

# – PHS1102 – Champs électromagnétiques

## Chapitre 4 – Matériaux conducteurs

Courant électrique

Densité de courant électrique

Équation de continuité

Conductivité et résistivité électriques

Résistance et loi d'Ohm

Puissance dissipée

## Objectifs de la semaine

### Courant électrique

- Calculer un courant électrique par sa définition.
- Décrire les différents mécanismes du courant.

### Densité de courant électrique

- **Calculer la densité de courant électrique qui traverse une surface** (porteurs de charge positive et négative).

### Équation de continuité

- Expliquer la signification de l'hypothèse de courant stationnaire et poser l'équation de continuité du courant sous cette hypothèse.

### Conductivité et résistivité électriques

### Résistance et loi d'Ohm

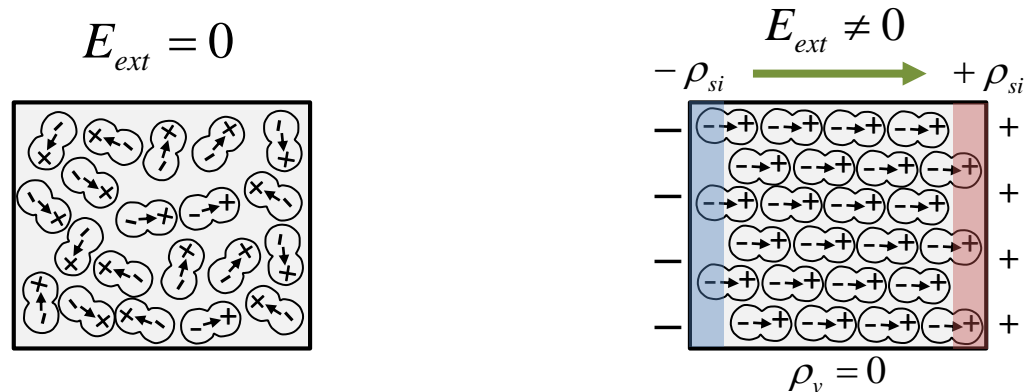
- Définir la conductivité et la résistivité à partir de la densité de courant et du champ électrique.
- **Calculer la résistance d'un conducteur** à l'aide de la loi d'Ohm.
- Décrire le comportement de la résistivité des métaux en fonction de la température.

### Puissance dissipée

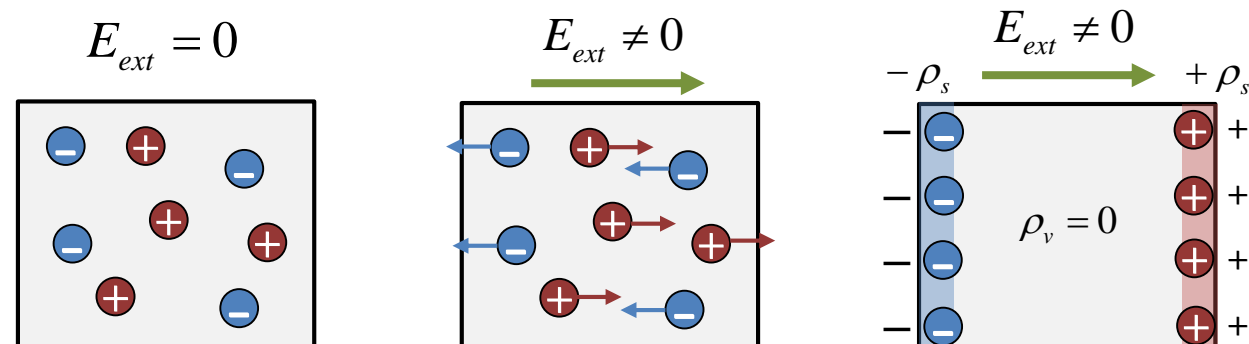
- **Calculer la puissance dissipée dans un conducteur** avec la loi de Joule.

# Effet d'un champ électrique sur un conducteur isolé

**Diélectrique :** Les charges se déplacent en restant liées pour former des dipôles alignés : le matériau devient polarisé. Son volume reste neutre, mais les surfaces perpendiculaires au champ acquièrent une densité de charges induites.



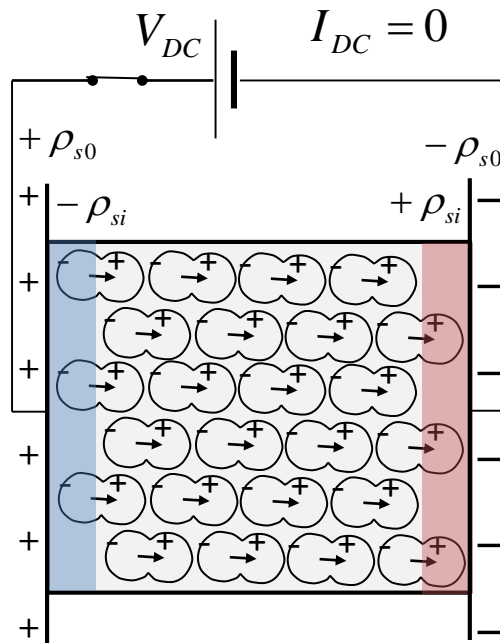
**Conducteur :** Le matériau contient des charges libres qui se déplacent dans tout le volume du matériau sous l'effet du champ. Les charges libres s'accumulent à la surface du conducteur qui devient alors chargée.



Les charges libres  
sont appelées  
porteurs de charge.

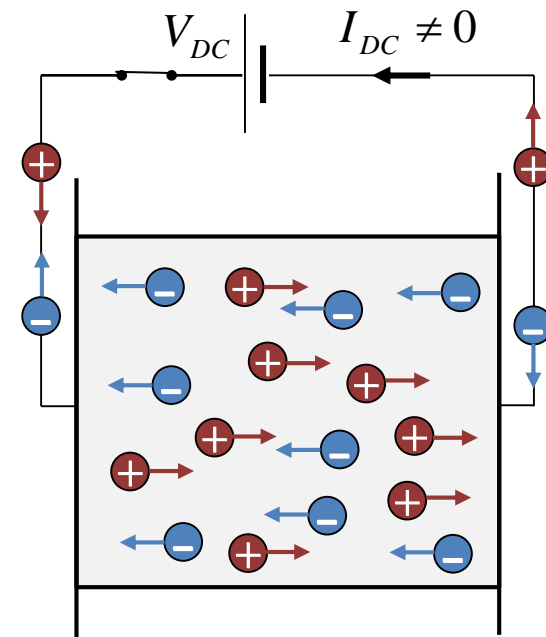
## Diélectrique et conducteur dans un circuit

Comment se comportent un diélectrique et un conducteur lorsqu'ils sont alimentés par une source de tension continue (DC) ?



### Diélectrique

Les charges étant liées, elles ne peuvent pas circuler dans le circuit.  
Il n'y a pas de courant continu.

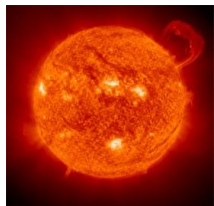
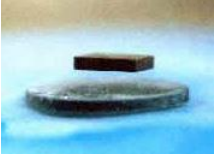
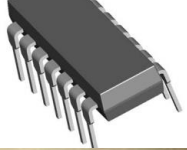


### Conducteur

Les porteurs de charges se déplacent dans le circuit et un courant continu apparaît.

## Matériaux conducteurs

Il existe des matériaux conducteurs pour tous les états de la matière.



État de la matière	Matériau	Porteurs de charge
Solide	• Métaux	• Électrons -
	• Semiconducteurs	• Électrons - et trous +
	• Supraconducteurs	• Paires d'électrons - - (paires de Cooper)
Liquide	• Électrolytes	• Ions + et - (ex : $\text{Na}^+$ et $\text{Cl}^-$ )
Gaz/plasma	• Plasmas chauds ou froids	• Ions + et -

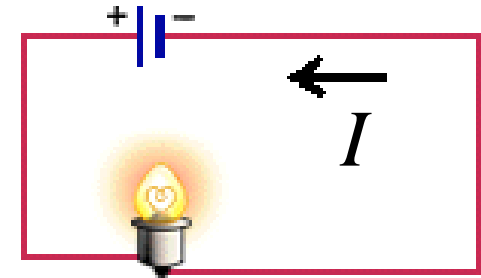
## Définition du courant électrique

Le courant  $I$  est la quantité de charge qui traverse une surface par unité de temps.

Courant électrique

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

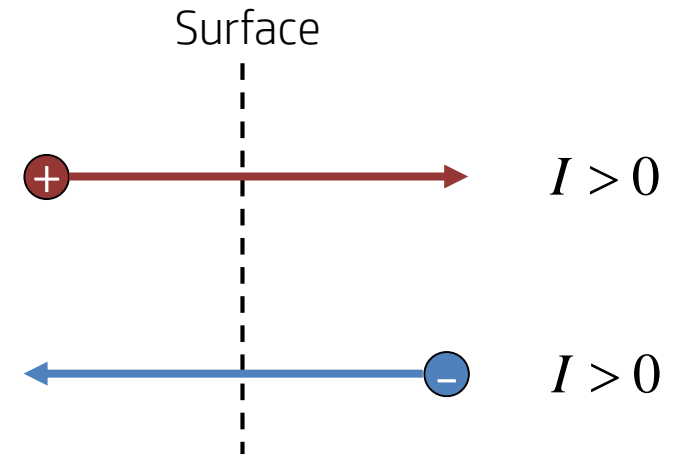
Scalaire  
en ampère  
[A] = [C/s]



### Signe du courant

Le courant est une **quantité scalaire** qui peut être **positive** ou **négative**.

1. Le **sens positif** du courant est défini par le sens du **déplacement des charges positives** (sens conventionnel) ;
2. Une **charge négative** qui se déplace en **sens opposé** au déplacement des charges positives génère également un **courant positif** !



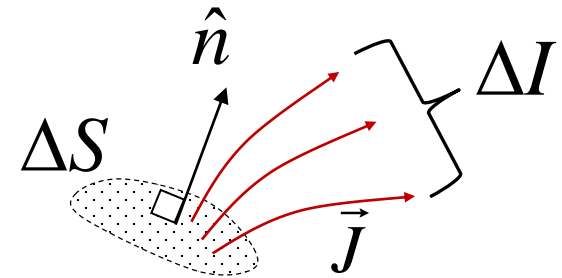
## Densité de courant électrique

La densité de courant  $\vec{J}$  est la quantité de courant qui traverse une surface infinitésimale.

Densité de courant

$$\vec{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{n}$$

Champ vectoriel  
[A/m<sup>2</sup>]

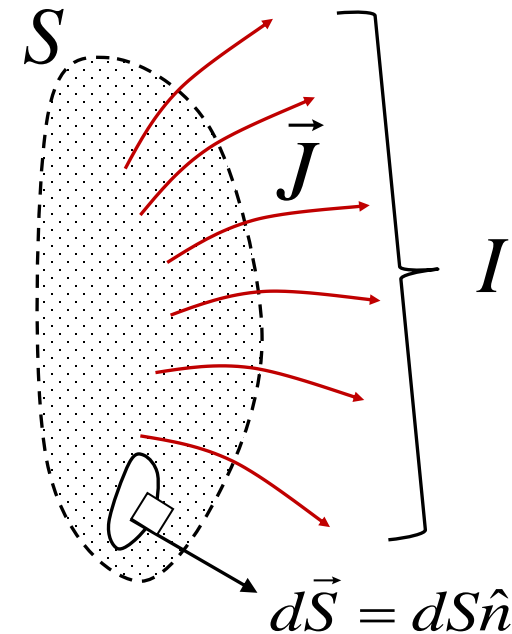


Calcul du courant total

Si l'on connaît la densité de courant, le courant total qui traverse une surface est :

Courant traversant une surface

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Produit scalaire : seule la composante de  $\vec{J}$  perpendiculaire à la surface contribue au courant.

Rappel : perpendiculaire à la surface veut dire parallèle à  $d\vec{S}$ .

## Continuité du courant

Tout comme l'énergie, la charge électrique est une quantité qui est toujours conservée.  
L'équation de continuité décrit la conservation de la charge.

Soit une surface fermée  $S$  qui contient une charge  $Q$ .  
Par conservation de la charge, si la charge à l'intérieur de la surface varie, c'est qu'une certaine quantité de charge a traversé la surface sous forme d'un courant.

Équation de continuité

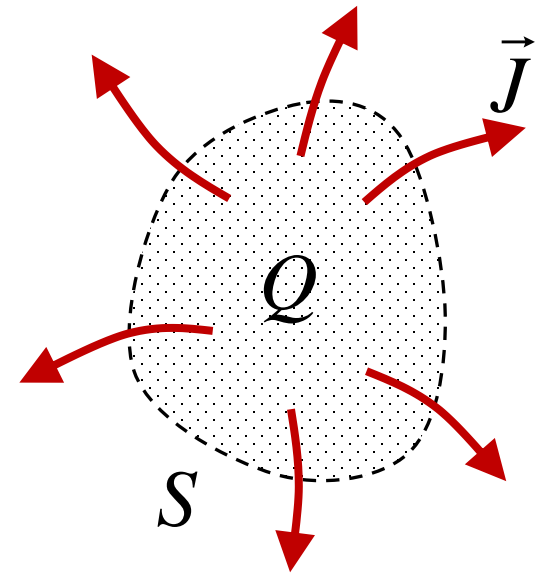
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

### Interprétation

(Rappel :  $d\vec{S}$  pointe vers l'extérieur de la surface  $S$ .)

Si  $Q$  augmente, une quantité de charge est entrée à l'intérieur de  $S$  (courant  $I$  négatif).

Si  $Q$  diminue, une quantité de charge est sortie de l'intérieur de  $S$  (courant  $I$  positif).





# Équation de continuité (courants stationnaires)

Un courant stationnaire ne varie pas dans le temps.

## Observation expérimentale sur l'équation de continuité

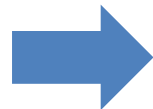
Il n'y a pas de source ou de drain de porteurs de charge, car toute création ou annihilation de charge conserve la charge. On ne peut pas créer de charge positive sans créer la même quantité de charge négative.

Ex. : Source : création de porteurs dans une cellule solaire (électron + trou),  
Drain : recombinaison de porteurs dans une cellule solaire (électron + trou).

On s'intéresse ici aux **courants et distributions de charge stationnaires**. Dans ce cas, tout courant qui entre dans une surface  $S$  doit en ressortir afin de garder la quantité de charge  $Q$  constante à l'intérieur.

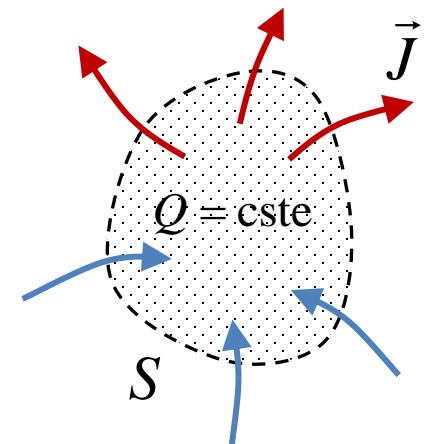
Courants  
stationnaires

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$



Équation de continuité  
(courants stationnaires)

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$



# Courant stationnaire

Une distribution de charge stationnaire ne veut pas dire une absence de courant.

Bloc de 6 atomes de lithium

$$Q_{\text{totale}} = 18 \text{ protons} - 18 \text{ électrons} = 0$$

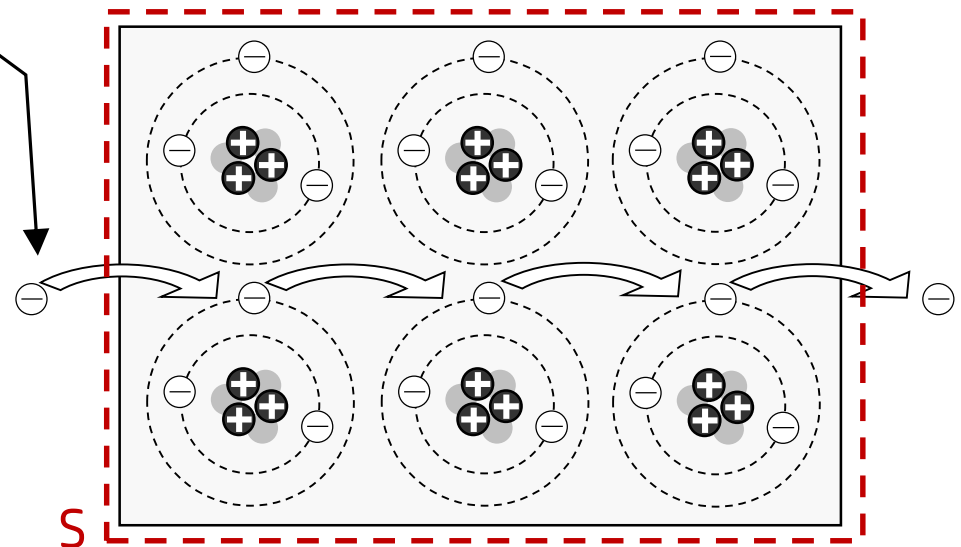
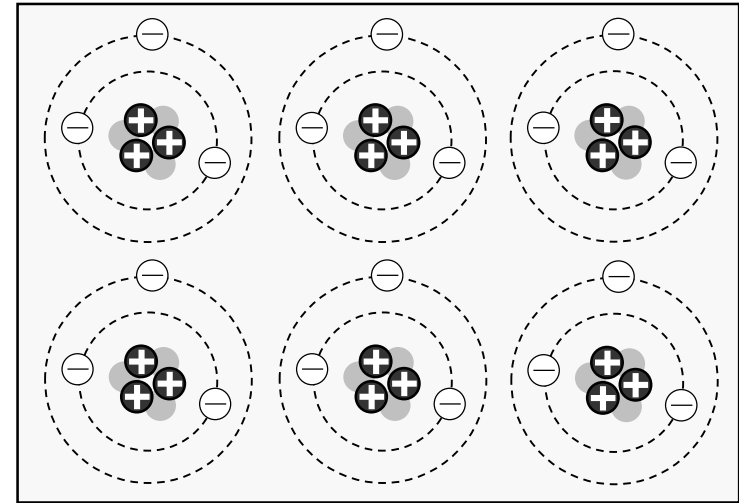
$$\rho_v = 0$$

Arrivée et sortie d'électrons dans le bloc qui est placé dans un circuit.

La charge du matériau reste constante (ici nulle) malgré le courant.

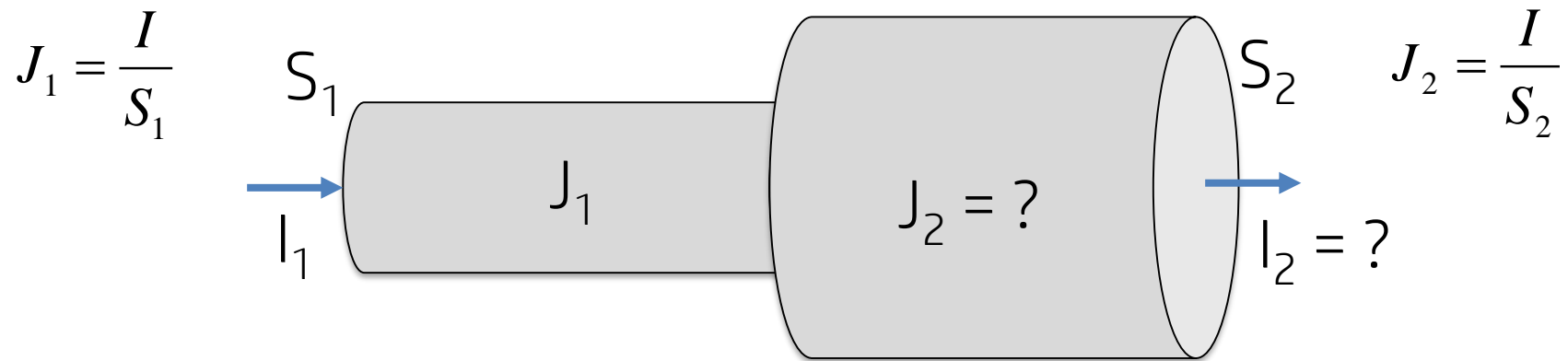
$$Q_{\text{totale}} = 18 \text{ protons} - 18 \text{ électrons} = 0$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$



## Quiz !

La pièce conductrice ci-dessous est formée de deux cylindres de sections  $S_1 < S_2$ . Un courant  $I_1$  circule entre par la section  $S_1$  de la pièce. On suppose que le courant est confiné dans la pièce (pas de fuite par la surface courbe d'un cylindre).



Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

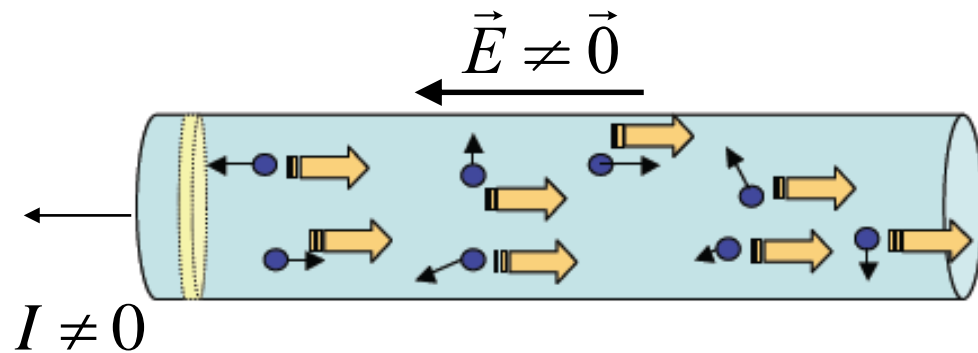
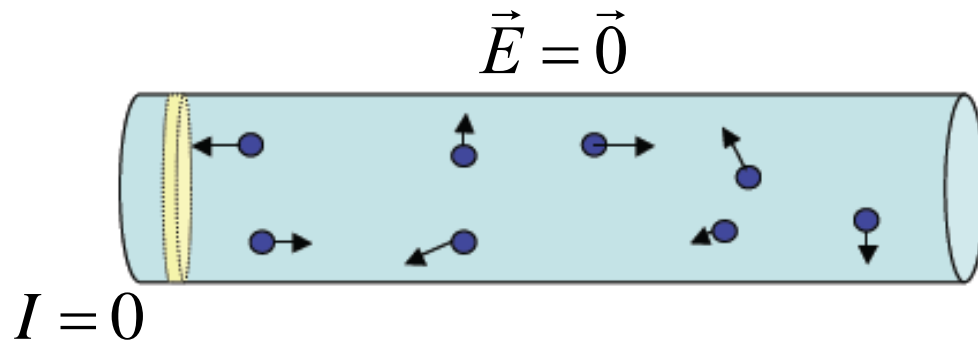
- A.  $I_1 < I_2$  et  $J_1 = J_2$  ; **Faux**
- B.  $I_1 > I_2$  et  $J_1 = J_2$  ; **Faux**
- C.  $I_1 > I_2$  et  $J_1 = J_2$  ; **Faux**
- D.  $I_1 = I_2$  et  $J_1 < J_2$  ; **Faux**
- E.  $I_1 = I_2$  et  $J_1 > J_2$  . **Vrai**

Le courant qui entre dans la section  $S_1$  doit en ressortir complètement (courant stationnaire).  
Le même courant circule donc dans  $S_2$ .

$$I_1 = I_2 = I \quad \Rightarrow \quad J_2 = \frac{S_2}{S_1} J_1$$

# Vitesse de dérive dans un conducteur métallique

Un conducteur métallique peut être modélisé comme un « gaz » d'électrons libres (délocalisés) circulant entre les atomes du métal.



Vitesse de dérive  $\vec{v}$

$$\vec{v} = \gamma \vec{E}$$

Mobilité des charges  $\gamma$   
en  $[\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})]$

Absence de champ externe

Les électrons délocalisés se déplacent de **manière aléatoire à la vitesse de Fermi ( $\approx 10^5 \text{ m/s}$ )**. Cette vitesse augmente avec la température (agitation thermique).

Application d'un champ externe

Le champ électrique accélère les électrons et leur confère globalement une **vitesse de dérive ( $\approx \text{mm/s}$ )**. Celle-ci est **proportionnelle au champ**, mais est **limitée par les collisions avec les atomes** du métal.

## Densité de courant et champ électrique

Le courant est proportionnel à la vitesse de dérive des porteurs de charge.

Soit une quantité de charge  $\Delta q$  répartie sur un volume infinitésimal  $\Delta V = \Delta S \Delta x$ . On considère le déplacement de la charge sur une distance  $\Delta x$  en un temps  $\Delta t$ .

La densité de courant vaut :

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{n} \\ &= \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta q}{\Delta S \Delta t} \hat{n} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho_v \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{J} = \rho_v \vec{v}}$$

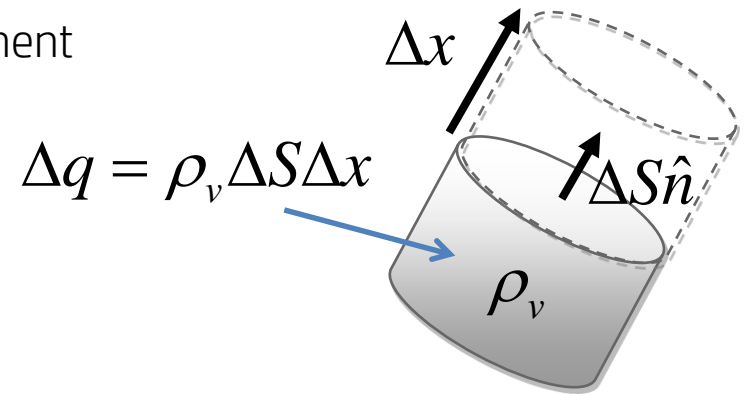
Vitesse de dérive

Définition de la densité de courant

Définition d'un courant

Expression de  $\Delta q$

Définition de la vitesse



$$\Delta q = \rho_v \Delta S \Delta x$$

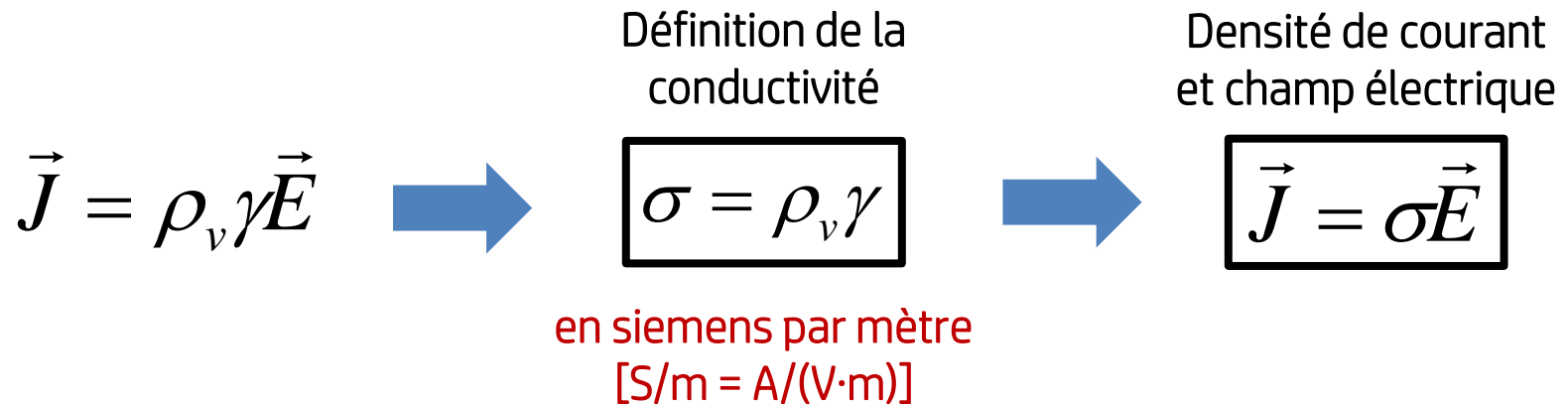
En utilisant la définition de la vitesse de dérive proportionnelle au champ électrique, on obtient :

$$\vec{J} = \rho_v \gamma \vec{E}$$

La constante de proportionnalité porte un nom bien précis...

# Conductivité électrique et résistivité

La conductivité électrique est la constante de proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrique.



Plus la conductivité d'un matériau est élevée, plus le courant de conduction dû à l'application d'un champ électrique est élevé.

Définition de la résistivité

À partir de la conductivité, on définit également la **résistivité**  $\rho$ .

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}}$$

en ohm-mètre  
[Ω·m = m/S = V·m/A]

## Quiz – Conductivité des métaux

Lequel des métaux suivants est le plus conducteur ?

Or



Argent



Cuivre



Platine



Aluminium



## Conductivité électrique – Table de valeurs

Matériau	Conductivité ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	Matériau	Conductivité ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )
Quartz	$\approx 10^{-17}$	Eau de mer	$\approx 4$
Polystyrène	$\approx 10^{-16}$	Silicium	$\approx 10^3$
Mica	$\approx 10^{-15}$	Graphite	$\approx 10^5$
Verre	$\approx 10^{-14}$	Mercure	$\approx 10^6$
Eau distillée	$\approx 10^{-4}$	Tungstène	$1,8 \times 10^7$
Muscle	$\approx 0,35$	Or	$4,1 \times 10^7$

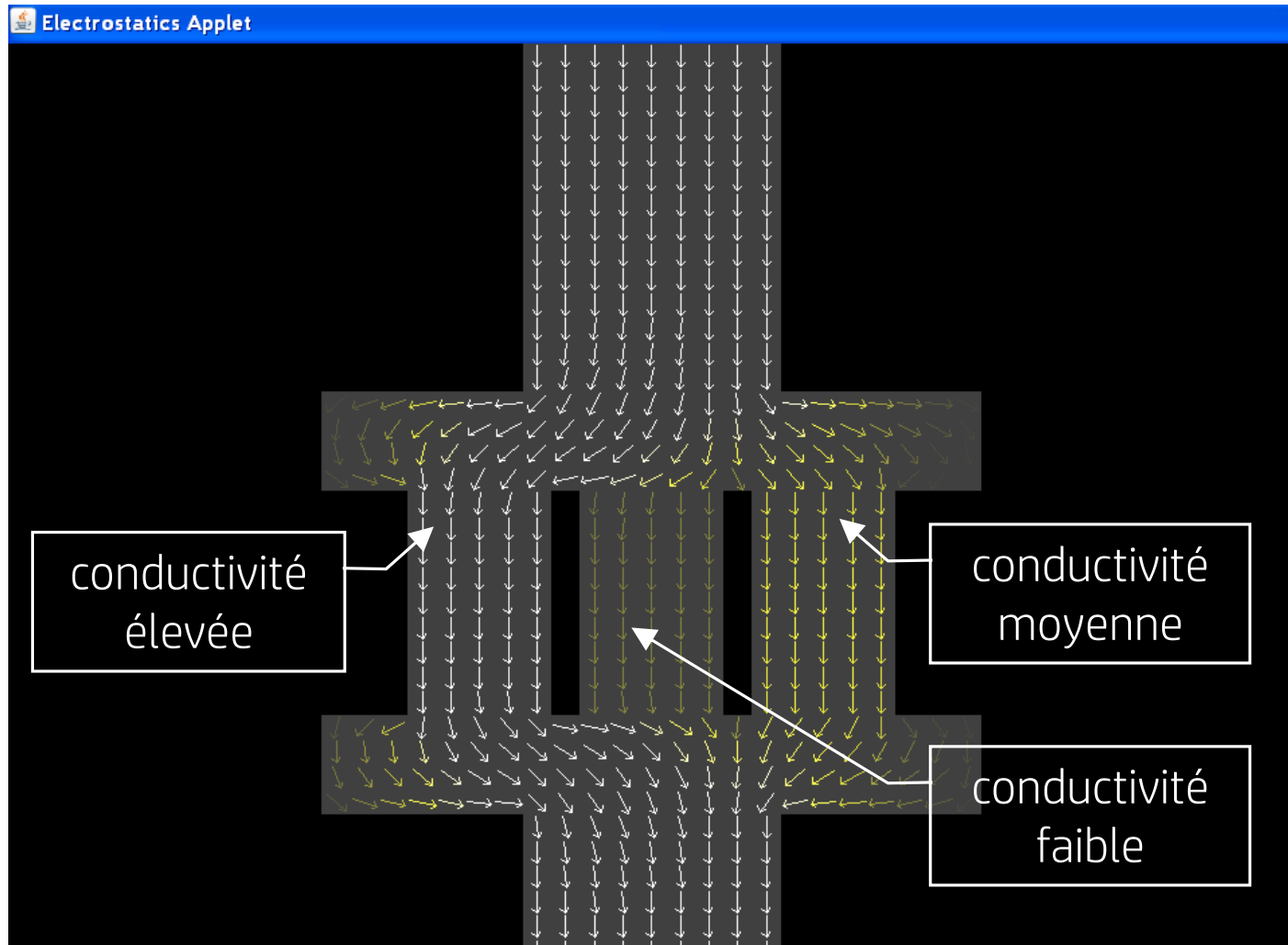
Quelle classe de matériaux possède la plus grande conductivité ?

Quelle est la conductivité d'un isolant parfait ? d'un conducteur parfait ?



## Effet de la conductivité

Moodle Section 15 : Chap 1-6 Électrostatique 2D (setup : resistors in parallel)



# Résistance et loi d'Ohm

Le courant est proportionnel à la différence de potentiel appliquée sur un objet.

En appliquant une différence de potentiel  $V$  entre deux bornes mises en contact avec un conducteur, un courant  $I$  circule entre les bornes.

Loi d'Ohm

$$V = RI$$



Gregor Simon Ohm  
(1789-1854)

Résistance

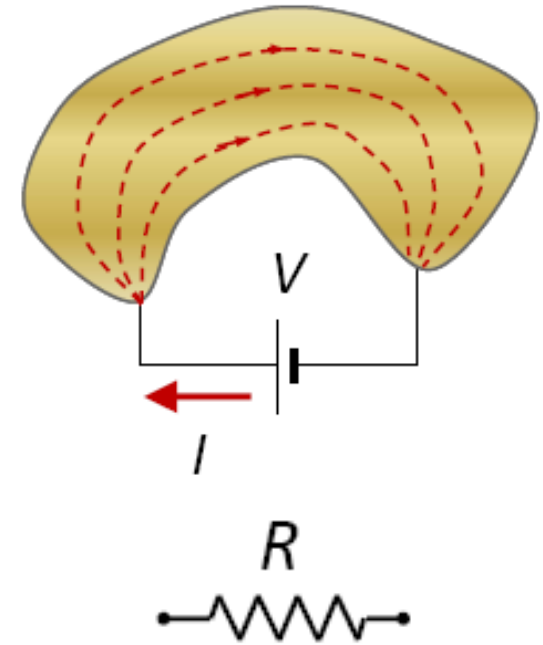
$$R = \frac{V}{I}$$

en ohm  
[ $\Omega = V/A$ ]

Conductance

$$G = \frac{1}{R}$$

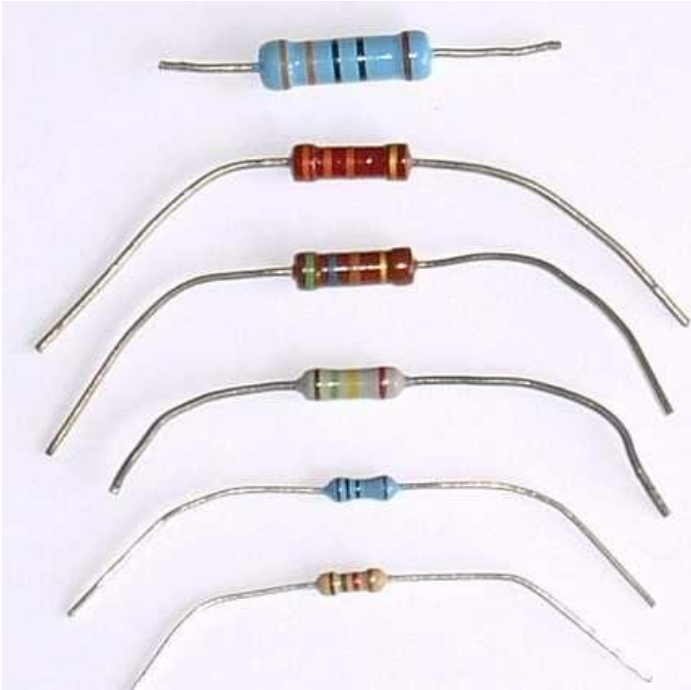
en siemens  
[ $S = 1/\Omega$ ]



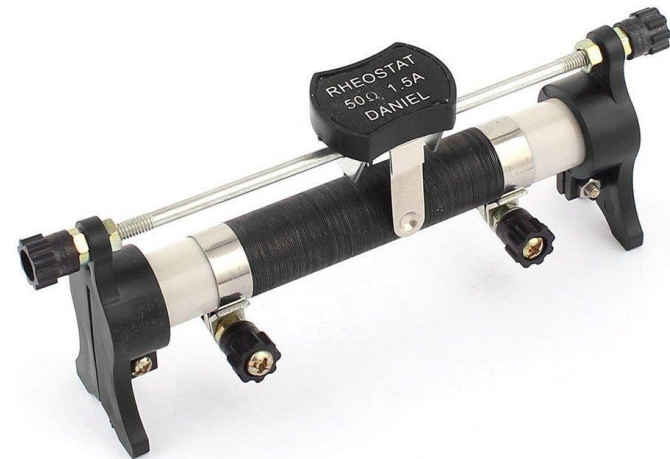
La résistance (conductance) dépend de :

- La conductivité (résistivité) de l'objet ;
- La géométrie de l'objet ;
- La position des bornes sur l'objet.

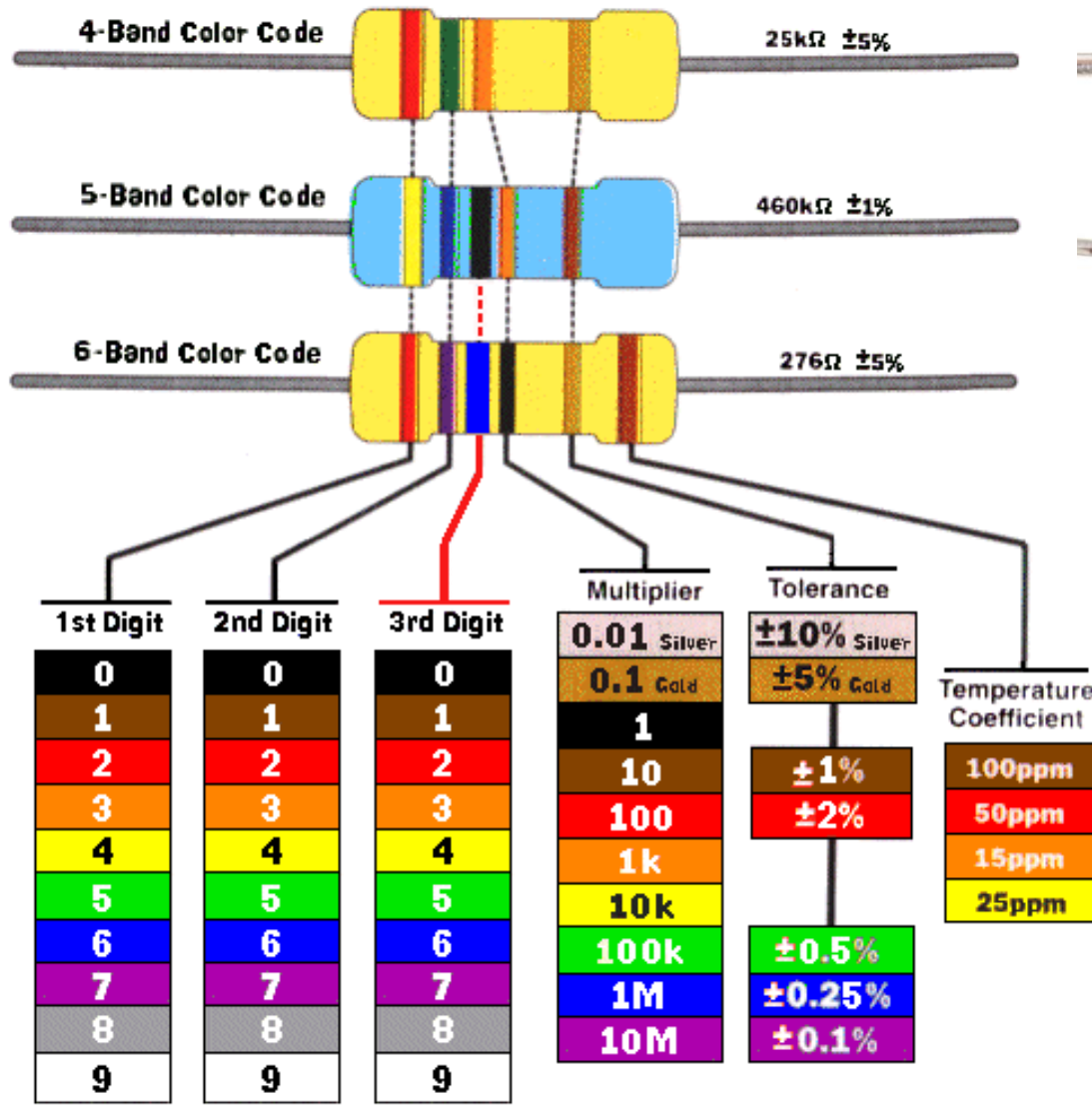
## Résistances



résistances variables  
(potentiomètres)



## Code de couleur des résistances



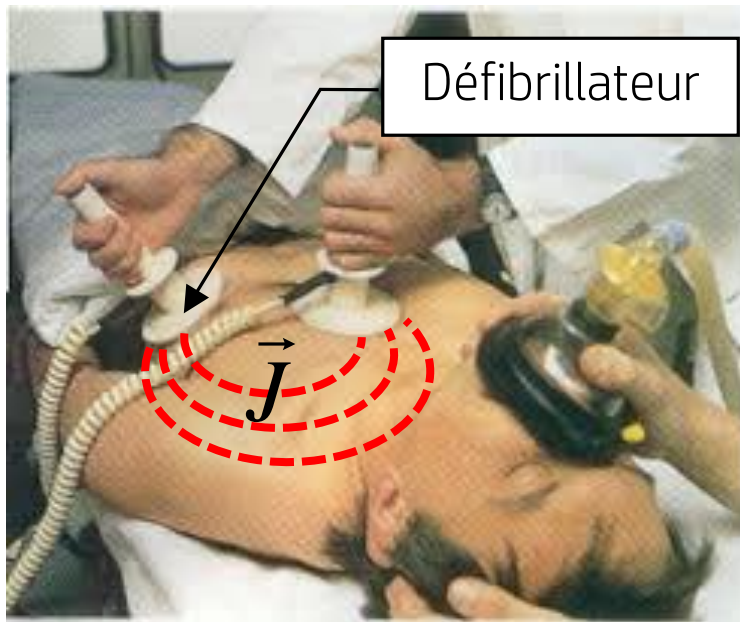
Résistance du haut

$$10 \times 10 \text{ k}\Omega = 100 \text{ k}\Omega \pm 5\%$$

Résistance du bas

$$100 \times 1 \text{ k}\Omega = 100 \text{ k}\Omega \pm 1\%$$

# Méthode pour calculer la résistance d'un volume conducteur



Calcul de la résistance :

1. Déterminer la symétrie pour exprimer le vecteur  $\vec{J}$  en fonction de  $I$  et de  $S$  ( $J = I/S$ ) ;
2. Calculer le champ électrique  $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$  ;
3. Calculer la différence de potentiel  $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  ;
4. Calculer la résistance  $R = V/I$ .

Choisir un parcours simple qui permet de calculer l'intégrale facilement.

## Exemple 4.1 – Résistance d'un conducteur de section constante

Déterminer la résistance d'un barreau de longueur  $L$  et de section  $S$  constante.

### 1. Symétrie pour exprimer $J = I/S$

Le courant circule parallèlement à l'axe du barreau (selon  $x$ ). On considère donc la section  $S$  du conducteur traversée par le courant.

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{x}$$

### 2. Champ électrique $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$

$$\vec{E} = \frac{I}{\sigma S} \hat{x}$$

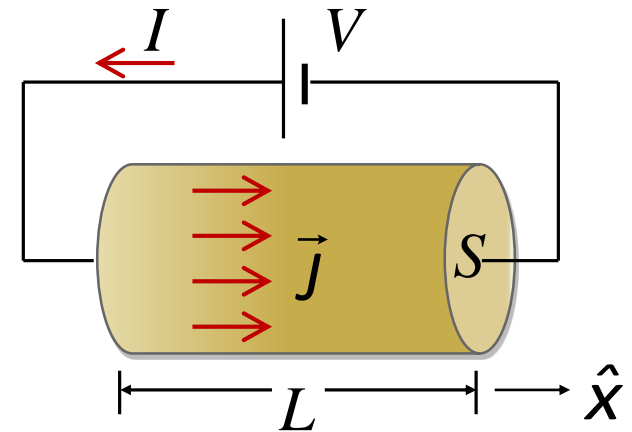
### 3. Différence de potentiel $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Chemin d'intégration le plus simple entre les bornes : horizontalement de  $x = L$  (borne négative) à  $x = 0$  (borne positive).

$$V = - \int_L^0 \frac{I}{\sigma S} \hat{x} \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) = \int_0^L \frac{I}{\sigma S} dx = \frac{IL}{\sigma S}$$

### 4. Résistance $R = V/I$

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$



Deux barreaux en série :  $L$  double et la résistance double.

Deux barreaux en parallèle :  $S$  double et la résistance diminue de moitié.



## Exemple – Résistances en série

Déterminer la résistance équivalente de deux barreaux distincts placés en série.

### 1. Champ électrique dans chaque barreau ( $i = 1, 2$ )

On a déjà trouvé que :  $\vec{J}_i = \frac{I}{S_i} \hat{x}$      $\vec{E}_i = \frac{I}{\sigma_i S_i} \hat{x}$

### 2. Différence de potentiel totale

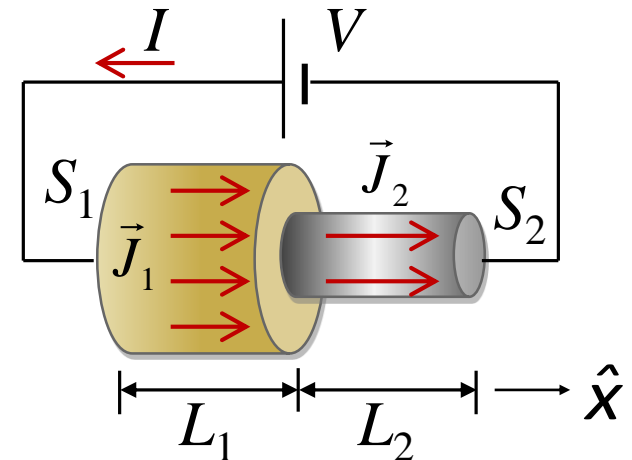
Il faut intégrer sur un chemin qui parcourt les deux barreaux :

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{L_1}^0 \frac{I}{\sigma_1 S_1} dx - \int_{L_1+L_2}^{L_1} \frac{I}{\sigma_2 S_2} dx \quad \Rightarrow \quad V = I \left( \frac{L_1}{\sigma_1 S_1} + \frac{L_2}{\sigma_2 S_2} \right)$$

### 3. Résistance équivalente $R_{eq} = V/I$

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{L_1}{\sigma_1 S_1} + \frac{L_2}{\sigma_2 S_2} = R_1 + R_2$$

Loi pour les  
résistances en  
série



RAPPEL

Résistance d'un barreau

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

## Surfaces de Gauss pour la densité de courant

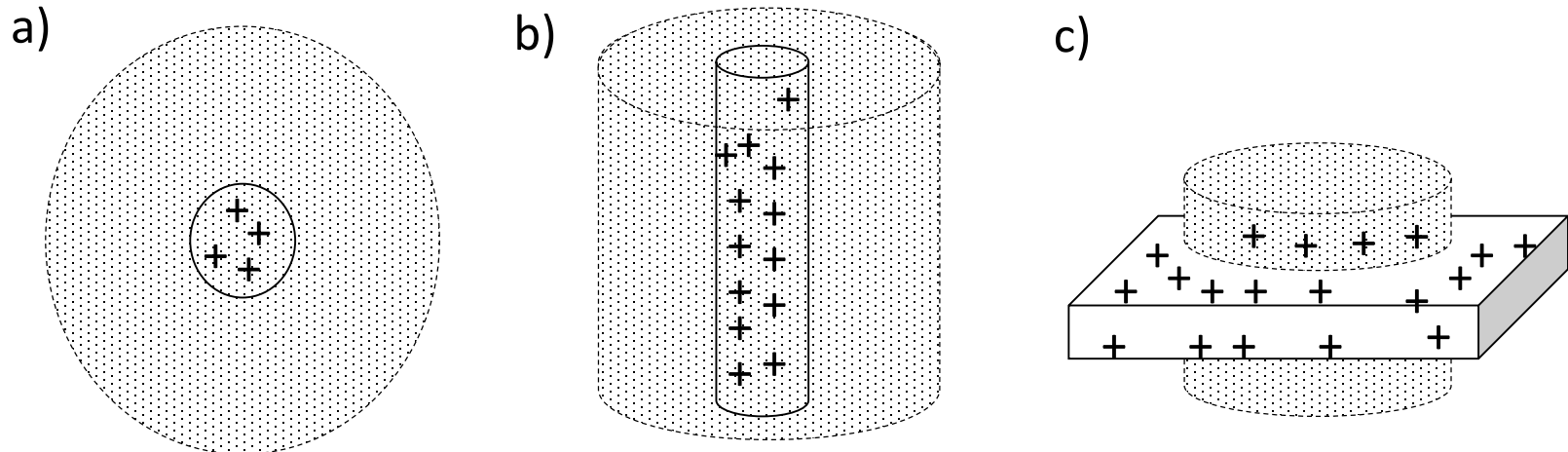
La relation entre courant  $I$  et densité de courant  $\vec{J}$  est similaire à la relation entre la charge libre  $Q$  et la densité de flux  $\vec{D}$ . On peut donc appliquer la même méthode de résolution.

$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Pour déterminer l'expression de  $\vec{J}$ , on examine la symétrie du problème et on choisit une des trois surfaces de Gauss pour laquelle  $\vec{J}$  :

1. Est constante et perpendiculaire à la surface :  $\int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int \pm J dS = \pm JS$  ;
2. Est parallèle à la surface :  $\int \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ .



Les trois surfaces de Gauss symétriques: a) sphère ; b) cylindre ; c) boîte à pilules.



## Exemple 4.2 – Résistance de fuite d'un câble coaxial

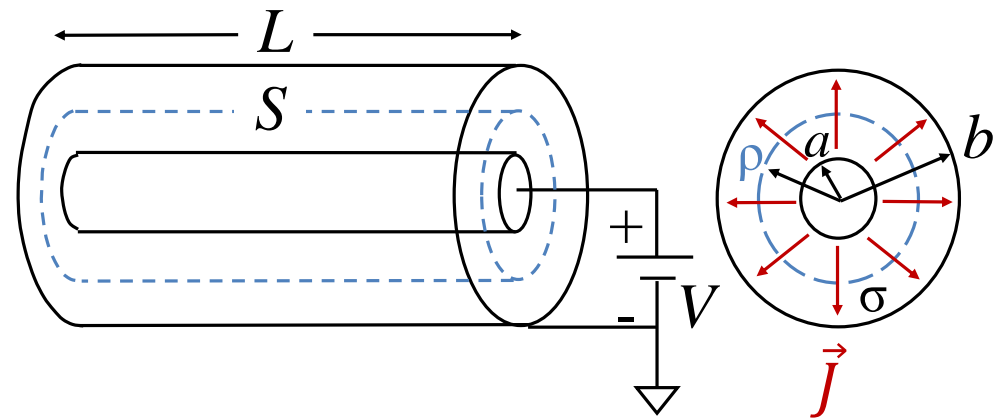
En pratique, le diélectrique placé entre les armatures cylindriques du câble n'est pas un isolant parfait : il possède une certaine conductivité  $\sigma$  non nulle et un courant de fuite  $I$  circule entre les armatures, ce qui cause des pertes.

### 1. Symétrie pour exprimer $J = I/S$

Dans quelle direction est la densité de courant ?

Le courant circule **radialement** entre les deux armatures. La géométrie cylindrique incite à utiliser les **coordonnées cylindriques**.

Pour exprimer  $\vec{J}$ , on utilise une surface  $S$  cylindrique de rayon  $a < \rho < b$ .



$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{\rho} = \frac{I}{2\pi\rho L} \hat{\rho}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma\rho L} \hat{\rho}$$

### 2. Champ électrique $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$

### 3. Différence de potentiel $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

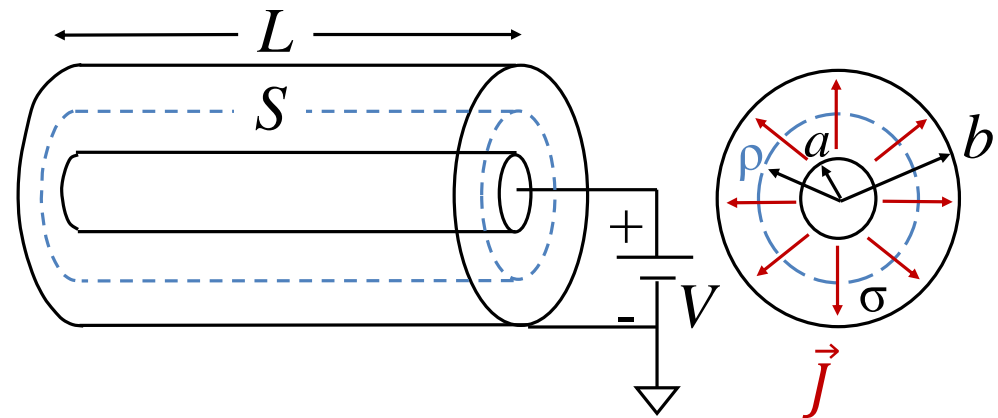
Quel parcours d'intégration choisir ?

## Exemple 4.2 – Résistance de fuite d'un câble coaxial

3. Différence de potentiel  $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Quel parcours d'intégration choisir ?

On part de l'armature négative ( $\rho = b$ ) vers l'armature positive ( $\rho = a$ ) de façon purement radiale (chemin le plus simple)



$$V = - \int_b^a \frac{I}{2\pi\sigma\rho L} \hat{\rho} \cdot (d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}) = \frac{I}{2\pi\sigma L} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4. Résistance  $R = V/I$

$$R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma L}$$

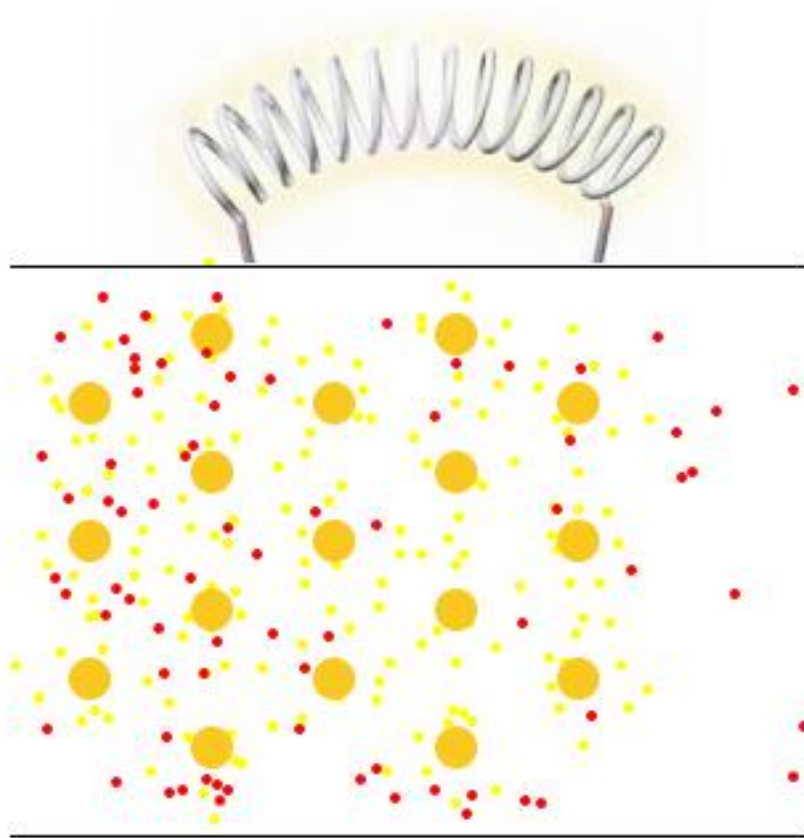
Si l'on augmente  $b$  ou si l'on diminue  $a$ , la résistance augmente (résistances en série).

Si l'on augmente  $L$ , la résistance diminue (résistances en parallèle).

## Puissance dissipée dans un conducteur

Moodle Section 15

Applet : Chap 4 Conductivité



Lorsqu'un courant circule dans un conducteur, de la **puissance est dissipée à cause des collisions** entre les porteurs de charge et les atomes du matériau. Une certaine quantité d'énergie est alors convertie en **chaleur**.

Plus le courant est élevé, plus le nombre de collisions augmente et plus la puissance dissipée est grande.

# Puissance électrique et puissance dissipée

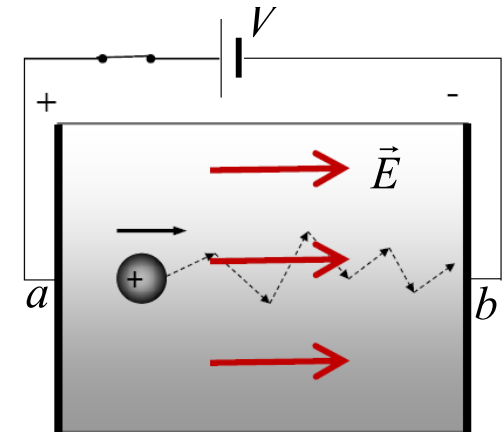
## Puissance électrique

La puissance électrique est le travail fait sur les charges par unité de temps.

Pour qu'un courant  $I$  circule à travers le conducteur, la pile doit fournir une différence de potentiel  $V$ .

En parcourant le conducteur, une charge  $\pm\Delta Q$  perd (signe négatif) une énergie potentielle  $\Delta U = -V\Delta Q$ .

La pile redonne à la charge à son énergie potentielle initiale en effectuant un travail positif  $W = -\Delta U = V\Delta Q$  sur la charge.



## Puissance électrique (loi de Joule)

En utilisant la définition du courant électrique, on a :

$$W = V\Delta Q = V(I\Delta t)$$



$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = VI$$

en watt  
[W = V·A = J/s]

Puissance dissipée dans une résistance  $R$

En utilisant la loi d'Ohm  $V = RI$ , on obtient :

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

**Puissance dissipée = convertie en chaleur**  
**Aussi appelée « pertes ohmiques »**



## Densité de puissance dissipée

### Densité de puissance dissipée

Pour calculer la puissance dissipée par un conducteur de forme quelconque, il faut définir la densité de puissance dissipée.

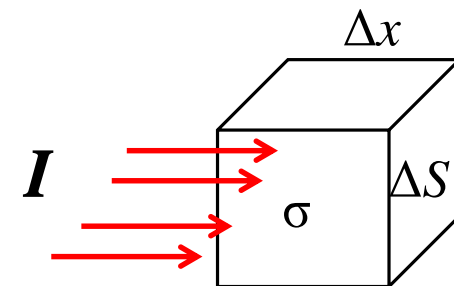
On calcule la puissance dissipée en appliquant la loi d'Ohm à un volume infinitésimal de longueur  $\Delta x$  et de section  $\Delta S$  traversée par un courant  $I$ .

En utilisant le résultat pour la résistance d'un barreau de section constante, la résistance du volume est :

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\Delta x}{\sigma \Delta S}$$

La densité de puissance  $p$  est la puissance par unité de volume  $\Delta V$  :

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} \frac{V^2/R}{\Delta x \Delta S} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} V^2 \frac{\sigma \Delta S / \Delta x}{\Delta x \Delta S} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} \sigma \left( \frac{V}{\Delta x} \right)^2$$

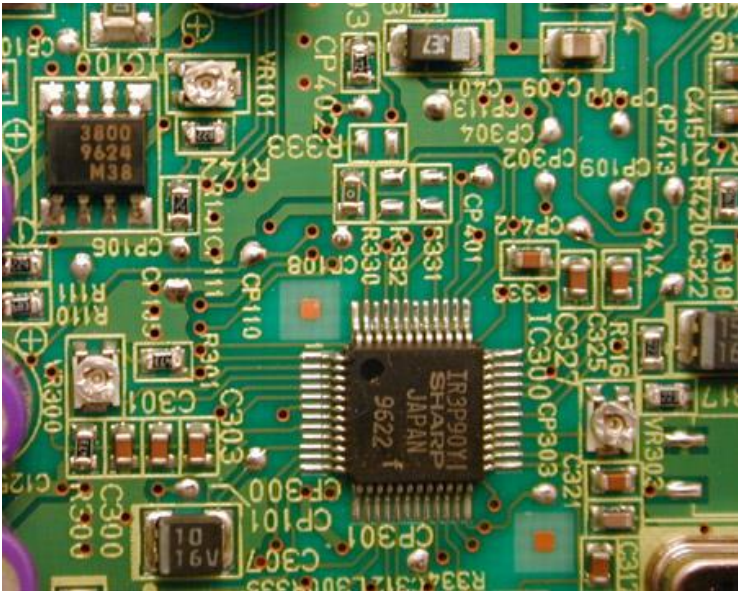


Densité de  
puissance dissipée

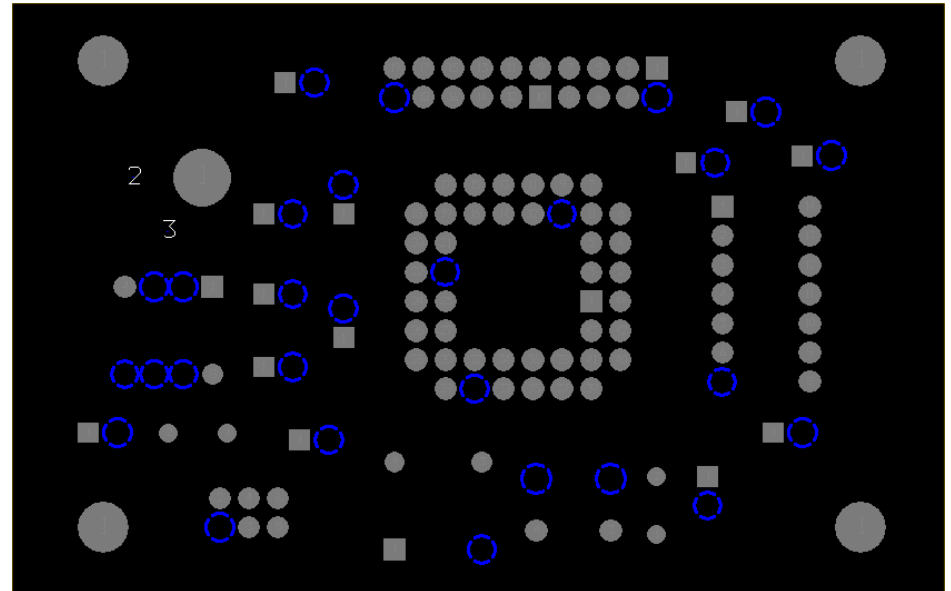
$$\boxed{p = \sigma E^2}$$

en watt/m<sup>3</sup>  
[W/m<sup>3</sup>]

## Exemple – Plan de masse d'un circuit imprimé



Circuit imprimé



Plan de masse  
(*ground plane*)

Le plan de masse est une feuille conductrice qui sert de chemin de retour pour le courant circulant à travers les différents composants du circuit imprimé.

## Exemple 4.8.2 – Puissance dissipée dans un plan de masse

Quelle est la puissance dissipée dans le plan de masse ?

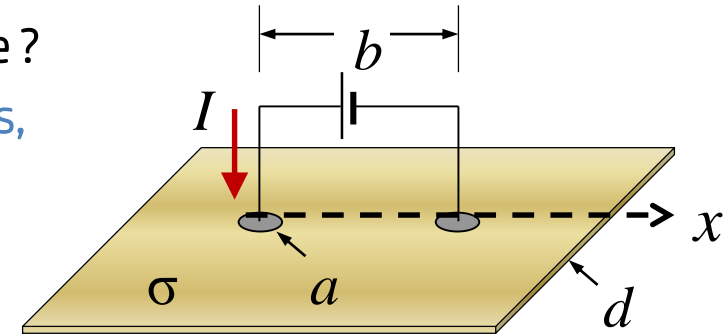
Trouver la différence de potentiel entre les électrodes,  
puis appliquer la loi de Joule.

### 1. Symétrie pour exprimer $J = I/S$

Dans quelle direction est la densité de courant ?

Chaque électrode est de forme cylindrique (rayon  $a$ , épaisseur  $d$ ). Par symétrie cylindrique, la densité de courant d'une électrode est purement radiale.

En choisissant une surface cylindrique de rayon  $\rho > a$  centrée sur une électrode, on a donc :



$$a = 0,2 \text{ mm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad d = 0,025 \text{ mm}, \\ \sigma = 6 \times 10^7 \text{ S/m}, \quad I = 0,5 \text{ A}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{\rho} = \frac{I}{2\pi\rho d} \hat{\rho}$$

(pour une seule électrode)

### 2. Champ électrique produit par les deux électrodes

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma\rho d} \hat{\rho}$$

(pour une seule électrode)



Principe de  
superposition  
appliqué sur l'axe  $x$

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma d} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right] \hat{x}$$

( $x = 0$  sur l'électrode gauche)

## Exemple 4.8.2 – Puissance dissipée dans un plan de masse

Quelle est la puissance dissipée dans le plan de masse ?

Trouver la différence de potentiel entre les électrodes,  
puis appliquer la loi de Joule.

### 3. Différence de potentiel entre les électrodes

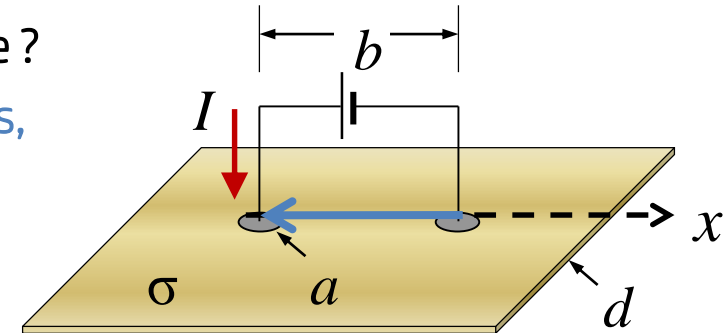
On intègre  $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  en suivant l'axe des  $x$ , en allant de  $x = b - a$  à  $x = a$ .

$$V = - \int_{b-a}^a \frac{I}{2\pi\sigma d} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) \hat{x} \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z})$$

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma d} \int_a^{b-a} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) dx = \frac{I}{2\pi\sigma d} [\ln(x) - \ln(b-x)]_a^{b-a} = \frac{I}{\pi\sigma d} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right)$$

### 4. Puissance dissipée

$$P = VI = \frac{I^2}{\pi\sigma d} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) \approx 0,3 \text{ mW}$$



$$a = 0,2 \text{ mm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad d = 0,025 \text{ mm}, \\ \sigma = 6 \times 10^7 \text{ S/m}, \quad I = 0,5 \text{ A}$$

Où la densité de puissance  
dissipée est-elle la plus élevée ?

$$p = \sigma E^2 = \sigma \left( \frac{I}{2\pi\sigma d} \right)^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right)^2$$

Maximum de  $p$  à  $x = a$  et à  $x = b - a$ .



# Effet de la température sur la résistivité des métaux

La puissance dissipée dans un métal (conducteur) dépend de sa résistance  $R$ , qui est elle-même proportionnelle à la résistivité  $\rho$  du métal.

Nous avons vu que la **résistivité** est due aux **collisions** entre les **porteurs de charge** et les **atomes du cristal**. Plus précisément, elle est causée par :

- La diffusion par les **défauts** dans le réseau cristallin ;
- La diffusion par les **vibrations thermiques** des atomes ;

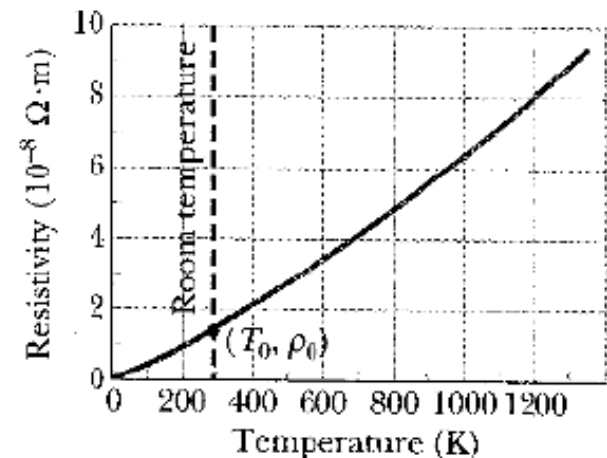
En réalité, la résistivité **dépend de la température** : elle augmente avec celle-ci.

Relation empirique pour la résistivité des métaux  
en fonction de la température

$$\rho^*(T) = \rho_0^*(1 + \alpha T + \beta T^2) \approx \rho_0^*(1 + \alpha T)$$

La relation empirique est quadratique, mais une relation linéaire est souvent suffisante ( $\beta \approx 0$ ).

Résistivité du cuivre en  
fonction de la température



$\rho_0^*$  : résistivité à  $T = 0^\circ\text{C}$

Empirique : établie à  
partir d'observations  
expérimentales

# Effet de la température sur la résistivité des métaux

$$\rho^*(T) = \rho_0^*(1 + \alpha T + \beta T^2) \approx \rho_0^*(1 + \alpha T)$$

$\rho_0^*$  : résistivité à  $T = 0^\circ\text{C}$

Matériau	Conductivité $\sigma$ ( $\Omega^{-1}m^{-1}$ )	Coefficient thermique de résistivité $\alpha$ ( $\text{deg}^{-1}$ )
Argent	$6,14 \times 10^7$	$4 \times 10^{-3}$
Cuivre	$5,8 \times 10^7$	$4 \times 10^{-3}$
Platine	$1,0 \times 10^7$	$4 \times 10^{-3}$
Fer (99,98%)	$1,0 \times 10^7$	$5 \times 10^{-3}$
Plomb	$4,5 \times 10^7$	$4 \times 10^{-3}$
Aluminium	$3,54 \times 10^7$	$4 \times 10^{-3}$
Nichrome	$0,1 \times 10^7$	$4 \times 10^{-3}$
Constantan	$0,2 \times 10^7$	$0,01 \times 10^{-3}$

## Effet de la température sur les réseaux électriques

### Période de pointe pour les réseaux électriques :

- au **Québec**, durant les journées les plus froides de l'**hiver** à cause du chauffage ;
- en **Floride**, durant les journées les plus chaudes de l'**été** à cause de la climatisation.

Pour une même quantité d'énergie électrique à transporter en période de pointe, les pertes ohmiques seront-elles plus élevées au Québec ou en Floride ?

En supposant un écart de +60 °C entre la Floride et le Québec, la résistivité des conducteurs en aluminium augmente de  $60 \cdot (4 \times 10^{-3}) = 0,24 = 24 \%$ .  
Puisque  $P = RI^2$ , les pertes ohmiques augmentent donc également de 24 %.

La puissance en période de pointe étant très coûteuse, le froid hivernal permet de minimiser les coûts de transport.