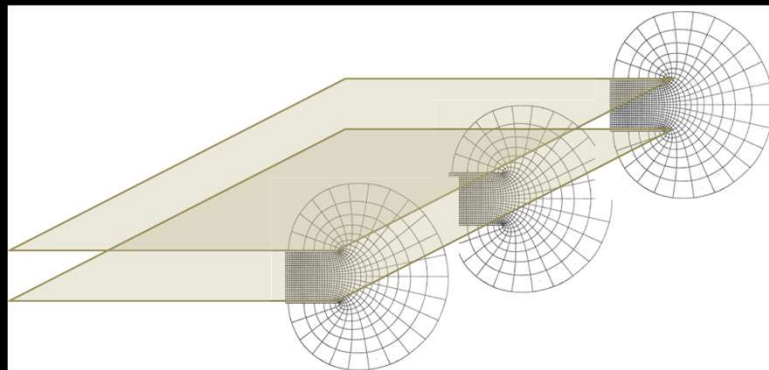
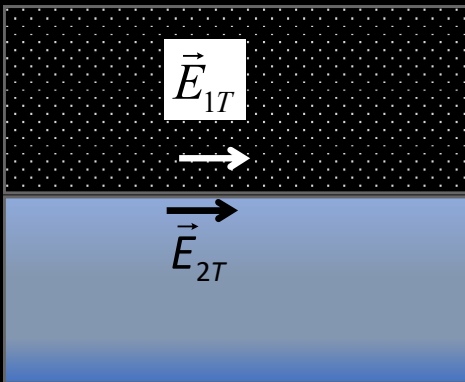
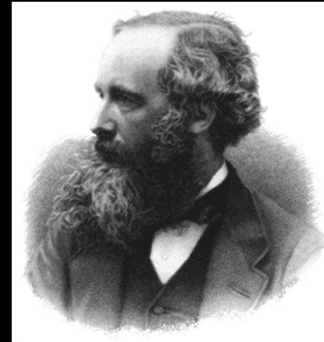


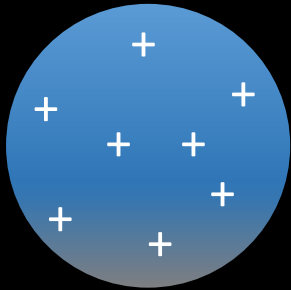
Cours #5 : Interfaces

- Équilibre électrostatique
- Interface Conducteur – Diélectrique
- Interface Diélectrique – Diélectrique
- Cartographie des champs
- Théorie des images

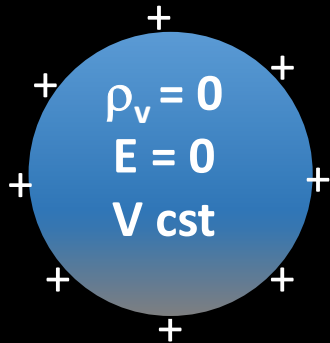


Conditions statiques dans un conducteur

+Q répartie en surface

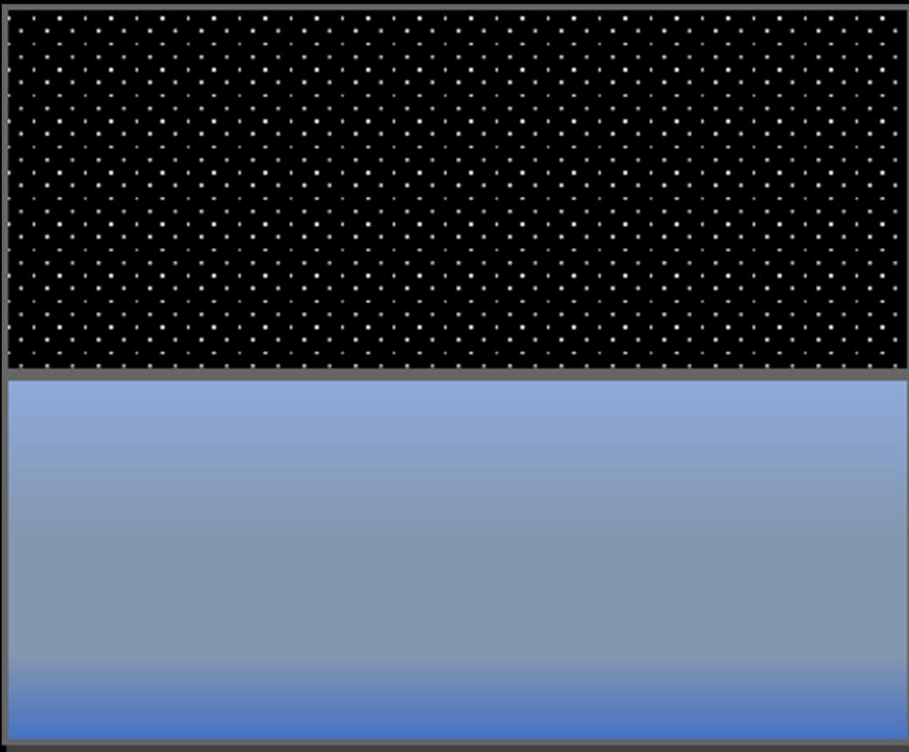


Rapidement!

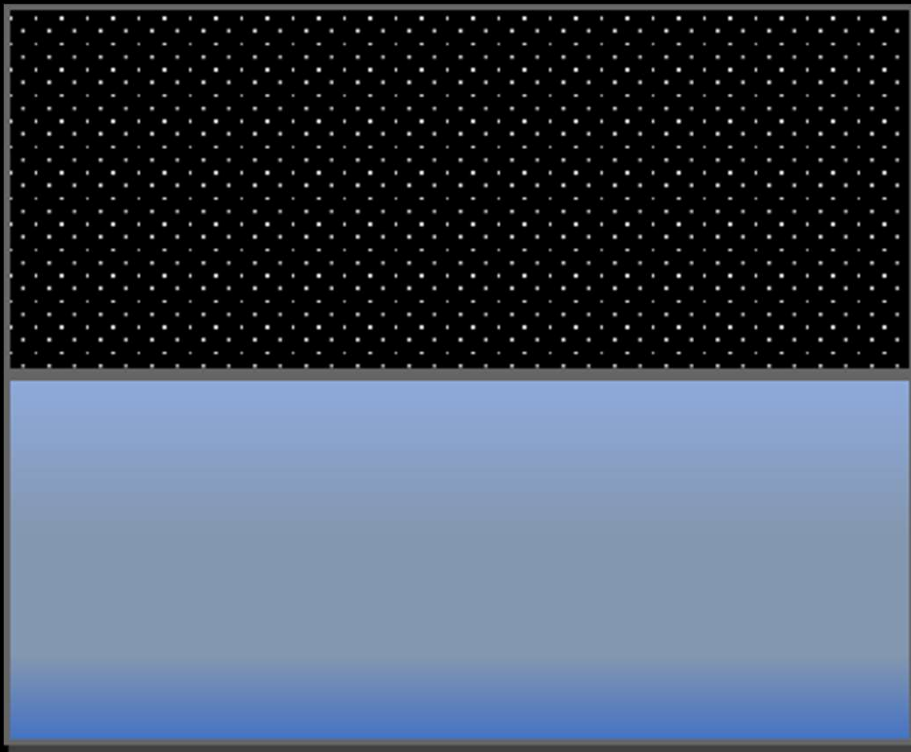


1. Densité de charge nette nulle, $\rho_v = 0$
charges excédentaires en surface pour minimiser l'énergie
2. Intensité du champ électrique nulle
Comme $J = 0$ cas statique, $E = J / \sigma = 0$
3. Potentiel uniforme
Puisque $E = -\nabla V = 0$, V ne varie pas en fonction de r

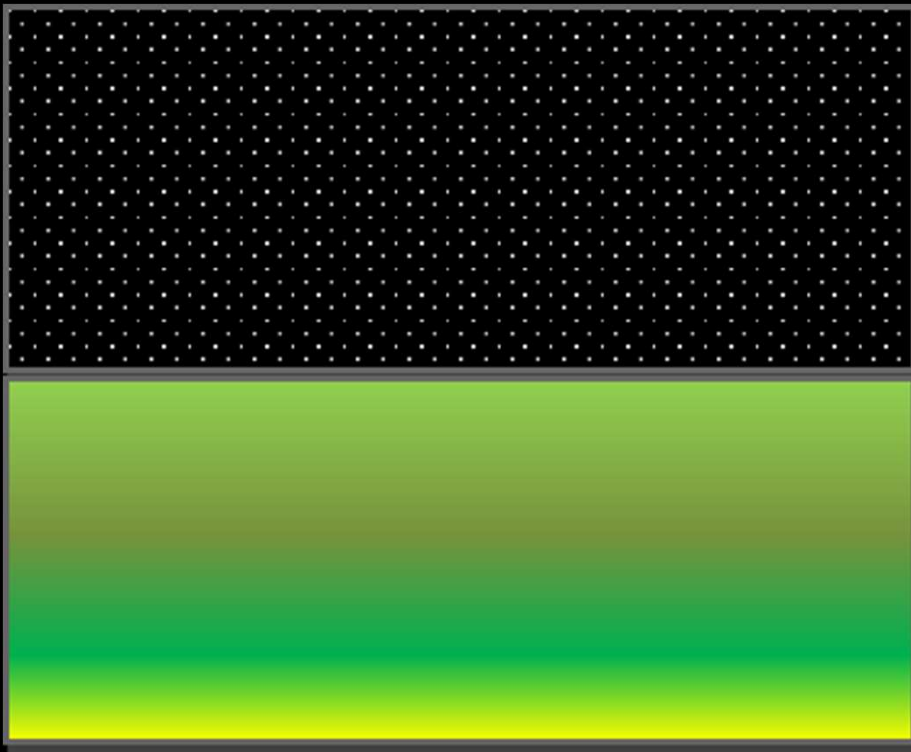
Interface Diélectrique- Conducteur



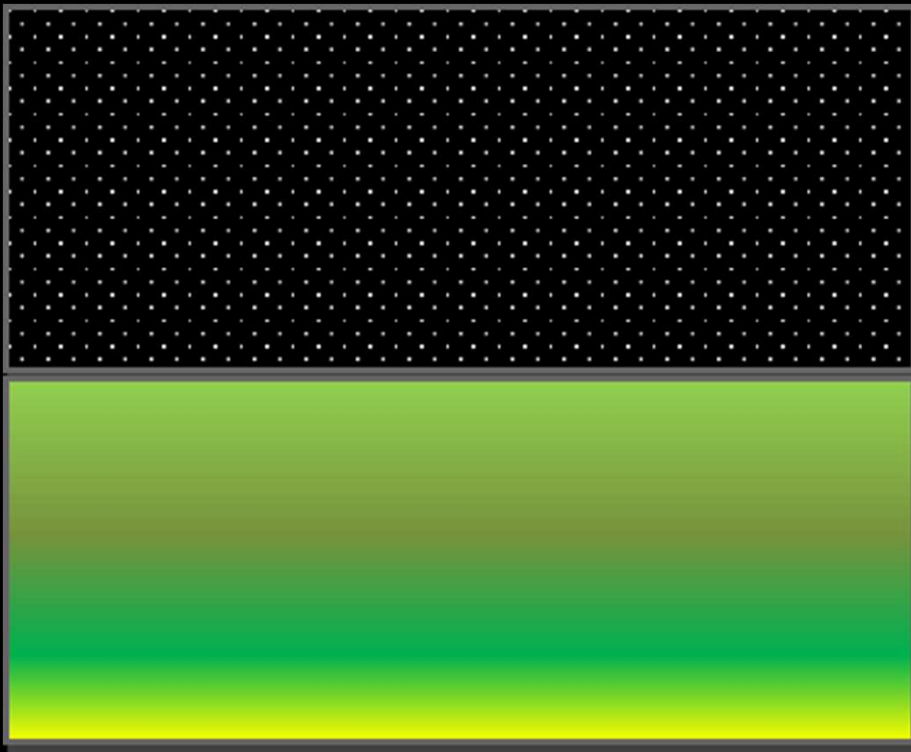
Interface Diélectrique- Conducteur



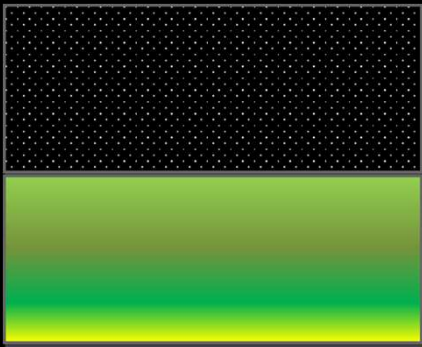
Interface Diélectrique- Diélectrique



Interface Diélectrique- Diélectrique

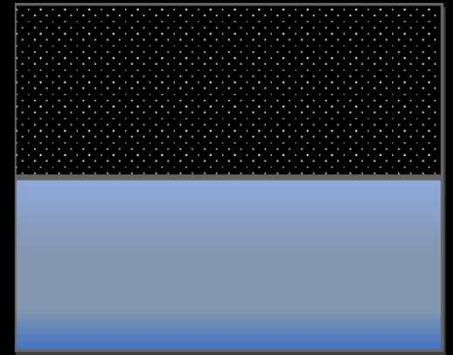


Interfaces: un résumé



$$E_{1T} = E_{2T}$$

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$

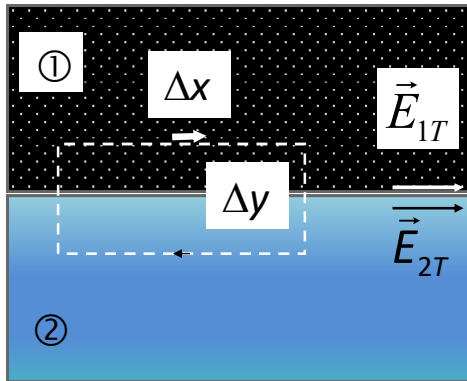


Interfaces

diélectrique-conducteur

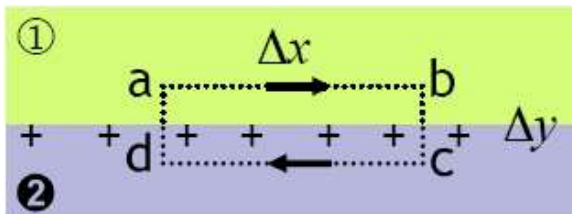
Frontière entre diélectrique (milieu 1) conducteur (milieu 2),
composante tangentielle du champ (E_{1T}) nulle dans le
diélectrique :

$$E_{1T} = 0$$



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1T} \Delta x + 0 + 0 + 0 = 0$$



2ie et 4ie termes nuls car Δy tend vers zéro,
3ie terme nul: E nul dans un conducteur, et il
reste : $E_{1T} = 0$

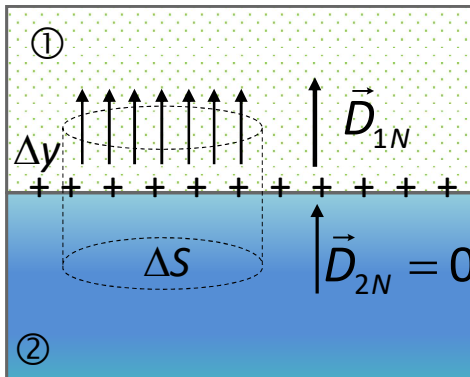
E perpendiculaire aux surfaces conductrices

Interfaces

diélectrique-conducteur

Frontière entre diélectrique (milieu 1) et conducteur (milieu 2),
composante normale (conducteur vers diélectrique) de la densité
de flux (D_{1N}) égale la densité de charge surfacique:

$$D_{1N} = \rho_x$$



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Haut}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Côté}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Bas}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libres}}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Delta S D_{1N} + 0 + 0 = \Delta Q$$

2ie terme nul car Δy tend vers zéro

3ie terme nul parce que E nul dans le milieu conducteur:

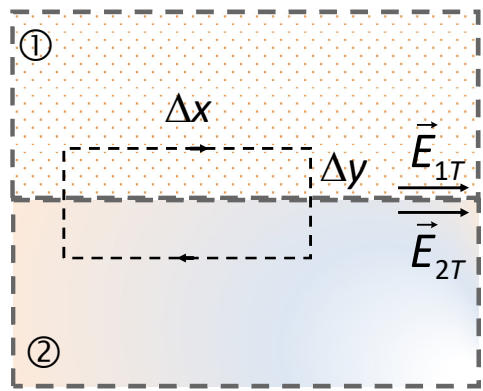
$$D_{1N} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s$$

Interfaces

diélectrique-diélectrique

Frontière entre deux diélectriques (milieux 1 et 2),
composantes tangentielles des champs électriques dans les
deux milieux sont égales :

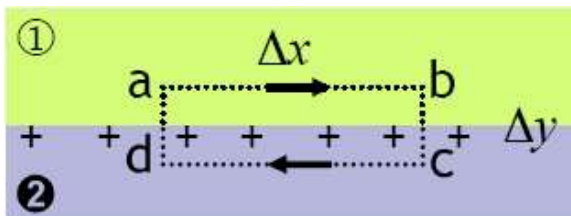
$$\boxed{E_{1T} = E_{2T}}$$



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1T} \Delta x + 0 - E_{2T} \Delta x + 0 = 0$$

2ie et 4ie termes nuls car Δy tend vers zéro,
3ie terme négatif car intégration dans sens
opposé au champ électrique

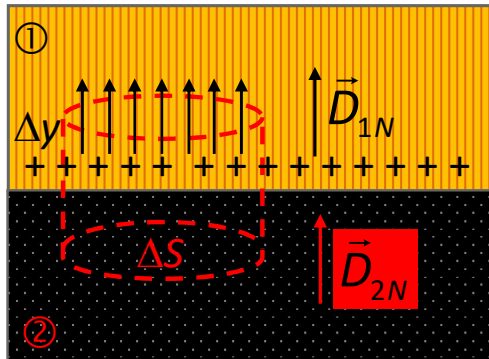


Interfaces

diélectrique-diélectrique

Frontière entre deux diélectriques 1 et 2 où on retrouve une densité de charge surfacique ρ_s (charges libres), différence entre composantes normales (de 1 à 2) des densités de flux égale la densité de charge surfacique :

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Delta S D_{1N} + 0 - \Delta S D_{2N} = \Delta Q$$

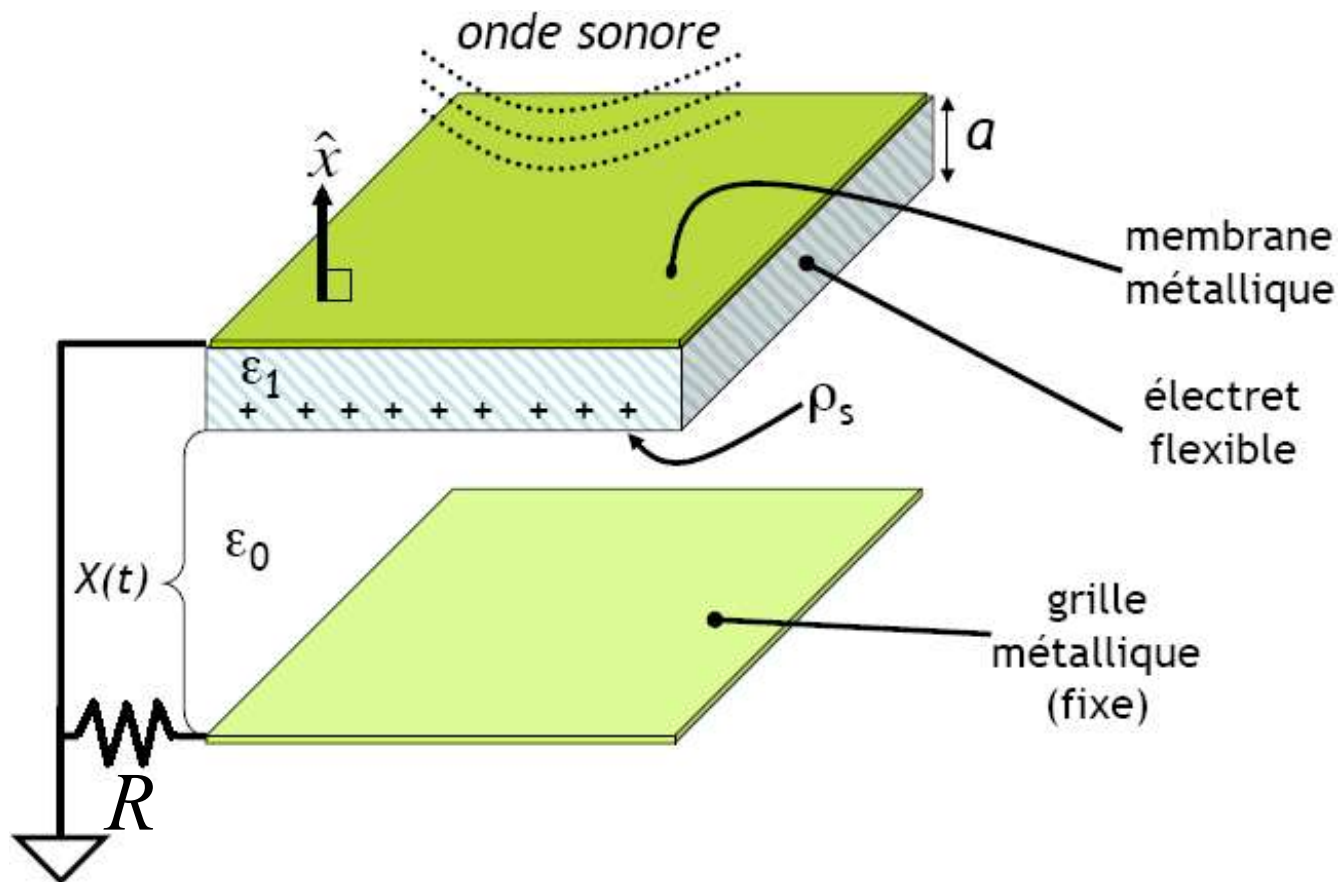
1^{er} terme: surface du haut,

2^{ie} terme: côtés courbés, nul, $\Delta y \rightarrow 0$,

3^{ie} terme négatif car normale à la surface pointe vers le bas.

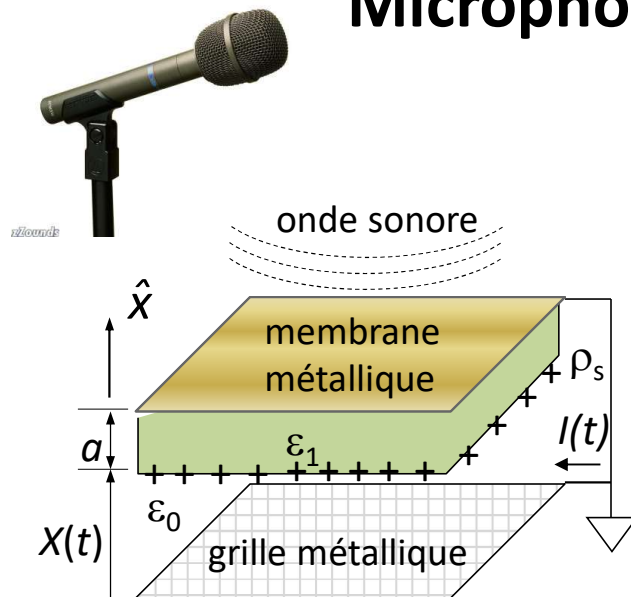
$$D_{1N} - D_{2N} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s$$

Microphone électrostatique : exemple

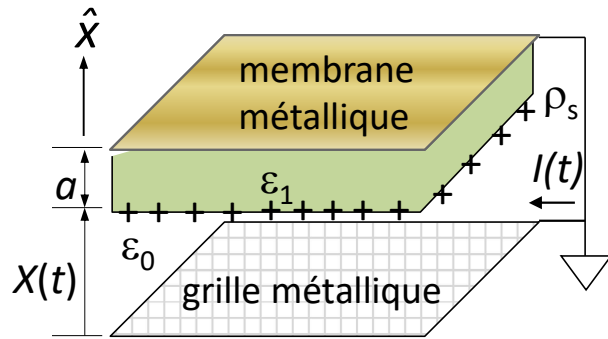


- Quels sont les champs électriques (supposés uniformes) dans l'air et l'électret.
- Quel est le courant dans la résistance si $X(t) = X_0 + b \sin(\omega t)$

Microphone électrostatique

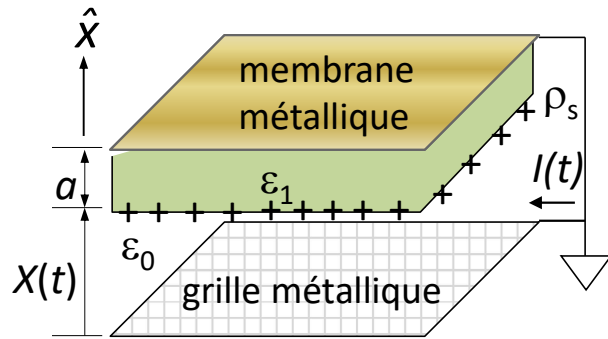


Microphone électrostatique



- a) Quels sont les champs électriques (supposés uniformes) dans l'air et l'électret.

Microphone électrostatique



b) Quel est le courant dans la résistance si $X(t) = X_0 + b \sin(\omega t)$

Méthode graphique

Proposée par James Clerk Maxwell

In certain classes of cases, such as those relating to spheres, there are known mathematical methods by which we may proceed. In other cases we cannot afford to despise the humbler method of actually drawing tentative figures on paper.

The latter method I think may be of some use, even in cases in which the exact solution has been obtained, for I find that an eye-knowledge of the forms of the equipotential surfaces leads to a right selection of mathematical method of solution.



Méthode graphique: avantages

1. Permet de guider les techniques analytiques, comme les techniques pour résoudre l'équation de Laplace (chapitre 6)
2. Très rapide: utile pour le design
3. Intuitive: accroît la compréhension
4. Permet de valider les résultats analytiques ou numériques
5. Applicable aux milieux diélectriques et conducteurs
6. Permet de calculer: capacité, résistance, potentiel
7. Relativement précise (5%)

Cartographie des champs

Quel est la capacité d'un cable coaxial écrasé sur un côté?

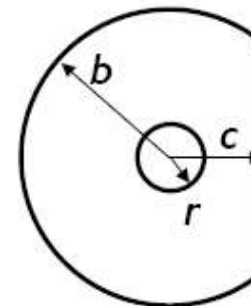
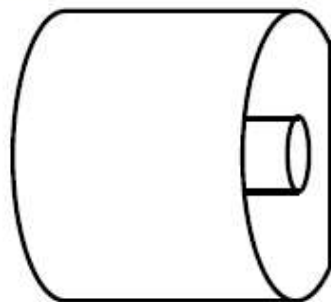
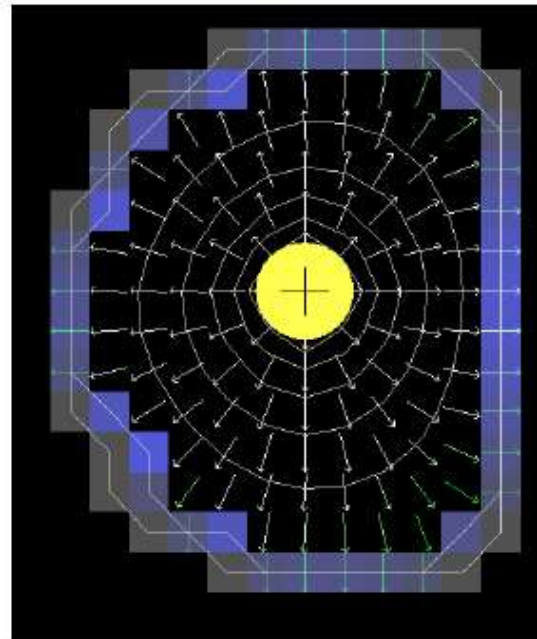
Difficile de procéder par la méthode standard (peu de symétrie, charges distribuées non uniformément, lignes de potentiel de forme quelconque)

Mais y aurait-il moyen d'estimer C rapidement en fonction de C_0 , la capacité d'un câble coaxial normal?

Ce qu'on sait:

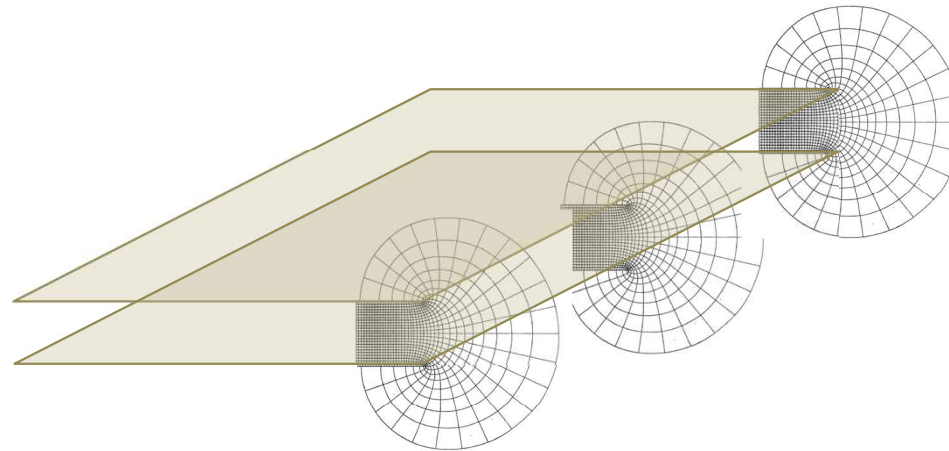
- C plus grand que C_0 (charges rapprochées)
- C proche de C_0 (p-ê 25% d'erreur?)

Pour une meilleure estimation, on doit cartographier notre champ



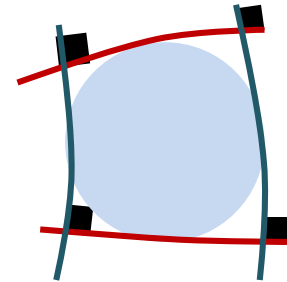
Méthode graphique : conditions

1. Les charges libres doivent être réparties seulement sur la surface des conducteurs et non à l'intérieur du diélectrique où on trace le champ, soit : $\rho_v = 0$
2. Pour le calcul de la capacité ou de la résistance, la distribution de potentiel ne doit dépendre que de deux variables, c'est-à-dire : le champ dans le plan de l'esquisse sera le même à différentes profondeurs.



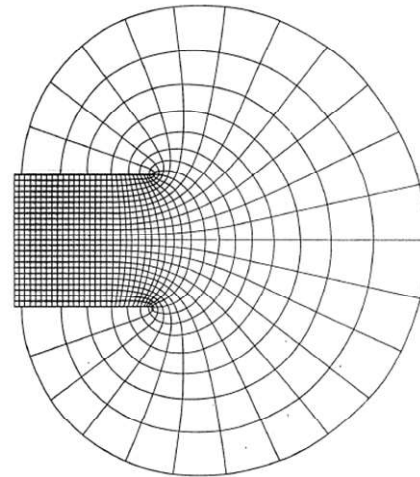
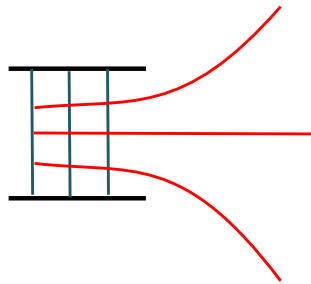
Méthode graphique: règles

1. Dessiner des cellules curvilinéaires (4 côtés approximativement égaux) dont deux côtés représentent des **lignes équipotentielles** et 2 côtés des **lignes de flux**
2. **Ligne équipotentielle** \perp **ligne de flux**
3. Les **lignes de flux** débutent et finissent sur des **surfaces conductrices**
4. Les surfaces conductrices sont **équipotentielles**

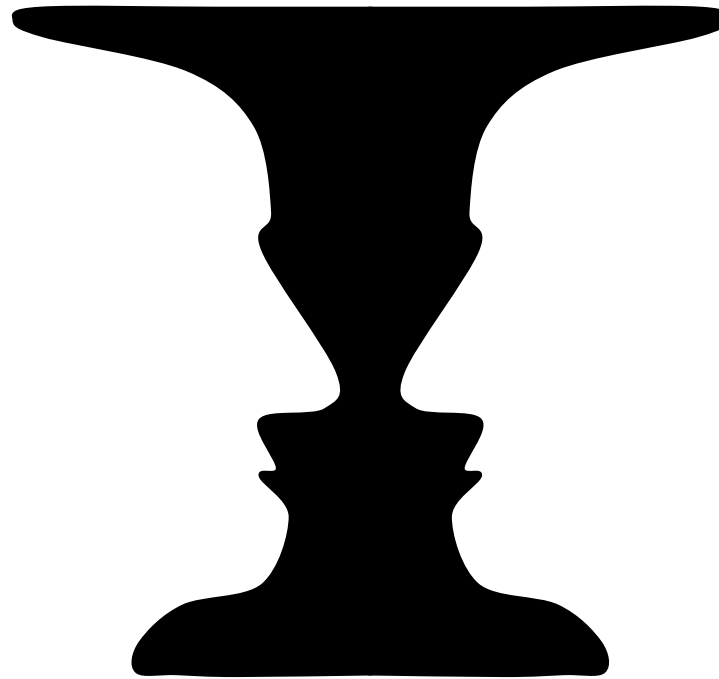


Méthode graphique: suggestions pratiques

- Faire les esquisses à main levée et ne pas utiliser de règle
- Utiliser un crayon à mine et une gomme à effacer
- Commencer par un brouillon où les lignes de flux vont d'une surface conductrice à l'autre

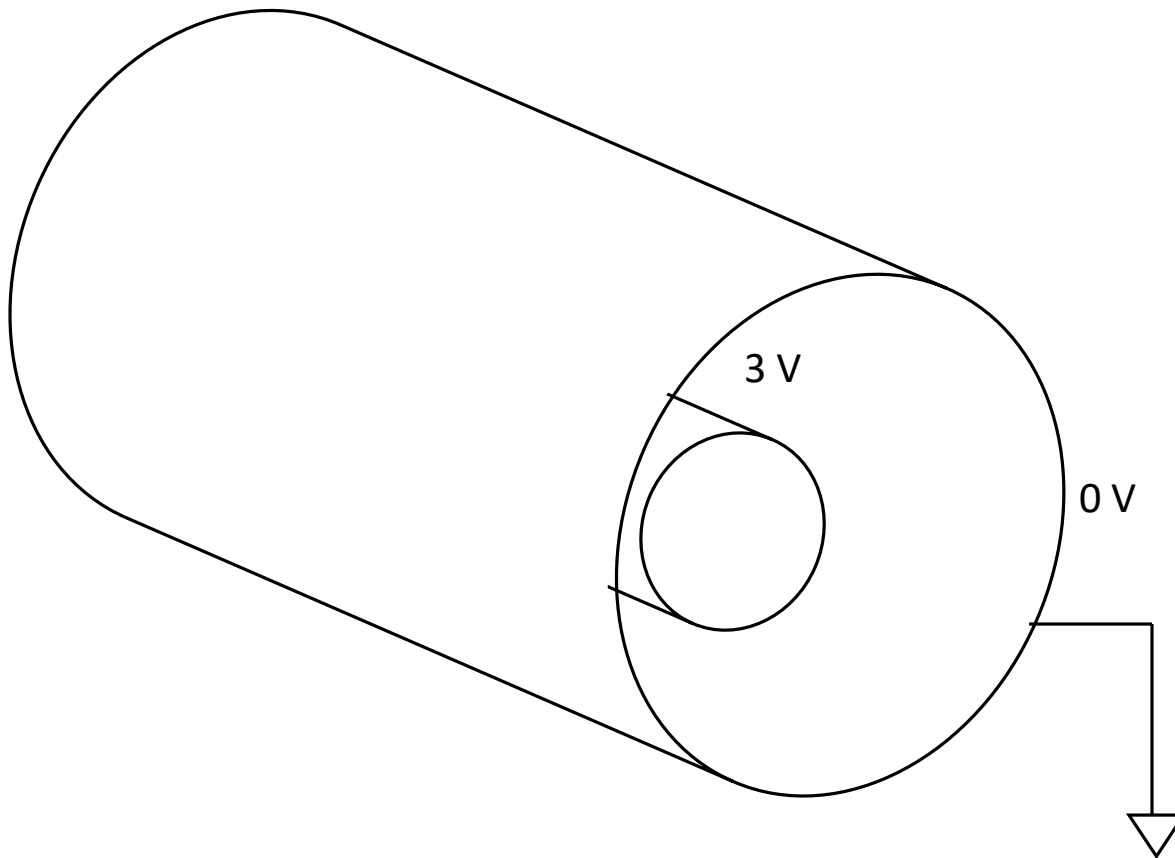


Méthode graphique: piège visuel



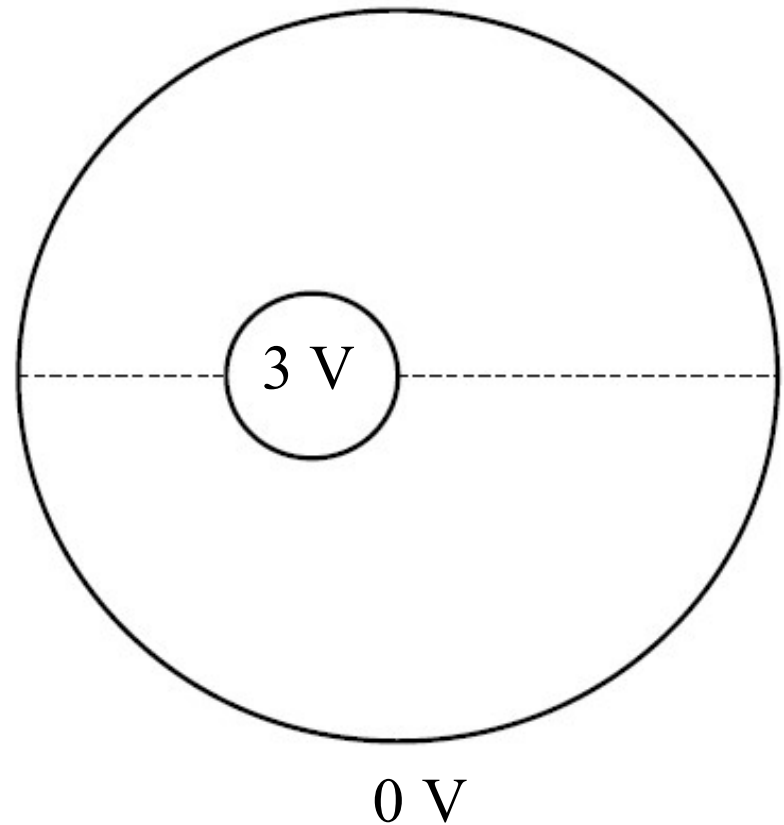
Pour ne pas confondre entre lignes équipotentielles et lignes de flux:
se souvenir que les **lignes de flux** débutent et finissent
sur des **surfaces conductrices**

Méthode graphique: câble non coaxial



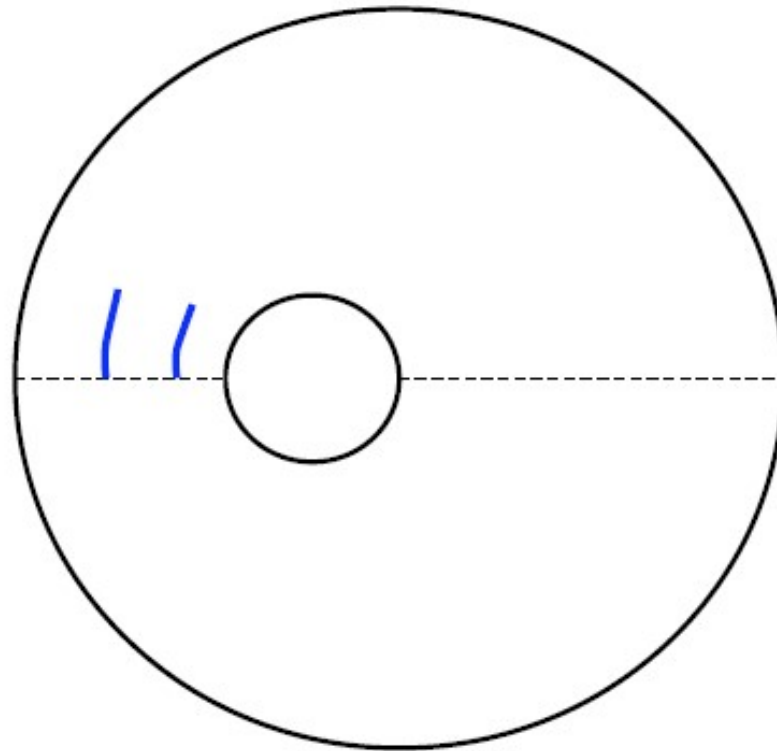
Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous.



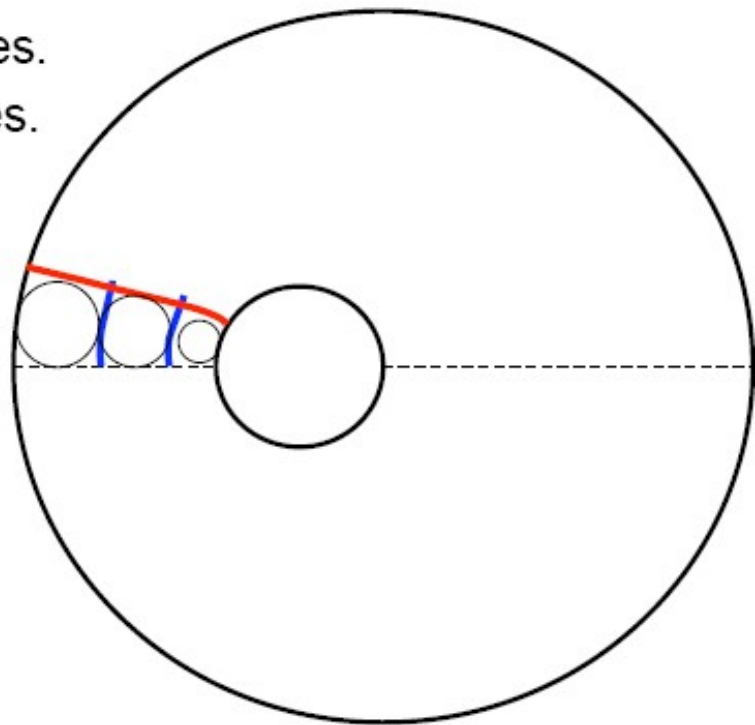
Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous
- 0, 1, 2, 3V



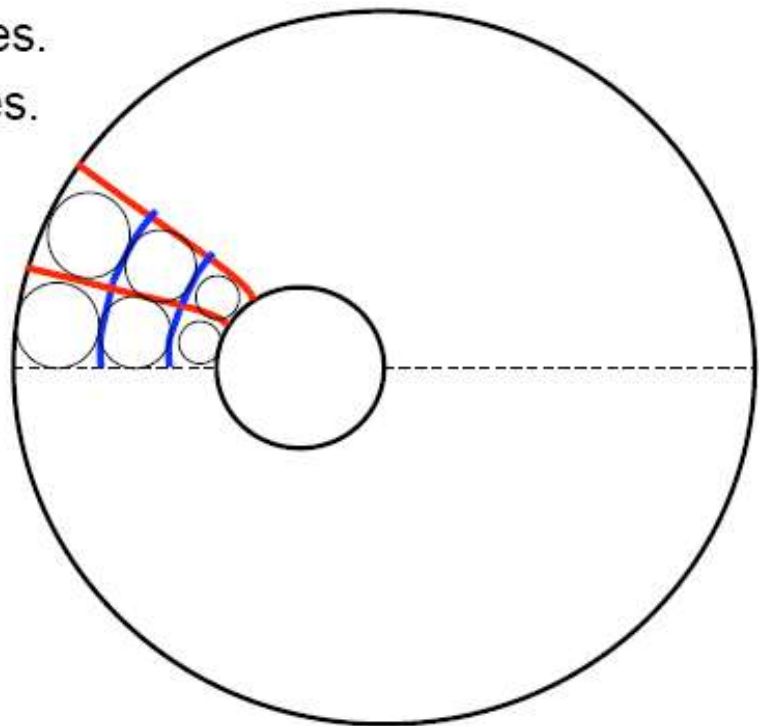
Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous.
- Lignes équipotentielles:
 - 0, 1, 2, 3 V
- Ligne de flux \perp lignes équipotentielles.
- Ligne de flux \perp surfaces conductrices.
- Carrés (cercles à l'intérieur).



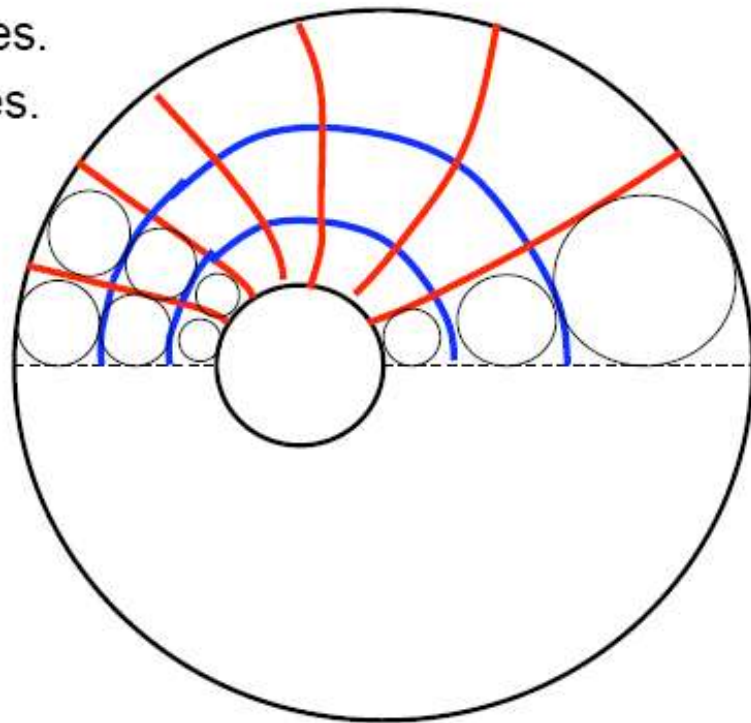
Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous.
- Lignes équipotentielles:
 - 0, 1, 2, 3 V
- Ligne de flux \perp lignes équipotentielles.
- Ligne de flux \perp surfaces conductrices.
- Carrés (cercles à l'intérieur).



Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous.
- Lignes équipotentielles:
 - 0, 1, 2, 3 V
- Ligne de flux \perp lignes équipotentielles.
- Ligne de flux \perp surfaces conductrices.
- Carrés (cercles à l'intérieur).



Calcul de la capacité d'une cellule curviligne

- Capacité d'une cellule curviligne.

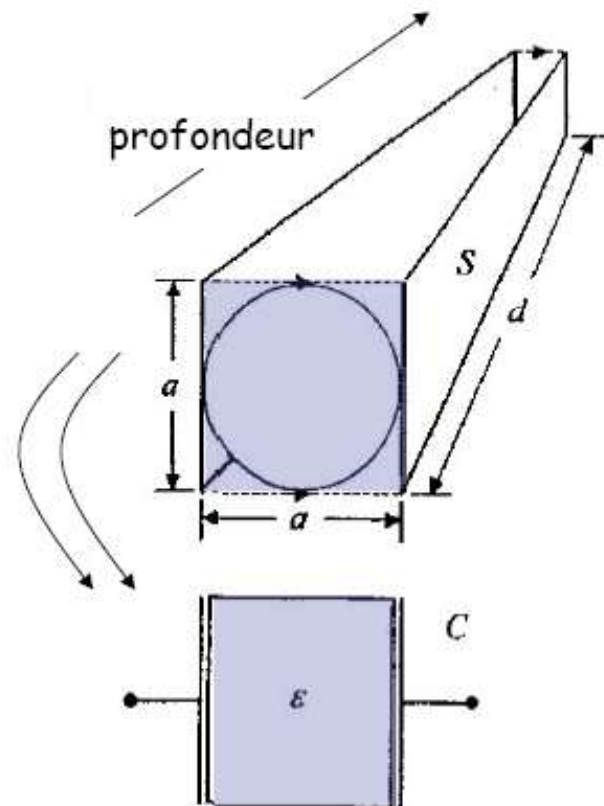
- Condensateur plan
 - Plans équipotentiels.
 - Champ uniforme.

- Capacité : $C = \frac{\epsilon S}{a}$

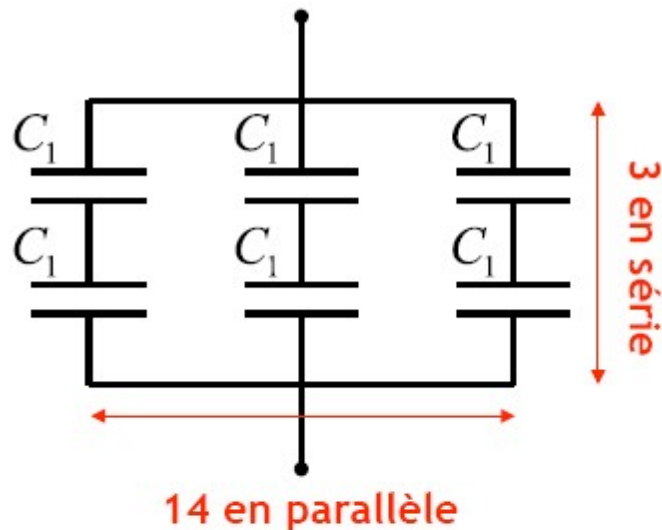
$$c = \frac{\epsilon(ad)}{a} = \epsilon d \quad \Sigma$$

La capacité ne dépend pas
des dimensions du carré.

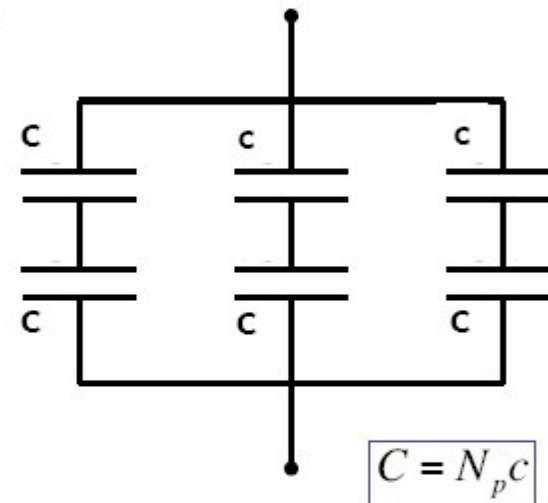
**Toutes les cellules ont la
même capacité.**



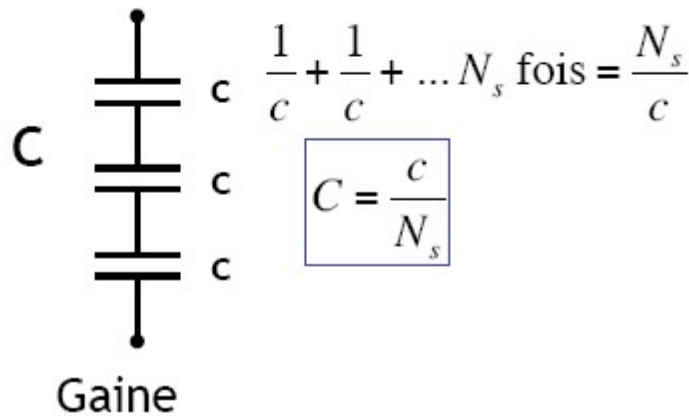
Calcul de la capacité totale



- Les capacités en parallèle s'ajoutent
- Les capacités en série divisent le potentiel



Conducteur central



$$\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \dots N_s \text{ fois} = \frac{N_s}{c}$$

$$C = \frac{c}{N_s}$$

$$C_{tot} = \frac{N_p c}{N_s}$$

Cartographie des champs : exemple

- capacité :

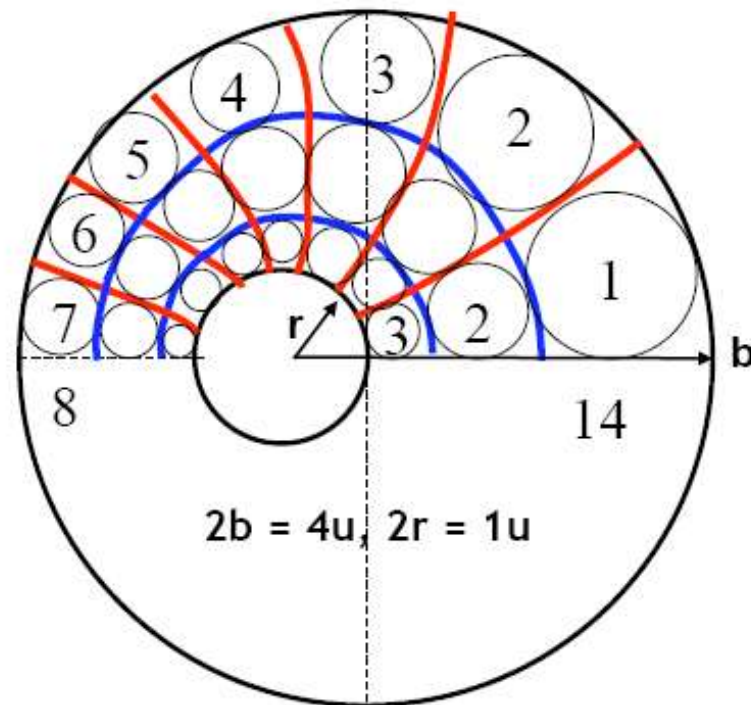
$$C \approx \frac{N_p \epsilon d}{N_s} = \frac{14 \epsilon d}{3} \approx 4,7 \epsilon d$$

Solution analytique :

$$C = \frac{-2\pi\epsilon d}{\ln\left[\frac{b}{2r} - \sqrt{\left(\frac{b}{2r}\right)^2 - 1}\right]} = 4,77 \epsilon d$$

Solution pour un câble coaxial « normal » :

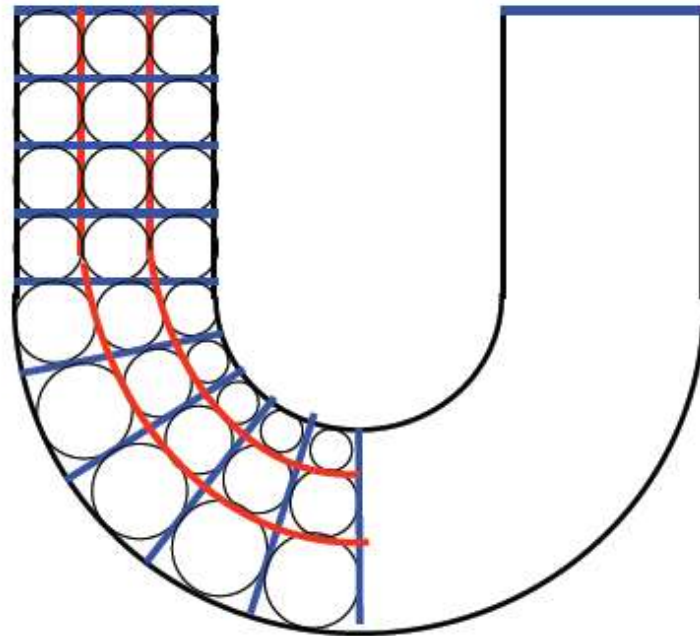
$$C = \frac{2\pi\epsilon d}{\ln\left(\frac{b}{r}\right)} = 4,53 \epsilon d$$



On peut faire un réseau plus fin pour augmenter la précision.
Par exemple : faire les lignes équipotentiels à $V/6$ au lieu de $V/3$.

Cartographie du courant : exemple

- Symétrie par rapport d'un plan central.
- Lignes équipotentiels : contacts.
- Lignes de courant : \perp lignes équipotentiels.
- Nombre de lignes de courant : 3.
- Lignes équipotentiels \perp surfaces isolantes.
- Densité de courant plus élevée à l'intérieur du « virage ».



Calcul de la résistance d'une cellule curviligne

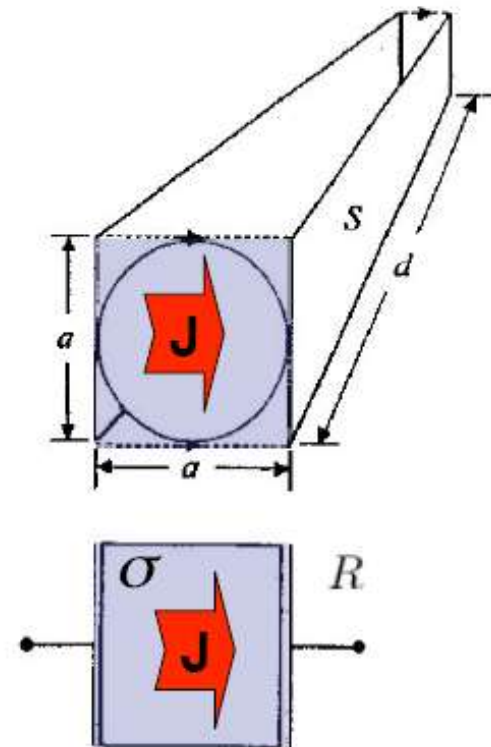
- résistance d'une cellule curviligne.
 - barreau conducteur homogène
 - Plans équipotentiels.
 - Champ uniforme.
 - résistance :

$$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

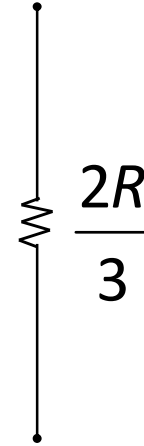
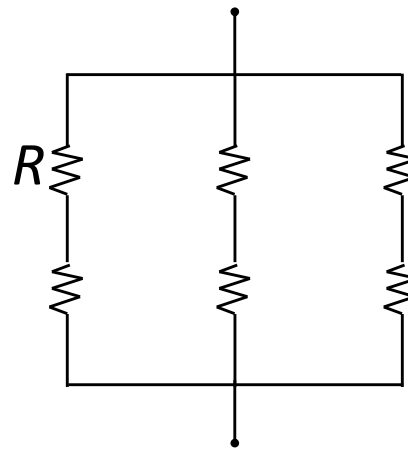
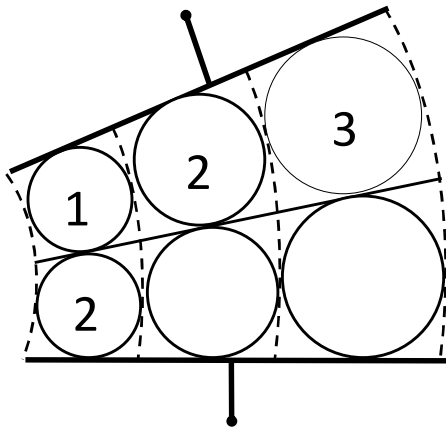
$$r = \frac{a}{\sigma a d} = \frac{1}{\sigma d}$$



La résistance ne dépend pas de la section de la cellule curviligne.
Toutes les cellules ont la même résistance.



Méthode graphique: calcul de la résistance



Calcul de la résistance totale

nos choix:

- Nombre de lignes de courant : 3.
- Nombre de lignes équipotentielles: 10

$$R_{tot} = \sum_{i=1}^{N_S} R_i = \frac{N_S}{N_P} r$$

$$R_{tot} = \frac{N_S}{N_P} \frac{1}{\sigma d} \sum$$

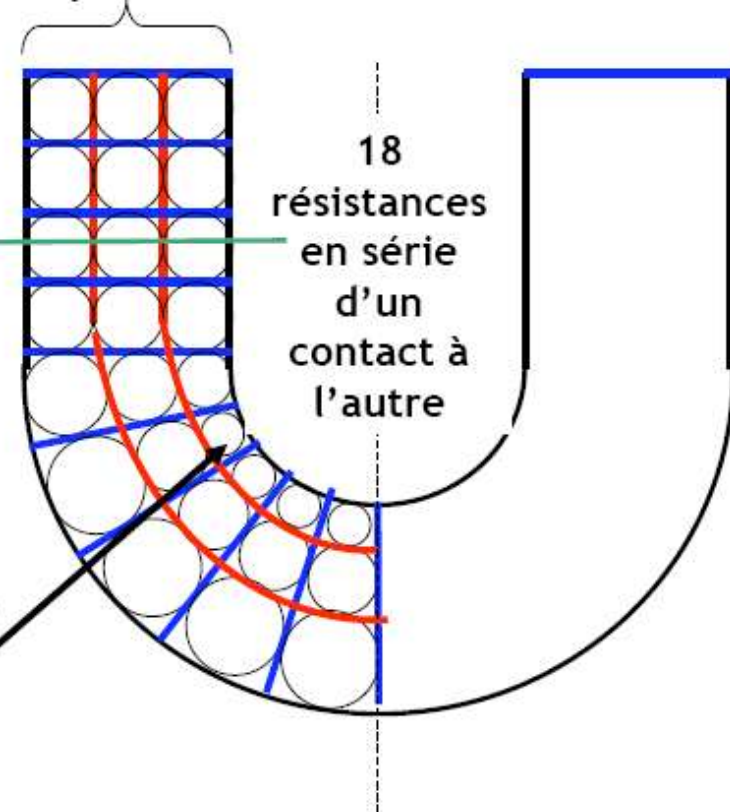
$$R_i = \frac{r}{N_P}$$

(résistance de la
i^e ligne)

3 résistances
en parallèle

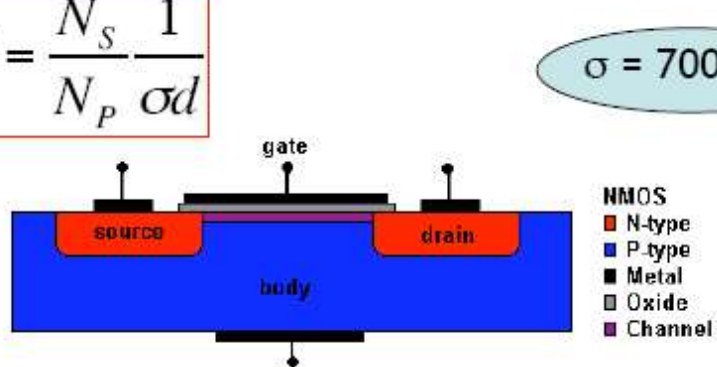
18
résistances
en série
d'un
contact à
l'autre

Densité de courant plus
élevée à l'intérieur du
« virage ».

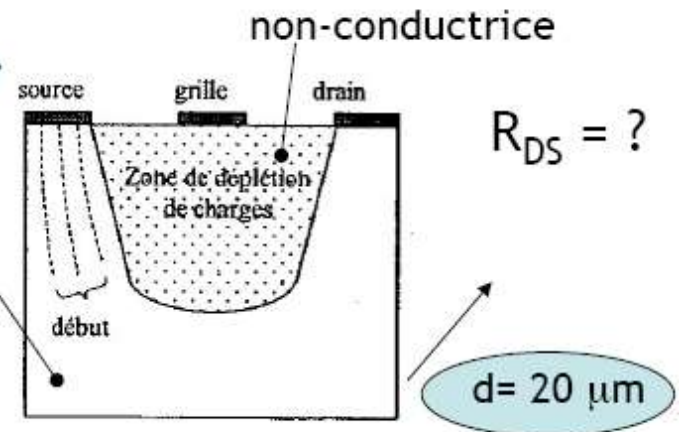


Transistor à effet de champ : exemple

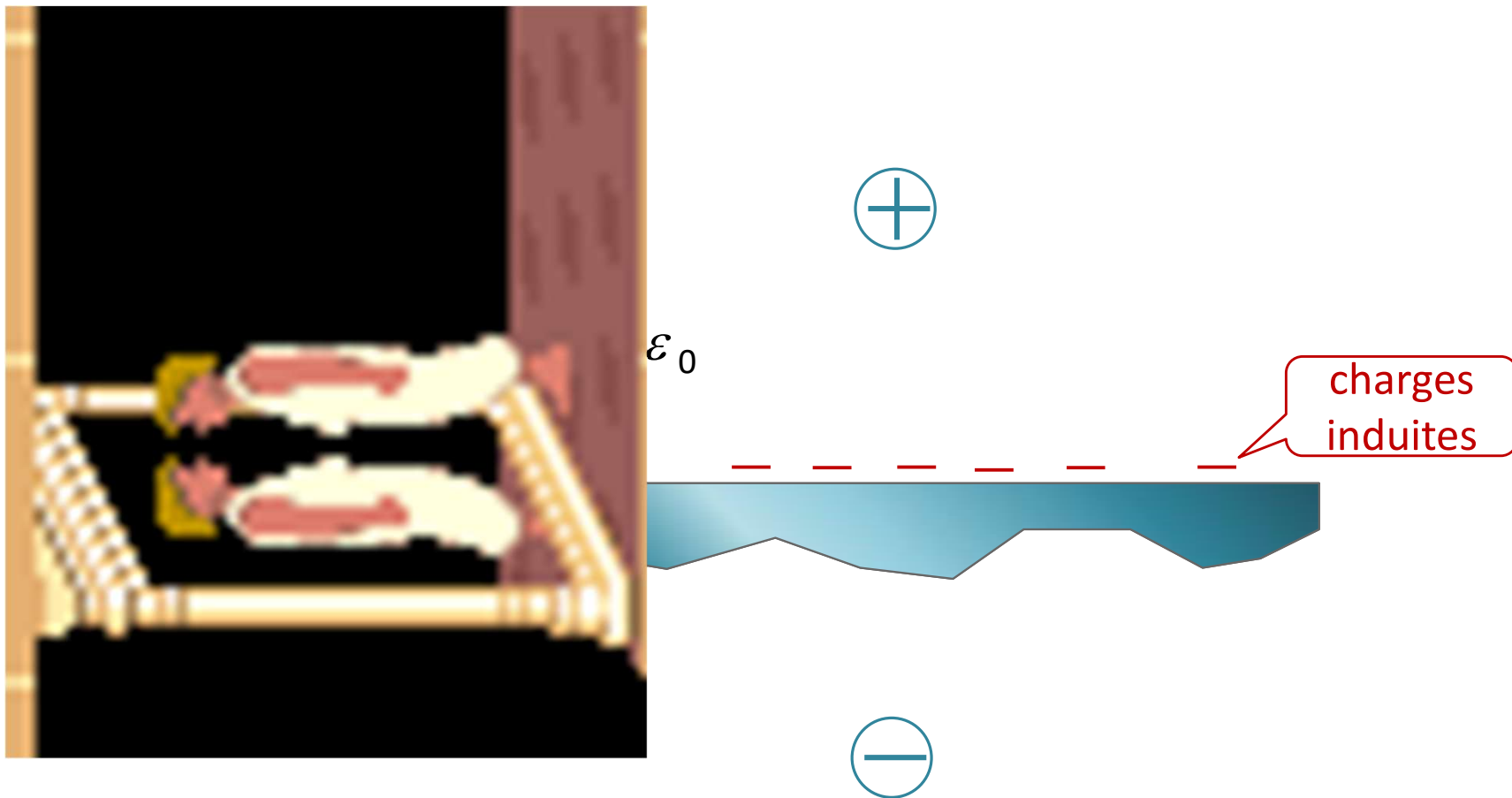
$$R = \frac{N_s}{N_p} \frac{1}{\sigma d}$$



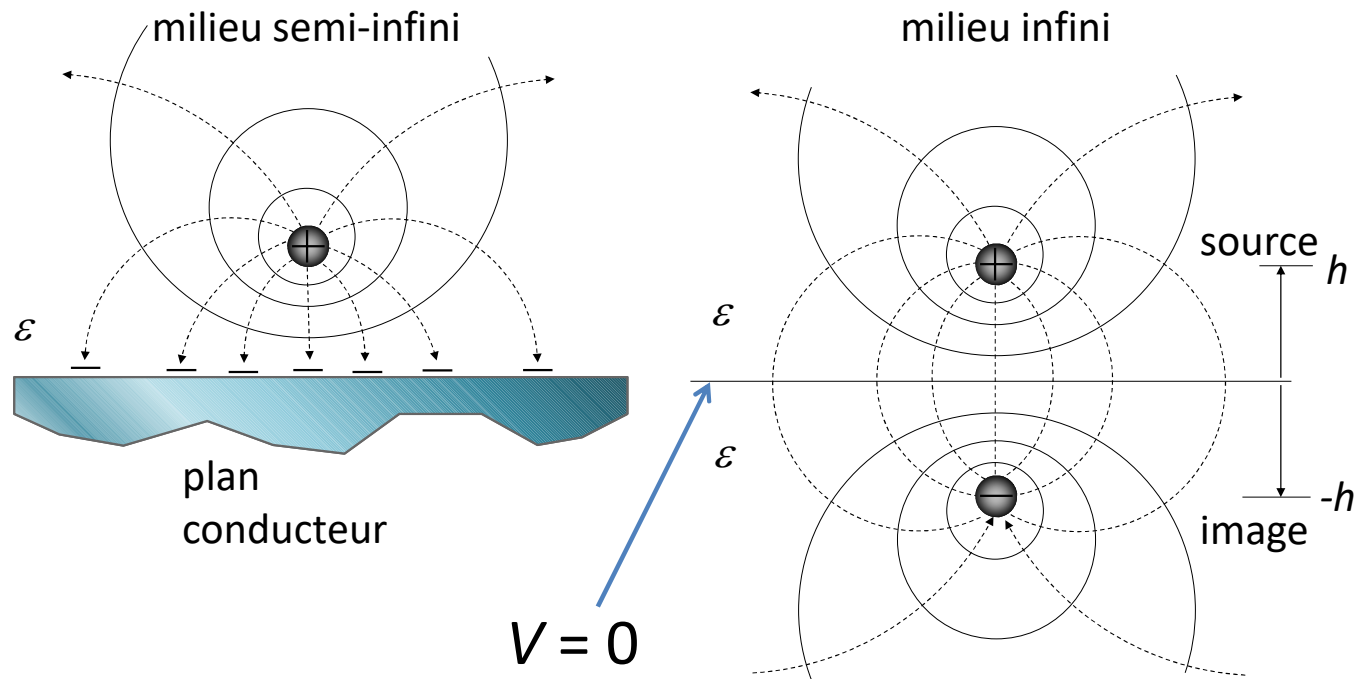
$$\sigma = 700 \text{ S/m}$$



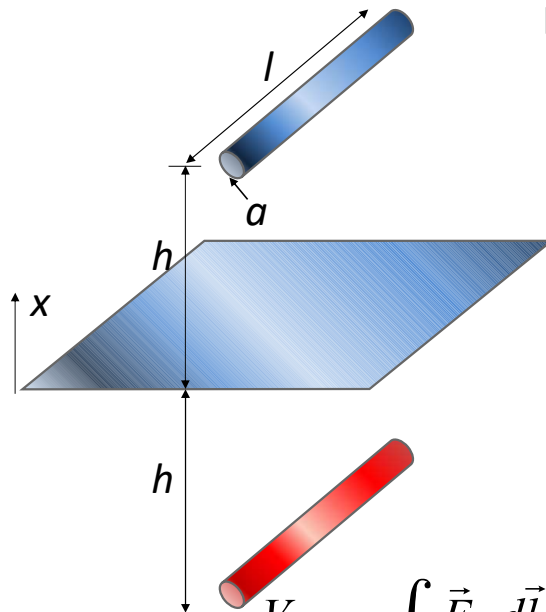
Théorie des images



Théorie des images



Capacité d'une ligne aérienne



Pour une seule ligne de charge (cylindrique):

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

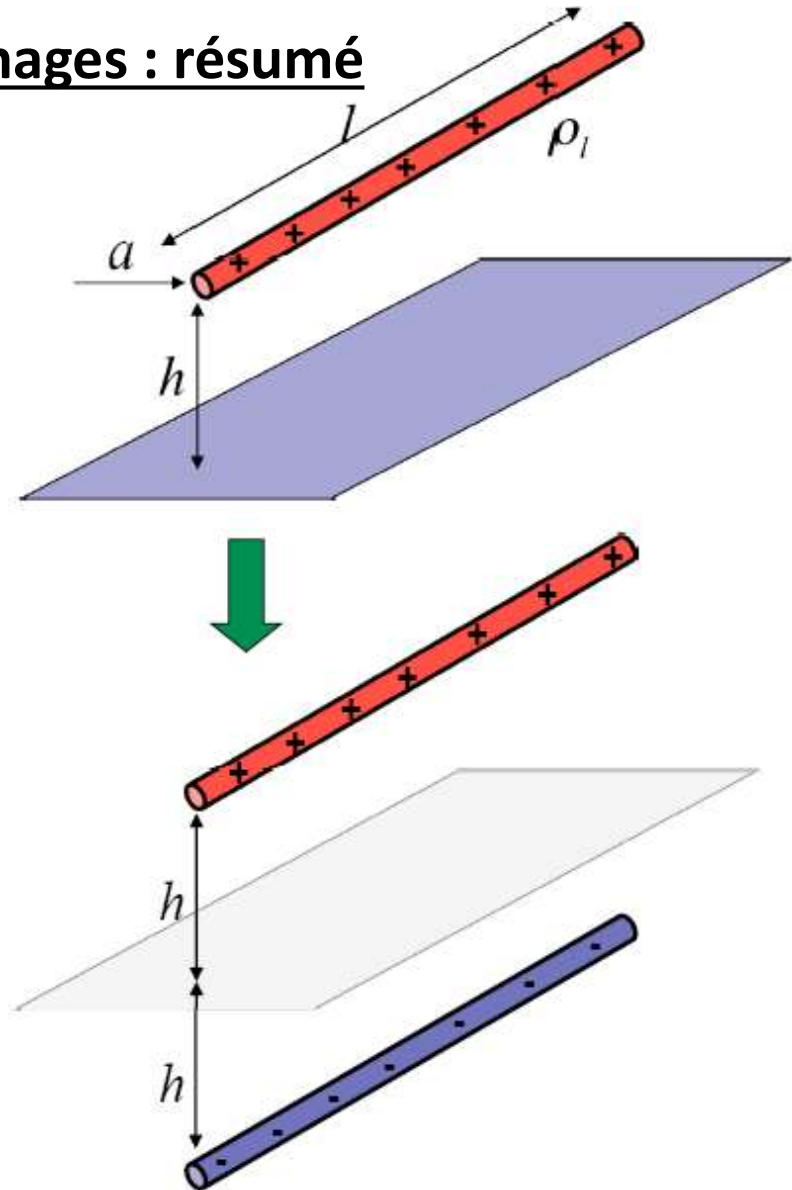
Superposition d'une ligne source à $x=+h$
et d'une ligne image à $x=-h$ (cartésien):

$$\vec{E} = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h+x} + \frac{1}{h-x} \right) \hat{x}$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^{h-a} \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h+x} + \frac{1}{h-x} \right) dx = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2h-a}{a} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left(\frac{2h-a}{a} \right)}$$

Théorie des images : résumé



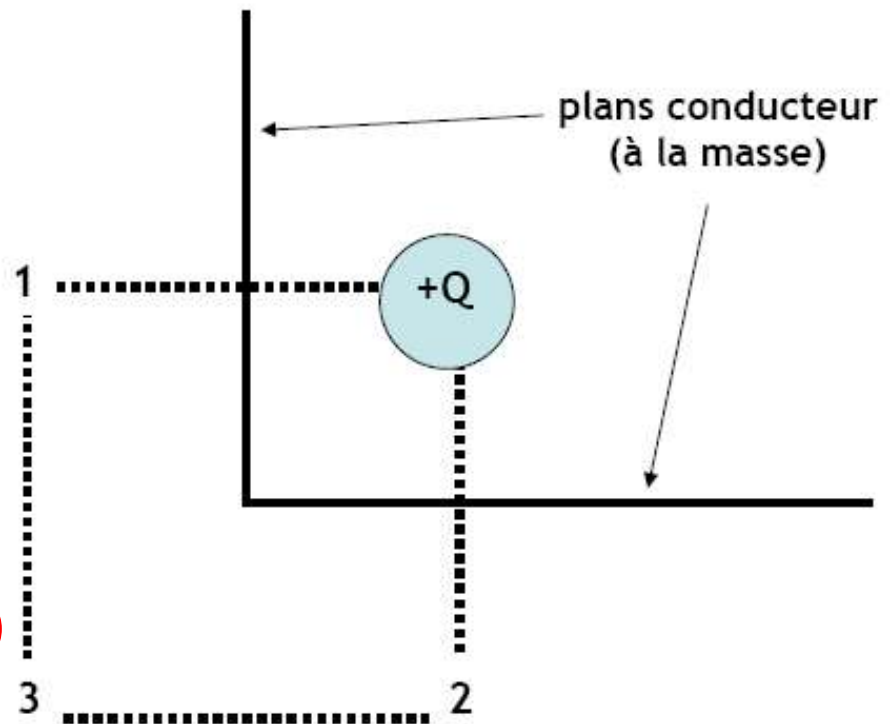
$$C = Q/V$$

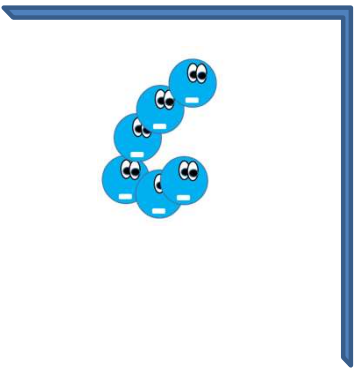
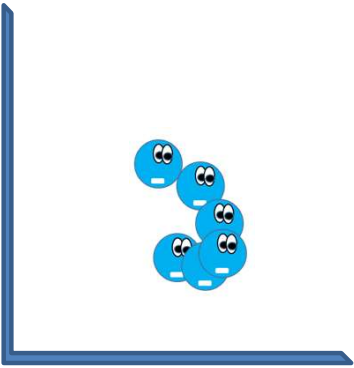
Théorie des images : Quiz !

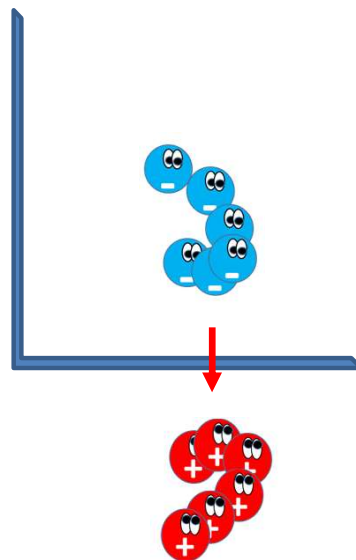
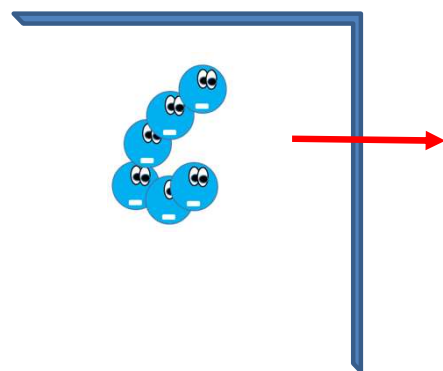
Une charge $+Q$ est située près de deux plans conducteurs: un plan horizontal et un plan vertical. Ces deux plans sont mis à la masse. Pour calculer le champ électrique, nous désirons remplacer ces plans par des charges images. Quel doit être l'arrangement des charges images?

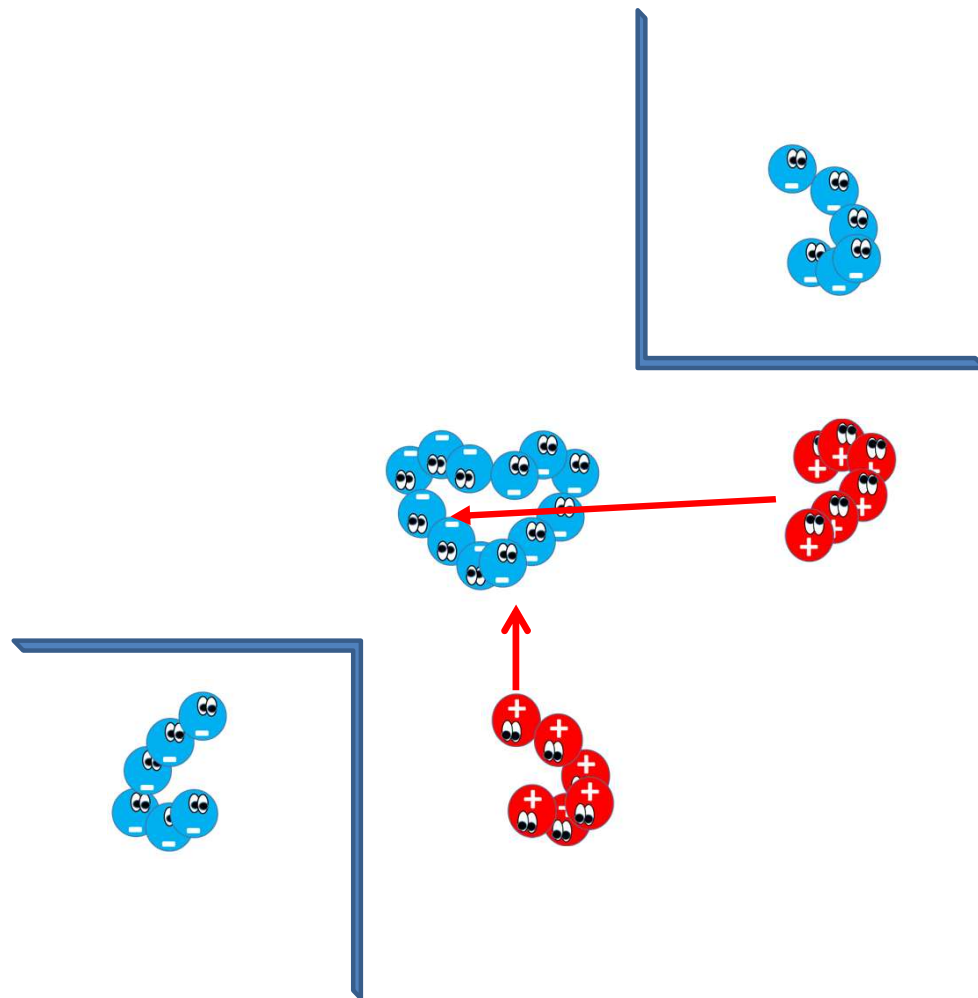
Choix de réponse

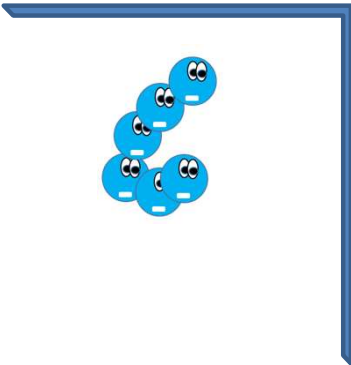
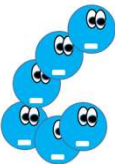
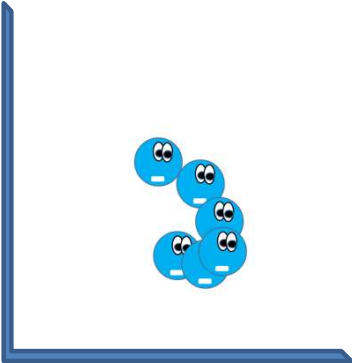
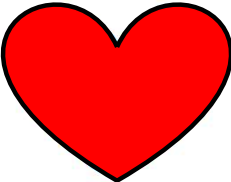
- a. charge $-Q$ au point 1;
charge $-Q$ au point 2;
charge $-2Q$ au point 3.
- b. charge $-Q$ au point 1;
charge $-Q$ au point 2.
- c. charge $-Q$ au point 1;
charge $-Q$ au point 2;
charge $+2Q$ au point 3.
- d. charge $-Q$ au point 1;
charge $-Q$ au point 2;
charge $+Q$ au point 3.

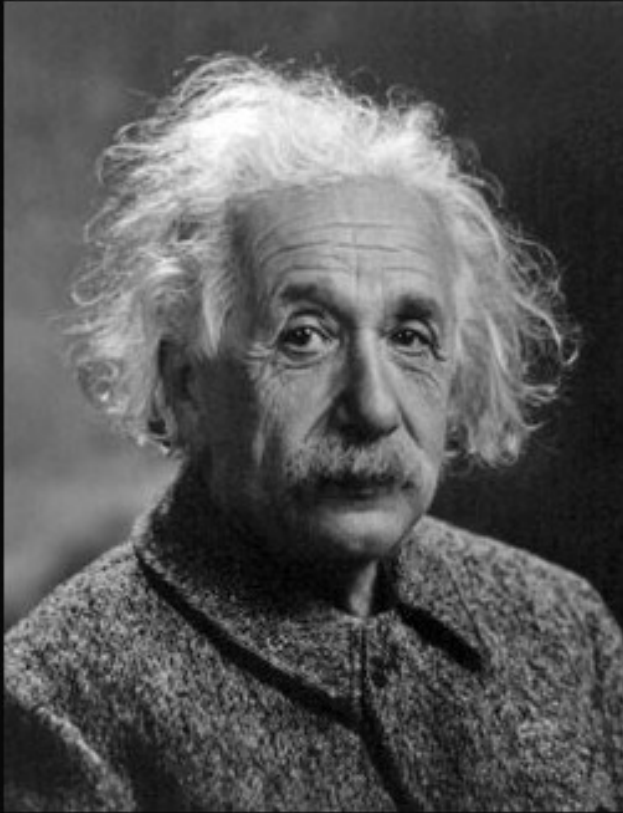












Never regard study as a duty, but as the
enviable opportunity to learn

for your own personal joy and to the
profit of the community to which your later
work belongs.

(Albert Einstein)

izquotes.com