PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 3	3 heures	(3.9.1, 3.9.2, 3.9.6, 3.9.9)

De Albert Einstein« La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information.»

3.9.1 Capacité d'une ligne de transmission bifilaire

Une ligne de transmission est constituée de deux conducteurs cylindriques de longueur l, de rayon a dont les centres sont séparés par une distance d dans l'air. Quelle est la capacité entre les deux conducteurs. Le rayon a est très petit par rapport à l'écartement d .

Les solutions sont rédigées Akila Hidouche et les énoncés sont du manuel

3.9.1 Capacité d'une ligne de transmission bifilaire

Voir le Td du chapitre 1 pour le calcul de Densité du flux électrique à l'extérieur d'un cylindre:

$$\vec{D}_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho\, l}\,\hat{\rho}$$

Principe de superposition:

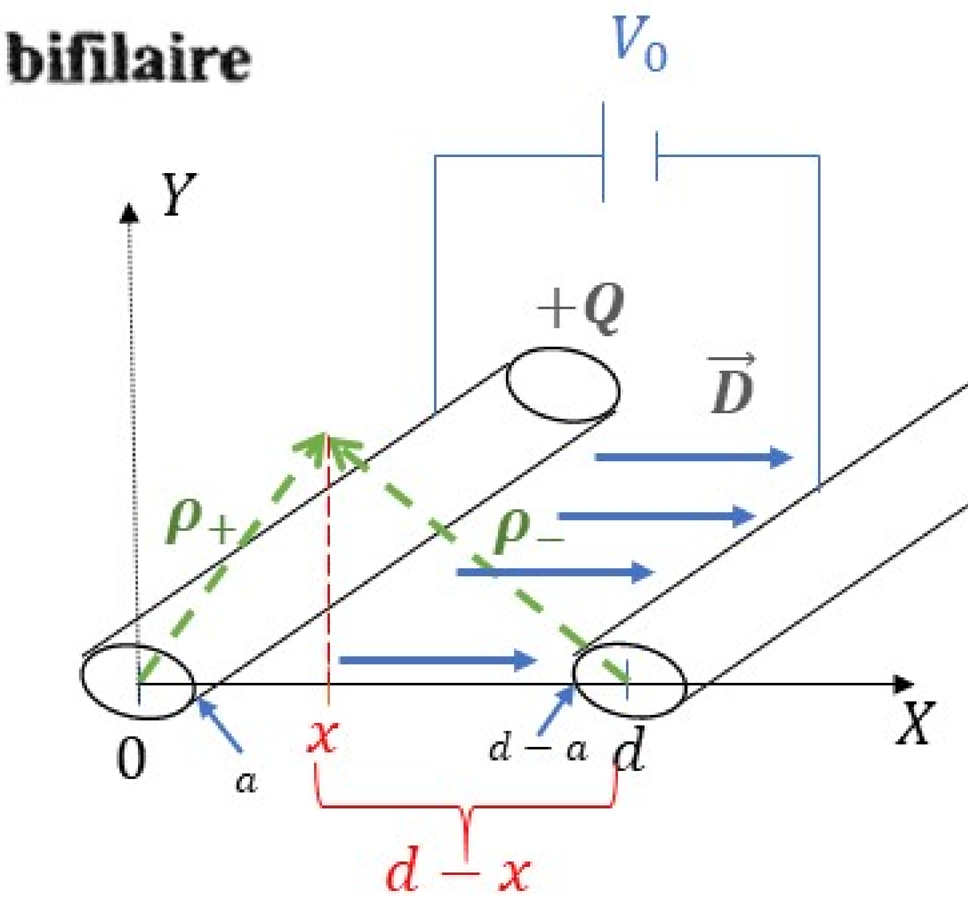
$$\vec{D} = \vec{D}_+ + \vec{D}_- = \frac{Q}{2\pi\rho_+\, l}\,\hat{\rho}_+ + \frac{-Q}{2\pi\rho_-\, l}\hat{\rho}_-$$

avec : $\rho_+ = x \quad ; \quad \hat{\rho}_+ = \hat{x} \qquad et$

$\rho_- = d - x\,; \quad \hat{\rho}_- = -\hat{x}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 x\, l}\hat{x} + \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 (d-x) l}(-\hat{x})$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right]\hat{x}$$



Différence de potentiel:

$$V_{a(d-a)} = V_a - V_{(d-a)} = V_0 = -\int_{d-a}^{a} \vec{E}.\,d\vec{x}$$

$$V_0 = -\int_{d-a}^{a} \vec{E}.\,d\vec{x} = -\int_{d-a}^{a} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right]\hat{x}.\hat{x}\, dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_{d-a}^{a}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right] dx$$

Akila H.

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_{d-a}^{a}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right]dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left\{ln\, x\Big|_{d-a}^{a} - ln(d-x)\Big|_{d-a}^{a}\right\}$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\big(ln(a) - ln(d-a) - ln(d-a) - ln(a)\big) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ [2ln(a) - 2ln(d-a)]$$

$$V_0 = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} ln\left(\frac{a}{d-a}\right) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

$$\mathrm{C} = \frac{Q}{V_0} = \frac{Q}{\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} \Longrightarrow \boxed{C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}}$$

Akila H.

PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 3	**3** heures	(3.9.1, 3.9.2, 3.9.6, 3.9.9)

3.9.2 Charges de polarisation

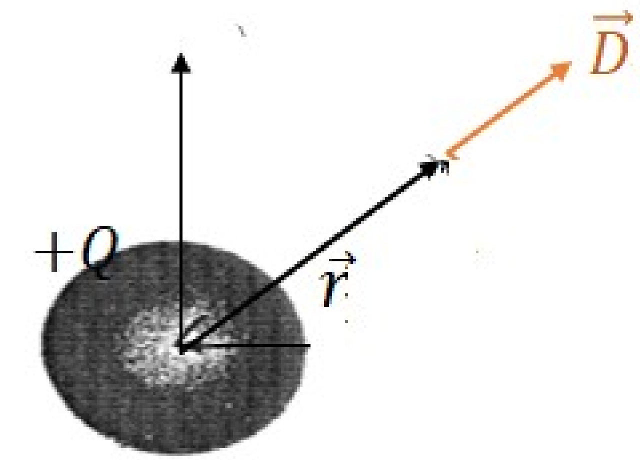
Une sphère non-conductrice de rayon R, contient une charge positive répartie selon une densité volumique $\rho_V = A\ r$, où $A = 4\ \mathrm{C/m^4}$. La permittivité relative de cette substance varie aussi en fonction du rayon selon la loi $\varepsilon_r = 1 + Br^2$, où $B = 1\ \mathrm{m^{-2}}$.

a) Établir les expressions du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

b) Déterminer la charge de polarisation induite à la surface de la sphère diélectrique.

3.9.2 Charges de polarisation

Pour une sphère:



$$\phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = Q_{in} \longrightarrow \phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = D\oint dS = D\ 4\pi r^2 \Longrightarrow D = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \Longrightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2}\ \hat{r}$$

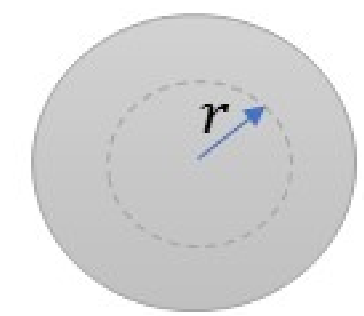
avec:

$$Q_{in} = \int \rho_V\, dV = \int \rho_V\, r^2 \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi$$

À l'intérieur de la sphère:

$$Q_{in} = \int \rho_V\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} A\, r\,(r^2 \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta \int_0^{r} r^3 dr = A\pi r^4$$

$$\rightarrow \qquad \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2}\ \hat{r} = \frac{A\pi r^4}{4\pi r^2}\ \hat{r} \Leftrightarrow \vec{D} = \frac{Ar^2}{4}\hat{r} \quad et \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = \frac{Ar^2}{4\ \varepsilon_o(1+\beta r^2)}\hat{r}$$



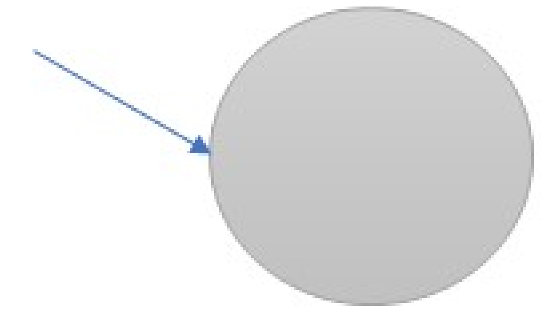
À l'extérieur de la sphère:

$$Q_{in} = \int \rho_V\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} A\, r\,(r^2 \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta \int_0^{R} r^3 dr = A\pi R^4$$

$$\rightarrow \qquad \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2}\ \hat{r} = \frac{A\pi R^4}{4\pi r^2}\ \hat{r} \Leftrightarrow \vec{D} = \frac{AR^4}{4r^2}\hat{r} \quad et \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = \frac{AR^4}{4r^2 \varepsilon_o}\hat{r}$$

Akila H.

La charge de polarisation induite à la surface du diélectrique $(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R})$:



$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\rho_{si}} = \frac{Q_{si}}{4\pi R^2}$$

$$Or: \quad \vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{\mathcal{P}} \quad \Longrightarrow$$

$EN\ SURFACE$: $\vec{D}$(à $l'intérieur\ pour\ r = R) = \vec{D}$(à l'extérieur$pour\ r = R)$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon_o \vec{E}_{diel}(r = R) + \vec{\mathcal{P}}(r = R) = \varepsilon_o \vec{E}_{ext}(r = R) + \vec{\mathcal{P}}(ext)$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_o \frac{AR^2}{4\ \varepsilon_o(1 + \beta R^2)} + \frac{Q_{si}}{4\pi R^2} = \varepsilon_o \frac{AR^4}{4R^2 \varepsilon_o} + 0$$

$$\boxed{\Longrightarrow \quad \boldsymbol{Q_{si}} = \frac{\boldsymbol{4\pi R^6}}{(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{R^2})}}$$

PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 3	**3** heures	(3.9.1, 3.9.2, 3.9.6, 3.9.9)

3.9.6 Modification d'un condensateur

La superficie d'une armature d'un condensateur plan est de 0,12 m^2; l'écartement entre les armatures est de 1,2 cm. Une pile charge les armatures jusqu'à une différence de potentiel de 120 V; elle est ensuite débranchée. On place symétriquement entre les armatures un diélectrique de 0,4 cm d'épaisseur ayant une permittivité relative de 4,8. Calculez la capacité :

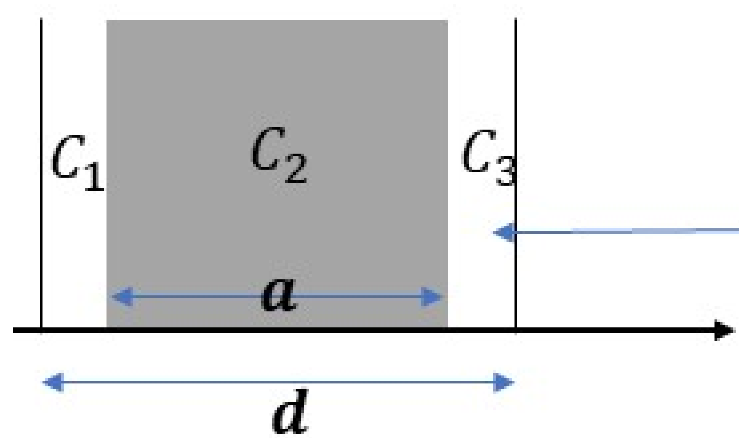
a) Avant l'introduction du barreau;
b) Après l'introduction du barreau.
c) Quelle est la valeur de la charge libre Q avant et après l'introduction du barreau ?
d) Déterminez le champ électrique dans l'espace entre les armatures et le diélectrique.
e) Quel est le champ électrique dans le diélectrique ?
f) Quelle est la différence de potentiel entre les armatures en présence du diélectrique ?
g) Quel est le travail accompli durant l'introduction du barreau ?
h) Quelle est la charge induite Q_i sur chaque face du diélectrique ?

a) **Avant d'introduire le diélectrique:**

$$\boldsymbol{C_O} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_o S}}{\boldsymbol{d}} = \frac{8{,}854 \times 10^{-11} \times 0{,}12}{1{,}2 \times 10^{-2}} = 8{,}85 \times 10^{-11}\mathrm{F}$$

b) **Après l'introduction du diélectrique:**

Le systeme est équivalent à trois condensateurs branchés série: $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3} \Rightarrow C = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}}$



$$C_1 = C_3 = \frac{\varepsilon_o S}{\dfrac{(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a})}{\boldsymbol{2}}} \qquad \boldsymbol{et} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{a}$$

et donc: $C = \dfrac{1}{\dfrac{2}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} = \dfrac{1}{\dfrac{2\dfrac{(d-a)}{2}}{\varepsilon_o S} + \dfrac{a}{\varepsilon_o \varepsilon_r S}} = \dfrac{\varepsilon_o S}{d - a + \dfrac{a}{\varepsilon_r}} = \boldsymbol{1,20 \times 10^{-10}\, F}$

c) **La charge libre: Conservation de la charge:**

$$Q_{avant} = Q_{apres} = Q = \boldsymbol{C_O} V_o = 8{,}85 \times 10^{-11} \times 120 = 1{,}06 \times 10^{-8} C$$

d) Le champ électrique (voir notes de cours et j'ai montré la démarche en TD):

$$\vec{D} = \frac{Q}{S}\hat{x} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{S\varepsilon}\hat{x} = \frac{Q}{S\varepsilon_o\varepsilon_r}\hat{x} & pour \quad r < R \\ \vec{E} = \frac{\vec{D}}{S\varepsilon_o} & pour \quad r > R \end{cases}$$

e) Le champ électrique dans le diélectrique:

$$\vec{E} = \frac{Q}{S\varepsilon_o\varepsilon_r}\hat{x} = 2{,}08 \quad \hat{x} \quad \left(\frac{kV}{m}\right)$$

f) Le potentiel électrique avec diélectrique:

$$Q_{avant} = Q_{apres} = \boldsymbol{C_o}V_o = CV_{od} \Longrightarrow V_{od} = \frac{\boldsymbol{C_o}V_o}{C} = \frac{Q}{\frac{\varepsilon_o S}{d - a + \frac{a}{\varepsilon_r}}} = 88{,}34\, V$$

g) Travail accompli durant l'introduction du diélectrique:

$$\boldsymbol{W_{ext} = \Delta K + \Delta U = 0 + U_{avec\, dielectrique} - U_{sans} = \frac{Q}{2}(V_{od} - V_o) = -1,67 \times 10^{-7} J}$$

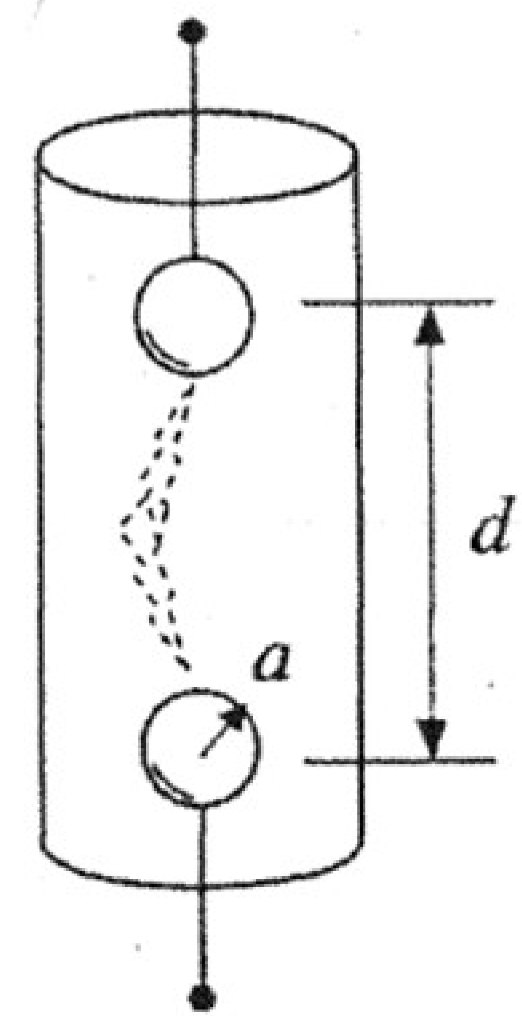
h) Charge sur la surface du diélectrique: $\boldsymbol{Q_i = \rho_{si} S = \mathcal{P}\, S = (D - \varepsilon_o E)S = \left(D - \varepsilon_o \frac{D}{\varepsilon_o\varepsilon_r}\right)S = DS\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$

$$\boldsymbol{Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = 8,41 \times 10^{-9} C}$$

PHS1102 – Champs électromagnétiques

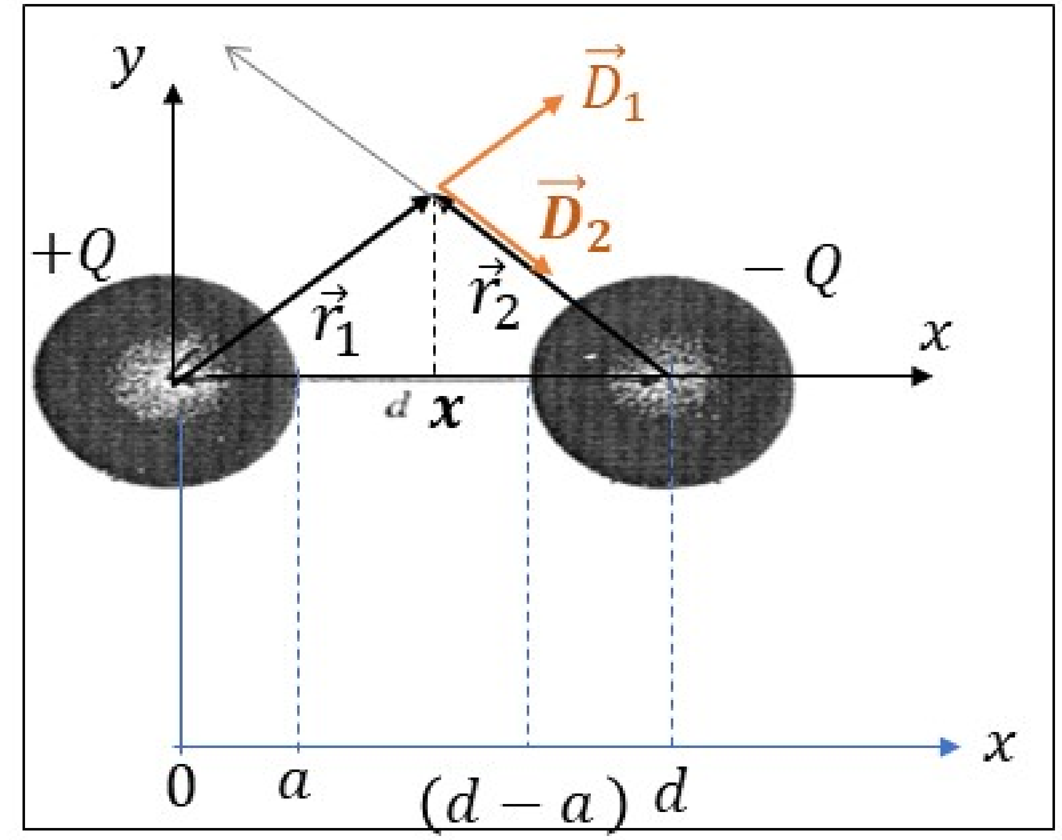
Séance 3	**3** heures	(3.9.1, 3.9.2, 3.9.6, 3.9.9)

3.9.9 Éclateur



Un éclateur est un dispositif non-linéaire destiné à protéger un circuit contre une surtension. Par exemple, on l'utilise entre une antenne et un récepteur radio pour protéger celui-ci contre la foudre. L'éclateur est formé de deux sphères conductrices de rayon a dont les centres sont séparés par une distance d. Les sphères sont situées dans un gaz dont la rigidité diélectrique est égale à E_c. Lorsque la différence de potentiel excède une valeur critique V_{max}, le gaz s'ionise et court-circuite les deux sphères qui cessent alors de se comporter comme un circuit ouvert. Donner l'expression de V_{max}. On suppose que la distribution des charges est uniforme sur les sphères parce que leur rayon est beaucoup plus petit que leur écartement.

Voir TD1 pour le calcul du champ électrique pour deux sphères conductrices, et TD2 pour l'expression du potentiel électrique.
On avait trouvé les expressions suivantes:



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right]\hat{x}$$

$$V_{a(d-a)} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(d-a)}\right]$$

$$E\ est\ \max \Longrightarrow \frac{dE}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right] = 0 \ \Longrightarrow -\frac{2x}{x^4} - \frac{2(-1)(d-x)}{(d-x)^4} = 0$$

$$\Longrightarrow -(d-x)^3 + x^3 = 0$$

$(d-a)$ et a sont des solutions et donc E_c *est atteint* à *la surface interne des* sphères $\quad E_c = E(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(d-a)^2}\right]$

$$\frac{E_c}{V_{a(d-a)}} = \frac{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(d-a)^2}\right]}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(d-a)^2}\right]} = \frac{(d-a)^2 + a^2}{2(d-2a)a(d-a)} \simeq \frac{1}{2a} \qquad pour\ d \gg a$$