# – PHS1102 –
# Champs électromagnétiques

## Chapitre 7 – Magnétostatique

Loi de Biot-Savart

Moment magnétique dipolaire

Théorème d'Ampère (4$^e$ équation de Maxwell en statique)

Densité de flux magnétique dans le vide

Flux magnétique

2$^e$ équation de Maxwell

# Où sommes-nous rendus dans le trimestre ?

$\vec{E}$

1. Électrostatique : les champs vectoriels $\vec{D}$ et $\vec{E}$
2. Potentiel et énergie électrique
3. Matériaux diélectriques
4. Matériaux conducteurs
5. Interfaces et cartographie des champs
6. Équation de Laplace

$\vec{H}$

7. **Magnétostatique : les champs vectoriels $\vec{H}$ et $\vec{B}$**
8. **Forces et couples magnétiques**
9. **Matériaux magnétiques**

$\vec{E}$ et $\vec{H}$

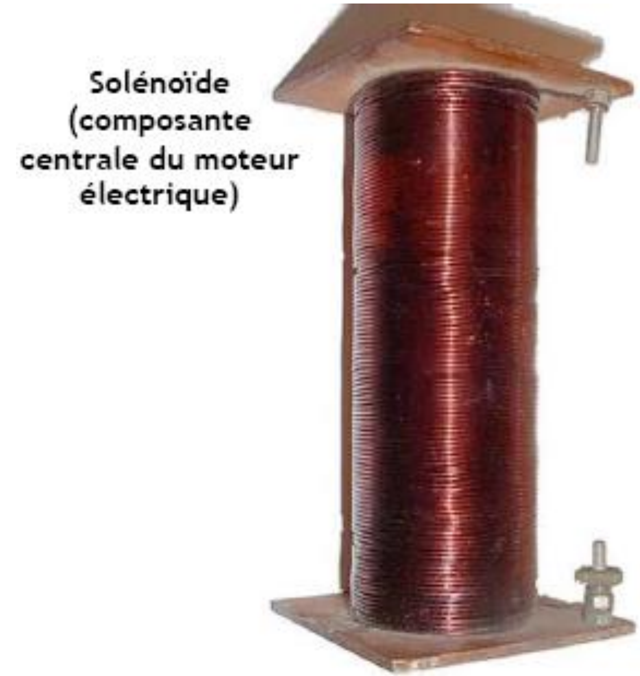
10. Champs quasistatiques
11. Équations de Maxwell
12. Ondes électromagnétiques

# Objectifs de la semaine

| | |
|---|---|
| Loi de Biot-Savart | • **Déterminer le champ magnétique dû à une distribution de courant quelconque.** |
| Moment dipolaire magnétique | • Calculer le moment dipolaire magnétique dû à une boucle de courant. |
| Théorème d'Ampère (4$^e$ éq. de Maxwell en statique) | • **Déterminer le champ magnétique produit par une distribution de courant symétrique.** |
| Densité de flux magnétique dans le vide<br>Flux magnétique<br>2$^e$ équation de Maxwell | • Calculer la densité de flux magnétique à partir du champ magnétique.<br>• Calculer le flux magnétique à partir de la densité de flux magnétique.<br>• **Appliquer la 2$^e$ équation de Maxwell et en expliquer la signification (champ solénoïdal).** |

# Le magnétisme dans nos vies

Magnétite
(oxyde de fer)

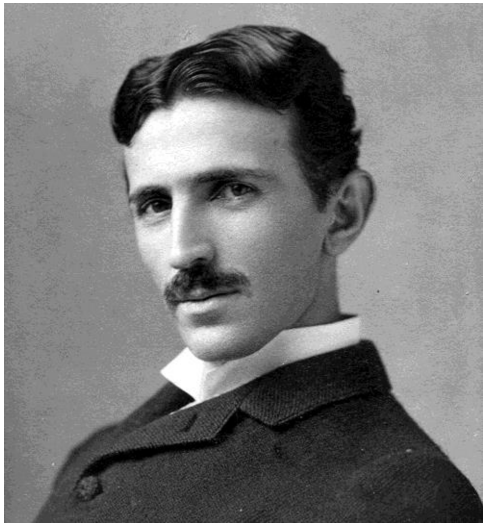



Train à lévitation magnétique
(Maglev de Shangaï)

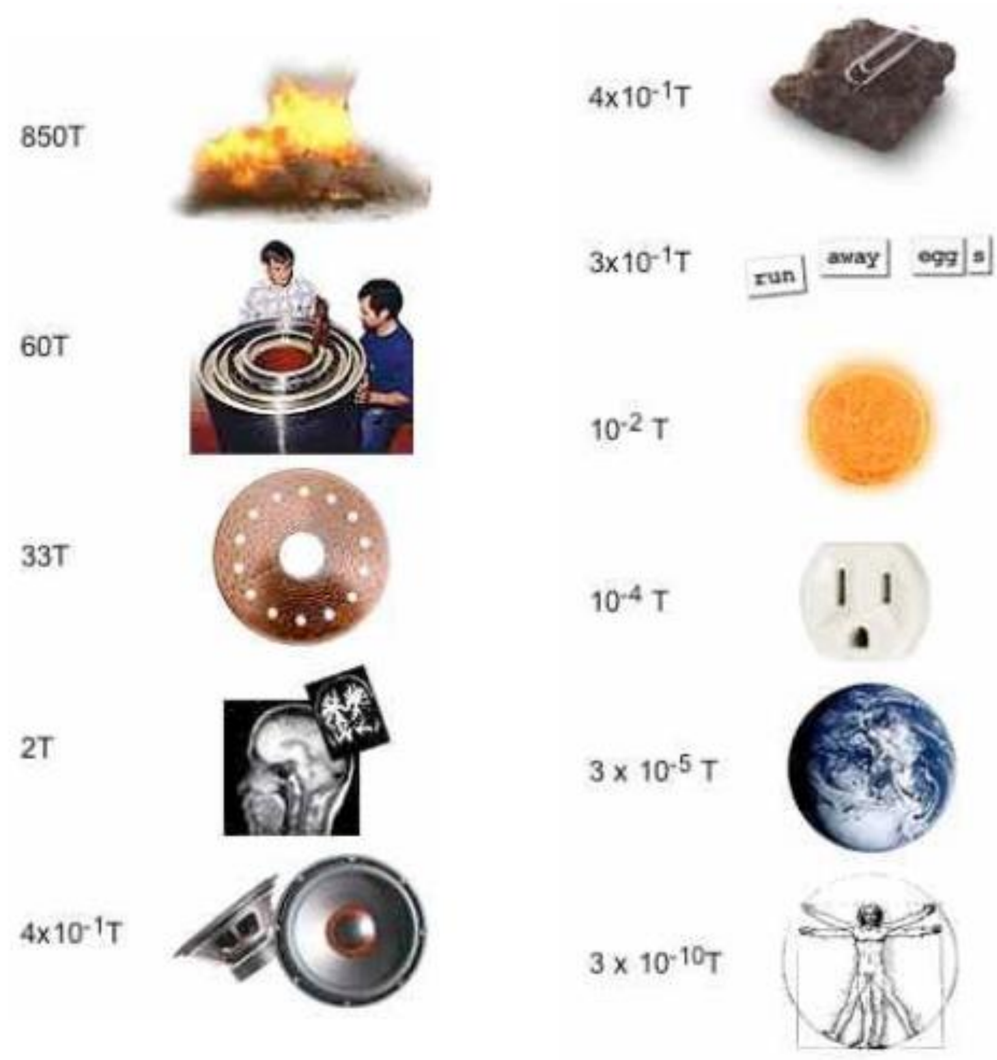
# Valeurs du champ magnétique

On quantifie souvent le champ magnétique par la magnitude de la **densité de flux magnétique** ($\vec{B}$).

L'unité de la densité de flux magnétique est le **tesla (T)**.

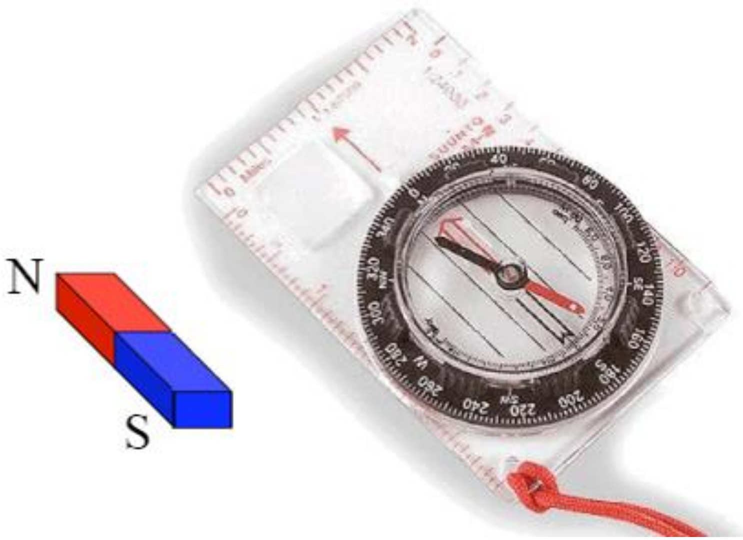


Nikola Tesla (1856-1943)



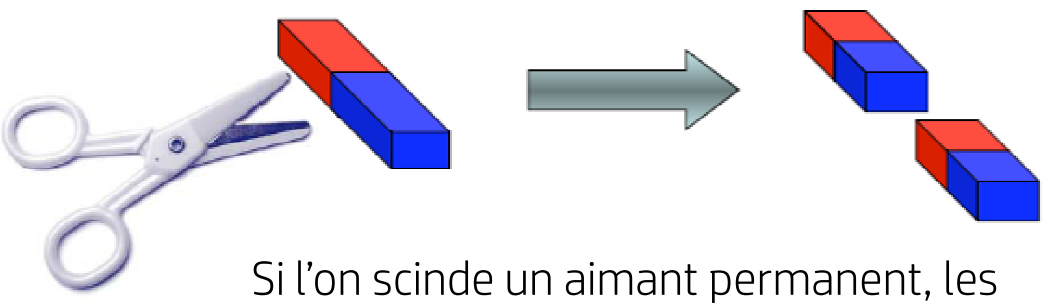

http://www.magnet.fsu.edu/focus/howstrong.html

# Observations expérimentales sur le magnétisme




Veine de magnétite
(orientée Nord-Sud)

Il existe deux pôles magnétiques : nord et sud. Les pôles identiques se repoussent tandis que les pôles opposés s'attirent.



Si l'on scinde un aimant permanent, les fragments auront deux pôles magnétiques.

Aucun monopôle magnétique n'a été observé à ce jour!

On peut parler de charge électrique, mais pas de charge magnétique.

# Observations expérimentales sur le magnétisme

**Est-il possible de créer un champ magnétique sans aimants permanents naturels ?**

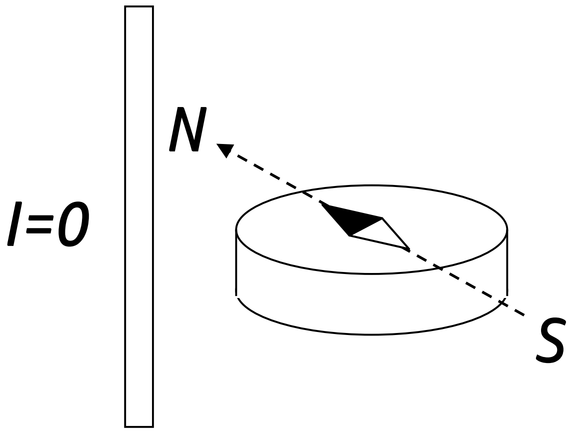
Avril 1820

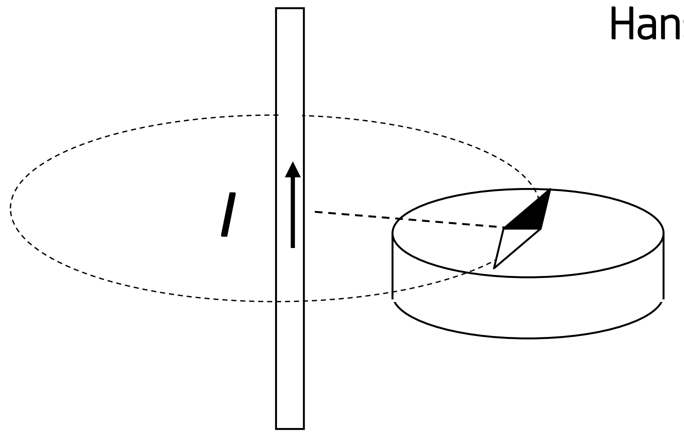
Oersted découvre par hasard pendant un de ses cours qu'un courant fait dévier l'aiguille d'une boussole posée à proximité.

Un courant électrique circulant dans un fil crée un champ magnétique « circulaire » !

L'origine du champ magnétique est le mouvement de charges électriques.

Hans Christian Oersted (1777-1851)



# Observations expérimentales sur le magnétisme

**Octobre 1820**
François Arago rapporte à Paris les observations d'Oersted, ce qui déclenche plusieurs expérimentations.

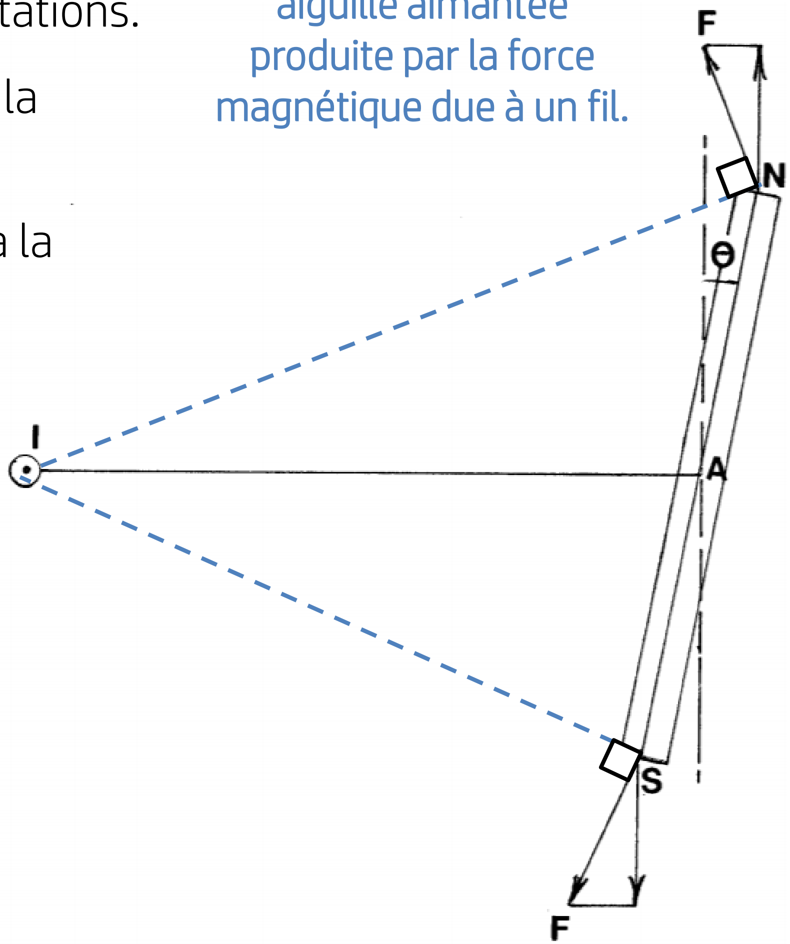
Jean-Baptiste Biot et Félix Savart observent que la grandeur de la **force magnétique** exercée par :

1. Un fil infini est inversement proportionnelle à la distance au fil ;
2. **Un élément de courant infinitésimal est inversement proportionnelle au carré de la distance au fil.**

J.-B. Biot
(1774-1862)

Félix Savart
(1791-1841)

Mesure de la période d'oscillation d'une aiguille aimantée produite par la force magnétique due à un fil.



# Loi de Biot-Savart

En cumulant toutes les observations expérimentales, on trouve la loi de Biot-Savart.

$I$ : Courant à l'origine du champ magnétique

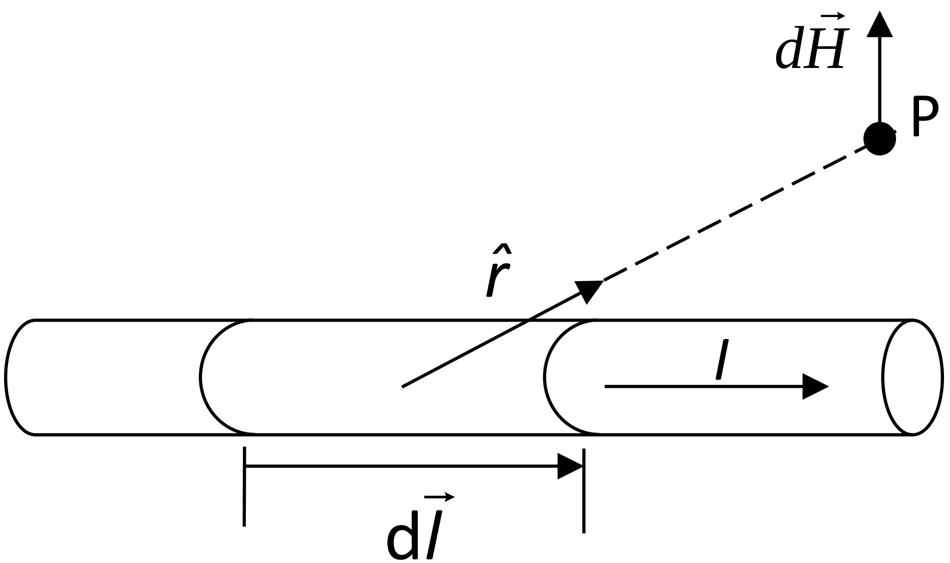
$\vec{H}$ : intensité du champ magnétique [A/m]

Loi de Biot-Savart (forme infinitésimale)

$$\boxed{d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}}$$

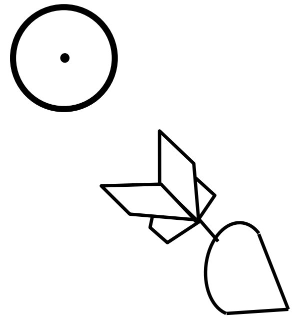
Produit vectoriel $d\vec{l} \times \hat{r}$ : champ « circulaire »

$\frac{1}{r^2}$ : décroît avec l'inverse du carré de la distance

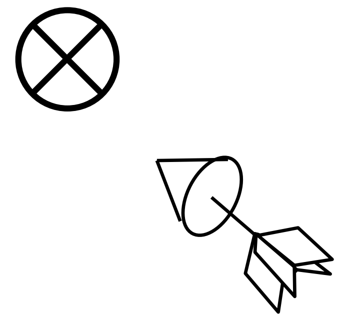


# Rappels – Notation et produit vectoriel

**Vecteur entrant ou sortant du plan**
Les symboles représentent la pointe (vecteur sortant) et l'empennage (vecteur entrant) d'une flèche.



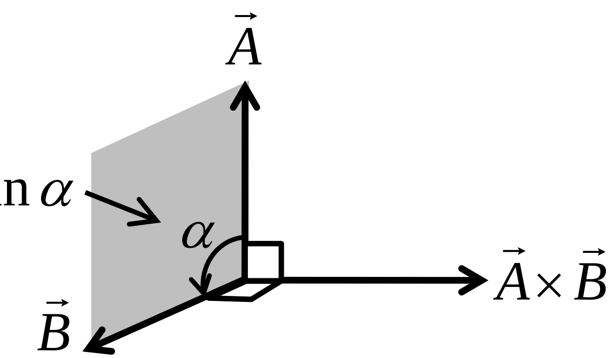
Vecteur sortant du plan

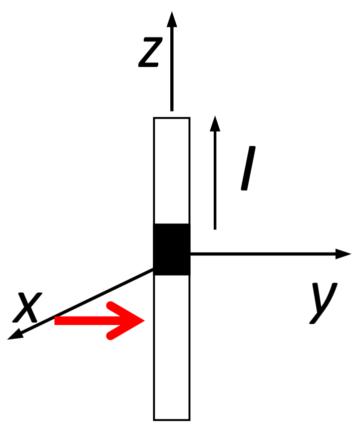


Vecteur entrant dans le plan

**Produit vectoriel**
Le produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$ produit un vecteur perpendiculaire à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$.

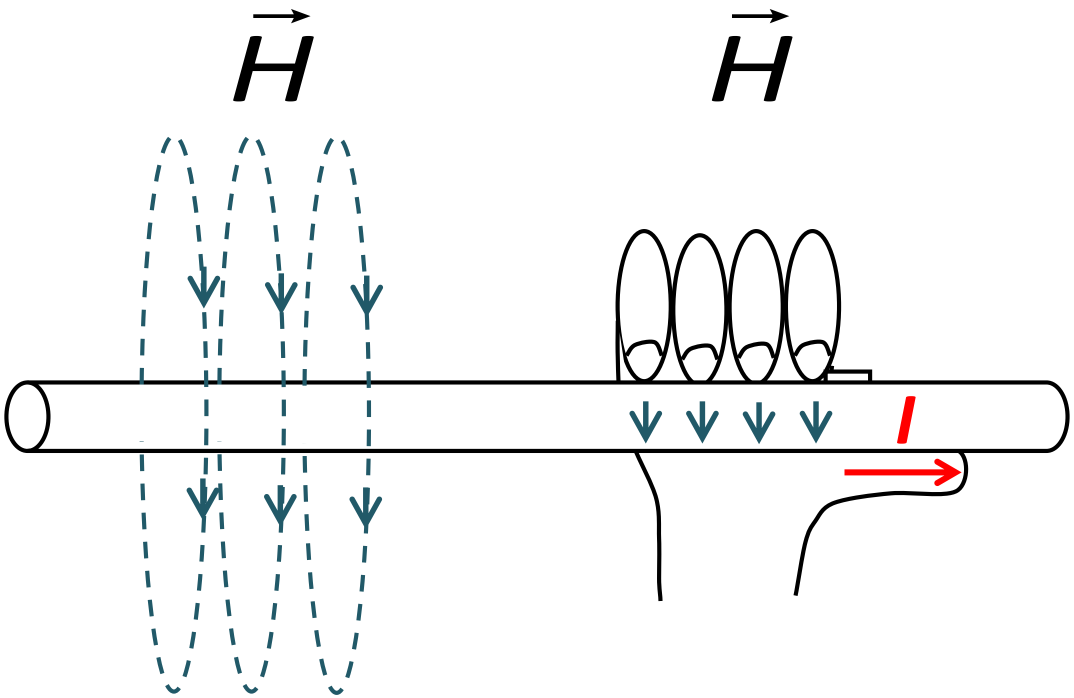
$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB \sin \alpha$$



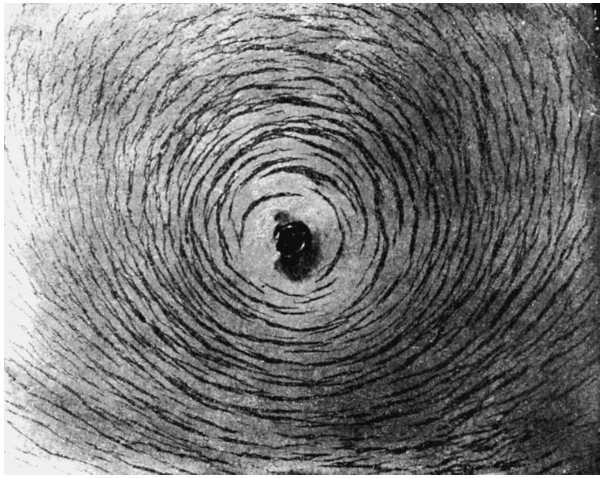




$$d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & dz \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{y}\left(-x\,dz\right) = x\,dz\;\hat{y}$$

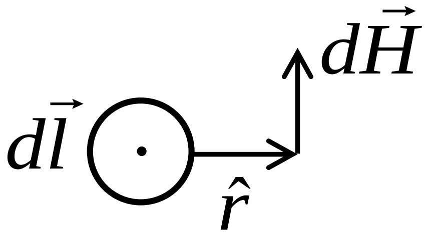
# Règle de la main droite




La limaille de fer s'oriente en suivant les lignes de champ magnétique produit par le fil central.



$$\boxed{d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}}$$



# Loi de Biot-Savart

Pour obtenir le champ magnétique dû à une distribution de courants, il faut intégrer la forme infinitésimale de la loi de Biot-Savart (principe de superposition).

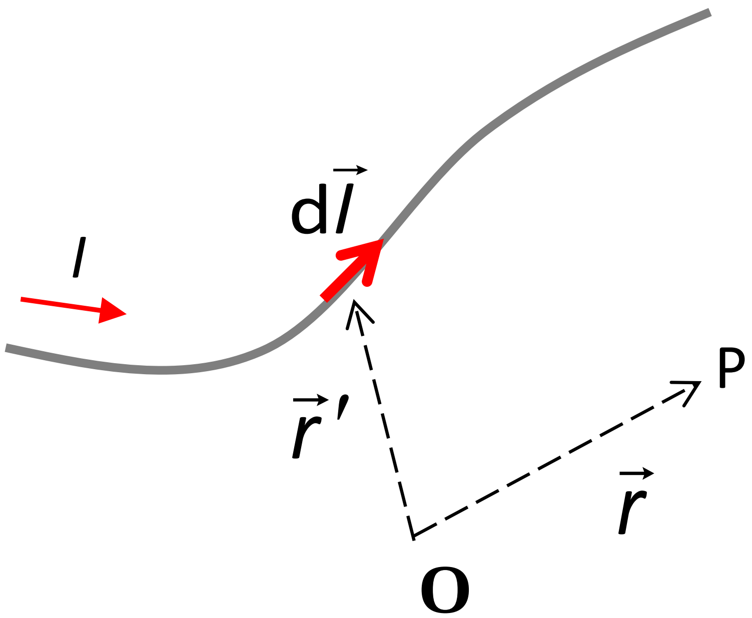
$$\boxed{d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}}$$

Principe de superposition ⟹

**Loi de Biot-Savart**

$$\boxed{\vec{H} = \int_L d\vec{H} = \int_L \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

ATTENTION, ERREUR DANS LE POLYCOPIÉ EQ. (7.4) à la page 7-4




$\vec{r}$ : position où l'on veut évaluer $\vec{H}$

$\vec{r}\,'$ : position de l'élément infinitésimal de courant $Id\vec{l}$

# Exemple 7.1 – Fil rectiligne infini

**Quel est le champ magnétique produit par un fil rectiligne infini transportant un courant $I$ ?**

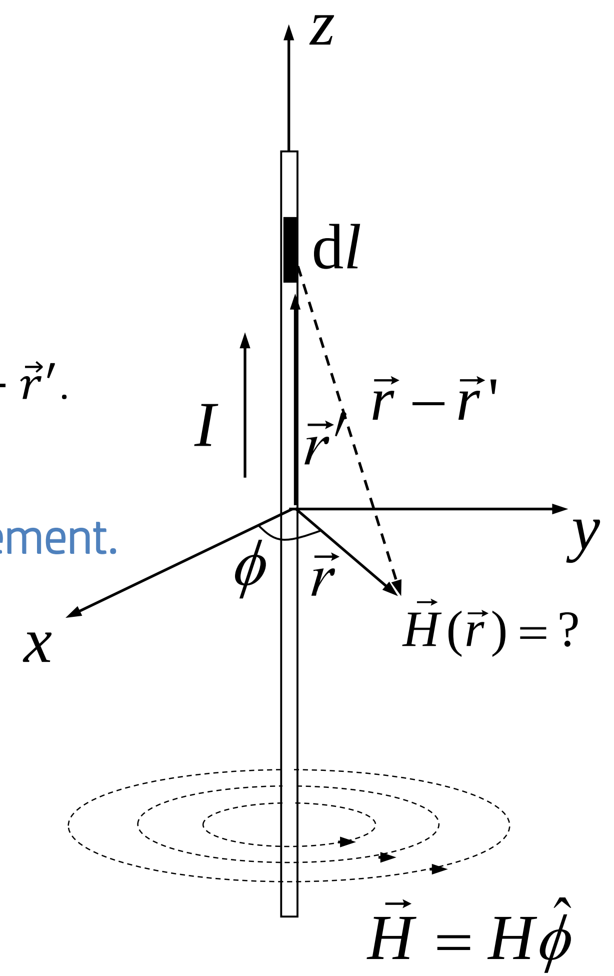
1. **Système de coordonnées**
   Symétrie cylindrique du fil : coordonnées cylindriques.

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \int_L d\vec{H} = \int_L \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

Le champ magnétique est perpendiculaire au fil ($\hat{z}$) et à $\vec{r}-\vec{r}\,'$.

**Règle de la main droite :** $d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,') \Longrightarrow \vec{H} = H\hat{\phi}$

Le champ magnétique aura une composante selon $\hat{\phi}$ seulement.




Géométrie

$$d\vec{l} = dz'\hat{z}$$

$$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho}$$

$$\vec{r}\,' = z'\hat{z}$$

$$\vec{r}-\vec{r}\,' = \rho\hat{\rho} - z'\hat{z} \qquad |\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{z'^2+\rho^2}$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,') = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & dz' \\ \rho & 0 & -z' \end{vmatrix} = \rho\, dz'\hat{\phi}$$

# Exemple 7.1 – Fil rectiligne infini

**Quel est le champ magnétique produit par un fil rectiligne infini transportant un courant $I$ ?**

2. **Calcul du champ magnétique**
   On remplace les expressions des vecteurs dans la loi de Biot-Savart.

$$d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')=\rho\,\mathrm{d}z'\,\hat{\phi}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{z'^2+\rho^2}$$

$$\vec{H}=\int_L\frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

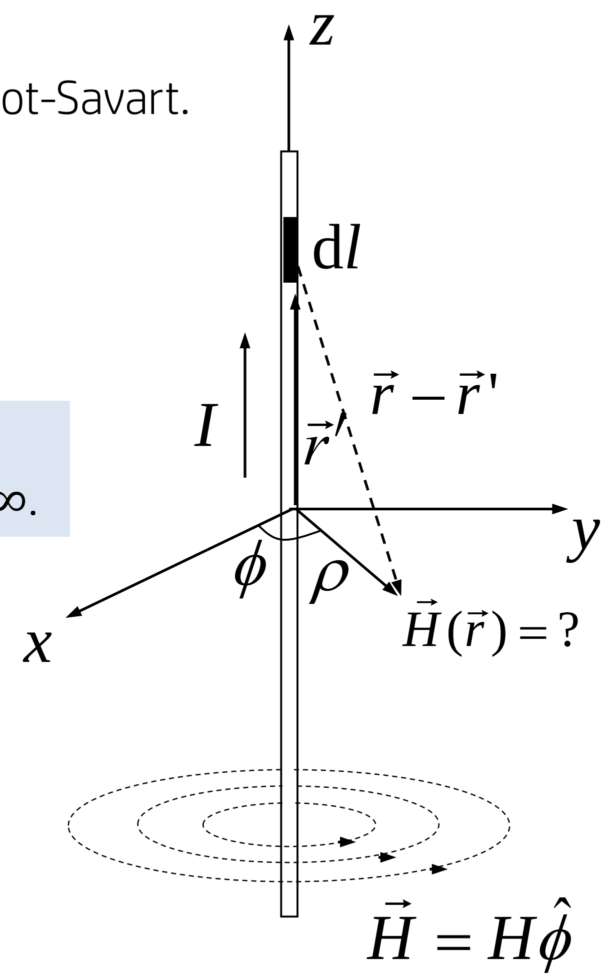
$$\Rightarrow\ \vec{H}=\frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\,dz'}{\left(z'^2+\rho^2\right)^{3/2}}\hat{\phi}$$

Le fil infini s'étend de $z'=-\infty$ à $z'=\infty$.

$$=\frac{I\rho}{4\pi}\left[\frac{z'}{\rho^2\sqrt{z'^2+\rho^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}=\frac{I\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{-1}{\rho^2}\right)\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\vec{H}=\frac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi}}$$

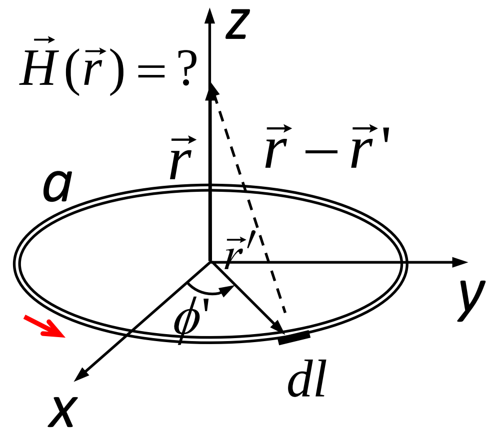
Les lignes de champ forment des cercles concentriques autour du fil. Le champ est inversement proportionnel à la distance au fil.



# Exemple 7.2 – Boucle de courant circulaire

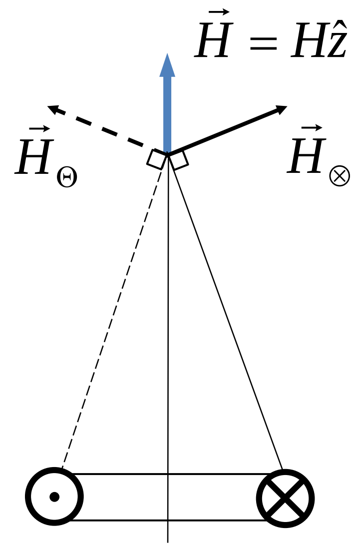
**Quel est le champ magnétique produit par une boucle de courant $I$ circulaire de rayon $a$ en un point situé sur son axe, à une distance $z$ de son centre ?**

1. **Système de coordonnées**
   Symétrie cylindrique de la boucle : coordonnées cylindriques.
   Le champ magnétique est perpendiculaire au fil ($\hat{\phi}$) et à $\vec{r} - \vec{r}'$.




$$\boxed{\vec{H} = \int_L d\vec{H} = \int_L \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

Pour chaque élément de courant de la boucle, il existe un autre élément qui annule la composante de $\vec{H}$ dans le plan de la boucle.
Le champ magnétique est dirigé selon $\hat{z}$ seulement.




Géométrie

$$d\vec{l} = a\,d\phi'\hat{\phi}$$

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r}' = a\hat{\rho}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - a\hat{\rho} \qquad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ 0 & a\,d\phi' & 0 \\ -a & 0 & z \end{vmatrix} = a z\,d\phi'\,\hat{\rho} + a^2\,d\phi'\,\hat{z}$$

S'annule en intégrant

# Exemple 7.2 – Boucle de courant circulaire

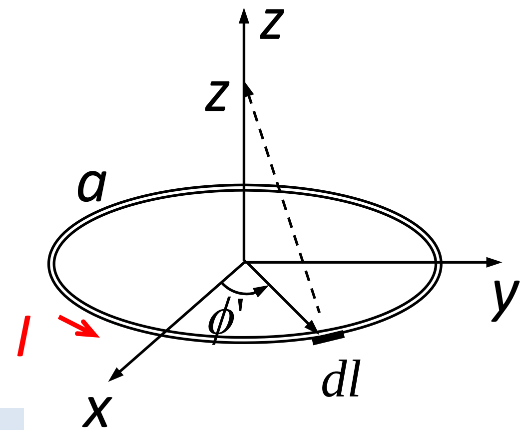
**Quel est le champ magnétique produit par une boucle de courant $I$ circulaire de rayon $a$ en un point situé sur son axe, à une distance $z$ de son centre ?**

2. Calcul du champ magnétique
   On remplace les expressions dans la loi de Biot-Savart.

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = az\,d\phi'\,\hat{\rho} + a^2\,d\phi'\,\hat{z}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$\vec{H} = \int_L \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$



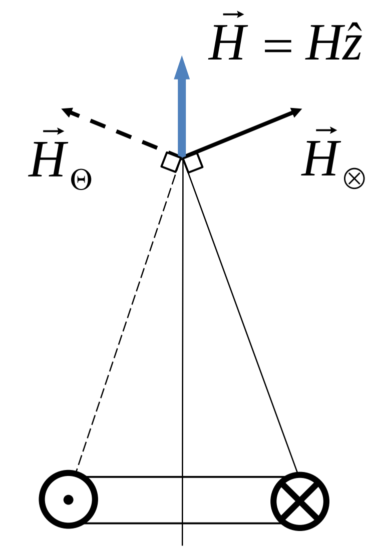

$$\Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{Iaz}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi'\,\hat{\rho} + \frac{Ia^2}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi'\,\hat{z}$$

En posant $\hat{\rho} = \cos\phi'\,\hat{x} + \sin\phi'\,\hat{y}$, la 1re intégrale s'annule.

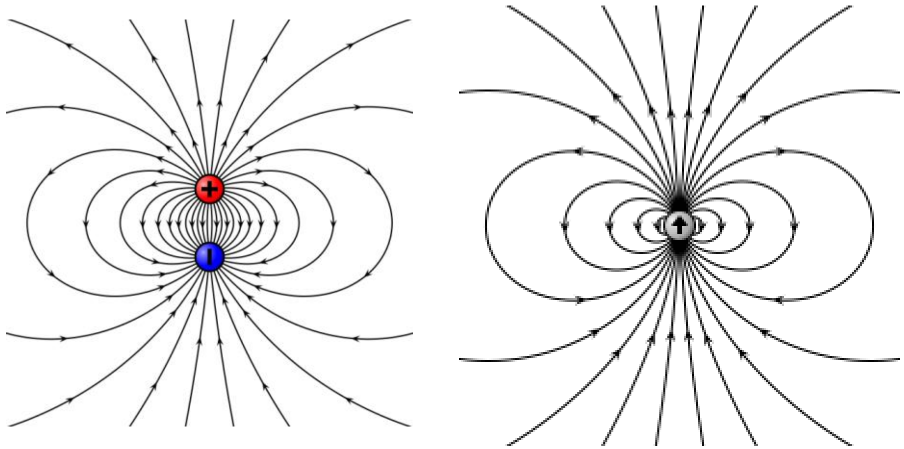
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{H} = \frac{Ia^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}\,\hat{z}}$$

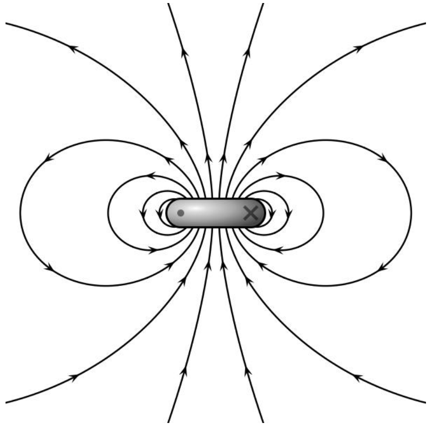
Le champ décroît en $1/z^3$ ($z \gg a$).

À quoi cela vous fait-il penser ?



# Dipôle électrique et boucle de courant





Champ électrique d'un dipôle électrique ($r \gg d$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

Sur l'axe du dipôle ($\theta = 0, r = z$)

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\,\hat{z}}$$

Champ magnétique d'une boucle de courant sur son axe

$$\vec{H} = \frac{Ia^2}{2\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}}\,\hat{z}$$

Loin de la boucle ($z \gg a$)

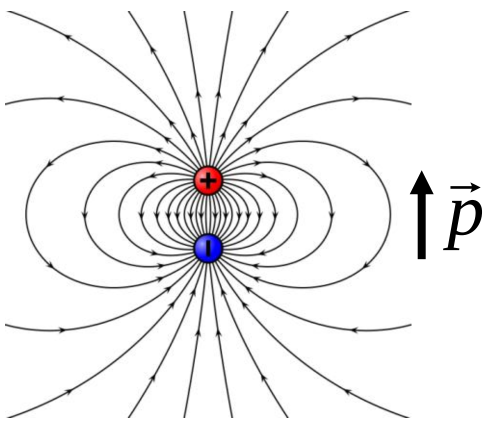
$$\boxed{\vec{H} = \frac{I\pi a^2}{2\pi z^3}\,\hat{z}}$$

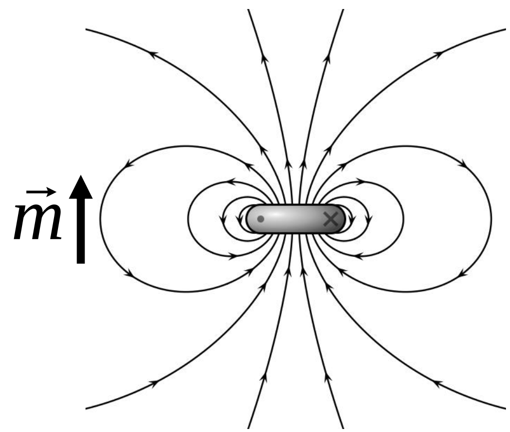
Même dépendance en $1/z^3$ !

Une boucle de courant est en fait un dipôle magnétique !

# Moment dipolaire magnétique

**En l'absence de charge magnétique, le dipôle magnétique (boucle de courant) est la source la plus élémentaire pour générer un champ magnétique.**




**Moment dipolaire électrique [C·m]**

$$\boxed{\vec{p} = Q\vec{d}}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

**Moment dipolaire magnétique [A·m²]**

$$\boxed{\vec{m} = NI\vec{S}}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{m}}{2\pi z^3}$$

$N$ : Nombre de tours de fil dans la boucle de courant

$NI$ : Courant circulant dans la boucle (chaque tour de fil supporte un courant $I$)

$\vec{S}$ : Surface de la boucle. Orientation positive donnée par la règle de la main droite (doigts s'enroulent dans le sens du courant).

# Théorème d'Ampère

La loi de Biot-Savart permet de calculer le champ magnétique $\vec{H}$ à partir du courant.

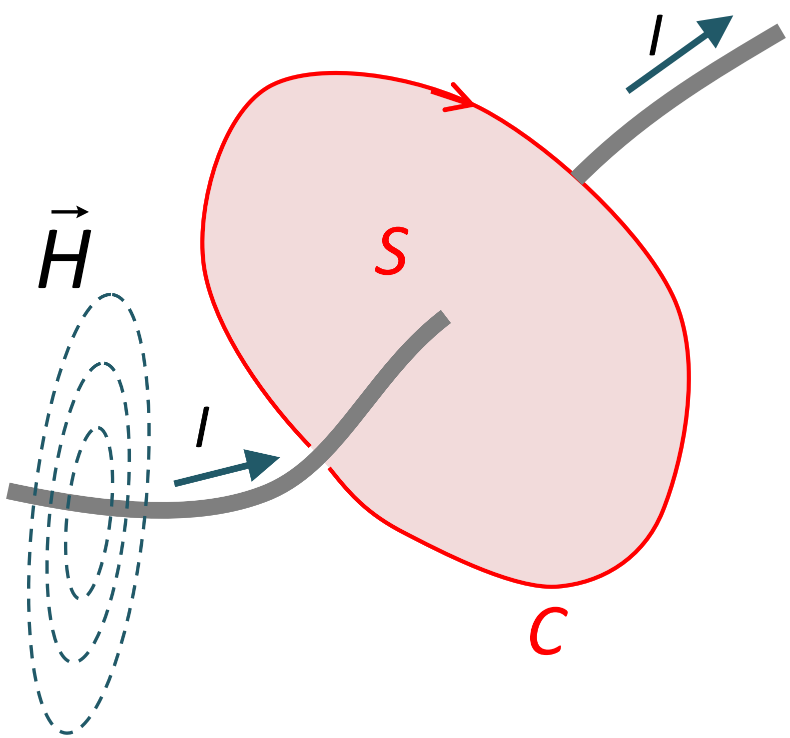
Comment calculer le courant total traversant une surface si l'on connaît seulement le champ magnétique qu'il produit ?

Théorème d'Ampère
(4e équation de Maxwell en statique)

$$\boxed{I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}}$$

Le courant total $I$ traversant une surface $S$ délimitée par un contour fermé $C$ est la **circulation** de $\vec{H}$ (intégrale curviligne du produit scalaire) sur ce contour.

Sens de parcours de l'intégrale de contour : règle de la main droite avec $d\vec{S}$.




D'un point de vue mathématique, le théorème d'Ampère est une application du théorème de Stokes avec $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$.

# Quiz !

Quelle est le courant total traversant chacune de ces surfaces ?

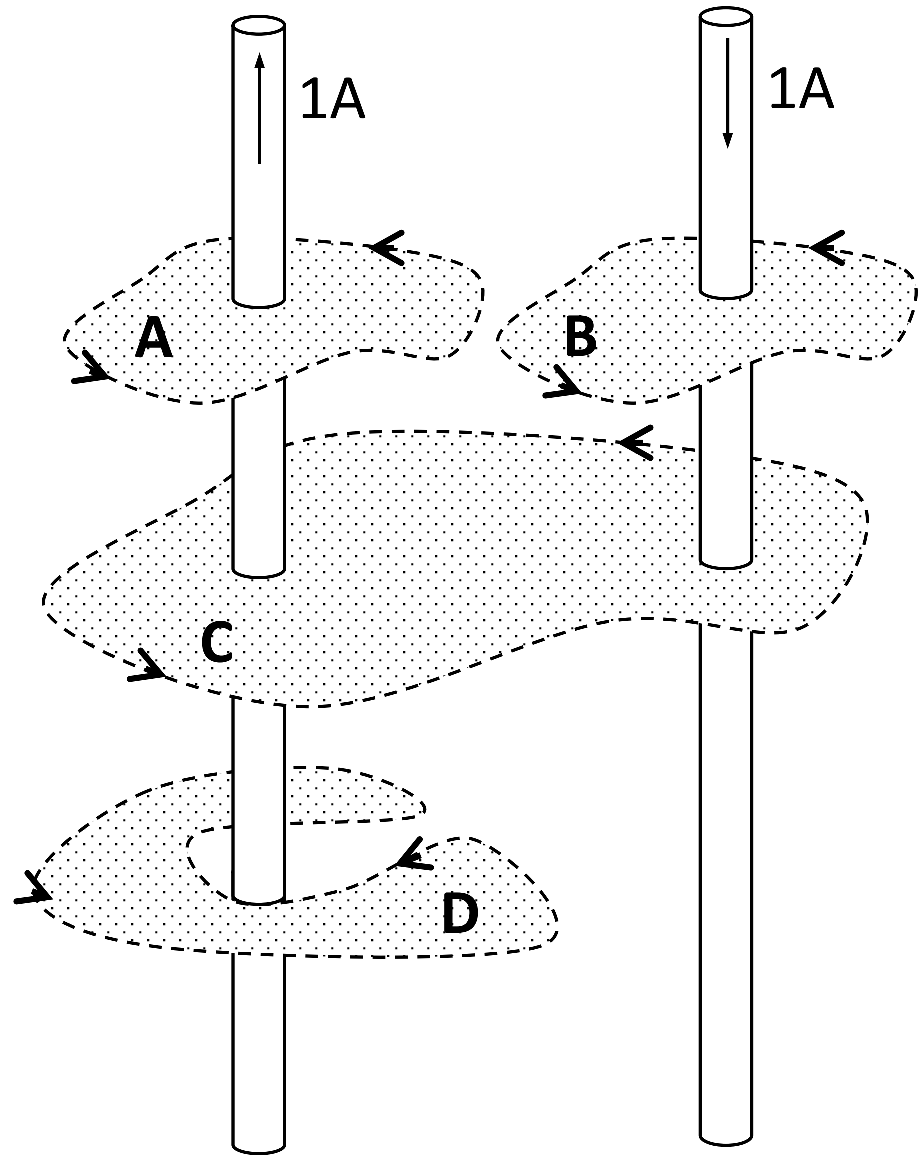
$$\boxed{I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}}$$

**A.** $I = +1\ \mathrm{A}$

**B.** $I = -1\ \mathrm{A}$

**C.** $I = 0\ \mathrm{A}$

**D.** $I = 0\ \mathrm{A}$



# Théorème d'Ampère

**On peut aussi utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique dans un problème symétrique.**

Si l'on peut déduire l'orientation du champ $\vec{H}$ à partir de la symétrie du problème, alors, de manière analogue au théorème de Gauss, l'idée est de trouver un parcours d'intégration $C$ tel que :

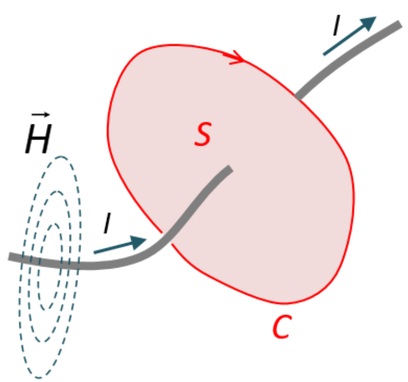
$$\boxed{I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}}$$

1. Sur une partie du contour, $\vec{H}$ est tangent au contour et son module est constant ;
   $$\vec{H} \cdot d\vec{l} = \pm H\, dl$$
2. Sur le reste du contour, $\vec{H}$ est nul ou perpendiculaire au parcours d'intégration.
   $$\vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

Sous ces conditions, le **champ magnétique** se calcule ainsi :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = HL \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{I}{L}}$$

$I$ : courant qui traverse la surface $S$ délimitée par $C$.
$L$ : longueur du chemin d'intégration sur laquelle $\vec{H} \cdot d\vec{l} \neq 0$.



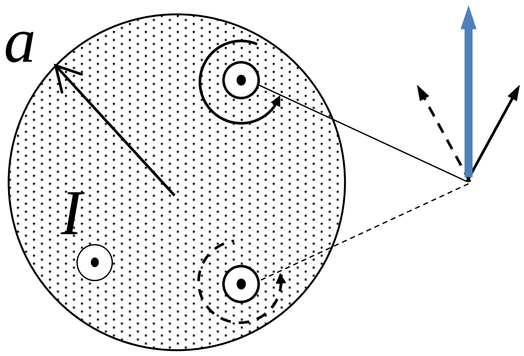
# Exemple 7.4 – Champ magnétique d'un conducteur cylindrique

Quel est le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur d'un conducteur cylindrique de rayon $a$ traversé par un courant $I$ ?

Hypothèse : le courant $I$ est distribué uniformément sur la toute section du conducteur.

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z}$$

$$\vec{H} = H\hat{\phi}$$




On pourrait utiliser la loi de Biot-Savart en intégrant sur toute la section du fil.

Ici, il est plus rapide d'utiliser le théorème d'Ampère, car la symétrie du problème permet de déduire que le champ est orienté selon $\hat{\phi}$ et qu'il dépend seulement de la distance $\rho$.

Choix du parcours d'intégration

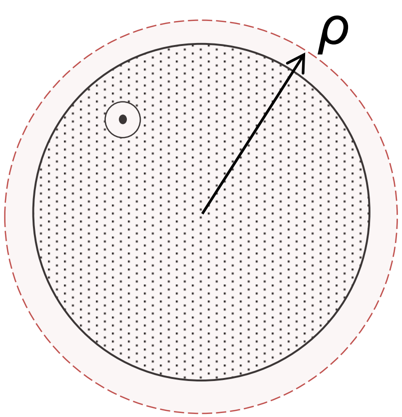
En choisissant un contour circulaire de rayon $\rho$, centré sur le conducteur, $H$ est constant sur le contour ($\rho$ est constant) et tangent au contour.

$$H = \frac{I(\rho)}{L} = \frac{1}{2\pi\rho}\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

# Exemple 7.4 – Champ magnétique d'un conducteur cylindrique

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z} \qquad \vec{H} = H\hat{\phi} \qquad H = \frac{1}{2\pi\rho}\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Champ à l'extérieur du fil



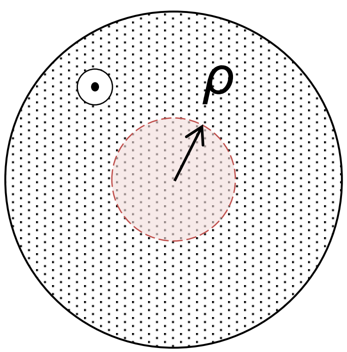

$\rho > a$

$$\vec{H} = \left(\frac{1}{2\pi\rho}\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}\right)\hat{\phi} = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{I}{\pi a^2}\int_S dS\hat{\phi} = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{I}{\pi a^2}\pi a^2\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi}}$$

Le champ est inversement proportionnel à la distance, tel qu'observé par Biot et Savart!

Champ à l'intérieur du fil




$\rho < a$

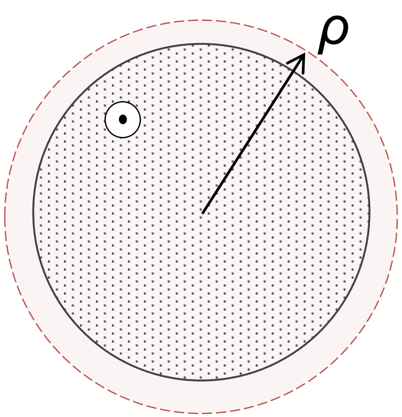
$$\vec{H} = \left(\frac{1}{2\pi\rho}\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}\right)\hat{\phi} = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\hat{\phi}}$$

Le champ est proportionnel à la distance.

# Exemple 7.4 – Champ magnétique d'un conducteur cylindrique

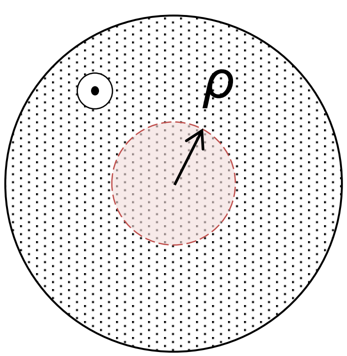
Champ à l'extérieur du fil




$\boxed{\rho > a}$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi}}$$

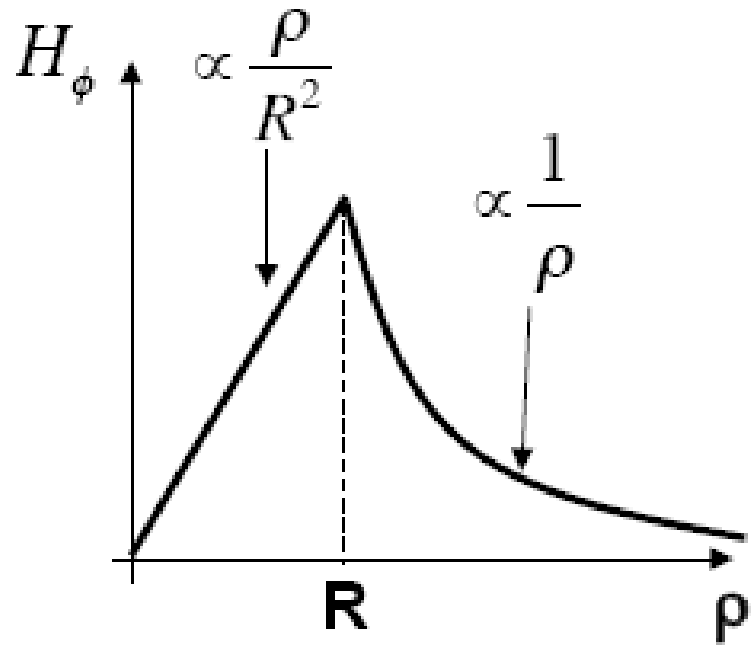
Champ à l'intérieur du fil




$\boxed{\rho < a}$

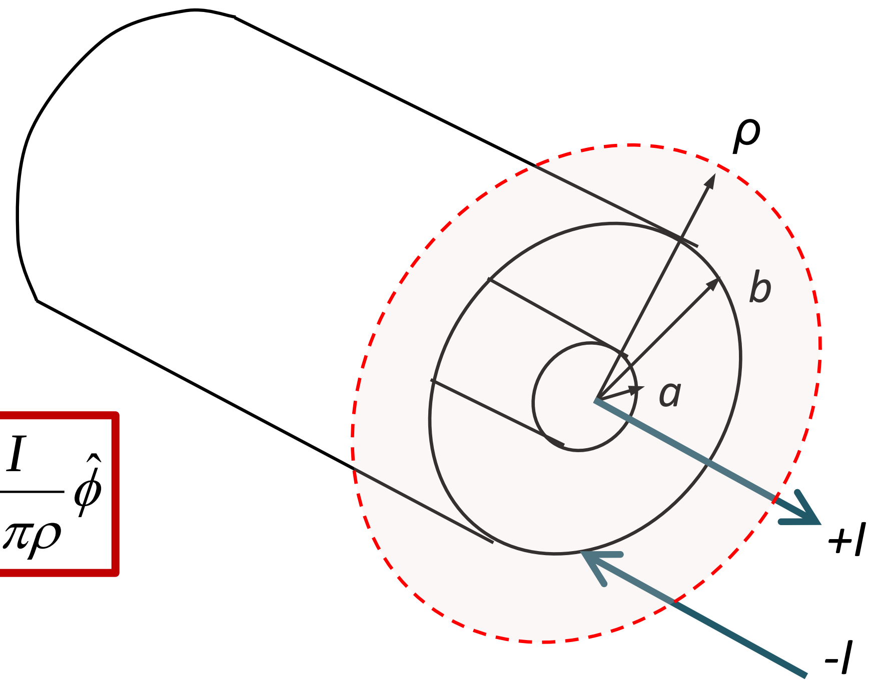
$$\boxed{\vec{H} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\hat{\phi}}$$

Le comportement du champ en fonction de $\rho$ diffère à l'intérieur et à l'extérieur.




Le champ est maximal à la surface du conducteur.

# Exemple – Champ magnétique d'un câble coaxial




**Symétrie**

Comme dans l'exemple 7.4, la symétrie cylindrique implique que $\vec{H} = H\hat{\phi}$ et que $\vec{H}$ ne dépend que de $\rho$.

**Entre les deux conducteurs ($a < \rho < b$)**

$$+I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi\rho H \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi}}$$

**À l'extérieur du fil ($\rho > b$)**

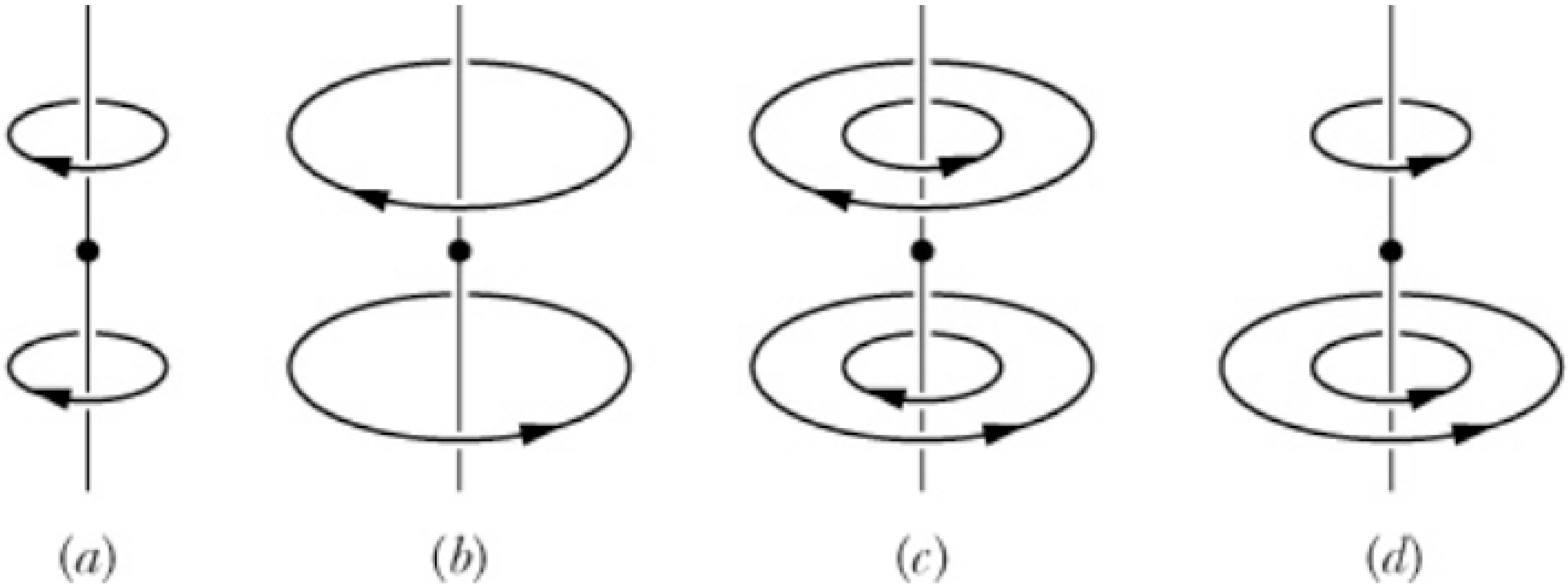
$$+I - I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi\rho H \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \vec{0}}$$

**Blindage électromagnétique**

Le champ magnétique produit par le courant circulant dans le câble coaxial est nul à l'extérieur du câble. Le champ électrique est également nul à l'extérieur du câble, comme nous l'avons vu dans la 1re partie du trimestre.

# Quiz !

Classez les situations suivantes en ordre croissant de magnitude du champ magnétique au point central (en noir). Chaque boucle est parcourue par le même courant $I$.



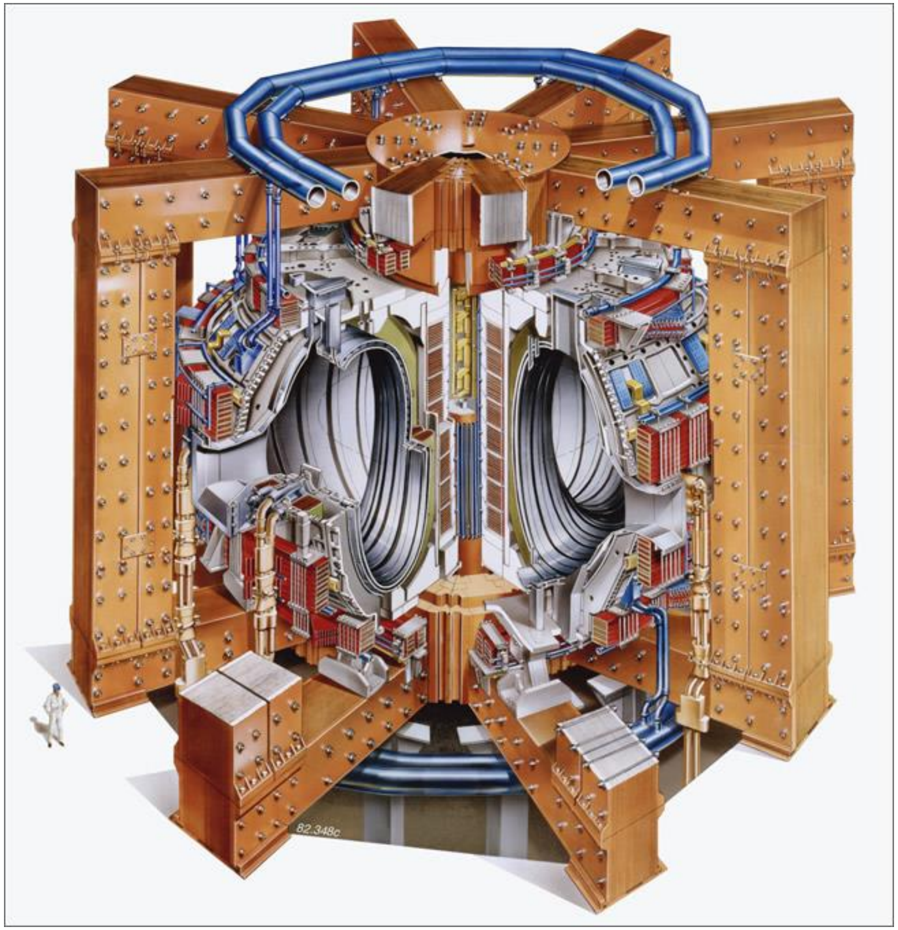

Champ nul

Champ nul

b = c < a < d

# Bobines toroïdales

**Réacteur à fusion nucléaire**
Plasma contenu par le champ magnétique d'une bobine toroïdale

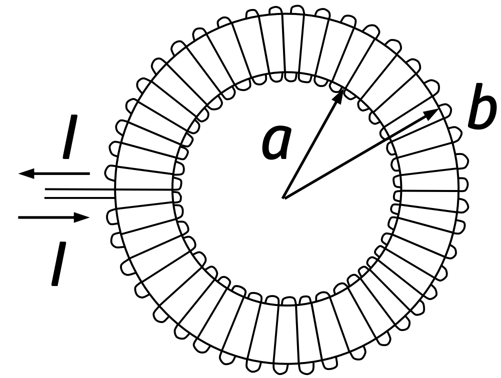


**Inductances et transformateurs pour signaux radiofréquences basés sur des bobines toroïdales**

Les bobines (solénoïdes) permettent de confiner et de contrôler le champ magnétique.

# Exemple 7.5 – Champ magnétique dans une bobine toroïdale

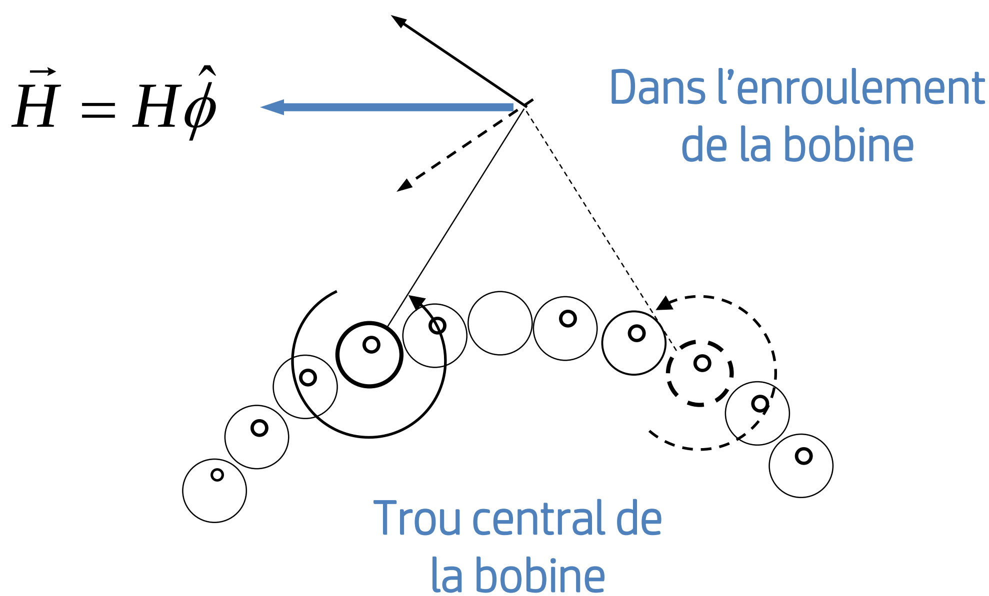
Quel est le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur d'une bobine toroïdale de rayons interne $a$ et externe $b$ comportant $N$ spires parcourues par un courant $I$ ?




*N* spires (tours de fil)

**Symétrie**

Comme dans l'exemple 7.4, la symétrie cylindrique implique que $\vec{H} = H\hat{\phi}$ et que $\vec{H}$ ne dépend que de $\rho$.

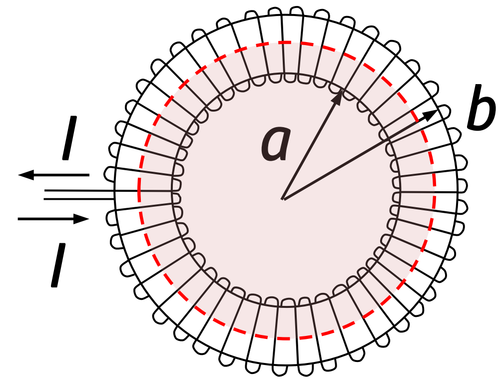



La symétrie permet d'appliquer le théorème d'Ampère. Quel parcours d'intégration choisir ?

# Exemple 7.5 – Champ magnétique dans une bobine toroïdale

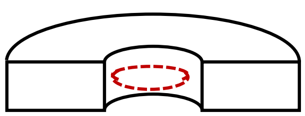
Parcours d'intégration : cercle de rayon $\rho$ dans le plan de la bobine et centré sur la bobine

$$\boxed{I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}}$$



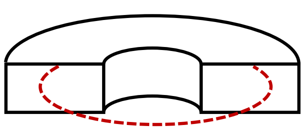

*N* spires (tours de fil)

Dans le théorème d'Ampère, $I$ représente le courant total traversant la surface, qui vaut ici $NI$ pour $a < \rho < b$ et 0 sinon.



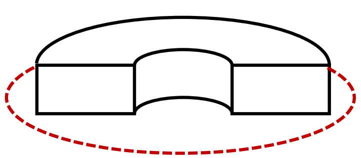
$\rho < a$

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H\,2\pi\rho = 0 \qquad \boxed{\vec{H} = \vec{0}}$$



$a < \rho < b$

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H\,2\pi\rho = NI \qquad \boxed{\vec{H} = \frac{NI}{2\pi\rho}\hat{\phi}}$$

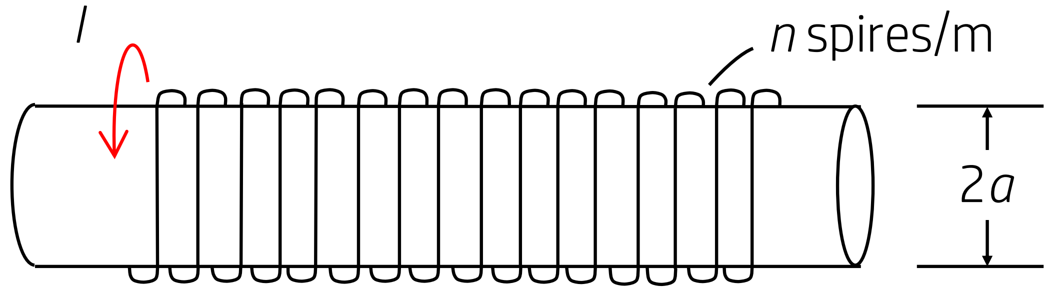


$b < \rho$

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H\,2\pi\rho = NI - NI = 0 \qquad \boxed{\vec{H} = \vec{0}}$$

# Exemple 7.6 – Champ magnétique dans un solénoïde

**Quel est le champ magnétique dans un solénoïde ayant $n$ spires par mètre de rayon $a$ parcourues par un courant $I$ ?**

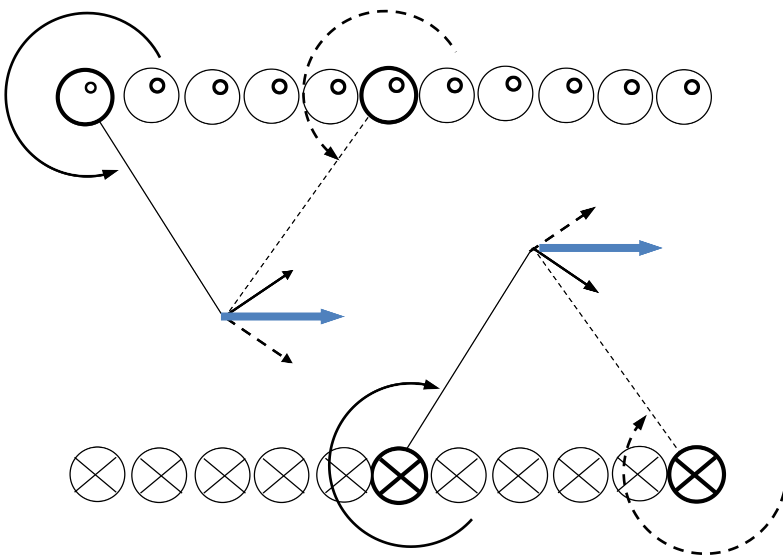



Hypothèse : le solénoïde est infiniment long
(longueur très grande par rapport aux autres dimensions)

1. **Symétrie**
   Le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde est parallèle à l'axe du solénoïde ($\hat{z}$).

$$\vec{H} = H_z \hat{z}$$

Coordonnées cylindriques



# Exemple 7.6 – Champ magnétique dans un solénoïde

## 2. Calcul du champ magnétique

La symétrie du problème permet d'utiliser un contour rectangulaire dont les côtés sont parallèles à $\hat{z}$ et à $\hat{\rho}$.

Quelle méthode utiliser : loi de Biot-Savart ou théorème d'Ampère ?

$$\vec{H} = H_z \hat{z}$$

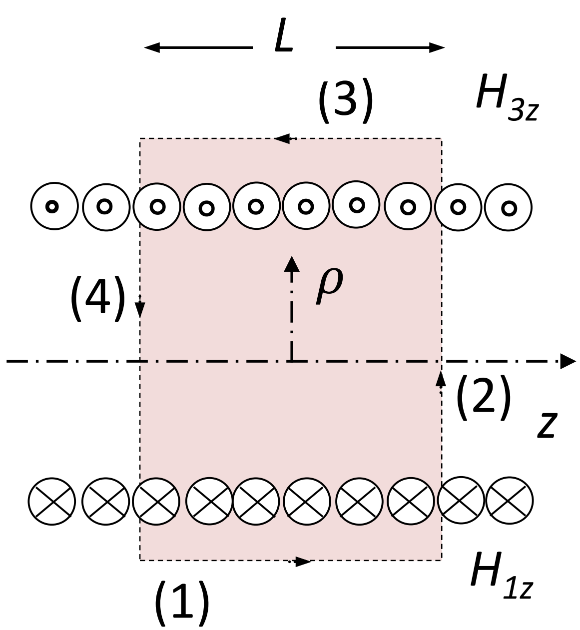
$$\boxed{I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}}$$

Côtés (2) et (4) : champ perpendiculaire au contour

$$\vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

Côtés (1) et (3) : champ constant et parallèle au contour

$$\vec{H} \cdot d\vec{l} = \pm H_z dl$$




### Champ à l'extérieur du solénoïde

Le courant total traversant la surface est nul.

$$0 = \int_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{C_3} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{C_4} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

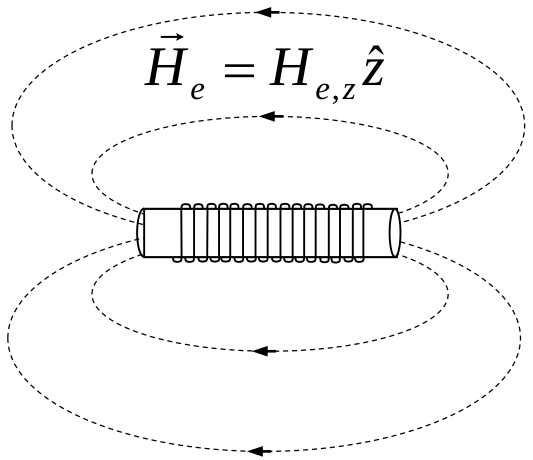
$$\Rightarrow 0 = H_{1z} L + 0 - H_{3z} L + 0 \Rightarrow H_{1z} = H_{3z}$$

Le champ est uniforme à l'extérieur du solénoïde !

# Exemple 7.6 – Champ magnétique dans un solénoïde

## Champ à l'extérieur du solénoïde

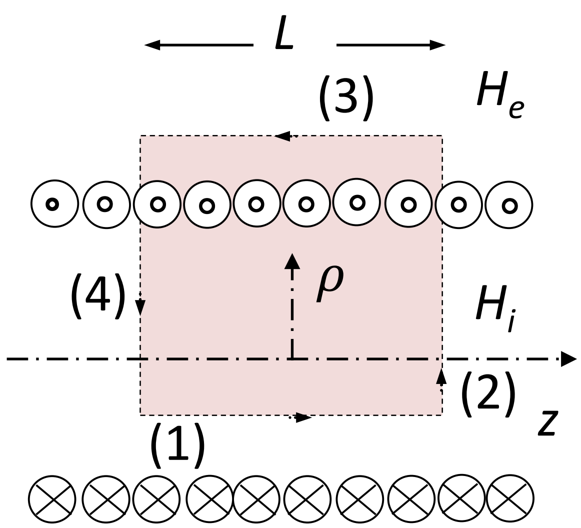
Champ solénoïdal : tout le flux magnétique à l'intérieur doit retourner par l'extérieur pour que les lignes se referment sur elles-mêmes. Ce flux magnétique ne peut pas être infini, car cela impliquerait un champ magnétique infini dans le solénoïde. Un flux fini qui se répartit sur une surface extérieure infinie implique que la densité de flux est nulle à l'extérieur.




$$\boxed{H_{e,z} = 0}$$

## Champ à l'intérieur du solénoïde

Le courant traversant la surface n'est plus nul.
Il y a $nL$ spires, chacune traversée par un courant $I$.




$$nLI = \int_{C_1} \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_{C_3} \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_{C_4} \vec{H}\cdot d\vec{l}$$

$$nLI = H_{i,z}L + 0 + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_{i,z} = nI}$$

Le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde !

# Densité de flux magnétique $\vec{B}$

**Électrostatique (champs $\vec{E}$ et $\vec{D}$)**

Densité de flux électrique $\vec{D}$ : charges libres seulement
Champ électrique $\vec{E}$ : charges libres et liées

Le champ électrique $\vec{E}$ permet de décrire la réponse électrique d'un matériau.

Dans le vide $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$ Diélectrique linéaire $\vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$

**Magnétostatique (champs $\vec{H}$ et $\vec{B}$)**

Champ magnétique $\vec{H}$ : **courants libres** seulement (charges libres)
Densité de flux magnétique $\vec{B}$ : **courants libres et liés** (charges libres et liées)

La densité de flux $\vec{B}$ permet de décrire la réponse magnétique d'un matériau (chapitre 9).

Dans le vide

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H}}$$

en tesla [1 T]

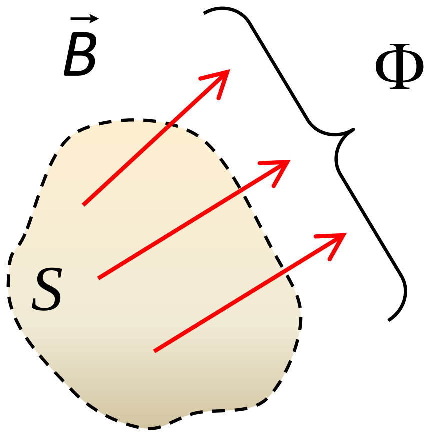
Perméabilité du vide

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A\ ou\ H/m}}$$

# Flux magnétique et champ solénoïdal (2e équation de Maxwell)

**Flux magnétique**

Le flux magnétique $\Phi$ traversant une surface $S$ est l'intégrale de la densité de flux magnétique $\vec{B}$ sur cette surface.




$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

en weber [1 Wb = 1 T·m²]

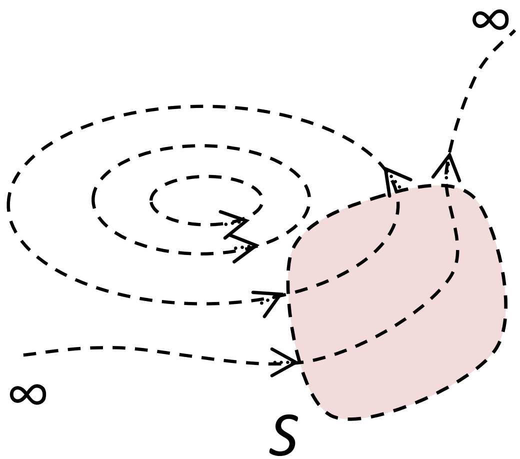
**Champ solénoïdal (2e équation de Maxwell)**

L'absence de charge magnétique a pour conséquence que **les lignes de flux magnétique se referment toujours sur elles-mêmes ou à l'infini** (par opposition aux lignes de flux électriques qui peuvent débuter et terminer sur des charges libres). On dit que le champ est **solénoïdal**.

2e équation de Maxwell

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

Toutes les lignes de flux magnétique qui entrent dans une surface fermée en ressortent.




(surface fermée)

# Équations de Maxwell en statique

Avec les notions vues jusqu'à présent dans le cours, on peut énoncer les quatre équations de Maxwell en statique (champs qui ne varient pas dans le temps).

| | | | |
|---|---|---|---|
| I Théorème de Gauss | $\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q}$ | Théorème de la divergence | $\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$ |
| II Champ magnétique solénoïdal | $\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$ | Théorème de la divergence | $\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$ |
| III Champ électrostatique conservatif | $\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$ | Théorème de Stokes | $\boxed{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}$ |
| IV Théorème d'Ampère | $\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$ | Théorème de Stokes | $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$ |

Nous verrons à la semaine 11 comment adapter ces équations pour des champs qui varient dans le temps.