PHS1102 – CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

CONTRÔLE PÉRIODIQUE – HIVER 2019

DATE : MARDI 26 FÉVRIER HEURE : 18H30-20H20

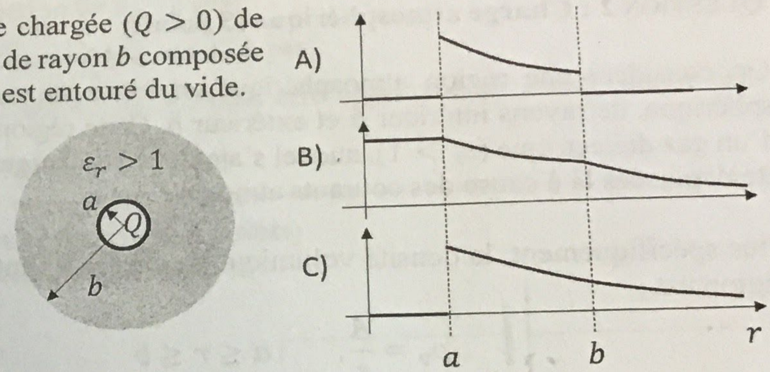
PAGES : 5 QUESTIONS : 4

NOTE : Aucune documentation permise
Calculatrice non programmable permise

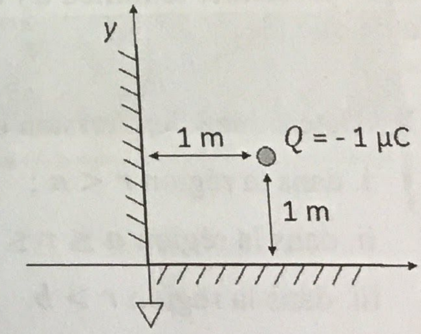
QUESTION 1 : Concepts et réponses courtes, SVP répondre <u>*dans le cahier d'examen*</u> **(4 points)**

1.1 ➢ (1 pt) Une coquille métallique creuse chargée ($Q > 0$) de rayon a est entourée d'une couche sphérique de rayon b composée d'un matériau diélectrique (en gris). Le tout est entouré du vide.

Pour chacune des courbes A, B et C sur la figure, associer la variable qu'elle décrit (D, $\cancel{E}$, P ou V).

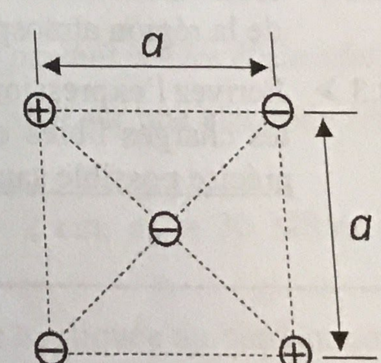


1.2 ➢ (1 pt) Une charge ponctuelle de -1 μC est placée à égale distance de deux plans conducteurs semi-infinis mis à la masse et perpendiculaires l'un à l'autre (voir figure). Quel est le module de la force ressentie par la charge due à la présence des plans conducteurs ?



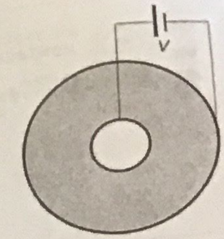
A) 12,7 mN
B) 5,42 mN
C) 4,49 mN
D) 4,30 mN
E) 3,18 mN
F) 2,91 mN
G) 2,05 mN
H) 0,931 mN

1.3 ➢ (1 pt) Deux charges positives et deux charges négatives sont disposées aux coins d'un carré de côté a. De plus, une charge négative se trouve au centre de ce carré. Les cinq charges ont la même valeur Q (en valeur absolue). On s'intéresse ici au travail *minimal* W qu'il faut effectuer sur la charge négative au centre du carré pour la retirer et la déplacer infiniment loin des quatre autres charges. Choisissez l'énoncé qui est vrai :



A) Ce travail minimal est strictement positif ($W > 0$) ;
B) Ce travail minimal est nul ($W = 0$) ;
C) Ce travail minimal est strictement négatif ($W < 0$) ;
D) Il n'y a pas assez d'information pour déduire la valeur du travail minimal à effectuer.

1.4 ➤ (1 pt) Les deux armatures intérieure et extérieure d'un câble coaxial sont séparées par du vide, et connectées à une pile (source de tension).



Identifiez la ou les affirmations qui sont vraies parmi les suivantes. Si l'on remplace le vide entre les armatures par un diélectrique ($\varepsilon > \varepsilon_0$), alors :

$V = -\int_{+a}^{b} \vec{E}\, d\vec{l}$

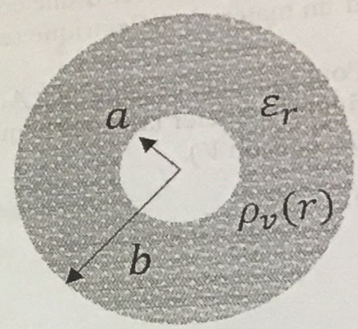
$C = \frac{|Q|}{V}$

ensemble

A) La capacité du câble coaxial augmentera ;
B) La différence de tension entre les armatures diminuera ;
C) La quantité de charge (en valeur absolue) sur chacune des armatures augmentera.

QUESTION 2 : Charge atmosphérique (5 points)

On considère une région atmosphérique en forme de coquille épaisse sphérique, de rayons intérieur a et extérieur b. Cette région est composée d'un gaz diélectrique ($\varepsilon_r > 1$), auquel s'ajoutent des charges libres qui ont été déplacées là à cause des courants atmosphériques.



Plus spécifiquement, la densité volumique de charge à l'intérieur de cette région est :

$$\rho_v = \frac{A}{r}, \qquad a \leq r \leq b$$

où A est une constante.

Pour ce problème, le milieu à l'extérieur de la région considérée ($r < a$ et $r > b$) peut être considéré comme du vide.

2.1 ➤ Déterminez l'expression du champ électrique (vecteur) : **(3 pts)**

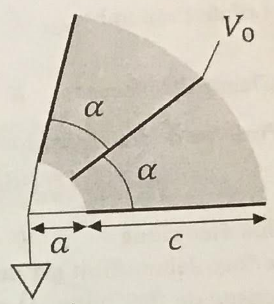
i. dans la région $r < a$;
ii. dans la région $a \leq r \leq b$;
iii. dans la région $r > b$.

2.2 ➤ Déterminez la densité surfacique de charge induite (en module) sur la surface extérieure $r = b$ de la région atmosphérique chargée. **(1 pt)**

2.3 ➤ Écrivez l'expression du travail qui a dû être effectué par les courants atmosphériques pour amener les charges libres dans leur position actuelle, à partir de l'infini. <u>Écrivez l'expression la plus précise possible sans la résoudre (ne pas évaluer de dérivées ou d'intégrales).</u> **(1 pt)**

QUESTION 3 : Condensateur en coin (5,5 points)

Un condensateur en coin est formé de trois armatures carrées de côté $c = 4$ cm, disposées comme indiqué sur la figure. Le diélectrique entre les armatures ($\varepsilon_r = 3$) a une rigidité diélectrique égale à 500 kV/m. Les deux armatures externes sont mises à la masse tandis que l'armature centrale est maintenue à un potentiel V_0. On donne $a = 1$ cm et $\alpha = 40°$.



Pour ce problème, on considère que l'angle α est petit, de sorte que le champ à l'extérieur du condensateur peut être considéré comme négligeable.

3.1 ➢ Déterminez l'expression de la distribution de potentiel partout entre les armatures du condensateur en fonction de V_0. **(2 pts)**

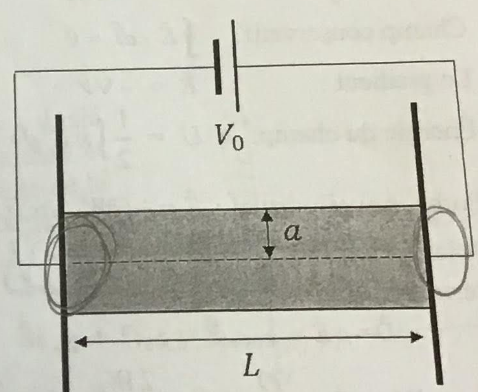
3.2 ➢ Déterminez la valeur de la capacité du condensateur. **(2,5 pts)**

3.3 ➢ Quelle est la valeur maximale du potentiel V_0 qui peut être appliquée au condensateur sans l'endommager ? **(1 pt)**

QUESTION 4 : Barreau de conductivité non uniforme (5,5 points)

Un barreau cylindrique métallique de longueur L et de rayon a possède une conductivité non uniforme :

$$\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{\rho}{a}, \qquad 0 \leq \rho \leq a,$$



où σ_0 est une constante. Deux électrodes planes sont placées aux extrémités du barreau. Ces électrodes sont soumises à une différence de potentiel V_0 et produisent donc un champ électrique dans l'espace entre elles, où se trouve le barreau. Le barreau a une permittivité similaire à celle du vide.

Le matériau conducteur qui constitue le barreau peut être endommagé localement si la densité volumique de puissance dépasse une valeur maximale p_{max} en un point.

4.1 ➢ (3 pts) Déterminez l'expression de la résistance du barreau.

Indice : calculez d'abord le champ électrique dans le barreau produit par les électrodes.

4.2 ➢ (1 pt) Déterminez l'expression de la densité surfacique de charge libre sur une électrode (en valeur absolue).

Répondez à la question suivante en utilisant les valeurs $L = 50$ cm, $a = 2$ cm, $\sigma_0 = 30$ MS/m et $p_{max} = 10^9$ W/m³.

4.3 ➢ (1,5 pt) Quelle est la différence de potentiel maximale qui peut être appliquée au barreau pour ne pas l'endommager ? Calculez la puissance totale dissipée par le barreau pour cette différence de potentiel.

ONUS ➢ (0,5 pt) La puissance dissipée par le barreau ne pourra pas être totalement évacuée vers son environnement, de sorte que le barreau s'échauffera. Discutez de l'effet de l'augmentation de la température du barreau sur la puissance dissipée.

PHS1102 Champs électromagnétiques

Corrigé du contrôle périodique Hiver 2019

Question 1 : Concepts et réponses courtes (4 points)

1.1 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,50 point)** ; Deux erreurs : **(0,25 point)**. Trois erreurs : **(0 point)**.

Courbe A) P.

Courbe B) V.

Courbe C) D.

1.2 (1 pt) La bonne réponse est G : $2{,}05\,\mathrm{mN}$. Il fallait poser deux charges images $+Q$ à $(1,-1)$ et à $(-1,1)$ et une charge image $-Q$ à $(-1,-1)$.

1.3 (1 pt) La réponse est B.

1.4 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,50 point)** ; Deux erreurs : **(0,25 point)**. Trois erreurs : **(0 point)**. .

Les affirmations vraies sont A et C.

Question 2 : Charge atmosphérique (5 points)

2.1 (3 pts) Champ électrique.

La symétrie sphérique du problème nous indique que la densité de flux et le champ électrique seront radiaux :

$$\begin{aligned}\vec{D} &= D_r\hat{r}\\ \vec{E} &= \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{D_r}{\varepsilon}\hat{r}\end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème de Gauss avec une sphère de rayon r pour trouver le champ dans chaque région.

Cas 1 : $r < a$: La charge dans la surface de Gauss est nulle.

$$\begin{aligned}0 &= \int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D_r\\ D_r &= 0\\ \vec{E} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Cas 2 : $a \leq r \leq b$: La charge dans la surface de Gauss vaut :

$$\begin{aligned}Q &= \int_v \rho_v dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^r \frac{A}{r}r^2\sin\theta dr d\theta d\phi\\ Q &= 4\pi A\int_a^r r dr\\ Q &= 2\pi A\left(r^2 - a^2\right).\end{aligned}$$

Le champ vaut donc :

$$\begin{aligned}Q &= \int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}\\ 2\pi A\left(r^2-a^2\right) &= 4\pi r^2 D_r\\ D_r &= \frac{A}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\\ \vec{E} &= \frac{A}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\hat{r}.\end{aligned}$$

Cas 3 : $r \geq b$: En se basant sur les résultats précédents, la charge dans la surface de Gauss est la charge dans toute la région chargée. Elle vaut :

$$Q = 2\pi A \left(b^2 - a^2\right).$$

Le champ vaut donc :

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \\ 2\pi A \left(b^2 - a^2\right) &= 4\pi r^2 D_r \\ D_r &= \frac{A}{2} \frac{b^2 - a^2}{r^2} \\ \vec{E} &= \frac{A}{2\varepsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r^2} \hat{r}. \end{aligned}$$

2.2 (1 pt) Densité de charge induite sur la surface extérieure.

La densité de charge induite est donnée (en module) par la norme du vecteur polarisation qu'il faut évaluer dans la région diélectrique, à la surface $r = b$:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \\ |\rho_{s,i}| = P &= \left| \frac{A}{2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - \varepsilon_0 \frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \right| \\ |\rho_{s,i}| &= \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

2.3 (1 pt) Travail effectué pour amener les charges libres.

Le travail est l'énergie potentielle électrique emmagasinée dans le champ $\vec{E}$.

$$\begin{aligned} W = U &= \int_v \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dv \\ &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \left(\frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{r^2 - a^2}{r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \right. \\ &\left. + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_b^{\infty} \left(\frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \right]. \end{aligned}$$

Question 3 : Condensateur en coin (5,5 points)

3.1 (2 pts) Distribution de potentiel.

La symétrie cylindrique permet d'affirmer que le potentiel ne dépend que de l'angle ϕ mesuré positivement en sens antihoraire ($\phi = 0$ sur l'armature du bas). La solution correspondante à l'équation de Laplace est alors :

$$V = V(\phi) = A\phi + B,$$

dans chaque région du condensateur.

Région 1 : $0 \leq \phi \leq \alpha$: Le potentiel s'écrit

$$V = A_1\phi + B_1,$$

avec les conditions frontières

$$V(0) = 0 \Longrightarrow B_1 = 0$$
$$V(\alpha) = V_0 \Longrightarrow A_1 = \frac{V_0}{\alpha}.$$

Le potentiel vaut donc :

$$V = \frac{V_0}{\alpha}\phi.$$

Région 2 : $\alpha \leq \phi \leq 2\alpha$: Le potentiel s'écrit

$$V = A_2\phi + B_2,$$

avec les conditions frontières

$$V(2\alpha) = 0 \Longrightarrow 2A_2\alpha + B_2 = 0$$
$$V(\alpha) = V_0 \Longrightarrow A_2\alpha + B_2 = V_0.$$

En résolvant, pour A_1 et pour B_1, on trouve :

$$V = -\frac{V_0}{\alpha}\phi + 2V_0,$$

3.2 (2,5 pts) Capacité du condensateur.

Puisque le condensateur est en fait formé de deux condensateurs en parallèle, on peut calculer la capacité entre les deux plaques du bas, puis multiplier par deux (par symétrie, la capacité entre les deux plaques du haut sera la même).

La capacité C_1 du condensateur du bas est donnée par :

$$C_1 = \frac{|Q_1|}{V_0},$$

où la charge $|Q_1|$ est la charge libre totale (en module) accumulée sur la plaque du bas.

On trouve cette charge en utilisant la condition à l'interface diélectrique/conducteur à $\phi = 0$ (plaque du bas) :

$$\begin{aligned} D_{1N} &= \rho_s, \\ D_{1,\phi} &= \rho_s, \\ \varepsilon_r \varepsilon_0 E_{1,\phi} &= \rho_s. \end{aligned}$$

Le champ électrique se calcule en prenant le gradient du potentiel :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla V &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} \\ &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{V_0}{\alpha}\phi\right)\hat{\phi} \\ &= -\frac{V_0}{\alpha\rho}\hat{\phi} \end{aligned}$$

La densité surfacique de charge sur l'électrode du bas est donc :

$$\rho_s = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha\rho},$$

ce qui implique que la charge totale sur celle-ci est :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_S \rho_s dS \\ &= -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha}\int_0^c \int_a^{a+c} \frac{1}{\rho} d\rho dz \\ &= -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha} c \ln\left(1 + \frac{c}{a}\right), \end{aligned}$$

La capacité totale vaut donc :

$$\begin{aligned} &C = 2C_1 = 2\frac{|Q_1|}{V_0} = \frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0}{\alpha} c \ln\left(1 + \frac{c}{a}\right) \\ &C = 4{,}90\,\mathrm{pF}. \end{aligned}$$

3.3 (1 pt) Valeur maximale du potentiel pour ne pas endommager le condensateur.

Le champ électrique maximal survient à $\rho = a$ et vaut :

$$\vec{E}_{max} = -\frac{V_0}{\alpha a}\hat{\phi}.$$

Le potentiel doit faire en sorte que ce champ ne dépasse pas la rigidité diélectrique du matériau :

$$\begin{aligned} E_{max} &\leq E_c \\ \frac{V_0}{\alpha a} &\leq E_c \\ V_0 &\leq \alpha a E_c = 3{,}49\,\mathrm{kV} \end{aligned}$$

Question 4 : Barreau de conductivité non uniforme (5,5 points)

4.1 (3 pts) Résistance du barreau.

Le champ à l'intérieur du barreau est produit par les électrodes. Celles-ci ayant la forme de plans infinis parallèles, on sait par symétrie que la densité de flux et que le champ électrique sont orientés horizontalement (selon $\hat{z}$) et qu'ils seront uniformes (leur valeur ne dépend pas de la position entre les électrodes). On a donc :

$$\vec{E} = E\hat{x} = \frac{V_0}{L}\hat{z}.$$

Pour calculer la résistance, il faut relier le champ électrique au courant total qui traverse le barreau. Dans un conducteur, la densité de courant est reliée au champ électrique :

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma_0 V_0}{aL}\rho\hat{z}.$$

Pour trouver le courant, il s'agit d'intégrer la densité de courant sur la section du cylindre (disque de rayon a) :

$$\begin{aligned} I &= \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma_0 V_0}{aL}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho\hat{z}\cdot\rho d\rho d\phi\hat{z} \\ I &= \frac{\sigma_0 V_0}{aL}\cdot 2\pi\frac{a^3}{3} \\ I &= \frac{2\pi a^2\sigma_0 V_0}{3L}. \end{aligned}$$

La résistance vaut enfin :

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{3L}{2\pi a^2\sigma_0}.$$

4.2 (1 pt) Densité surfacique de charges libres sur une électrode.

Le théorème de Gauss appliqué une électrode (avec une boîte à pilules de section A) nous donne :

$$\begin{aligned}
Q &= \int_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S,gauche} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S,droite} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} \\
Q &= 2D_1 A \\
\vec{D}_1 &= \frac{Q}{2A}\hat{z}.
\end{aligned}$$

En superposant la densité de flux des deux électrodes, on obtient :

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{Q}{2A}\hat{z} + \frac{Q}{2A}\hat{z} = \frac{Q}{A}\hat{z}.$$

Le champ électrique vaut alors :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{z}.$$

On peut le relier à la différence de potentiel comme suit :

$$\begin{aligned}
V_0 &= -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_L^0 \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{z} \cdot dx\hat{z} \\
V_0 &= \frac{QL}{\varepsilon_0 A},
\end{aligned}$$

La densité surfacique de charge vaut alors :

$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{L}.$$

4.3 (1,5 pt) Différence de potentiel maximale pour éviter d'endommager le barreau. Puissance dissipée.

La densité de puissance dans le barreau est donnée par :

$$p(\rho) = \frac{1}{2}\sigma E^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0 \rho}{a}\left(\frac{V_0}{L}\right)^2 = \frac{\sigma_0 V_0^2}{2aL^2}\rho.$$

La densité de puissance est maximale à la surface extérieure du barreau, à $\rho = a$. On doit donc avoir :

$$p(\rho = a) = \frac{\sigma_0 V_0^2}{2L^2} \leq p_{max}$$
$$V_0 \leq \sqrt{\frac{2L^2}{\sigma_0} p_{max}} = 4{,}08\,\mathrm{V}.$$

La puissance totale dissipée par le barreau est alors :

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{2\pi a^2 \sigma_0 V_0^2}{3L} = 838\,\mathrm{kW}.$$

BONUS (0,5 pt) Effet de la température sur la puissance dissipée.

Si la température augmente, la conductivité du barreau diminuera (sa résistivité augmentera), sa résistance augmentera et, puisque la tension demeure constante, la puissance dissipée diminuera aussi ($P = V_0^2/R$).