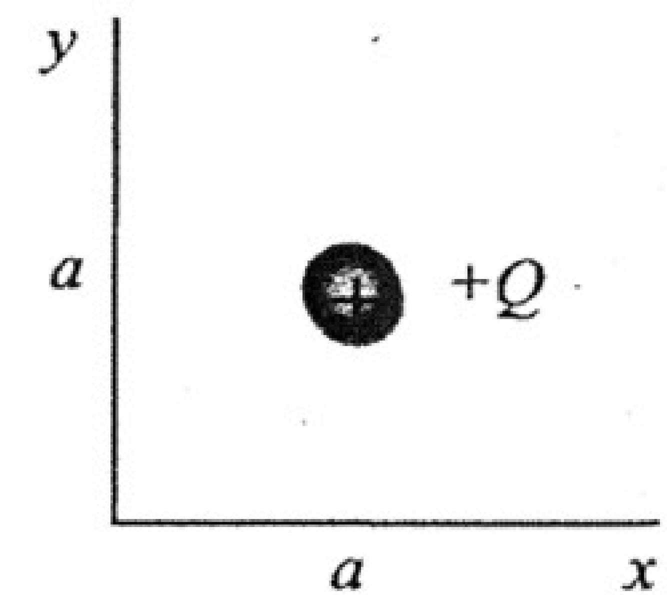
PHS1102 – Champs électromagnétiques

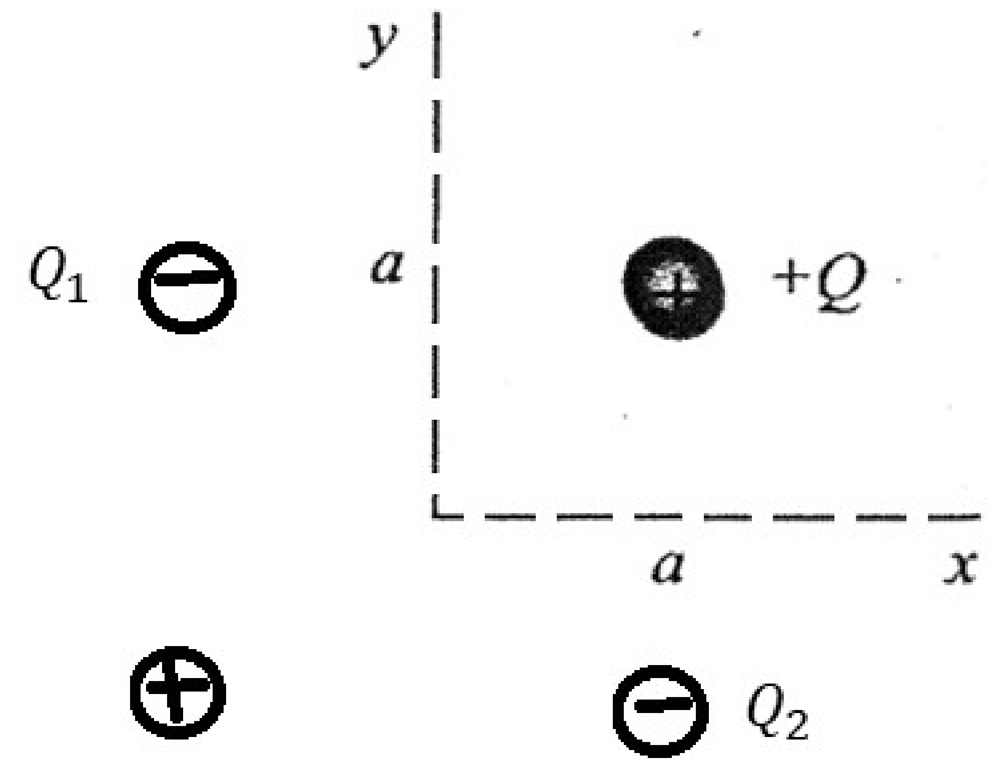
Séance 5	2 heures	(5.7.1, 5.7.2, 5.7.9, 6.8.1abc, 6.8.2ab)

5.7.1 Charge dans un coin

Une charge $+Q$ est située à une hauteur a au-dessus d'un grand plan conducteur horizontal et à une distance a d'un autre grand plan conducteur vertical qui est connecté au premier plan. Trouver les charges images et leur position, justifier votre choix.



5.7.1 Charge dans un coin



1) Une charge $Q_1 = -Q$ est requise en $(-a, a, 0)$ pour que le potentiel sur un plan infini localisé à $x = 0$ dû à la charge Q en $(a, a, 0)$ soit nul.

2) Une charge $Q_2 = -Q$ est requise en $(a, -a, 0)$ pour que le potentiel sur un plan infini localisé à $y = 0$ dû à la charge Q en $(a, a, 0)$ soit nul.

3) Une charge Q est requise en $(-a, -a, 0)$ pour contrecarrer l'effet des charges Q_1 et Q_2 sur les plans $x = 0$ et $y = 0$ respectivement.

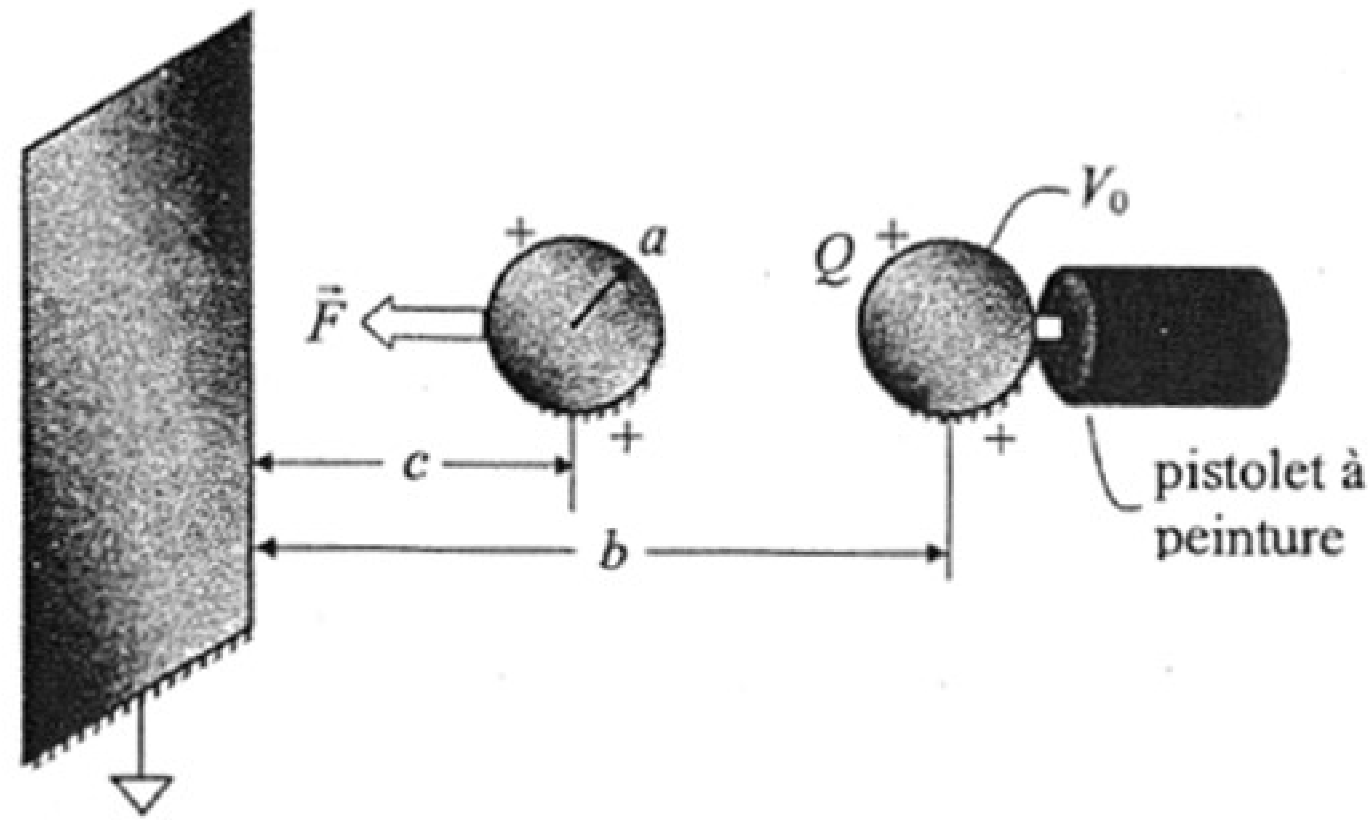
PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 5	2 heures	(5.7.1, 5.7.2, 5.7.9, 6.8.1abc, 6.8.2ab)

5.7.2 Peinture électrostatique

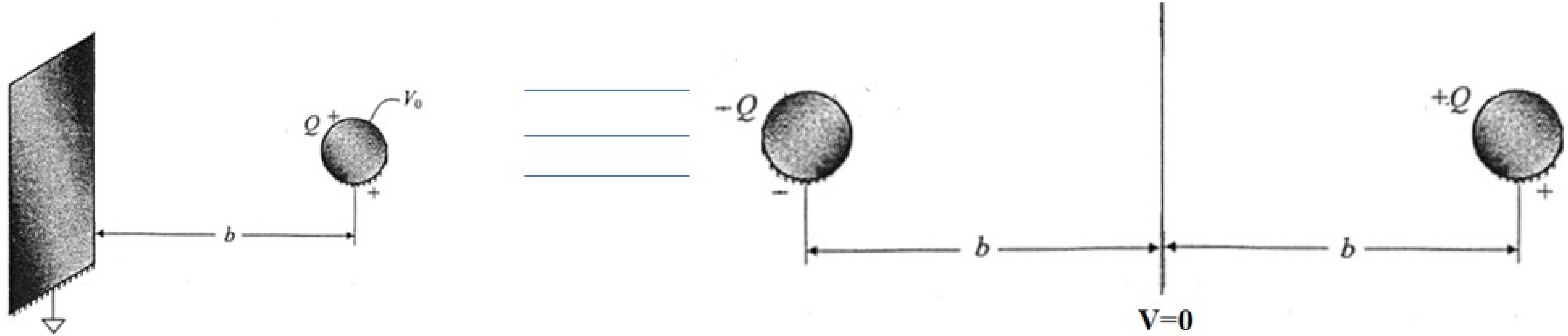
En donnant une charge électrique aux gouttelettes de peinture qui sont projetées par un pistolet, elles peuvent être attirées par l'objet à peinturer, ce qui diminue les pertes de peinture. Comme elles se repoussent entre elles, on obtient une couche de peinture plus uniforme. Ici, l'objet à peinturer est un plan conducteur de grande dimension qui est mis à la terre ($V = 0$). Une gouttelette de peinture de rayon a quitte le pistolet situé à une distance b de l'objet avec un potentiel $+V_0$. Si $a = 0{,}1$ mm, $b = 1$ m et $V_0 = 550$V :

a) Quelle est la charge Q qui est distribuée sur la surface de la gouttelette? (Considérer que la peinture est conductrice et que la présence du pistolet à peinture n'a pas d'influence dans le calcul du champ électrique.)

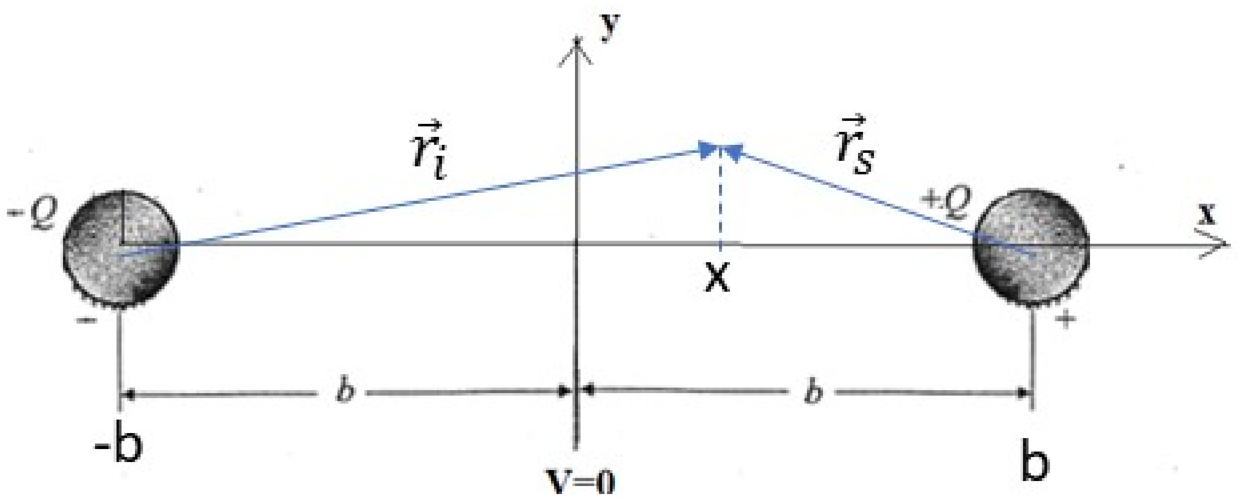


b) Lorsque cette même gouttelette est parvenue à une distance $c = 10$ cm du plan conducteur, quelle est la force électrostatique $\vec{F}$ qui l'attire vers la plan?

a)



$$\phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = Q_{in} \longrightarrow \phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = D\oint dS = D\ 4\pi r^2 \Longrightarrow D = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \Longrightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2}\ \hat{r}$$



$$\begin{cases} \vec{D}_s = \dfrac{+Q}{4\pi r_s^2}\ \hat{r}_s \\ \vec{D}_i = \dfrac{-Q}{4\pi r_i^2}\ \hat{r}_i \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{D}(x, y=0) = \vec{D}_s(x, y=0) + \vec{D}_i(x, y=0) \\ r_i = x + b \quad ; \hat{r}_i = \hat{x} \qquad et \qquad r_s = b - x \quad ; \hat{r}_i = -\hat{x} \end{cases}$$

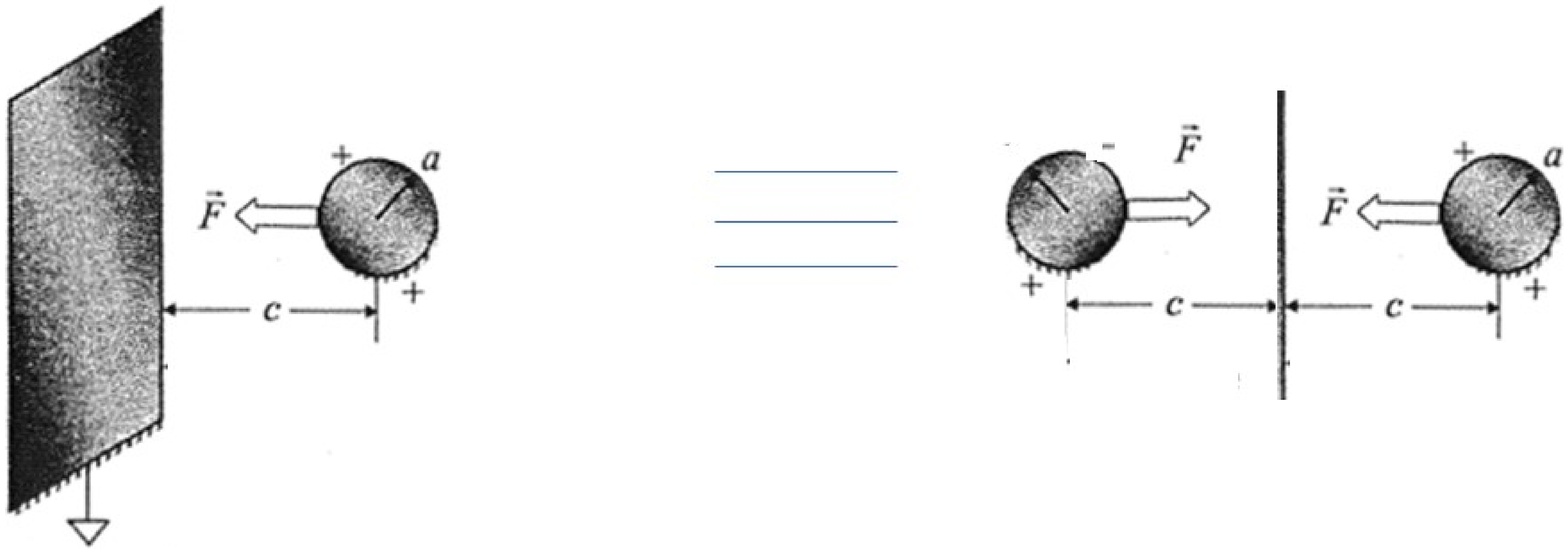
$$\vec{D}(x) = \frac{-Q}{4\pi}\left[\frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(x+b)^2}\right]\hat{x} \quad \rightarrow \vec{E}(x) = \frac{\vec{D}(x)}{\varepsilon_0} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(x+b)^2}\right]\hat{x}$$

$$V_{(b-a)0} = V_{(b-a)} - V_{x=0} = V_0 - 0 = -\int_0^{b-a} \vec{\boldsymbol{E}}.d\vec{\boldsymbol{l}} = -\int_0^{b-a} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(x+b)^2}\right]\hat{x}.dx\ \hat{\boldsymbol{x}}$$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{b-a}\left[\frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(x+b)^2}\right]dx = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2b-a}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{Q} = \frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{\left[\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2b-a}\right]} = \boldsymbol{6{,}12 \times 10^{-12} C}$$

Akila H.

b)



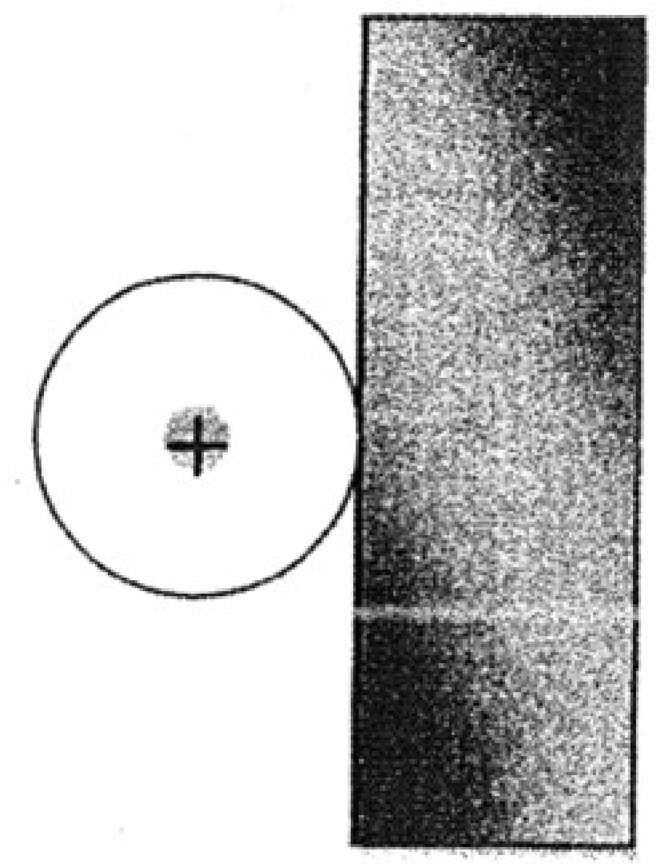
$$F = F_e = k\frac{QQ}{r^2} = k\frac{QQ}{(c+c)^2}$$

$$\vec{F} = -k\frac{Q^2}{4\,C^2}\hat{x}$$

Séance 5	2 heures	(5.7.1, 5.7.2, 5.7.9, 6.8.1abc, 6.8.2ab)

5.7.9 Adhésion de poussière à une surface conductrice

Une particule de poussière chargée adhère à une surface conductrice à cause de la force électrostatique. On modélise la particule de poussière comme étant une sphère diélectrique de rayon $a = 25$ µm et de permittivité relative égale à 1, contenant une charge ponctuelle $+Q$ en son centre.



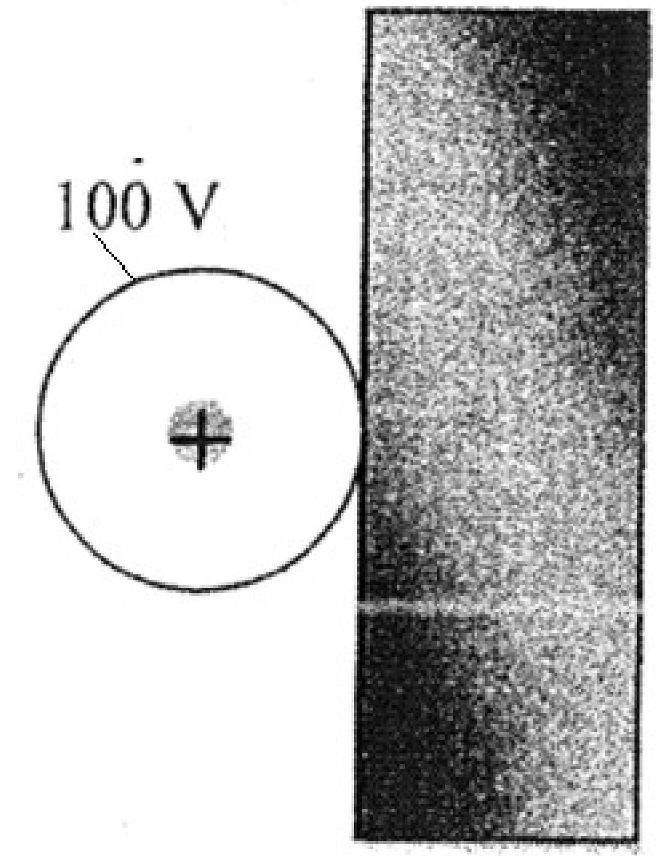
a) Sachant que le potentiel en surface de la sphère prise isolément (c'est-à-dire en l'absence de plan conducteur) est de 100 V, calculez la charge $+Q$ au centre de la sphère diélectrique.

b) Quelle est la force d'attraction électrostatique qui agit sur la sphère diélectrique lorsqu'elle est placée en contact avec une grande surface plane conductrice ?

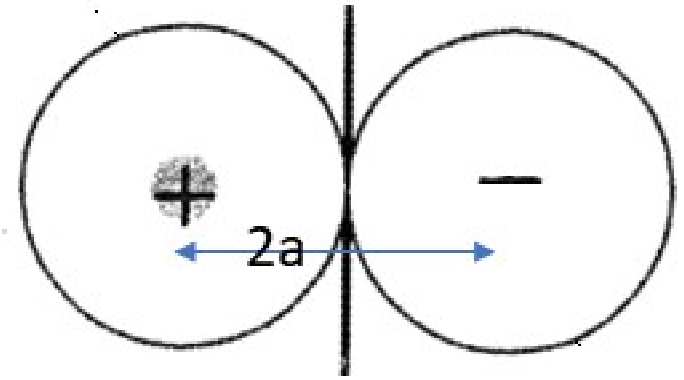
c) Calculez le travail d'extraction, c'est-à-dire le travail nécessaire pour déplacer la sphère diélectrique de la surface conductrice jusqu'à l'infini.

a) la charge $+Q$ au centre de la sphère diélectrique.

$$V(r)=\frac{kQ}{r}\Longrightarrow V(a)=\frac{kQ}{a}\Longrightarrow Q=\frac{aV(a)}{k}=2{,}78\times10^{-13}C$$

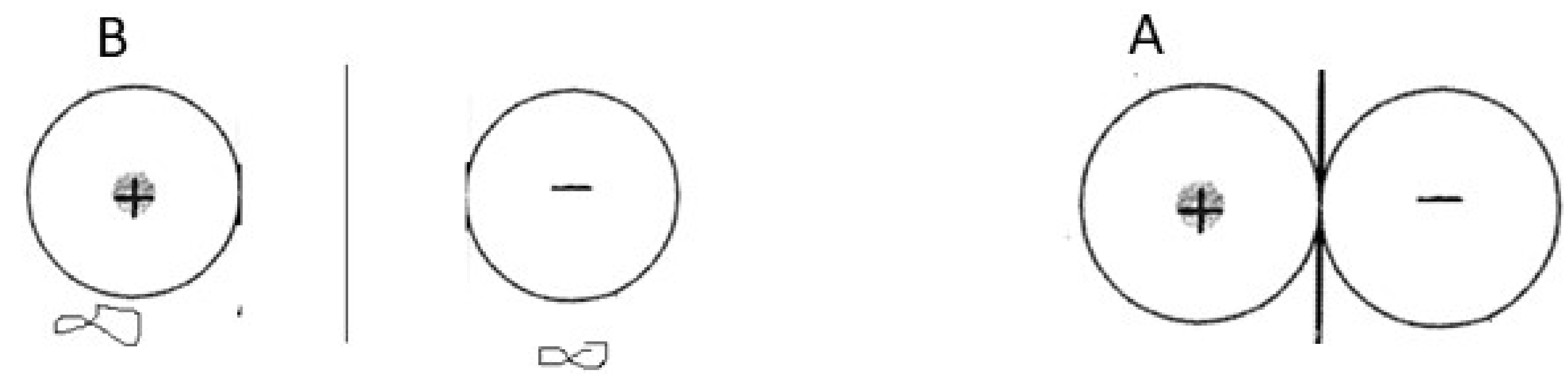


b) force d'attraction électrostatique



$$\boldsymbol{F_e}=\boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{Q^2}}{\boldsymbol{r^2}}=\boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{Q^2}}{\boldsymbol{(2a)^2}}=2{,}78\times10^{-7}N$$

c) le travail



$$W=\Delta U+\Delta K=U_{B(infini)}-U_A=0-U_A=-U_A$$

$$W=-U_A=\frac{kQ(-Q)}{a}=\frac{kQ^2}{a}=6{,}94\times10^{-12}J$$

Séance 5	2 heures	(5.7.1, 5.7.2, 5.7.9, 6.8.1abc, 6.8.2ab)

L'opérateur divergence est un outil d'analyse vectorielle qui mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace. En un point, si la divergence est nulle, alors la densité ne varie pas et si elle est positive en ce point, alors il y a diffusion.

6.8.1 Divergence

Calculer la divergence de la densité de flux décrite par chacune des équations suivantes :

a) $\vec{D}(x,y,z) = x\,\hat{x} - y\,\hat{y} + (x^2+y^2)\,\hat{z}$

b) $\vec{D}(\rho,\phi,z) = \dfrac{z\ln(1+\rho^2)}{\rho(1+z^2)^2}\,\hat{\rho} + \dfrac{1}{(1+\rho^2)(1+z^2)}\,\hat{z}$

c) $\vec{D}(r,\theta,\phi) = \dfrac{\pi}{r^2}\,\hat{r} + \dfrac{r}{\sin\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,\hat{\phi}$

d) $\vec{D}(x,y,z) = e^{z/2}\,\hat{x} + \sin\dfrac{\pi x}{2}\sin\dfrac{\pi z}{4}\,\hat{y} + e^{x/2}\,\hat{z}$

divergence de la densité de flux

a) $\vec{D}(x,y,z) = x\,\hat{x} - y\,\hat{y} + (x^2 + y^2)\,\hat{z}$

$$\nabla.\vec{D}(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right).\left(D_x\hat{x} + D_y\hat{y} + D_z\hat{z}\right) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial z} = 0$$

b) $\vec{D}(\rho,\phi,z) = \dfrac{z\ln(1+\rho^2)}{\rho(1+z^2)^2}\,\hat{\rho} + \dfrac{1}{(1+\rho^2)(1+z^2)}\,\hat{z}$

$$\nabla.\vec{D}(\rho,\phi,z) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(D_\phi)}{\partial\phi} + \frac{\partial(D_z)}{\partial z}\right) = \left(\frac{z}{\rho}\frac{2\rho}{(1+z^2)^2(1+\rho^2)} + \frac{1}{\rho}0 + \frac{1}{(1+\rho^2)}\frac{-2z}{(1+z^2)^2}\right) = 0$$

c) $\vec{D}(r,\theta,\phi) = \dfrac{\pi}{r^2}\,\hat{r} + \dfrac{r}{\sin\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,\hat{\phi}$

$$\nabla.\vec{D}(r,\theta,\phi) = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial(D_\theta\,sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial(D_\phi)}{\partial\phi}\right) = 0$$

PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 5	2 heures	(5.7.1, 5.7.2, 5.7.9, 6.8.1abc, 6.8.2ab)

Les équations de Maxwell

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(dans le vide sans charges ni courant)

$$div\vec{E} = 0 \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

6.8.2 Potentiel dans le vide

Déterminer si le potentiel dans le vide peut être décrit par chacune des équations suivantes :

a) $V(x, y) = 1 + 3x^2 + 3y^2 + xy$

b) $V(x, y) = (1 + x)(1 + y)$

c) $V(x, y) = (\sinh(x) + \cosh(x))(\sin(y) + \cos(y))$

d) $V(x, y) = (\sinh(x) + \cos(x))(\sin(y) + \cosh(y))$

Dans le vide: $\rho = 0 \quad et \quad donc \;\; \nabla.\vec{D} = O \Rightarrow \nabla.(-\nabla V) = \boldsymbol{\nabla^2 V = O}$

a) $V(x, y) = 1 + 3x^2 + 3y^2 + xy$

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x + y) + \frac{\partial}{\partial y}(6y + x) = 6 + 6 = 12 \neq 0 \quad (impossible)$$

b) $V(x, y) = (1 + x)(1 + y)$

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + y) + \frac{\partial}{\partial y}(1 + x) = 0 \quad (possible)$$