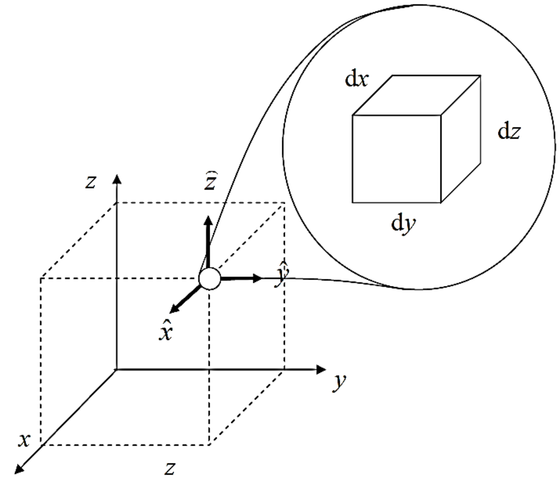
PHS1102 – Champs électromagnétiques
Aide-mémoire (systèmes de coordonnées)

Coordonnées cartésiennes



$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\hat{x} + \mathrm{d}y\hat{y} + \mathrm{d}z\hat{z}$$

$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\hat{x} + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{y} + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{z}$$

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

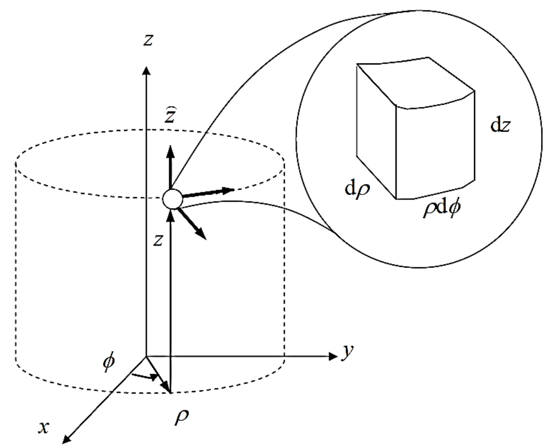
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \nabla^2 H_x\hat{x} + \nabla^2 H_y\hat{y} + \nabla^2 H_z\hat{z}$$

Coordonnées cylindriques



$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\rho\hat{\rho} + \rho\mathrm{d}\phi\hat{\phi} + \mathrm{d}z\hat{z}$$

$$\mathrm{d}\vec{s} = \rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\hat{\rho} + \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\hat{\phi} + \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\hat{z}$$

$$\mathrm{d}v = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

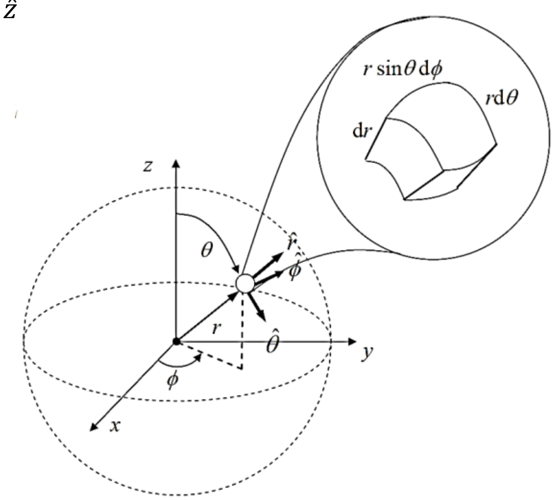
$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$

Coordonnées sphériques



$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\hat{r} + r\mathrm{d}\theta\hat{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\hat{\phi}$$

$$\mathrm{d}\vec{s} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\hat{r} + r\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\hat{\theta} + r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\hat{\phi}$$

$$\mathrm{d}v = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(D_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(H_\phi\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right)\hat{\phi}$$

Aide-mémoire (chapitres 1 à 6)

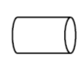
Loi de Coulomb :	$\vec{F} = \dfrac{qQ\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{qQ\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
Champ électrique :	$\vec{F} = q\vec{E}$
Principe de superposition :	$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$
Flux électrique :	$\Phi_e = Q$ Le flux débute et se termine sur des charges libres.
Loi de Gauss : (1re équation de Maxwell)	$Q = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$
Différence de potentiel de b par rapport à a :	$V_{ba} = \dfrac{W_{ba}}{Q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$
Potentiel charge ponctuelle :	$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}$
Champ conservatif :	$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$
Gradient de V :	$\vec{E} = -\nabla V$
Polarisation :	$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
Densité de flux électrique :	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
Permittivité :	$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = (1 + \chi_e)\varepsilon_0$
Capacité :	$C = Q/V$
Énergie dans le champ électrique :	$U = \dfrac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 \mathrm{d}v = \dfrac{1}{2}CV^2$
Densité de courant :	$I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$
Conductivité :	$\vec{J} = \sigma\vec{E}$
Résistance :	$R = V/I$
Résistance d'un barreau :	$R = L/\sigma S$
Puissance dissipée :	$P = VI = \int_V \sigma E^2 \mathrm{d}v$

À l'intérieur d'un conducteur électrostatique :	$\rho_v = 0$ $\vec{E} = \vec{0}$ $V = \text{constant}$
Conditions frontières aux interfaces :	$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$ $E_{1T} = E_{2T}$
Théorie des images :	$\oplus \mid \ominus$
Capacité (cartographie des champs) :	$C = \dfrac{N_p}{N_s}\varepsilon d$
Résistance (cartographie des champs) :	$R = \dfrac{N_s}{N_p}\dfrac{1}{\sigma d}$
1re équation de Maxwell :	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$
Continuité du courant :	$\nabla \cdot \vec{J} = 0$
Équation de Poisson :	$\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$
Équation de Laplace :	$\nabla^2 V = 0$

Solutions 1D à l'équation de Laplace :

$$V(x) = Ax + B$$

 $V(\phi) = A\phi + B$

 $V(\rho) = A\ln\rho + B$

 $V(r) = (A/r) + B$

 $V(\theta) = A\ln(\tan(\theta/2)) + B$

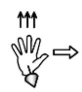
Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m

Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m

Impédance du vide : $Z_0 \approx 377\ \Omega$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c \approx 3 \times 10^8$ m/s

PHS1102 – Champs électromagnétiques
Aide-mémoire (chapitres 7 à 12)

Énergie cinétique :	$K = mv^2/2$
Force centripète :	$F_\mathrm{c} = mv^2/r$
Loi de Biot-Savart :	$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\int_L \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}$
Règle de la main droite (champ magnétique) :	
Théorème d'Ampère :	$I = \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$
Flux magnétique :	$\Phi_m = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$
2e équation de Maxwell :	$\nabla\cdot\vec{B} = 0$
Force magnétique :	$\vec{F} = Q\vec{v}\times\vec{B}$
Règle de la main droite (force) :	
Force sur un courant :	$\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$
Moment magnétique dipolaire :	$\vec{m} = NI\vec{S}$
Couple sur un dipôle :	$\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$
Force électromotrice :	$\in = \int_L \vec{v}\times\vec{B}$
Aimantation :	$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M})$
Densité de flux magnétique :	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
Perméabilité :	$\mu = \mu_r\mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0$
Énergie dans le champ magnétique :	$U = \frac{1}{2}\int_V \mu H^2\mathrm{d}v = \frac{1}{2}LI^2$
Densité d'énergie dissipée par hystérésis :	$u_0 = \oint H\mathrm{d}B = \mu_0\oint H\mathrm{d}M$
Conditions frontières aux interfaces :	$B_{1N} = B_{2N}$ $H_{1T} = H_{2T}$
Potentiel magnétique :	$\vec{H} = -\nabla V_m$

Réluctance :	$\mathcal{R} = V_m/\Phi_m$
Réluctance d'un barreau :	$\mathcal{R} = l/\mu S$
Loi de Faraday :	$\in = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$
Inductance mutuelle :	$M_{12} = N_2\Phi_{12}/I_1$
Inductance :	$L = N\Phi/I$
Tension d'une inductance :	$V = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$
3e équation de Maxwell :	$\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$
Courant de déplacement :	$\vec{J}_D = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$
4e équation de Maxwell :	$\oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{s}$
Équations de Maxwell :	$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$ $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}+\partial\vec{D}/\partial t$
Équation d'onde :	$\nabla^2\vec{E} = \mu\varepsilon\,\partial^2\vec{E}/\partial t^2$, $\nabla^2\vec{H} = \mu\varepsilon\,\partial^2\vec{H}/\partial t^2$
OPH uniforme, de polarisa. linéaire et de direction $\hat{n}$:	$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\vec{r})+\theta)$
Fréquence angulaire :	$\omega = 2\pi f$
Constante de phase :	$\beta = 2\pi/\lambda$
Vitesse de propagation :	$v = \lambda f = \omega/\beta = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$
Impédance du milieu :	$Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$
Orthogonalité des champs :	$\vec{H} = (\hat{n}\times\vec{E})/Z$, $\vec{E} = Z(\vec{H}\times\hat{n})$
Vecteur de Poynting :	$\vec{\mathcal{P}} = \vec{E}\times\vec{H}$
Vecteur de Poynting moyen OPH :	$\langle\vec{\mathcal{P}}\rangle_{\mathrm{lin.}} = E_0^2\hat{n}/2Z = ZH_0^2\hat{n}/2$ $\langle\vec{\mathcal{P}}\rangle_{\mathrm{circ.}} = E_0^2\hat{n}/Z = ZH_0^2\hat{n}$
Puissance sur une surface :	$P = \int_S \vec{\mathcal{P}}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$