

6.8.3 Potentiomètre de volume

Comme l'oreille humaine possède une plage dynamique très étendue, les potentiomètres utilisés pour contrôler l'amplitude de sortie des systèmes de son doivent avoir une réponse non-linéaire pour permettre à l'utilisateur de mieux ajuster le niveau sonore à faible amplitude. La figure ci-contre illustre un potentiomètre de volume qui est formé d'un mince disque conducteur de rayon intérieur a , de rayon extérieur b et d'épaisseur d . La première section de ce disque a un angle de 45° et une conductivité élevée σ_1 pour contrôler les niveaux faibles. Un conducteur métallique horizontal est fixé à l'extrémité de cette première section. La seconde section s'étend entre 45° et 315° et possède une conductivité plus faible σ_2 . Une tige métallique peut être tournée autour de l'axe central tout en étant en contact uniforme avec la surface du disque. Cette tige mobile forme un angle α avec l'horizontale et la résistance du potentiomètre est mesurée entre la tige mobile et le conducteur horizontal. Lorsque $a = 1 \text{ cm}$, $b = 3,25 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ mm}$, $\sigma_1 = 10 \text{ S/m}$ et $\sigma_2 = 1 \text{ S/m}$, donnez l'expression de la résistance en fonction de l'angle α pour $45^\circ < \alpha < 315^\circ$?

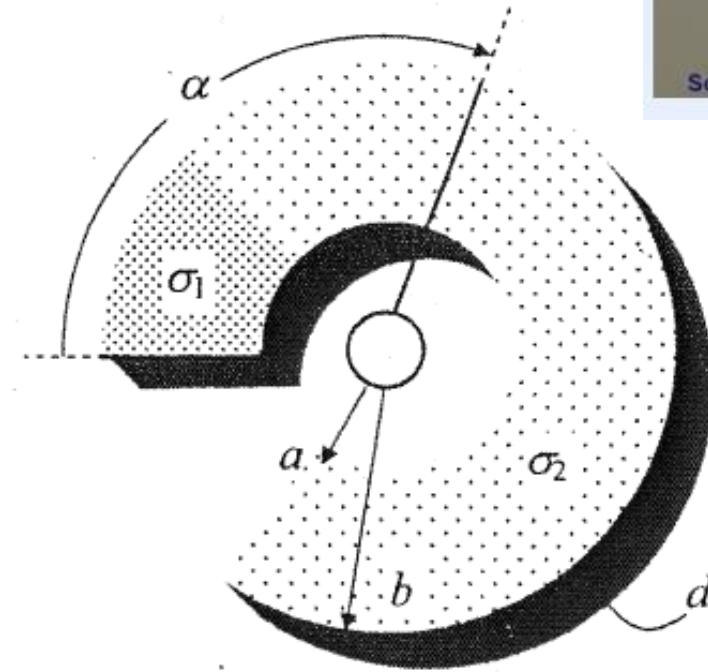
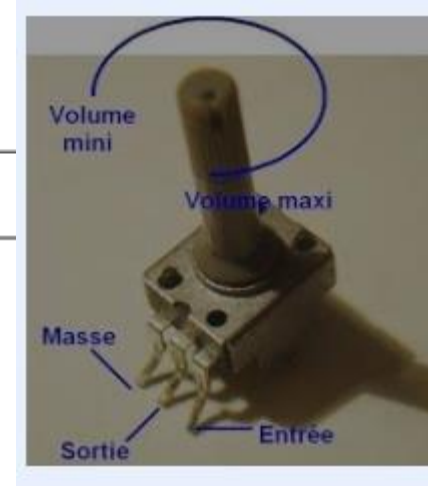


Figure 6.18 Potentiomètre



1- Symétrie: $\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$

2- Équation de Laplace: $\nabla^2 V = 0$

3- Solution: $V(\phi) = A \phi + B$

(Groupe 1: ici l'angle de rotation est négatif (sens horaire): on mettra - α pour éviter de mettre des valeurs absolues à la fin)

4- Conditions frontières: $V(\phi = 0) = 0 = A \cdot 0 + B \Rightarrow B = 0$

$$V(\phi = -\alpha) = V_\alpha = -A \alpha + B$$

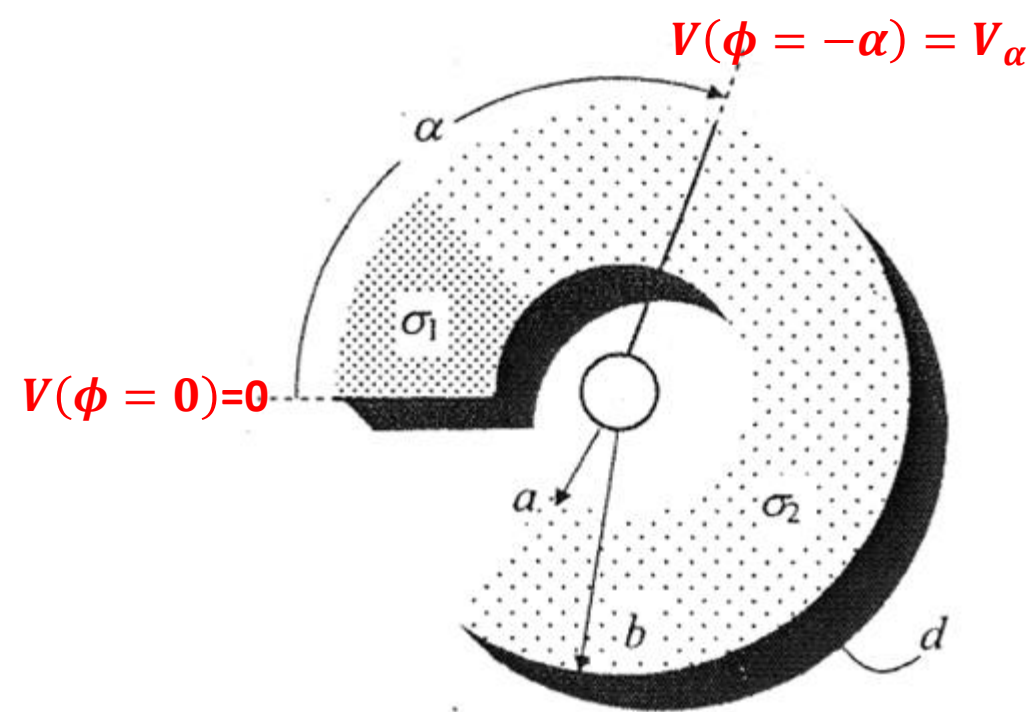
$$\Rightarrow A = -\frac{V_\alpha}{\alpha}$$

5- Solution est donc: $V(\phi) = -\frac{V_\alpha}{\alpha} \phi$

6- Le champ électrique: $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = +\frac{1}{\rho} \frac{V_\alpha}{\alpha} \hat{\phi}$

7-sachant que : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ alors $\vec{J} = \frac{\sigma V_\alpha}{\rho \alpha} \hat{\phi}$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{or} \quad d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + \rho d\rho dz \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$$



$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^d \int_a^b \frac{\sigma V_\alpha}{\rho \alpha} d\rho dz = \frac{\sigma V_\alpha d}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

8- La résistance:

$$R = \frac{V_\alpha}{I} = \frac{\alpha}{\sigma d \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$R_1 = \frac{\frac{\pi}{4}}{\sigma_1 d \ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\frac{3.14}{4}}{10 \times 10^{-3} \times \ln\left(\frac{1}{3.25}\right)} = 66,6 \, \Omega$$

$$R_2 = \frac{\alpha - \frac{\pi}{4}}{\sigma_2 d \ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\alpha - \frac{3.14}{4}}{1 \times 10^{-3} \times \ln\left(\frac{1}{3.25}\right)} = 848 \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$R = R_1 + R_2 = 66,6 + 864 \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

6.8.4 Torche à plasma

Les torches à plasma sont utilisées pour plusieurs fonctions : découpage de métaux, création de revêtements, cautérisation, etc. La figure ci-contre illustre une section longitudinale d'une torche formée d'une électrode conique tronquée ayant un angle d'ouverture α , un potentiel V_0 et dont les côtés s'étendent entre des distances a et b de la pointe virtuelle du cône; cette électrode est insérée dans une chambre métallique conique coaxiale ayant un angle interne β et un potentiel nul (l'électrode et la chambre ne sont pas en contact électrique). Un gaz de permittivité relative ϵ_r et de rigidité diélectrique E_m est injecté dans l'espace entre l'électrode et la chambre. Si le champ électrique est assez intense, un plasma peut alors être produit dans la chambre et s'échapper vers l'extérieur, à la pointe de l'électrode conique.

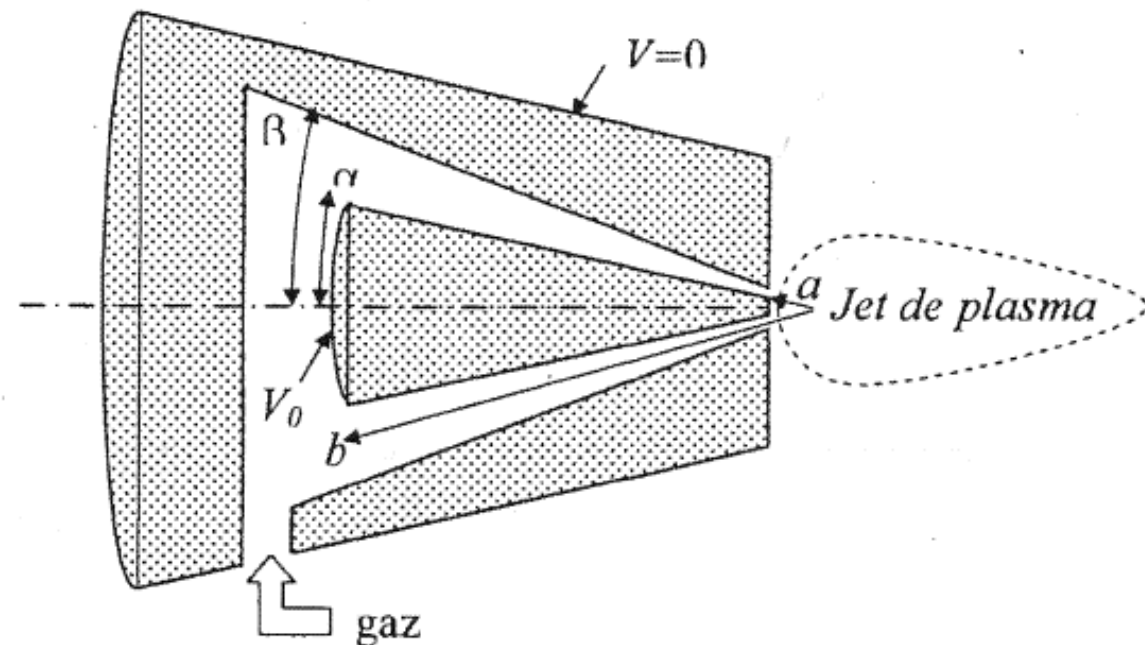


Figure 6.19

- Quelles sont les expressions décrivant les distributions de potentiel et de champ électrique dans l'espace conique entre l'électrode et la chambre s'il n'y a pas de claquage ?
- Pour les paramètres suivants : $\alpha=15^\circ$, $a=5\text{mm}$, $b=10\text{cm}$, $\beta=30^\circ$, $\epsilon_r=5$ et $E_m=200\text{kV/m}$, quelle est la valeur numérique du voltage minimum de l'électrode permettant de produire du claquage dans la chambre et ainsi amorcer le plasma ?

Plasma: fluide constitué de particules ionisées

1- Système de coordonnées sphériques: $V(r, \theta, \phi)$

2- Symétrie : $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$

3- Équation de Laplace: $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$

4- Solution: $V(\theta) = A \ln \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] + B$

5- Conditions frontières: $V(\theta = \alpha) = V_0 = A \ln \left[\tan \frac{\alpha}{2} \right] + B$ EQ(1)

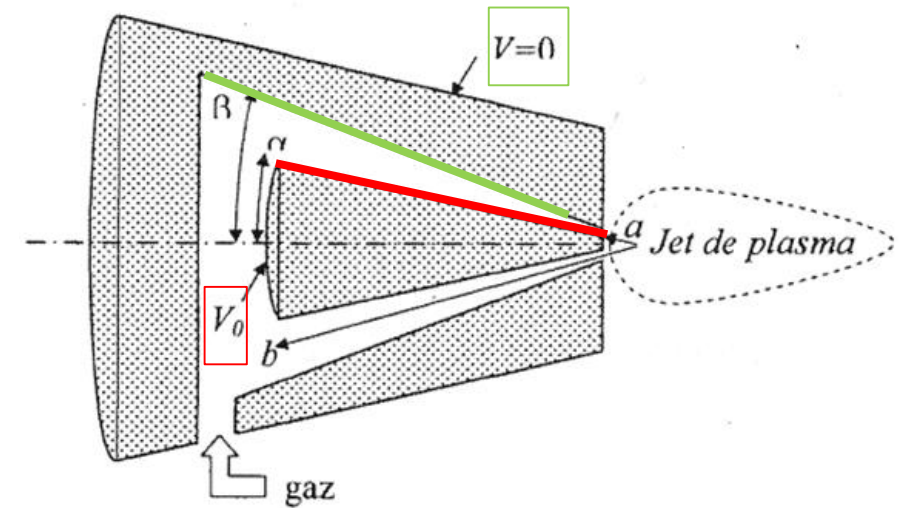
$V(\theta = \beta) = 0 = A \ln \left[\tan \frac{\beta}{2} \right] + B$ EQ(2)

EQ(1) - EQ(2) \Rightarrow

$$V_0 = A \left\{ \ln \left[\tan \frac{\alpha}{2} \right] - \ln \left[\tan \frac{\beta}{2} \right] \right\} = A \ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}$$

De EQ(2) \Rightarrow

$$B = -A \ln \left[\tan \frac{\beta}{2} \right] = -\frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \ln \left[\tan \frac{\beta}{2} \right]$$



6- Solution: $V(\theta) = A \ln \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] + B$

$$V(\theta) = \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \ln \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] + \frac{-V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \ln \left[\tan \frac{\beta}{2} \right] = \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \ln \left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]$$

$$V(\theta) = \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \ln \left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]$$

7- Le champ électrique: $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$

$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \ln \left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \right\} \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \ln \left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \right\} \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}{\left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \hat{\theta}$$

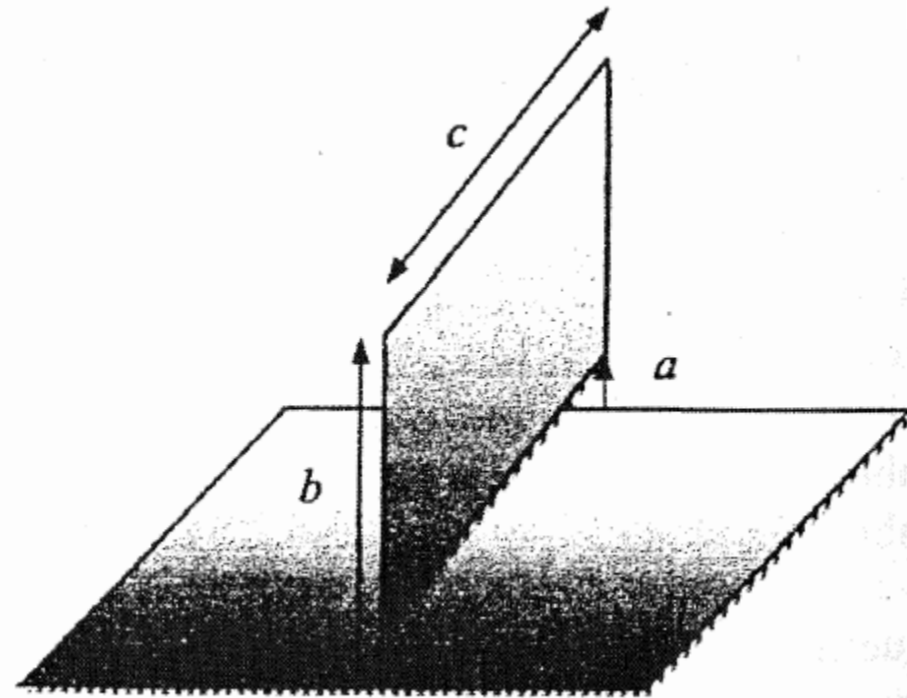
$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}{\left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{\frac{1}{\tan \frac{\beta}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\tan \frac{\theta}{2}} \hat{\theta} \\
&= -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2}} \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} \hat{\theta} = -\frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\theta} \\
&\text{(utilisez l'identité trigonométrique: } 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \sin 2 \frac{\theta}{2} = \sin \theta \text{)}
\end{aligned}$$

8- On utilise l'équation précédente; (amplitude): $E = \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{r \sin \theta} \Rightarrow V_0 = E \ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] r \sin \theta$

$$V_{0min} = E_{min} r_{min} \sin \theta_{min} \left(\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \right) = E_{min} a \sin \alpha \left(\ln \left[\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \right) = 183,92 \text{ V}$$

6.8.6 Détection de proximité

Vous concevez un système de sécurité qui permet de détecter le changement de capacité entre une clôture métallique et le sol, qui est produit par l'approche d'une personne. Cette clôture est électriquement isolée du sol qui est considéré comme un très bon conducteur. Le bas de la clôture est à une hauteur $a = 15$ cm du sol, le haut est à une hauteur $b = 1.5$ m et la clôture a une longueur $c = 25$ m. Calculer la valeur numérique de la capacité C en utilisant l'équation de Laplace.



1- Système de coordonnées cylindriques: $V(\rho, \phi, z)$

2- Symétrie: $\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0$

3- Équation de Laplace: $\nabla^2 V = 0$

4- Solution: $V(\phi) = A\phi + B$

5- Conditions frontières: $V(\phi = 0) = 0 = A \cdot 0 + B \Rightarrow B = 0$

$$V\left(\phi = \frac{\pi}{2}\right) = V_0 = A \frac{\pi}{2} + B \Rightarrow A = \frac{V_0}{\frac{\pi}{2}}$$

6- Solution: $V(\phi) = \frac{2V_0}{\pi} \phi$

7- Le champ électrique: $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\frac{2V_0}{\pi} \phi\right)}{\partial \phi} \hat{\phi} = -\frac{2V_0}{\rho\pi} \hat{\phi}$

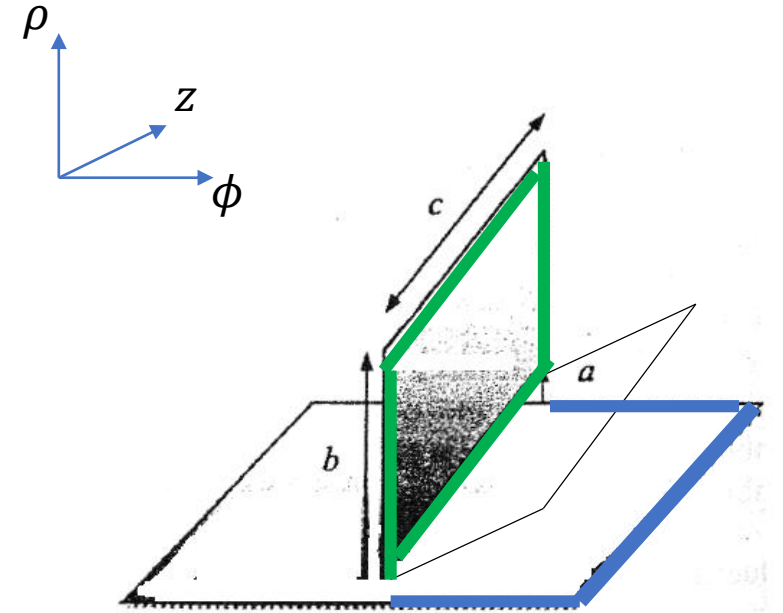
8- **Interface sol (conducteur) et air (diélectrique):**

$$D_{N,air} - D_{N,sol} = \rho_s$$

$$D_{N,air} - 0 = \rho_s \Rightarrow D_{N,air} = \rho_s$$

9- La charge:

$$Q = \iint \rho_s dS = \iint D_{N,air} dS = \iint \epsilon_0 E dS = \int_a^b \int_0^c \frac{2V_0 \epsilon_0}{\rho \pi} d\rho dz = \frac{2V_0 \epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



$$Q = \frac{2V_0\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacité:

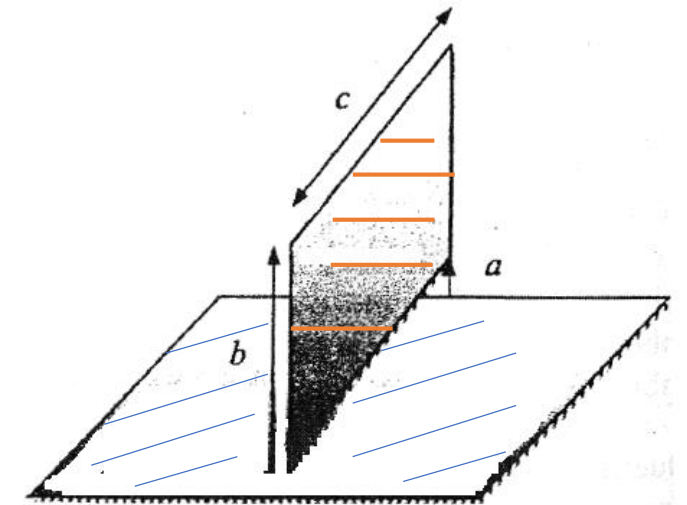
$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacité total:

Deux condensateurs en parallèle (2 points en commun):

$$C_T = \frac{2\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{2\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

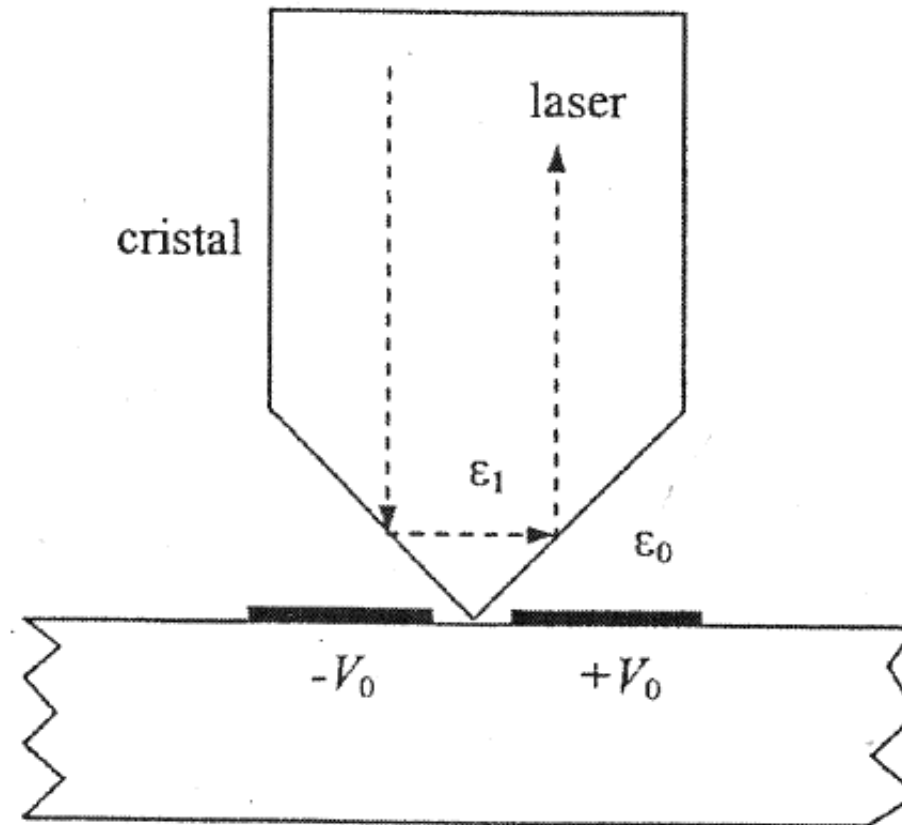
$$C_T = \frac{4\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Voir la suite pour plus d'applications de l'équation de Laplace et conditions frontières

6.7.8 Cristal biréfringent

Il est possible d'échantillonner, sans aucun contact, les signaux circulant sur les circuits imprimés à l'aide d'un cristal dont les propriétés optiques changent selon l'intensité du champ électrique interne. Ce changement de propriété est mesuré à l'aide d'un faisceau laser réfléchi à l'intérieur du cristal. À la Fig. 6.24, un cristal ayant une permittivité ϵ_1 possède des parois formant un angle de 90° , les rubans métalliques ont une largeur a et un écartement b (Fig. 6.22) et ont des potentiels $+V_0$ et $-V_0$. Quelle est la distribution du champ électrique dans l'extrémité du cristal E_1 et dans l'air voisin E_0 ? Vaut-il mieux avoir un cristal ayant une basse permittivité ou une haute permittivité?



Région 1:

$$V(\phi) = A\phi + B$$

$$V(\phi = 0) = B = V_0$$

$$V\left(\phi = \frac{\pi}{4}\right) = V_1 = A\frac{\pi}{4} + B = A\frac{\pi}{4} + V_0 \Rightarrow A = \frac{4(V_1 - V_0)}{\pi}$$

$$V(\phi) = \frac{4(V_1 - V_0)}{\pi} \phi + V_0$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = \frac{4(V_0 - V_1)}{\rho \pi} \hat{\phi}$$

Région 2:

$$V(\phi) = A\phi + B$$

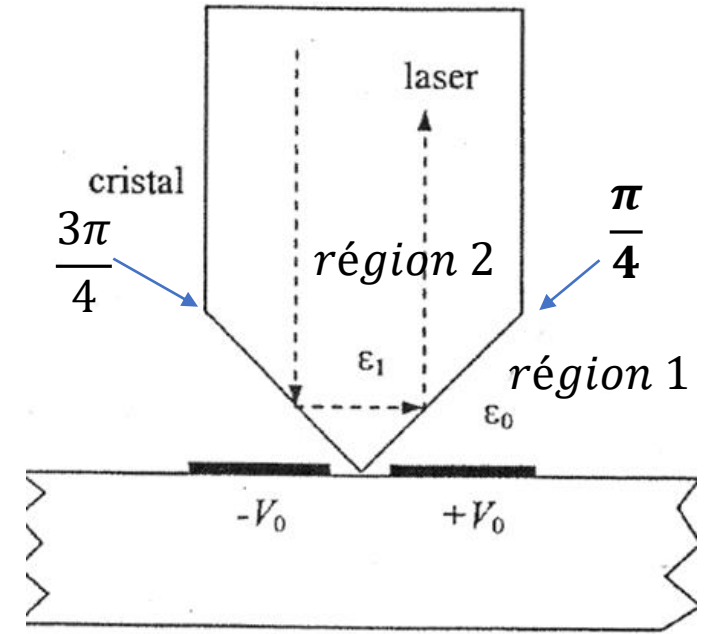
$$V\left(\phi = \frac{\pi}{4}\right) = V_1 = A\frac{\pi}{4} + B$$

$$V\left(\phi = \frac{3\pi}{4}\right) = -V_1 = A\frac{3\pi}{4} + B$$

$$\Rightarrow A = \frac{-4V_1}{\pi} \text{ et } B = 2V_1$$

$$V(\phi) = -\frac{4V_1}{\pi\rho} \phi + 2V_1$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla V = \frac{4V_1}{\pi\rho} \hat{\phi}$$



$-V_1$ (symétrie)

Condition frontière (diélectrique- diélectrique):

$$D_{1N,\varepsilon_0}^{(\alpha)} - D_{2N,\varepsilon_1}^{(\alpha)} = \rho_s = 0 \Rightarrow D_{1N,\varepsilon_0}^{(\alpha)} = D_{2N,\varepsilon_1}^{(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_1 E_2$$

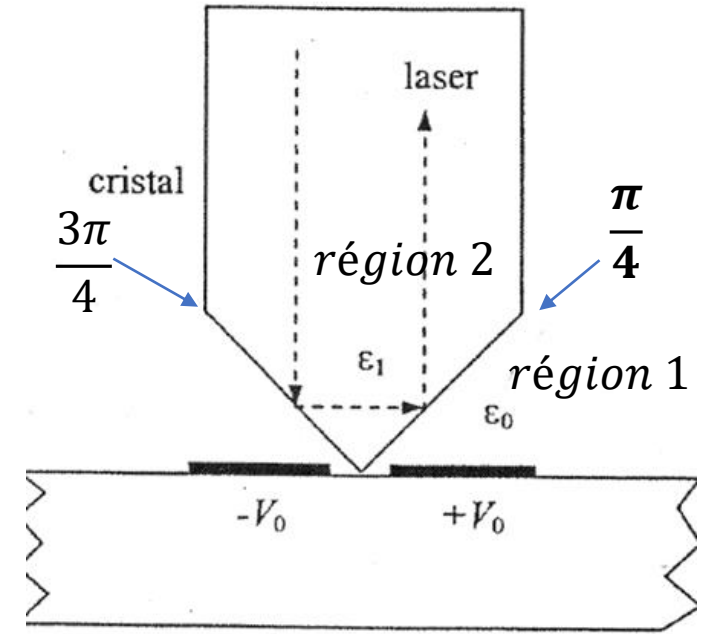
$$\Rightarrow \varepsilon_0 \frac{4(V_0 - V_1)}{\rho \pi} = \varepsilon_1 \frac{4V_1}{\pi \rho} \Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)}$$

Ainsi:

$$\vec{E}_1 = \frac{4V_0\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\rho \pi} \hat{\phi}$$

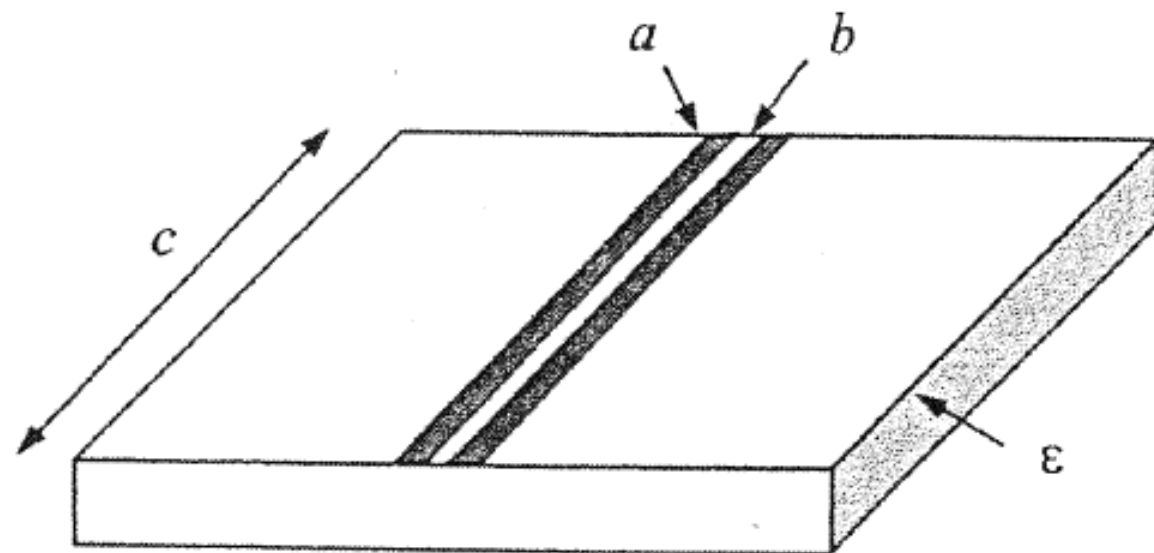
$$\vec{E}_2 = \frac{4V_0\varepsilon_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\pi \rho} \hat{\phi}$$

E_2 important pour une plus basse ε_1



6.8.7 Capacité parasite

La figure ci-contre illustre une partie d'un circuit imprimé où l'on retrouve deux rubans métalliques parallèles déposés à la surface d'un substrat diélectrique épais qui a une permittivité relative $\epsilon_r=3.5$. Chaque ruban a une longueur $c=5$ cm et une largeur $a=3$ mm. La distance entre les deux rubans est $b=1$ mm. Calculer la capacité C entre les deux rubans en utilisant l'équation de Laplace.



Symétrie du problème : Cylindrique

$$V(\phi) = A\phi + B$$

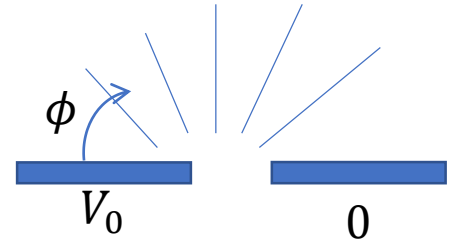
Conditions frontières:

$$V(\phi = 0) = A \cdot 0 + B = V_0$$

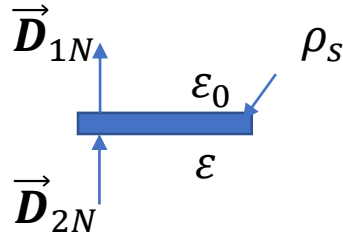
$$V(\phi = \pi) = A\pi + B = 0$$

$$V(\phi) = -\frac{V_0}{\pi} \phi + V_0 = V_0 \left(1 - \frac{\phi}{\pi} \right)$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = \frac{V_0}{\pi \rho} \hat{\phi}$$



Densité de charge:



à l'interface conducteur-diélectrique:

$$D_{1N} = \rho_s$$

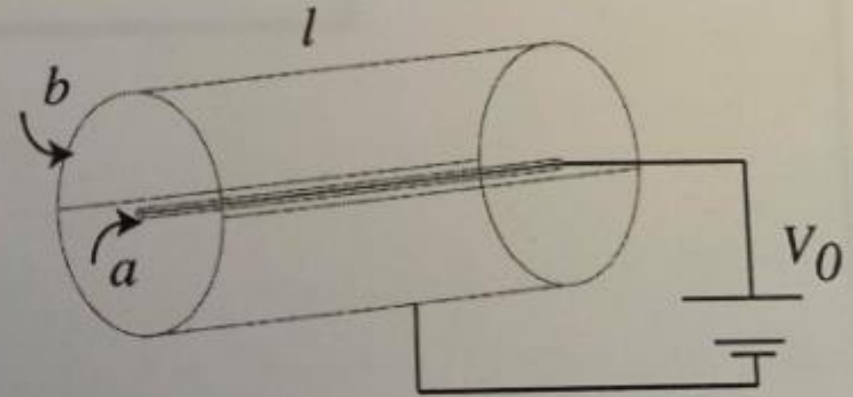
$$\rho_{s1} = D_{1N} = \epsilon_0 \frac{V_0}{\pi \rho} \Rightarrow Q_1 = \int \rho_{s1} dS = \int_{b/2}^{a+b/2} \int_0^c \frac{\epsilon_0 V_0}{\pi \rho} dz d\rho = \frac{\epsilon_0 V_0 c}{\pi} \ln \left(\frac{2a+b}{b} \right)$$

$$\rho_{s2} = D_{1N} = \frac{\epsilon V_0}{\pi \rho} \Rightarrow Q_2 = \int \rho_{s2} dS = \int_{b/2}^{a+b/2} \int_0^c \frac{\epsilon V_0}{\pi \rho} dz d\rho = \frac{\epsilon V_0 c}{\pi} \ln \left(\frac{2a+b}{b} \right)$$

La charge totale: $Q = Q_1 + Q_2 = \frac{c V_0}{\pi} \ln \left(\frac{2a+b}{b} \right) (\epsilon_0 + \epsilon) \Rightarrow C = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow \mathbf{C = \frac{c}{\pi} \ln \left(\frac{2a+b}{b} \right) (\epsilon_0 + \epsilon)}$

QUESTION 4 : Compteur de rayonnement ionisant (4,5 points)

Un compteur Geiger-Müller est un appareil servant à détecter la présence de rayonnement ionisant (particules chargées ou photons). Il est constitué d'un tube cylindrique de rayon b au centre duquel un mince fil métallique de rayon a est tendu, d'un système d'amplification et d'un système d'enregistrement du signal. Le tube, de longueur $l \gg b$ est rempli d'un gaz noble (néon, argon) sous faible pression. Le cylindre métallique extérieur est mis à la terre et le fil est porté à une tension V_0 . Quand une particule ionisante pénètre dans le compteur, elle ionise les molécules de gaz s'y trouvant en leur arrachant des électrons qui étant eux-mêmes accélérés par le champ électrique produisent une cascade d'électrons. Ces électrons, accélérés vers le fil central, produisent un signal électrique qui est amplifié et enregistré.



Le rayon du fil central est $a = 0.1$ mm et celui de la chambre cylindrique est $b = 2.5$ cm. En utilisant l'équation de Laplace, répondre aux questions suivantes.

4.1 ➤ (1.5 Pts) Écrire la fonction qui représente le potentiel électrique V dans la chambre cylindrique en tenant compte des conditions aux frontières imposées.

Question 4 : Compteur de rayonnement ionisant (4,5 points)

- 4.1 (1.5 Pt) Écrire la fonction qui représente le potentiel électrique V dans la chambre cylindrique en tenant compte des conditions aux frontières imposées.

En utilisant l'équation de Laplace, le potentiel électrique en fonction de ρ est donné par (voir page 6 du questionnaire).

$$V(\rho) = A \ln(\rho) + B \quad 0,25 \text{ pt}$$

où les constantes A et B sont fixées par les conditions aux frontières. Ici on aura que $V(b) = 0$ et $V(a) = V_0$ et donc

0,25 pt

0,25 pt

$$A \ln(b) + B = 0$$

$$A \ln(a) + B = V_0$$

d'où

$$V(\rho) = V_0 \frac{\ln(\rho/b)}{\ln(a/b)} \quad 0,25 \text{ pt}$$

4.2 (1,5 Pt) Dériver une expression pour le champ électrique \vec{E} en tout point de la chambre.
Tracer un schéma montrant la direction du champ dans la chambre.

Le champ électrique est défini par

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad 0,25 \text{ pt}$$

En coordonnée cylindrique on a que

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \quad 0,25 \text{ pt}$$

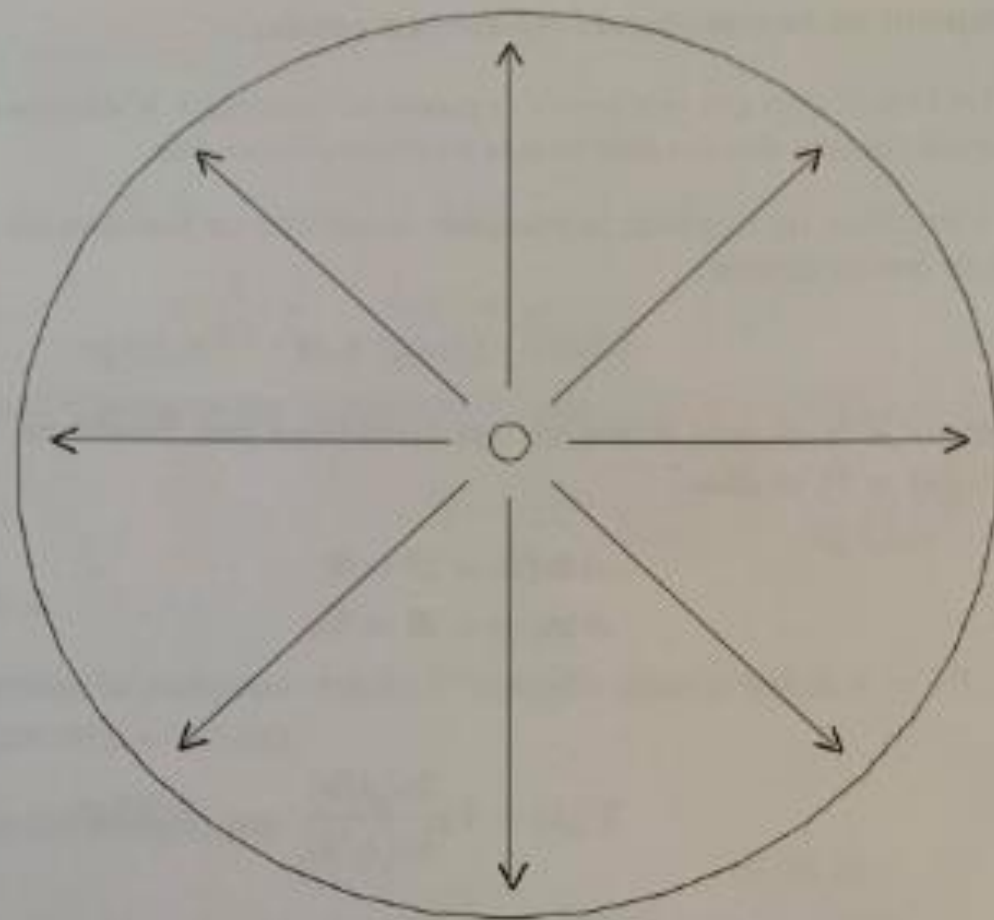
Comme V est indépendant de ϕ et z , $\partial V / \partial \phi = 0$, $\partial V / \partial z = 0$, et

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{V_0}{\rho \ln(a/b)} \quad 0,25 \text{ pt}$$

et

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{\rho \ln(a/b)} \hat{\rho} \quad 0,25 \text{ pt}$$

Les lignes de champ se dirigent donc radialement vers l'extérieur du détecteur ($a < b$ et donc $\ln(a/b) < 0$) tel qu'illustré à la figure de la page suivante.



0,5 pt

4.3 (1,5 Pt) Quelle est la tension maximale qui pourra être appliquée sur le fil central si la rigidité diélectrique du gaz présent dans la chambre est $E_{\max} = 10 \text{ MV/m}$?

La tension de claquage correspondra au potentiel pouvant être appliqué à $\rho = \rho_{\min} = a$ qui générera un champ électrique E_{\max} . On aura alors

$$V_{\text{claquage}} = |a \ln(a/b) E_{\max}| = 5,52 \text{ kV} \quad 0,75 \text{ pt}$$