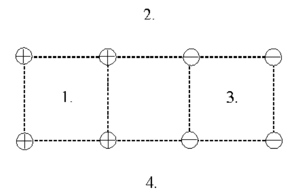
PHS1102 CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE – HIVER 2009 ___CORRIGÉ

Question 1: Corrigé (5.5 *points*)



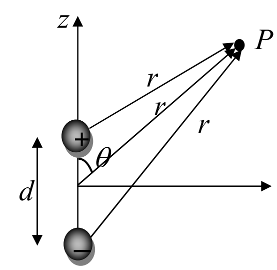
1.1➢ *Quatre charges positives et quatre charges négatives de même valeur sont séparées de leur plus proche voisine par des distances égales. Lorsque l'on considère les potentiels estimés aux quatre points (1 à 4) appartenant au même plan et illustrés sur la figure, appariez les énoncés suivants:*

(1) Différence de potentiel maximum	(f) (0.25Pts)	(a) V_3
(2) Différence de potentiel minimum	(d) (0.25Pts)	(b) V_1
(3) Différence de potentiel nulle	(e) (0.25Pts)	(c) V_2
(4) Potentiel positif	(b) (0.25Pts)	(d) $\Delta V = V_3 - V_1$
(5) Potentiel négatif	(a) (0.25Pts)	(e) $\Delta V' = V_2 - V_4$
(6) Potentiel nul	(c) (0.25Pts)	(f) $\Delta V'' = V_1 - V_3$

1.2➢ *La figure montre un condensateur plan chargé et isolé électriquement sur lequel on applique une force qui produit un déplacement de la plaque de gauche d'une distance infinitésimale δx vers la droite (la plaque de droite est fixe). Le changement d'énergie potentielle électrostatique* $\delta U = U(2) - U(1)$

(a) $-\dfrac{Q^2\,\delta x}{2\varepsilon_0\,S}$; (1Pts) L'énergie stockée diminue car la capacité monte (b) $\dfrac{Q^2\,\delta x}{2\varepsilon_0\,S}$; (c) 0

1.3➢ *La figure illustre un dipôle formé de deux charges identiques Q, mais de polarités opposée, séparées d'une distance d. Le point d'observation P est situé à une distance r >> d. La distribution de potentiel est donnée par l'expression :*



(a) $V(P) = \dfrac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}$ (1Pts) (b) $V(P) = \dfrac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}$ (ne peut pas être sinus, analyser 0 ou 90 dégres) (c) $V(P) = \dfrac{2Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,r}$ (La différence ne peut pas aller comme 1/r)

1.4➢ *Déterminer la valeur de la constante A pour que l'expression :*

$$V(x,y,z) = V_a(1+\frac{x}{a})(1+\frac{y}{a})(1+\frac{z}{a}) - A\frac{x^2}{a^2} \;;\qquad V_a = 5\ V, a = 1\ cm$$

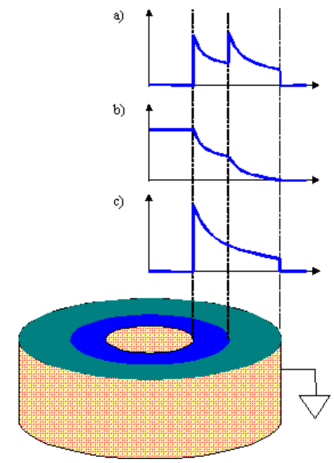
puisse décrire le potentiel électrostatique en absence de charges, dans la région $a < x, y, z \le 2a$

Il faut prendre $\nabla^2 V = -\dfrac{2A}{a^2} = 0$ (absence de charges) $\Rightarrow$ A=0 (0.5Pts)

1.5➢ *Le conducteur central d'un câble coaxial est isolé à l'aide de deux diélectriques avec pertes: une première couche d'isolant d'épaisseur uniforme est entourée d'une deuxième couche ayant une conductivité électrique deux fois plus faible que celle de la première couche. Le conducteur central possède un potentiel positif tandis que la gaine est mise à la terre. Identifier les trois courbes illustrées en fonction de la distance* ρ *au centre du cylindre conducteur. (La réponse au cahier doit se lire : la courbe (x) correspond au choix (n); pour x = a,b, c , avec n = 1,2,3,4))*

Choix 1: densité de courant $\vec{J}\cdot\hat{\rho}$ *Choix 2: intensité du champ électrique* $\vec{E}\cdot\hat{\rho}$

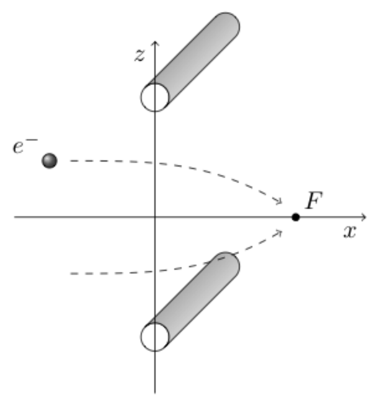
Choix 3: potentiel électrique V *Choix 4 : polarisation* $\vec{P}\cdot\hat{\rho}$



La courbe (a) corresponde au choix : (2) (0.5Pts)
La courbe (b) corresponde au choix : (3) (0.5Pts)
La courbe (c) corresponde au choix : (1) (0.5Pts)

La densité de courant reste la même de par et d'autre de l'interface entre les deux diélectriques avec pertes à cause de la continuité du courant (courbe c). À cette interface, l'intensité du champ électrique *E* double en passant dans le deuxième couche parce que *E*=*J* /conductivité (courbe a), ce qui fait que la pente du potentiel devient plus abrupte (courbe b). La courbe a) pourrait être la polarisation, sauf que nous n'avons pas assez d'information sur les permittivités pour se prononcer.

Question 2: Lentille électronique *(4 points)*



2.1 ➢ *Calculez le vecteur champ électrique* $\vec{E}(z)$ *en tous points sur une ligne droite allant d'un fil à l'autre, c'est-à-dire pour* $-(d-a)<z<(d-a)$.

2.2 ➢ *Quel doit être le signe de la densité linéique de charge □$_l$ sur les fils pour qu'ils repoussent les électrons vers un point focal F ?*

2.3 ➢ *Calculez l'expression du potentiel électrique* V_{a0} *de chaque fil par rapport au point* $z=0$. *Nous posons comme référence* $V(z=0)=0$.

2.1 ➢ $$\oint\!\!\!\oint_{cyl(\rho)} \vec{E}.d\vec{S}=\frac{\ell\rho_\ell}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_\rho\ell 2\pi\rho=\frac{\ell\rho_\ell}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_\rho=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$ (1Pts)

Par superposition: $E_z=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z+d}-\frac{1}{d-z}\right)=\frac{\rho_\ell z}{\pi\varepsilon_0\left(d^2-z^2\right)}$ pour $-(d-a)<z<(d-a)$ (1Pts)

2.2 ➢ Il faut repousser les électrons, donc la densité de charge est négative (0.5Pts)

2.3 ➢

$$dV=-E_z dz\Rightarrow V(z)-V(0)=-\int_0^z\frac{\rho_\ell z dz}{\pi\varepsilon_0\left(d^2-z^2\right)}=-\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{u=z^2}\frac{du}{d^2-u}=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d^2-z^2}{d^2}\right)$$

$$V(z)=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d^2-z^2}{d^2}\right)\Rightarrow V_{a0}=V(z=d-a)=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d^2-(d-a)^2}{d^2}\right)=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2ad-a^2}{d^2}\right)$$

$$V(z=-(d-a))=V(z=d-a)=V_{a0}$$

(1.5Pts)

QUESTION #3 (*5.5 points*)

Des valeurs possibles dans ce problème sont V= 4 Volts, d = 5 µm, r = 2 µm , W= 10 µm , L = 16 µm, σ = 0,75 , Ω⁻¹m⁻¹.

Questions: En l'absence de globule rouge:

3.1 ➢ *Déterminer la densité de courant J, la résistance R_0, le courant total I, et la puissance totale dissipée dans le milieu aqueux entre les électrodes .* (*2 points*)

Lorsqu'un globule rouge passe entre les deux électrodes:

3.2 ➢ *Esquisser le plus précisément les lignes de champ et les lignes équipotentielles sur la figure à la page 5 (qui est à l'échelleSURTOUT, bien identifier quelles sont les lignes de potentiel (avec les valeurs de potentiel correspondantes) et quelles sont les lignes de courant sur votre dessin.).* (*1 point*)

3.3 ➢ *En faisant la cartographie du champ, estimer la variation de résistance dans le système. Augmentera-t-elle?* (*2 points*)

3.3 ➢ *D'après ces calculs, quelle est la variation de courant (DC) que l'on peut espérer mesurer sur un ampèremètre? Augmentera-t-il quand un globule passe entre les plaques?* (*0.5 points*)

Q3 – Réponses :

3.1 ➢

$$\boxed{J = \frac{\sigma V_0}{d} = 600 mA/mm^2} \text{ vers le bas} \qquad \boxed{R_0 = \frac{d}{\sigma L W} = 41{,}7 k\Omega}$$

$$\boxed{I = \frac{V}{R_0} = JLW \approx 100 \mu A} \text{ vers le bas} \qquad \boxed{P = \frac{V_0^2}{R_0} = 0{,}38 mW}$$

3.2➢ **Voir Figure**

3.3➢

$$\boxed{\Delta R_{approx} \approx R_f - R_0 \approx 48 - 42 \approx 6 k\Omega}$$

La résistance augmente quand le globule passe

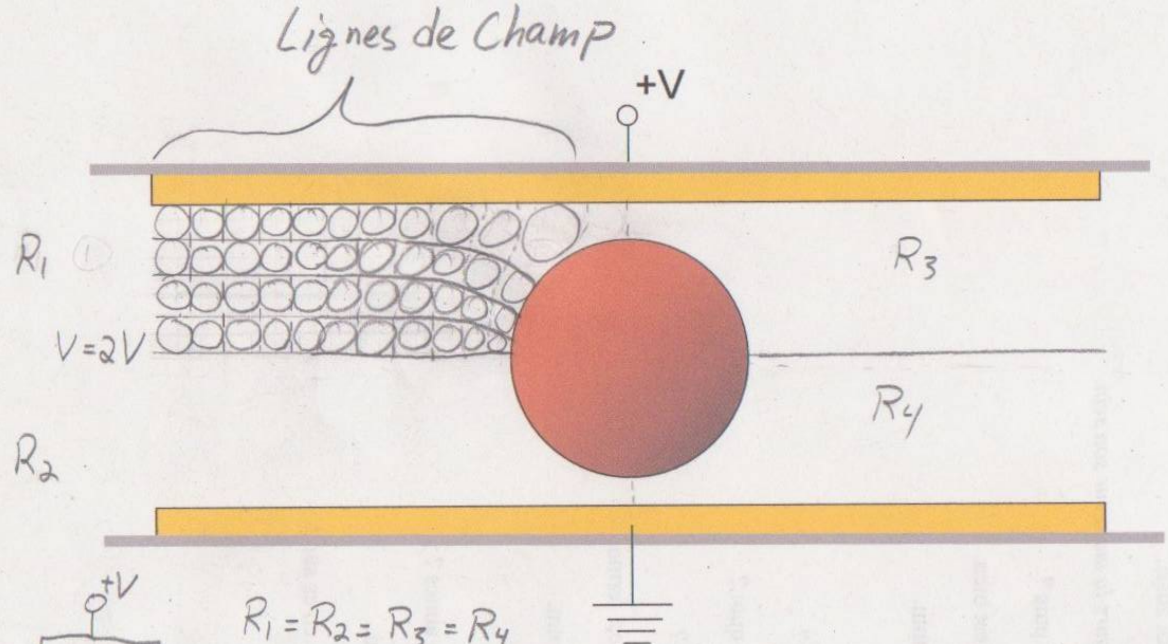
Une résistance de $R_f = \frac{2}{5}\frac{1}{\sigma W} = 53 k\Omega$, faite avec 2 carrés en série et 5 en parallèle est également une bonne approximation.

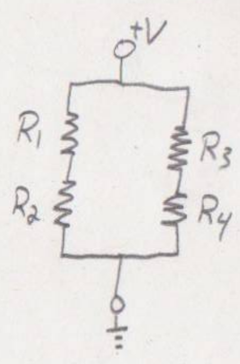
3.3➢

$$\boxed{\Delta I \approx V\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_0}\right) \approx -V\frac{\Delta R}{R_0 R_f} \approx -4\frac{6k}{42k \cdot 48k} \approx -11 \mu A}$$

Le courant diminue quand le globule passe

Q3: Figure pour la cartographie





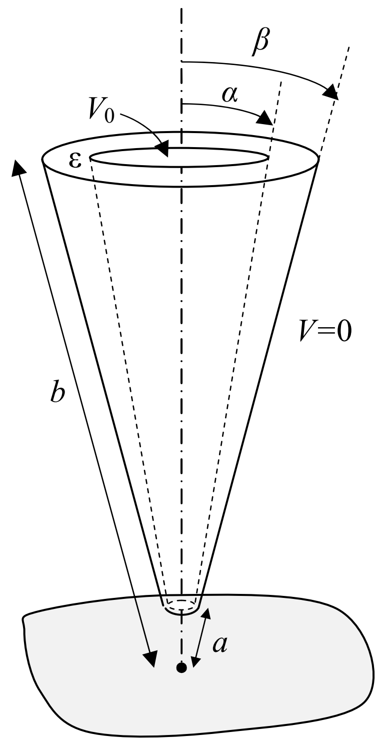
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4$

$$R_{eq} = \frac{2R_1}{2} = R_1$$

$$R_1 \simeq \frac{N_s}{N_p} \cdot \frac{1}{\sigma W} = \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{0{,}75 \times 10^{-5}}$$

$$R \simeq 48\ k\Omega$$

Question 4 : Capacité d'une microélectrode *(5points)*



Pour mesurer le courant qui traverse une petite partie de la membrane des cellules nerveuses, on utilise une microélectrode qui est fabriquée en chauffant, puis en étirant un tube de verre de façon à lui donner la forme d'un cône effilé dont l'extrémité est tronquée. La microélectrode illustrée ci-contre, possède un angle interne α = 10°, un angle externe β = 15°, une longueur *b* =2 cm, une distance a = 2 µm entre le sommet du cône et le début de l'électrode. La permittivité relative du verre est $\varepsilon_r = 4$. L'extérieur de l'électrode baigne dans une solution physiologique électriquement conductrice qui a un potentiel nul uniforme *V* = 0, tandis que l'intérieur de l'électrode est rempli d'une solution électriquement conductrice qui a un potentiel uniforme $V_0 = 1\ V$.

4.1➢ Donner l'équation qui décrit la distribution de potentiel à l'intérieur de la partie en verre de la microélectrode. Donner les valeurs numériques des constantes de cette équation.

4.2➢ Calculer la valeur numérique de la capacité *C* entre l'intérieur et l'extérieur de la microélectrode.

Corrigé:

La symétrie conique du problème a été étudiée (et la formule de la distribution du potentiel, solution de l'équation de Laplace, est donnée à la page 6 du formulaire)

$V(\theta) = A\ln(\tan(\theta/2)) + B$ (0.5*Pt*)

Solution qui dépende seulement de l'angle (en coordonnées sphériques).

Pour déterminer les constantes, il va falloir imposer les conditions de frontière, soit :

$$V(\theta=\beta) = A\ln\left(\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) + B = 0 \Rightarrow B = -A\ln\left(\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) (0.5Pt)$$

$$V(\theta=\alpha) = A\ln\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - A\ln\left(\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) = V_0 (0.5Pt) \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right)} = \frac{1V}{\ln\left(\dfrac{0.08749}{0.13165}\right)} = -2.447V (0.5Pt)$$

$B = -4.96V$ (0.5*Pt*)

Pour le calcul de la capacité il va falloir donner la charge correspondante à la distribution de potentiel. Ceci peut se faire par la définition (voir formule dans le questionnaire, pour la densité de charge dans l'interface diélectrique (verre)/ conducteur (solution). Noter que le vecteur normal est sortant du conducteur, et donc le vecteur unitaire pour la surface à l'angle $\beta(\alpha)$ est $-\hat{\theta}(+\hat{\theta})$

Les densités de charge sur la microélectrode sont (pour la variable r entre $\left(a \le r \le b\right)$):

$$\sigma_\beta = D_N = \vec{D}.\left(-\hat{\theta}\right) = \varepsilon_{Verre}\vec{E}.\left(-\hat{\theta}\right) = -\varepsilon_{Verre}\nabla V.\left(-\hat{\theta}\right) = \frac{\varepsilon_{Verre}}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\theta=\beta} = \frac{\varepsilon_{Verre}}{r}\frac{\frac{1}{2}A}{\tan\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

$$\sigma_\beta = \frac{\varepsilon_{Verre}}{r}\frac{\frac{1}{2}A}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\varepsilon_{Verre}}{r}\frac{A}{\sin\beta} < 0 \qquad (0.5Pts)$$

:

$$\sigma_\alpha = D_N = \vec{D}.\left(\hat{\theta}\right) = \varepsilon_{Verre}\vec{E}.\left(\hat{\theta}\right) = -\varepsilon_{Verre}\nabla V.\left(\hat{\theta}\right) = -\frac{\varepsilon_{Verre}}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\theta=\alpha} = -\frac{\varepsilon_{Verre}}{r}\frac{A}{\sin\alpha} > 0$$

Pour le calcul de la charge dans chaque interface il faut trouver l'élément de surface (voir l'expression dans la page 7 du questionnaire) et intégrer. Dans l'expression :

$$\mathrm{d}\vec{s} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\,\hat{\mathrm{r}} + r\sin\theta\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\theta} + r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\hat{\phi}$$

Le seul terme que l'on doit retenir est le deuxième.
Alors,

$$\sigma_\beta dS == \frac{\varepsilon_{Verre}}{r}\frac{A}{\sin\beta}r\sin\beta drd\varphi(0.5Pt) \Rightarrow Q_\beta = \varepsilon_{Verre}A2\pi\left(b-a\right) = -Q_\alpha = -Q < 0(0.5Pt)$$

$$Q = 8\pi \times 8.85\times10^{-12}\times2.447\times1.9998\times10^{-2}C = 1,09\times10^{-11}C(0.5Pt)$$

$$C = \frac{Q_\alpha}{\Delta V} = \frac{Q}{V_0} = 10,09\times10^{-12}F(0.5Pt)$$