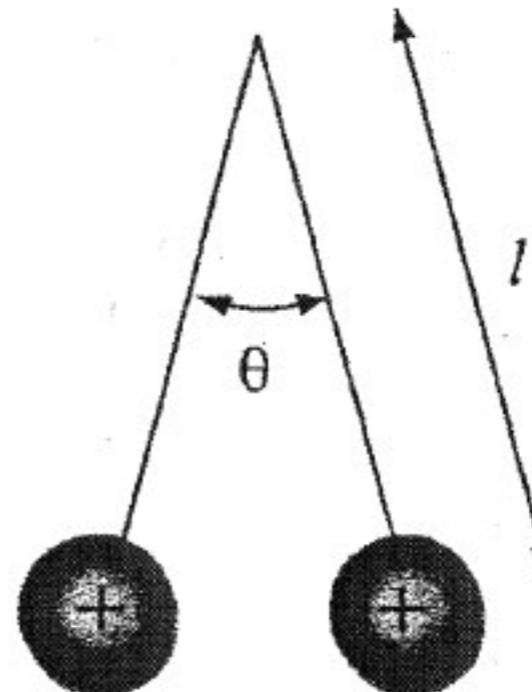


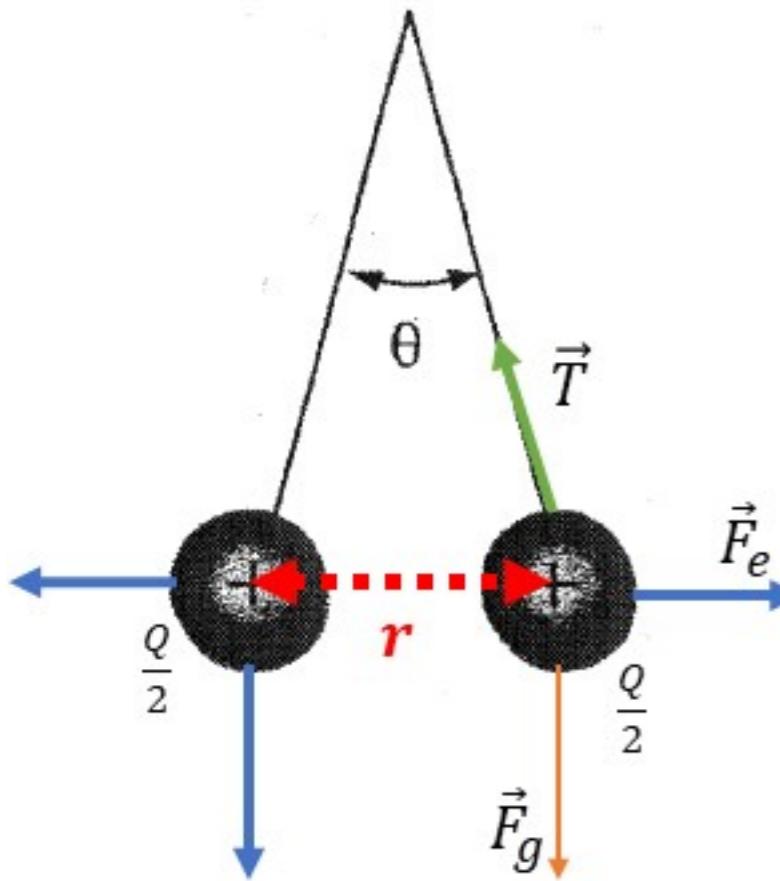
Aristote: « le commencement est beaucoup plus que la moitié de l'objectif »

### Exercice 1.8.3: Électromètre

Un moyen simple pour mesurer une charge électrique  $Q$  consiste à utiliser un système constitué de deux petites boules de sureau (un matériau très léger et faiblement conducteur) et jointes par un fil de masse négligeable. Parce que les deux boules ont le même diamètre et que le fil est conducteur, la charge totale se réparti également sur les deux boules qui portent chacune une charge  $Q/2$ . Les deux boules sont repoussées par la force électrostatique, mais sont attirées vers le sol par la gravité. Les fils ont une longueur  $l = 5 \text{ cm}$ , chaque boule a une masse de  $m = 0,2 \text{ g}$  et porte une charge positive inconnue  $Q/2$ . À cause de la répulsion, les fils font un angle de  $\theta = 30^\circ$  entre eux. Trouvez la valeur de  $Q$ .



## 1) Données

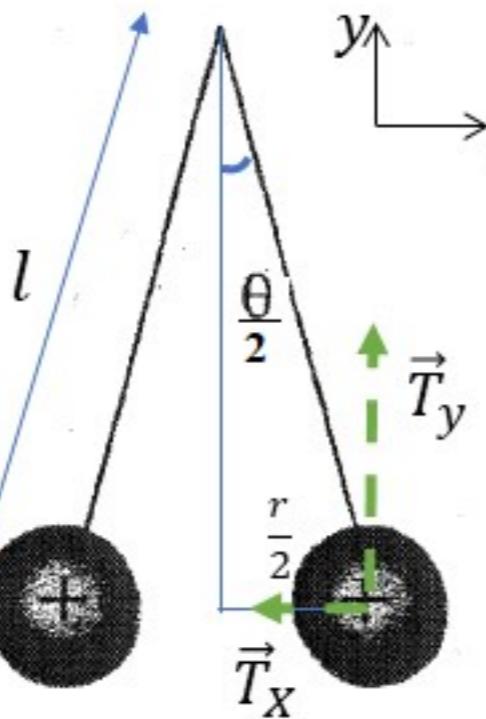


## 2) On cherche la charge $Q$

$$F_e = k \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{2}\right)}{r^2} \quad 1$$

Mais  $Q$ ?  $F_e$ ?  $r$ ?

3) Du triangle rectangle de la figure, on trouve  $r$ :



$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)}{l} = \frac{r}{2l}$$

$$\Rightarrow r = 2l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad 2$$

Mais  $Q$ ?  $F_e$

4) Une autre équation?  $\sum \vec{F} = 0$  à l'équilibre

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T} + \vec{F}_e + \vec{F}_g = 0$$

$$\begin{cases} -T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + F_e = 0 \\ T \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - F_g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + F_e = 0 \\ T = \frac{F_g}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{cases} \quad 3, 4$$

$$\text{De } 3, 4 \quad -\frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + F_e = 0$$

$$\Rightarrow F_e = \frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad 5$$

De 1, 5

$$F_e = k \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{2}\right)}{r^2} = \frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$k \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{\left[2l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2} = mg \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$Q^2 = 4 \frac{mg}{k} \left[2l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q = \pm 4l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{mg \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{k}}$$

$$\Rightarrow Q = + 4l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{mg \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{k}}$$

$$Q = 12,51 \text{nC}$$

## Exercice 1.8.5: Électricité atmosphérique

Même par beau temps, un champ électrostatique est présent dans les basses couches de l'atmosphère terrestre. Ce champ résulte de l'action du vent qui entraîne des charges positives de la surface de la terre vers une couche de l'atmosphère nommée électrosphère (cette couche est beaucoup plus basse que l'ionosphère). On considère qu'une charge électrique totale  $+Q$  est distribuée uniformément dans l'électrosphère entre les rayons  $r = b$  et  $r = c$ , et qu'une charge  $-Q$  est distribuée uniformément à la surface du sol.

- Quelle est l'expression du champ électrique  $\vec{E}(r)$  pour  $r$  allant de zéro à l'infini ?
- Par beau temps, le champ électrique atmosphérique au niveau du sol a une intensité  $E_r = -150 \text{ V/m}$ , quelle est la charge  $+Q$  distribuée dans l'électrosphère ? ( $a = 6370 \text{ km}$ ,  $b = 6395 \text{ km}$ ,  $c = 6400 \text{ km}$ ).

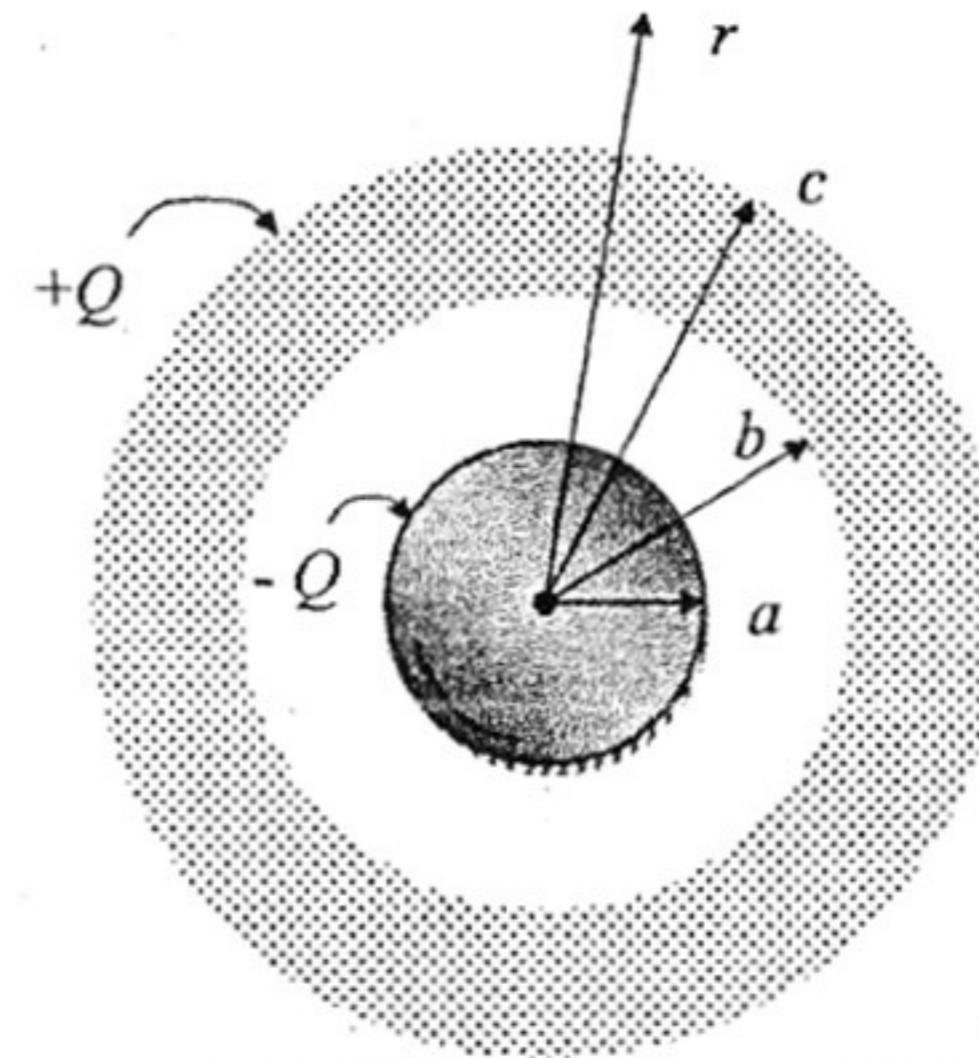


Figure 1.26 Electricité atmosphérique.

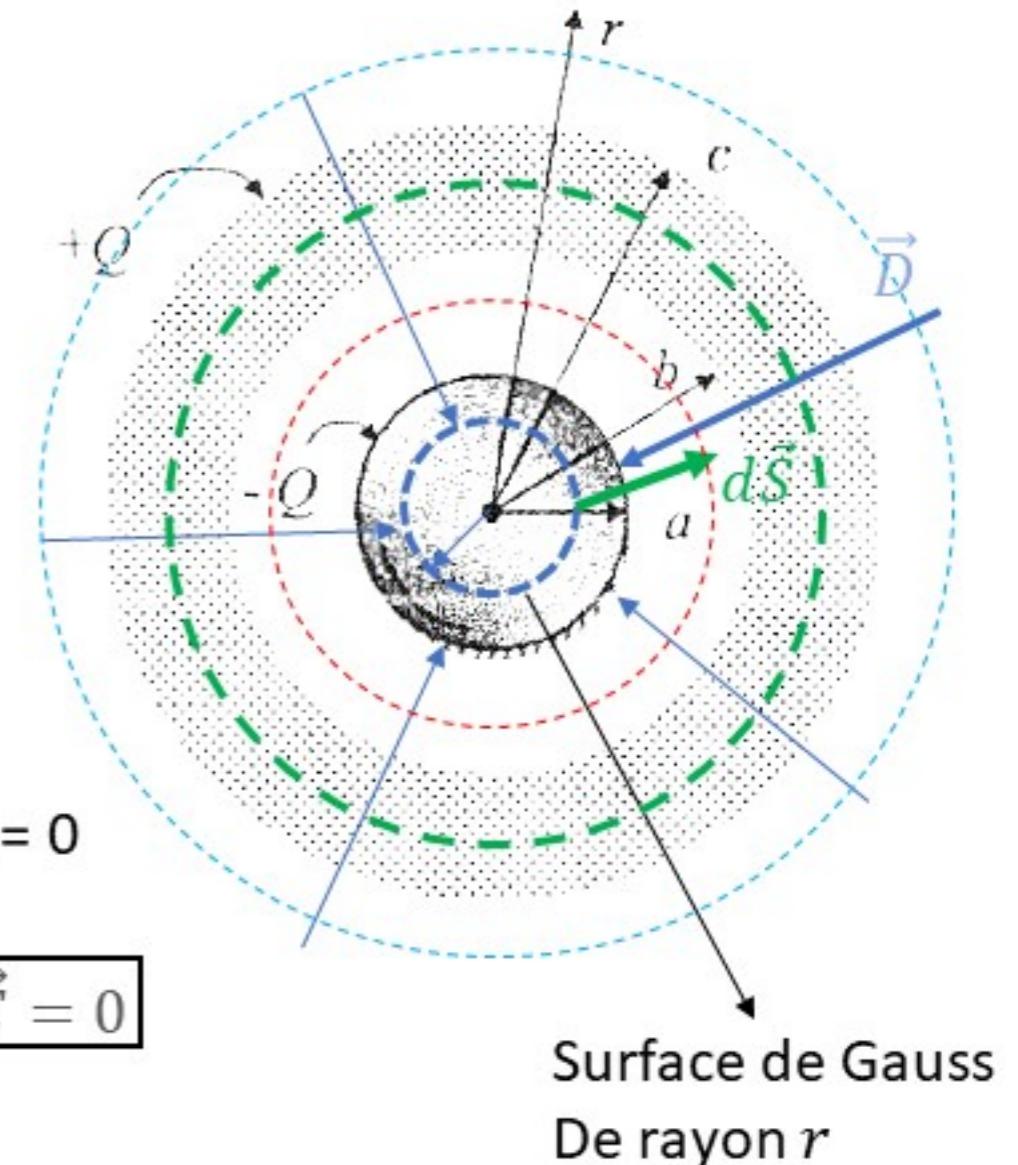
- 1) Symétrie sphérique;
- 2) Théorème de Gauss;
- 3) Surface de Gauss: sphère centrée de rayon  $r$

a) Expression du champ électrique:  $\vec{E}_r$

$$\phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in} \longrightarrow \phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = -D \oint dS = -D 4\pi r^2$$

1) Pour  $r < a$ : pas de charges à l'intérieur de la surface de Gauss  $\rightarrow Q_{in} = 0$

Et donc:  $-D 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow D = 0$ . On sait que:  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  et par conséquent  $\vec{E} = 0$



2) Pour une surface de Gauss de rayon  $a < r < b$ :  $\rightarrow Q_{in} = -Q$  (les charges sont en surface en  $r=a$ )

$$-D 4\pi r^2 = -Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \text{ avec } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} . \text{ Expression vectorielle } \vec{E} = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

3) Pour une surface de Gauss de rayon  $b < r < c$ :  $\rightarrow Q_{in} = -Q + Q_e$  (charges en surface  $r=a$  et une proportion de charges entre  $b$  et  $r$ )

$$-D \cdot 4\pi r^2 = -Q + Q_e$$

On sait que la distribution de charge est volumique entre les rayons  $b$  et  $c$  et qu'elle est uniforme c'est à dire:

$$\rho_V = \frac{Q}{V} = \frac{Q_e}{V_e} = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi c^3 - \frac{4}{3}\pi b^3} = \frac{Q_e}{\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi b^3} \Rightarrow Q_e = \frac{Q(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)}$$

Et donc:

$$-D \cdot 4\pi r^2 = -Q + \frac{Q(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)} = Q \left( \frac{r^3 - c^3}{c^3 - b^3} \right) \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \left( \frac{r^3 - c^3}{c^3 - b^3} \right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{r^3 - c^3}{c^3 - b^3} \right) \hat{r}}$$

4) Pour  $r > c$ :  $\rightarrow Q_{in} = -Q + Q = 0$

Et donc:  $-D \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow D = 0$ ; et par conséquent  $\boxed{\vec{E} = 0}$

b)  $E_r = -150 \text{ V/m}$ . Nous remplaçons cette valeur dans l'expression du champ trouvée entre  $a$  et  $b$  avec  $r = a$   
 $-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = E_r \rightarrow Q = -E_r 4\pi\epsilon_0 a^2 = 150 \times 4\pi \times 8,854 \times 10^{-12} \times (6370 \ 000)^2 = 6,77 \times 10^5 \text{ C}$

Séance 1

2 heures

1.8.3, 1.8.5, 1.8.6, 1.8.9

## Exercice 1.8.6: Cable coaxial

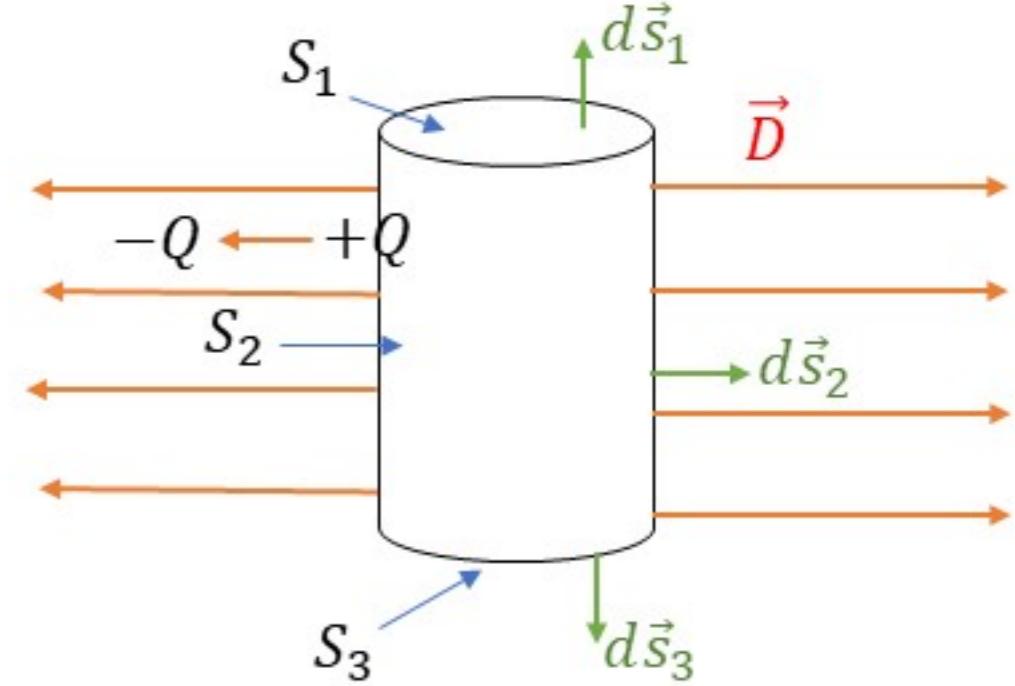
Les câbles coaxiaux sont des lignes de transmission utilisées pour transmettre des signaux à haute fréquence. Un câble est formé de deux conducteurs cylindriques creux, de longueur  $l$ , de rayons  $a$  et  $b$ , séparés par un diélectrique ayant la même permittivité que le vide. Une charge  $+Q$  se répartit uniformément à la surface externe du conducteur central et une charge  $-Q$  se répartit à la surface interne du conducteur extérieur. Quelle est l'intensité du champ électrique dans tout l'espace ? Parce que  $b \ll l$ , on considère que le câble est infini.

## Exercice 1.8.6: Cable coaxial

- Conducteurs cylindriques creux;
- Symétrie cylindrique;
- Surface de Gauss: cylindre circulaire centré de rayon  $\rho$  et de longueur  $l$

Expression du champ électrique:  $\vec{E}_\rho$

$$\phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in} \rightarrow \phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} D S = D 2\pi\rho l$$



1) Pour  $\rho < a$ : pas de charges à l'intérieur  $\rightarrow Q_{in} = 0$

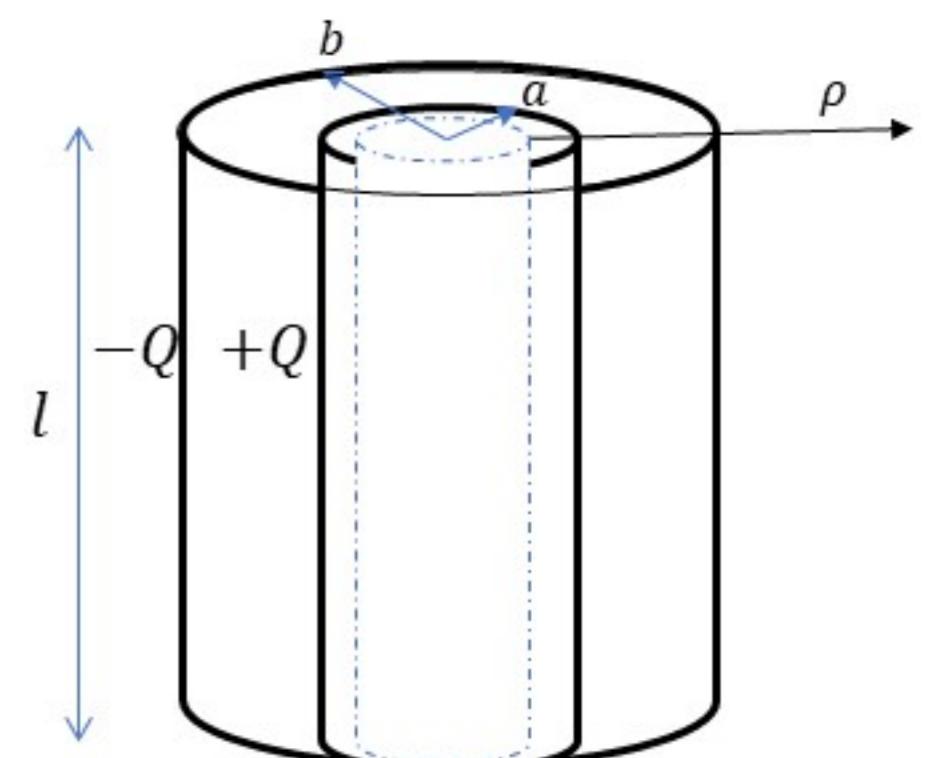
Et donc:  $D 2\pi\rho l = 0 \Rightarrow D = 0$ . On sait que:  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  et par conséquent  $\vec{E}_\rho = 0$

2)  $a < \rho < b$ :  $\rightarrow Q_{in} = Q$  (les charges sont en surface en  $\rho=a$ )

$$D 2\pi\rho l = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{2\pi\rho l} \text{ et avec } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \text{ on trouve } \vec{E}_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho l} \hat{\rho}$$

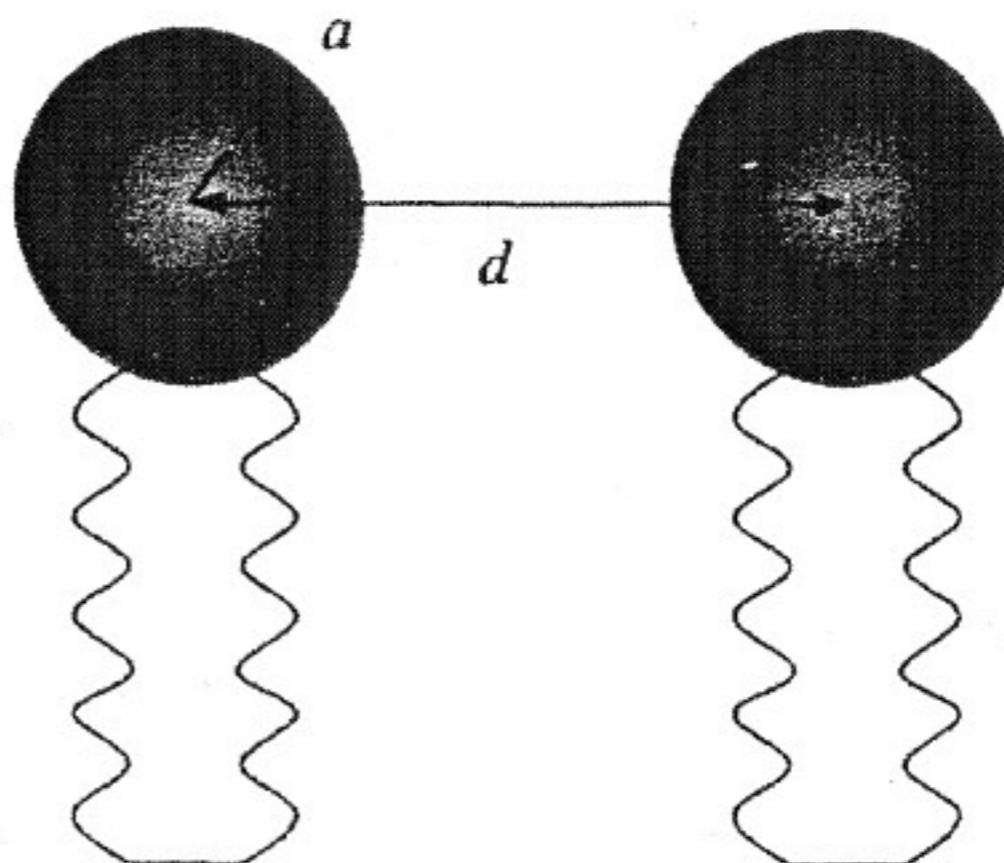
3)  $\rho > b$ :  $\rightarrow Q_{in} = +Q - Q$

$$D 2\pi\rho l = 0 \Rightarrow D = 0 \text{ et avec } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \text{ on trouve } \vec{E}_\rho = 0$$



## Exercice 1.8.9: Condensateur à haute tension

Un condensateur à haute tension est formé de deux sphères métalliques de rayon  $a$ , dont les centres sont espacés d'une distance  $d$ , et qui sont situées dans l'air. Si les deux sphères portent des charges de signes opposés  $+Q$  et  $-Q$ , quelle est l'expression de l'intensité du champ électrique dans l'air, le long de la droite qui joint les deux sphères? (parce que  $a \ll d$ , les charges se répartissent uniformément à la surface des sphères; on peut négliger l'effet des supports isolants en céramique).



## Exercice 1.8.9: Condensateur à haute tension

- **2 sphères;**
- **Les charges sont réparties en surface;**
- **Symétrie sphérique;**
- **Théorème de Gauss;**
- **Principe de superposition;**  $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$

Pour une sphère

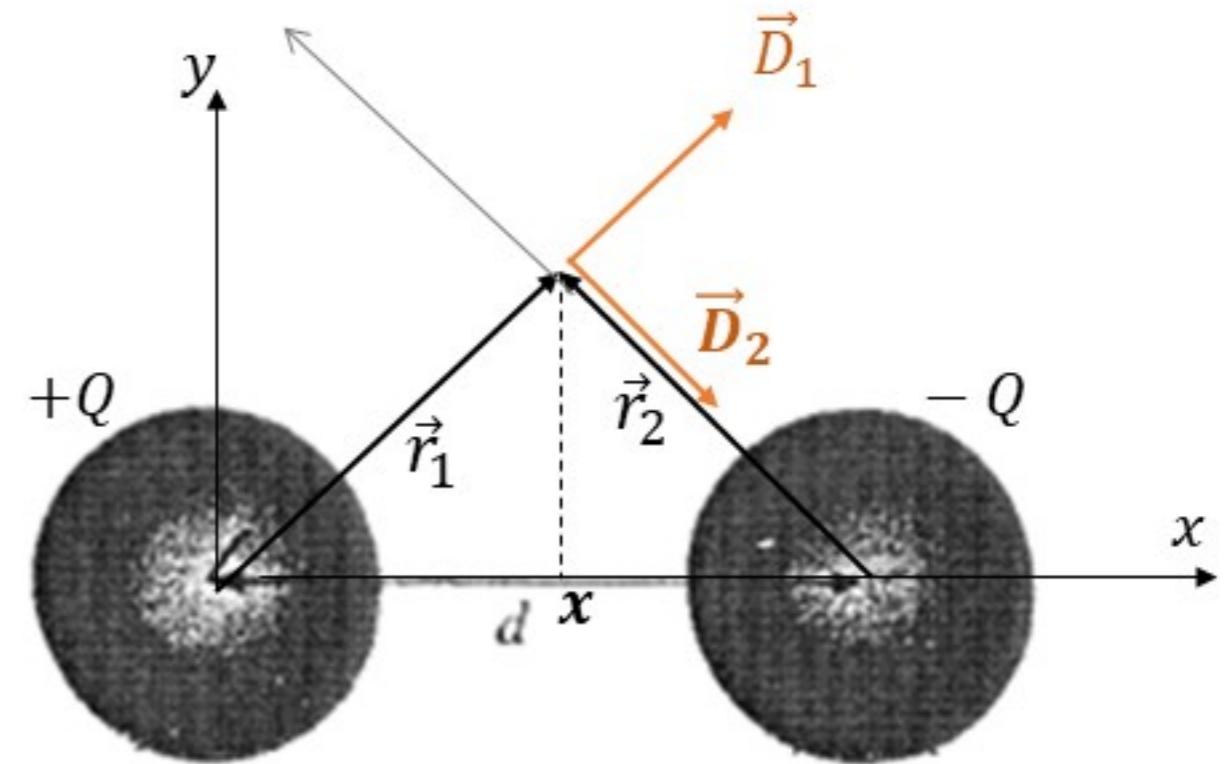
$$\begin{aligned}\phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in} \rightarrow \phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint \phi dS = D 4\pi r^2 \Rightarrow D = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \\ \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

Pour la sphère de gauche:  $\vec{D}_1 = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \hat{r}_1$

Pour la sphère de droite:  $\vec{D}_2 = \frac{-Q}{4\pi r_2^2} \hat{r}_2$

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}_1 + \frac{-Q}{4\pi r^2} \hat{r}_2$$

$$\vec{D} = D \hat{x} = \vec{D}_{1x} + \vec{D}_{2x} = \frac{Q}{4\pi x^2} \hat{x} + \frac{-Q}{4\pi(d-x)^2} (-\hat{x}) = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \Rightarrow$$



$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x}$$

De Albert Einstein « La théorie c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne,  
la pratique c'est quand tout fonctionne mais que l'on ne sait pas pourquoi »

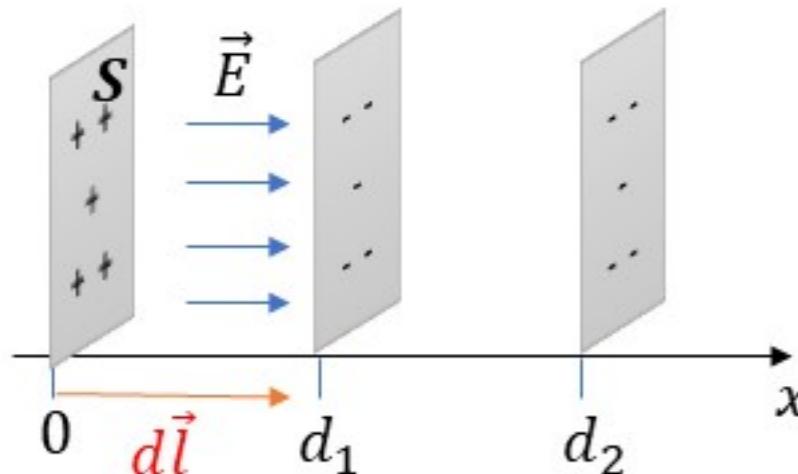
## 2.8.2 Générateur électrostatique

Un condensateur plan est formé de deux plaques conductrices de surface  $S$ , séparées dans l'air par une distance  $d_1$ . Une charge  $Q$  se répartit uniformément sur chaque plaque parce que  $d_1 \ll$  côtés.

Les plaques sont ensuite mécaniquement éloignées l'une de l'autre jusqu'à une distance  $d_2$  ( $d_2 \ll$  côtés).

- Quelle est la différence de potentiel entre les plaques avant et après le déplacement ?
- Quel est le travail requis pour éloigner les deux plaques ?

## 2.8.2 Générateur électrostatique



a) La différence de potentiel entre les plaques:

$$V_{0d} = V(0) - V(d) = - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_d^0 \vec{E} \cdot dx \hat{x}$$

Connaissant le champ électrique à l'intérieur du condensateur plan (voir notes du cours pour la démonstration):

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{x} = \frac{Q}{S \epsilon_0} \hat{x}$$

$\rho_s$  est la densité de charge surfacique

$$dq = \rho_s dS \rightarrow \int dq = \int \rho_s dS \rightarrow Q = \rho_s S$$

Nous remplaçons dans  $V_{0d}$

$$V_{0d} = - \int_d^0 \frac{Q}{S \epsilon_0} \hat{x} \cdot dx \hat{x} = - \int_d^0 \frac{Q}{S \epsilon_0} dx = \frac{Q d}{S \epsilon_0}$$

Avant déplacement:

$$V_{0d_1} = \frac{Q d_1}{S \epsilon_0}$$

Après déplacement:

$$V_{0d_2} = \frac{Q d_2}{S \epsilon_0}$$

b) Le travail requis pour éloigner les deux plaques:

$$W_{ext} = \Delta K + \Delta U \\ = \text{variation d'énergie cinétique} + \text{variation d'énergie potentielle}$$

$$\Delta K = 0 \text{ (vitesse constante)} \rightarrow W_{ext} = \Delta U = U_2 - U_1$$

$$U = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dV \quad (\text{intégrale sur le volume})$$

$$\Delta U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{d_2} \left( \frac{Q}{S \epsilon_0} \right)^2 dx \iint dy dz - \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{d_1} \left( \frac{Q}{S \epsilon_0} \right)^2 dx \iint dy dz$$

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2 S \epsilon_0} (d_2 - d_1)$$

## PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 2	2 heures	2.8.2, 2.8.3, 2.8.4, 2.8.6
----------	----------	----------------------------

### 2.8.3 Ligne de transport d'énergie

Une ligne de transport d'énergie est constituée de deux câbles cylindriques de longueur  $l = 10 \text{ km}$ , de rayon  $a = 1 \text{ cm}$  et dont les axes sont séparés d'une distance  $d = 2 \text{ m}$ . Une différence de potentiel de  $69 \text{ kV}$  est appliquée entre les deux câbles. Quelle est la charge  $Q$  portée par chaque câble ? On considère que les charges se répartissent uniformément à la surface des câbles et que le potentiel est uniforme sur chaque câble.

### 2.8.3 Ligne de transport d'énergie

Pour un câble (cylindre):

Voir le Td du chapitre 1 pour le calcul du champ électrique à l'extérieur d'un cylindre:

$$\vec{E}_\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\rho l} \hat{\rho}$$

Pour deux câbles, le champ se calcule en utilisant le principe de superposition:

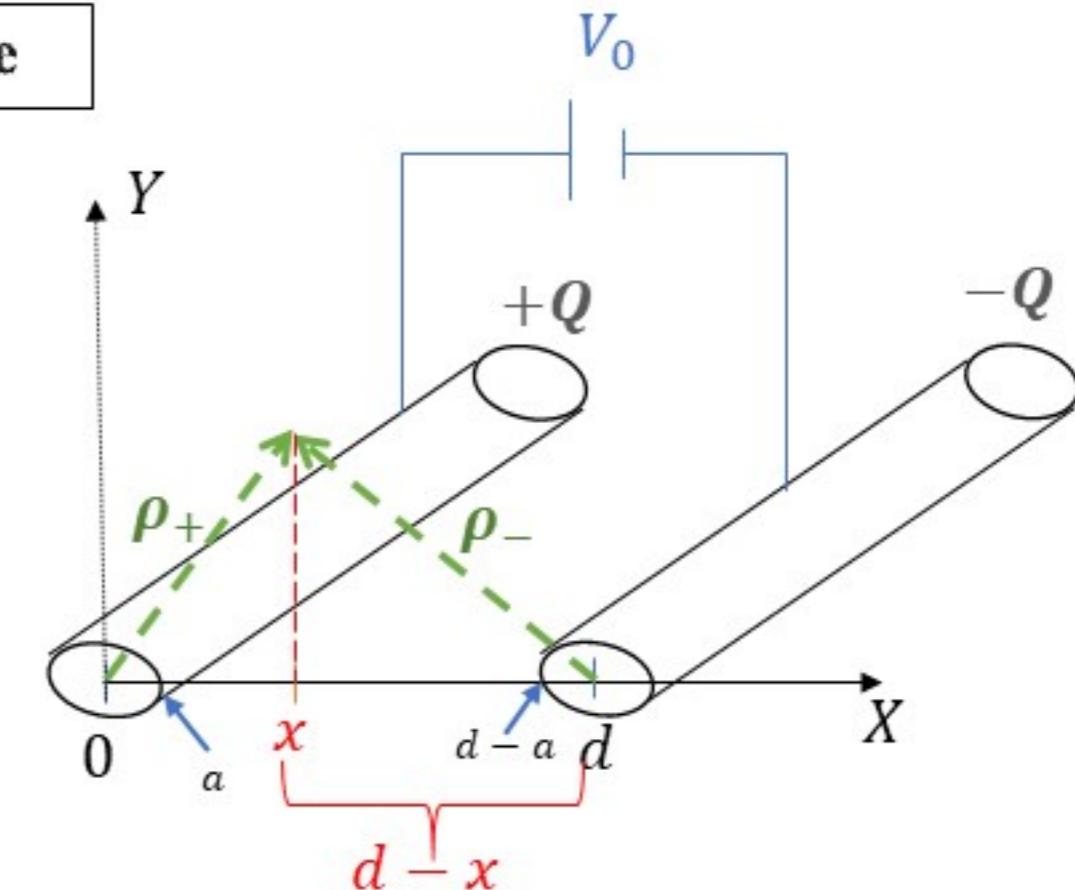
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\rho_+ l} \hat{\rho}_+ + \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0\rho_- l} \hat{\rho}_-$$

avec:  $\rho_+ = x$  ;  $\hat{\rho}_+ = \hat{x}$  et

$$\rho_- = d - x; \quad \hat{\rho}_- = -\hat{x}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 x l} \hat{x} + \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 (d-x) l} (-\hat{x})$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] \hat{x}$$



$$V_{a(d-a)} = V_a - V_{(d-a)} = V_0 = - \int_{d-a}^a \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

$$V_0 = - \int_{d-a}^a \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_{d-a}^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] \hat{x} \cdot \hat{x} dx$$

$$V_0 = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_{d-a}^a \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \int_{d-a}^a \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \left\{ \ln x \Big|_{d-a}^a - \ln(d-x) \Big|_{d-a}^a \right\}$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} (\ln(a) - \ln(d-a) - \ln(d-a) - \ln(a)) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} [2\ln(a) - 2\ln(d-a)]$$

$$V_0 = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{a}{d-a}\right) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi\varepsilon_0 l V_0}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} = 3,62 \text{ mC}$$

## PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 2	2 heures	2.8.2, 2.8.3, 2.8.4, 2.8.6
----------	----------	----------------------------

### 2.8.4 Tube diode

Un tube diode est constitué d'un tube à vide qui contient une longue cathode métallique et cylindrique de rayon  $a$  qui est entourée d'une anode métallique cylindrique de rayon  $b$ . La cathode est chauffée de façon à émettre des électrons avec une densité  $\rho_v(\rho) = -k/\rho$  entre la cathode et l'anode. La cathode est mise à la masse ( $V = 0$ ) tandis que l'anode est laissée flottante.

- Quelle est l'expression du champ électrique entre l'anode et la cathode ?
- Si  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$ ,  $k = 10^{-6} \text{ C/m}^2$ , quel est le potentiel de l'anode ?

## 2.8.4 Tube diode

a) Trouvons le champ électrique dans la région  $a < \rho < b$  :  
symétrie cylindrique; surface de Gauss de rayon  $\rho$ :

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in} \quad \text{avec} \quad Q_{in} = \int \rho_V dV$$

En coordonnées cylindriques:  $dV = \rho d\rho d\phi dz$

$$Q_{in} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b -\frac{k}{\rho} \rho d\rho d\phi dz = 2\pi k l (\rho - a)$$

Or

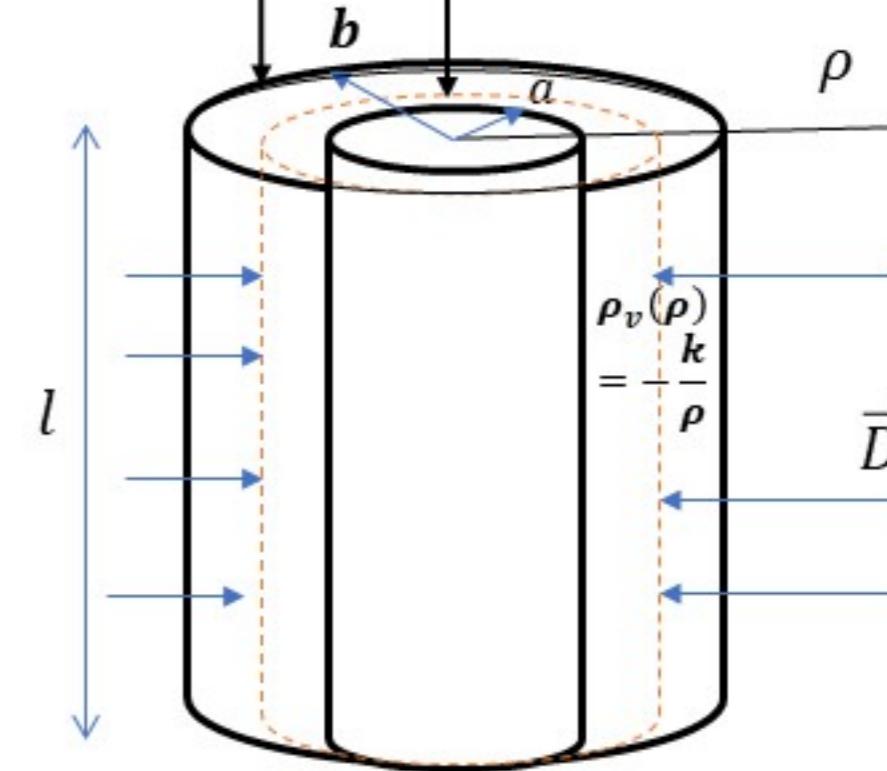
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \int dS = D 2\pi\rho l$$

Voir Td 1 pour le détail du calcul de  $D$  pour un cylindre

$$\Rightarrow D 2\pi\rho l = 2\pi k l (\rho - a)$$

$$\Rightarrow D = k \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = -\frac{k}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \hat{\rho}$$

anode ( $V_a = V$ )      cathode ( $V_b = 0$ )



b) Trouvons:

$$V_{ab} = V_a - V_b = V - 0 = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad d\vec{l} = d\rho \hat{\rho}$$

$$V = - \int_b^a E(\rho) d\rho = - \int_b^a \frac{k}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) d\rho$$

$$V = - \frac{k}{\epsilon_0} \left[ \int_b^a d\rho - a \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} \right] = - \frac{k}{\epsilon_0} \left[ (a - b) - a \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right]$$

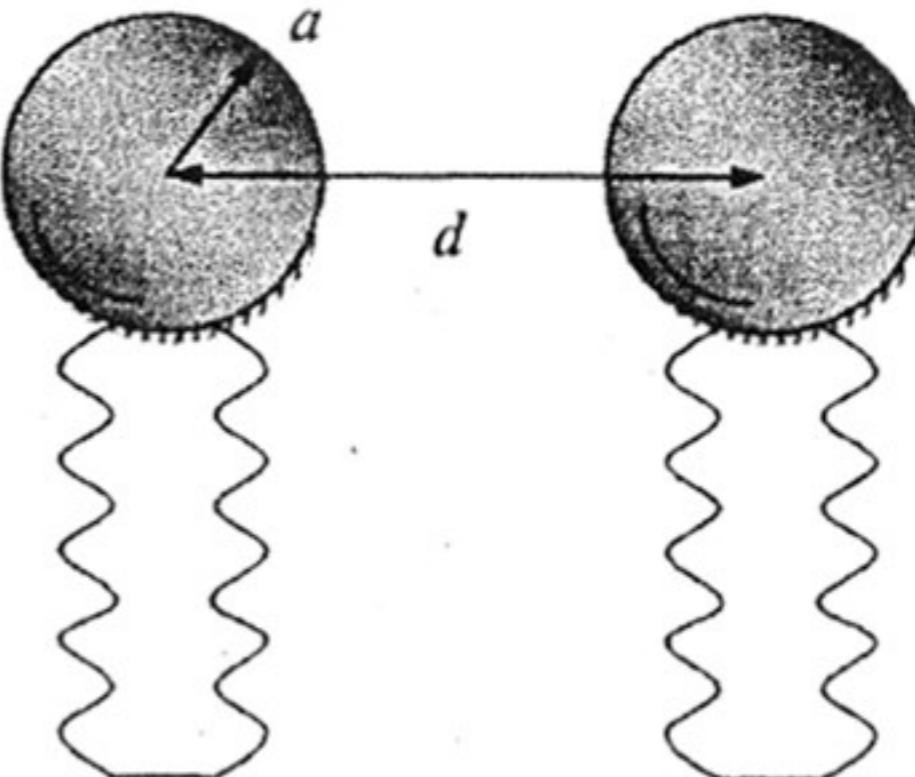
$$V = \frac{k}{\epsilon_0} \left[ a \ln\left(\frac{a}{b}\right) - (a - b) \right] = 756,43 \text{ V}$$

## PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 2	2 heures	2.8.2, 2.8.3, 2.8.4, 2.8.6
----------	----------	----------------------------

### 2.8.6 Condensateur à haute tension

Un condensateur à haute tension est formé de deux sphères métalliques de rayon  $a$ , dont les centres sont espacés d'une distance  $d$ , et qui sont situées dans l'air. Quelles sont les charges portées par les sphères lorsqu'une différence de potentiel  $V_0$  est appliquée entre les deux sphères? (parce que  $a \ll d$ , les charges se répartissent uniformément à la surface des sphères qui sont isolées du sol par des supports en céramique).



## 2.8.6 Condensateur à haute tension

- 2 sphères; symétrie sphérique; théorème de Gauss;
- Principe de superposition;

Pour une sphère:

$$\phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in} \rightarrow \phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint dS = D 4\pi r^2 \Rightarrow D = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \hat{r}$$

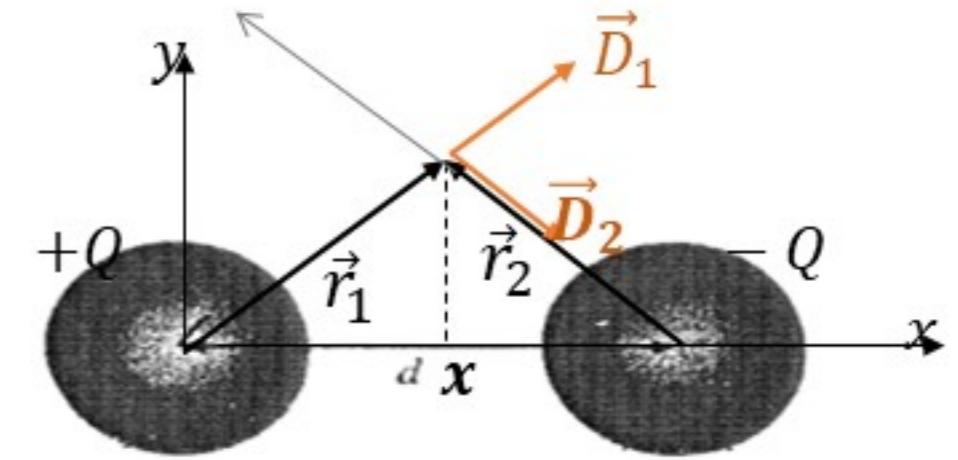
Pour la sphère de gauche:  $\vec{D}_1 = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \hat{r}_1$

Pour la sphère de droite:  $\vec{D}_2 = \frac{-Q}{4\pi r_2^2} \hat{r}_2$

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}_1 + \frac{-Q}{4\pi r^2} \hat{r}_2$$

$$\vec{D} = \vec{D}_{1x} + \vec{D}_{2x} = \frac{Q}{4\pi x^2} \hat{x} + \frac{-Q}{4\pi(d-x)^2} (-\hat{x}) = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{D} = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x}}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x}$$



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x} \quad \text{et} \quad V_{a(d-a)} = V_a - V_{d-a} = V_0 = - \int_{d-a}^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ici aussi:

$$\vec{E} \parallel d\vec{l} \parallel dx \quad \text{et} \quad d\vec{l} = dx \hat{x} \Rightarrow \vec{E} \cdot dx \hat{x} = E dx$$

$$V_0 = - \int_{d-a}^a E dx = - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \int_{d-a}^a \frac{dx}{x^2} + \int_{d-a}^a \frac{dx}{(d-x)^2} \right]$$

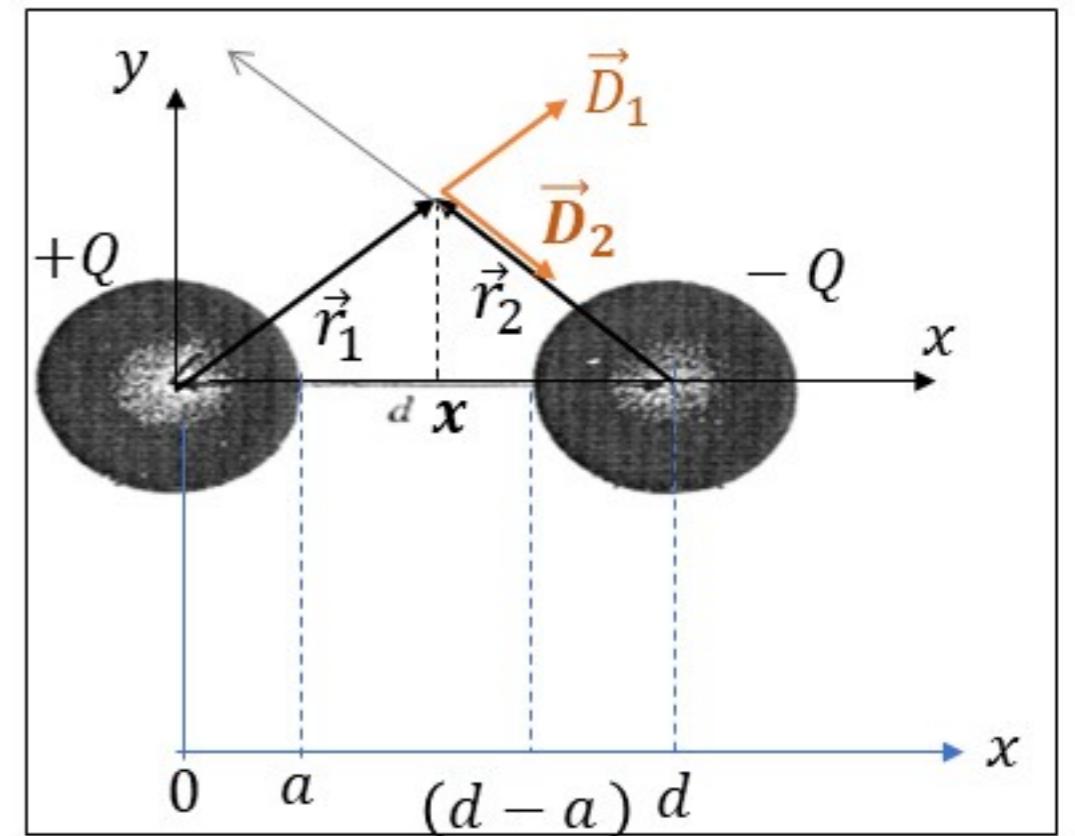
Sachant que:

$$\int_{d-a}^a \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{d-a}^a = -\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} = \frac{2a-d}{a(d-a)}$$

$$\int_{d-a}^a \frac{dx}{(d-x)^2} = +\frac{1}{(d-x)} \Big|_{d-a}^a = \frac{1}{d-a} - \frac{1}{d-d+a} = \frac{2a-d}{a(d-a)}$$

Donc:

$$V_0 = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{2a-d}{a(d-a)} \right] = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{2a-d}{a(d-a)} \right] \Rightarrow Q = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\left[ \frac{d-2a}{a(d-a)} \right]}}$$



**De Albert Einstein« La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information. »**

### 3.9.1 Capacité d'une ligne de transmission bifilaire

Une ligne de transmission est constituée de deux conducteurs cylindriques de longueur  $l$ , de rayon  $a$  dont les centres sont séparés par une distance  $d$  dans l'air. Quelle est la capacité entre les deux conducteurs. Le rayon  $a$  est très petit par rapport à l'écartement  $d$ .

### 3.9.1 Capacité d'une ligne de transmission bifilaire

Voir le Td du chapitre 1 pour le calcul de  
Densité du flux électrique à l'extérieur d'un cylindre:

$$\vec{D}_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho l} \hat{\rho}$$

Principe de superposition:

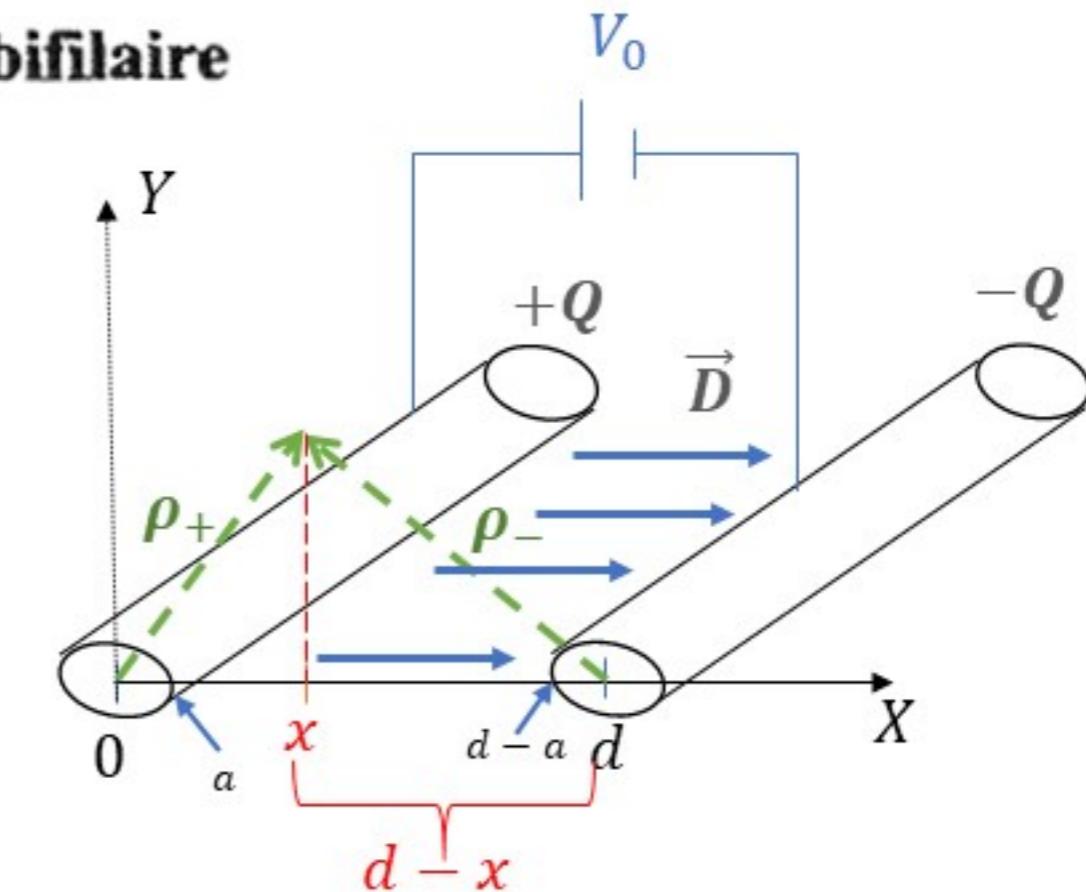
$$\vec{D} = \vec{D}_+ + \vec{D}_- = \frac{Q}{2\pi\rho_+ l} \hat{\rho}_+ + \frac{-Q}{2\pi\rho_- l} \hat{\rho}_-$$

avec:  $\rho_+ = x ; \hat{\rho}_+ = \hat{x}$  et

$$\rho_- = d - x ; \hat{\rho}_- = -\hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 x l} \hat{x} + \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 (d-x) l} (-\hat{x})$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] \hat{x}$$



Différence de potentiel:

$$V_{a(d-a)} = V_a - V_{(d-a)} = V_0 = - \int_a^{a(d-a)} \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

$$V_0 = - \int_{d-a}^a \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_{d-a}^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] \hat{x} \cdot \hat{x} dx$$

$$V_0 = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_{d-a}^a \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \int_{d-a}^a \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \left\{ \ln x \Big|_{d-a}^a - \ln(d-x) \Big|_{d-a}^a \right\}$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} (\ln(a) - \ln(d-a) - \ln(d-a) - \ln(a)) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} [2\ln(a) - 2\ln(d-a)]$$

$$V_0 = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{a}{d-a}\right) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{Q}}{V_0} = \frac{Q}{\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}}$$

### 3.9.2 Charges de polarisation

Une sphère non-conductrice de rayon  $R$ , contient une charge positive répartie selon une densité volumique  $\rho_V = A r$ , où  $A = 4 \text{ C/m}^4$ . La permittivité relative de cette substance varie aussi en fonction du rayon selon la loi  $\epsilon_r = 1 + Br^2$ , où  $B = 1 \text{ m}^{-2}$ .

- Établir les expressions du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.
- Déterminer la charge de polarisation induite à la surface de la sphère diélectrique.

### 3.9.2 Charges de polarisation

Pour une sphère:

$$\phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in} \rightarrow \phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint dS = D 4\pi r^2 \Rightarrow D = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \hat{r}$$

avec:

$$Q_{in} = \int \rho_V dV = \int \rho_V r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

À l'intérieur de la sphère:

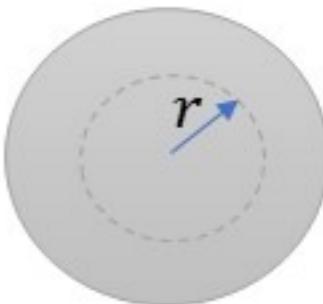
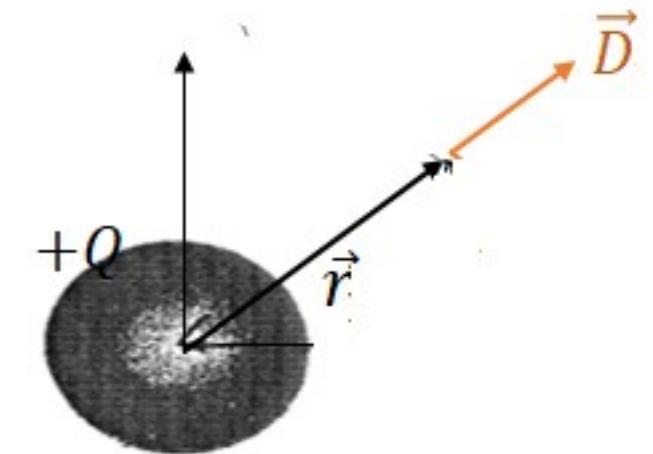
$$Q_{in} = \int \rho_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r A r (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^r r^3 dr = A\pi r^4$$

$$\rightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \hat{r} = \frac{A\pi r^4}{4\pi r^2} \hat{r} \Leftrightarrow \vec{D} = \frac{Ar^2}{4} \hat{r} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Ar^2}{4 \epsilon_0 (1 + \beta r^2)} \hat{r}$$

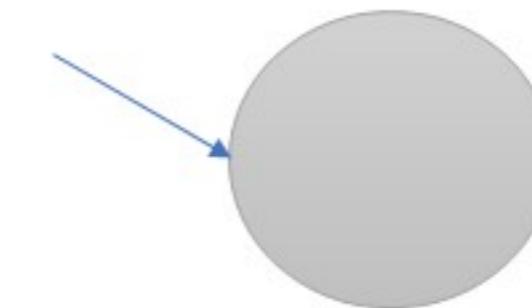
À l'extérieur de la sphère:

$$Q_{in} = \int \rho_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R A r (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R r^3 dr = A\pi R^4$$

$$\rightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \hat{r} = \frac{A\pi R^4}{4\pi r^2} \hat{r} \Leftrightarrow \vec{D} = \frac{AR^4}{4r^2} \hat{r} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{AR^4}{4r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$



**La charge de polarisation induite à la surface du diélectrique ( $r = R$ ):**



$$\mathcal{P} = \rho_{si} = \frac{Q_{si}}{4\pi R^2}$$

$$Or : \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}} \quad \Rightarrow$$

$$EN SURFACE: \quad \vec{D}(\text{à l'intérieur pour } r = R) = \vec{D}(\text{à l'extérieur pour } r = R)$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \vec{E}_{diel}(r = R) + \vec{\mathcal{P}}(r = R) = \epsilon_0 \vec{E}_{ext}(r = R) + \vec{\mathcal{P}}(ext)$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \frac{AR^2}{4 \epsilon_0 (1 + \beta R^2)} + \frac{Q_{si}}{4\pi R^2} = \epsilon_0 \frac{AR^4}{4R^2 \epsilon_0} + 0$$

$$\Rightarrow Q_{si} = \frac{4\pi R^6}{(1 + R^2)}$$

### 3.9.6 Modification d'un condensateur

La superficie d'une armature d'un condensateur plan est de  $0,12 \text{ m}^2$ ; l'écartement entre les armatures est de 1,2 cm. Une pile charge les armatures jusqu'à une différence de potentiel de 120 V; elle est ensuite débranchée. On place symétriquement entre les armatures un diélectrique de 0,4 cm d'épaisseur ayant une permittivité relative de 4,8. Calculez la capacité :

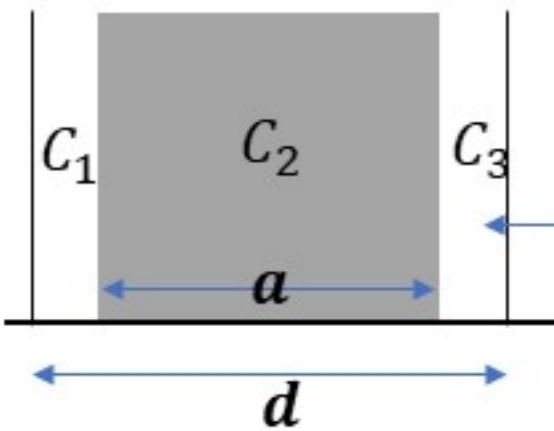
- a) Avant l'introduction du barreau;
- b) Après l'introduction du barreau.
- c) Quelle est la valeur de la charge libre  $Q$  avant et après l'introduction du barreau ?
- d) Déterminez le champ électrique dans l'espace entre les armatures et le diélectrique.
- e) Quel est le champ électrique dans le diélectrique ?
- f) Quelle est la différence de potentiel entre les armatures en présence du diélectrique ?
- g) Quel est le travail accompli durant l'introduction du barreau ?
- h) Quelle est la charge induite  $Q_i$  sur chaque face du diélectrique ?

**a) Avant d'introduire le diélectrique:**

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,854 \times 10^{-11} \times 0,12}{1,2 \times 10^{-2}} = 8,85 \times 10^{-11} \text{F}$$

**b) Après l'introduction du diélectrique:**

Le système est équivalent à trois condensateurs branchés série:  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$



$$C_1 = C_3 = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{(d-a)}{2}} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{a}$$

$$\text{et donc: } C = \frac{1}{\frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{2 \frac{(d-a)}{2}}{\epsilon_0 S} + \frac{a}{\epsilon_0 \epsilon_r S}} = \frac{\epsilon_0 S}{d - a + \frac{a}{\epsilon_r}} = 1,20 \times 10^{-10} \text{ F}$$

**c) La charge libre: Conservation de la charge:**

$$Q_{avant} = Q_{apres} = Q = C_0 V_0 = 8,85 \times 10^{-11} \times 120 = 1,06 \times 10^{-8} \text{ C}$$

d) Le champ électrique (voir notes de cours et j'ai montré la démarche en TD):

$$\vec{D} = \frac{Q}{S} \hat{x} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{S\epsilon} \hat{x} = \frac{Q}{S\epsilon_0\epsilon_r} \hat{x} & \text{pour } r < R \\ \vec{E} = \frac{\vec{D}}{S\epsilon_0} & \text{pour } r > R \end{cases}$$

e) Le champ électrique dans le diélectrique:

$$\vec{E} = \frac{Q}{S\epsilon_0\epsilon_r} \hat{x} = 2,08 \quad \hat{x} \quad \left( \frac{kV}{m} \right)$$

f) Le potentiel électrique avec diélectrique:

$$Q_{avant} = Q_{apres} = C_o V_o = C V_{od} \Rightarrow V_{od} = \frac{C_o V_o}{C} = \frac{Q}{\frac{\epsilon_0 S}{d - a + \frac{a}{\epsilon_r}}} = 88,34 \text{ V}$$

g) Travail accompli durant l'introduction du diélectrique:

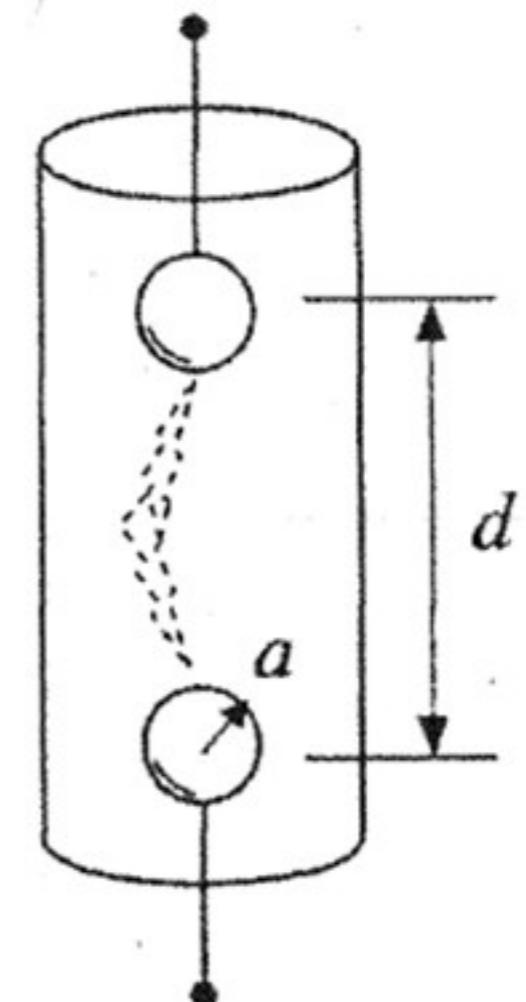
$$W_{ext} = \Delta K + \Delta U = \mathbf{0} + U_{avec \, dielectrique} - U_{sans} = \frac{Q}{2} (V_{od} - V_o) = -1,67 \times 10^{-7} \text{ J}$$

h) Charge sur la surface du diélectrique:  $Q_i = \rho_{si} S = \mathcal{P} S = (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}) S = \left( \mathbf{D} - \epsilon_0 \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right) S = \mathbf{D} S \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$

$$Q_i = Q \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) = 8,41 \times 10^{-9} \text{ C}$$

### 3.9.9 Éclateur

Un éclateur est un dispositif non-linéaire destiné à protéger un circuit contre une surtension. Par exemple, on l'utilise entre une antenne et un récepteur radio pour protéger celui-ci contre la foudre. L'éclateur est formé de deux sphères conductrices de rayon  $a$  dont les centres sont séparés par une distance  $d$ . Les sphères sont situées dans un gaz dont la rigidité diélectrique est égale à  $E_c$ . Lorsque la différence de potentiel excède une valeur critique  $V_{max}$ , le gaz s'ionise et court-circuite les deux sphères qui cessent alors de se comporter comme un circuit ouvert. Donner l'expression de  $V_{max}$ . On suppose que la distribution des charges est uniforme sur les sphères parce que leur rayon est beaucoup plus petit que leur écartement.



Voir TD1 pour le calcul du champ électrique pour deux sphères conductrices, et TD2 pour l'expression du potentiel électrique.  
On avait trouvé les expressions suivantes:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x}$$

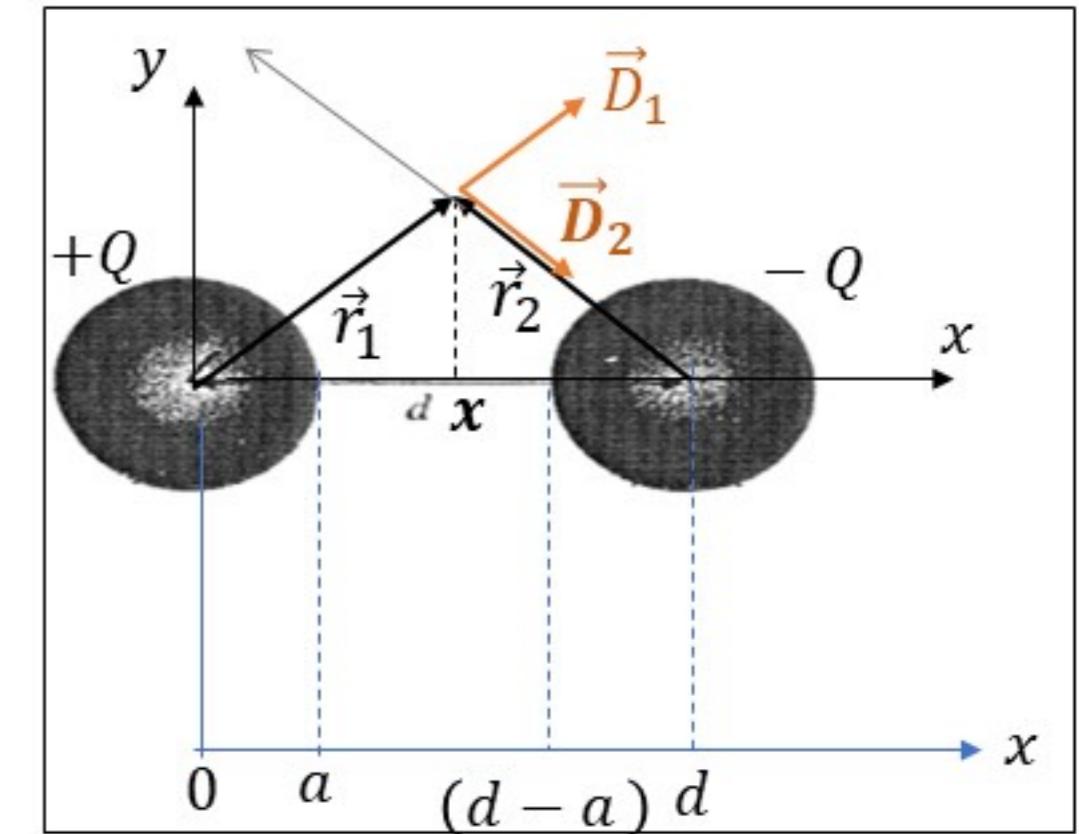
$$V_{a(d-a)} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{(d-a)} \right]$$

$$E \text{ est max} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{x^4} - \frac{2(-1)(d-x)}{(d-x)^4} = 0$$

$$\Rightarrow -(d-x)^3 + x^3 = 0$$

$$(d-a) \text{ et } a \text{ sont des solutions et donc } E_c \text{ est atteint à la surface interne des sphères} \quad E_c = E(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(d-a)^2} \right]$$

$$\frac{E_c}{V_{a(d-a)}} = \frac{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(d-a)^2} \right]}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(d-a)^2} \right]} = \frac{(d-a)^2 + a^2}{2(d-2a)a(d-a)} \simeq \frac{1}{2a} \quad \text{pour } d \gg a$$



## Des grenouilles de Galvani à la pile Volta à...

### 4.9.1 Retour du courant par le sol

Le sol est parfois utilisé comme parcours de retour du courant pour des lignes de transport d'énergie formées d'un seul conducteur (ce qui économise le coût d'un second fil). On dispose juste sous la surface du sol, qui a une conductivité électrique uniforme  $\sigma$ , deux électrodes hémisphériques de rayon  $a$  séparées d'une grande distance ( $d \gg a$ ). Quelle est la résistance entre les deux hémisphères ? (Parce que  $d \gg a$ , on considère que la densité de courant est uniforme à la surface des électrodes et que le champ électrique en un point est égal à la somme des champs produits par chacune des deux électrodes).

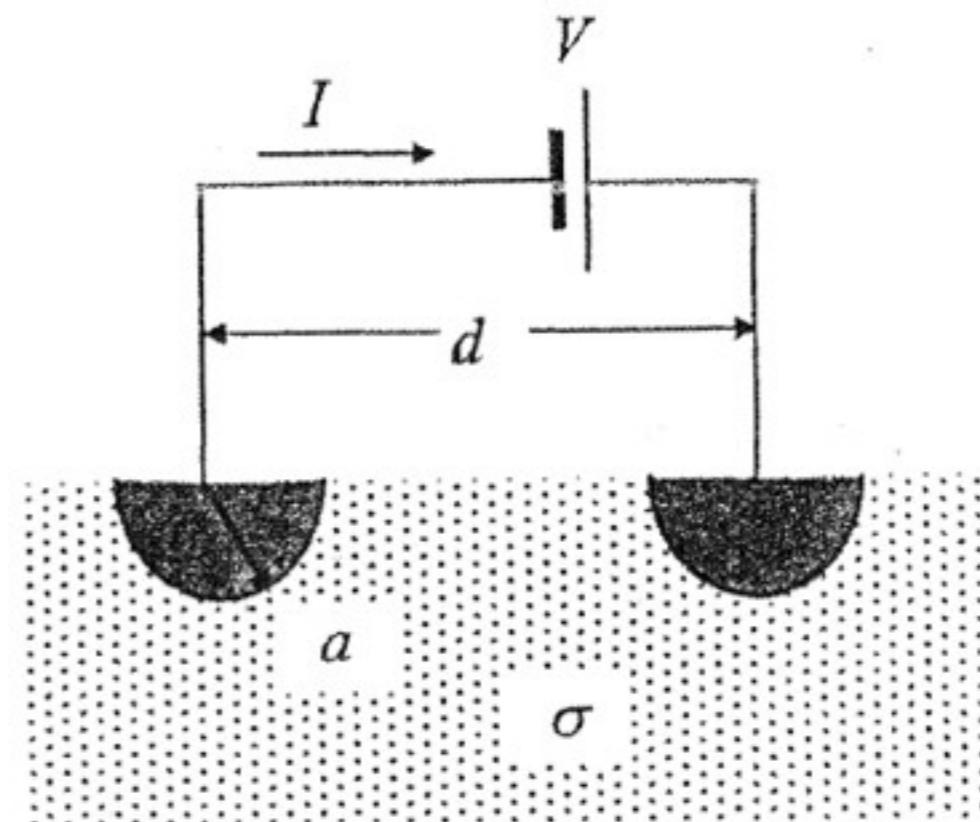


Figure 4.15 Retour par le sol.

Réponse :  $R = 1/\pi\sigma a$

### On cherche la résistance entre les électrodes

- 1) On détermine l'expression de la densité de courant  $\vec{J}$  produite par une seule électrode :  
Pour chaque électrode on aura:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 2\pi J r^2 \Rightarrow J = \frac{I}{2\pi r^2}$$

On détermine l'expression de  $J$  sur le segment de droite pour  $y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J}_g = -\frac{I}{2\pi x^2} \hat{x} \\ \vec{J}_g = -\frac{I}{2\pi (d-x)^2} \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \vec{J} = \vec{J}_g + \vec{J}_g \Rightarrow \vec{J} = -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{I}{x^2} + \frac{I}{(d-x)^2} \right] \hat{x}$$

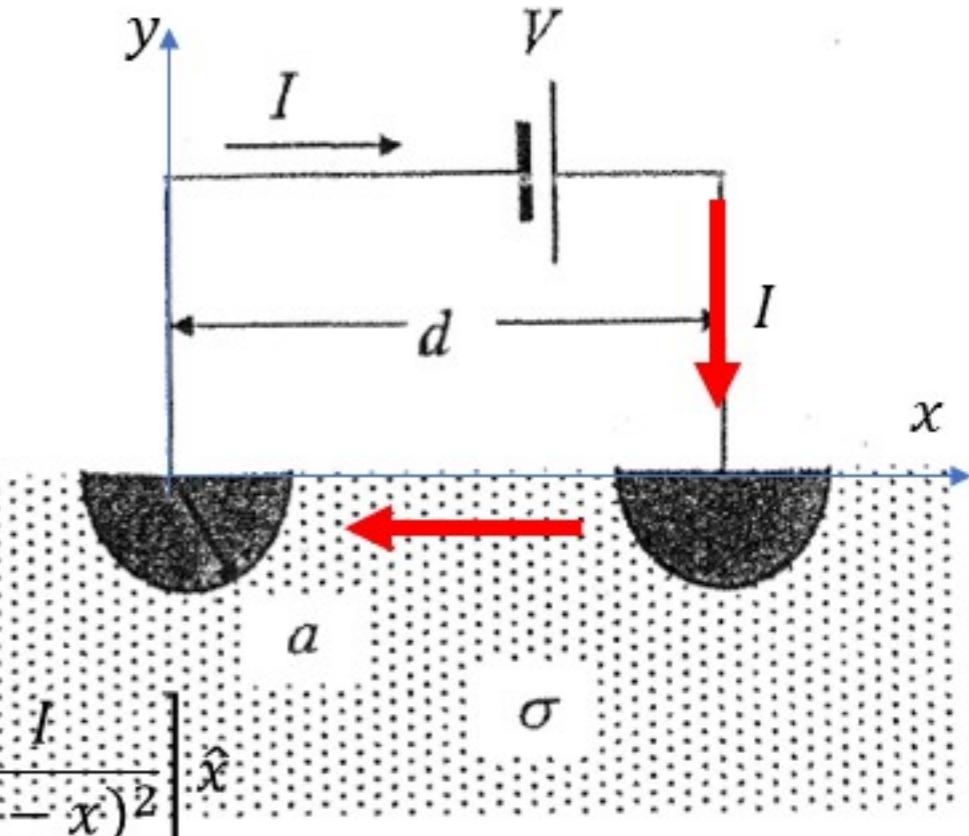
- 2) Expression du champ électrique:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = -\frac{I}{2\pi\sigma} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x}$$

- 3) Calcul de la différence de potentiel entre les 2 électrodes:

$$\begin{aligned} V &= - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^{d-a} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x} \cdot dx \hat{x} = -\frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^{d-a} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] dx = \frac{I}{\pi\sigma} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right] \approx \frac{I}{\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{d} \right) \\ &\approx \frac{I}{\pi\sigma} \left( \frac{d-a}{ad} \right) \approx \frac{I}{\pi\sigma} \left( \frac{d}{ad} \right) \approx \frac{I}{\pi\sigma a} \quad \text{pour } a \ll d \end{aligned}$$

- 3) Résistance:  $R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\pi\sigma a}$



### 4.9.2 Courant de fuite dans câble coaxial

L'espace entre les deux conducteurs d'une ligne de transmission coaxiale est rempli par deux diélectriques qui possèdent des conductivités très faibles, mais non-négligeables. Entre le rayon  $a$  du conducteur intérieur et le rayon  $b$  du second diélectrique, la conductivité est égale à  $\sigma_1$  et entre ce rayon  $b$  et le rayon  $c$  du conducteur extérieur, la conductivité est égale à  $\sigma_2$ . Trouver la résistance de fuite entre les conducteurs extérieur et intérieur pour une longueur de câble de un mètre (on considère que la conductivité des deux conducteurs est très élevée).

Réponse :  $R=1/(2\pi l) \left( (\ln(b/a)/\sigma_1) + (\ln(c/b)/\sigma_2) \right)$

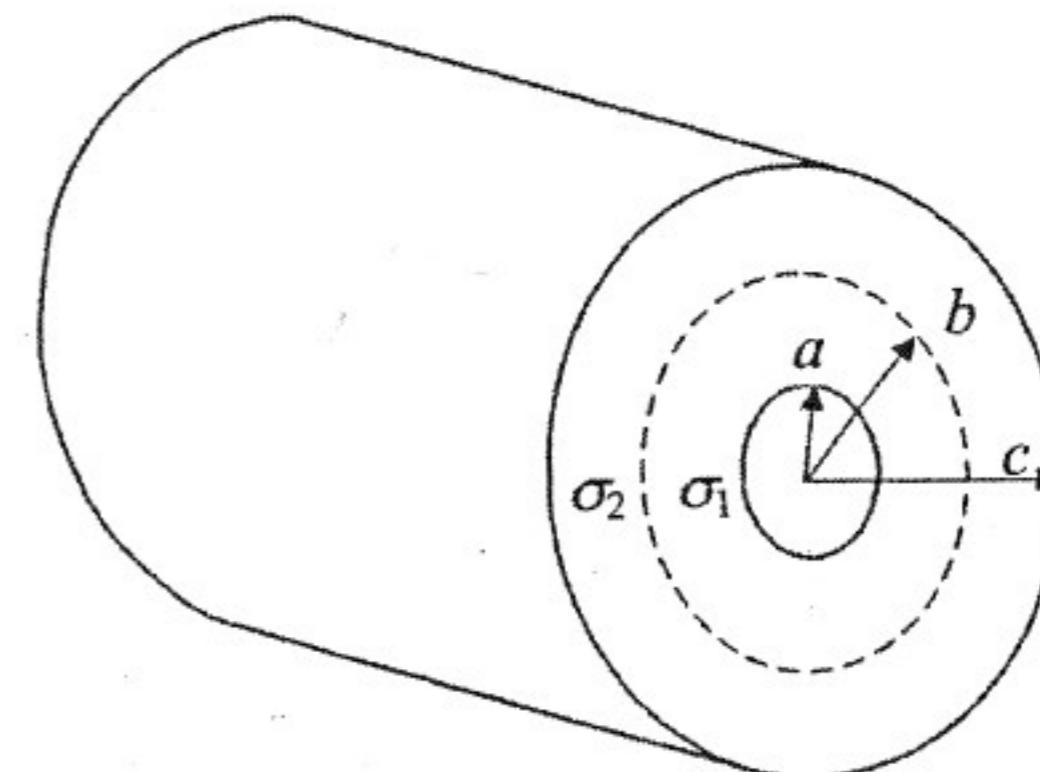


Figure 4.16 Un câble coaxial avec deux diélectriques différents.

## On cherche le courant de fuite dans un câble coaxial

1) On détermine l'expression de la densité de courant  $\vec{J}$  de fuite:

On a :

$$I_f = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} = J_f S = J_f 2\pi\rho L \Rightarrow \vec{J}_f = \frac{I_f}{2\pi\rho L} \hat{\rho}$$

2) On détermine l'expression du champ dans les deux régions puisque la conductivité est différente

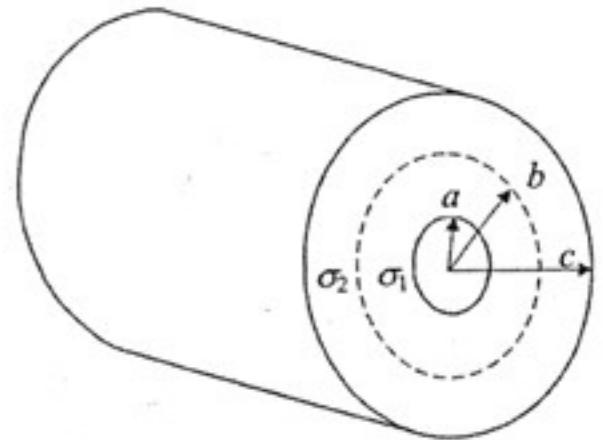
$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{\vec{J}_f}{\sigma_1} = \frac{I_f}{2\pi\rho\sigma_1 L} \hat{\rho} & \text{pour } a < \rho < b \\ \vec{E} = \frac{\vec{J}_f}{\sigma_2} = \frac{I_f}{2\pi\rho\sigma_2 L} \hat{\rho} & \text{pour } b < \rho < c \end{cases}$$

3) Calcul de la différence de potentiel entre a et c:

$$V_{ac} = - \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{I_f}{2\pi L} \left[ \frac{1}{\sigma_2} \int_c^b \frac{1}{\rho} d\rho + \frac{1}{\sigma_1} \int_b^a \frac{1}{\rho} d\rho \right] = - \frac{I_f}{2\pi L} \left[ \frac{\ln \frac{b}{c}}{\sigma_2} + \frac{\ln \frac{a}{b}}{\sigma_1} \right]$$

4) Résistance:

$$R_F = \left| \frac{V_{ac}}{I_f} \right| = - \frac{1}{2\pi L} \left[ \frac{\ln \frac{b}{c}}{\sigma_2} + \frac{\ln \frac{a}{b}}{\sigma_1} \right] \text{ prendre la valeur absolue}$$



### 4.9.3 Câble coaxial inhomogène

L'espace entre les deux conducteurs d'une ligne de transmission coaxiale est rempli par un diélectrique qui possède une conductivité très faible variant selon le rayon  $\rho$ . Entre le rayon  $a$  du conducteur intérieur et le rayon  $b$  du conducteur extérieur, la conductivité varie linéairement de  $\sigma_a$  à  $\sigma_b$ . Si on considère un câble ayant une longueur de un mètre dans lequel un courant de fuite  $I_f$  circule dans le diélectrique entre les deux conducteurs :

- Quelles sont les expressions permettant de décrire la densité de courant  $\vec{J}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  dans le diélectrique?
- Quelle est la différence de potentiel  $V_0$  entre les deux conducteurs?
- Quelle est la résistance de fuite  $R_f$  entre les deux conducteurs?
- Quelle est la valeur de  $R_f$  si  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $b = 4 \text{ mm}$ ,  $\sigma_a = 0,25 \times 10^{-7} \text{ S/m}$ ,  $\sigma_b = 10^{-7} \text{ S/m}$ ?

*Réponses:* a)  $J_\rho = I_f / (2\pi\rho)$  et  $E_\rho = (b J_\rho) / (2\pi\sigma_b\rho^2)$ ; b)  
 $V_0 = I_f(b-a) / (2\pi\sigma_b a)$ ;  
c)  $R_f = (b-a) / (2\pi\sigma_b a)$ ; d)  $R_f = 4,77 \text{ M}\Omega$

$$\sigma_a, a \rightarrow 0$$

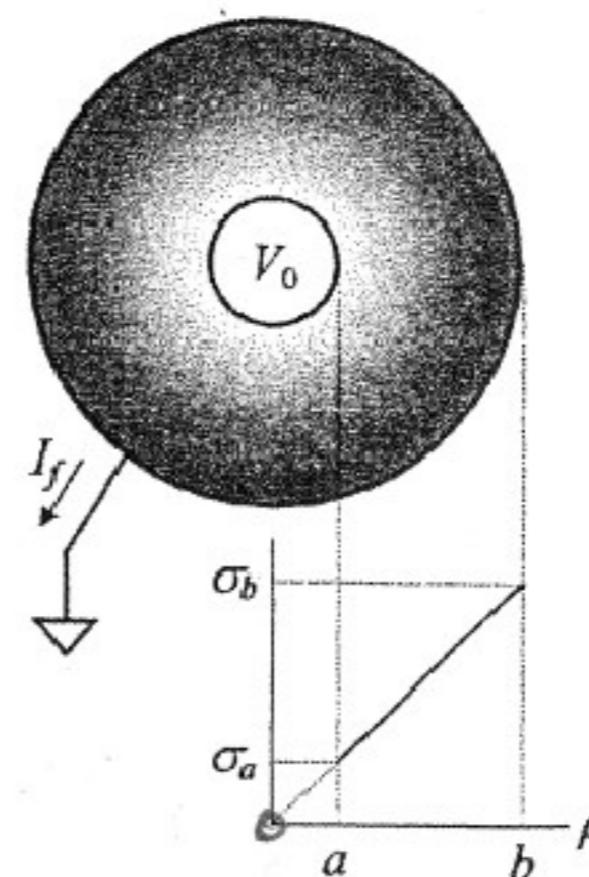


Figure 4.17 Câble coaxial avec diélectrique

## Câble coaxial inhomogène

La conductivité varie linéairement entre les rayons  $a$  et  $b$

1) On détermine l'expression de la densité de courant  $\vec{J}$  de fuite:

$$I_f = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} = J_f S = J_f 2\pi\rho L \Rightarrow \vec{J}_f = \frac{I_f}{2\pi\rho L} \hat{\rho}$$

2) De la figure on déduit la variation de la conductivité en fonction du rayon  $\rho$ :

$$\sigma = \frac{\sigma_b}{b} \rho \quad (\text{on peut utiliser aussi l'expression } \sigma = \frac{\sigma_a}{a} \rho \text{ ou } \sigma = \frac{\sigma_b - \sigma_a}{b-a} \rho)$$

3) Et donc le champ électrique :

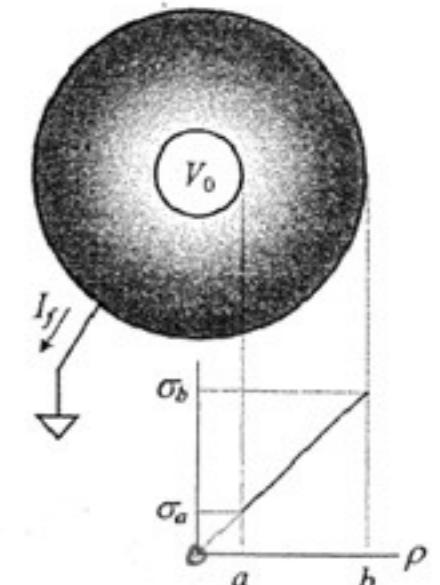
$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I_f b}{2\pi\rho^2 \sigma_b L} \hat{\rho}$$

3) Calcul de la différence de potentiel:

$$V_{ab} = V_a - V_b = V_0 - 0 = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{I_f b}{2\pi \sigma_b L} \left[ \int_b^a \frac{1}{\rho^2} d\rho \right] = - \frac{I_f b}{2\pi \sigma_b L} \left[ -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] = \frac{I_f}{2\pi \sigma_b L} \left[ \frac{b-a}{a} \right]$$

4) Résistance:

$$R_F = \frac{V_0}{I_f} = \frac{1}{2\pi \sigma_b L} \left[ \frac{b-a}{a} \right]$$



#### 4.9.4 Ligne souterraine

Une ligne de transport d'énergie est formée de deux câbles conducteurs parallèles enfouis dans le sol. Chaque câble est formé d'un conducteur de rayon  $a = 1 \text{ cm}$  entouré d'une gaine isolante de rayon  $b = 1,5 \text{ cm}$ . La conductivité de cette gaine est  $\sigma_g = 10^{-9} \text{ S/m}$ . La distance entre le centre des câbles est  $d = 30 \text{ cm}$ . Le sol a une conductivité  $\sigma_s = 10^{-2} \text{ S/m}$  et il s'étend à l'infini. Quelle est la résistance entre les deux câbles pour une longueur de 1 km?

Note : Parce que  $d \gg a$  et  $d \gg b$ , on considère que la densité de courant est uniforme à la surface des conducteurs et de la gaine et que le champ électrique en tout point est égal à la somme des champs produits par chaque conducteur. Parce que  $d \ll 1 \text{ km}$ , on considère que les câbles ont une longueur infinie.

Réponse :  $R=135 \text{ k}\Omega$

129

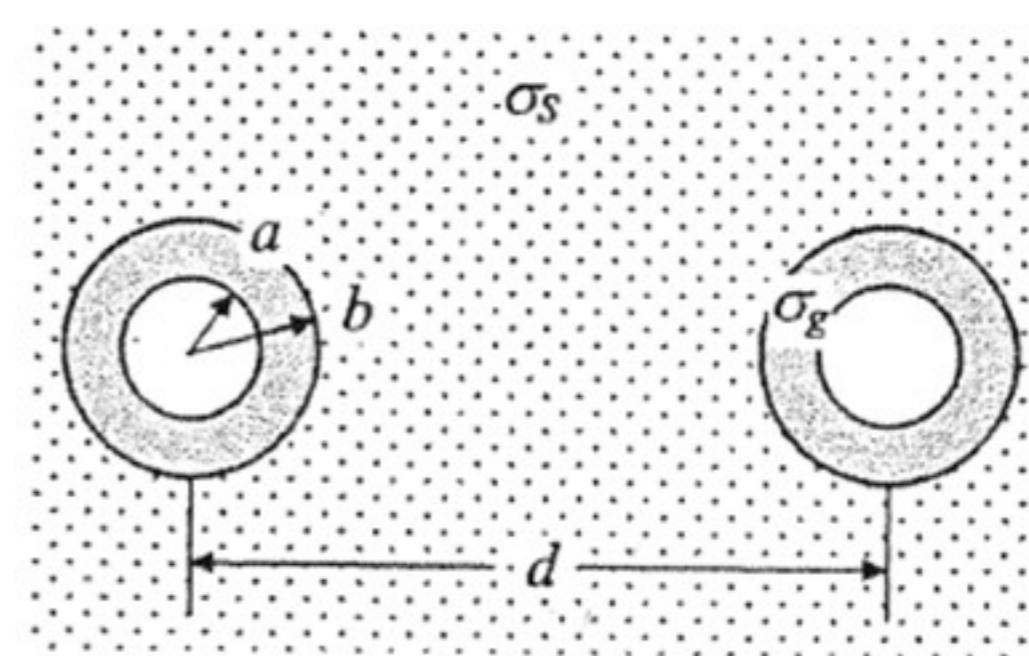


Figure 4.18 Deux câbles dans le sol.

## Ligne souterraine

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 2\pi J r^2 \Rightarrow J = \frac{I}{2\pi\rho L}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J}_g = -\frac{I}{2\pi\rho_g L} \hat{x} \\ \vec{J}_g = -\frac{I}{2\pi\rho_d L} \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \vec{J} = \vec{J}_g + \vec{J}_g \Rightarrow \vec{J} = -\frac{1}{2\pi L} \left[ \frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)} \right] \hat{x}$$

2) Expression du champ électrique:

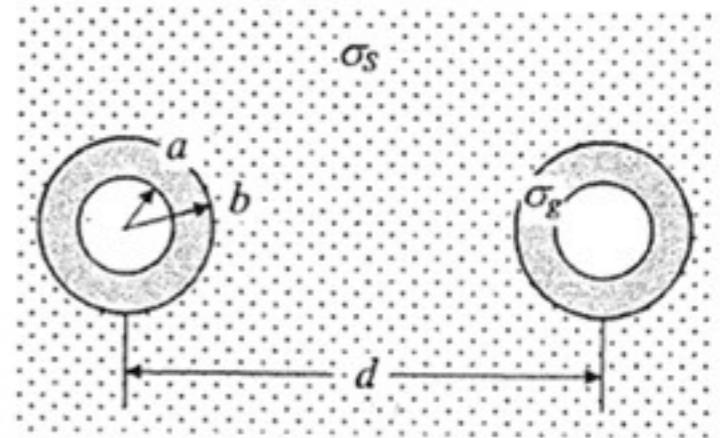
$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{\vec{J}_f}{\sigma_g} = -\frac{1}{2\pi L \sigma_g} \left[ \frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)} \right] \hat{x} & \text{pour } a < x < b \text{ et } d-a < x < d-b \\ \vec{E} = \frac{\vec{J}_f}{\sigma_s} = -\frac{1}{2\pi L \sigma_s} \left[ \frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)} \right] \hat{x} & \text{pour } b < x < d-b \end{cases}$$

3) Calcul de la différence de potentiel

$$V_{(d-a)a} = V = - \int_a^{d-a} E dx = \int_a^b \frac{1}{2\pi L \sigma_g} \left[ \frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)} \right] dx + \int_b^{d-b} \frac{1}{2\pi L \sigma_s} \left[ \frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)} \right] dx + \int_{d-b}^{d-a} \frac{1}{2\pi L \sigma_s} \left[ \frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)} \right] dx$$

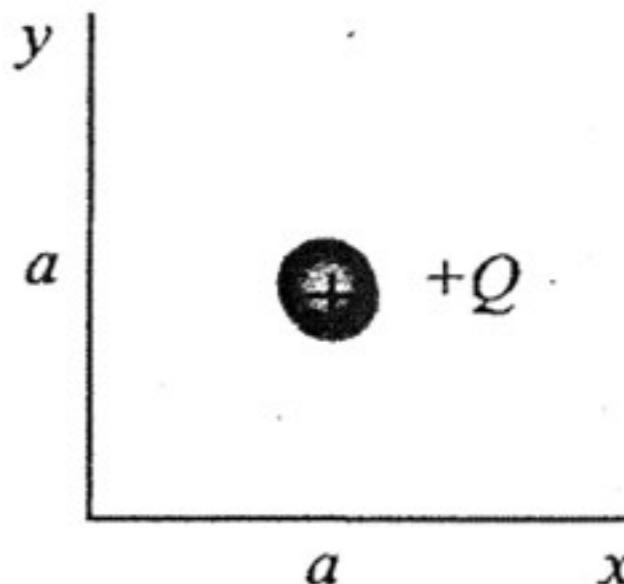
3) Résistance:

$$R = \frac{V}{I} = 129 \text{ k}\Omega$$

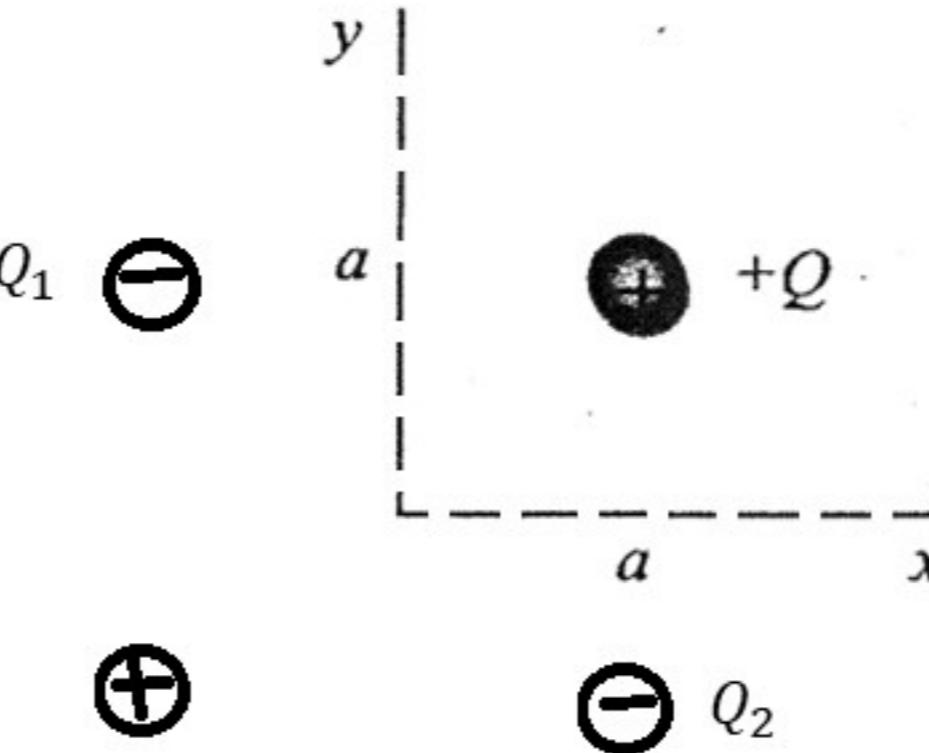


### 5.7.1 Charge dans un coin

Une charge  $+Q$  est située à une hauteur  $a$  au-dessus d'un grand plan conducteur horizontal et à une distance  $a$  d'un autre grand plan conducteur vertical qui est connecté au premier plan. Trouver les charges images et leur position, justifier votre choix.



### 5.7.1 Charge dans un coin



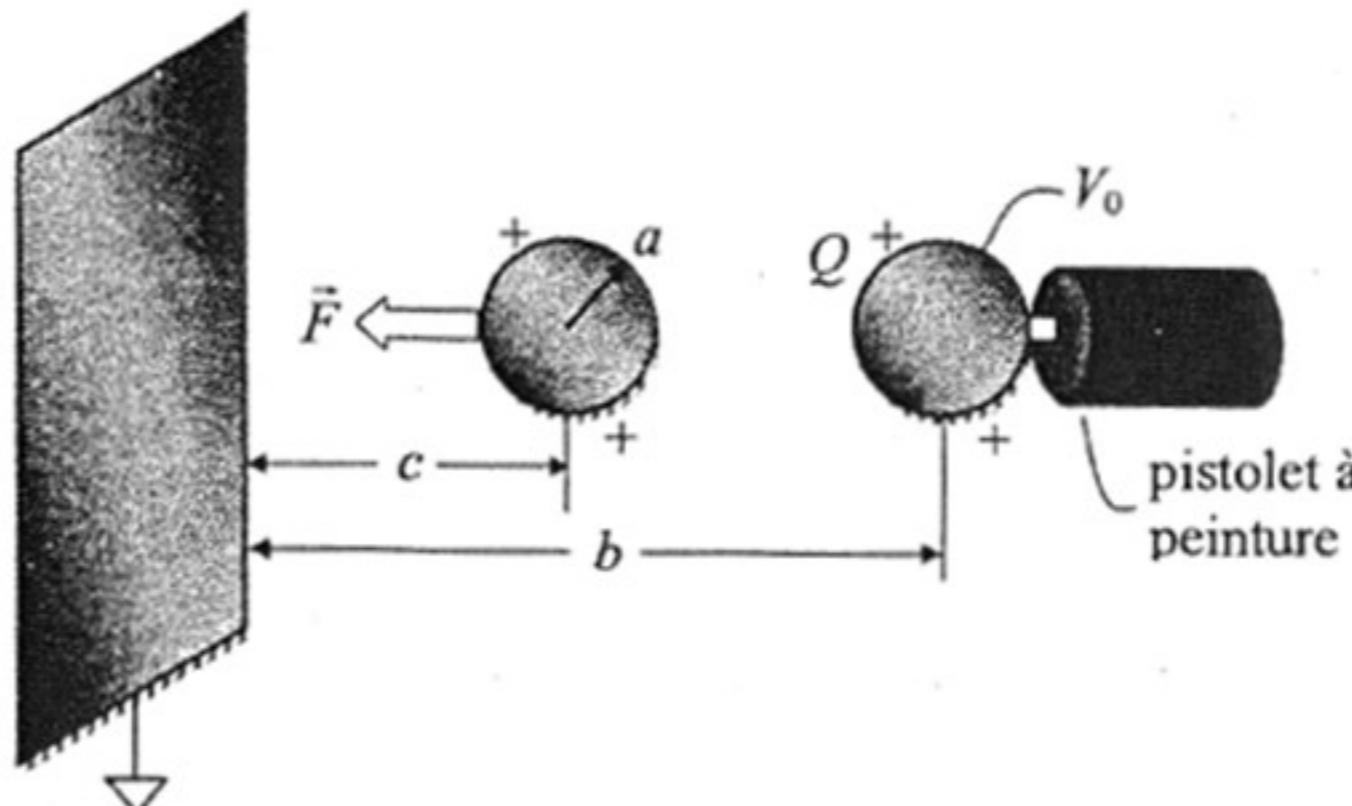
- 1) Une charge  $Q_1 = -Q$  est requise en  $(-a, a, 0)$  pour que le potentiel sur un plan infini localisé à  $x = 0$  dû à la charge  $Q$  en  $(a, a, 0)$  soit nul.
- 2) Une charge  $Q_2 = -Q$  est requise en  $(a, -a, 0)$  pour que le potentiel sur un plan infini localisé à  $y = 0$  dû à la charge  $Q$  en  $(a, a, 0)$  soit nul.
- 3) Une charge  $Q$  est requise en  $(-a, -a, 0)$  pour contrecarrer l'effet des charges  $Q_1$  et  $Q_2$  sur les plans  $x = 0$  et  $y = 0$  respectivement.

### 5.7.2 Peinture électrostatique

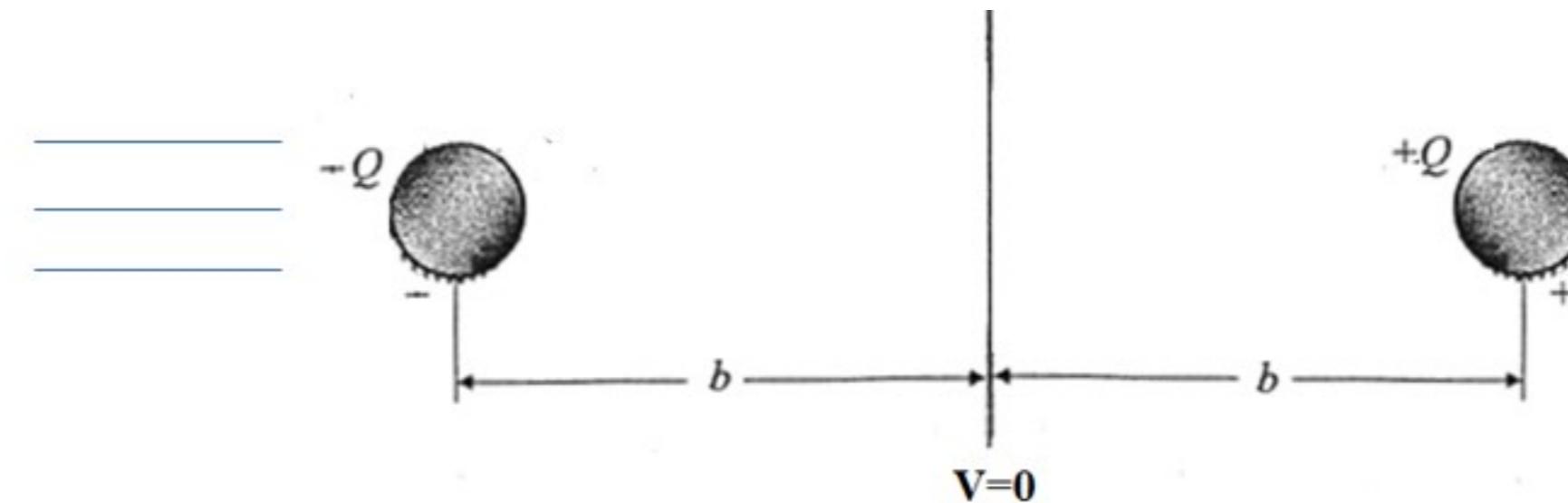
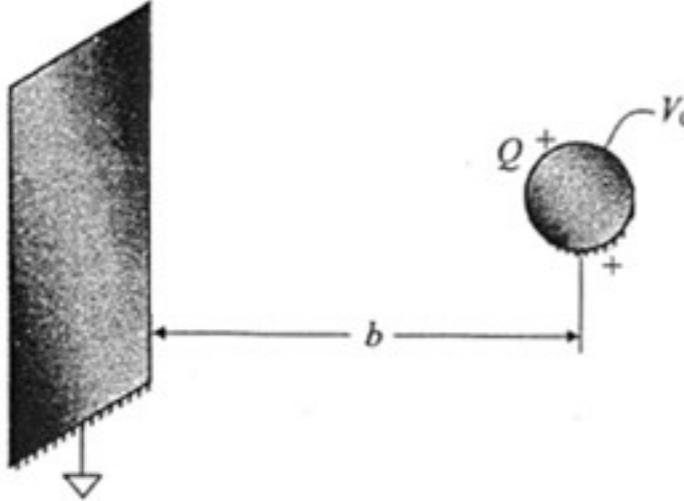
En donnant une charge électrique aux gouttelettes de peinture qui sont projetées par un pistolet, elles peuvent être attirées par l'objet à peindre, ce qui diminue les pertes de peinture. Comme elles se repoussent entre elles, on obtient une couche de peinture plus uniforme. Ici, l'objet à peindre est un plan conducteur de grande dimension qui est mis à la terre ( $V = 0$ ). Une gouttelette de peinture de rayon  $a$  quitte le pistolet situé à une distance  $b$  de l'objet avec un potentiel  $+V_0$ . Si  $a = 0,1 \text{ mm}$ ,  $b = 1 \text{ m}$  et  $V_0 = 550\text{V}$  :

- a) Quelle est la charge  $Q$  qui est distribuée sur la surface de la gouttelette? (Considérer que la peinture est conductrice et que la présence du pistolet à peinture n'a pas d'influence dans le calcul du champ électrique.)

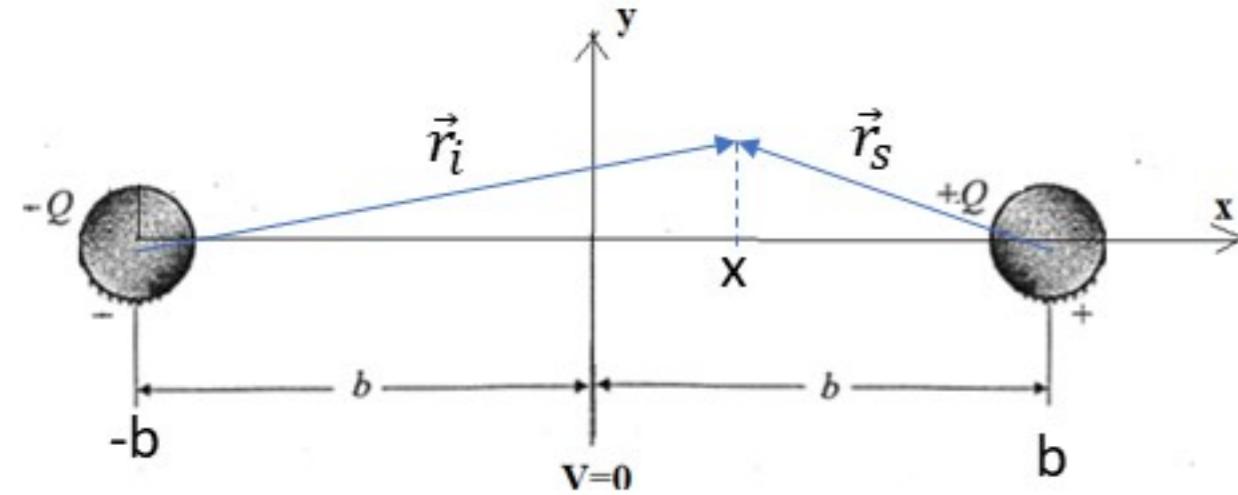
- b) Lorsque cette même gouttelette est parvenue à une distance  $c = 10$  cm du plan conducteur, quelle est la force électrostatique  $\vec{F}$  qui l'attire vers le plan?



a)



$$\phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in} \rightarrow \phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint dS = D 4\pi r^2 \Rightarrow D = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \hat{r}$$



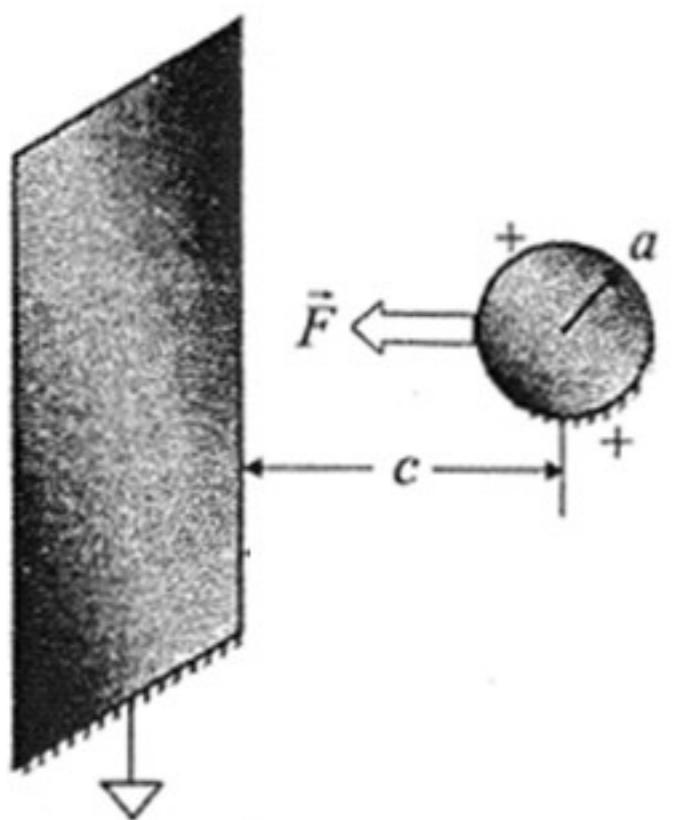
$$\begin{cases} \vec{D}_s = \frac{+Q}{4\pi r_s^2} \hat{r}_s \\ \vec{D}_i = \frac{-Q}{4\pi r_i^2} \hat{r}_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{D}(x, y=0) = \vec{D}_s(x, y=0) + \vec{D}_i(x, y=0) \\ r_i = x + b ; \hat{r}_i = \hat{x} \quad \text{et} \quad r_s = b - x ; \hat{r}_s = -\hat{x} \end{cases}$$

$$\vec{D}(x) = \frac{-Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} \right] \hat{x} \rightarrow \vec{E}(x) = \frac{\vec{D}(x)}{\epsilon_0} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} \right] \hat{x}$$

$$V_{(b-a)0} = V_{(b-a)} - V_{x=0} = V_0 - 0 = - \int_0^{b-a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{b-a} \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} \right] \hat{x} \cdot dx \hat{x}$$

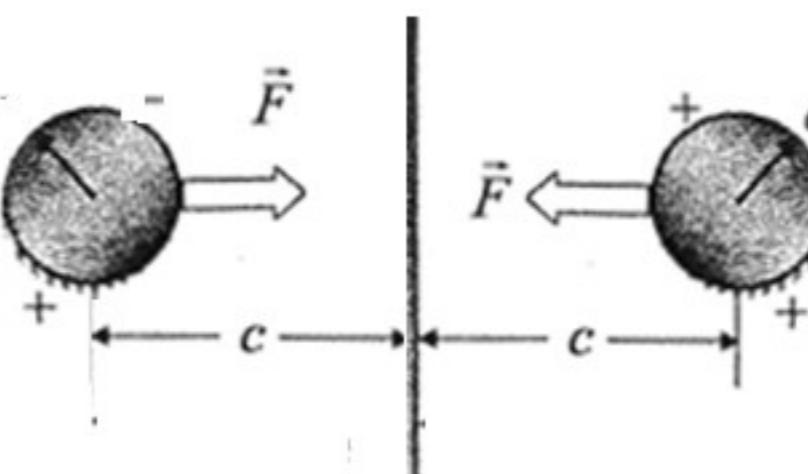
$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{b-a} \left[ \frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} \right] dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{2b-a} \right] \Rightarrow Q = \frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{\left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{2b-a} \right]} = 6,12 \times 10^{-12} C$$

b)



\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



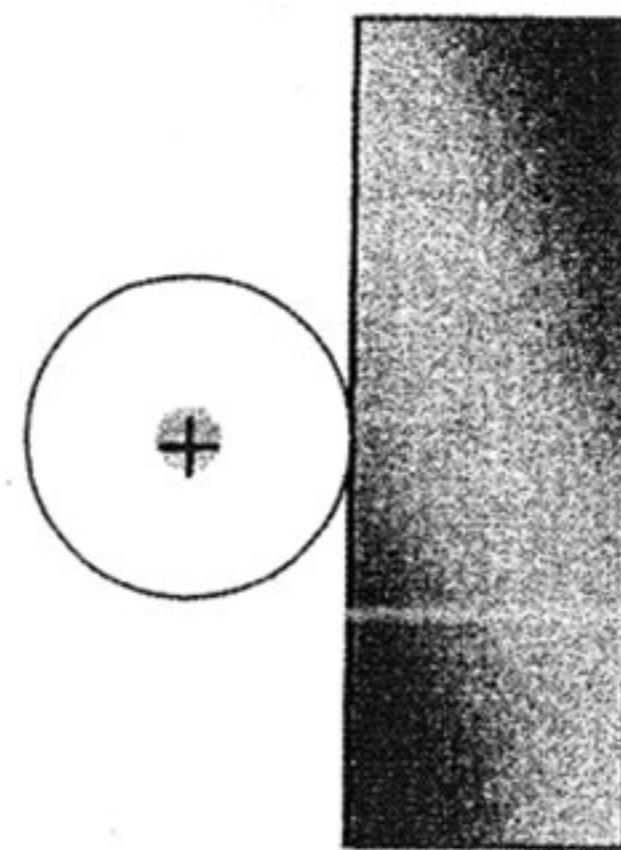
$$F = F_e = k \frac{QQ}{r^2} = k \frac{QQ}{(c + c)^2}$$

$$\vec{F} = -k \frac{Q^2}{4C^2} \hat{x}$$

### 5.7.9 Adhésion de poussière à une surface conductrice

Une particule de poussière chargée adhère à une surface conductrice à cause de la force électrostatique. On modélise la particule de poussière comme étant une sphère diélectrique de rayon  $a = 25 \mu\text{m}$  et de permittivité relative égale à 1, contenant une charge ponctuelle  $+Q$  en son centre.

- Sachant que le potentiel en surface de la sphère prise isolément (c'est-à-dire en l'absence de plan conducteur) est de 100 V, calculez la charge  $+Q$  au centre de la sphère diélectrique.
- Quelle est la force d'attraction électrostatique qui agit sur la sphère diélectrique lorsqu'elle est placée en contact avec une grande surface plane conductrice ?
- Calculez le travail d'extraction, c'est-à-dire le travail nécessaire pour déplacer la sphère diélectrique de la surface conductrice jusqu'à l'infini.

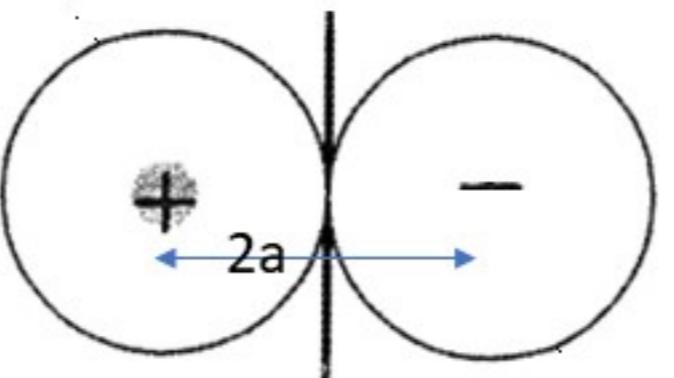


a) la charge  $+Q$  au centre de la sphère diélectrique.

$$V(r) = \frac{kQ}{r} \Rightarrow V(a) = \frac{kQ}{a} \Rightarrow Q = \frac{aV(a)}{k} = 2,78 \times 10^{-13} C$$

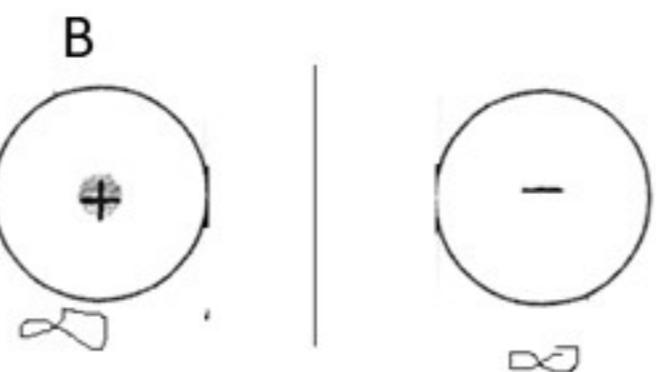
b) force d'attraction électrostatique

$$F_e = k \frac{Q^2}{r^2} = k \frac{Q^2}{(2a)^2} = 2,78 \times 10^{-7} N$$

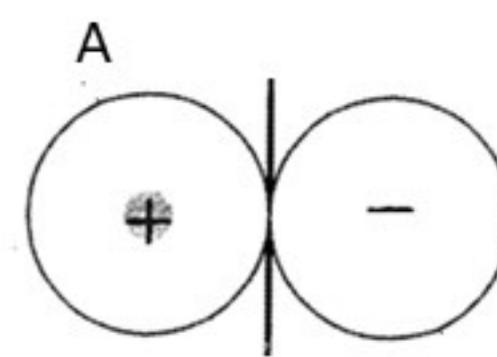
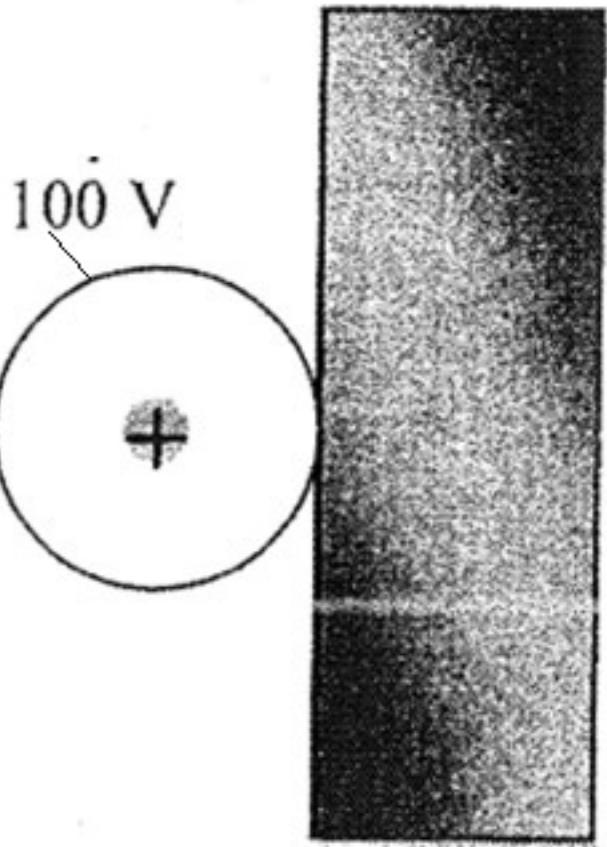


c) le travail

$$W = \Delta U + \Delta K = U_{B(infini)} - U_A = 0 - U_A = -U_A$$



$$W = -U_A = \frac{kQ(-Q)}{a} = \frac{kQ^2}{a} = 6,94 \times 10^{-12} J$$



L'opérateur divergence est un outil d'analyse vectorielle qui mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace. En un point, si la divergence est nulle, alors la densité ne varie pas et si elle est positive en ce point, alors il y a diffusion.

### 6.8.1 Divergence

Calculer la divergence de la densité de flux décrite par chacune des équations suivantes :

a)  $\vec{D}(x, y, z) = x \hat{x} - y \hat{y} + (x^2 + y^2) \hat{z}$

b)  $\vec{D}(\rho, \phi, z) = \frac{z \ln(1 + \rho^2)}{\rho(1 + z^2)^2} \hat{\rho} + \frac{1}{(1 + \rho^2)(1 + z^2)} \hat{z}$

c)  $\vec{D}(r, \theta, \phi) = \frac{\pi}{r^2} \hat{r} + \frac{r}{\sin \theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \hat{\phi}$

d)  $\vec{D}(x, y, z) = e^{x/2} \hat{x} + \sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi z}{4} \hat{y} + e^{x/2} \hat{z}$

divergence de la densité de flux

a)  $\vec{D}(x, y, z) = x \hat{x} - y \hat{y} + (x^2 + y^2) \hat{z}$

$$\nabla \cdot \vec{D}(x, y, z) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (D_x \hat{x} + D_y \hat{y} + D_z \hat{z}) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial (-y)}{\partial y} + \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial z} = 0$$

b)  $\vec{D}(\rho, \phi, z) = \frac{z \ln(1 + \rho^2)}{\rho(1 + z^2)^2} \hat{\rho} + \frac{1}{(1 + \rho^2)(1 + z^2)} \hat{z}$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\rho, \phi, z) = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (D_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial (D_z)}{\partial z} \right) = \left( \frac{z}{\rho} \frac{2\rho}{(1 + z^2)^2(1 + \rho^2)} + \frac{1}{\rho} 0 + \frac{1}{(1 + \rho^2)} \frac{-2z}{(1 + z^2)^2} \right) = 0$$

c)  $\vec{D}(r, \theta, \phi) = \frac{\pi}{r^2} \hat{r} + \frac{r}{\sin \theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \hat{\phi}$

$$\nabla \cdot \vec{D}(r, \theta, \phi) = \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (D_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (D_\phi)}{\partial \phi} \right) = 0$$

## Les équations de Maxwell

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(dans le vide sans charges ni courant)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## 6.8.2 Potentiel dans le vide

Déterminer si le potentiel dans le vide peut être décrit par chacune des équations suivantes :

a)  $V(x, y) = 1 + 3x^2 + 3y^2 + xy$

b)  $V(x, y) = (1 + x)(1 + y)$

c)  $V(x, y) = (\sinh(x) + \cosh(x))(\sin(y) + \cos(y))$

d)  $V(x, y) = (\sinh(x) + \cos(x))(\sin(y) + \cosh(y))$

Dans le vide:  $\rho = 0$  et donc  $\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = \nabla^2 V = \mathbf{0}$

a)  $V(x, y) = 1 + 3x^2 + 3y^2 + xy$

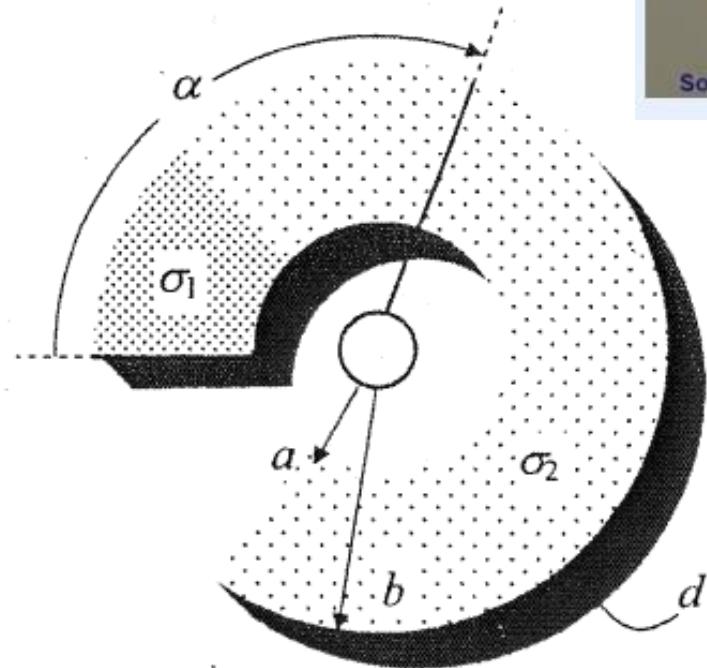
$$\nabla^2 V = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x + y) + \frac{\partial}{\partial y}(6y + x) = 6 + 6 = 12 \neq 0 \quad (\text{impossible})$$

b)  $V(x, y) = (1 + x)(1 + y)$

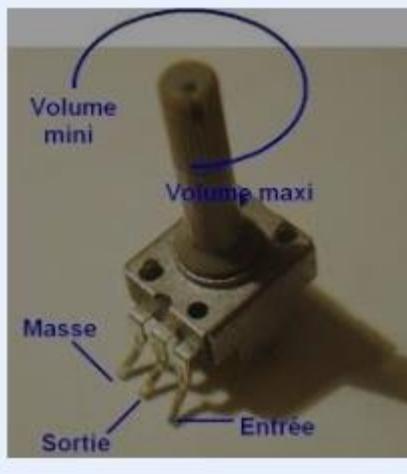
$$\nabla^2 V = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + y) + \frac{\partial}{\partial y}(1 + x) = 0 \quad (\text{possible})$$

### 6.8.3 Potentiomètre de volume

Comme l'oreille humaine possède une plage dynamique très étendue, les potentiomètres utilisés pour contrôler l'amplitude de sortie des systèmes de son doivent avoir une réponse non-linéaire pour permettre à l'utilisateur de mieux ajuster le niveau sonore à faible amplitude. La figure ci-contre illustre un potentiomètre de volume qui est formé d'un mince disque conducteur de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$  et d'épaisseur  $d$ . La première section de ce disque a un angle de  $45^\circ$  et une conductivité élevée  $\sigma_1$  pour contrôler les niveaux faibles. Un conducteur métallique horizontal est fixé à l'extrémité de cette première section. La seconde section s'étend entre  $45^\circ$  et  $315^\circ$  et possède une conductivité plus faible  $\sigma_2$ . Une tige métallique peut être tournée autour de l'axe central tout en étant en contact uniforme avec la surface du disque. Cette tige mobile forme un angle  $\alpha$  avec l'horizontale et la résistance du potentiomètre est mesurée entre la tige mobile et le conducteur horizontal. Lorsque  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 3,25 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ ,  $\sigma_1 = 10 \text{ S/m}$  et  $\sigma_2 = 1 \text{ S/m}$ , donnez l'expression de la résistance en fonction de l'angle  $\alpha$  pour  $45^\circ < \alpha < 315^\circ$  ?



**Figure 6.18** Potentiomètre



1- Symétrie:  $\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$

2- Équation de Laplace:  $\nabla^2 V = 0$

3- Solution:  $V(\phi) = A \phi + B$

(Groupe 1: ici l'**angle** de rotation est négatif (**sens** horaire): on mettra  $- \alpha$  pour éviter de mettre des valeurs absolues à la fin)

4- Conditions frontières:  $V(\phi = 0) = 0 = A 0 + B \Rightarrow B = 0$

$$V(\phi = -\alpha) = V_\alpha = -A \alpha + B$$

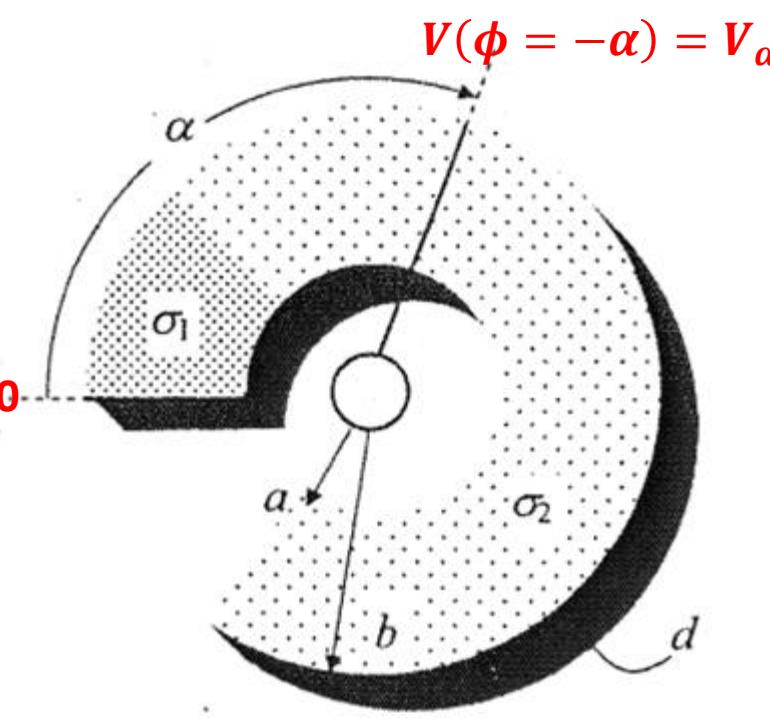
$$\Rightarrow A = -\frac{V_\alpha}{\alpha}$$

5- Solution est donc:  $V(\phi) = -\frac{V_\alpha}{\alpha} \phi$

6- Le champ électrique:  $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = +\frac{1}{\rho} \frac{V_\alpha}{\alpha} \hat{\phi}$

7-sachant que:  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$     alors     $\vec{J} = \frac{\sigma V_\alpha}{\rho \alpha} \hat{\phi}$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{or} \quad d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + d\rho dz \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$$



$V(\phi = -\alpha) = V_\alpha$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^d \int_a^b \frac{\sigma V_\alpha}{\rho \alpha} d\rho dz = \frac{\sigma V_\alpha d}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

8- La résistance:

$$R = \frac{V_\alpha}{I} = \frac{\alpha}{\sigma d \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$R_1 = \frac{\frac{\pi}{4}}{\sigma_1 d \ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\frac{3.14}{4}}{10 \times 10^{-3} \times \ln\left(\frac{1}{3,25}\right)} = 66,6 \Omega$$

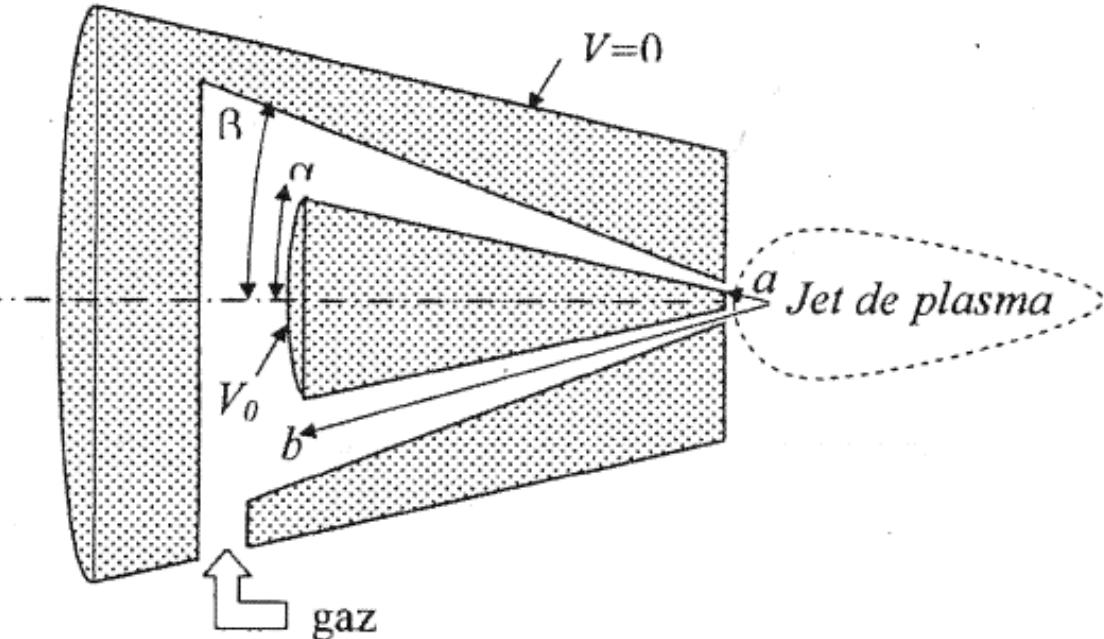
$$R_2 = \frac{\alpha - \frac{\pi}{4}}{\sigma_2 d \ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\alpha - \frac{3.14}{4}}{1 \times 10^{-3} \times \ln\left(\frac{1}{3,25}\right)} = 848 \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$R = R_1 + R_2 = 66,6 + 864 \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$



## 6.8.4 Torche à plasma

Les torches à plasma sont utilisées pour plusieurs fonctions : découpage de métaux, création de revêtements, cautérisation, etc. La figure ci-contre illustre une section longitudinale d'une torche formée d'une électrode conique tronquée ayant un angle d'ouverture  $\alpha$ , un potentiel  $V_0$  et dont les côtés s'étendent entre des distances  $a$  et  $b$  de la pointe virtuelle du cône; cette électrode est insérée dans une chambre métallique conique coaxiale ayant un angle interne  $\beta$  et un potentiel nul (l'électrode et la chambre ne sont pas en contact électrique). Un gaz de permittivité relative  $\epsilon_r$  et de rigidité diélectrique  $E_m$  est injecté dans l'espace entre l'électrode et la chambre. Si le champ électrique est assez intense, un plasma peut alors être produit dans la chambre et s'échapper vers l'extérieur, à la pointe de l'électrode conique.



**Figure 6.19**

- Quelles sont les expressions décrivant les distributions de potentiel et de champ électrique dans l'espace conique entre l'électrode et la chambre si l'il n'y a pas de claquage ?
- Pour les paramètres suivants :  $\alpha=15^\circ$ ,  $a=5\text{mm}$ ,  $b=10\text{cm}$ ,  $\beta=30^\circ$ ,  $\epsilon_r=5$  et  $E_m=200\text{kV/m}$ , quelle est la valeur numérique du voltage minimum de l'électrode permettant de produire du claquage dans la chambre et ainsi amorcer le plasma ?

Plasma: fluide constitué de particules ionisées

1- Système de coordonnées sphériques:  $V(r, \theta, \phi)$

2- Symétrie :  $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$

3- Équation de Laplace:  $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$

4- Solution:  $V(\theta) = A \ln \left[ \tan \frac{\theta}{2} \right] + B$

5- Conditions frontières:  $V(\theta = \alpha) = V_0 = A \ln \left[ \tan \frac{\alpha}{2} \right] + B$  EQ(1)

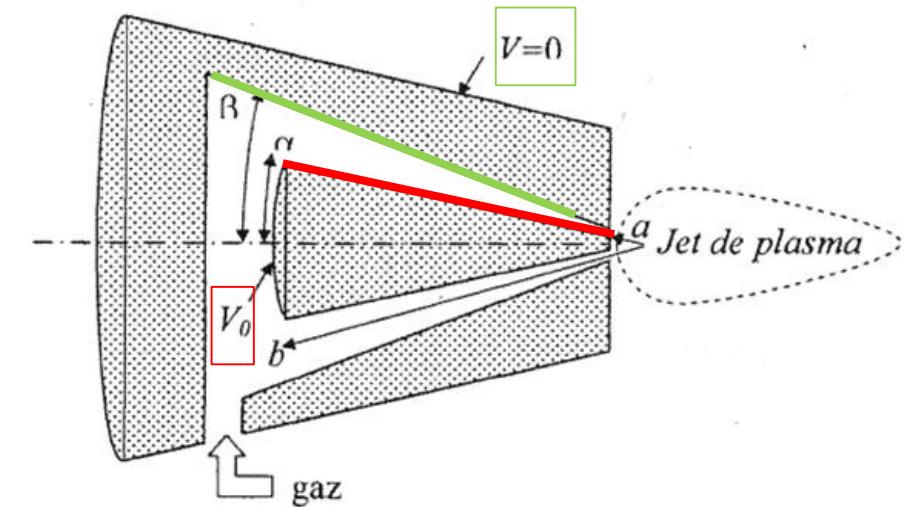
$V(\theta = \beta) = 0 = A \ln \left[ \tan \frac{\beta}{2} \right] + B$  EQ(2)

EQ(1) - EQ(2)  $\Rightarrow$

$$V_0 = A \left\{ \ln \left[ \tan \frac{\alpha}{2} \right] - \ln \left[ \tan \frac{\beta}{2} \right] \right\} = A \ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}$$

De EQ(2)  $\Rightarrow$

$$B = -A \ln \left[ \tan \frac{\beta}{2} \right] = -\frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \ln \left[ \tan \frac{\beta}{2} \right]$$



$$6-\text{Solution: } V(\theta) = A \ln \left[ \tan \frac{\theta}{2} \right] + B$$

$$V(\theta) = \frac{\frac{V_0}{\tan \frac{\alpha}{2}} \ln \left[ \tan \frac{\theta}{2} \right] + \frac{-V_0}{\tan \frac{\beta}{2}} \ln \left[ \tan \frac{\beta}{2} \right]}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} = \frac{\frac{V_0}{\tan \frac{\alpha}{2}} \ln \left[ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}$$

$$V(\theta) = \frac{\frac{V_0}{\tan \frac{\alpha}{2}} \ln \left[ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}$$

$$7-\text{Le champ électrique: } \vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\frac{V_0}{\tan \frac{\alpha}{2}} \ln \left[ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \right\} \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\frac{V_0}{\tan \frac{\alpha}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \ln \left[ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \right\} \hat{\theta}}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} = -\frac{1}{r} \frac{\frac{V_0}{\tan \frac{\alpha}{2}}}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]}{\left[ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \hat{\theta}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{\tan \frac{\beta}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \hat{\theta} \\
&= -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2}} \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} \hat{\theta} = -\frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\theta}
\end{aligned}$$

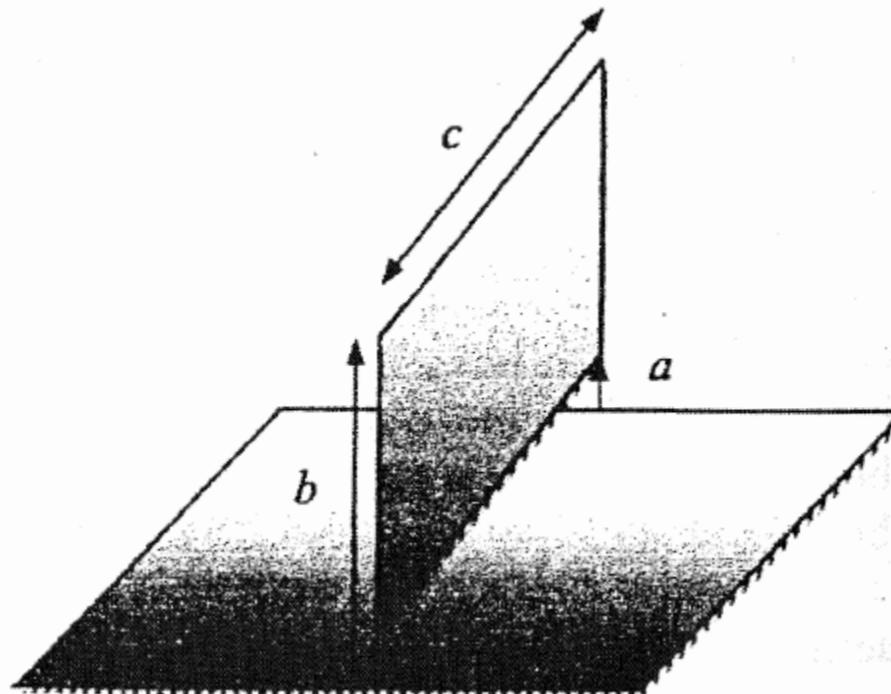
(utilisez l'identité trigonométrique:  $2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \sin 2 \frac{\theta}{2} = \sin \theta$  )

8- On utilise l'équation précédente; (amplitude):  $E = \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right]} \frac{1}{r \sin \theta} \Rightarrow V_0 = E \ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] r \sin \theta$

$$V_{0min} = E_{min} r_{min} \sin \theta \min \left( \ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \right) = E_{min} a \sin \alpha \left( \ln \left[ \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right] \right) = 183,92 V$$

### 6.8.6 Détection de proximité

Vous concevez un système de sécurité qui permet de détecter le changement de capacité entre une clôture métallique et le sol, qui est produit par l'approche d'une personne. Cette clôture est électriquement isolée du sol qui est considéré comme un très bon conducteur. Le bas de la clôture est à une hauteur  $a = 15 \text{ cm}$  du sol, le haut est à une hauteur  $b = 1.5 \text{ m}$  et la clôture a une longueur  $c = 25 \text{ m}$ . Calculer la valeur numérique de la capacité  $C$  en utilisant l'équation de Laplace.



1- Système de coordonnées cylindriques:  $V(\rho, \phi, z)$

2- Symétrie:  $\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0$

3- Équation de Laplace:  $\nabla^2 V = 0$

4- Solution:  $V(\phi) = A\phi + B$

5- Conditions frontières:  $V(\phi = 0) = 0 = A \cdot 0 + B \Rightarrow B = 0$

$$V\left(\phi = \frac{\pi}{2}\right) = V_0 = A \frac{\pi}{2} + B \Rightarrow A = \frac{V_0}{\frac{\pi}{2}}$$

6- Solution:  $V(\phi) = \frac{2V_0}{\pi} \phi$

7- Le champ électrique:  $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\frac{2V_0}{\pi} \phi\right)}{\partial \phi} \hat{\phi} = -\frac{2V_0}{\rho\pi} \hat{\phi}$

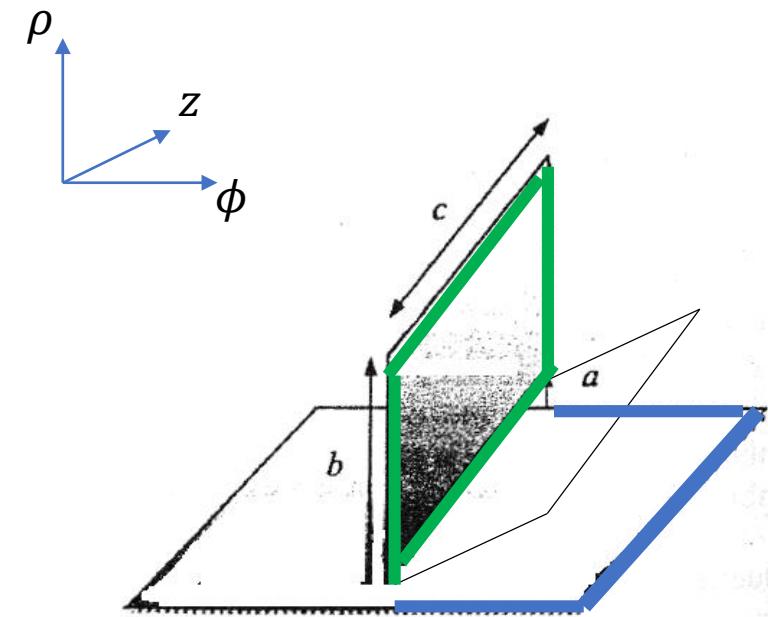
8- Interface sol (conducteur) et air (diélectrique):

$$D_{N,air} - D_{N,sol} = \rho_s$$

$$D_{N,air} - 0 = \rho_s \Rightarrow D_{N,air} = \rho_s$$

9- La charge:

$$Q = \iint \rho_s dS = \iint D_{N,air} dS = \iint \epsilon_0 E dS = \int_a^b \int_0^c \frac{2V_0 \epsilon_0}{\rho\pi} d\rho dz = \frac{2V_0 \epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



$$Q = \frac{2V_0\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacité:

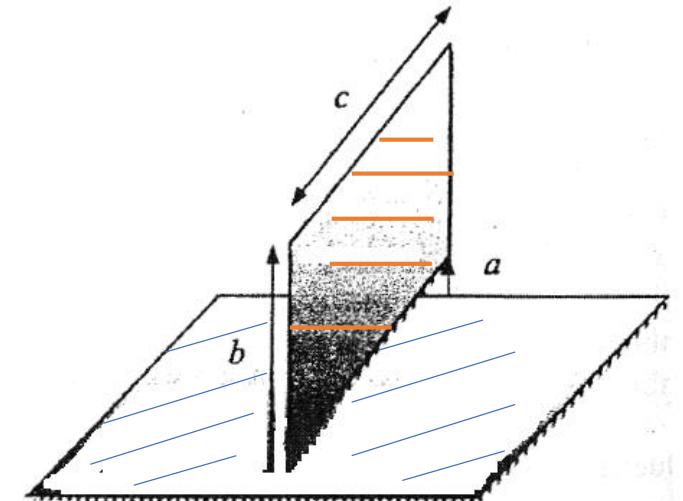
$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacité total:

Deux condensateurs en parallèle (2 points en commun):

$$C_T = \frac{2\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{2\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

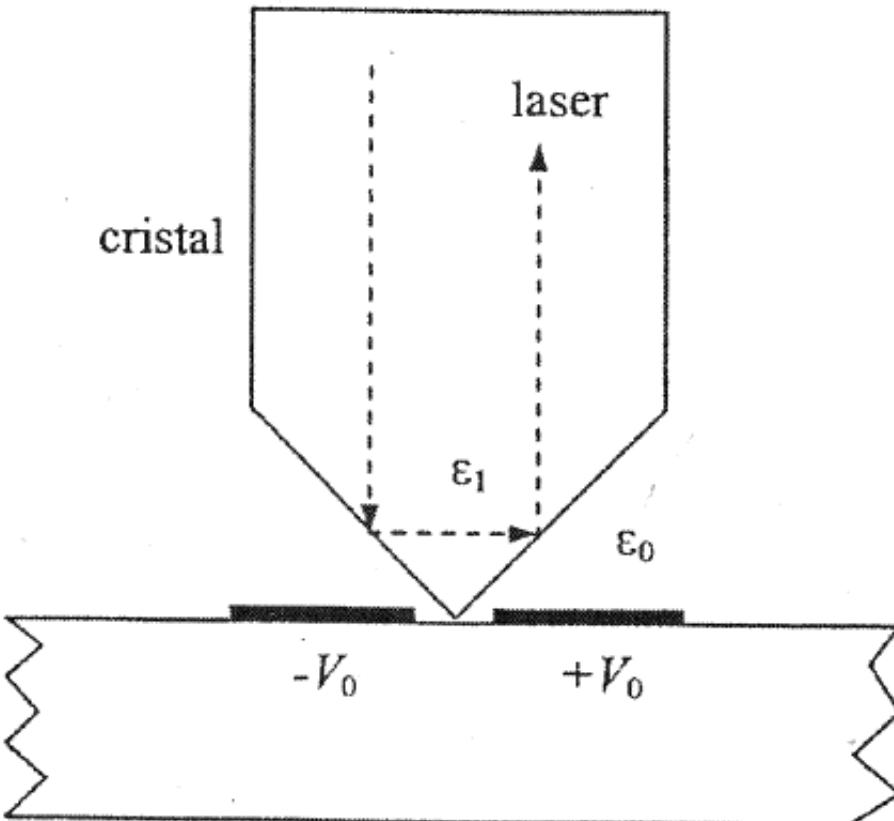
$$C_T = \frac{4\epsilon_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Voir la suite pour plus d'applications de l'équation de Laplace et conditions frontières

### 6.7.8 Cristal biréfringent

Il est possible d'échantillonner, sans aucun contact, les signaux circulant sur les circuits imprimés à l'aide d'un cristal dont les propriétés optiques changent selon l'intensité du champ électrique interne. Ce changement de propriété est mesuré à l'aide d'un faisceau laser réfléchi à l'intérieur du cristal. À la Fig. 6.24, un cristal ayant une permittivité  $\epsilon_1$  possède des parois formant un angle de  $90^\circ$ , les rubans métalliques ont une largeur  $a$  et un écartement  $b$  (Fig. 6.22) et ont des potentiels  $+V_0$  et  $-V_0$ . Quelle est la distribution du champ électrique dans l'extrémité du cristal  $E_1$  et dans l'air voisin  $E_0$ ? Vaut-il mieux avoir un cristal ayant une basse permittivité ou une haute permittivité?



Région 1:

$$V(\phi) = A\phi + B$$

$$V(\phi = 0) = B = V_0$$

$$V\left(\phi = \frac{\pi}{4}\right) = V_1 = A\frac{\pi}{4} + B = A\frac{\pi}{4} + V_0 \Rightarrow A = \frac{4(V_1 - V_0)}{\pi}$$

$$V(\phi) = \frac{4(V_1 - V_0)}{\pi} \phi + V_0$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = \frac{4(V_0 - V_1)}{\rho \pi} \hat{\phi}$$

Région 2:

$$V(\phi) = A\phi + B$$

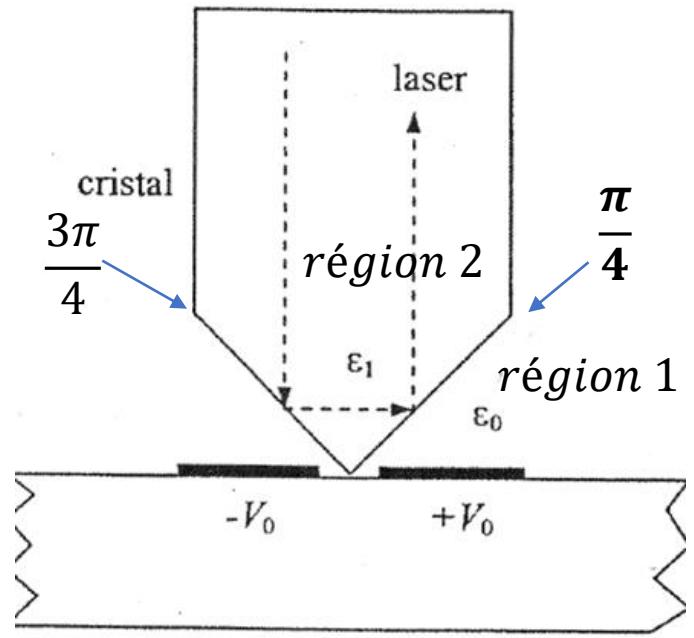
$$V\left(\phi = \frac{\pi}{4}\right) = V_1 = A\frac{\pi}{4} + B$$

$$V\left(\phi = \frac{3\pi}{4}\right) = -V_1 = A\frac{3\pi}{4} + B$$

$$\Rightarrow A = \frac{-4V_1}{\pi} \text{ et } B = 2V_1$$

$$V(\phi) = -\frac{4V_1}{\pi\rho} \phi + 2V_1$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla V = \frac{4V_1}{\pi\rho} \hat{\phi}$$



-V<sub>1</sub> (symétrie)

### Condition frontière (diélectrique- diélectrique):

$$D_{1N,\varepsilon_0}^{(\alpha)} - D_{2N,\varepsilon_1}^{(\alpha)} = \rho_s = 0 \Rightarrow D_{1N,\varepsilon_0}^{(\alpha)} = D_{2N,\varepsilon_1}^{(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_1 E_2$$

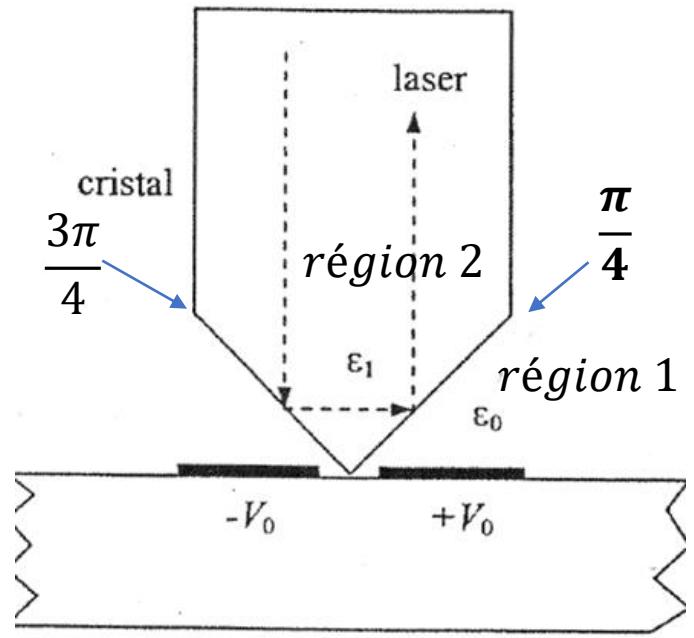
$$\Rightarrow \varepsilon_0 \frac{4(V_0 - V_1)}{\rho \pi} = \varepsilon_1 \frac{4V_1}{\pi \rho} \quad \Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)}$$

Ainsi:

$$\vec{E}_1 = \frac{4V_0 \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) \rho \pi} \hat{\phi}$$

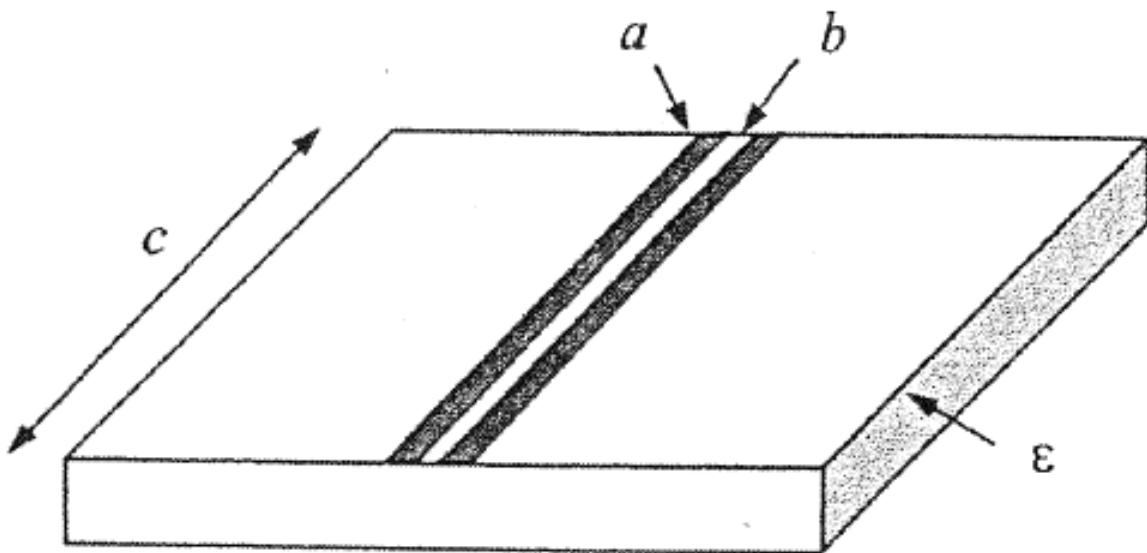
$$\vec{E}_2 = \frac{4V_0 \varepsilon_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) \pi \rho} \hat{\phi}$$

$E_2$  important pour une plus basse  $\varepsilon_1$



### 6.8.7 Capacité parasite

La figure ci-contre illustre une partie d'un circuit imprimé où l'on retrouve deux rubans métalliques parallèles déposés à la surface d'un substrat diélectrique épais qui a une permittivité relative  $\epsilon_r=3.5$ . Chaque ruban a une longueur  $c=5$  cm et une largeur  $a=3$ mm. La distance entre les deux rubans est  $b=1$ mm. Calculer la capacité  $C$  entre les deux rubans en utilisant l'équation de Laplace.



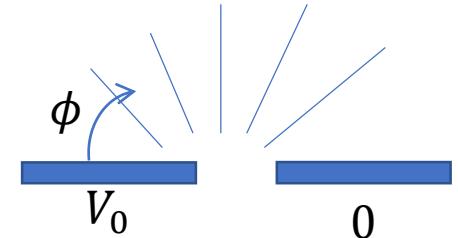
Symétrie du problème : Cylindrique

$$V(\phi) = A\phi + B$$

Conditions frontières:

$$V(\phi = 0) = A \cdot 0 + B = V_0$$

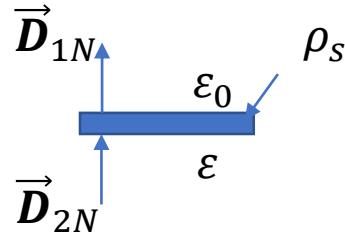
$$V(\phi = \pi) = A\pi + B = 0$$



$$V(\phi) = -\frac{V_0}{\pi}\phi + V_0 = V_0 \left(1 - \frac{\phi}{\pi}\right)$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = \frac{V_0}{\pi \rho} \hat{\phi}$$

Densité de charge:



à l'interface conducteur-diélectrique:

$$D_{1N} = \rho_s$$

$$\rho_{s1} = D_{1N} = \epsilon_0 \frac{V_0}{\pi \rho} \Rightarrow Q_1 = \int \rho_{s1} dS = \int_{b/2}^{a+b/2} \int_0^c \frac{\epsilon_0 V_0}{\pi \rho} dz d\rho = \frac{\epsilon_0 V_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{2a+b}{b}\right)$$

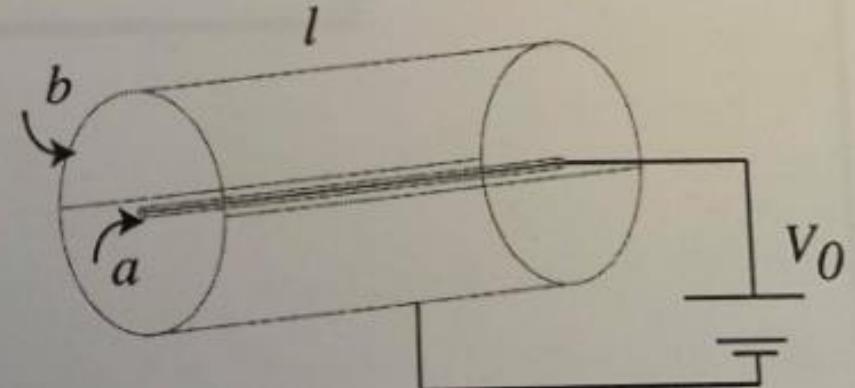
$$\rho_{s2} = D_{1N} = \frac{\epsilon V_0}{\pi \rho} \Rightarrow Q_2 = \int \rho_{s2} dS = \int_{b/2}^{a+b/2} \int_0^c \frac{\epsilon V_0}{\pi \rho} dz d\rho = \frac{\epsilon V_0 c}{\pi} \ln\left(\frac{2a+b}{b}\right)$$

La charge totale:  $Q = Q_1 + Q_2 = \frac{c V_0}{\pi} \ln\left(\frac{2a+b}{b}\right) (\epsilon_0 + \epsilon) \Rightarrow C = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow \textcolor{red}{C = \frac{c}{\pi} \ln\left(\frac{2a+b}{b}\right) (\epsilon_0 + \epsilon)}$

Exemple (question d'examen)

#### QUESTION 4 : Compteur de rayonnement ionisant (4,5 points)

Un compteur Geiger-Müller est un appareil servant à détecter la présence de rayonnement ionisant (particules chargées ou photons). Il est constitué d'un tube cylindrique de rayon  $b$  au centre duquel un mince fil métallique de rayon  $a$  est tendu, d'un système d'amplification et d'un système d'enregistrement du signal. Le tube, de longueur  $l \gg b$  est rempli d'un gaz noble (néon, argon) sous faible pression. Le cylindre métallique extérieur est mis à la terre et le fil est porté à une tension  $V_0$ . Quand une particule ionisante pénètre dans le compteur, elle ionise les molécules de gaz s'y trouvant en leur arrachant des électrons qui étant eux-mêmes accélérés par le champ électrique produisent une cascade d'électrons. Ces électrons, accélérés vers le fil central, produisent un signal électrique qui est amplifié et enregistré.



Le rayon du fil central est  $a = 0.1$  mm et celui de la chambre cylindrique est  $b = 2.5$  cm. En utilisant l'équation de Laplace, répondre aux questions suivantes.

**4.1 > (1.5 Pts)** Écrire la fonction qui représente le potentiel électrique  $V$  dans la chambre cylindrique en tenant compte des conditions aux frontières imposées.

#### Question 4 : Compteur de rayonnement ionisant (4,5 points)

4.1 (1.5 Pt) Écrire la fonction qui représente le potentiel électrique  $V$  dans la chambre cylindrique en tenant compte des conditions aux frontières imposées.

En utilisant l'équation de Laplace, le potentiel électrique en fonction de  $\rho$  est donné par (voir page 6 du questionnaire).

$$V(\rho) = A \ln(\rho) + B \quad 0.25 \text{ pt}$$

où les constantes  $A$  et  $B$  sont fixées par les conditions aux frontières. Ici on aura que  $V(b) = 0$  et  $V(a) = V_0$  et donc

$$0,25 \text{ pt} \qquad 0,25 \text{ pt}$$

$$A \ln(b) + B = 0$$

$$A \ln(a) + B = V_0$$

d'où

$$V(\rho) = V_0 \frac{\ln(\rho/b)}{\ln(a/b)} \quad 0.25 \text{ pt}$$

- 4.2 (1,5 Pt) Dériver une expression pour le champ électrique  $\vec{E}$  en tout point de la chambre.  
 Tracer un schéma montrant la direction du champ dans la chambre.

Le champ électrique est défini par

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad 0,25 \text{ pt}$$

En coordonnée cylindrique on a que

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \quad 0,25 \text{ pt}$$

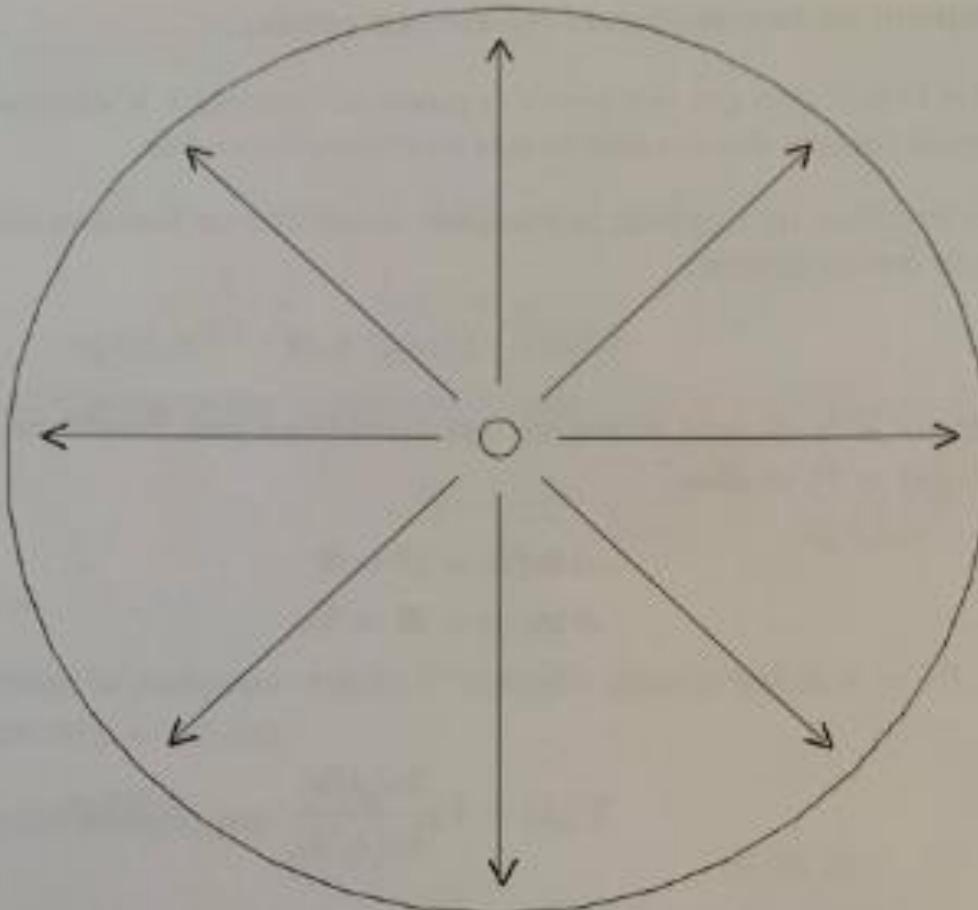
Comme  $V$  est indépendant de  $\phi$  et  $z$ ,  $\partial V / \partial \phi = 0$ ,  $\partial V / \partial z = 0$ , et

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{V_0}{\rho \ln(a/b)} \quad 0,25 \text{ pt}$$

et

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{\rho \ln(a/b)}\hat{\rho} \quad 0,25 \text{ pt}$$

Les lignes de champ se dirigent donc radialement vers l'extérieur du détecteur ( $a < b$  et donc  $\ln(a/b) < 0$ ) tel qu'illustré à la figure de la page suivante.



0,5 pt

4.3 (1,5 Pt) Quelle est la tension maximale qui pourra être appliquée sur le fil central si la rigidité diélectrique du gaz présent dans la chambre est  $E_{\max} = 10 \text{ MV/m}$  ?

La tension de claquage correspondra au potentiel pouvant être appliquée à  $\rho = \rho_{\min} = a$  qui générera un champ électrique  $E_{\max}$ . On aura alors

$$V_{\text{claquage}} = |a \ln(a/b) E_{\max}| = 5,52 \text{ kV} \quad 0,75 \text{ pt}$$