POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

PHS1102 – CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

EXAMEN FINAL - HIVER 2015

DATE : LUNDI 27 AVRIL 2015 HEURE : 13H30-16H

PAGES : 5 QUESTIONS : 5
NOTES : Aucune documentation
Calculatrice non programmable

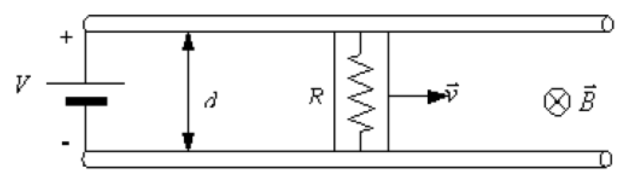
QUESTION 1 : Compréhension, SVP répondre _dans le cahier d'examen_ *(4 points)*

1.1➤ **(1 Pt)** Les lignes de flux magnétique (choisir une des réponses) :

A) sont interrompues à la frontière entre deux régions ayant des perméabilités différentes;
B) sont toujours orientées dans la même direction que la densité de courant;
C) se referment toujours sur elles-mêmes ou se terminent à l'infini;
D) débutent ou se terminent sur des charges magnétiques.

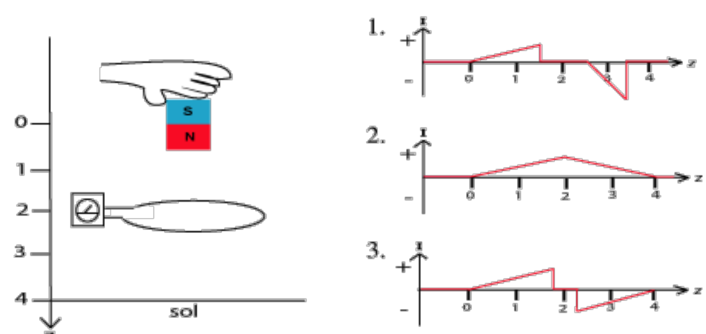
1.2➤ **(1 Pt)** Une tige conductrice de résistance R se situe entre deux rails parallèles parfaitement conducteurs reliés à une source de tension V. Le système est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. La tige glisse sur les rails avec une vitesse v maintenue constante par l'application d'une force externe. Choisir parmi les équations suivantes celle qui représente la puissance dissipée dans le système.

A) $P = \frac{V^2}{R}$.
B) $P = \frac{(V-Bvd)^2}{R}$.
C) $P = \frac{(Bvd)^2}{R}$.
D) $P = 0$.

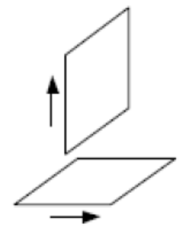


1.3➤ **(1 Pt)** Pour mettre en pratique les notions de l'induction électromagnétique vues en classe, le montage suivant est réalisé : une boucle de fil électrique reliée à un ampèremètre est installée à une certaine hauteur du sol. Comme illustré dans la figure ci-dessous, un barreau aimanté est localisé à un mètre au-dessus de la boucle. Identifier correctement les valeurs du courant lues sur l'ampèremètre lorsque le barreau est relâché.

A) Graphique 1.
B) Graphique 2.
C) Graphique 3.

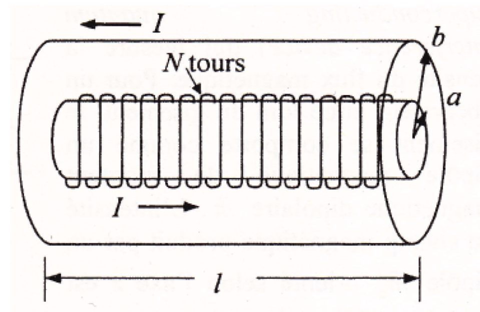


1.4➢ **(1 Pt)** Deux boucles carrées de même surface transportent un courant I dans la direction indiquée sur la figure ci-contre. La boucle du haut est dans le plan x=0 et la boucle du bas dans le plan z=0. Le centre de la boucle du dessus est aligné avec le centre de la boucle du dessous. Si on considère seulement l'influence des forces magnétiques et pour la configuration précise illustrée, comment se comportera la boucle du dessus si elle est libre de se déplacer?



A) Elle s'élèvera.
B) Elle s'abaissera.
C) Elle basculera avec la flèche qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.
D) Elle basculera avec la flèche qui tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

QUESTION 2 : Ligne à délai *(4 points)*

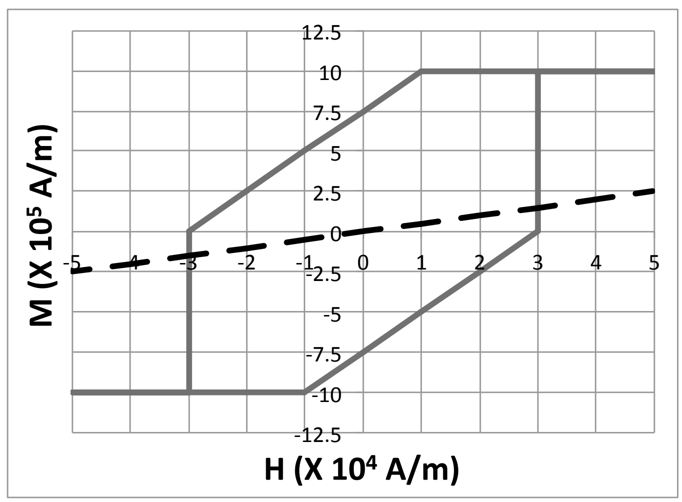


Une ligne à délai est semblable à un câble coaxial sauf que le conducteur central est remplacé par un solénoïde très long (voir figure ci-contre). Ici, nous considérerons une ligne ayant une longueur l. Le solénoïde central comporte N tours de fils enroulés autour d'un manchon de rayon a. La gaine externe possède un rayon $b \ll l$. Un courant I circule dans le solénoïde de gauche à droite. Le même courant circule dans la gaine, mais dans la direction opposée. Ici, on supposera que tous les matériaux utilisés dans la fabrication de cette ligne ont une perméabilité identique à celle du vide.

2.1 ➢ **(2,5 Pts)** Calculer la densité de flux magnétique partout à l'intérieur de la ligne.

2.2 ➢ **(1,5 Pt)** Quel est le flux magnétique total à l'intérieur de la ligne?

QUESTION 3 : Pertes par hystérésis *(4 points)*



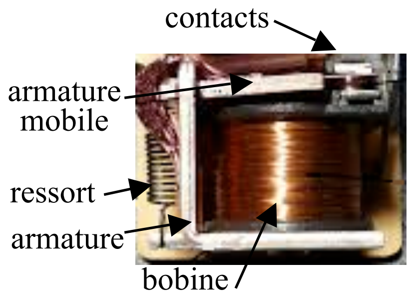
Nous sommes en possession d'un cylindre ferromagnétique de 20 cm de hauteur et de 5 cm de diamètre. La courbe d'hystérésis du cylindre est décrite par la courbe en trait plein dans la figure ci-contre. Le cylindre est placé dans un solénoïde de 5000 T/m dans lequel circule un courant de 8 A et de fréquence f = 120 Hz. (Note : Le cylindre a une conductivité nulle.)

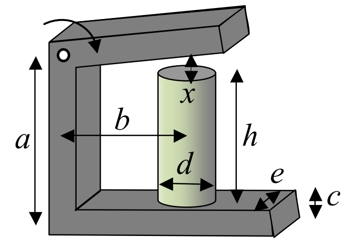
3.1 ➢ **(2,5 Pts)** Trouver la valeur de la puissance dissipée dans le cylindre (en Watts) en supposant que l'aimantation est homogène dans tout le cylindre.

3.2 ➢ **(0,5 Pt)** Le cylindre est maintenant chauffé à une température de 500°C. Étant donné que la température de Curie du cylindre est de 300°C, celui-ci devient paramagnétique. L'aimantation résultante en fonction du champ magnétique est décrite par la courbe en traits hachurés. Quelle est maintenant la puissance dissipée dans le cylindre?

3.3 ➢ **(1 Pt)** Considérer maintenant que le cylindre ayant la courbe d'aimantation en trait plein a une conductivité non nulle. La puissance dissipée dans ce cylindre sera-t-elle identique à celle calculée en 3.1? Expliquer.

Question 4 : **Relai** *(3 points)*



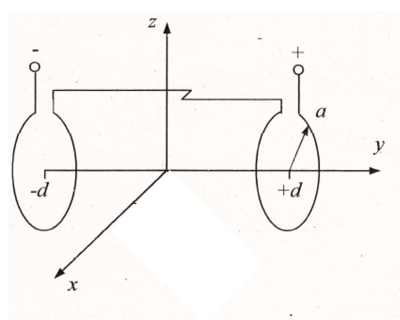


Lorsqu'un courant circule dans la bobine d'un relai, le champ magnétique qui est produit dans l'armature déplace la partie mobile de cette armature, ce qui ferme des contacts électriques. Dans le relai illustré ci-contre, la bobine comporte $N = 2000$ tours et elle est enroulée autour d'un noyau cylindrique ayant un diamètre $d = 10$ mm et une hauteur $h = 20$ mm. L'armature, qui est constituée d'une plaque d'épaisseur $c = 3$ mm, possède une hauteur $a = 25$ mm (distance entre les centres des pièces inférieures et supérieures), une distance b=25 mm entre l'axe du noyau et le centre de la paroi de gauche, ainsi qu'une profondeur $e = 10$ mm. La perméabilité relative du noyau et de l'armature est $\mu_r = 10^4$. En absence de courant, un ressort relève la partie mobile de l'armature, ce qui ouvre les contacts, la distance entre le bas de la partie mobile de l'armature et le haut du noyau est alors x=2 mm.

4.1 ➤ (2,0 Pts) Quelle est la valeur numérique de la réluctance $\mathfrak{R}$ du circuit magnétique lorsque le relai est en position ouverte (x = 2 mm)? (Note : On néglige ici les fuites de flux et les effets de bord.)

4.2 ➤ (1,0 Pt) Quelle est la valeur numérique de l'inductance L de la bobine dans cette même position?

Question 5 : **Réseau d'antennes** *(5 points)*



La figure ci-contre illustre une antenne qui est formée de deux boucles de fil métallique. Les surfaces des boucles sont perpendiculaires à l'axe des y et les centres situés aux points $(0, -d, 0)$ et $(0, d, 0)$ pour les boucles de gauche et de droite respectivement. Les boucles sont reliées en série de façon à ce que le signal à la sortie de l'antenne soit égal à la somme des forces électromotrices induites dans chacune des boucles. Les boucles ont un rayon a qui sera supposé très petit par rapport à la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique, ce qui ne sera pas le cas de d. L'intensité du champ électrique de l'onde électromagnétique que l'on tente de détecter est donnée par

$$\vec{E} = 10^{-3}(-4\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z})\cos(3\times10^9 t - 6x - 8y).$$

5.1 ➤ (1,5 Pt) Quelles sont les valeurs numériques de la direction de propagation $\hat{n}$, de la constante de phase β et de la longueur d'onde λ de cette onde?

5.2 ➤ (1 Pt) Calculer l'intensité du champ magnétique $\vec{H}$.

5.3 ➤ (2 Pts) Donner une expression pour la force électromagnétique totale induite par les deux boucles. La relation $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2\sin(A)\cos(B)$ pourrait être utile.

5.4 ➤ (0,5 Pt) Pour quelles distances d, la force électromagnétique totale induite sera-t-elle maximisée?

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

$$d\vec{l} = \mathrm{d}x\,\hat{x} + \mathrm{d}y\,\hat{y} + \mathrm{d}z\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\hat{x} + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\hat{y} + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\hat{z}$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

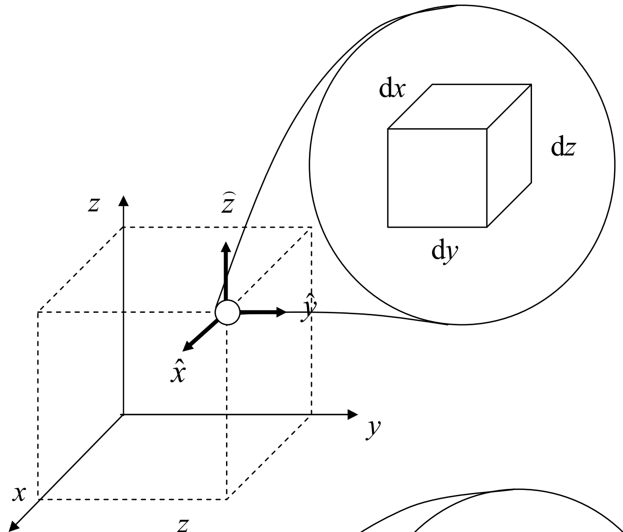
$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2\vec{H} = \nabla^2 H_x\hat{x} + \nabla^2 H_y\hat{y} + \nabla^2 H_z\hat{z}$$



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$$d\vec{l} = \mathrm{d}\rho\,\hat{\rho} + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi} + \mathrm{d}z\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\hat{\rho} + \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\hat{\phi} + \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{z}$$

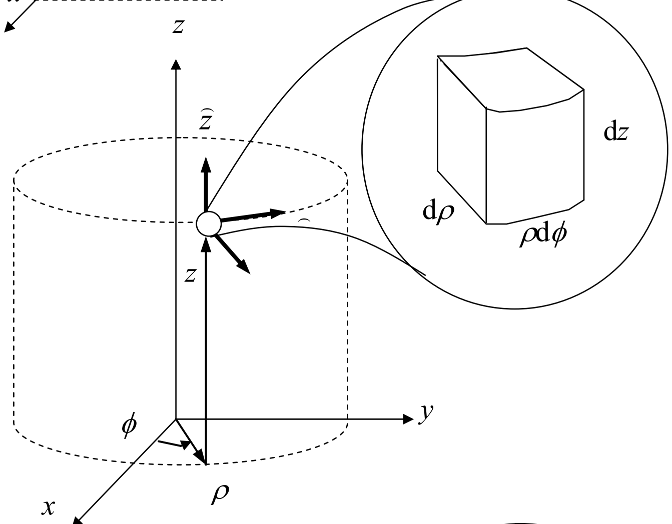
$$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial\rho}\,\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right) - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{z}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$d\vec{l} = \mathrm{d}r\,\hat{r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{r} + r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\theta} + r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\phi}$$

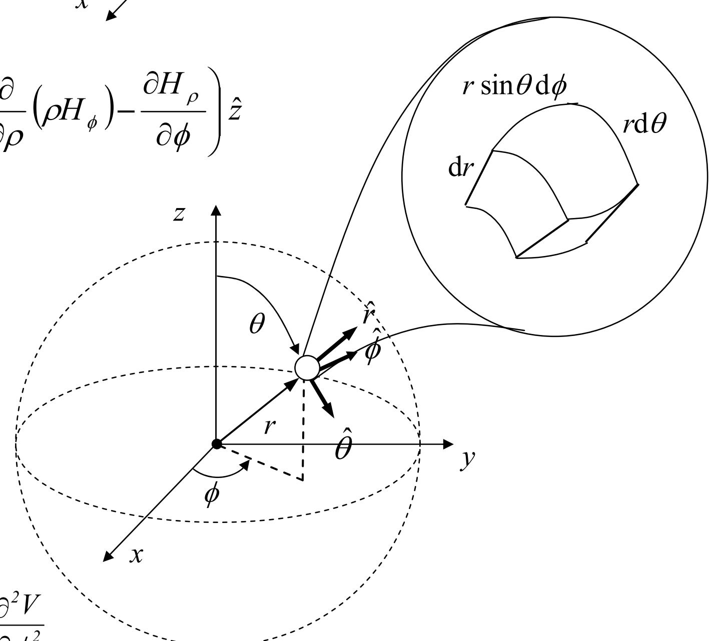
$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta\right) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$

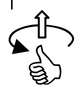


Énergie cinétique : $U = \left(m\, v^2\right)/2$

Force centrifuge : $F = \left(m\, v^2\right)/r$

Loi de Biot-Savart : $\vec{H} = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int \frac{I\, d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$

Règle de la main droite génération :



Loi d'Ampère : $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$

$4^{\text{ième}}$ Maxwell stat. : $\displaystyle\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

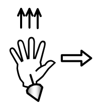
Flux dans une surface : $\Phi = \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Champ solénoïdal : $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Densité de flux, vide : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Équation de Lorentz : $\vec{F} = Q\, \vec{v} \times \vec{B}$

Règle de la main droite force:



Force sur un courant : $\vec{F} = \int_L I\, \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

Moment magnétique dipolaire: $\vec{m} = N I \vec{A}$

Couple sur dipôle : $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$

Génération de f.e.m.: $\in = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

Énergie dipôle magn.: $u = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

Magnétisation : $\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$

Perméabilité : $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Susceptibilité : $\vec{M} = \chi \vec{H}$

Énergie magnétique: $U = \displaystyle\int_v \frac{\mu H^2 \mathrm{d}v}{2}$

Énergie électrique: $U = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_V \varepsilon E^2 dv$

Densité d'énergie dissipée par hystérésis:

$$u_0 = \oint H\, dB$$

Conditions aux frontières :

$B_{1N} = B_{2N}$ $\quad H_{1T} = H_{2T}$

Potentiel magnétique $\vec{H} = -\nabla V_m$

Réluctance : $\Re = V_m / \Phi$

Réluctance d'un barreau : $\Re = l / \mu S$

Loi de Faraday : $\in = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

Inductance mutuelle : $M_{12} = \Phi_{12}\, N_2 / I_1$

Auto-inductance : $L = N\Phi / I = 2U / I^2$

Voltage d'une inductance : $V = L\, \mathrm{d}I/\mathrm{d}t$

$3^{\text{ième}}$équa. Maxwell : $\displaystyle\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Courants de déplacement : $\vec{J}_D = \partial \vec{D} / \partial t$

Loi d'Ampère généralisée :

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Les quatre équations de Maxwell :

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V$ $\quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ $\quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

L'équation d'onde dans le vide:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0\, \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon_0\, \partial^2 \vec{H} / \partial t^2$$

Onde plane uniforme selon x:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = f(x \pm vt)\, \hat{y}$$

Vitesse dans un diélectrique :

$$v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Onde plane, uniforme, harmonique,
de polarisation linéaire et direction $\hat{n}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \beta\left(\hat{n} \cdot \vec{r}\right) + \theta\right)$$

Orthogonalité des champs :

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n} \times \vec{E}\right) \quad \text{et} \quad \vec{E} = Z\left(\vec{H} \times \hat{n}\right)$$

Fréquence angulaire : $\omega = 2\pi f$

Constante de phase : $\beta = 2\pi / \lambda$

Vitesse : $v = \omega / \beta$

Longueur d'onde : $\lambda = v / f$

Impédance du milieu : $Z = \sqrt{\mu / \varepsilon}$

Vecteur de Poynting : $\vec{\wp} = \vec{E} \times \vec{H}$

$\wp$ moy. onde polar. lin. $< \wp_0 > = \dfrac{E_0^2}{2Z} = \dfrac{Z H_0^2}{2}$

Puissance sur une surface: $P = \displaystyle\int_S \vec{\wp} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Dans le vide :

Permittivité : $8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m

Perméabilité : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

Impédance intrinsèque : $Z_0 = 377\ \Omega$

Vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8$ m