PHS1102 Champs électromagnétiques

Corrigé de l'examen final Hiver 2019

Question 1 : Concepts et réponses courtes (4 points)

1.1 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,75 point)** ; Deux erreurs : **(0,50 point)**. Trois erreurs : **(0,25 point)**. Quatre erreurs : **(0 point)**.

A) IV.

B) III.

C) I.

D) II.

1.1 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,50 point)** ; Deux erreurs : **(0,25 point)**. Trois erreurs ou plus : **(0 point)**.

Les affirmations vraies sont A et B.

1.3 (1 pt) La réponse est A.

1.4 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,50 point)** ; Deux erreurs : **(0,25 point)**. Trois erreurs : **(0 point)**. .

Les affirmations vraies sont B et C.

Question 2 : Bobines de Helmholtz (5 points)

2.1 (2 pts) Champ magnétique au point O.

Le champ produit par une bobine sur son axe à une distance d de son centre est donné par la loi de Biot-Savart :

$$\vec{H}_1(t) = \int \frac{1}{4\pi} \frac{I(t) d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

où l'intégrale est faite sur les N boucles de la bobine.

En coordonnées cylindriques centrées sur le centre d'une bobine, on a :

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= a d\phi' \hat{\phi} \\ \vec{r} &= d\hat{z} \\ \vec{r}' &= a\hat{\rho}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \vec{H}_1(t) &= \frac{N I_0 \sin(\omega t)}{4\pi (d^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} a d\phi' \hat{\phi} \times (d\hat{z} - a\hat{\rho}) \\ &= \frac{a N I_0 \sin(\omega t)}{4\pi (d^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (d\hat{\rho} + a\hat{z})\, d\phi'. \end{aligned}$$

L'intégrale en $\hat{\rho}$ est nulle. (Le vecteur unitaire varie/tourne au fur et à mesure que l'angle ϕ' varie, et la somme donne 0 par symétrie. On peut vérifier que le champ est en $\hat{z}$ seulement par inspection du schéma du problème également.) Il ne reste donc qu'à intégrer le terme en $\hat{z}$:

$$\vec{H}_1(t) = \frac{a^2 N I_0 \sin(\omega t)}{2 (d^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

On obtient le champ total produit par les deux bobines en utilisant le principe de superposition :

$$\vec{H}(t) = \vec{H}_1(t) + \vec{H}_2(t) = 2\vec{H}_1(t) = \frac{a^2 N I_0 \sin(\omega t)}{(d^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

Finalement, puisque $2d = a$, on obtient :

$$\vec{H}(t) = \frac{a^2 N I_0 \sin(\omega t)}{((a/2)^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{8 N I_0 \sin(\omega t)}{5\sqrt{5} a} \hat{z}.$$

2.2 (0,75 pt) Flux magnétique à travers un disque centré en O et de vecteur normal $\hat{z}$.

Puisqu'on considère le champ magnétique comme uniforme, le flux magnétique est donné par :

$$\Phi(t) = \int \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} = \vec{B}(t) \cdot \vec{s} = \vec{B}(t) \cdot \pi\rho^2\hat{n}$$

La densité de flux magnétique $\vec{B}(t)$ est donnée par :

$$\vec{B}(t) = \mu_0\vec{H}(t),$$

et on obtient donc :

$$\Phi(t) = \frac{8\mu_0 N I_0 \sin(\omega t)}{5\sqrt{5}a}\hat{z} \cdot \pi\rho^2\hat{n} = \frac{8\pi\rho^2\mu_0 N I_0 \sin(\omega t)}{5\sqrt{5}a}.$$

2.3 (1 pt) Champ électrique à l'intérieur du cylindre.

Le champ électrique $\vec{E}(t)$ est dû à la variation de flux magnétique dans le cylindre (3e équation de Maxwell) :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}.$$

La symétrie du problème est de type cylindrique : les lignes de champ électrique suivront dont des cercles concentriques autour de l'axe de l'échantillon :

$$\vec{E} = E_\phi\hat{\phi}.$$

On choisit donc un contour fermé en forme de boucle de rayon ρ sur lequel le module du champ électrique est constant :

$$\begin{aligned} 2\pi\rho E_\phi &= -\frac{8\pi\rho^2\mu_0 N I_0\omega\cos(\omega t)}{5\sqrt{5}a} \\ \vec{E} &= -\frac{4\rho\mu_0 N I_0\omega\cos(\omega t)}{5\sqrt{5}a}\hat{\phi} \end{aligned}$$

2.4 (1,25 pt) Puissance dissipée par courants de Foucault dans le cylindre.

La puissance dissipée (pertes ohmiques) vaut :

$$\begin{aligned} P_d(t) &= \int \sigma E^2 dv = \frac{16}{125}\left(\frac{\mu_0\sigma N I_0\omega}{a}\right)^2 \cos^2(\omega t)\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho^2\rho d\rho d\phi dz \\ &= \frac{8\pi L r^4}{125}\left(\frac{\mu_0\sigma N I_0\omega}{a}\right)^2 \cos^2(\omega t) \end{aligned}$$

La puissance moyenne s'obtient en moyennant l'expression précédente sur un cycle, ce qui fait apparaître un facteur 1/2 :

$$\begin{aligned}\langle P_d(t)\rangle &= \frac{4\pi L r^4}{125}\left(\frac{\mu_0\sigma N I_0\omega}{a}\right)^2 \\ &= 203\,\mathrm{kW}.\end{aligned}$$

Question 3 : Force entre deux fils parcourus par un courant (3 points)

3.1 (1 pt) Champ magnétique produit par un fil.

La symétrie cylindrique permet de déduire que les lignes de champ magnétique suivront des cercles concentriques autour du fil :

$$\vec{H} = H_\phi\hat{\phi}.$$

On peut donc utiliser le théorème d'Ampère avec un cercle de rayon ρ :

$$\begin{aligned}\int \vec{H}\cdot d\vec{l} &= I \\ 2\pi\rho H_\phi &= I \\ H_\phi &= \frac{I}{2\pi\rho}.\end{aligned}$$

Le champ magnétique autour d'un fil vaut donc :

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi}.$$

3.2 (1,5 pt) Force par unité de longueur ressentie par le fil de droite.

Parce qu'on néglige le rayon des fils, alors le fil de droite ressent un champ magnétique :

$$\vec{H} = \frac{I_1}{2\pi d}\hat{\phi} = -\frac{I_1}{2\pi d}\hat{z}.$$

La force ressentie par un segment de longueur L du fil de droite est donc :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1\to 2} &= \int I_2 d\vec{l}\times\vec{B} \\ &= \mu_0 I_2\int_0^L dy\hat{y}\times\left(-\frac{I_1}{2\pi d}\right)\hat{z} \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}\hat{x}.\end{aligned}$$

La force par unité de longueur vaut enfin :

$$\vec{f}_{1\to 2} = \frac{\vec{F}_{1\to 2}}{L} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\hat{x}.$$

3.3 (0,5 pt) Condition pour que les fils s'attirent/se repoussent.

Les forces ressenties par les deux fils forment une paire action-réaction, alors elles sont de même module, de même direction et de sens opposé :

$$\vec{f}_{2\to 1} = \vec{f}_{1\to 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\hat{x}.$$

Si les courants ont le même sens, les fils s'attirent, tandis que si les courants ont des sens opposés, les fils se repoussent.

Question 4 : Champ magnétique dans un entrefer double (3 points)

4.1 (1,5 pt) Réluctance équivalente du circuit.

Le circuit magnétique équivalent est composé de la branche de gauche en série avec les branches centre et droite en parallèle.

Réluctance de la branche de gauche :

$$\mathcal{R}_g = \frac{0{,}12 + 0{,}06 + 0{,}06}{\mu_r \mu_0 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}05} = 1{,}91 \times 10^5\ \mathrm{A\,Wb^{-1}}.$$

Réluctance de la branche du centre :

$$\mathcal{R}_c = \frac{0{,}05 + 0{,}05}{\mu_r \mu_0 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}05} + \frac{0{,}02}{\mu_0 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}05} = 1{,}60 \times 10^7\ \mathrm{A\,Wb^{-1}}.$$

Réluctance de la branche de droite :

$$\mathcal{R}_d = \frac{0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05}{\mu_r \mu_0 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}05} + \frac{0{,}02}{\mu_0 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}05} = 1{,}61 \times 10^7\ \mathrm{A\,Wb^{-1}}.$$

La réluctance équivalente du circuit est donc :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_c \parallel \mathcal{R}_d = \mathcal{R}_g + \left(\mathcal{R}_c^{-1} + \mathcal{R}_d^{-1}\right)^{-1} = 8{,}22 \times 10^6\ \mathrm{A\,Wb^{-1}}.$$

4.2 (1,5 pt) Densité de flux magnétique dans chaque entrefer

La loi d'Ohm magnétique permet d'obtenir le flux magnétique total qui circule dans le circuit (dans la branche de gauche).

$$\Phi = \frac{V_m}{\mathcal{R}} = \frac{NI}{\mathcal{R}} = 1{,}22 \times 10^{-4}\,\mathrm{Wb}.$$

La différence de potentiel magnétique aux bornes des branches du centre et à droite est :

$$V_{m,cd} = V_m - \mathcal{R}_g \Phi = 977\,\mathrm{A}.$$

Le flux magnétique dans chaque branche vaut donc :

$$\Phi_c = \frac{V_{m,cd}}{\mathcal{R}_c} = 6{,}10 \times 10^{-5}\,\mathrm{Wb}$$
$$\Phi_d = \frac{V_{m,cd}}{\mathcal{R}_d} = 6{,}07 \times 10^{-5}\,\mathrm{Wb}.$$

La densité de flux magnétique s'obtient en divisant le flux par la surface. On obtient :

$$B_c = \frac{\Phi_c}{0{,}02 \cdot 0{,}05} = 61{,}0\,\mathrm{mT}$$
$$B_d = \frac{\Phi_d}{0{,}02 \cdot 0{,}05} = 60{,}7\,\mathrm{mT}.$$

La densité de flux magnétique est à peine plus élevée dans l'entrefer de la branche du centre. La différence est tellement minime qu'on peut affirmer que les deux valeurs sont égales à toute fin pratique.

Question 5 : Cavité micro-ondes (5 points)

5.1 (1 pt) Amplitude, longueur d'onde et distance L.

L'amplitude est la norme du vecteur $\vec{E}_0$:

$$E_0 = \|10\,(\hat{y} + \hat{z})\| = 10\sqrt{2} = 14{,}1\,\mathrm{V\,m^{-1}}.$$

La vitesse de l'onde est celle de la lumière dans le vide. La longueur d'onde vaut donc :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$
$$\lambda = \frac{c}{f} = 12{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Par comparaison du champ électrique avec la forme générale de l'onde plane, on a :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{L},$$

et donc la distance L vaut :

$$L = \frac{\lambda}{2} = 6{,}12\,\mathrm{cm}.$$

5.2 (0,5 pt) Polarisation de l'onde plane.

L'onde stationnaire est polarisée linéairement dans la direction :

$$\frac{\vec{E}_0}{E_0} = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}}.$$

5.3 (1 pt) Champ magnétique de l'onde plane.

Par inspection de la forme de l'onde plane, sa direction de propagation est :

$$\hat{n} = \hat{x}.$$

L'impédance est celle du vide et on a donc :

$$\begin{aligned}\vec{H}(x,t) &= \frac{\hat{n} \times \vec{E}(x,t)}{Z_0} \\ &= 26{,}5\,(-\hat{y} + \hat{z})\cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{L}\right) \text{ mA/m}\end{aligned}$$

5.4 (1,5 pt) Démontrer que l'onde respecte l'équation d'onde.

L'équation d'onde se lit :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E}(x,t) &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(x,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E}(x,t) &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(x,t) \\ -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \vec{E}(x,t) &= -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E}(x,t) \\ \frac{\pi}{L} &= \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \\ \frac{\pi}{L} &= 2\pi \frac{f}{v} \\ \frac{\pi}{L} &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda &= 2L,\end{aligned}$$

ce qui est cohérent avec ce qui a été obtenu précédemment en 5.1.

5.5 (1 pt) Vecrteur de Poynting, puis puissance moyenne par unité de surface.

Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{P}}(t) &= \vec{E}(x,t) \times \vec{H}(x,t) \\ &= \frac{10^2}{Z_0}\left(\hat{y}+\hat{z}\right) \times \left(-\hat{y}+\hat{z}\right)\cos^2\left(\omega t - \frac{\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{2\cdot 10^2}{Z_0}\cos^2\left(\omega t - \frac{\pi x}{L}\right)\hat{x}\end{aligned}$$

La puissance moyenne par unité de surface consiste à faire la moyenne temporelle du vecteur de Poynting (la moyenne d'un cosinus au carré donne 1/2) et de conserver la norme du résultat :

$$\left\langle \vec{\mathcal{P}}(t) \right\rangle = \frac{10^2}{Z_0} = \frac{E_0^2}{2Z_0} = 265\,\mathrm{mW}.$$

Bonus (1 pt) Superposition de deux ondes planes.

Il s'agit d'additionner deux ondes planes identiques mais de direction opposée et déphasées de 180 degrés :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{stat}} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= 10\left(\hat{y}+\hat{z}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{L}\right) + 10\left(\hat{y}+\hat{z}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\pi x}{L} + \pi\right) \\ &= 10\left(\hat{y}+\hat{z}\right)\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\pi x}{L}\right)\right] \\ &= 10\left(\hat{y}+\hat{z}\right)\left[2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\omega t\right)\right] \\ &= 20\left(\hat{y}+\hat{z}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\omega t\right)\end{aligned}$$