ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
PHS1102 CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES
Examen final – Hiver 2014

DATE : dimanche 27 avril 2014 **HEURE :** 13h30 – 16h00
NOTES : Calculatrice non-programmable permise Aucune documentation permise
Cet examen comporte 5 questions, 5 pages et 20 points

QUESTION 1 : Questions à choix multiples (*4 points*)

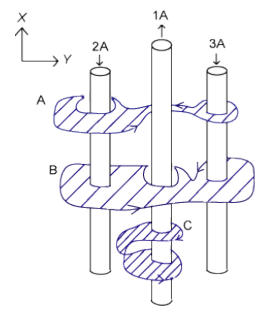
s.v.p. transcrire les réponses dans votre cahier d'examen

1.1➢ (0,5 Pt) Veuillez choisir une réponse et la marquer dans le cahier d'examen. Les lignes de flux magnétique :

I. Sont interrompues à la frontière entre deux régions ayant des perméabilités différentes;
II. Débutent et/ou se terminent sur des charges magnétiques;
III. Sont toujours orientées dans la même direction que la densité de courant;
IV. Se referment toujours sur elles-mêmes ou se terminent à l'infini;

1.2➢ (1 Pt) Au laboratoire, vous avez mesuré la force électromotrice ϵ générée aux bornes d'une bobine en rotation à une fréquence f dans un champ magnétique B. L'amplitude maximale de cette force électromotrice varie :

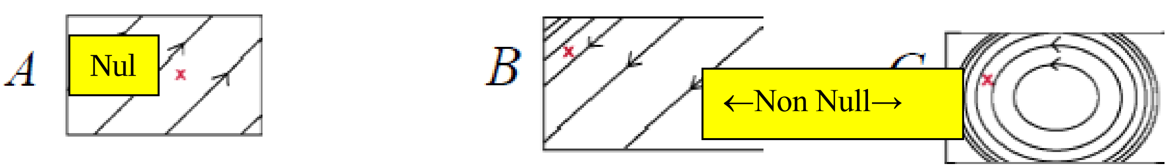
a) linéairement avec B et linéairement avec f
b) quadratiquement avec B et sinusoïdalement avec f
c) quadratiquement avec B et linéairement avec f



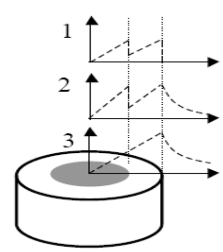
1.3➢ (1 Pt) Trois fils verticaux sont disposés dans l'espace comme illustré ci-contre. À l'intérieur de chacun, circule un courant (valeur et sens indiqués sur la figure). Déterminer le courant total I_T inclus à l'intérieur de chaque parcours d'intégration (A, B et C).
Veuillez choisir une des réponses entre 1 et 4 :

1. A : $I_T = 0\,A$, B : $I_T = -5\,A$, et C : $I_T = 1\,A$
2. A : $I_T = 3\,A$, B : $I_T = -5\,A$, et C : $I_T = 2\,A$
3. A : $I_T = -3\,A$, B : $I_T = 1\,A$, et C : $I_T = 2\,A$
4. A : $I_T = -3A$, B : $I_T = -5\,A$, et C : $I_T = 0\,A$

1.4➢ (0,5 Pt) Les figures illustrent les lignes de flux d'un champ vectoriel quelconque **W**. Parmi les situations (A, B,C) illustrées, identifier la valeur que prend le rotationnel du champ **W** au point d'observation (marqué par X). Le rotationnel peut être nul ou non nul. La réponse dans le cahier doit indiquer la situation (A à C) et votre choix (rotationnel *nul* ou *non nul*)

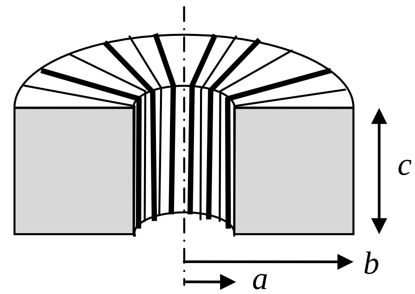


1.4➢ (1Pt) La figure illustre un long câble métallique constitué d'un noyau cylindrique central (gris) recouvert d'une couche uniforme d'un autre métal de même conductivité (blanc). Un courant circule vers le haut. Sachant que la perméabilité du noyau est plus grande que celle du revêtement, identifier l'énoncé qui décrit le mieux les courbes illustrant chacune un champ vectoriel en fonction du rayon ρ.



A) aimantation M = courbe 1; densité de flux magnétique B = courbe 2
B) intensité du champ magnétique H = courbe 1; densité de courant J = courbe 2
aimantation M = courbe 2; densité de flux magnétique B = courbe 3
C) intensité du champ H = courbe 3; densité de flux magnétique B = courbe 1
D)

QUESTION 2 : Transformateur radiofréquence (3 points)



La figure ci-contre illustre une moitié d'un transformateur radiofréquence. Le transformateur complet est constitué d'un anneau de ferrite toroïdal ayant un rayon intérieur a = 1 cm, un rayon extérieur b = 4 cm, une hauteur c = 3 cm et une perméabilité relative μ_r = 2000. Un enroulement de N_1 = 12 tours de fil constitue le primaire (traits gras) tandis qu'un autre enroulement de N_2 = 16 tours de fil constitue le secondaire (traits fins).

2.1➢ (2 Pts) Quelle est l'inductance mutuelle M_{12} de ce transformateur?

Solution :

$\int \boldsymbol{H}\bullet d\boldsymbol{l} = 2\pi\rho\, H_\phi = N_1 I_1$

$H_\phi = N_1 I_1 / 2\pi\rho$ (0,5 Pt)

$\phi = \iint \mu_r \mu_0 N_1 I_1\, d\rho\, dz / 2\pi\rho = (c\, \mu_r \mu_0 N_1 I_1 / 2\pi) \ln b/a$ (0,5 Pt)

$M_{12} = N_2 \phi / I_1 = (c\, \mu_r \mu_0 N_1 N_2 \ln b/a) / 2\pi$ (0,5 Pt)

$M_{12} = 3.19$ mH (0,5 Pt)

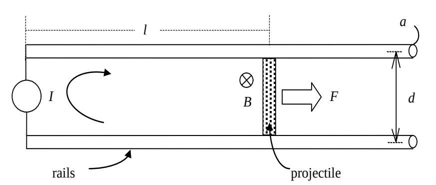
2.2➢ (1 Pt) Un courant radiofréquence de 2.7 MHz et ayant une amplitude maximum de 10 µA circule dans l'enroulement primaire, quelle est la valeur maximum de la force électromotrice induite aux bornes du secondaire?

Solution :

$|\epsilon_2| = N_2\, d\phi/dt = M_{12}\, dI_1/dt = M_{12}\, 2\pi f I_1 = 0.00319 \times 2\pi \times 2700000 \times 0.00001 = 0.542$ V (1 Pt)

QUESTION 3 : Canon magnétique (2 points)

Des chercheurs du Massachusetts Institute of Technology ont mis au point différents prototypes de canon magnétique destinés à projeter sur orbite lunaire des minerais extraits de la surface de la Lune! Un de ces prototypes est constitué de deux rails cylindriques de rayon a dont les centres sont séparés par une distance d et entre lesquels une différence de potentiel est appliquée. Le projectile qui peut glisser entre les rails produit un court-circuit entre ceux-ci. Le courant I qui circule dans les rails est considéré comme étant constant et il génère une densité de flux magnétique B. L'interaction entre le courant I dans le projectile et ce champ magnétique produit une force F agissant sur le projectile. Donnez l'expression de la force F ainsi que sa valeur numérique si a = 2 mm, d = 10 cm et I = 1000 A ? Considérez que $l \gg d$ (soit que l est « semi-infini »).

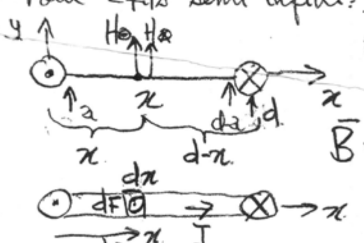


Réponses

3- Pour 1 fil conducteur infini $\oint \bar{H}\cdot d\bar{l} = 2\pi\rho H_\phi = I$ (0,25)

" " " semi infini : $H_\phi = (I/2\pi\rho)/2$ (0,5)

Pour 2 fils semi infini :



$\bar{H}_\odot = \dfrac{I\,\hat{y}}{4\pi x}$ $\bar{H}_\otimes = \dfrac{I\,\hat{y}}{4\pi(d-x)}$ (0,5)

$\bar{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{d-x}\right)\hat{y}$ (0,25)

$dF = I\, d\bar{x} \times \bar{B} = I\, dx\, B\, \hat{z}$ (0,25)

$\bar{F} = \int_a^{d-a} \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \times I \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{d-x}\right) dx\, \hat{y} = \dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\ln x - \ln (d-x)\right]_a^{d-a} \hat{y}$ (0.25)

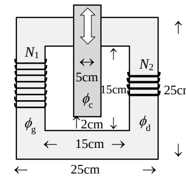
$\bar{F} = \dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\ln (d-a) - \ln (d-d+a) - \ln a + \ln (d-a)\right)\hat{y}$

$\boxed{\bar{F} = 2\dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\left(\dfrac{d-a}{a}\right)\hat{y}}$ (0,5)

$F \quad \dfrac{\cancel{4\pi}\times 10^{-7} \times 10^{6}}{\cancel{4\pi}} \ln \dfrac{8}{2} = \boxed{0{,}138\ \text{N}\ \hat{y}} \times 2$

$= 0{,}276\ \text{N}\ \hat{y}$ (0.5)

QUESTION 4 : Transformateur pour soudure à l'arc (5points)



Les transformateurs pour soudure à l'arc doivent produire une tension aux bornes du circuit secondaire élevée pour générer un arc électrique entre le bâton de soudure et la pièce à souder, mais ils doivent aussi limiter le courant circulant dans l'arc. Ceci est obtenu en créant une fuite de flux entre le primaire et le secondaire dans la partie centrale de l'armature qui peut être déplacée par l'opérateur (flèches blanches) de façon à ajuster le courant dans l'arc créé aux bornes de la bobine de droite. Les dimensions du transformateur sont indiquées sur l'illustration ci-contre, la pièce centrale et le reste de l'armature ont la même perméabilité relative μ_r=10000 et la même profondeur de 5 cm. Il y a un espace ajustable d'air entre la partie centrale et le reste de l'armature. Ici, nous considérerons la situation pour laquelle cet espace est fixé à 2 cm. Le primaire comporte N_1= 100 tours et le secondaire comporte N_2= 50 tours. Un courant I_1=10 A circule dans le primaire et aucun courant ne circule dans le secondaire (il n'y a pas d'arc).

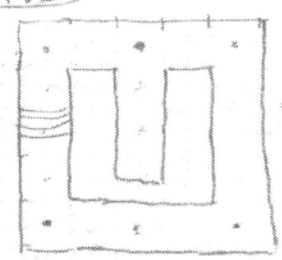
4.1➢ **(0,75 Pt)** Dessiner le circuit magnétique équivalent

4.2➢ **(2,25 Pts)** Calculer les valeurs des différentes réluctances

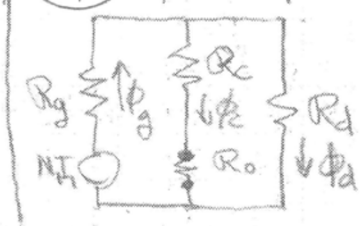
4.3➢ **(2 Pts)** Quelle est la valeur approximative du flux magnétique circulant dans la partie de gauche (ϕ_g) de l'armature ?

Réponses

4.1



(0,75)



$$R_g = \frac{8\times5\times10^{-2}}{(5\times10^{-2})^2\,10^4\,4\pi10^{-7}}$$

$R_g = 12732$ A-t/Wb (0,5)

$$R_c = \frac{(4\times5\times10^{-2}) - 2\times10^{-2}}{(5\times10^{-2})^2\times10^4\times4\pi\times10^{-7}} = 5729{,}6 \text{ At/Wb}$$ (0,75)

$$R_o = \frac{2\times10^{-2}}{(5\times10^{-2})^2\times4\pi\times10^{-7}} = 6.36\times10^6 \text{ A-t/Wb}$$ (0,5)

$R_d = R_g = 12732$ At/Wb (0,5) $R_o \gg R_c, R_d$

4.2

$R_{eq} = R_c + R_o // R_d \approx R_o // R_d$ (0,5)

$1/R_{eq} = 1/R_o + 1/R_d = 1{,}57\times10^{-7} + 7{,}854\times10^{-5} = 7{,}87\times10^{-5}$

$R_{eq} = 12707$ A.t/Wb (0,5)

(1)

$\phi_g = N_1I_1/(R_g+R_{eq}) = 1000\text{ A-T}/25434\text{ A-t/Wb} = \boxed{0{,}039\text{ Wb}}$

QUESTION 5 : Onde plane uniforme *(5 Points)*

Une onde plane uniforme se propageant dans le vide est caractérisée par le champ électrique suivant, écrit en unités du SI :

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left[\frac{72\times10^8 t + 8\sqrt{3}(x-y-z)+15}{120}\pi\right]\frac{(2\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})}{\sqrt{3}} - \cos\left[\frac{72\times10^8 t + 8\sqrt{3}(x-y-z)-45}{120}\pi\right](\hat{y}-\hat{z})\right\}$$

5.1➤ (2Pts) Déterminer la fréquence f, la longueur d'onde λ et la polarisation de cette onde.

Solution :

Par identification avec $\vec{E} = \vec{E}_{01}\cos\left[\omega_1 t - \beta_1\left(\hat{n}_1\cdot\vec{r}\right)+\theta_1\right] + \vec{E}_{02}\cos\left[\omega_2 t - \beta_2\left(\hat{n}_2\cdot\vec{r}\right)+\theta_2\right]$:

$\vec{E}_{01} = E_0\left(\frac{2\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{E}_{02} = E_0\left(\frac{-\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{2}}\right)$, $\omega=\omega_1=\omega_2 = 6\pi\times10^7$ rad/s, $\beta=\beta_1=\beta_2=\pi/5$ rad/m,

$\hat{n}=\hat{n}_1=\hat{n}_2=\frac{-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}$, $\theta_1=\pi/8$ rad, $\theta_2=-3\pi/8$ rad

Donc, $\boxed{f=\frac{\omega}{2\pi}=30\text{ MHz}}$ et $\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=10\text{ m}}$.

Puisque $\omega=\omega_1=\omega_2$, $\left\|\vec{E}_{01}\right\|=\left\|\vec{E}_{02}\right\|$, $\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}=0$ et $\Delta\theta=\theta_1-\theta_2=\pi/2$ rad, cette onde possède une **polarisation circulaire**.

5.2➤ (1,5Pt) Déterminer l'intensité du champ magnétique $\vec{H}$ associée.

Solution :

$$\vec{H}_{01}=\frac{1}{Z_0}(\hat{n}\times\vec{E}_{01})=\frac{E_0}{Z_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{vmatrix}=\frac{E_0}{\sqrt{18}Z_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{E_0}{Z_0}\left(\frac{3\hat{y}-3\hat{z}}{3\sqrt{2}}\right)=-\frac{\vec{E}_{02}}{Z_0}$$

$$\vec{H}_{02}=\frac{1}{Z_0}(\hat{n}\times\vec{E}_{02})=\frac{E_0}{Z_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{vmatrix}=\frac{E_0}{\sqrt{6}Z_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\frac{E_0}{Z_0}\left(\frac{2\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{6}}\right)=\frac{\vec{E}_{01}}{Z_0}$$

Par superposition : $\vec{H}=\vec{H}_{01}\cos\left[\omega t-\beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta_1\right]+\vec{H}_{02}\cos\left[\omega t-\beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta_2\right]$

$$\vec{H}=-\frac{\vec{E}_{02}}{Z_0}\cos\left[\omega t-\beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta_1\right]+\frac{\vec{E}_{01}}{Z_0}\cos\left[\omega t-\beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta_2\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{H}=&\frac{E_0}{Z_0}\cos\left[\frac{72\pi\times10^8 t+8\pi\sqrt{3}(x-y-z)+15\pi}{120}\right]\left(\frac{\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{2}}\right)\\ &+\frac{E_0}{Z_0}\cos\left[\frac{72\pi\times10^8 t+8\pi\sqrt{3}(x-y-z)-45\pi}{120}\right]\left(\frac{2\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{6}}\right)\end{aligned}}$$

5.3➤ (1,5Pt) Quelle doit être l'amplitude du champ électrique E_0 pour que l'amplitude de la f.é.m. maximale induite dans une antenne circulaire de rayon $R=10$ cm centrée au point $\vec{r}_0=(2,1,1)$ m et parallèle au plan xOy soit $\varepsilon_{\max}=1$ Volt. Note : $\sin(\alpha)=-\cos(\alpha+\pi/2)$.

Solution :

$$\varepsilon(t)=-\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}\overset{\lambda>>R}{\approx}-\left.\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}=\mu_0\pi R^2\frac{dH_z(\vec{r}_0)}{dt}\ \text{avec}\ \vec{S}=-\pi R^2\hat{z}$$

$$\hat{n}\cdot\vec{r}_0=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)(2)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1)=0$$

$$\frac{dH_z(\vec{r}_0)}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{-\frac{E_0}{\sqrt{2}Z_0}\cos(\omega t+\theta_1)+\frac{E_0}{\sqrt{6}Z_0}\cos(\omega t+\theta_2)\right\}=\frac{E_0\omega}{\sqrt{6}Z_0}\left\{\sqrt{3}\sin(\omega t+\theta_1)-\sin(\omega t+\theta_2)\right\}$$

$$\frac{dH_z(\vec{r}_0)}{dt}=\frac{E_0\omega}{\sqrt{6}Z_0}\left[\sqrt{3}\sin(\omega t+\theta_1)+\cos(\omega t+\overbrace{\theta_2+\pi/2}^{=\theta_1})\right]\ \text{car}\ \sin(\alpha)=-\cos(\alpha+\pi/2)$$

Donc, $\varepsilon(t)=\dfrac{\mu_0\pi R^2E_0\omega}{\sqrt{6}Z_0}\left[\sqrt{3}\sin(\omega t+\theta_1)+\cos(\omega t+\theta_1)\right]$.

$\varepsilon(t)$ est extremum si et seulement si $\dfrac{d}{dt}\left[\sqrt{3}\sin(\omega t+\theta_1)+\cos(\omega t+\theta_1)\right]=0$.

Donc, $\sqrt{3}\omega\cos(\omega t+\theta_1)-\omega\sin(\omega t+\theta_1)=0\Leftrightarrow\tan(\omega t+\theta_1)=\sqrt{3}\Leftrightarrow(\omega t+\theta_1)=\dfrac{\pi}{3}\ \left(\text{ou}\ -\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

$$\varepsilon_{\max}=\frac{\mu_0\pi R^2E_0\omega}{\sqrt{6}Z_0}\left[\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\mu_0\pi R^2E_0\omega}{\sqrt{6}Z_0}[2]=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\mu_0\pi R^2E_0\omega}{Z_0}.$$

Finalement, $\boxed{E_0=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{Z_0\varepsilon_{\max}}{\mu_0\pi R^2\omega}=62{,}048\ \text{V/m}}$

$$\varepsilon(t)=-\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}\approx-\left.\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}=-\mu_0\pi R^2\left.\frac{d(\vec{H}\cdot\vec{N})}{dt}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}=-\mu_0\pi R^2\frac{dH_z(\vec{r}_0)}{dt}$$

$$\frac{dH_z(\vec{r}_0)}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{-\frac{E_0}{\sqrt{2}Z_0}\cos\left[\frac{72\pi\times10^8t+15\pi}{120}\right]+\frac{E_0}{\sqrt{6}Z_0}\cos\left[\frac{72\pi\times10^8t-45\pi}{120}\right]\right\}$$

$$\frac{dH_z(\vec{r}_0)}{dt}=\frac{E_0}{\sqrt{2}Z_0}\omega\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)-\frac{E_0}{\sqrt{6}Z_0}\omega\sin\left(\omega t-\frac{3\pi}{8}\right)$$

$\omega=6\pi\times10^7$ rad/s

$$\frac{dH_z(\vec{r}_0)}{dt}=\frac{E_0\omega}{\sqrt{2}Z_0}\left[\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$\varepsilon(t)=-\frac{\mu_0\pi R^2E_0\omega}{\sqrt{2}Z_0}\left[\sqrt{3}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{3}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)\right]=$$

$$\sqrt{3}\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)-\omega\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)=0\Leftrightarrow\tan\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$\varepsilon_{\max}=-\frac{\mu_0\pi R^2E_0\omega}{\sqrt{2}Z_0}\left[\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{\mu_0\pi R^2E_0\omega}{\sqrt{2}Z_0}[2]=\frac{\sqrt{2}\mu_0\pi R^2E_0\omega}{Z_0}$$

$$E_0=\frac{Z_0\varepsilon_{\max}}{\sqrt{2}\mu_0\pi R^2\omega}=35{,}795\ \text{V/m}$$