à l'équation d'onde ?

Équation d'onde

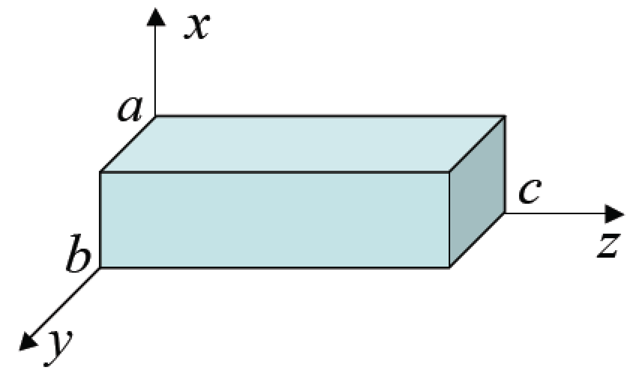
$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \cancel{\nabla^2 E_x} \hat{x} + \nabla^2 E_y \hat{y} + \cancel{\nabla^2 E_z} \hat{z} \qquad E_x = E_z = 0$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_y \hat{y} \qquad E_y(x, z, t)$$

Exemple 11.2 – Onde EM dans une cavité résonante

$$E_x = 0$$
$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)\sin(\omega t)$$
$$E_z = 0$$



Quelle doit être la valeur de ω pour que $\vec{E}$ soit une solution à l'équation d'onde ?

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Équation d'onde

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right) E_y \hat{y} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\hat{y}$$

$$\Rightarrow -\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2\right] E_y = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_y$$

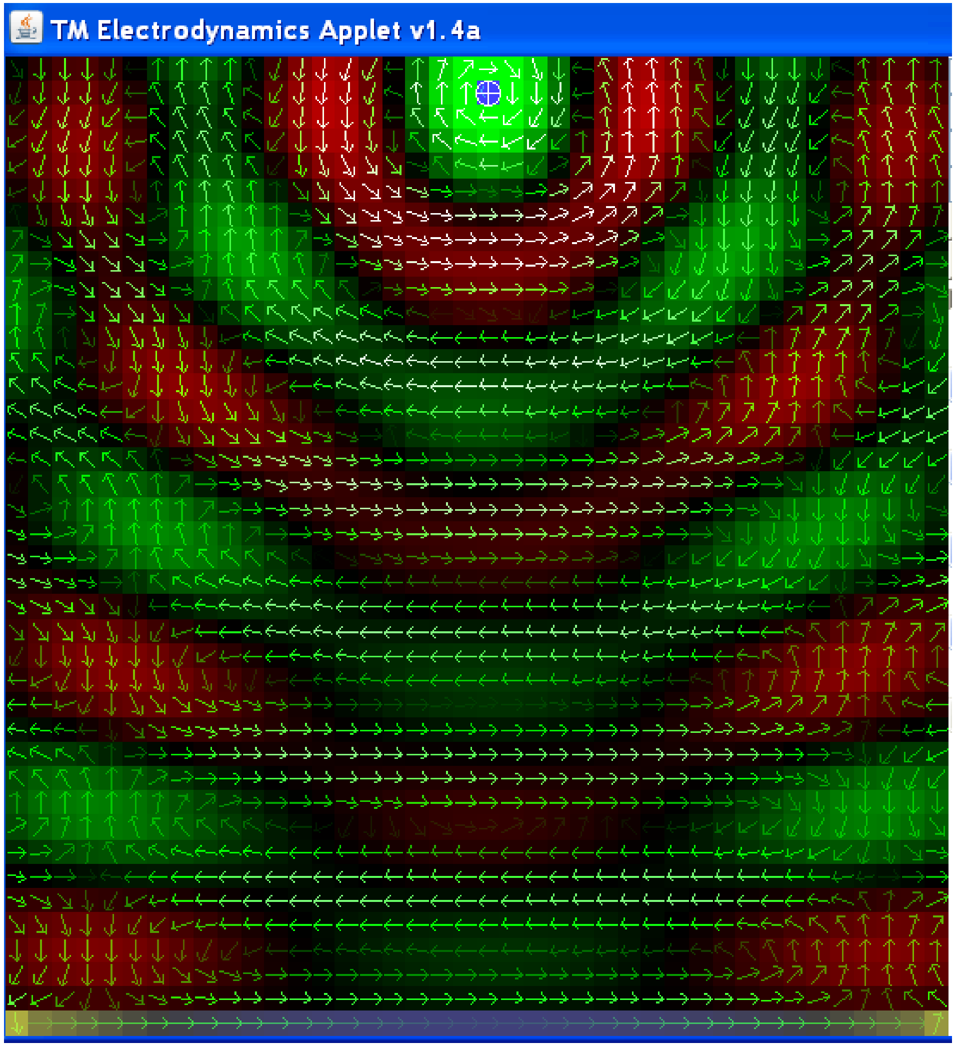
La dérivée seconde d'un sinus est proportionnel au même sinus.

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2}}$$

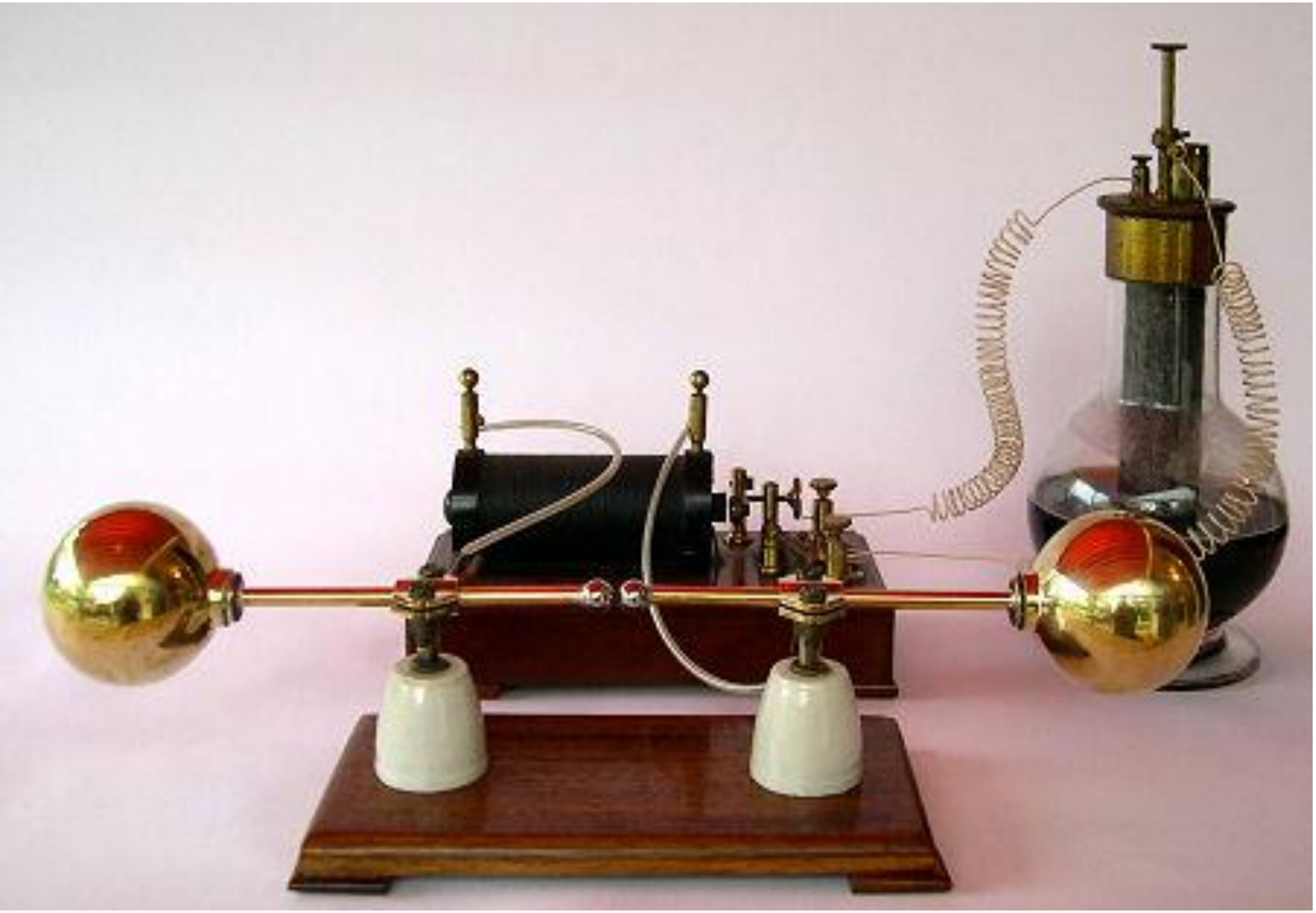
Fréquence angulaire de résonance de la cavité

Onde stationnaire produite par réflexion sur un conducteur

Moodle Section 15 – Chap. 11 Champs dynamiques 2D



Expériences de Hertz (1887-1888)
ou comment démonter l'existence des ondes EM



Expériences de Hertz (1887-1888)

ou comment démonter l’existence des ondes EM