– PHS1102 –
Champs électromagnétiques

Chapitre 5 – Conditions frontières aux interfaces et théorie des images

- Conditions frontières aux interfaces
  - Champ électrique dans un conducteur statique
  - Interface diélectrique-conducteur
  - Interface diélectrique-diélectrique
- Théorie des images

Objectifs de la semaine

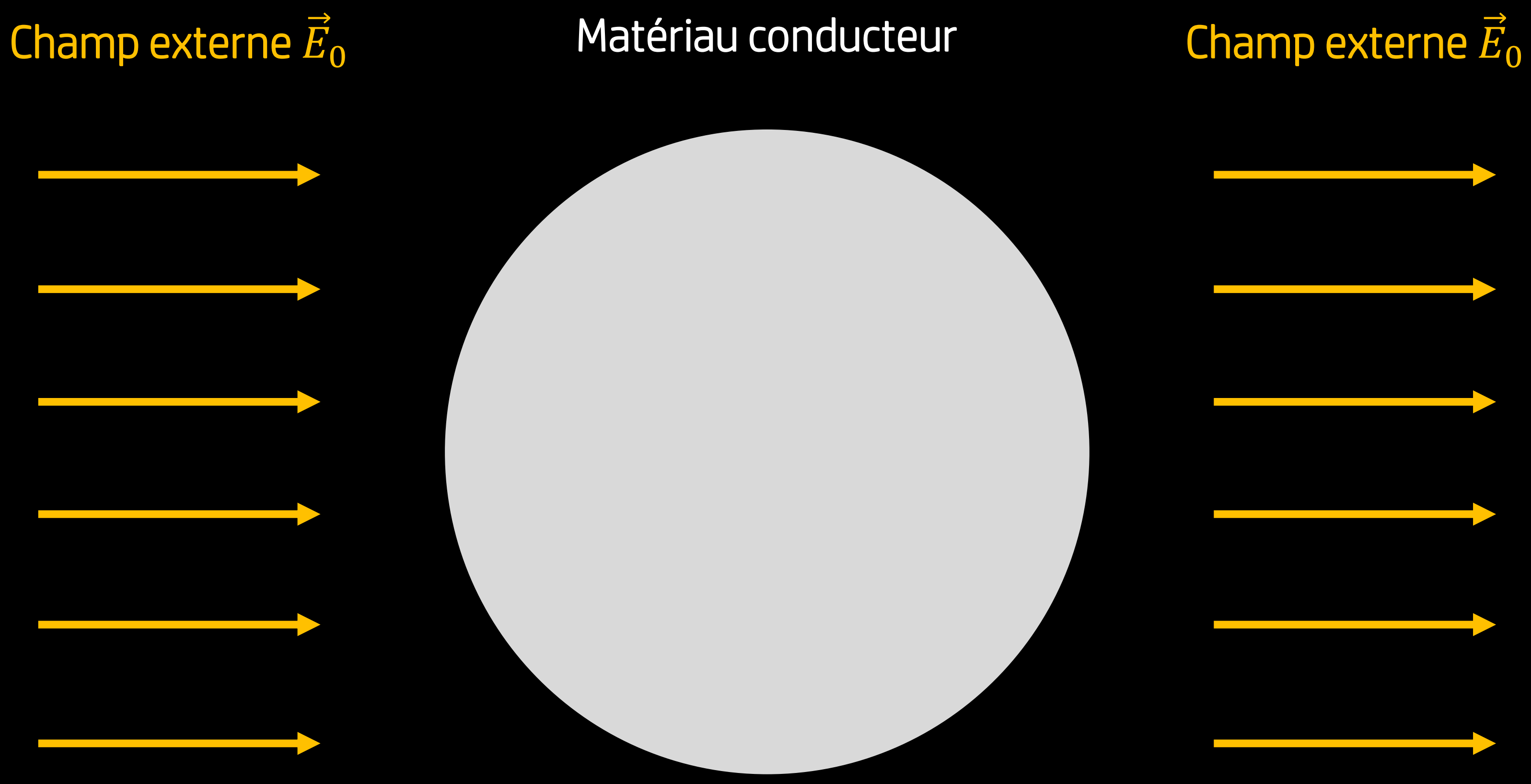
Conditions frontières aux interfaces	• Décrire le comportement d'un matériau conducteur dans un champ statique. • Déterminer le champ électrique et la densité de flux aux interfaces conducteur-diélectrique et diélectrique-diélectrique.
Théorie des images	• Calculer le champ électrique et le potentiel d'une distribution de charge en présence de plans conducteurs mis à la masse.

Objectifs de la semaine

Conditions frontières aux interfaces	• Décrire le comportement d'un matériau conducteur dans un champ statique. • Déterminer le champ électrique et la densité de flux aux interfaces conducteur-diélectrique et diélectrique-diélectrique.
Théorie des images	• Calculer le champ électrique et le potentiel d'une distribution de charge en présence de plans conducteurs mis à la masse.

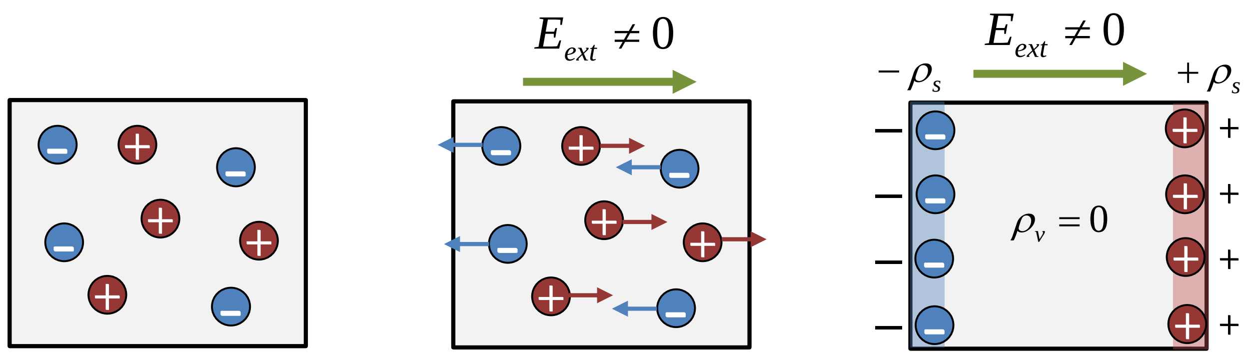
Quel est le champ électrique dans le conducteur ?

Quelle est la distribution de charge à l’intérieur du conducteur ?



Conducteur dans un champ externe statique

Lorsqu'un conducteur est soumis à un **champ électrique externe**, les **charges libres se déplacent** jusqu'à atteindre une distribution de charge à l'équilibre.



1. **À l'équilibre, le champ électrique est nul partout à l'intérieur d'un conducteur.**

   En effet, si le champ électrique était non nul à l'intérieur du conducteur, les charges libres continueraient à se déplacer sous l'effet de ce champ jusqu'à atteindre une nouvelle distribution à l'équilibre où le champ interne serait nul.

2. **La densité de charge est nulle partout à l'intérieur d'un conducteur. Les charges libres s'accumulent sur la surface du conducteur.**

   Application du théorème de Gauss sur un volume ΔV à l'intérieur du conducteur : puisque $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur, il ne peut y avoir de charge libre.

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\rho_v = 0$$

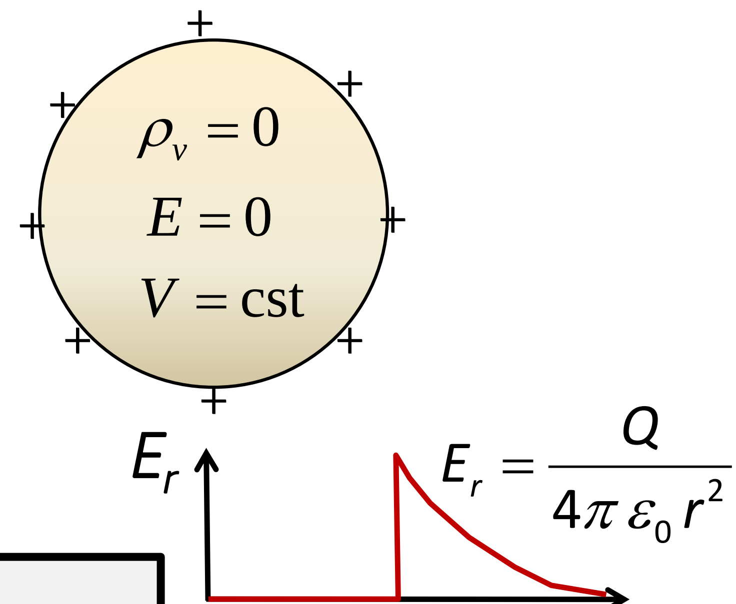
Conducteur dans un champ externe statique

Sachant que le champ électrique est nul dans un conducteur, que peut-on dire sur le potentiel à l'intérieur du conducteur ?

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si le champ est nul, le potentiel ne varie pas. Un conducteur soumis à un champ statique est donc une surface équipotentielle.

Charge $+Q$ répartie en surface



Dans un conducteur soumis à un champ statique :

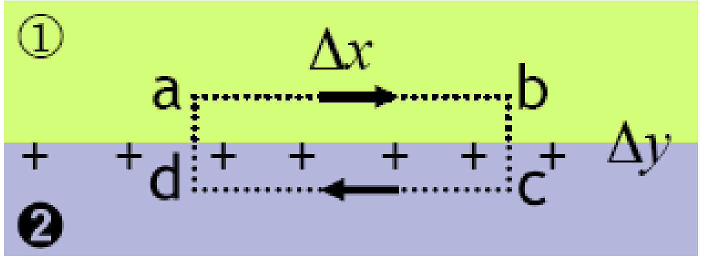
1. La densité de charge est nulle ; $\rho_v = 0$
2. Le champ électrique est nul ; $E = 0$
3. Le potentiel est constant. $V = \text{cst}$

Condition aux frontières – Diélectrique-conducteur

La composante tangentielle du champ $\vec{E}$ est nulle à l'interface.

Milieu 1 : diélectrique

Milieu 2 : conducteur



$E = 0$ à l'intérieur du milieu 2

Principe

Choisir un parcours rectangulaire fermé $abcd$ et calculer la différence de potentiel.

La différence de potentiel est nulle, car le parcours est fermé (champ conservatif).

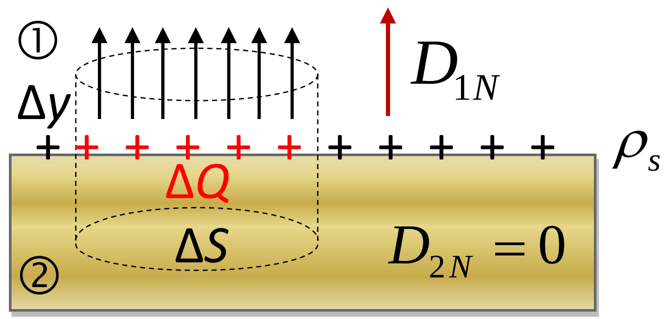
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

En faisant tendre $\Delta y \to 0$, les intégrales de b à c et de d à a tendent vers 0. De plus, l'intégrale de c à d est nulle, car $E = 0$ dans le conducteur. On a donc :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_{1T}\,\Delta x + 0 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{1T} = 0}$$

Condition aux frontières – Diélectrique-conducteur

La composante normale de la densité de flux $\vec{D}$ dans le diélectrique est égale à la densité de charge surfacique à l'interface.



(lignes de flux s'éloignent des charges positives.)

$D = 0$ à l'intérieur du milieu 2

Principe

Appliquer le théorème de Gauss avec une surface « boîte à pilule » de section ΔS infinitésimale et de hauteur Δy traversant l'interface.

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{Haut}} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{Côté}} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{Bas}} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{\text{libres}}$$

En faisant tendre $\Delta y \to 0$, l'intégrale sur le côté tend vers 0. De plus, l'intégrale du bas est nulle, car $D = 0$ dans le conducteur. Avec ΔQ la charge à l'intérieur de la surface de Gauss :

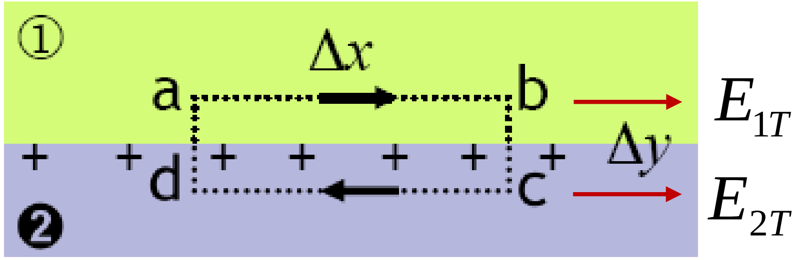
$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_{1N}\Delta S + 0 + 0 = \Delta Q \Rightarrow D_{1N} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S} \Rightarrow \boxed{D_{1N} = \rho_s}$$

Condition aux frontières – Diélectrique-diélectrique

La composante tangentielle du champ $\vec{E}$ est continue à l'interface.

Milieu 1 : diélectrique

Milieu 2 : diélectrique



Principe

Choisir un parcours rectangulaire fermé $abcd$ et calculer la différence de potentiel.

La différence de potentiel est nulle, car le parcours est fermé (champ conservatif).

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

En faisant tendre $\Delta y \to 0$, les intégrales de b à c et de d à a tendent vers 0. On a donc :

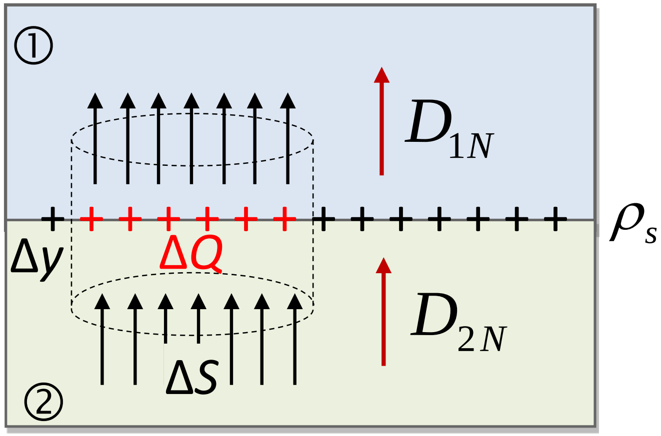
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_{1T}\,\Delta x + 0 - E_{2T}\,\Delta x + 0 = 0 \qquad \boxed{E_{1T} = E_{2T}}$$

Condition aux frontières – Diélectrique-diélectrique

La variation de la composante normale de la densité de flux $\vec{D}$ est égale à la densité de charge surfacique à l'interface.

Principe

Appliquer le théorème de Gauss avec une surface « boîte à pilule » de section ΔS infinitésimale et de hauteur Δy traversant l'interface.



$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{Haut}} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{Côté}} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{Bas}} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{\text{libres}}$$

En faisant tendre $\Delta y \to 0$, l'intégrale sur le côté tend vers 0. L'intégrale sur la surface du haut est positive, car D_{1N} sort de la surface de Gauss. Similairement, l'intégrale sur la surface du bas est négative, car D_{2N} entre dans la surface de Gauss.

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_{1N}\Delta S + 0 - D_{2N}\Delta S = \Delta Q$$

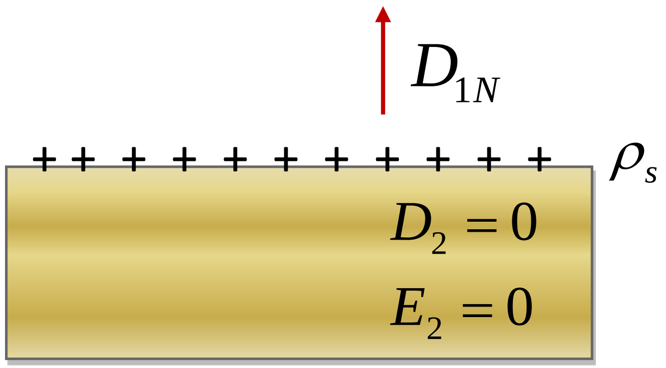
$$\Rightarrow \quad D_{1N} - D_{2N} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{1N} - D_{2N} = \rho_s}$$

Condition aux frontières – Résumé

Interface diélectrique - conducteur

$$\boxed{D_{1N} = \rho_s}$$

$$\boxed{E_{1T} = 0}$$

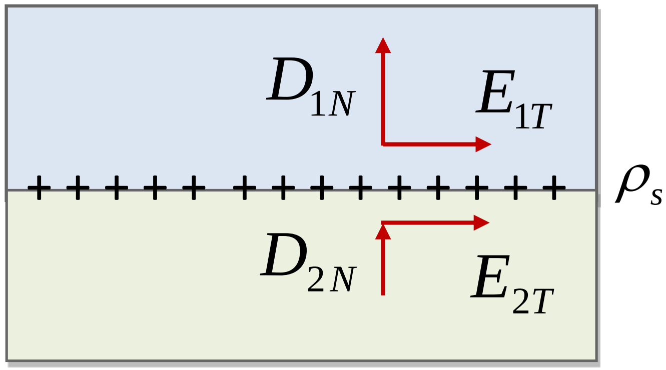


ATTENTION!
Les composantes de D et de E peuvent être positives ou négatives selon leur sens.

Interface diélectrique - diélectrique

$$\boxed{D_{1N} - D_{2N} = \rho_s}$$

$$\boxed{E_{1T} = E_{2T}}$$

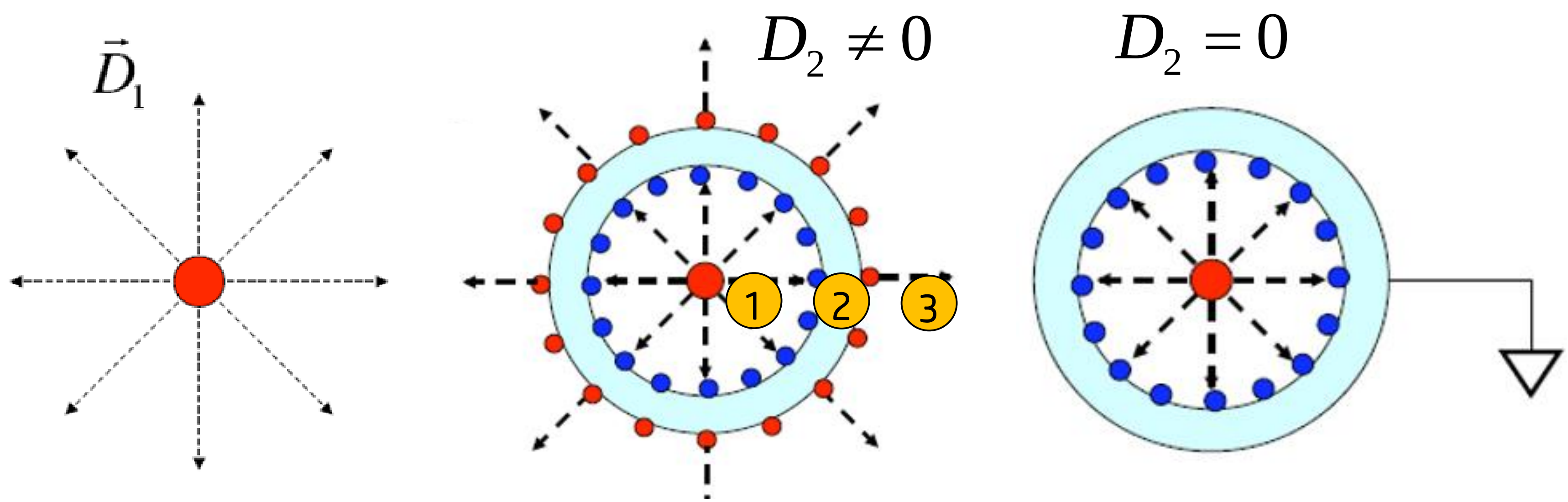



www.westerndigital.com
250GB
WD2500BPVT
S/N : WXB1A6039024
Advanced Format Drive. To achieve full performance:
• Windows® XP, multi partition and cloning software users – use WD Align software available on www.wdc.com/advformat
• All other OS configurations – drive is ready for use as is
MDL : WD2500BPVT – 00ZEST0
Product warranty will be void if seal, label or cover is removed or damaged.
Do not press on top cover.
WWN:50014EE6AAEE768A
DATE: 01 JUL 2010
DCM : HHBVJHN
DCX : 3Z02E69S9
LBA : 488397168
5VDC : 0.55A
R/N : 771672
U.S. Patents: 6178056, 5956196,6289484, 6263459
Product of Malaysia
SERIAL ATA

Blindage électrostatique

Les matériaux conducteurs permettent d'éliminer le champ électrique afin, entre autres :

- D'éviter les effets d'interférence sur un composant électronique ;
- D'empêcher qu'une pièce électronique ne soit endommagée lors de son transport.



En entourant une charge d'un conducteur neutre (en bleu), les charges libres du conducteur se répartissent sur ses surfaces internes et externes par induction, mais le champ est inchangé dans les régions 1 et 3 situées à l'extérieur du conducteur.

En mettant le conducteur à la masse (réservoir infini de charges), les charges de la surface externe sont neutralisées : **il n'y a plus de champ dans la région 3**.

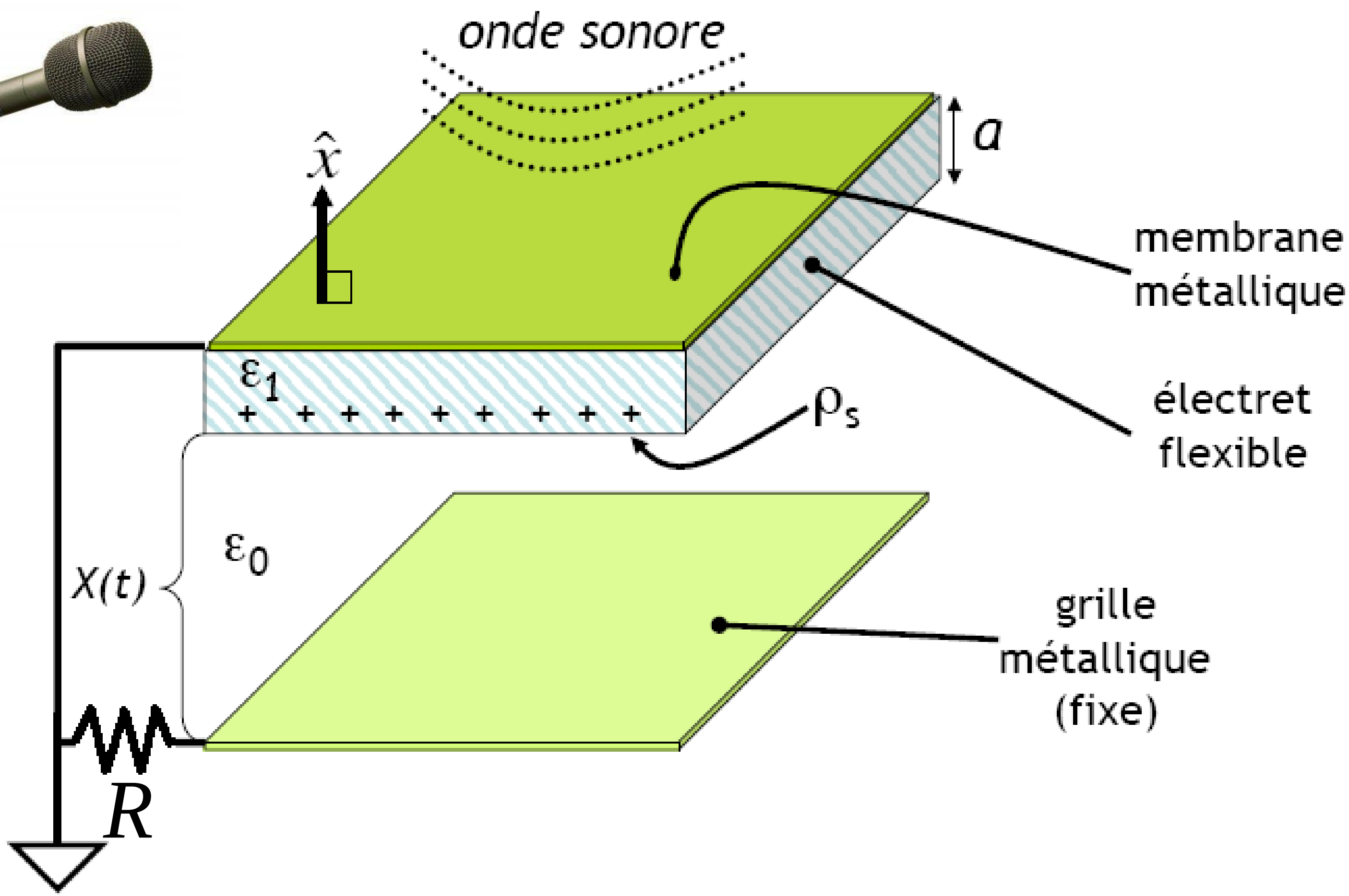
Sac dissipatif antistatique (rose)
Empêche l'accumulation de charges statiques sur la surface du sac, mais n'empêche pas les chocs.

Sac antistatique conducteur
Prévient les chocs grâce à un couche métallique (cage de Faraday).

Exemple 5.2 – Microphone électrostatique

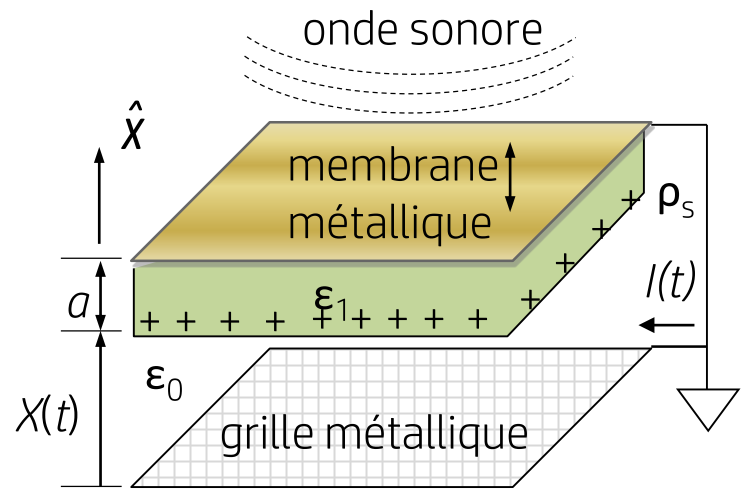
a) Quels sont les champs électriques (supposés uniformes) dans l'air et l'électret ?

b) Quel est le courant dans la résistance si $X(t) = X_0 + b\sin(\omega t)$ où $X_0 \gg b$?



Exemple 5.2 – Microphone électrostatique

a) Quels sont les champs électriques (supposés uniformes) dans l'air et l'électret ?



Condition frontière diélectrique-diélectrique

$$D_{1N} - D_{0N} = \rho_s$$

$$D_{1x} - D_{0x} = \rho_s$$

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1x} - \varepsilon_0 E_{0x} = \rho_s}$$

Champ uniforme selon x

Attention, E_{0x} est négatif ici!

Différence de potentiel entre la surface chargée et les conducteurs mis à la masse (V = 0)

$$V_a = -\int_0^{X(t)} \left(E_{0x}\hat{x}\right)\cdot d\vec{l} = -\int_0^{X(t)} E_{0x}dx = -E_{0x}X(t)$$

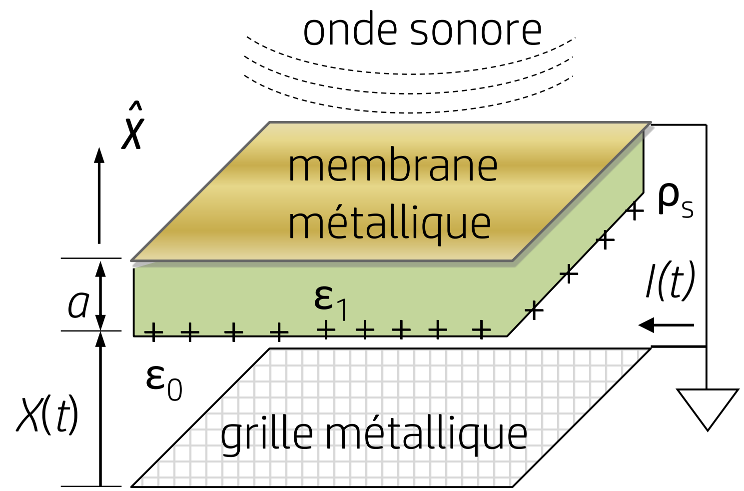
$$V_a = -\int_{X(t)+a}^{X(t)} \left(E_{1x}\hat{x}\right)\cdot d\vec{l} = \int_{X(t)}^{X(t)+a} E_{1x}dx = E_{1x}a$$

$$\boxed{E_{0x}X(t) = -E_{1x}a}$$

$$\boxed{E_{0x} = \frac{-\rho_S}{\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1 X(t)}{a}}} \qquad \boxed{E_{1x} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_0 a}{X(t)}}}$$

Exemple 5.2 – Microphone électrostatique

b) Quel est le courant dans la faible résistance de grille si $X(t) = X_0 + b\sin(\omega t)$, où $X_0 \gg b$?



Quantité de charge sur la grille de surface S

$$Q = \rho_g S$$

$$D_{0x} = \varepsilon_0 E_{0x} = \rho_g$$

Condition frontière air-grille conductrice

$$E_0 = \frac{-\rho_s}{\varepsilon_0 + \dfrac{\varepsilon_1 X(t)}{a}}$$

Courant circulant dans la faible résistance de grille

$$I = \frac{dQ}{dt} = S\frac{d\rho_g}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{\varepsilon_0\rho_s S}{\varepsilon_0 + \dfrac{\varepsilon_1 X(t)}{a}}$$

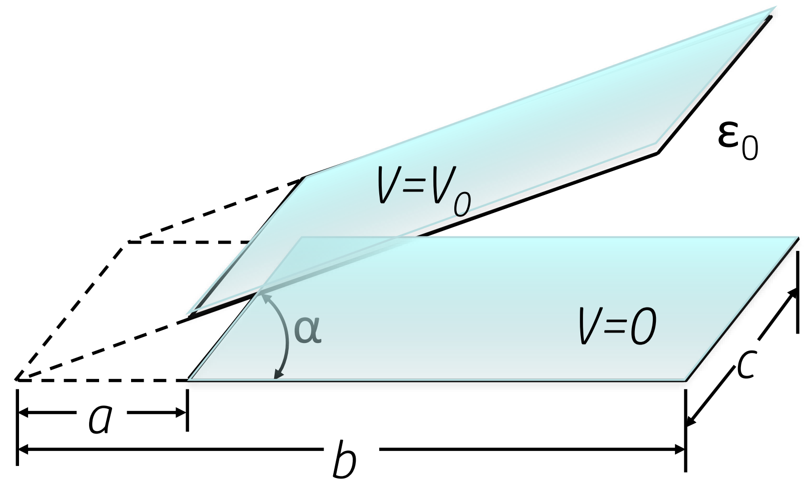
$$= \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\rho_s S}{a\left(\varepsilon_0 + \dfrac{\varepsilon_1 X(t)}{a}\right)^2}\frac{dX(t)}{dt}$$

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 b\rho_s S\omega}{a\left(\varepsilon_0 + \dfrac{\varepsilon_1 X(t)}{a}\right)^2}\cos(\omega t)}$$

Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

Quelle est la capacité de ce condensateur variable en fonction de l'angle α ?

Deux condensateurs en parallèle : régions intérieure et extérieure aux armatures



1. Symétrie
   On néglige les effets de bord (armatures très grandes), de sorte que V dépend de l'angle ϕ seulement par la symétrie.

$$V(\vec{r}) = V(\phi)$$

2. Choix de la solution à l'équation de Laplace
   La solution pour une symétrie selon l'angle ϕ en coordonnées cylindriques est :

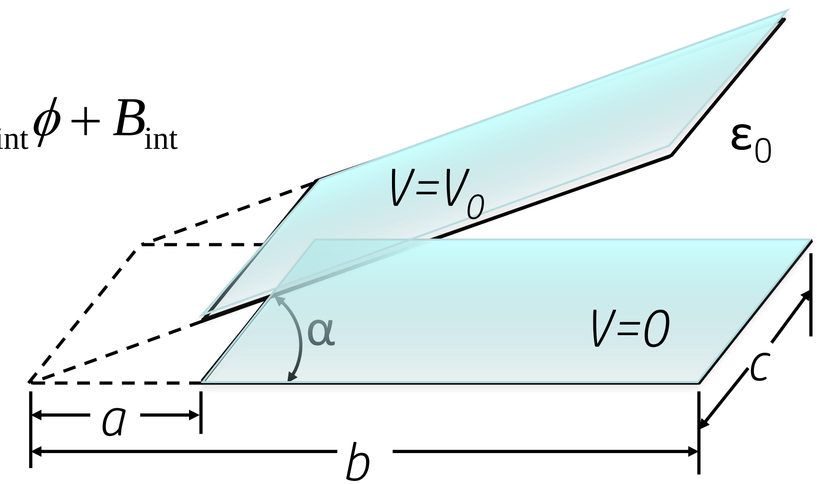
$$\nabla^2 V = 0 \qquad V(\vec{r}) = V(\phi)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \cancel{\frac{\partial V}{\partial \rho}}\right)}_{=0} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}}_{=0} = 0 \underset{\rho \neq 0}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\phi) = A\phi + B}$$

Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

3. Conditions frontières
   On applique la solution à l'équation de Laplace dans chacune des deux régions.



Région intérieure ($0 < \phi < \alpha$) $\quad V_{\text{int}}(\phi) = A_{\text{int}}\phi + B_{\text{int}}$

$$V_{\text{int}}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{\text{int}} = 0$$

$$V_{\text{int}}(\alpha) = V_0 \quad \Rightarrow \quad A_{\text{int}} = \frac{V_0}{\alpha}$$

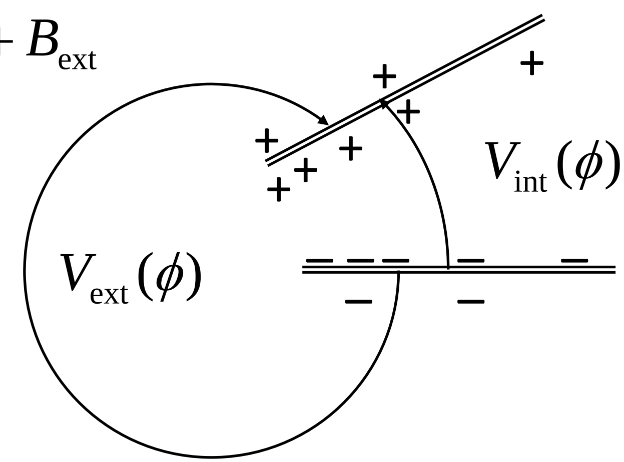
$$\boxed{V_{\text{int}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha}\phi}$$

Région extérieure ($\alpha - 2\pi < \phi < 0$) $\quad V_{\text{ext}}(\phi) = A_{\text{ext}}\phi + B_{\text{ext}}$

$$V_{\text{ext}}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{\text{ext}} = 0$$

$$V_{\text{ext}}(\alpha - 2\pi) = V_0 \quad \Rightarrow \quad A_{\text{ext}} = \frac{V_0}{\alpha - 2\pi}$$

$$\boxed{V_{\text{ext}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha - 2\pi}\phi}$$



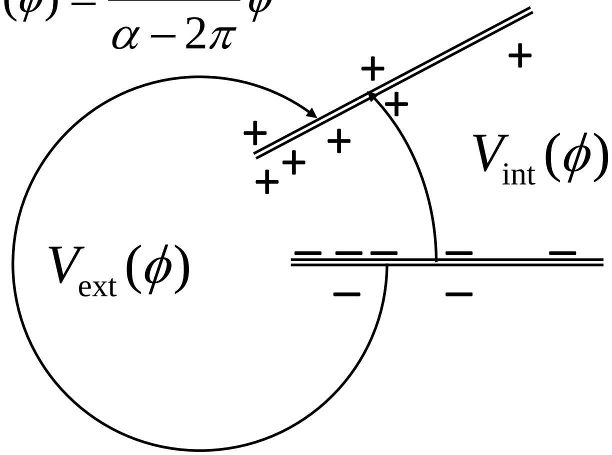
Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

Pour calculer la capacité, il faut déterminer la charge sur les armatures du condensateur.

$$V_{\text{int}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha}\phi$$

$$V_{\text{ext}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha - 2\pi}\phi$$

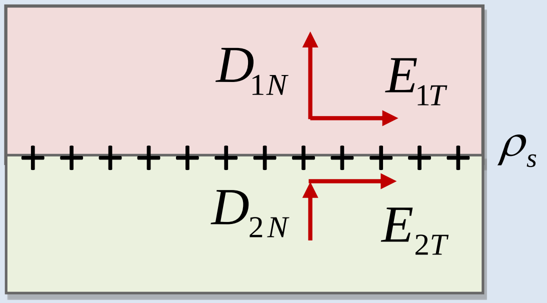
4. **Interface diélectrique-diélectrique ($\phi = 0$)**
   En supposant que l'armature est infiniment mince, l'armature agit en fait comme une densité de charge surfacique ρ_s à l'interface entre les diélectriques à l'intérieur et à l'extérieur des armatures. On peut donc appliquer la condition frontière à l'interface entre deux diélectriques.



Il faut calculer le champ électrique, puis la densité de flux de chaque côté de l'armature pour appliquer la condition.

RAPPEL

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$



Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

Pour calculer la capacité, il faut déterminer la charge sur les armatures du condensateur.

$$\boxed{V_{\text{int}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha}\phi}$$

$$\boxed{V_{\text{ext}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha - 2\pi}\phi}$$

5. Champ et densité de flux à $\phi = 0$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\cancel{\frac{\partial V}{\partial \rho}}\hat{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial z}}\hat{z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial \phi}\hat{\phi} = -\frac{V_0}{\alpha\rho}\hat{\phi} \qquad \vec{E}_{\text{ext}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial \phi}\hat{\phi} = -\frac{V_0}{(\alpha - 2\pi)\rho}\hat{\phi}$$

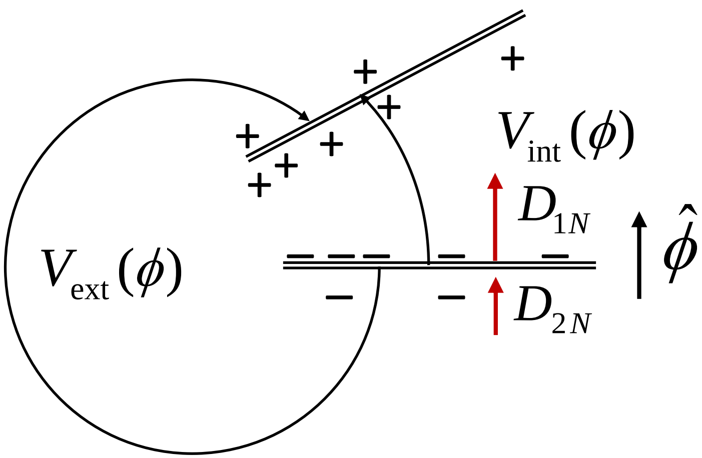
$$\Downarrow$$

$$\vec{D}_{\text{int}} = -\frac{\varepsilon V_0}{\alpha\rho}\hat{\phi} \qquad \vec{D}_{\text{ext}} = -\frac{\varepsilon V_0}{(\alpha - 2\pi)\rho}\hat{\phi}$$

Interface diélectrique-diélectrique

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s \Rightarrow -\frac{\varepsilon V_0}{\alpha\rho} - \left(-\frac{\varepsilon V_0}{(\alpha - 2\pi)\rho}\right) = \rho_s$$

$$\rho_s = -\frac{\varepsilon V_0}{\rho}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha}\right)$$

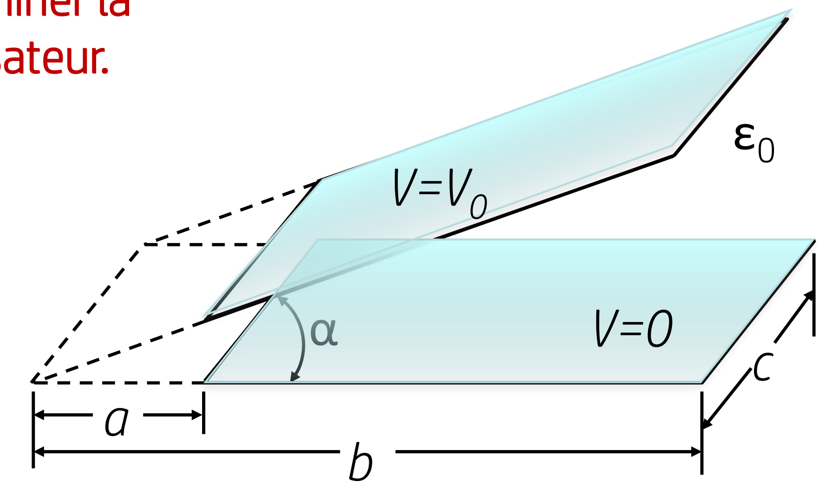


Peut-on simplement écrire $Q = \rho_s S$?

Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

Pour calculer la capacité, il faut déterminer la charge sur les armatures du condensateur.

6. Intégrer la densité de charge surfacique pour trouver la charge totale sur une armature
   Il faut intégrer, car ρ_s dépend du rayon ρ.



$$Q = \int_S \rho_s dS = \int_0^c \int_a^b \rho_s d\rho dz$$

Expression de dS pour ϕ constant ($d\phi = 0$) vient de l'annexe 4 du manuel.

$$\rho_s = -\frac{\varepsilon V_0}{\rho}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha}\right)$$

$$Q = -\varepsilon V_0 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha}\right) \int_0^c \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho dz = -\varepsilon V_0 c \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha}\right) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

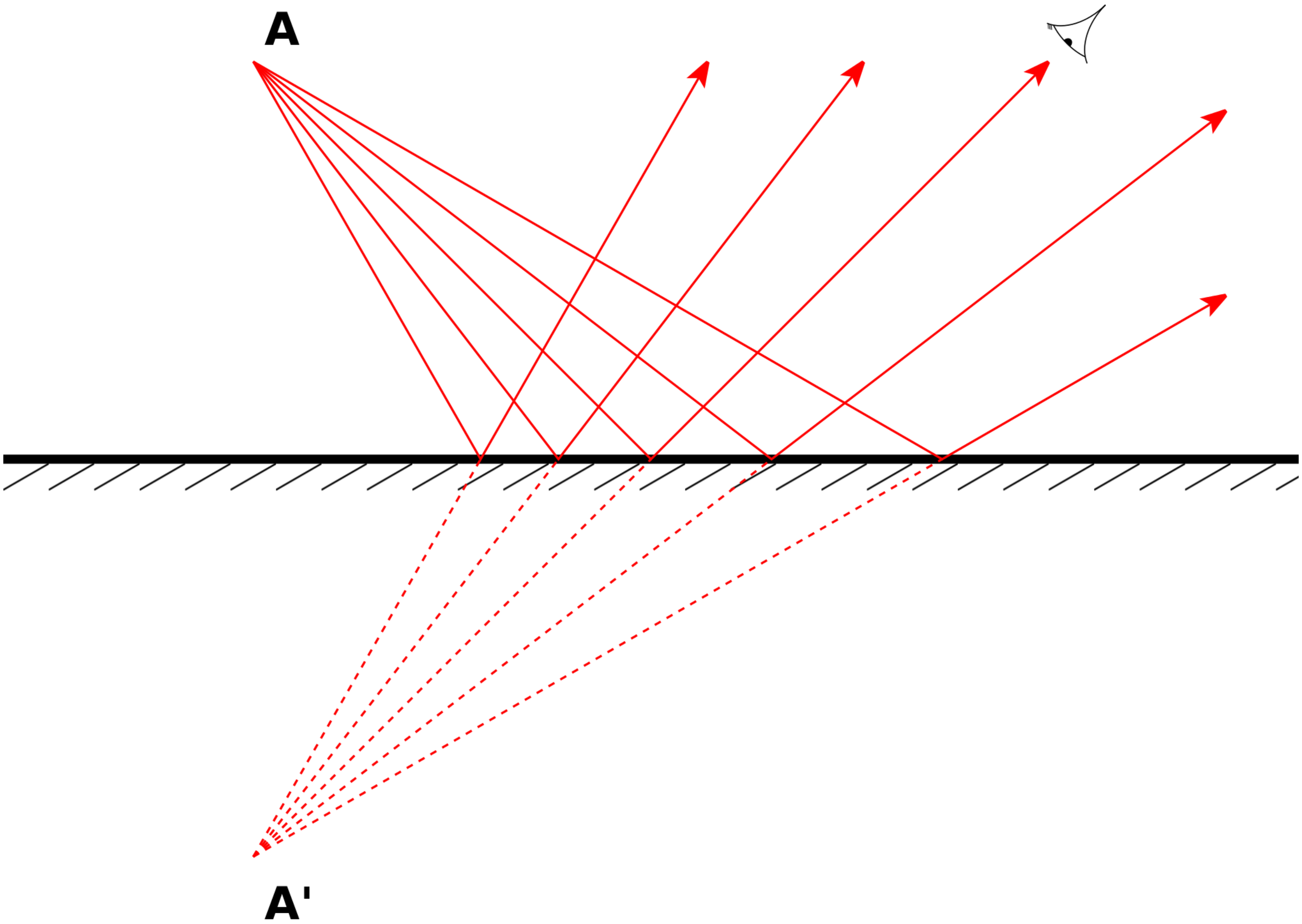
La capacité vaut :

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{V_0} = \varepsilon c \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha}\right) \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

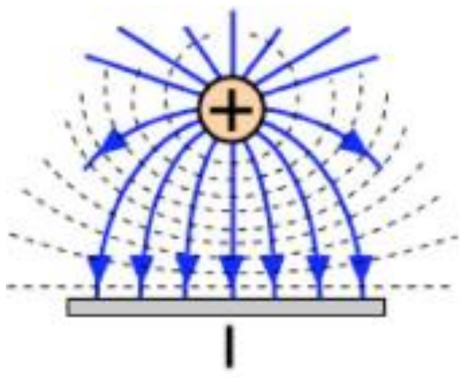
Capacité toujours positive : on prend la valeur absolue de Q.

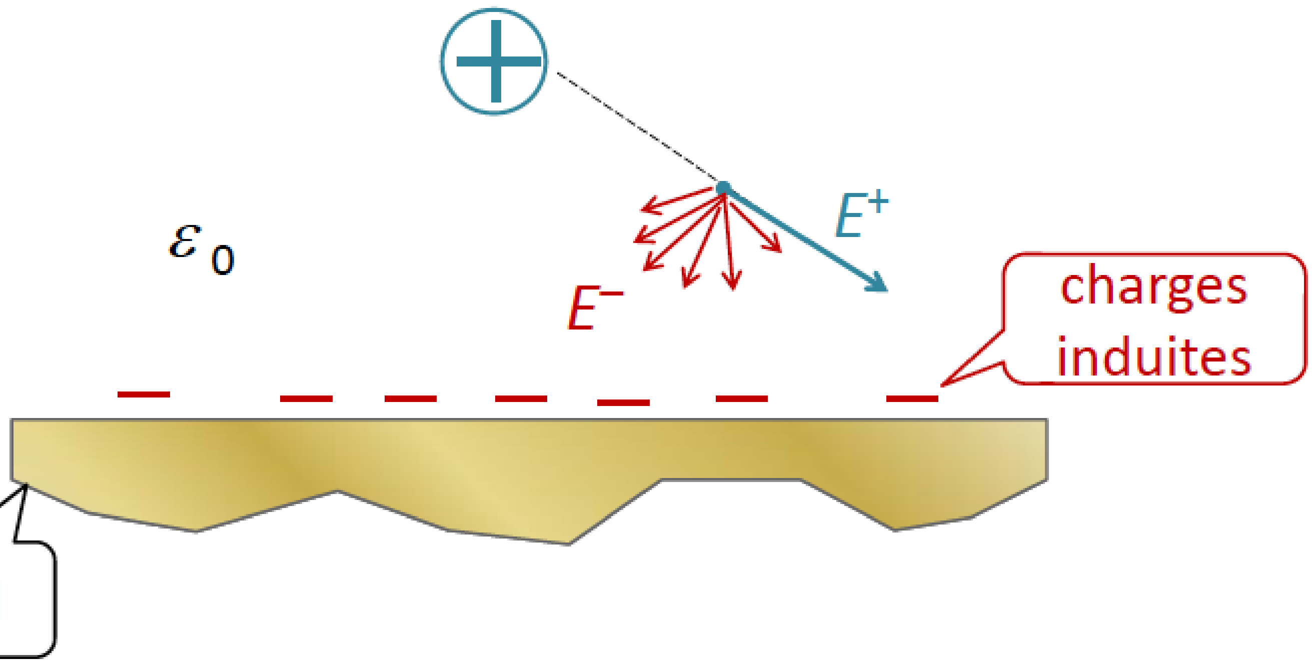
Objectifs de la semaine

Conditions frontières aux interfaces	• Décrire le comportement d’un matériau conducteur dans un champ statique. • Déterminer le champ électrique et la densité de flux aux interfaces conducteur-diélectrique et diélectrique-diélectrique.
Théorie des images	• Calculer le champ électrique et le potentiel d’une distribution de charge en présence de plans conducteurs mis à la masse.


A
A'

Charge ponctuelle en présence d'un plan conducteur infini mis à la masse (V = 0)





1. Quelle est l'orientation du champ électrique près de la charge ponctuelle ?

   Près de la charge, le champ est radial.

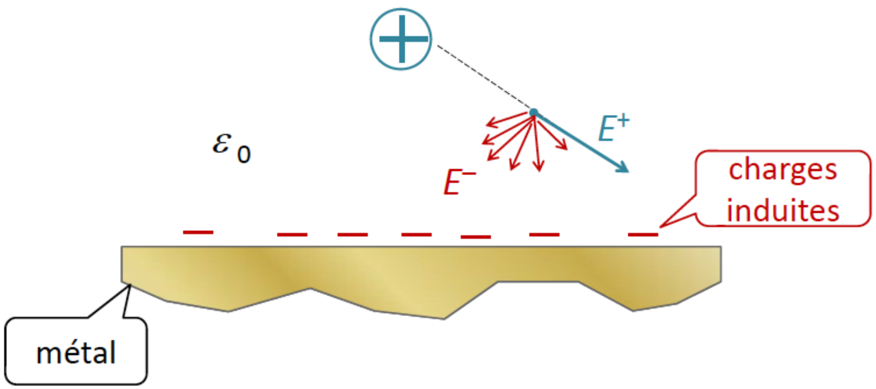
2. Quelle est l'orientation du champ électrique à l'interface avec le plan conducteur ?

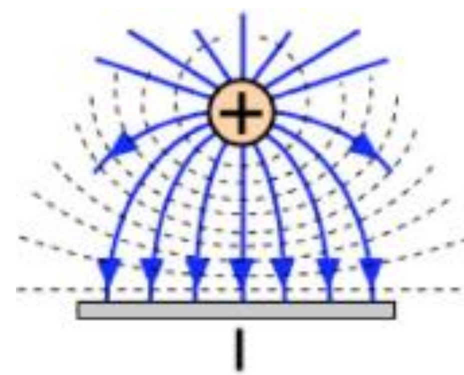
   Le champ électrique est normal au plan conducteur.

Théorie des images

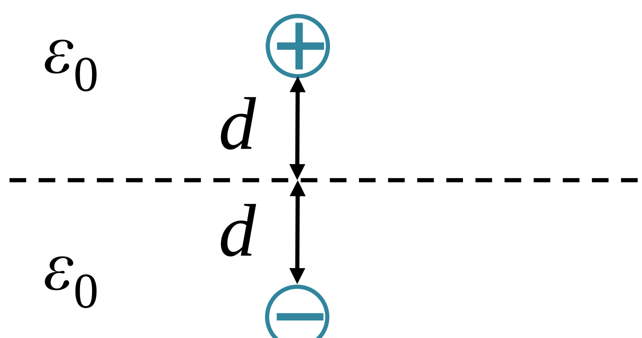
Pour calculer le champ électrique, il faudrait additionner le champ de la charge ponctuelle et le champ produit par les charges induites sur le plan.

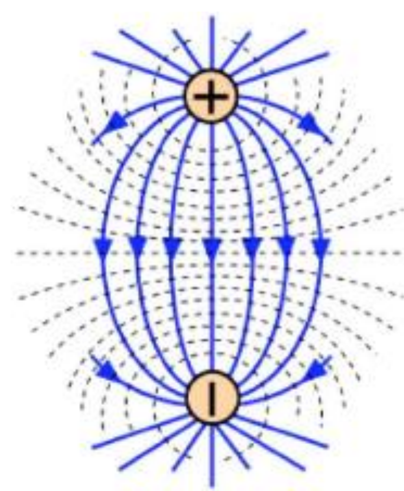
Difficulté : on ne connaît pas la densité non uniforme de charge induite sur le plan.





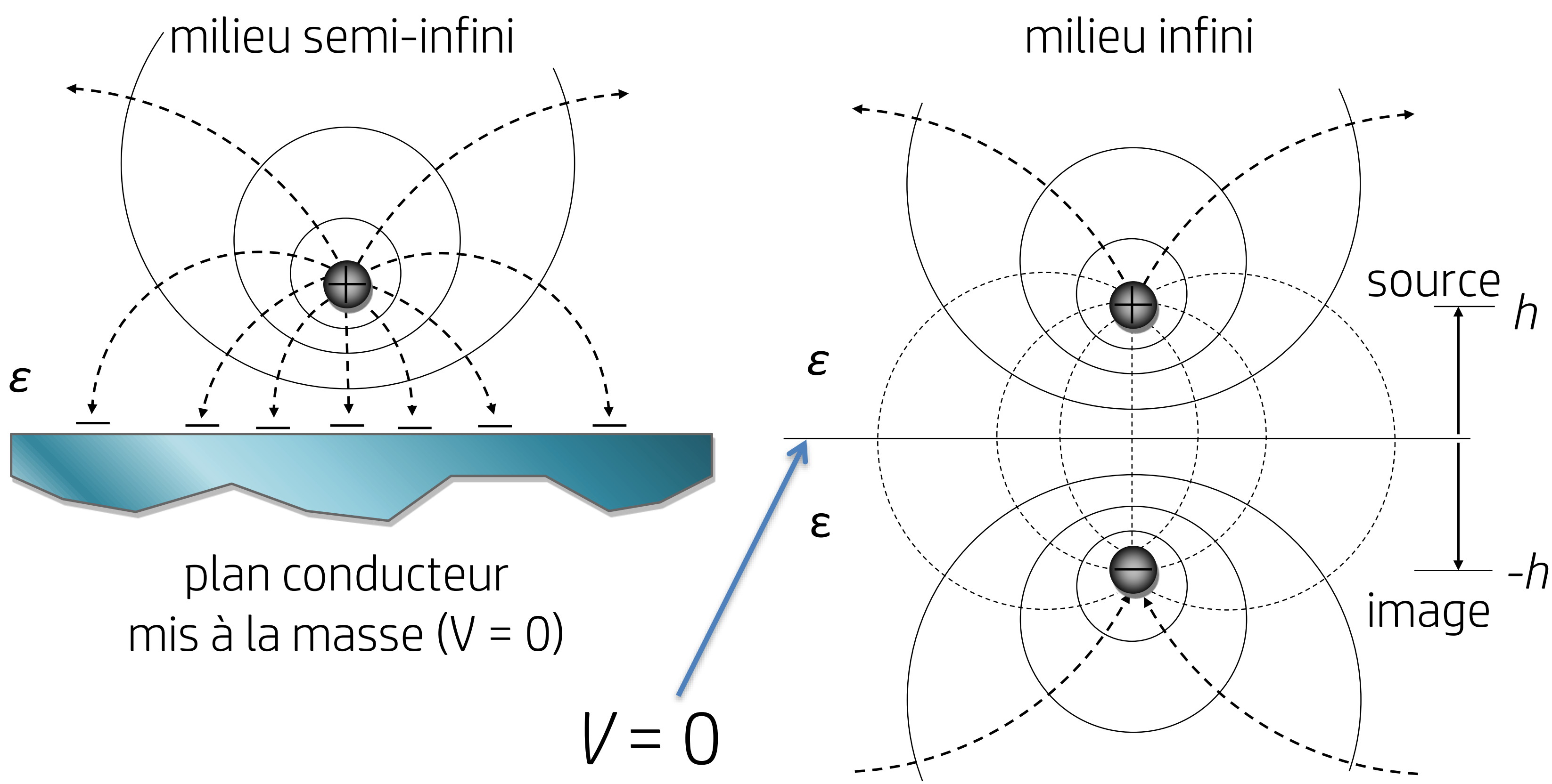
Le plan conducteur infini peut être remplacé par une charge ponctuelle de signe opposé à égale distance du plan.





Théorie des images

Le champ électrique dans le milieu semi-infini au-dessus du plan est la superposition des champs des deux charges ponctuelles.

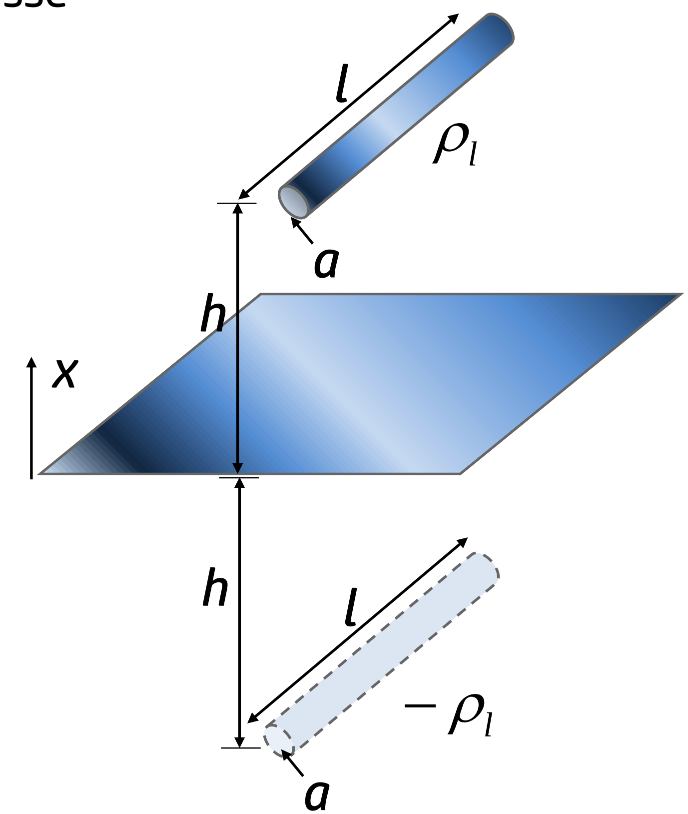


Exemple 5.3 – Capacité d'une ligne aérienne

Le sol est l'équivalent d'un plan conducteur mis à la masse du point de vue de la ligne de transmission.

Par quelle(s) image(s) doit-on remplacer le plan conducteur pour obtenir le même champ dans la région au-dessus du plan ?

On remplace le plan par un fil de même dimension et de densité de charge opposée situé à une hauteur h sous le plan, de sorte que $V = 0$ partout sur le plan.



Champ produit par un fil conducteur

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}$$

Champ produit par la ligne et le sol sur l'axe x joignant les fils

$$\vec{E} = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0(h-x)}\hat{x} + \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0(h+x)}\hat{x}$$

Exemple 5.3 – Capacité d'une ligne aérienne

Champ produit par la ligne et le sol sur l'axe x

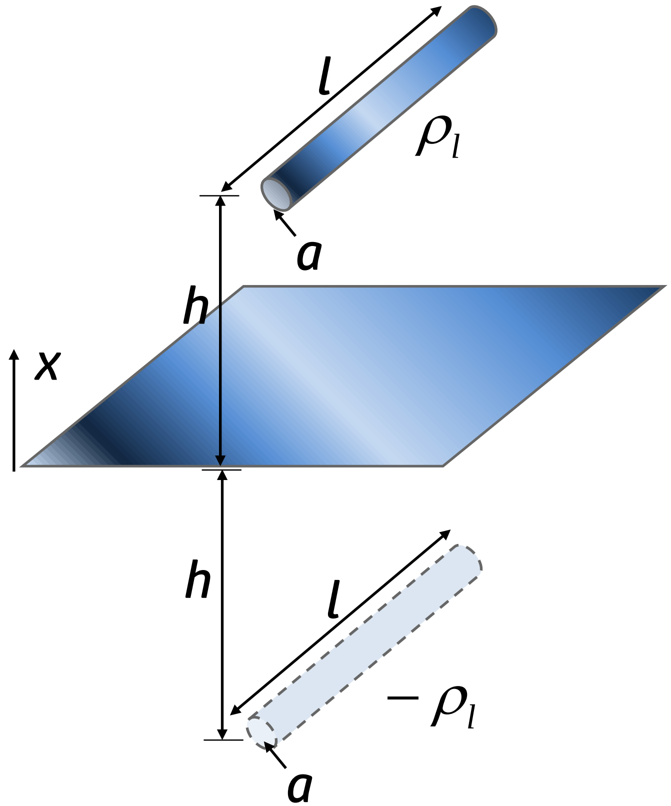
$$\vec{E} = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{h-x}+\frac{1}{h+x}\right]\hat{x}$$

Différence de potentiel entre la ligne et le sol

$$V = -\int_0^{h-a}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{h}\left[\frac{1}{h-x}+\frac{1}{h+x}\right]dx$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\ln(h-x)+\ln(h+x)\right|_0^{h-a}$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{h+x}{h-x}\right)\right|_0^{h-a} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2h-a}{a}\right)$$



Capacité de la ligne

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_l l}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{2h-a}{a}\right)}}$$

Qu'arrive-t-il si $a \to h$?

La capacité tend vers ∞, car la distance entre les conducteurs diminue.

Théorie des images – Résumé

1. Déterminer si les lignes de flux et les équipotentielles du problème s'apparentent à celles d'un autre problème simple et connu ;
2. Remplacer le plan conducteur par une distribution de charge image telle que le potentiel soit nul ($V = 0$) sur tout le plan conducteur ;
3. Calculer le champ électrique dans le problème où le plan est remplacé par la distribution de charge image ;
4. Déterminer la quantité d'intérêt à partir du champ calculé (différence de potentiel, capacité, etc.).