PHS1102 Champs électromagnétiques

Corrigé de l'examen final Automne 2018

Question 1 : Compréhension (4 points)

1.1 (1 pt) A) III B) II C) IV D) I . **(1 point)**

1.2 (1 pt) Les affirmations vraies sont A et D. **(1 point)**

1.3 (1 pt) La réponse est D. **(1 point)**

1.4 (1 pt) La réponse est 3. **(1 point)**

Question 2 : Électroaimant (4,5 points)

2.1 (2,5 pts) **Méthode 1 – Théorème d'Ampère**

Par symétrie du problème, on utilise les coordonnées cylindriques et l'on sait que le champ magnétique dans l'électroaimant et dans l'entrefer est azimutal et orienté en sens horaire (règle de la main droite avec le sens du courant I_0) :

$$\vec{H}_{ea} = -H_{ea}\hat{\phi}$$
$$\vec{H}_{ef} = -H_{ef}\hat{\phi}$$

Le champ magnétique diffère dans l'entrefer et dans l'électroaimant, mais la densité de flux magnétique est la même dans les deux milieux (condition frontière $B_{n1} = B_{n2}$) :

$$B_{ea,\phi} = B_{ef,\phi}$$
$$\mu_r\mu_0 H_{ea} = \mu_0 H_{ef}$$
$$\mu_r H_{ea} = H_{ef}$$

On utilise alors le théorème d'Ampère avec un contour circulaire fermé de rayon ρ parcouru en sens positif antihoraire , de sorte que le champ est tangent au contour en tout point. Le courant total intercepté par la surface délimitée par le contour est $I = -NI_0$, le signe négatif venant du fait que la surface est orientée positivement en sortant de la page tandis que le courant entre dans la page.

On a donc :

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = -NI_0$$
$$-H_{ea}\left(2\pi\rho - d\right) - H_{ef}d = -NI_0$$

On peut alors remplacer les champs magnétiques par leurs expressions en fonction de la densité de flux magnétique dans l'entrefer, puis isoler le courant :

$$\frac{B_{ef}}{\mu_r\mu_0}\left(2\pi\rho - d\right) + \frac{B_{ef}}{\mu_0}d = NI_0$$
$$I_0 = \frac{B_{ef}}{\mu_0 N}\left(\frac{2\pi\rho - d}{\mu_r} + d\right)$$

Puisqu'on souhaite avoir $2\,\mathrm{T}$ à $\rho = r$ au milieu de l'entrefer, alors on a :

$$I_0 = \frac{B_{ef}}{\mu_0 N}\left(\frac{2\pi r - d}{\mu_r} + d\right) = 6{,}17\,\mathrm{A}$$

Méthode 2 – Circuit magnétique

Le circuit magnétique de l'électroaimant est une source de potentiel magnétique :

$$V_m = NI_0$$

qui alimente deux réluctances placées en série qui modélisent le noyau de l'électroaimant et l'entrefer :

$$\mathcal{R}_{ea} = \frac{2\pi r - d}{\mu_r \mu_0 a^2}$$
$$\mathcal{R}_{ef} = \frac{d}{\mu_0 a^2}$$

La réluctance équivalente est la somme des deux réluctances :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{ea} + \mathcal{R}_{ef} = \frac{1}{\mu_0 a^2}\left(\frac{2\pi r - d}{\mu_r} + d\right)$$

L'équivalent de la loi d'Ohm relie le flux magnétique au potentiel magnétique :

$$V_m = \mathcal{R}\Phi$$
$$NI_0 = \frac{\Phi}{\mu_0 a^2}\left(\frac{2\pi r - d}{\mu_r} + d\right)$$

où le flux magnétique est relié à la densité de flux magnétique par la section de l'électroaimant (le formalisme des circuits magnétiques suppose que le flux est uniformément réparti sur la section):

$$\Phi = BS = Ba^2$$

On obtient donc le courant requis :

$$I_0 = \frac{B}{\mu_0 N}\left(\frac{2\pi r - d}{\mu_r} + d\right) = 6{,}17\,\mathrm{A}$$

2.2 (1,25 pt) L'énergie emmagasinée dans l'électroaimant vaut :

$$U = \frac{1}{2}\int_V \mu H^2 dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{B^2}{\mu} dV$$

Il faut intégrer à la fois dans l'entrefer et dans le noyau ferromagnétique :

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int_{V_{ea}} B^2 dV + \frac{1}{2\mu_0}\int_{V_{ef}} B^2 dV$$

Puisqu'on suppose que le champ magnétique (et donc la densité de flux magnétique) est uniforme sur toute la section de l'électroaimant, on obtient :

$$\begin{aligned}
U &= \frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}\int_{V_{ea}} dV + \frac{B^2}{2\mu_0}\int_{V_{ef}} dV \\
&= \frac{B^2}{2\mu_0}\left[\frac{a^2\left(2\pi r - d\right)}{\mu_r} + a^2 d\right] \\
&= \frac{B^2 a^2}{2\mu_0}\left(\frac{2\pi r - d}{\mu_r} + d\right) \\
&= 3{,}08\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

2.3 (0,75 pt) L'inductance est reliée à l'énergie par :

$$U = \frac{1}{2}LI_0^2 \Longrightarrow L = \frac{2U}{I_0^2}$$

En utilisant les expressions de U et de B obtenues précédemment (ou en insérant les valeurs numériques directement), on obtient :

$$\begin{aligned}
L &= 2\frac{B^2 a^2}{2\mu_0}\left(\frac{2\pi r - d}{\mu_r} + d\right)\left[\frac{B}{\mu_0 N}\left(\frac{2\pi r - d}{\mu_r} + d\right)\right]^{-2} \\
&= \mu_0 a^2 N^2 \left(\frac{2\pi r - d}{\mu_r} + d\right)^{-1} \\
&= \frac{2\cdot 3{,}08\,\mathrm{J}}{(6{,}17\,\mathrm{A})^2} \\
&= 162\,\mathrm{mH}
\end{aligned}$$

Question 3 : Boucle conductrice dans un champ magnétique non uniforme (3,5 points)

3.1 (2 pts) La force magnétique ressentie par la boucle de courant est :

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Il faut intégrer dans le sens du courant, sur les quatre côtés de la boucle :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= \int_{-b}^{b} I dx\hat{x} \times B_z(x)\hat{z} = I\hat{y}\int_{-b}^{b} \frac{B_0}{4b}(x+3b)\,dx = \frac{IB_0}{4b}\hat{y}\left[\frac{x^2}{2} + 3bx\right|_{-b}^{b} \\
&= \frac{3}{2}bIB_0\hat{y} \\
\vec{F}_2 &= \int_0^{2a} Idl\,(-\cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{z}) \times B_z(x=b)\hat{z} = \frac{IB_0}{4b}(b+3b)\cos\theta\hat{x}\int_0^{2a} dl \\
&= 2aIB_0\cos\theta\hat{x} \\
\vec{F}_3 &= \int_b^{-b} Idx\hat{x} \times B_z(x)\hat{z} = -\vec{F}_1 = -\frac{3}{2}bIB_0\hat{y} \\
\vec{F}_4 &= \int_0^{2a} Idl\,(\cos\theta\hat{y} - \sin\theta\hat{z}) \times B_z(x=-b)\hat{z} = -\frac{IB_0}{4b}(-b+3b)\cos\theta\hat{x}\int_0^{2a} dl \\
&= -aIB_0\cos\theta\hat{x}
\end{aligned}$$

La force totale est la somme des quatre forces. On remarque déjà que les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_3$ s'annulent. On obtient :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{4}\vec{F}_i = aIB_0\cos\theta\hat{x}$$

3.2 (0,75 pt)

Chaque force s'applique au centre d'un côté de la boucle. Les forces $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_4$ ne produisent aucun couple, mais les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_3$ produisent un couple :

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\
&= 2a\,(\cos\theta\hat{y} - \sin\theta\hat{z}) \times \frac{3bIB_0}{2}\hat{y} \\
&= 3abIB_0\sin\theta\hat{x}
\end{aligned}$$

3.3 (0,75 pt)

Translation : [le centre de masse de] la boucle accélère vers la droite en translation à cause de la force résultante non nulle.

Rotation : le couple induit un mouvement de rotation de la boucle sur elle-même en sens antihotaire autour de l'axe x.

Si le champ magnétique était uniforme, il y aurait aussi un couple, mais la force résultante serait nulle (on aurait $\vec{F}_4 = -\vec{F}_2$) et il n'y aurait pas de translation.

Question 4 : Transformateur (3 points)

4.1 (1,5 pt) Comme le flux qui circule dans les deux bobines est identique, on peut appliquer la loi de Faraday aux deux bobines avec le même flux Φ :

$$V_1(t) = -N_1 \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$
$$V_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

On peut alors faire le ratio de la loi de Faraday appliquée à chaque solénoïde pour obtenir le ratio des tensions :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-N_2 d\Phi/dt}{-N_1 d\Phi/dt} = \frac{N_2}{N_1},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{N_2}{N_1} V_1 \\ &= 240\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

4.2 (1,5 pt)

La densité d'énergie dissipée par cycle est donnée par

$$u = \oint H dB.$$

L'intégrale correspond à la surface du parallélépipède de la figure qui est donnée par

$$u = \left(2{,}5 \times 10^4\,\mathrm{A\,m^{-1}}\right)(2 \cdot 4\,\mathrm{T}) = 200\,\mathrm{kJ/m^3}$$

La densité de puissance dissipée est la densité d'énergie dissipée divisée par la période d'un cycle $= 1/f$. Ainsi

$$p = fu = 12{,}0\,\mathrm{MW/m^3}$$

Finalement pour obtenir la perte de puissance par hystérésis il ne reste qu'à multiplier par le volume du transformateur qui est donné par

$$V = 8a^3$$

et on obtient finalement

$$P = 393\,\mathrm{kW}$$

Question 5 : Radiorécepteur AM (5 points)

On suppose que l'onde se propage dans l'air ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$).

5.1 (1 pt) Avec l'expression du champ électrique, on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{n} &= -\frac{3\hat{x} - 4\hat{y}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -0{,}6\hat{x} + 0{,}8\hat{y} \\
v &= c = \frac{\omega}{\beta} \\
\Longrightarrow \beta &= \frac{\omega}{c} = \frac{4{,}50 \times 10^6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = \frac{3}{200}\,\mathrm{rad\,m^{-1}} = 1{,}50 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,m^{-1}} \\
\lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = 419\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Attention : le paramètre a dans l'expression de $\vec{E}$ n'est pas égal à la constante de phase. En réécrivant l'argument du sinus pour retrouver la forme générale $\omega t - \beta\hat{n} \cdot \vec{r}$, on a en fait $\beta = 5a$:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= 10\hat{z}\sin\left(4{,}50 \times 10^6 t + a\,[3x - 4y]\right) \\
&= 10\hat{z}\sin\left(4{,}50 \times 10^6 t - 5a\left[\frac{-3x + 4y}{5}\right]\right) \\
&= 10\hat{z}\sin\left(4{,}50 \times 10^6 t - \beta\left[\frac{-3x + 4y}{5}\right]\right).
\end{aligned}$$

5.2 (0,5 pt) L'onde est polarisée linéairement selon l'axe z, car il s'agit d'une seule onde plane dont le champ électrique est orienté selon l'axe z.

5.3 (1,5 pt) Le champ magnétique $\vec{H}$ de l'onde est perpendiculaire au champ électrique et à la direction de propagation :

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\hat{n} \times \vec{E}$$

L'impédance du milieu est celle du vide :

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376{,}7\,\Omega.$$

Le champ électrique vaut donc :

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{Z}\hat{n} \times \vec{E} \\
&= \frac{1}{376{,}7}\left(-0{,}6\hat{x} + 0{,}8\hat{y}\right) \times 10\hat{z} \sin\left(4{,}50 \times 10^6 t + \frac{3}{200}\left[\frac{3x - 4y}{5}\right]\right) \\
&= \frac{1}{376{,}7}\left(6\hat{y} + 8\hat{x}\right) \sin\left(4{,}50 \times 10^6 t + \frac{3}{200}\left[\frac{3x - 4y}{5}\right]\right) \\
&= \left(21{,}2\hat{x} + 15{,}9\hat{y}\right) \sin\left(4{,}50 \times 10^6 t + \frac{3}{200}\left[\frac{3x - 4y}{5}\right]\right) \text{ mA m}^{-1}
\end{aligned}$$

5.4 (0,5 pt) L'orientation du champ magnétique doit être perpendiculaire à la surface de la boucle . Cela implique que le vecteur $\hat{\lambda}$ doit être parallèle à $\vec{H}$. On a donc :

$$\hat{\lambda} = \pm\left(0{,}8\hat{x} + 0{,}6\hat{y}\right)$$

5.5 (1,5 pt) La force électromotrice mesurée aux bornes du radiorécepteur se calcule avec la loi de Faraday, en supposant que la densité de flux magnétique est uniforme sur toute la surface de la boucle :

$$\in = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}\left(\vec{B} \cdot \vec{S}\right) \quad ,$$

où $\vec{S} = S\hat{\lambda} = c^2\left(0{,}8\hat{x} + 0{,}6\hat{y}\right)$ est le vecteur surface de la boucle carrée. Ce vecteur est constant dans le temps parce que la boucle est immobile dans l'espace.

On peut calculer la densité de flux magnétique à partir du champ magnétique, en l'évaluant au centre de la boucle, en $(x, y) = (0, 0)$:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \left(26{,}6\hat{x} + 20{,}0\hat{y}\right) \sin\left(4{,}50 \times 10^6 t\right) \text{ nT}$$

puis dériver par rapport au temps pour obtenir la force électromotrice :

$$\begin{aligned}
\in &= -N\frac{d}{dt}\left(\vec{B} \cdot \vec{S}\right) = -Nc^2\frac{d}{dt}\left(\vec{B} \cdot \hat{\lambda}\right) \\
&= -Nc^2\left(26{,}6\hat{x} + 20{,}0\hat{y}\right) \cdot 1 \times 10^{-9} \cdot \left(0{,}8\hat{x} + 0{,}6\hat{y}\right)\frac{d}{dt}\sin\left(4{,}50 \times 10^6 t\right) \\
&= -Nc^2 \cdot 33{,}28 \times 10^{-9} \cdot 4{,}50 \times 10^6 \cos\left(4{,}50 \times 10^6 t\right)
\end{aligned}$$

L'amplitude est le coefficient de la fonction harmonique (en valeur absolue) :

$$\in = Nc^2 \cdot 33{,}28 \times 10^{-9} \cdot 4{,}50 \times 10^6 = 674\,\mathrm{mV}$$

Bonus (0,5 pt)

Pour supposer que les champs sont à peu près uniformes sur la boucle, il faut qu'ils varient très peu sur la surface de la boucle. Une moitié de longueur d'onde est un ordre de grandeur décrivant la distance sur laquelle l'onde varie significativement. Or, la moitié de la longueur d'onde calculée est d'environ 210 m. Puisque 210 m est beaucoup plus grand que le côté de la boucle (30 cm), il est raisonnable de poser l'hypothèse que les champs sont uniformes sur la surface de la boucle.