– PHS1102 –
Champs électromagnétiques

Chapitre 2

Différence de potentiel

Potentiel d'une charge ponctuelle

Potentiel d'une distribution de charge

Champ électrostatique conservatif

Potentiel et champ électrique (gradient)

Énergie emmagasinée dans le champ électrique

Objectifs de la semaine

Différence de potentiel	• **Calculer la différence de potentiel entre deux points à partir du champ électrique.**
Potentiel d'une charge ponctuelle et d'une distribution de charge	• Calculer le potentiel dû à un ensemble de charges ponctuelles ou à une distribution de charge.
Champ $\vec{E}$ conservatif	• Expliquer pourquoi $\vec{E}$ est un champ conservatif en électrostatique. • Démontrer qu'un champ $\vec{E}$ donné est conservatif.
Potentiel et champ électrique	• **Calculer le champ électrique $\vec{E}$ à partir d'un potentiel connu.**
Énergie emmagasinée dans le champ électrique	• **Calculer l'énergie emmagasinée dans un champ électrique $\vec{E}$ connu.**

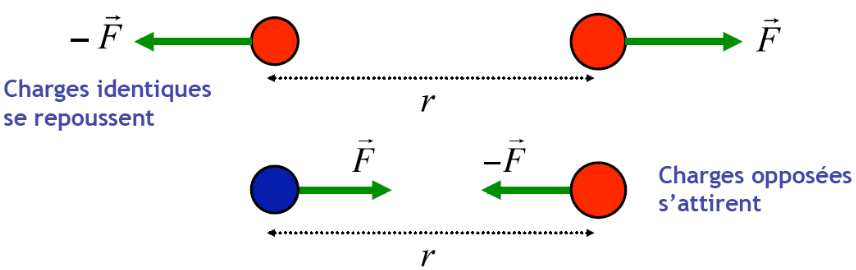
Une analogie entre deux forces de la nature...

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Loi de Coulomb
Force électrique entre deux particules

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Champ électrique
Produit par une charge ponctuelle

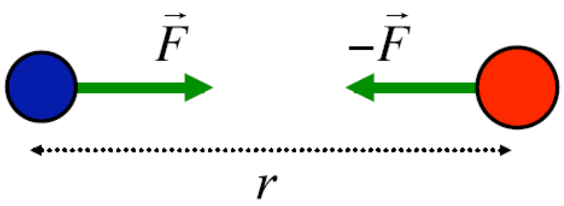


Loi de la gravitation
Force entre deux particules ayant une masse

$$\vec{F} = \frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

Champ gravitationnel
Produit par une charge ponctuelle

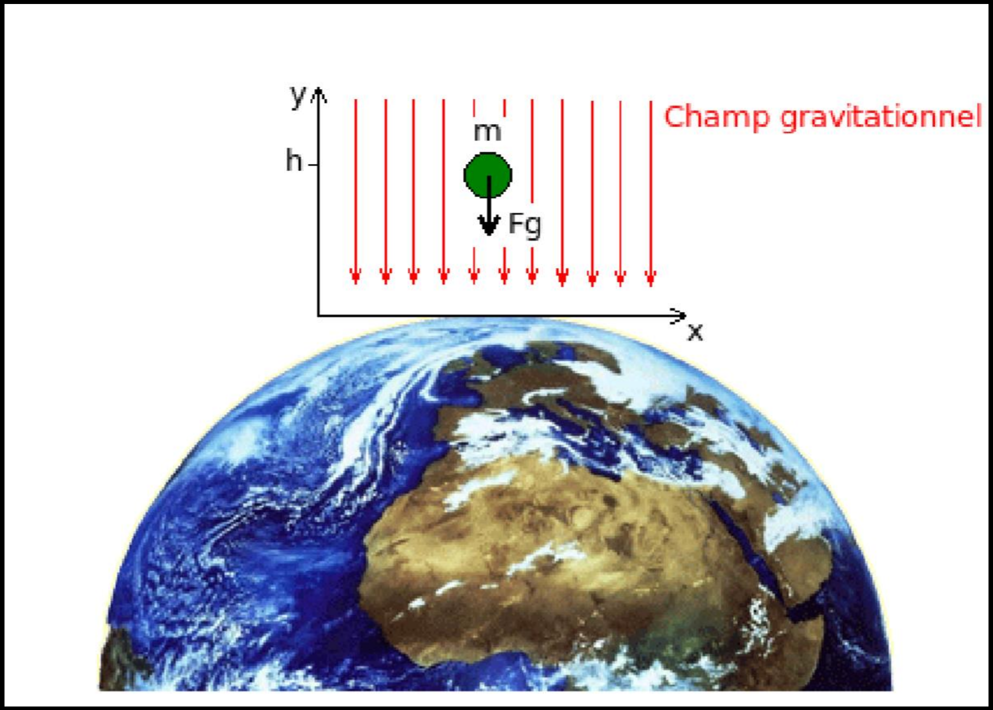
$$\vec{E} = \frac{GM}{r^2}\hat{r}$$



Les deux forces décroissent avec le carré de la distance, mais contrairement à la force électrique, la force gravitationnelle est seulement attractive.

Avec cette analogie, il est possible de réutiliser certains concepts qui ont été développés dans le cadre de la mécanique...

Énergie potentielle et énergie cinétique



- **Énergie cinétique** : énergie associée au mouvement ;
- **Énergie potentielle** : énergie emmagasinée dans un champ qui peut servir à faire un travail (donner de l'énergie cinétique à un corps) ;
- **L'énergie potentielle est mesurée par rapport à une référence.**

Travail effectué par la force électrique
(charge ponctuelle)

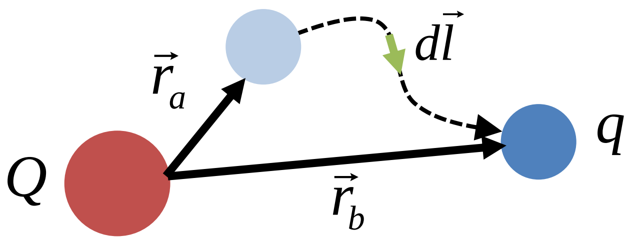
On considère le déplacement d'une charge q soumise au champ électrique d'une autre charge Q située à l'origine.

RAPPEL
Définition du travail

$$W_{a\to b} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Soit $\vec{r}_a$ et $\vec{r}_b$ les positions initiale et finale de la charge q.
Le travail effectué par la force électrique est alors :

$$W_{a\to b} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l}$$



Le champ de la charge Q a une symétrie sphérique : on utilise donc les coordonnées sphériques pour calculer l'intégrale.

Quelle est l'expression du vecteur $d\vec{l}$?

Rappels sur la notation vectorielle

On peut utiliser plusieurs **systèmes de coordonnées** pour décrire un même vecteur (une force, par exemple).

Sphérique :

$$\vec{F}(r,\phi,\theta) = F_r\hat{r} + F_\phi\hat{\phi} + F_\theta\hat{\theta}$$

Annexe 4 du polycopié

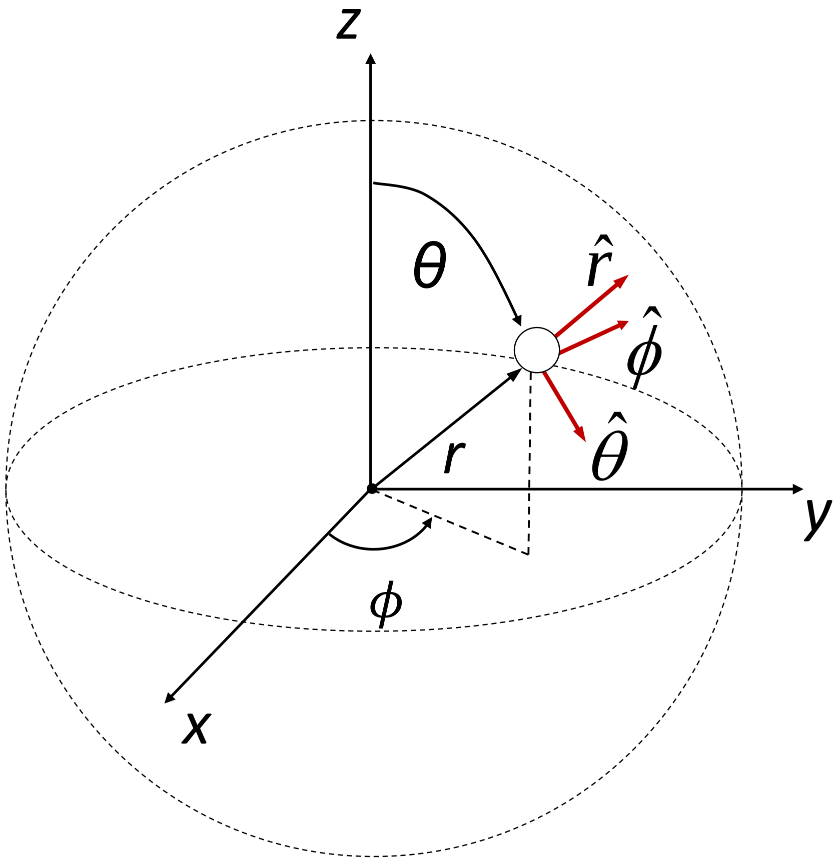
$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$$

Base orthonormée

$$\hat{r}\cdot\hat{r} = 1 \qquad \hat{\theta}\cdot\hat{r} = 0 \qquad \hat{\phi}\cdot\hat{r} = 0$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0 \qquad \hat{\theta}\cdot\hat{\theta} = 1 \qquad \hat{\phi}\cdot\hat{\theta} = 0$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\phi} = 0 \qquad \hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = 0 \qquad \hat{\phi}\cdot\hat{\phi} = 1$$



Travail effectué par la force électrique
(charge ponctuelle)

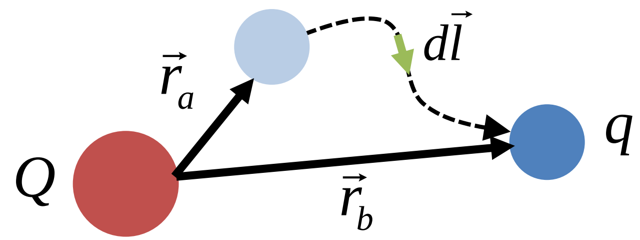
RAPPEL
Définition du travail

$$W_{a\to b} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

On considère le déplacement d'une charge q soumise au champ électrique d'une autre charge Q située à l'origine.

Soit $\vec{r}_a$ et $\vec{r}_b$ les positions initiale et finale de la charge q.
Le travail effectué par la force électrique est alors :

$$W_{a\to b} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \frac{1}{r^2}\,\hat{r}\cdot d\vec{l}$$



Le champ de la charge Q a une symétrie sphérique : on utilise donc les coordonnées sphériques pour calculer l'intégrale.

Quelle est l'expression du vecteur $d\vec{l}$?

Annexe 4 du polycopié

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$$

Base orthonormée

$$\hat{r}\cdot\hat{r} = 1 \quad \hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0 \quad \hat{r}\cdot\hat{\phi} = 0$$

$$W_{a\to b} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_a}^{r_b}$$

Travail fait par la force électrique
(deux charges ponctuelles)

$$\boxed{W_{a\to b} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)}$$

Est-ce que la force électrique est conservative ? Si oui, quelle quantité peut-on introduire ?

Énergie potentielle électrique
(charge ponctuelle)

Puisque le travail fait par la force électrique ne dépend que des positions initiales et finales (et non pas du chemin parcouru), **la force électrique est une force conservative.**

On peut alors **définir l'énergie potentielle électrique** d'une charge q située à une distance r d'une autre charge Q.

$$\boxed{U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

En joule [J]

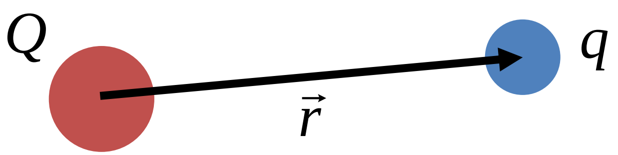
N.B. Vérifiez que cette définition respecte les définitions (en gris).

RAPPEL
Définition de l'énergie potentielle

$$\Delta U_{a\to b} = U_b - U_a = -W_{a\to b}$$

Travail (force électrique)

$$W_{a\to b} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$



Remarque
Il faut toujours une référence $U = 0$ pour calculer l'énergie potentielle.
Pour une charge ponctuelle, la référence $U = 0$ se trouve à $r \to \infty$.

$$U = q\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Comme pour la force électrique, on peut décomposer U en deux termes : l'un dépend de la charge q dont on calcule l'énergie tandis que l'autre dépend de la charge Q qui produit le champ.

La quantité en vert porte un nom bien précis…

Potentiel électrique

(distribution de charges ponctuelles)

On définit le **potentiel électrique** en suivant un raisonnement analogue à celui qui a été utilisé pour définir le **champ électrique**. Ici, on utilise le **principe de superposition** pour définir le potentiel d'un ensemble de charges ponctuelles.

Force électrique

$$\vec{F} = q\sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

En newton [N]

Champ électrique

$$\vec{E} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

En volt/mètre [V/m]

Relation entre force et champ

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Énergie potentielle électrique

$$U = q\sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

En joule [J]

Potentiel électrique

$$\boxed{V = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

En volt [V]

Relation entre énergie potentielle et potentiel

$$\boxed{U = qV}$$

Remarques

1. La référence $V = 0$ du potentiel pour une charge ponctuelle est prise à $r \to \infty$;
2. La distance r_i est la distance entre la charge Q_i et le point où l'on veut calculer la quantité d'intérêt (force, champ, potentiel ou énergie potentielle).

Potentiel d'une distribution de charge

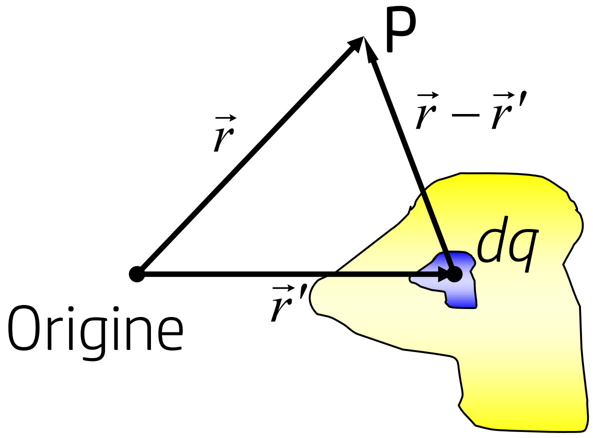
Comme pour le champ électrique, on utilise le principe de superposition pour déterminer le potentiel dû à une distribution de charge continue.

Potentiel produit par un ensemble de charges ponctuelles

$$\boxed{V(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}}$$

$\vec{r}$: position du point où l'on calcule V

$\vec{r}_i$: position de la charge Q_i



En volt [V]

Potentiel produit par une distribution de charge

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Omega \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dq}$$

$\vec{r}$: position du point où l'on calcule V

$\vec{r}'$: position de la charge dq

Ω : domaine d'intégration

Rappel sur la densité de charge

Selon le domaine d'intégration, on a :

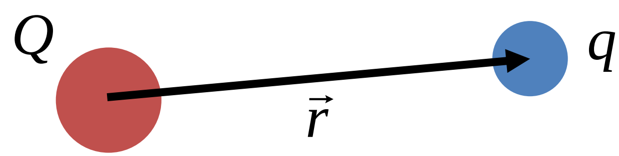
1. Ligne (1D) : $dq = \rho_l dl$
2. Surface (2D) : $dq = \rho_S dS$
3. Volume (3D) : $dq = \rho_V dV$

Exemple – Énergie potentielle

Deux charges Q et q de masses respectives M et m sont maintenues immobiles à une distance d l'une de l'autre. On lâche la charge q qui est ensuite libre de bouger. Quelle sera la vitesse de la charge q lorsqu'elle sera loin de la charge Q ? On néglige tout frottement.

Information connue

1. Valeurs des charges et des masses ;
2. Distances initiale (d) et finale ($r \to \infty$) entre les charges.



Que cherche-t-on ?

La vitesse de la charge q à $r \to \infty$; La vitesse de la charge est reliée à son énergie cinétique.

Stratégie de résolution

La force électrique étant conservative, il y a **conservation de l'énergie** de la charge q.

$$E = T + U = \text{cste}$$

$$qV_1 = \frac{1}{2}mv^2 + qV_2$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} \qquad V_2 = \lim_{r\to\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2q(V_1 - V_2)}{m}} = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 md}}}$$

C'est la différence de potentiel $\Delta V = V_2 - V_1$ qui est importante du point de vue physique.

Différence de potentiel (tension)

La valeur absolue du potentiel n'a pas de sens physique. C'est plutôt la **variation du potentiel** qui est importante, puisqu'elle est reliée au **champ électrique**. En effet :

$$U = qV$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\Delta U_{a\to b} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$\Delta U_{a\to b} = q\Delta V_{a\to b}$$

$$\Delta U_{a\to b} = -q\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

En volt [V]

$$\boxed{\Delta V_{a\to b} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

Différence de potentiel (tension) entre deux points

L'équation ci-dessus permet de calculer la différence de potentiel entre deux points si l'on connaît le champ électrique dû à la distribution de charge.

Notation du polycopié

Le polycopié utilise la notation $V_{ba} = -\int_{ab} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ qui se lit « différence de potentiel de b par rapport à a ». On a $V_{ba} = \Delta V_{a\to b}$ avec la notation ci-haut.

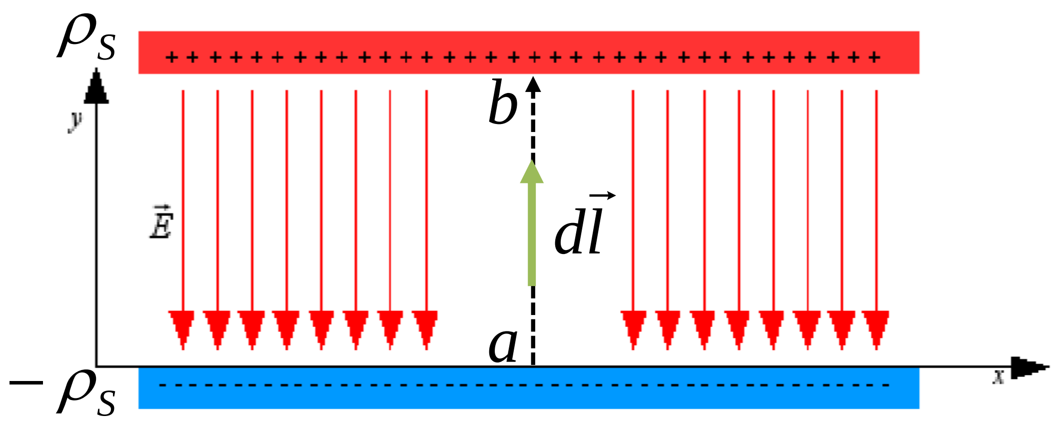
Exemple – Condensateur plan

Le milieu entre les plaques est le vide.
La distance entre les plaques est d.
La surface S des plaques est grande devant d : effets de bord négligeables.

Nous savons du chapitre 1 que :

$$\vec{D} = -\rho_S \hat{y} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\hat{y} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\hat{y}}$$



Quelle est la différence de potentiel entre les plaques du condensateur ?

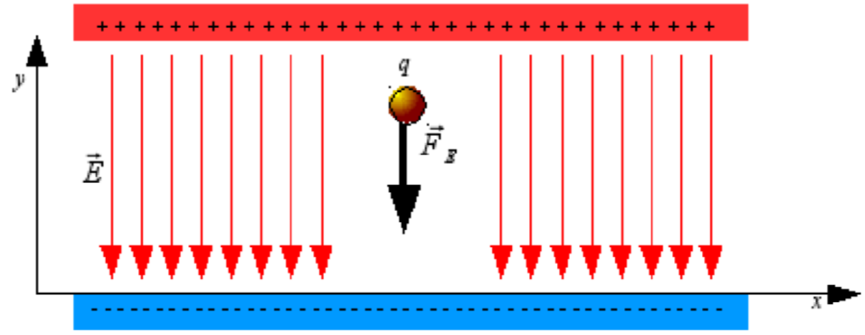
Puisque le champ est conservatif, le résultat ne dépend pas du chemin suivi. On choisit donc le chemin le plus simple : une ligne droite qui part de la plaque du bas et qui se termine sur la plaque du haut.

$$V_{ba} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^d \left(-\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\hat{y}\right)\cdot(dy\hat{y}) = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\int_0^d dy \Rightarrow \boxed{V_{ba} = \frac{\rho_S d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}}$$

Quiz – Condensateur plan

$$\vec{E} = -\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\hat{y}$$

$$V_{ba} = \frac{\rho_S d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$



1. Où le potentiel est-il le plus faible ?
   Où est-il le plus élevé ?

   Le potentiel diminue dans la direction du champ électrique.

   Plus faible : plaque négative
   Plus élevé : plaque positive.

2. Quelle force f faut-il exercer sur une particule de charge q pour la déplacer à vitesse constante de la plaque négative vers la plaque positive ?

   Vitesse constante : $\sum F_y = f - qE = 0$ ➡ $\boxed{f = \frac{qQ}{\varepsilon_0 S}}$

3. En se déplaçant vers la plaque positive, qu'arrive-t-il à l'énergie potentielle de la particule ?

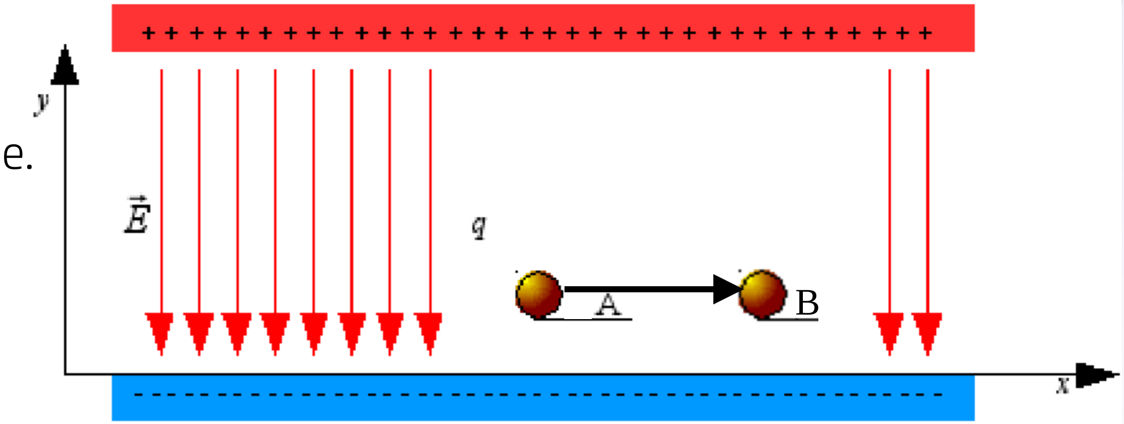
   $$\Delta U = q\Delta V$$

   Charge positive (ex : proton) : l'énergie augmente
   Charge négative (ex : électron) : l'énergie diminue

Surfaces équipotentielles

Quelle force f faut-il exercer sur la charge pour la déplacer horizontalement (de A à B) à vitesse constante ?

Puisque le champ est vertical et que $\vec{F} = q\vec{E}$, alors les plaques n'exercent aucune force horizontale sur la charge.



Aucune force f horizontale n'est requise pour déplacer la charge de A à B à vitesse constante!

En se déplaçant horizontalement, la charge se déplace sur une **surface équipotentielle où le potentiel est constant**. Sur une équipotentielle, l'énergie potentielle électrique reste constante, ce qui implique que **la force électrique ne fait pas de travail sur la charge**.

Équipotentielles d'un condensateur plan

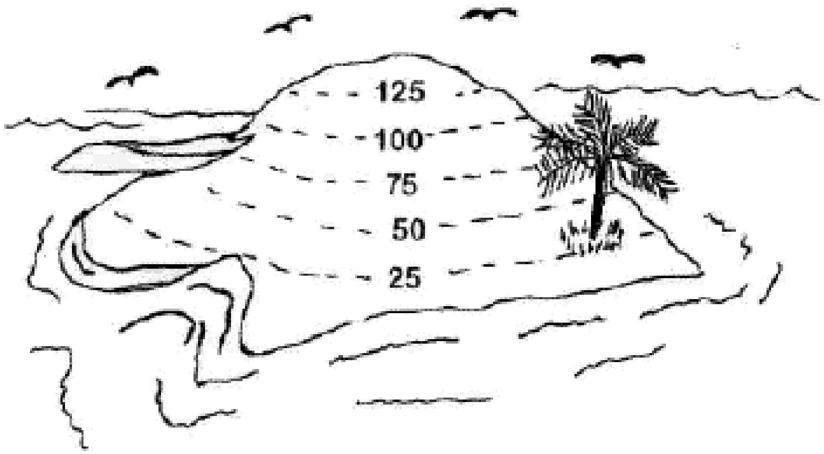
Potentiel en fonction de y
($V = 0$ sur la plaque du bas)

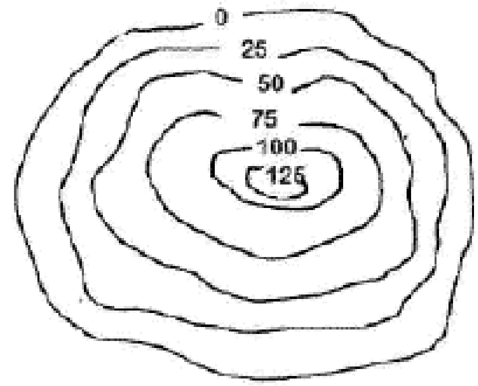
$$V(y) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} \int_0^y dy = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} y$$

Les équipotentielles $V = \text{cste}$ du condensateur plan sont les surfaces $y = \text{cste}$ parallèles aux plaques du condensateur.

Surfaces équipotentielles

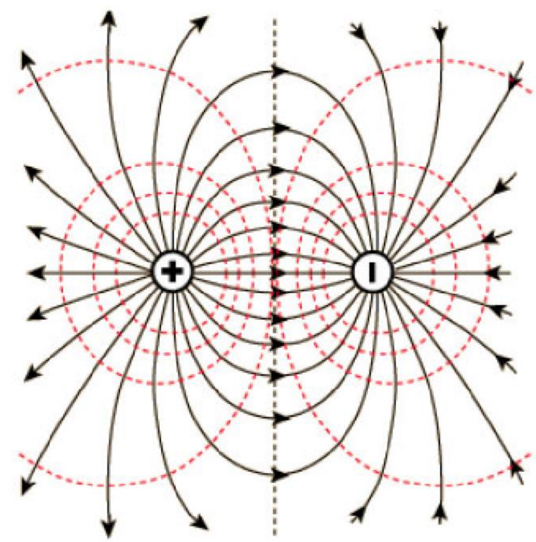
Surfaces équipotentielles (champ gravitationnel)





Aucun travail n'est requis pour se déplacer sur une équipotentielle à vitesse constante.

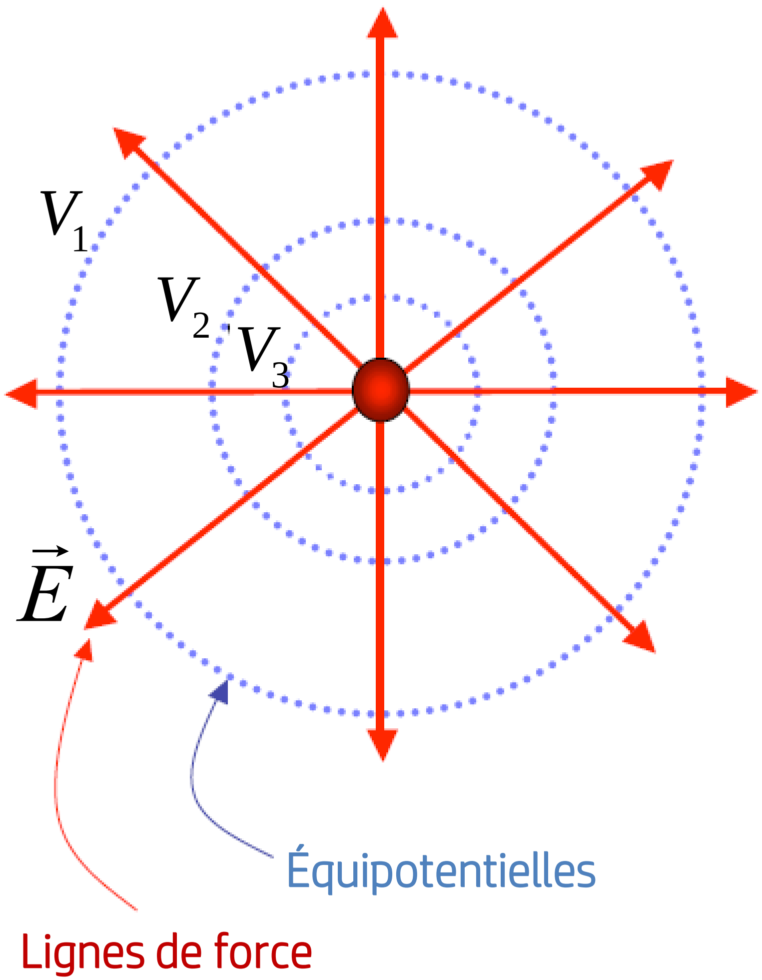
Quelle est la relation entre les lignes de force et les équipotentielles ?

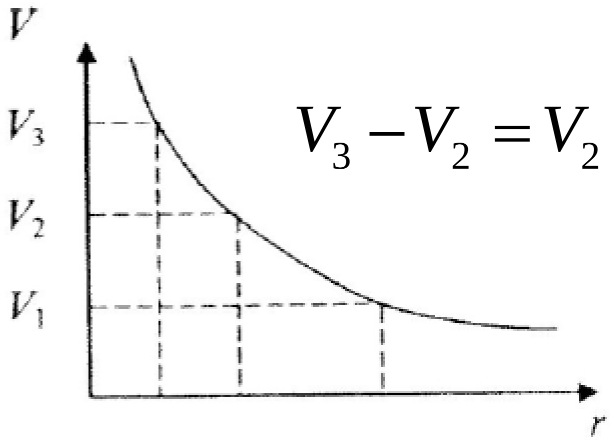


Surfaces équipotentielles en rouge (dipôle électrique)

Représentation graphique des équipotentielles

Lignes de force et équipotentielles pour une charge ponctuelle $Q > 0$





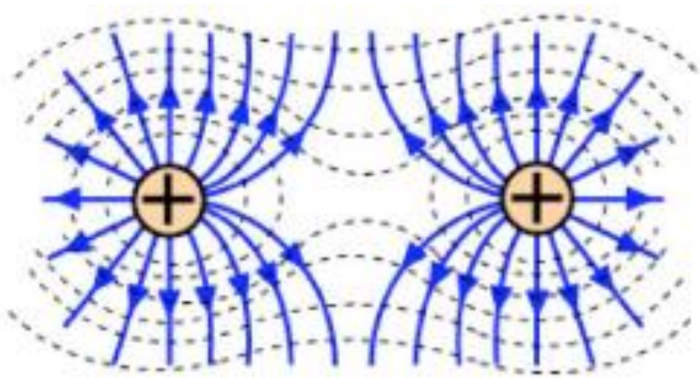
$$V_3 - V_2 = V_2 - V_1$$

Propriété des équipotentielles
Les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de force en tout point de l'espace.

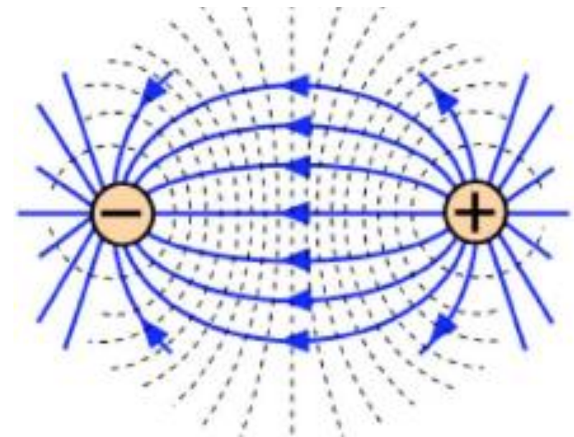
Représentation des équipotentielles
La différence de potentiel entre deux équipotentielles adjacentes est toujours la même. Plus les équipotentielles sont rapprochées, plus le potentiel varie rapidement.

Exemples de surfaces équipotentielles

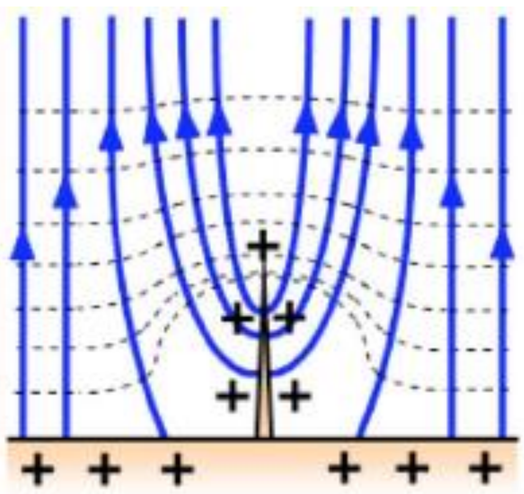
Deux charges positives identiques



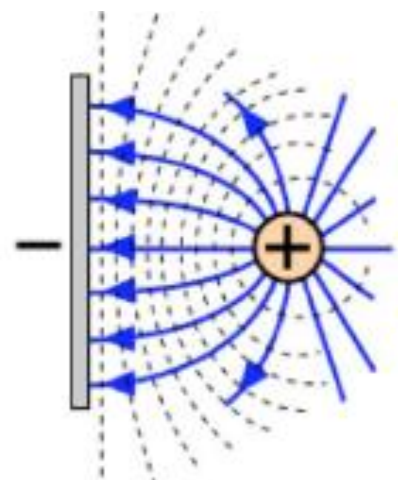
Deux charges identiques de signe opposé



Pointe chargée

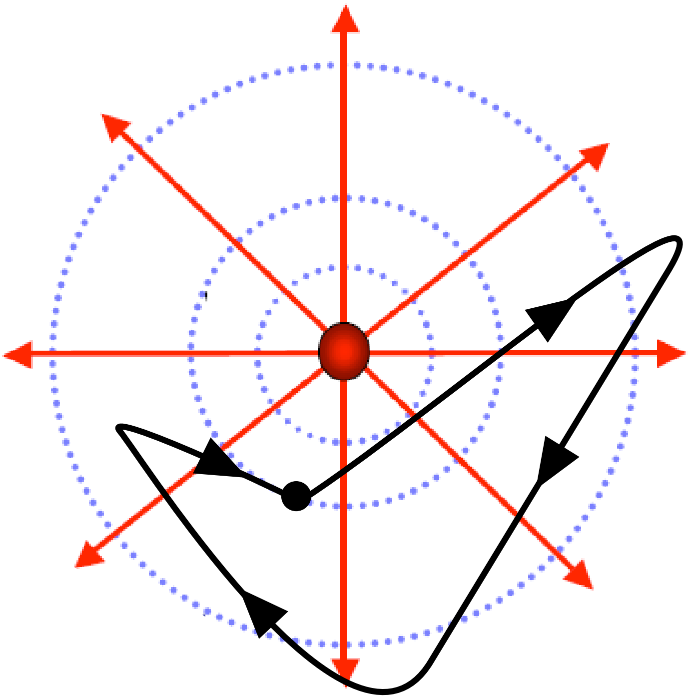


Charge positive et plan conducteur mis à la masse



Champ électrique conservatif (cas statique)

Quelle est la variation de potentiel sur une boucle (trajectoire fermée) ?



Le champ étant conservatif, le potentiel ne dépend que de la position. Si les positions initiale et finale sont identiques, comme c'est le cas sur une trajectoire fermée, alors la différence de potentiel est nulle.

Champ électrique conservatif (cas statique)

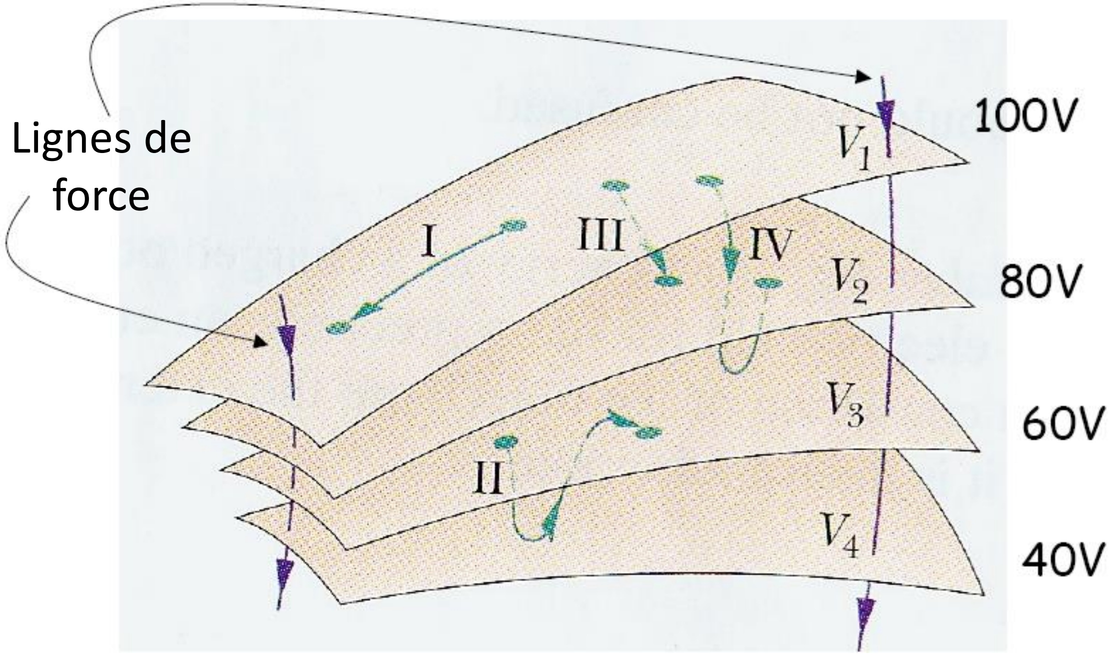
$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

$$\boxed{\Delta V_{a\to b} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Le champ électrique est conservatif seulement dans le cas statique (les champs ne varient pas dans le temps).

Quiz – Surfaces équipotentielles

Quelle est la variation de potentiel sur chacune des quatre trajectoires I, II, III et IV ?



I : Parcours sur une surface équipotentielle : $\Delta V = 0$

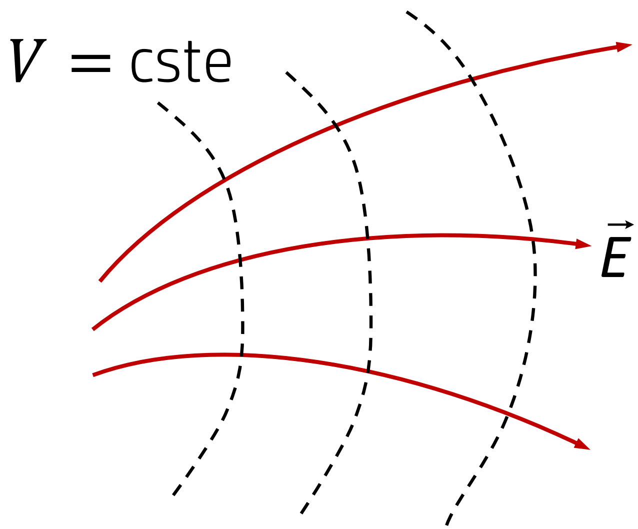
II : Points de départ et d'arrivée sur la même équipotentielle : $\Delta V = 0$

III : Diminution du potentiel de 20 V

IV : Diminution du potentiel de 20 V

Calculer le champ à partir du potentiel

Si l'on connaît le potentiel, peut-on calculer le champ électrique ?



1. On écrit la définition de la différence de potentiel pour une **variation infinitésimale du potentiel** :

$$\boxed{\Delta V_{a\to b} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{l}} \quad \Rightarrow \quad dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

2. On exprime dV par sa **différentielle totale :**

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \vec{\nabla}V\cdot d\vec{l}$$

3. On a enfin : $\vec{\nabla}V\cdot d\vec{l} = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$

et puisque cette égalité doit tenir pour **n'importe quel déplacement $d\vec{l}$**, alors on doit avoir :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V}$$

Le champ électrique est l'opposé du gradient du potentiel.

Opérateur gradient
(annexe 4 du polycopié)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

Élément de longueur $d\vec{l}$

$$d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

Stratégies de résolution (champ et potentiel)

1. Calculer le champ par intégration, puis en déduire le potentiel

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\,dq \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Avantage : s'applique toujours, peu importe la symétrie.

Inconvénient : il faut résoudre deux intégrales, dont l'une est vectorielle (champ).

2. Calculer le champ par le théorème de Gauss, puis en déduire le potentiel

$$Q = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Avantage : l'intégrale de Gauss est simple (cas symétriques).

Inconvénient : la méthode s'applique seulement aux cas symétriques.

3. Calculer le potentiel, puis en déduire le champ

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\,dq \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

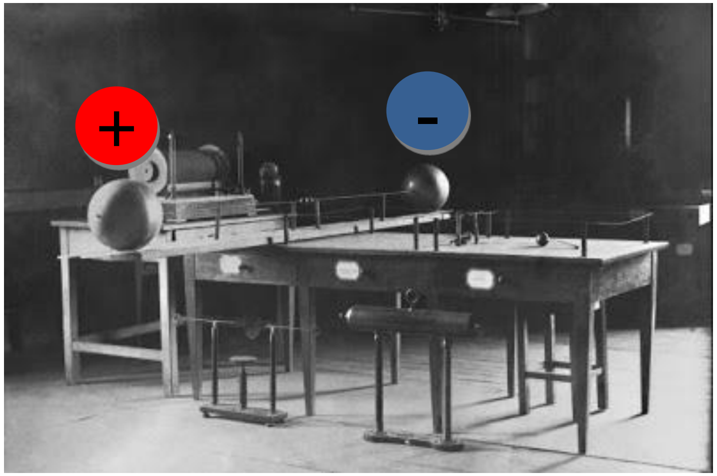
Avantage : une seule intégrale scalaire qui s'applique toujours, peu importe la symétrie.

Inconvénient : pour les cas symétriques, plus long que le théorème de Gauss.

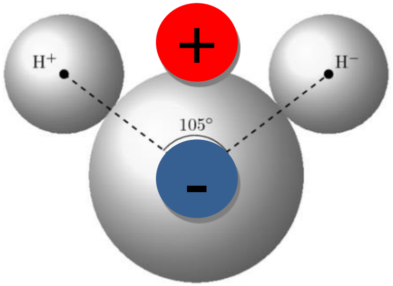
Exemple – Dipôle électrique

Dipôle électrique : deux charges opposées de même magnitude

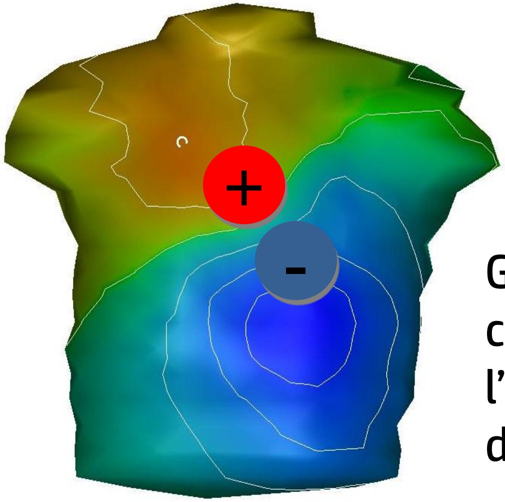
antenne TV de type « oreilles de lapin »



Expérience de Hertz: émission d'une onde EM par une antenne dipolaire



Molécule d'eau



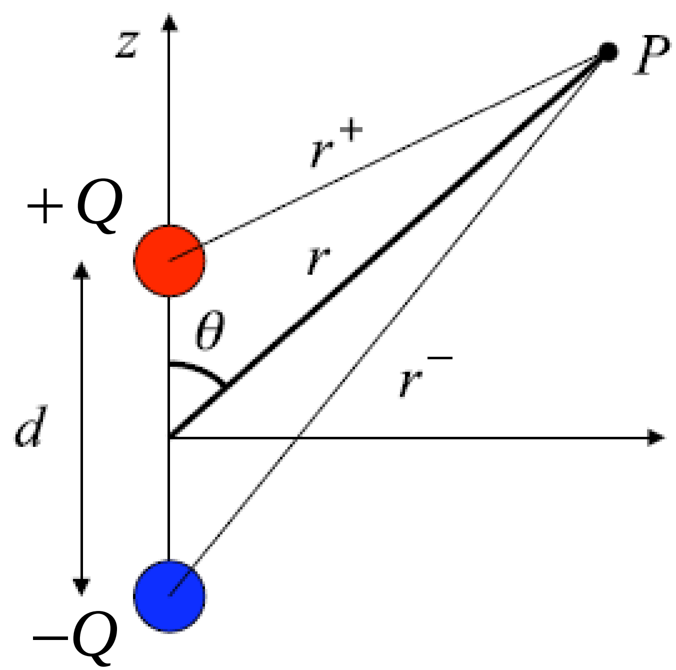
Génération de l'électro-cardiogramme par l'activation électrique du coeur

Exemple – Potentiel et champ d'un dipôle électrique

Stratégie de résolution
Gauss ne s'applique pas, car il n'est pas possible de déterminer une surface de Gauss où la densité de flux est constante en magnitude.

On choisit de calculer V, puis de déduire $\vec{E}$ puisqu'il est plus facile de faire l'intégrale scalaire du potentiel que l'intégrale vectorielle du champ électrique.

Principe de superposition
Le potentiel au point P est la somme des potentiels de chaque charge.



$$V(\vec{r}) = V_+(\vec{r}) + V_-(\vec{r})$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

$$r_+ = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r\frac{d}{2}\cos\theta}$$

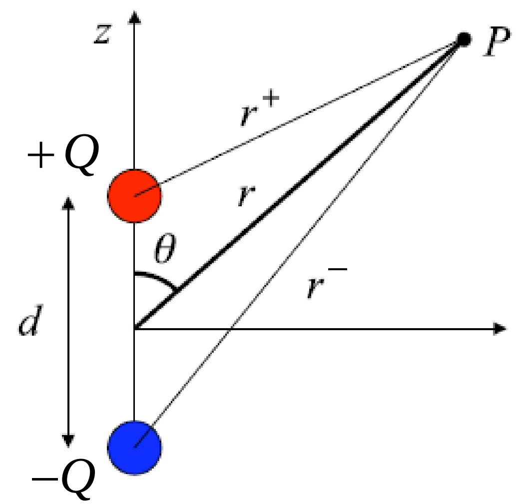
$$r_- = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r\frac{d}{2}\cos(180° - \theta)}$$

Exemple – Potentiel d'un dipôle électrique

Cas limite : loin du dipôle ($r \gg d$)
Développement de Taylor autour de $d = 0$.
Rappel : $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$ si $x \ll 1$.

$$r_+ = \sqrt{r^2 - rd\cos\theta + \frac{d^2}{4}} \approx r - \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + rd\cos\theta + \frac{d^2}{4}} \approx r + \frac{d}{2}\cos\theta$$



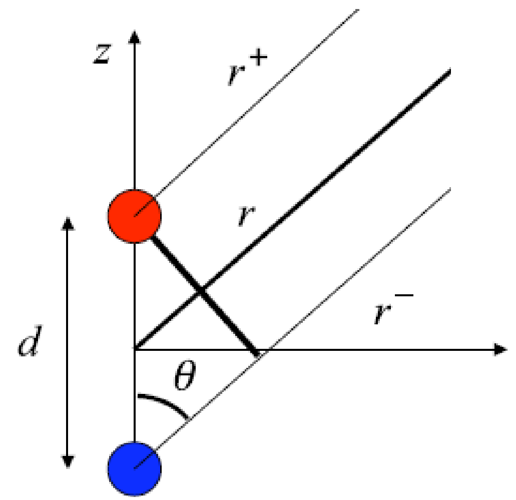
On a donc : $r_- - r_+ \approx d\cos\theta$ $\quad$ $r_+ r_- \approx r^2$

Le potentiel devient alors :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

Potentiel loin d'un dipôle

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta}$$

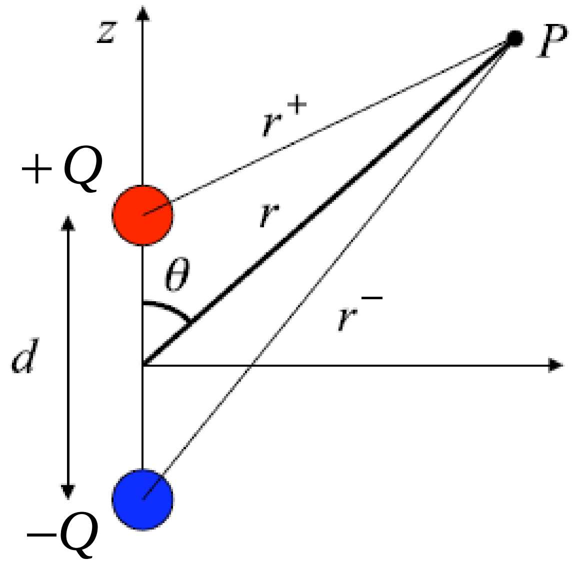


Le potentiel du dipôle décroît plus rapidement que le potentiel d'une charge ponctuelle.

Exemple – Champ d'un dipôle électrique

Potentiel loin d'un dipôle

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta}$$

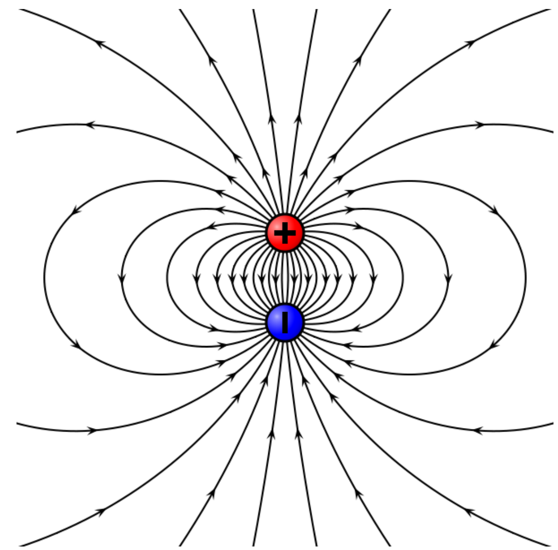


Calcul du champ électrique loin du dipôle

On calcule le gradient du potentiel avec le gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} - \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right)$$



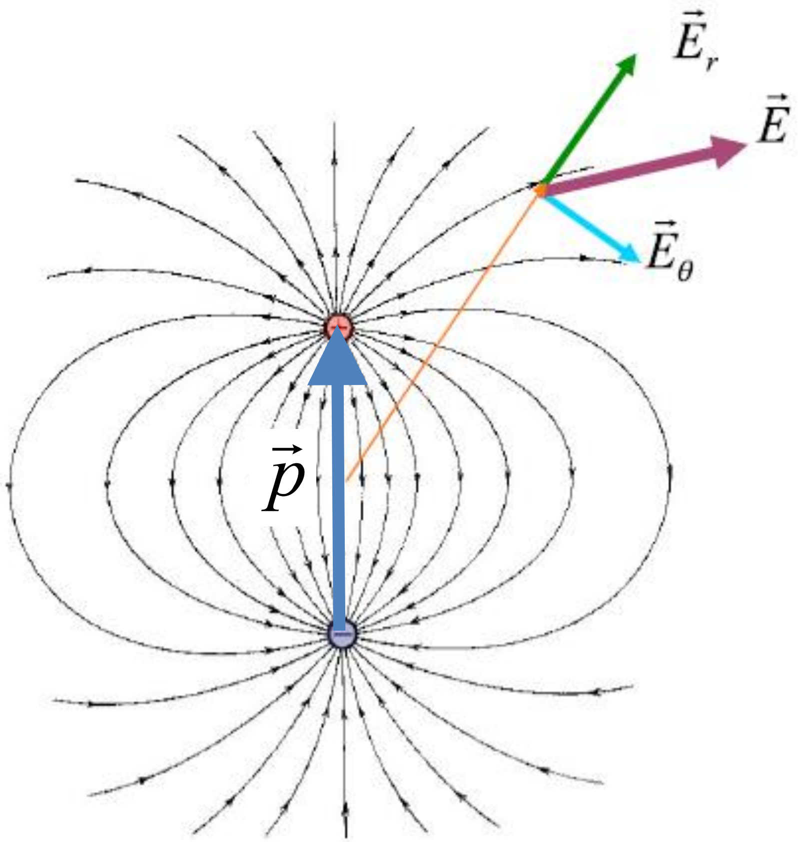
Champ électrique loin d'un dipôle

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}$$

Moment dipolaire électrique

Champ électrique loin d'un dipôle

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}$$

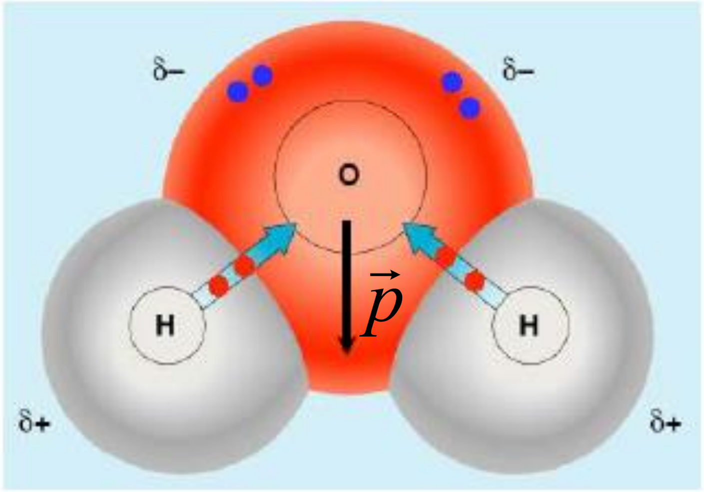


Le champ du dipôle décroît en r^{-3}, soit plus rapidement que le champ d'une charge ponctuelle (en r^{-2}).

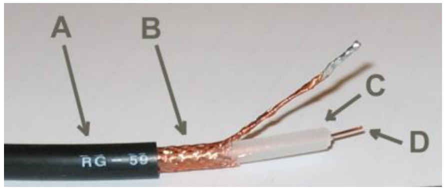
Moment dipolaire électrique

$$\boxed{\vec{p} = Q\vec{d}} \quad [\text{C·m}]$$

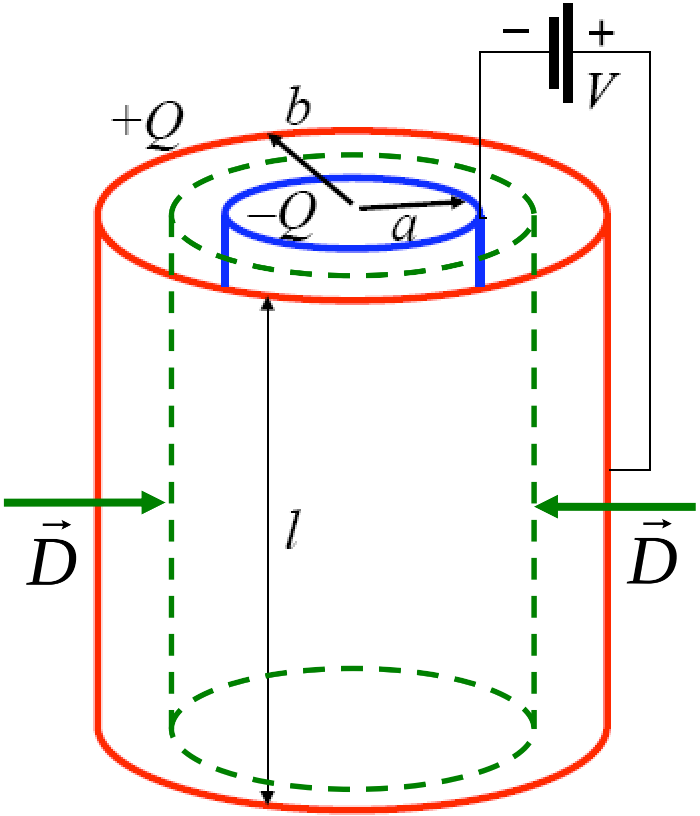
$\vec{d}$: dirigé de la charge négative vers la charge positive du dipôle



Exemple – Câble coaxial



Quelle est la valeur de la charge Q sur chacun des conducteurs lorsqu'une différence de potentiel V est appliquée entre ces derniers ?



Stratégie de résolution

En négligeant les effets de bord, la situation possède une symétrique cylindrique et la densité de flux est purement radiale, ce qui permet d'appliquer le théorème de Gauss avec la surface cylindrique de rayon $a < \rho < b$ (en vert). L'intégrale sera nulle sur les extrémités planes du cylindre (flux tangent à la surface).

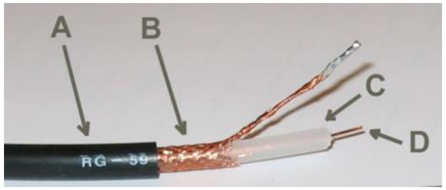
$$-Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Avec l'expression de $\vec{D}$ en fonction de Q, on en déduit $\vec{E}$, puis V en fonction de Q.

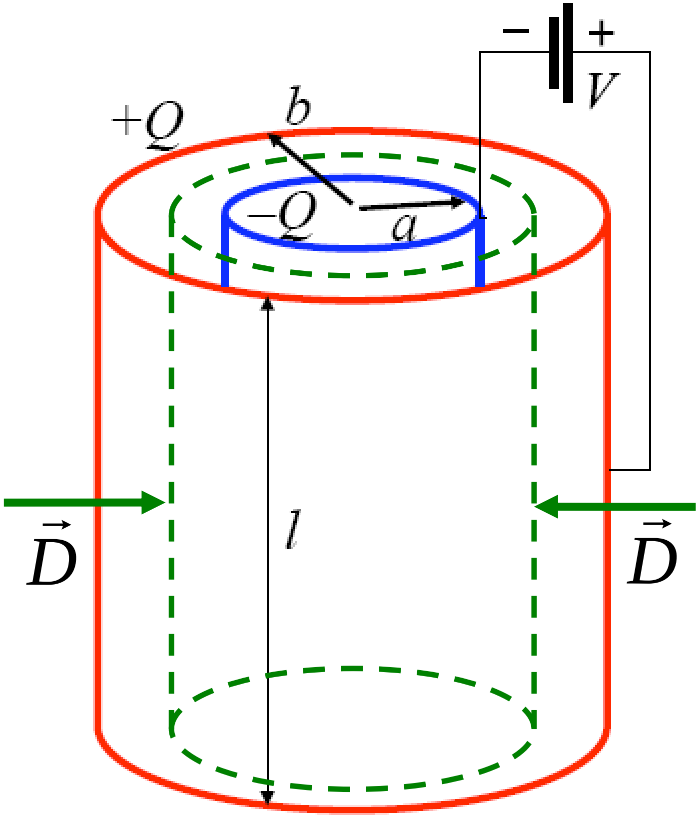
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Le câble coaxial suivant est formé de deux armatures conductrices cylindriques (en bleu et en rouge) séparées par du vide.

Exemple – Câble coaxial



Quelle est la valeur de la charge Q sur chacun des conducteurs lorsqu'une différence de potentiel V est appliquée entre ces derniers ?



Théorème de Gauss ($a < \rho < b$)

$$-Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D2\pi\rho l$$

$$\Rightarrow \vec{D} = -\frac{Q}{2\pi\rho l}\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \rho l}\hat{\rho}$$

Calcul de la différence de potentiel V

Chemin d'intégration radial de $\rho = a$ à $\rho = b$.

$$d\vec{l} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 l V}{\ln(b/a)}}$$

Quiz – Câble coaxial

Que vaut le champ électrique à l'intérieur de l'armature intérieure (en bleu) ?

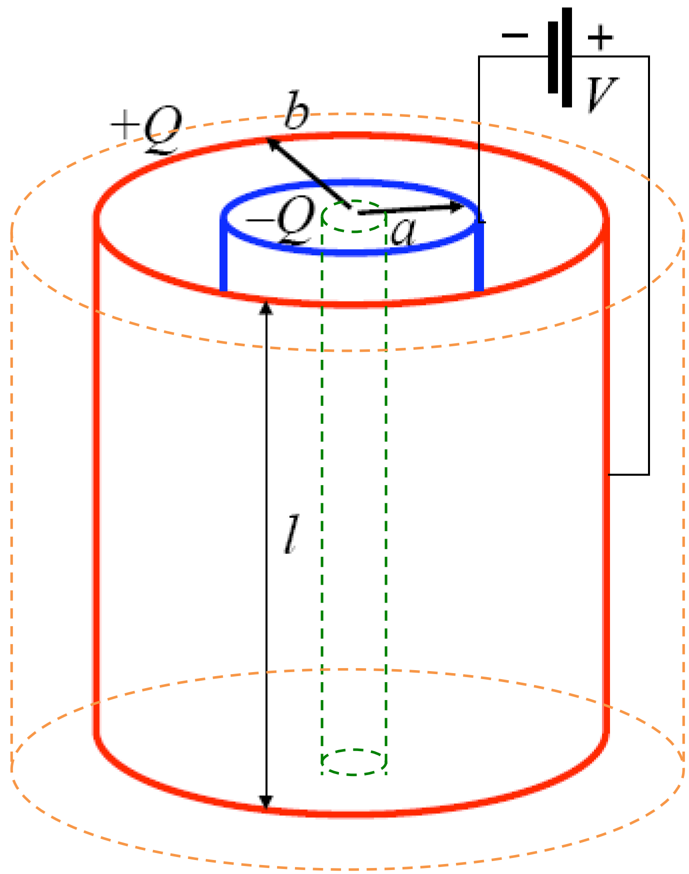
Que vaut le champ électrique à l'extérieur du câble (à l'extérieur de l'armature rouge) ?

Dans les deux cas, le champ électrique est nul!

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

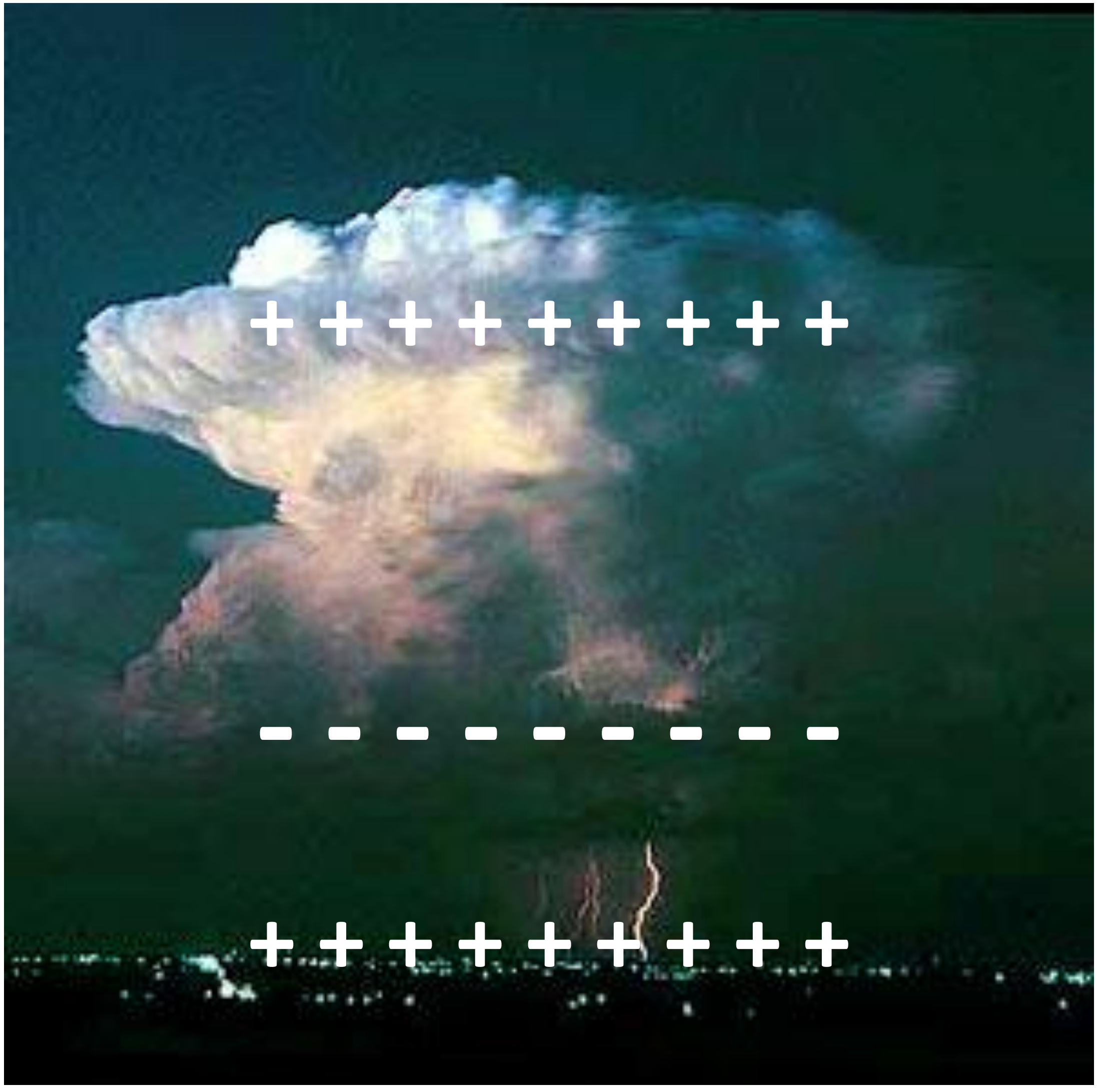
Surface de Gauss pour $\rho < a$ (en vert)
Il n'y a aucune charge libre à l'intérieur : le champ est nul.

Surface de Gauss pour $\rho > b$ (en orange)
La charge libre totale à l'intérieur est aussi nulle $(+Q - Q = 0)$: le champ est nul.



Les vents ascendants transportent des gouttelettes d'eau qui frappent les particules de glace qui tombent. Ces particules deviennent chargées par frottement. La glace négative s'accumule à la base du nuage et le sol se charge positivement par induction.

Si le champ électrique entre la base du nuage et le sol est assez élevé, l'énergie emmagasinée dans ce champ est soudainement libérée : c'est la foudre.



Énergie emmagasinée dans le champ électrique

L'énergie emmagasinée dans le champ électrique est l'énergie emmagasinée par chaque charge en la déplaçant de l'infini jusqu'à sa position finale.

$$U = -q\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Rappel : $U = 0$ à l'infini

Exemple – Trois charges ponctuelles

1re charge : aucun travail nécessaire (elle est seule) ;

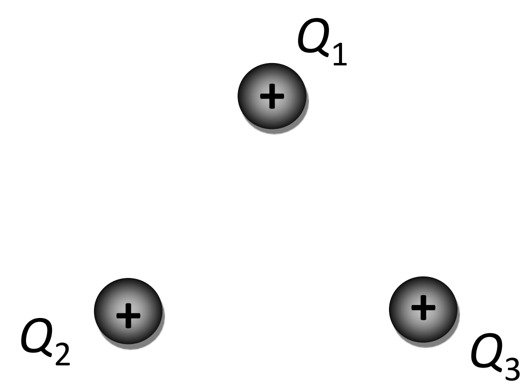
$$U_1 = -Q_1\int_{\infty}^{\vec{r}_1} \vec{0}\cdot d\vec{l} = 0$$

2e charge : il faut faire un travail qui s'oppose au champ produit par la 1re charge ;

$$U_2 = -Q_2\int_{\infty}^{\vec{r}_2} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = Q_2 V_{21}$$

3e charge : il faut faire un travail qui s'oppose au champ produit par la 1re et la 2e charges.

$$U_3 = -Q_3\int_{\infty}^{\vec{r}_3} \left(\vec{E}_1+\vec{E}_2\right)\cdot d\vec{l} = Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32}$$



$$\boxed{U = Q_2 V_{21} + Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32}}$$

Énergie emmagasinée dans le champ électrique

On peut réécrire l'énergie emmagasinée par N charges en utilisant les identités suivantes :

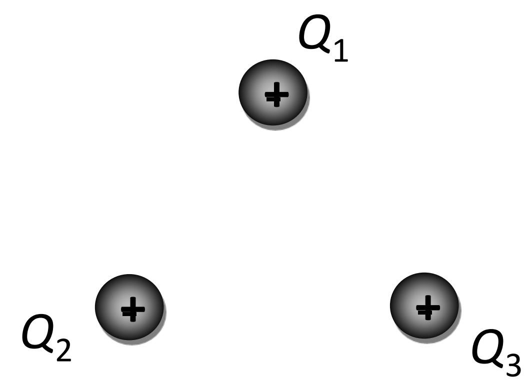
Énergie de i due à j est égale à l'énergie de j due à i

$$Q_i V_{ij} = \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = Q_j V_{ji}$$

$$Q_i V_{ij} = \frac{1}{2}\left(Q_i V_{ij} + Q_j V_{ji}\right)$$

Potentiel de i dû à toutes les autres charges $j \neq i$

$$V_i = \sum_{j \neq i} V_{ij}$$



Exemple – Trois charges ponctuelles

$$U = Q_2 V_{21} + Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32}$$

$$= \frac{1}{2}\left(Q_1 V_{12} + Q_2 V_{21} + Q_1 V_{13} + Q_3 V_{31} + Q_2 V_{23} + Q_3 V_{32}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3\right)$$

Énergie emmagasinée dans le champ électrique (N charges ponctuelles)

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i}$$

Énergie emmagasinée dans le champ électrique

Pour calculer l'énergie emmagasinée dans une **distribution de charge continue**, on ne peut pas utiliser l'équation de la page précédente. Il faut la généraliser.

Charges ponctuelles

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

$$Q_i \rightarrow \int_{\Omega} dq = \int_{\Omega} \rho_v dv$$

Distribution de charge

$$U = \frac{1}{2}\int_{v} \rho_v V dv$$

Potentiel

Volume

En utilisant le théorème de Gauss sous forme différentielle ($\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$) ainsi que la relation $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, on peut montrer (section 2.6 du manuel) que :

Énergie emmagasinée dans le champ d'une distribution de charge

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_{v} \varepsilon E^2 dv}$$

E^2 est le carré de la norme du champ électrique.

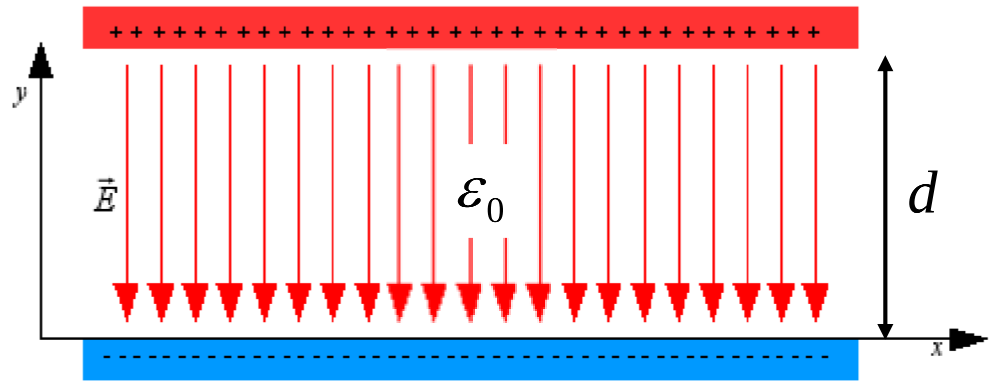
ε est la permittivité du milieu (vide ou diélectrique).

Il faut intégrer partout où le champ E dû à la distribution de charge est non nul.

Exemple 2.3 – Énergie emmagasinée dans un condensateur plan

Champ électrique entre les plaques $\vec{E} = -\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}\hat{y}$

Différence de potentiel entre les plaques $V = \dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S}$



Quelle est l'énergie emmagasinée par le condensateur ?

Le champ est constant entre les plaques et il est nul à l'extérieur du condensateur. Le domaine d'intégration est donc le volume entre les plaques.

$$U = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)^2 \boxed{\int_v dv} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)^2 Sd \Rightarrow \boxed{U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}}$$

Volume entre les plaques : Sd

Énergie dans les supercondensateurs

Dans un supercondensateur, la séparation des charges est de l'ordre du nanomètre (double couche de charges).

Densité énergie (J/m^3) des supercondensateurs = 100 à 1000 fois plus élevée que la densité d'énergie des condensateurs électrolytiques.

Supercondensateurs

Tramway sans fil