PHS1102 – CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE – HIVER 2019

DATE : MARDI 26 FÉVRIER HEURE : 18H30-20H20

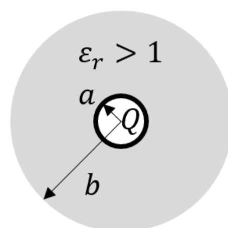
PAGES : 5 QUESTIONS : 4

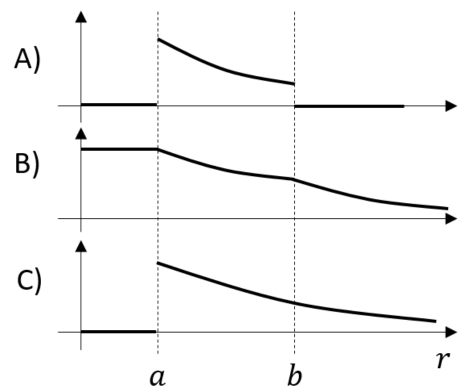
NOTE : Aucune documentation permise
Calculatrice non programmable permise

QUESTION 1 : Concepts et réponses courtes, SVP répondre *dans le cahier d'examen* **(4 points)**

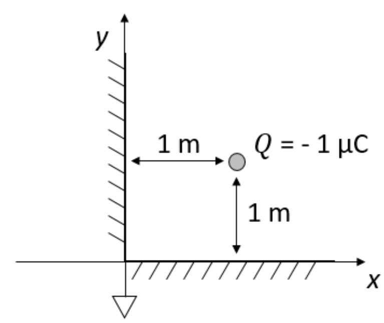
1.1 ➢ (1 pt) Une coquille métallique creuse chargée ($Q > 0$) de rayon a est entourée d'une couche sphérique de rayon b composée d'un matériau diélectrique (en gris). Le tout est entouré du vide.

Pour chacune des courbes A, B et C sur la figure, associer la variable qu'elle décrit (D, E, P ou V).



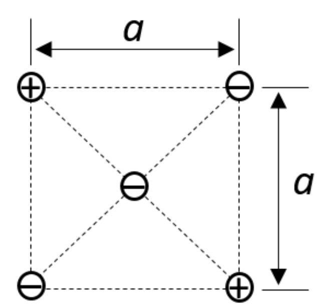


1.2 ➢ (1 pt) Une charge ponctuelle de -1 µC est placée à égale distance de deux plans conducteurs semi-infinis mis à la masse et perpendiculaires l'un à l'autre (voir figure). Quel est le module de la force ressentie par la charge due à la présence des plans conducteurs ?



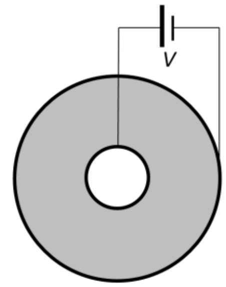
A) 12,7 mN
B) 5,42 mN
C) 4,49 mN
D) 4,30 mN
E) 3,18 mN
F) 2,91 mN
G) 2,05 mN
H) 0,931 mN

1.3 ➢ (1 pt) Deux charges positives et deux charges négatives sont disposées aux coins d'un carré de côté a. De plus, une charge négative se trouve au centre de ce carré. Les cinq charges ont la même valeur Q (en valeur absolue). On s'intéresse ici au travail *minimal* W qu'il faut effectuer sur la charge négative au centre du carré pour la retirer et la déplacer infiniment loin des quatre autres charges. Choisissez l'énoncé qui est vrai :



A) Ce travail minimal est strictement positif ($W > 0$) ;
B) Ce travail minimal est nul ($W = 0$) ;
C) Ce travail minimal est strictement négatif ($W < 0$) ;
D) Il n'y a pas assez d'information pour déduire la valeur du travail minimal à effectuer.

1.4 ➢ (1 pt) Les deux armatures intérieure et extérieure d'un câble coaxial sont séparées par du vide, et connectées à une pile (source de tension).

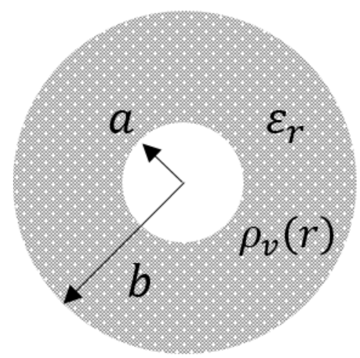


Identifiez la ou les affirmations qui sont vraies parmi les suivantes. Si l'on remplace le vide entre les armatures par un diélectrique ($\varepsilon > \varepsilon_0$), alors :

A) La capacité du câble coaxial augmentera ;
B) La différence de tension entre les armatures diminuera ;
C) La quantité de charge (en valeur absolue) sur chacune des armatures augmentera.

QUESTION 2 : Charge atmosphérique (5 points)

On considère une région atmosphérique en forme de coquille épaisse sphérique, de rayons intérieur a et extérieur b. Cette région est composée d'un gaz diélectrique ($\varepsilon_r > 1$), auquel s'ajoutent des charges libres qui ont été déplacées là à cause des courants atmosphériques.



Plus spécifiquement, la densité volumique de charge à l'intérieur de cette région est :

$$\rho_v = \frac{A}{r}, \qquad a \le r \le b$$

où A est une constante.

Pour ce problème, le milieu à l'extérieur de la région considérée ($r < a$ et $r > b$) peut être considéré comme du vide.

2.1 ➢ Déterminez l'expression du champ électrique (vecteur) : **(3 pts)**

i. dans la région $r < a$;

ii. dans la région $a \le r \le b$;

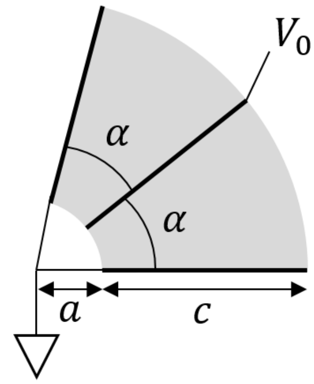
iii. dans la région $r > b$.

2.2 ➢ Déterminez la densité surfacique de charge induite (en module) sur la surface extérieure $r = b$ de la région atmosphérique chargée. **(1 pt)**

2.3 ➢ Écrivez l'expression du travail qui a dû être effectué par les courants atmosphériques pour amener les charges libres dans leur position actuelle, à partir de l'infini. <u>Écrivez l'expression la plus précise possible sans la résoudre (ne pas évaluer de dérivées ou d'intégrales).</u> **(1 pt)**

QUESTION 3 : Condensateur en coin (5,5 points)

Un condensateur en coin est formé de trois armatures carrées de côté $c = 4$ cm, disposées comme indiqué sur la figure. Le diélectrique entre les armatures ($\varepsilon_r = 3$) a une rigidité diélectrique égale à 500 kV/m. Les deux armatures externes sont mises à la masse tandis que l'armature centrale est maintenue à un potentiel V_0. On donne $a = 1$ cm et $\alpha = 40°$.



Pour ce problème, on considère que l'angle α est petit, de sorte que le champ à l'extérieur du condensateur peut être considéré comme négligeable.

3.1 ➤ Déterminez l'expression de la distribution de potentiel partout entre les armatures du condensateur en fonction de V_0. **(2 pts)**

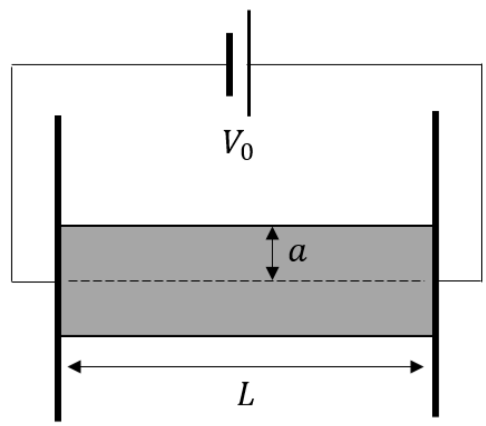
3.2 ➤ Déterminez la valeur de la capacité du condensateur. **(2,5 pts)**

3.3 ➤ Quelle est la valeur maximale du potentiel V_0 qui peut être appliquée au condensateur sans l'endommager ? **(1 pt)**

QUESTION 4 : Barreau de conductivité non uniforme (5,5 points)

Un barreau cylindrique métallique de longueur L et de rayon a possède une conductivité non uniforme :

$$\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{\rho}{a}, \qquad 0 \le \rho \le a,$$



où σ_0 est une constante. Deux électrodes planes sont placées aux extrémités du barreau. Ces électrodes sont soumises à une différence de potentiel V_0 et produisent donc un champ électrique dans l'espace entre elles, où se trouve le barreau. Le barreau a une permittivité similaire à celle du vide.

Le matériau conducteur qui constitue le barreau peut être endommagé localement si la densité volumique de puissance dépasse une valeur maximale $p_{\max}$ en un point.

4.1 ➤ (3 pts) Déterminez l'expression de la résistance du barreau.

Indice : calculez d'abord le champ électrique dans le barreau produit par les électrodes.

4.2 ➤ (1 pt) Déterminez l'expression de la densité surfacique de charge libre sur une électrode (en valeur absolue).

Répondez à la question suivante en utilisant les valeurs L = 50 cm, a = 2 cm, σ_0 = 30 MS/m et $p_{\max} = 10^9$ W/m³.

4.3 ➤ (1,5 pt) Quelle est la différence de potentiel maximale qui peut être appliquée au barreau pour ne pas l'endommager ? Calculez la puissance totale dissipée par le barreau pour cette différence de potentiel.

BONUS ➤ (0,5 pt) La puissance dissipée par le barreau ne pourra pas être totalement évacuée vers son environnement, de sorte que le barreau s'échauffera. Discutez de l'effet de l'augmentation de la température du barreau sur la puissance dissipée.

LES ÉQUATIONS DE BASE

Loi de Coulomb : $\vec{F} = \dfrac{q\,Q\,\hat{r}}{4\pi\,\varepsilon_o\,|r|^2}$

Champ électrique: $\vec{E} = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \dfrac{\vec{F}}{\Delta q}$

Principe de superposition :

$$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$$

Flux électrique : $\Psi = Q$

Le flux débute/finit sur des charges libres

Densité de flux, vide: $\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathrm{E}}$

Loi de Gauss: $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q$

Potentiel entre *a* et *b*: $V_{ab} = \dfrac{W_{ab}}{Q} = -\int_b^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

V charge ponctuelle : $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

Champ conservatif : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le gradient : $\vec{E} = -\nabla V$

Énergie du champ: $U = \dfrac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 dv$

Force, travail virtuel : $\vec{F} = -(\partial W_E / \partial x)\hat{x}$

Polarisation *P*: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Permittivité :

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)\vec{E}$$

Capacité : $C = \dfrac{Q}{V}$ $C = \dfrac{2W_E}{V^2}$ $C = \dfrac{2U}{V^2}$

Densité de courant *J*: $I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Conductivité σ: $\vec{\mathrm{J}} = \sigma\,\vec{\mathrm{E}}$

Résistance : $R = \dfrac{V}{I}$

Puissance dissipée : $P_d = VI = \int_v \sigma\,E^2\,\mathrm{d}v$

Champ électrostatique dans conducteur :

$\rho_v = 0$ $E_i = 0$ $V = \text{cste}$

Interface diélectrique/conducteur :

$E_{1T} = 0$ $D_{1N} = \rho_S$

Interface diélectrique/diélectrique :

$E_{1T} = E_{2T}$ $D_{1N} - D_{2N} = \rho_S$

Théorie des images : ⊕ | Θ

Règles graphiques pour les diélectriques:

① dessiner des carrés curvilignes
② ligne équipotentielle ⊥ ligne de flux
③ ligne de flux débute/finit sur conducteur
④ surface conductrice est équipotentielle

Capacité : $C = \dfrac{N_P\ \varepsilon\,d}{N_S}$

Règles supplémentaires pour les conducteurs :

⑤ ligne de courant ne peut croiser un isolant
⑥ ligne équipotentielle ⊥ ligne de flux

Résistance : $R = \dfrac{N_S}{N_P\,\sigma\,d}$

1ère équation de Maxwell : $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V$

Continuité du courant : $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Équation de Poisson : $\nabla^2 V = \dfrac{-\rho_V}{\varepsilon}$

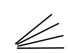
Équation de Laplace : $\nabla^2 V = 0$

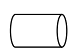
Condition de Dirichlet : *V* connu sur *S*

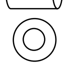
Condition de Neumann : *∂V/∂n* connu sur *S*

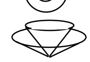
Solutions générales unidimensionnelles :

$V(x) = Ax + B$

 $V(\phi) = A\phi + B$

 $V(\rho) = A \ln \rho + B$

 $V(r) = (A/r) + B$

 $V(\theta) = A \ln\big(\tan(\theta/2)\big) + B$

Différences finies dans le milieu :

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Différences finies sur surface isolante :

$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4}$$

Permittivité du vide : $8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = dy\,dz\,\hat{x} + dx\,dz\,\hat{y} + dx\,dy\,\hat{z}$$

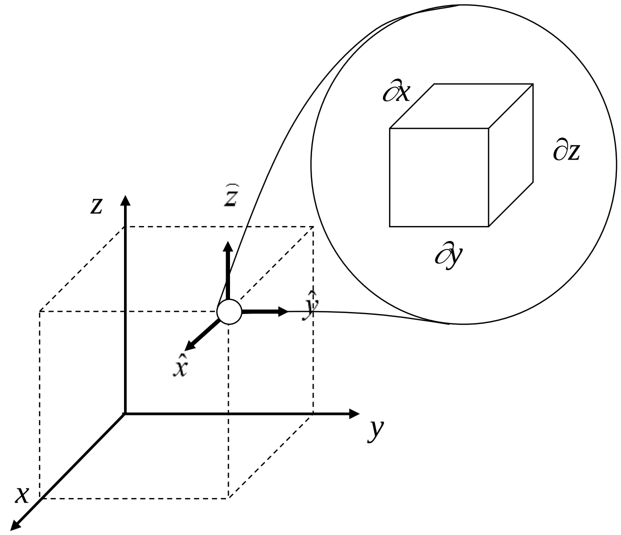
$$dV = dx\,dy\,dz$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$$d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho\,d\phi\,dz\,\hat{\rho} + d\rho\,dz\,\hat{\phi} + \rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{z}$$

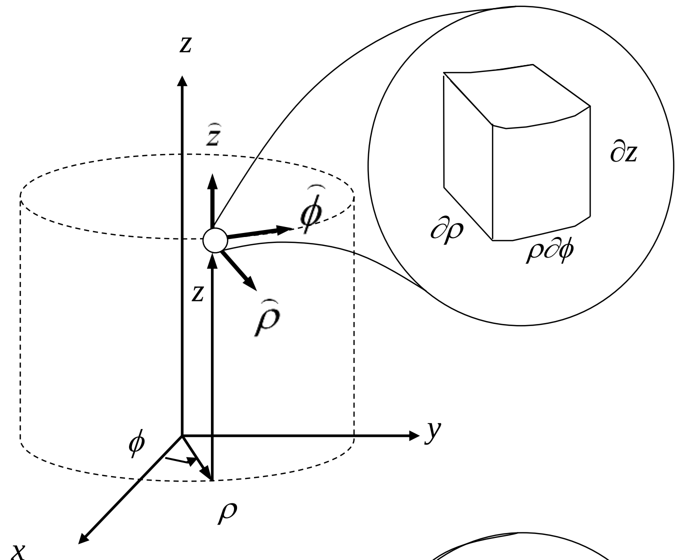
$$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial\rho}\,\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right) - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{z}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{r} + r\sin\theta\,dr\,d\phi\,\hat{\theta} + r\,dr\,d\theta\,\hat{\phi}$$

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta\right) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$