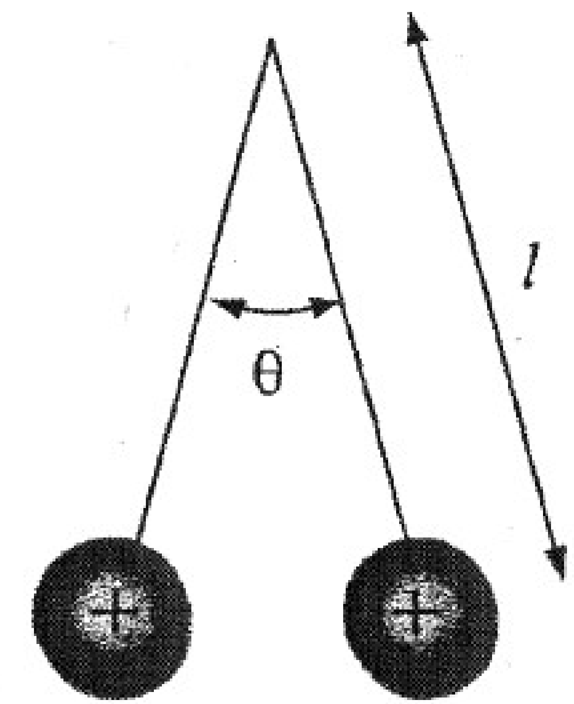
Séance 1	2 heures	1.8.3, 1.8.5, 1.8.6, 1.8.9

Aristote: « le commencement est beaucoup plus que la moitié de l'objectif »

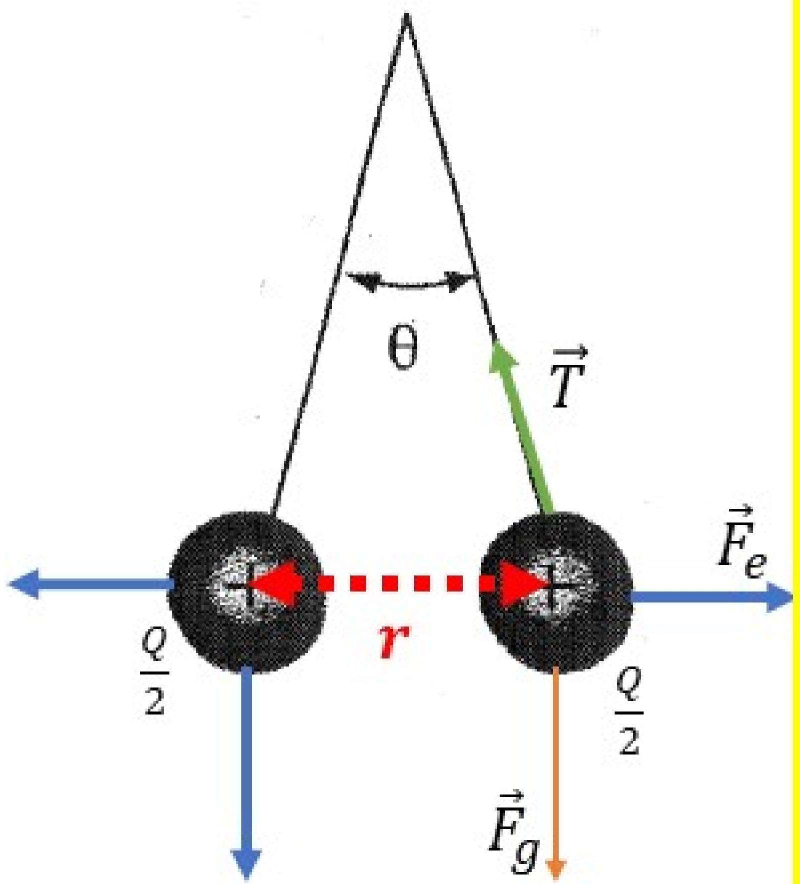
Exercice 1.8.3: Électromètre

Un moyen simple pour mesurer une charge électrique Q consiste à utiliser un système constitué de deux petites boules de sureau (un matériau très léger et faiblement conducteur) et jointes par un fil de masse négligeable. Parce que les deux boules ont le même diamètre et que le fil est conducteur, la charge totale se réparti également sur les deux boules qui portent chacune une charge $Q/2$. Les deux boules sont repoussées par la force électrostatique, mais sont attirées vers le sol par la gravité. Les fils ont une longueur $l = 5$ cm, chaque boule a une masse de $m = 0{,}2$ g et porte une charge positive inconnue $Q/2$. À cause de la répulsion, les fils font un angle de $\theta = 30°$ entre eux. Trouvez la valeur de Q.



Akila Hidouche

1) Données

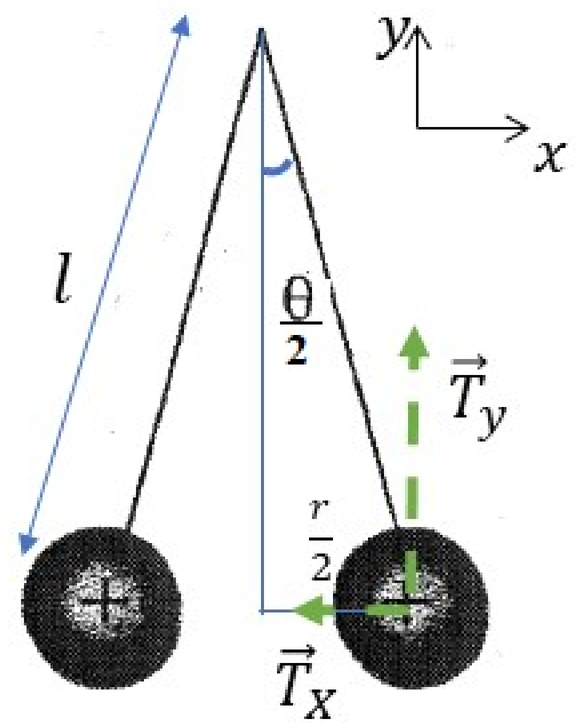


2) On cherche la charge Q

$$\boldsymbol{F_e = k\frac{\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{2}\right)}{r^2}} \quad (1)$$

Mais $\boldsymbol{Q? \; F_e ? r?}$

3) Du triangle rectangle de la figure, on trouve r:



$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)}{l} = \frac{r}{2l}$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{r = 2l\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (2)$$

Mais $\boldsymbol{Q? \; F_e}$

4) Une autre équation? $\sum \vec{F} = 0$ à l'équilibre

$$\sum \vec{F} = 0 \Longrightarrow \vec{T} + \vec{F}_e + \vec{F}_g = 0$$

$$\begin{cases} -T\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + F_e = 0 \\ T\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - F_g = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -T\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + F_e = 0 & (3) \\ T = \frac{F_g}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} & (4) \end{cases}$$

De (3), (4) $\quad -\frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + F_e = 0$

$$\Longrightarrow F_e = \frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5)$$

De (1), (5)

$$F_e = k\frac{\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{2}\right)}{r^2} = \frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{k\frac{\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{\left[2l\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2} = mg\;\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{Q^2 = 4\frac{mg}{k}\left[2l\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow Q = \pm\, 4l\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{mg\,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{k}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Longrightarrow Q = +\, 4l\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{mg\,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{k}}}}$$

$\boldsymbol{Q}$ =12,51nC

Séance 1	2 heures	1.8.3, 1.8.5, 1.8.6, 1.8.9

Exercice 1.8.5: Électricité atmosphérique

Même par beau temps, un champ électrostatique est présent dans les basses couches de l'atmosphère terrestre. Ce champ résulte de l'action du vent qui entraîne des charges positives de la surface de la terre vers une couche de l'atmosphère nommé électrosphère (cette couche est beaucoup plus basse que l'ionosphère). On considère qu'une charge électrique totale $+Q$ est distribuée uniformément dans l'électrosphère entre les rayons $r = b$ et $r = c$, et qu'une charge $-Q$ est distribuée uniformément à la surface du sol.

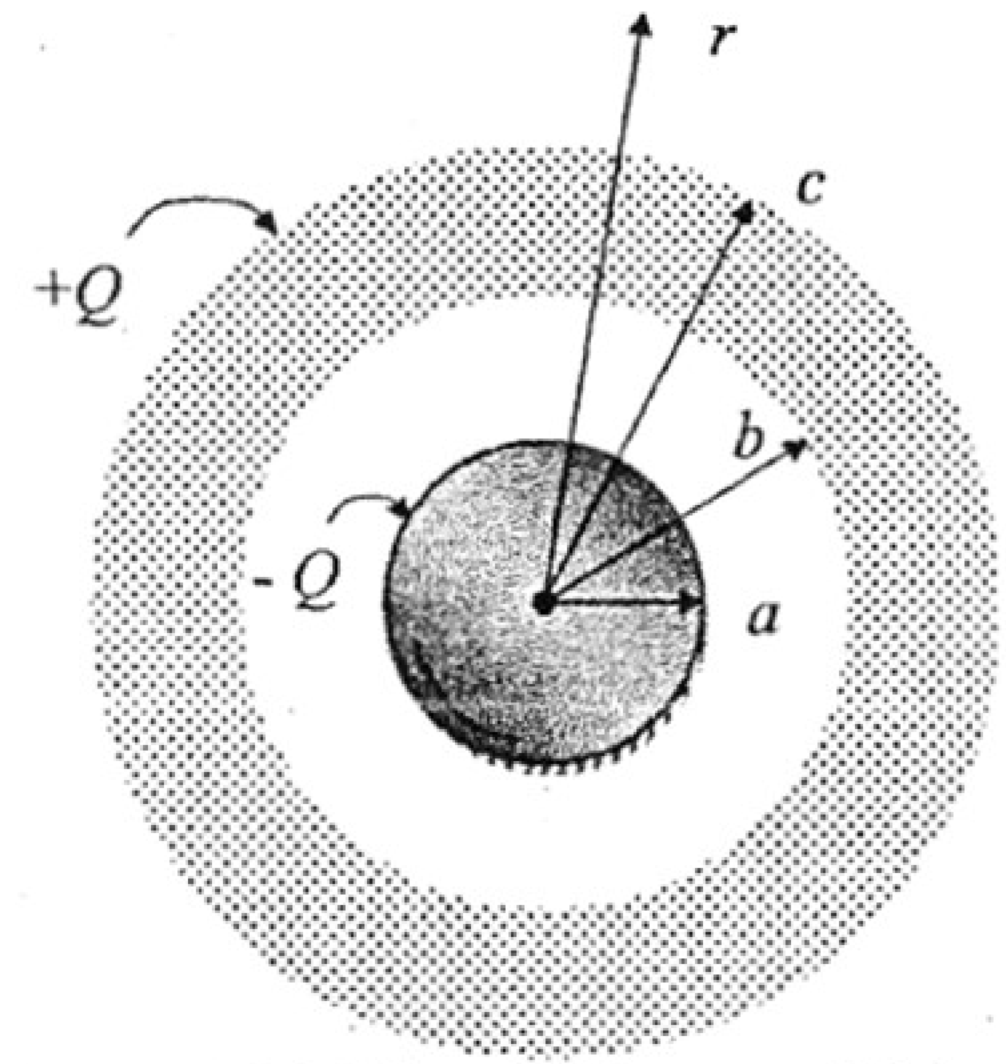
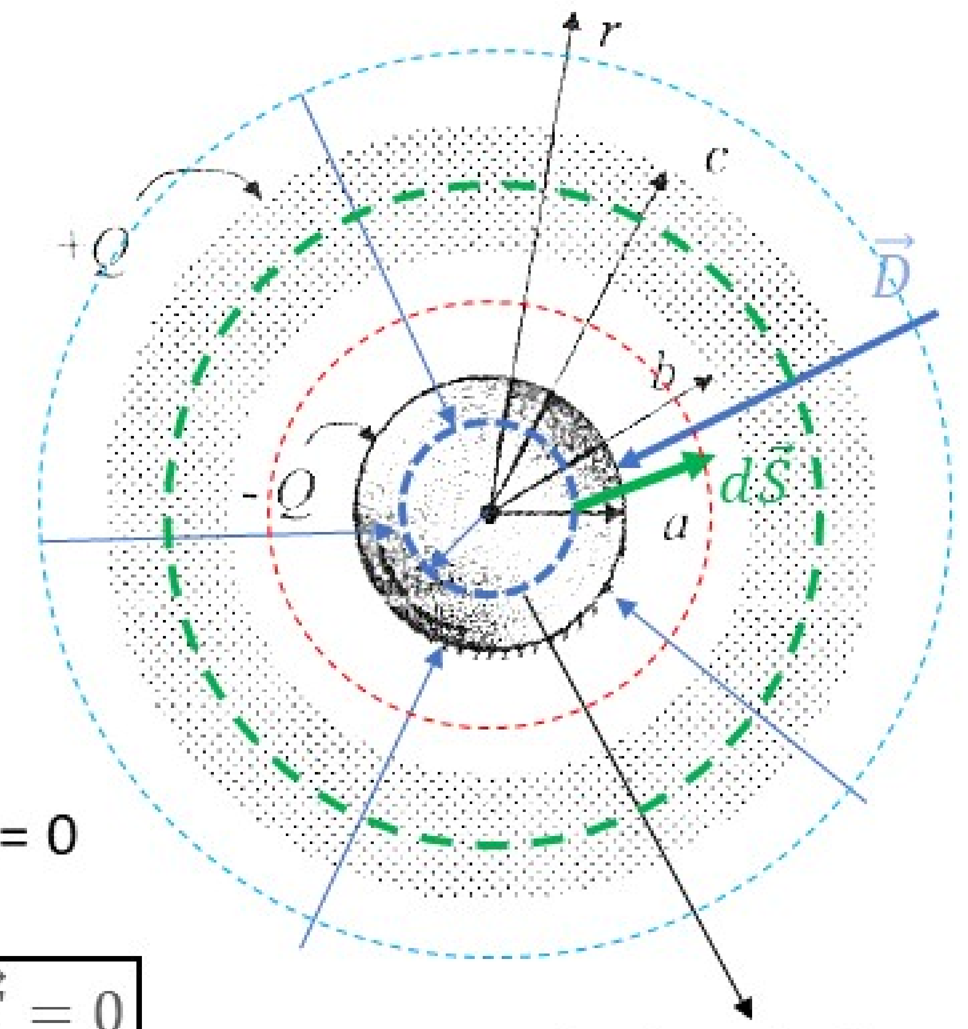


Figure 1.26 Electricité atmosphérique.

a) Quelle est l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ pour r allant de zéro à l'infini ?

b) Par beau temps, le champ électrique atmosphérique au niveau du sol a une intensité $E_r = -150$ V/m, quelle est la charge $+Q$ distribuée dans l'électrosphère ? ($a = 6370$ km, $b = 6395$ km, c 6400 km).

1) Symétrie sphérique;
2) Théorème de Gauss;
3) Surface de Gauss: sphère centrée de rayon r



a) Expression du champ électrique: $\vec{E}_r$

$$\phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = Q_{in} \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow \quad \phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = -D \oint dS = -D\ 4\pi r^2$$

1) Pour $r < a$: $\quad$ *pas de charges à l'intérieur de la surface de Gauss* $\longrightarrow Q_{in} = 0$

Et donc: $\quad -D\ 4\pi r^2 = 0 \Longrightarrow D = 0$. On sait que: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ et par conséquent $\boxed{\vec{E} = 0}$

2) Pour une surface de Gauss de rayon $a < r < b$: $\quad \longrightarrow Q_{in} = -Q$ (les charges sont en surface en r=a)

$-D\ 4\pi r^2 = -Q \Longrightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ avec $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Expression vectorielle $\boxed{\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\ \hat{r}}$

3) Pour une surface de Gauss de rayon $b < r < c$: $\longrightarrow Q_{in} = -Q + Q_e$ (charges en surface r=a et une proportion de charges entre b et r)

$$-D\ 4\pi r^2 = -Q + Q_e$$

On sait que le distribution de charge est volumique entre les rayons b et c et qu'elle est uniforme c'est à dire:

$$\rho_V = \frac{Q}{V} = \frac{Q_e}{V_e} = constante$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi c^3 - \frac{4}{3}\pi b^3} = \frac{Q_e}{\frac{4}{3}\pi \boldsymbol{r}^3 - \frac{4}{3}\pi b^3} \Longrightarrow Q_e = \frac{Q(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)}$$

Et donc:

$$-D\ 4\pi r^2 = -Q + \frac{Q(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)} = Q\left(\frac{r^3 - c^3}{c^3 - b^3}\right) \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(\frac{r^3 - c^3}{c^3 - b^3}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\left(\frac{r^3 - c^3}{c^3 - b^3}\right)\hat{r}}$$

4) Pour $r > c$: $\longrightarrow Q_{in} = -Q + Q = 0$

Et donc: $-D\ 4\pi r^2 = 0 \Longrightarrow D = 0$; et par conséquent $\boxed{\vec{E} = 0}$

b) $E_r = -150\ V/m$. *Nous remplaçons cette valeur dans l'expression du champ trouvée entre a et b avec* $r = a$

$$-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, a^2} = E_r \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow Q = -E_r 4\pi\varepsilon_0\, a^2 = 150 \times 4\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times (6370\,000)^2 = 6{,}77 \times 10^5 C$$

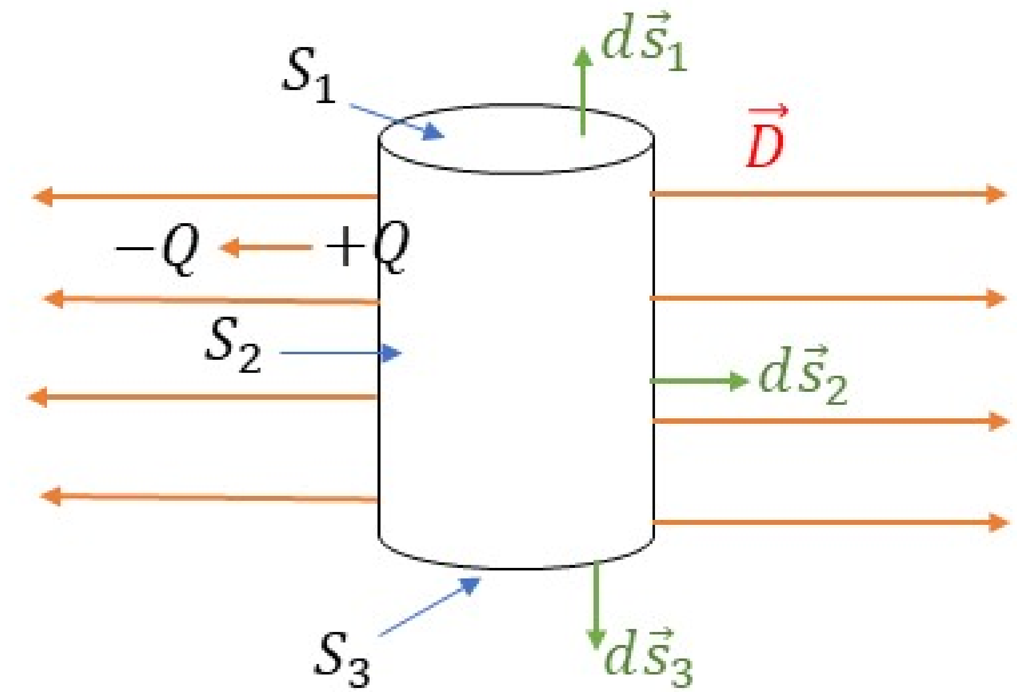
Séance 1	2 heures	1.8.3, 1.8.5, 1.8.6, 1.8.9

Exercice 1.8.6: Cable coaxial

Les câbles coaxiaux sont des lignes de transmission utilisées pour transmettre des signaux à haute fréquence. Un câble est formé de deux conducteurs cylindriques creux, de longueur l, de rayons a et b, séparés par un diélectrique ayant la même permittivité que le vide. Une charge $+Q$ se répartit uniformément à la surface externe du conducteur central et une charge $-Q$ se répartit à la surface interne du conducteur extérieur. Quelle est l'intensité du champ électrique dans tout l'espace ? Parce que $b << l$, on considère que le câble est infini.

Exercice 1.8.6: Cable coaxial

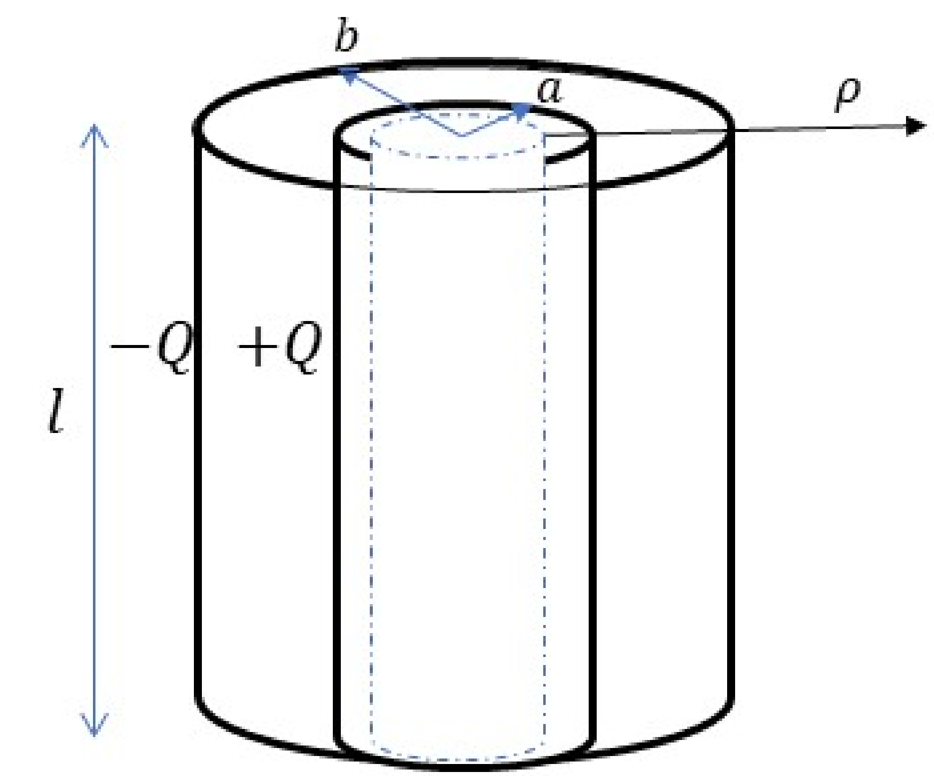
- Conducteurs cylindriques creux;
- Symétrie cylindrique;
- Surface de Gauss: cylindre circulaire centré de rayon ρ et de longueur l



Expression du champ électrique: $\vec{E}_\rho$

$$\phi = \oint \vec{D}, d\vec{S} = Q_{in} \longrightarrow \phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}.d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}.d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{D}.d\vec{S} = \int_{S_2} D\ S = D\ 2\pi\rho\ l$$

1) Pour $\rho\ < a$: $\quad pas\ de\ charges\ à\ l'intérieur \longrightarrow Q_{in}$= 0



Et donc: $D\ 2\pi\rho\ l = 0 \Longrightarrow D = 0$. On sait que: $\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E}$ et par conséquent $\boxed{\vec{E}_\rho = 0}$

2) $a < \rho < b$: $\longrightarrow Q_{in} = Q$ (les charges sont en surface en ρ=a)

$D\ 2\pi\rho\ l = Q \Longrightarrow D = \frac{Q}{2\pi\rho\ l}$ et avec $\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E}$ on trouve $\boxed{\vec{E}_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho\ l}\ \hat{\rho}}$

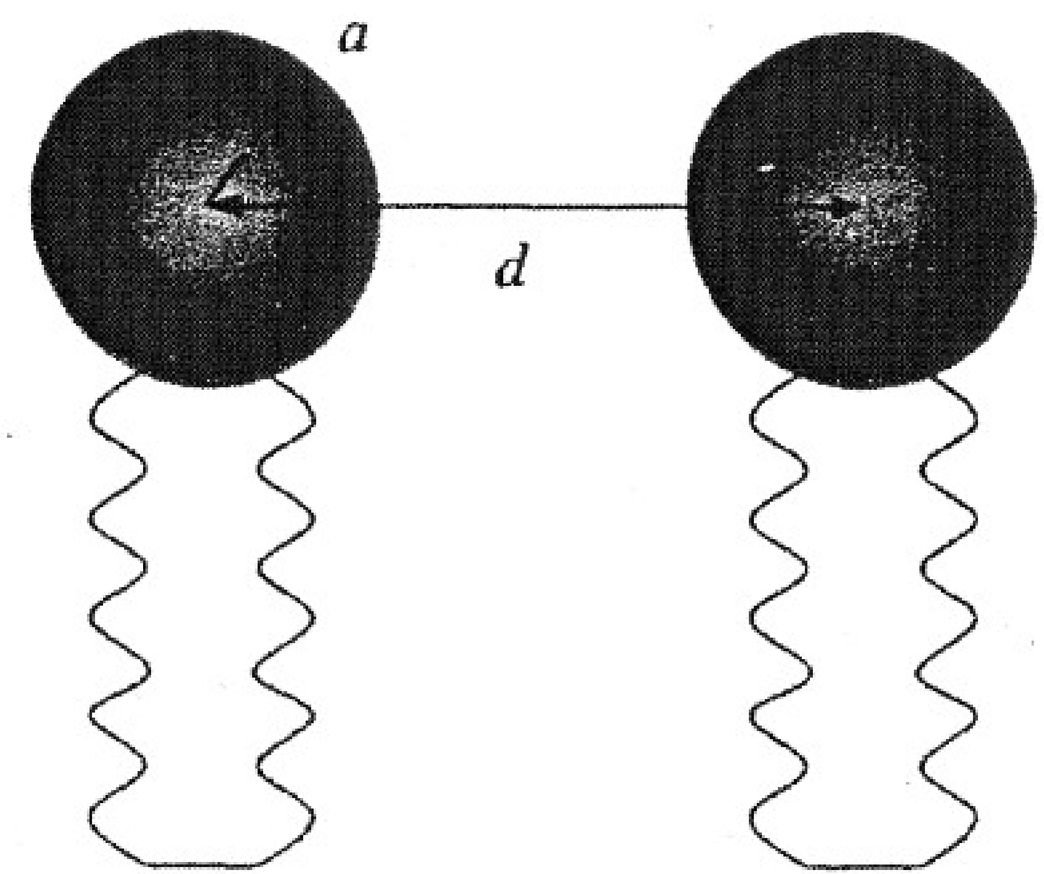
3) $\rho > b$: $\longrightarrow Q_{in} = +Q - Q$

$D\ 2\pi\rho\ l = 0 \Longrightarrow D = 0$ et avec $\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E}$ on trouve $\boxed{\vec{E}_\rho = 0}$

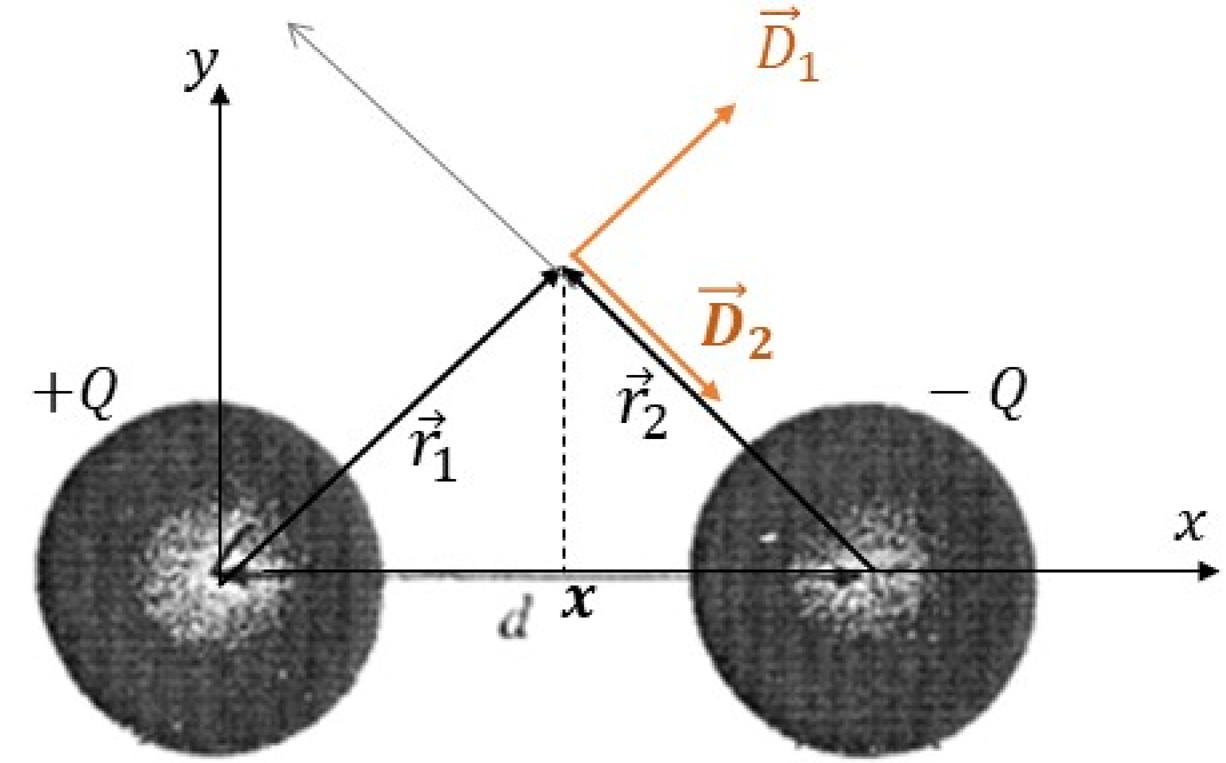
Séance 1	2 heures	1.8.3, 1.8.5, 1.8.6, 1.8.9

Exercice 1.8.9: Condensateur à haute tension

Un condensateur à haute tension est formé de deux sphères métalliques de rayon a, dont les centres sont espacés d'une distance d, et qui sont situées dans l'air. Si les deux sphères portent des charges de signes opposés $+Q$ et $-Q$, quelle est l'expression de l'intensité du champ électrique dans l'air, le long de la droite qui joint les deux sphères? (parce que $a<<d$, les charges se répartissent uniformément à la surface des sphères; on peut négliger l'effet des supports isolants en céramique).



Exercice 1.8.9: Condensateur à haute tension



- **2 sphères;**
- **Les charges sont réparties en surface;**
- **Symétrie sphérique;**
- **Théorème de Gauss;**
- **Principe de superposition;** $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$

Pour une sphère

$$\phi = \oint \vec{D}, d\vec{S} = Q_{in} \longrightarrow \phi = \oint \vec{D}, d\vec{S} = D \oint dS = D\ 4\pi r^2 \Longrightarrow D = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2}$$

$$\Longrightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2}\ \hat{r}$$

Pour la sphère de gauche: $\vec{D}_1 = \frac{Q}{4\pi r_1^2}\ \hat{r}_1$

Pour la sphère de droite: $\vec{D}_2 = \frac{-Q}{4\pi r_2^2}\hat{r}_2$

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}\ \hat{r}_1\ + \frac{-Q}{4\pi r^2}\hat{r}_2$$

$$\vec{D} = D\ \hat{x} = \ \vec{D}_{1x} + \vec{D}_{2x} = \frac{Q}{4\pi x^2}\hat{x} + \frac{-Q}{4\pi (d-x)^2}(-\hat{x}) = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right] \Longrightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right]\hat{x}}$$