– PHS1102 –
Champs électromagnétiques

Chapitre 6 – Équation de Laplace

1re équation de Maxwell

Équation de Poisson

Équation de Laplace

- Solutions analytiques en 1D (cas symétriques)
- Résolution numérique par différences finies

Objectifs de la semaine

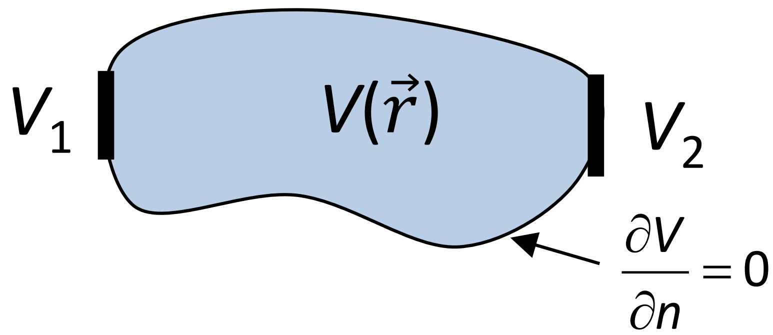
1^{re} loi de Maxwell	• **Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle** afin d'obtenir la 1^{re} loi de Maxwell.
Équation de Laplace	• **Écrire l'équation de Laplace** qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.
Résolution analytique de l'équation de Laplace (cas symétriques en 1D)	• **Déterminer le potentiel** dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.
Résolution numérique de l'équation de Laplace par différences finies	• **Appliquer la méthode des différences finies** pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

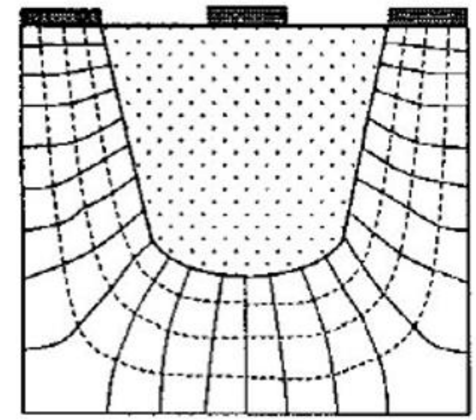
Objectifs de la semaine

1re loi de Maxwell	• **Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle** afin d'obtenir la 1re loi de Maxwell.
Équation de Laplace	• **Écrire l'équation de Laplace** qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.
Résolution analytique de l'équation de Laplace (cas symétriques en 1D)	• **Déterminer le potentiel** dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.
Résolution numérique de l'équation de Laplace par différences finies	• **Appliquer la méthode des différences finies** pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

Comment résoudre pour une situation générale ?

Comment calculer le potentiel dans une région soumise à des conditions frontières, sans devoir calculer le champ électrique ?





Exemple

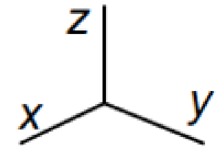
Quel est le potentiel $V(\vec{r})$ dans un matériau conducteur mis en contact avec deux électrodes maintenues à des potentiels constants V_1 et V_2 ? Le conducteur est entouré d'un matériau isolant (air).

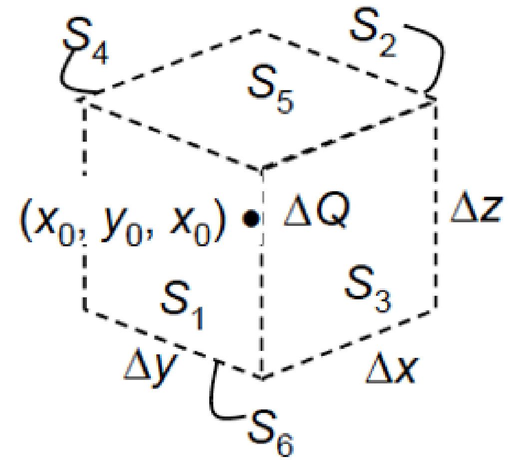
On souhaite développer une équation différentielle qui permet de décrire le potentiel dans la région sans avoir à calculer le champ électrique ou la charge sur les électrodes.

Pour cela, il faut réécrire la loi de Gauss et l'équation de continuité du courant sous leur forme différentielle grâce à l'opérateur divergence.

Réécrivons la loi de Gauss…

Appliquons la loi de Gauss à un volume élémentaire $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.





$$\Delta Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$S_1 = S_2 = \Delta y \Delta z$$

$$S_3 = S_4 = \Delta x \Delta z$$

$$S_5 = S_6 = \Delta x \Delta y$$

$$\Delta Q = \oint_{S_1 \cup \cdots \cup S_6} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

D^+ : faces avant (1, 3 et 5) D^- : faces arrière (2, 4 et 6)

$$\Delta Q = \left(D_x^+ S_1 - D_x^- S_2\right) + \left(D_y^+ S_3 - D_y^- S_4\right) + \left(D_z^+ S_5 - D_z^- S_6\right)$$

Signes : $\vec{D}$ positif dans le sens positif des axes.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{D_x^+ - D_x^-}{\Delta x} + \frac{D_y^+ - D_y^-}{\Delta y} + \frac{D_z^+ - D_z^-}{\Delta z}$$

On remplace les S_i et on divise l'équation par ΔV.

Densité volumique de charge

$$\rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

On prend la limite quand les dimensions du volume tendent vers 0.

Opérateur divergence

L'équation obtenue peut se réécrire en utilisant l'**opérateur divergence**.

$$\rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Opérateur divergence en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, on obtient la divergence d'un champ vectoriel $\vec{F}(\vec{r})$ en prenant le produit scalaire avec l'opérateur gradient.

Champ vectoriel $\vec{F}$ $\quad \vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$

Gradient $\quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

L'opérateur divergence s'applique à un champ vectoriel et produit un champ scalaire.

Est-ce que l'opérateur divergence s'écrit de cette façon dans tous les systèmes de coordonnées ?

Opérateur divergence

Les expressions de l'opérateur divergence dans les différents systèmes de coordonnées se retrouvent à l'annexe 4 du manuel.

Champ vectoriel	Divergence	Champ scalaire
$\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$	$\longrightarrow$	$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$

Coordonnées cartésiennes

$$\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques

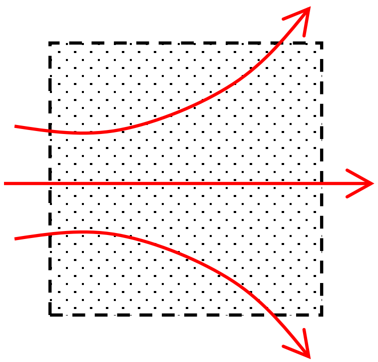
$$\nabla\cdot\vec{F}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques

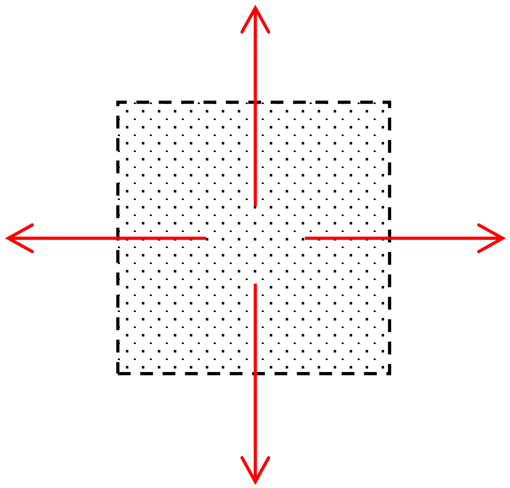
$$\nabla\cdot\vec{F}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

Interprétation de l'opérateur divergence

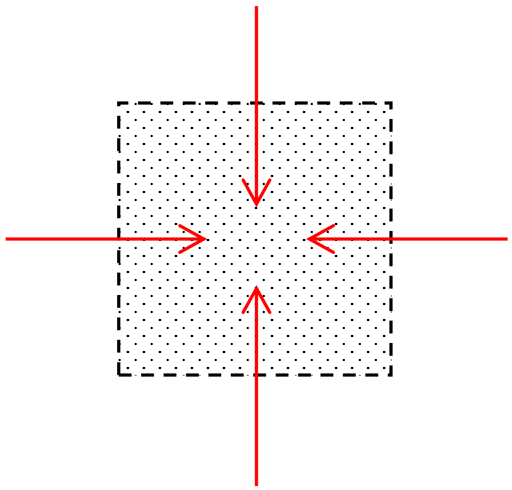
La divergence d'une quantité en un point donné représente le flux total de cette quantité qui sort d'un volume infinitésimal situé en ce point.



$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{D} > 0$$



$$\nabla \cdot \vec{D} < 0$$

1re équation de Maxwell

Avec l'opérateur divergence, il est possible de relier la densité de flux électrique $\vec{D}$ à la densité volumique de charge libre ρ_v.

$$\Delta Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

La divergence de la densité de flux électrique est égale à la densité volumique de charge.

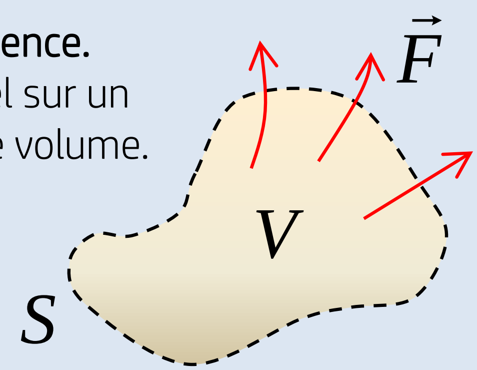
1re équation de Maxwell

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$$

La 1re équation de Maxwell est une équation différentielle équivalente à la loi de Gauss.

La 1re équation de Maxwell découle du théorème de flux-divergence.
Le théorème relie l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume à l'intégrale du flux de ce champ sur la surface qui borne ce volume.

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$



Objectifs de la semaine

1re loi de Maxwell	• **Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle** afin d'obtenir la 1re loi de Maxwell.
Équation de Laplace	• **Écrire l'équation de Laplace** qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.
Résolution analytique de l'équation de Laplace (cas symétriques en 1D)	• **Déterminer le potentiel** dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.
Résolution numérique de l'équation de Laplace par différences finies	• **Appliquer la méthode des différences finies** pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

Réécrivons la 1re équation de Maxwell…

En exprimant la densité de flux en fonction du champ électrique, puis du potentiel dans la 1re équation de Maxwell, on parvient à relier potentiel et densité de charge.

1re équation de Maxwell

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$$

Relation entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ (diélectrique linéaire et isotrope)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

Relation entre $\vec{E}$ et V

$$\vec{E} = -\nabla V$$

En remplaçant, on trouve :

Diélectrique homogène

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \left(\varepsilon \vec{E}\right) = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon \nabla \cdot \left(-\nabla V\right) = -\varepsilon \nabla^2 V$$

où l'opérateur ∇^2 est le **laplacien scalaire (ou tout simplement laplacien)**. En coordonnées scalaire, le laplacien s'écrit :

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Opérateur laplacien

Les expressions de l'opérateur laplacien dans les différents systèmes de coordonnées se retrouvent à l'annexe 4 du manuel.

Champ scalaire	Laplacien	Champ scalaire
$V(\vec{r})$	$\longrightarrow$	$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V)$

Coordonnées cartésiennes

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordonnées cylindriques

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Équations de Poisson et de Laplace
dans un diélectrique homogène, linéaire et isotrope

1re équation de Maxwell

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = -\varepsilon \nabla^2 V$$

Équation de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

Siméon Denis Poisson
(1781-1840)

Si la densité de charge est nulle dans le diélectrique,
on a $\rho_v = 0$ et on trouve l'**équation de Laplace**.

Densité de charge nulle

$$\rho_v = 0$$

Équation de Laplace

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

Pierre-Simon de Laplace
(1749-1827)

Équation de Laplace

dans un conducteur homogène, linéaire et isotrope

L'équation de Laplace s'applique également dans les matériaux conducteurs dans lesquels circulent des courants stationnaires.

Relation entre $\vec{J}$ et $\vec{E}$ dans un conducteur

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

Relation entre $\vec{E}$ et V

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Équation de continuité (courants stationnaires)

Th. flux-divergence

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Par un développement similaire à celui qui a mené a l'équation de Laplace dans un diélectrique, on obtient ici l'équation de Laplace pour un conducteur.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J} &= \sigma\nabla \cdot \vec{E} \\ &= \sigma\nabla \cdot \left(-\nabla V\right) \\ &= -\sigma\nabla^2 V = 0 \end{aligned}$$

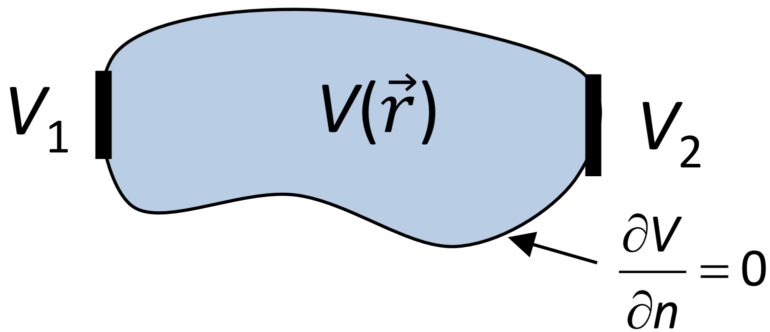
$\Rightarrow$

Équation de Laplace

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

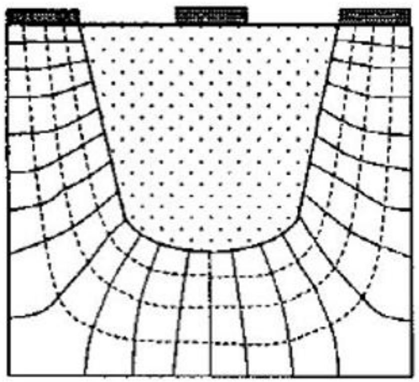
Résolution de l'équation de Laplace

L'équation de Laplace se résout sur une région en spécifiant des conditions frontières aux bords de cette région.



Équation de Laplace

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$



L'objectif est donc de trouver la fonction potentiel $V(\vec{r})$ qui respecte simultanément :

1. L'équation de Laplace ;
2. Les conditions frontières spécifiées.

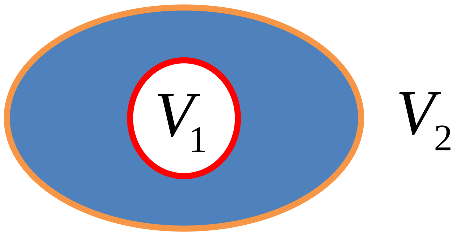
Théorème d'unicité de la solution

Il est possible de montrer qu'il n'existe qu'une seule fonction $V(\vec{r})$ qui respecte à la fois l'équation de Laplace et un ensemble donné de conditions frontières.

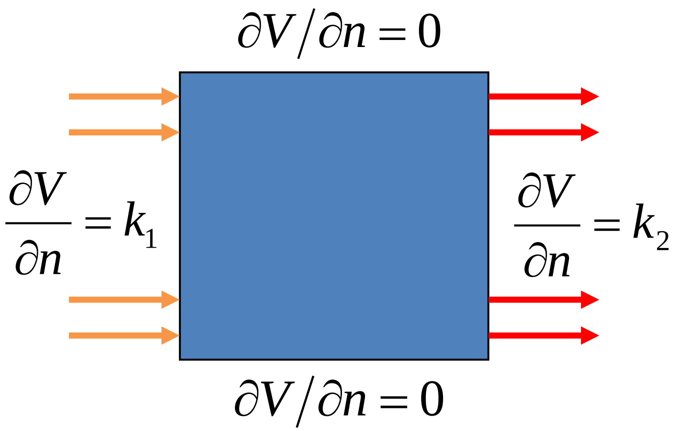
Types de conditions frontières

Dérivée directionnelle selon le vecteur $\hat{n}$ normal à une surface. $\frac{\partial V}{\partial n} = (\nabla V)\cdot\hat{n}$

1. **Conditions de Dirichlet**
   $V(\vec{r})$ est connu sur toute la surface entourant le domaine.



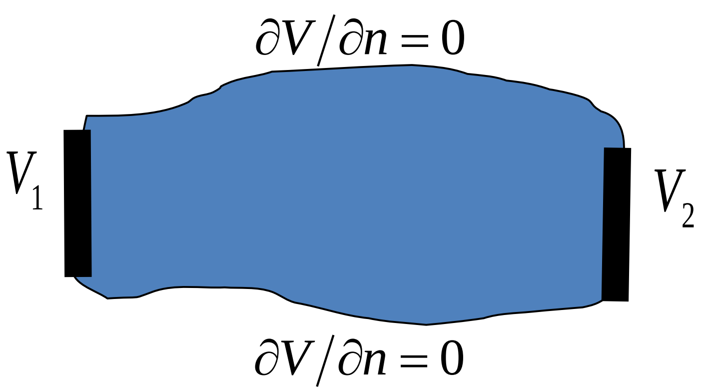
2. **Conditions de Neumann**
   Dérivée normale de $V(\vec{r})$ est connue sur toute la surface entourant le domaine.



Que représente la dérivée normale du potentiel ?

Le champ électrique !

3. **Conditions mixtes**
   $V(\vec{r})$ est connue sur une partie de la surface entourant le domaine et la dérivée normale de $V(\vec{r})$ est connue sur reste de la surface.



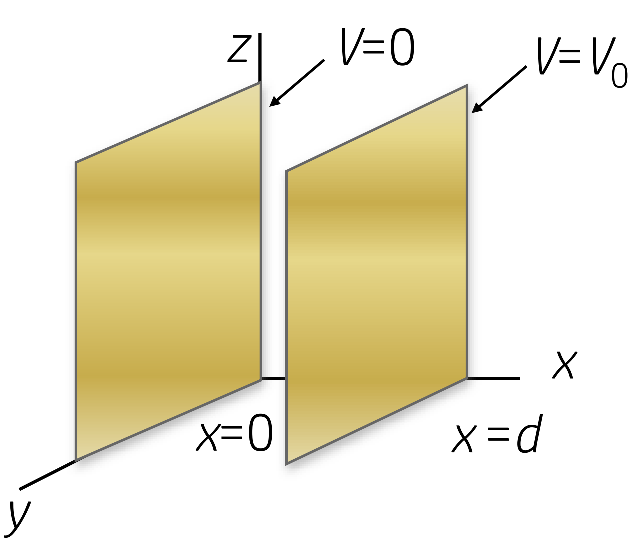
Objectifs de la semaine

1re loi de Maxwell	• **Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle** afin d'obtenir la 1re loi de Maxwell.
Équation de Laplace	• **Écrire l'équation de Laplace** qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.
Résolution analytique de l'équation de Laplace (cas symétriques en 1D)	• **Déterminer le potentiel** dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.
Résolution numérique de l'équation de Laplace par différences finies	• **Appliquer la méthode des différences finies** pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

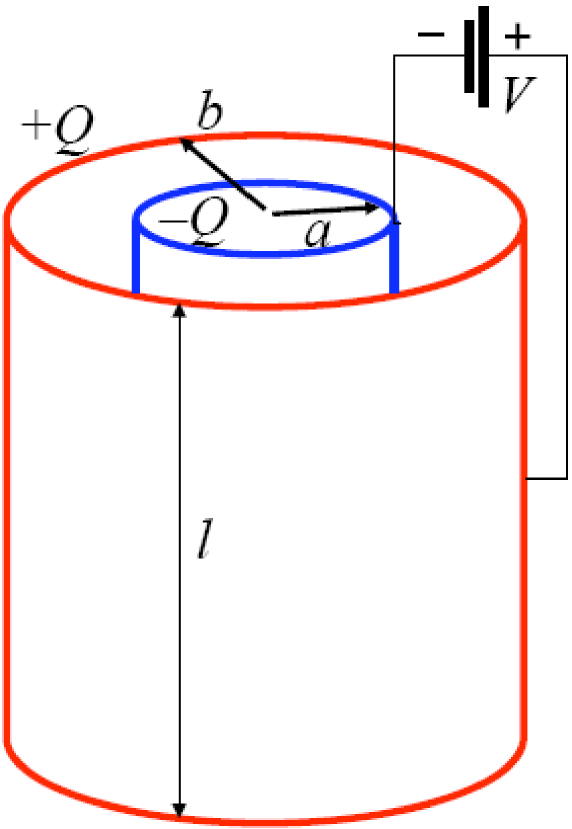
Solutions 1D à l'équation de Laplace

La solution analytique de l'équation de Laplace est connue pour certaines géométries simples où le potentiel ne dépend que d'une seule variable (1D).

Dans les situations suivantes, de quelle variable dépend le potentiel $V(\vec{r})$?



Condensateur plan à plaques parallèles
$V(x)$

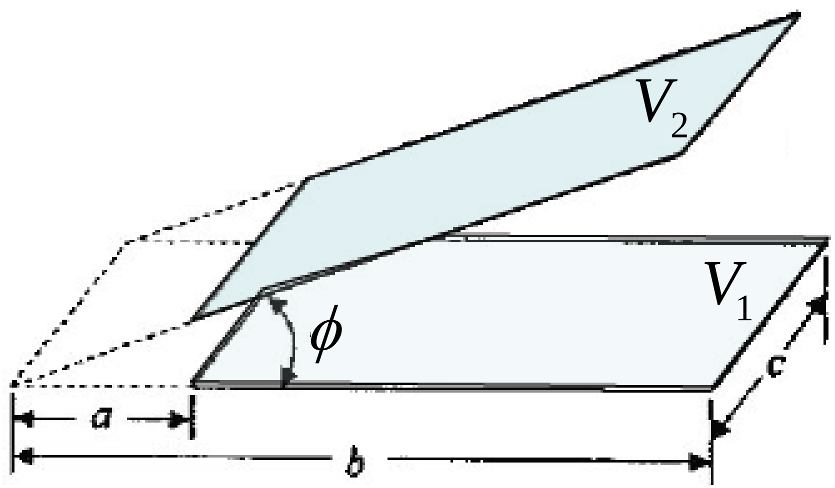


Câble coaxial
$V(\rho)$

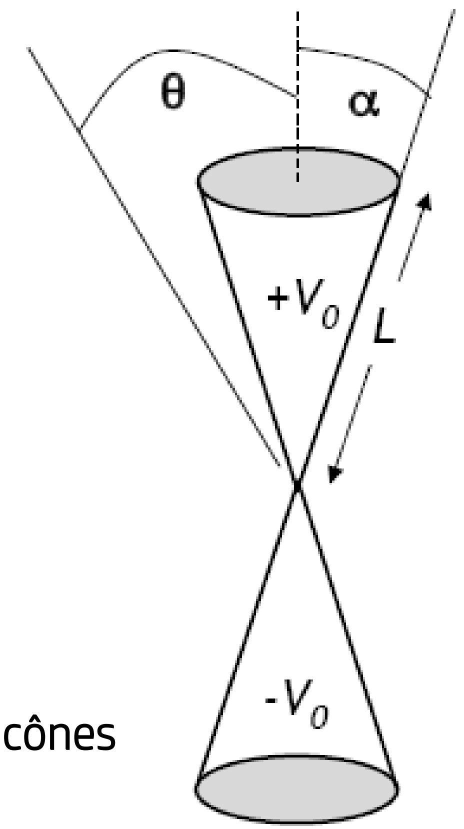
Solutions 1D à l'équation de Laplace

La solution analytique de l'équation de Laplace est connue pour certaines géométries simples où le potentiel ne dépend que d'une seule variable (1D).

Dans les situations suivantes, de quelle variable dépend le potentiel $V(\vec{r})$?



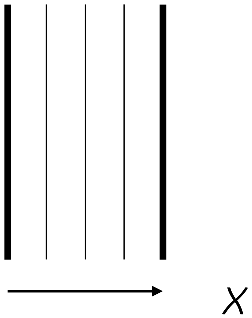
Condensateur plan en coin
$V(\phi)$



Antenne doubles cônes
$V(\theta)$

Solutions 1D à l'équation de Laplace

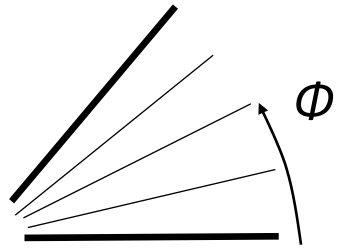
Cartésien



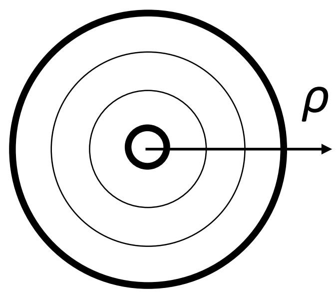
$$\boxed{V(x) = Ax + B}$$

Attention!
Les angles sont
exprimés en radians
et non en degrés.

Cylindrique

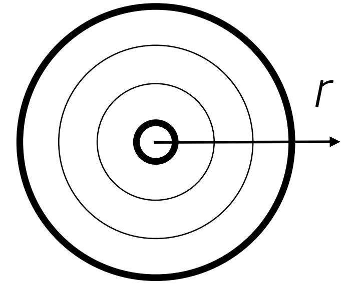


$$\boxed{V(\phi) = A\phi + B}$$

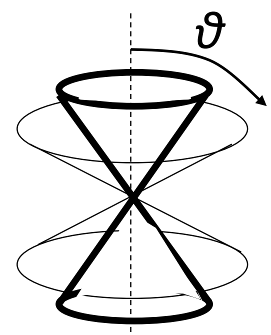


$$\boxed{V(\rho) = A\ln\rho + B}$$

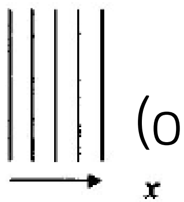
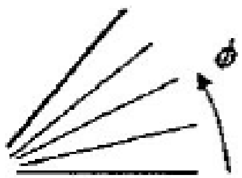
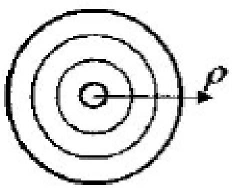
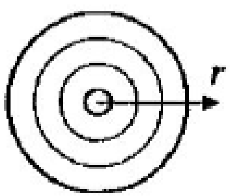
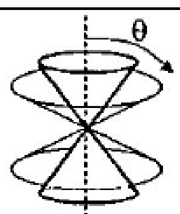
Sphérique



$$\boxed{V(r) = \frac{A}{r} + B}$$

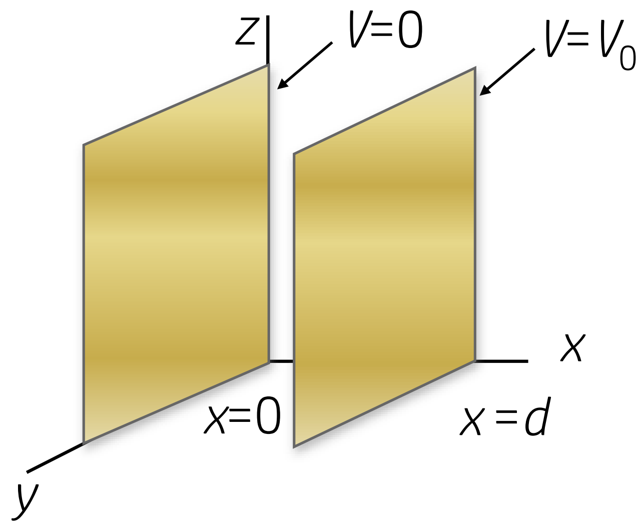


$$\boxed{V(\theta) = A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + B}$$

Variables	Équation de Laplace	Solution générale
 x (ou y ou z)	$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$	$$V(x) = Ax + B$$
 ϕ	$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$	$$V(\phi) = A\phi + B$$
 ρ	$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0$$	$$V(\rho) = A\ln(\rho) + B$$
 r	$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$	$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$
 θ	$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0$$	$$V(\theta) = A\ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + B$$

Exemple 6.1 – Potentiel dans un condensateur plan

Quelle est la distribution de potentiel $V(\vec{r})$ entre les armatures du condensateur ?



1. **Symétrie**
   On néglige les effets de bord (armatures très grandes par rapport à d), de sorte que V dépend de x seulement.

$$V(\vec{r}) = V(x)$$

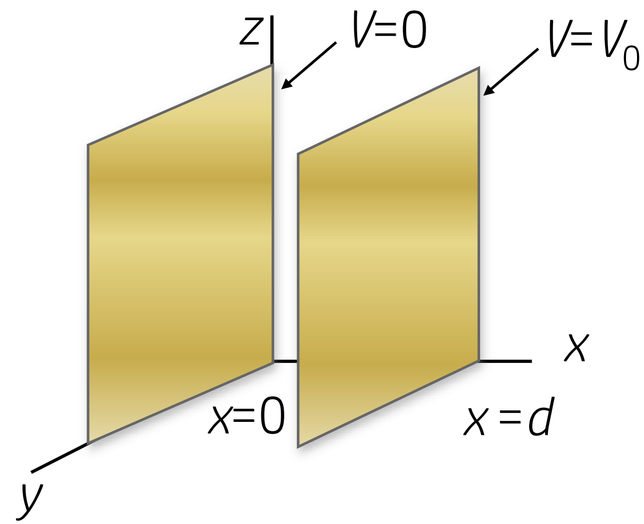
2. **Choix de la solution à l'équation de Laplace**
   La solution pour une symétrie cartésienne est :

$$\nabla^2 V = 0 \quad V(\vec{r}) = V(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = Ax + B}$$

Comment déterminer les constantes A et B ?

Exemple 6.1 – Potentiel dans un condensateur plan

3. **Conditions frontières**
   Le potentiel est spécifié sur les deux armatures. Nous avons deux conditions pour déterminer les deux constantes A et B.



$$V(x) = Ax + B$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$V(d) = V_0 \Rightarrow Ad = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{d}$$

La solution est donc : $$\boxed{V(x) = \frac{V_0}{d}x}$$

Une bonne habitude est de revérifier si la solution respecte bien les conditions frontières pour éviter les erreurs d'algèbre.

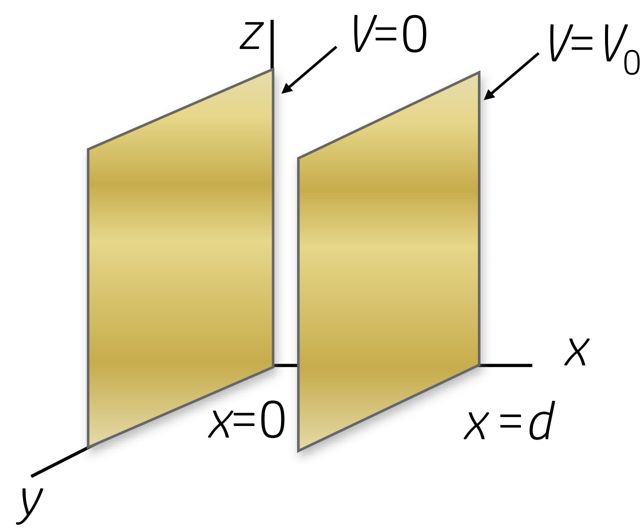
Est-ce cohérent avec les résultats des chapitres précédents ?

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_0}{d}\hat{x}$$

Oui, le champ électrique est constant, perpendiculaire aux armatures et orienté de l'armature positive vers l'armature négative.

Exemple 6.1 – Potentiel dans un condensateur plan

Que trouve-t-on pour la capacité du condensateur ?



Densité de flux entre les armatures

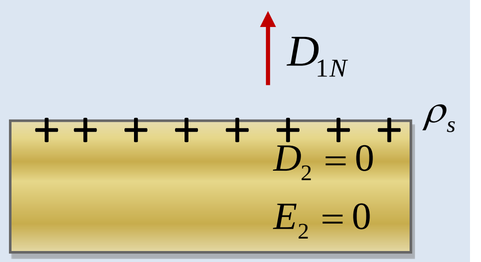
$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d}\hat{x} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{\varepsilon V_0}{d}\hat{x}$$

Interface diélectrique-conducteur (à $x = d$)

Pour avoir le bon signe pour la densité de charge ρ_S, il faut bien appliquer la condition frontière. La condition a été trouvée avec D_{1N} positif qui pointe du conducteur vers le diélectrique (vers les x négatifs ici). Dans ce problème, $\vec{D}$ pointe vers les x négatifs, ce qui donne une densité de charge positive en $x = d$.

RAPPEL

$$D_{1N} = \rho_s$$



$$D_{1N} = \rho_s \Rightarrow \rho_s = \frac{Q}{S} = \frac{\varepsilon V_0}{d}$$

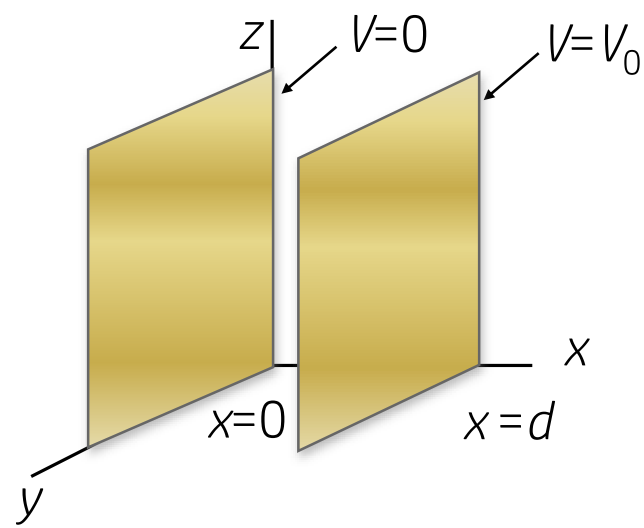
La capacité est donc :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\varepsilon S}{d}}$$

On retrouve bel et bien le résultat du chapitre 3!

Retour sur l'unicité de la solution à l'équation de Laplace

Équation de Laplace
Si l'on ne spécifie pas de conditions frontières, il existe une infinité de solutions qui respectent l'équation de Laplace pour cette géométrie.



Symétrie

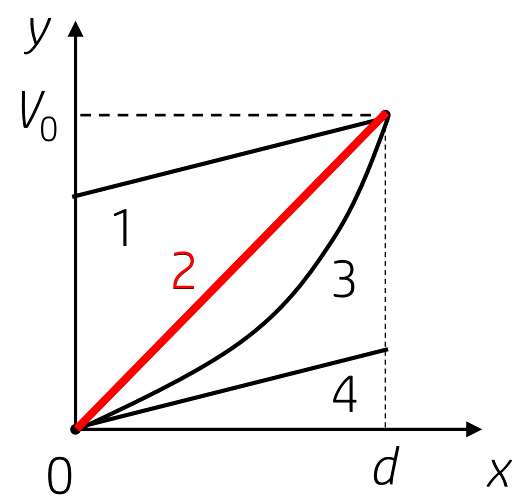
$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V(x) = Ax + B$$

Courbes 1 et 4 : Solutions à l'équation de Laplace, mais ne respectent pas l'une des deux conditions frontières

Courbe 3 : Respecte les conditions frontières, mais n'est pas solution à l'équation de Laplace

Courbe 2 : Seule courbe à respecter simultanément l'équation de Laplace et les conditions frontières

$$V(0) = 0$$
$$V(d) = V_0$$

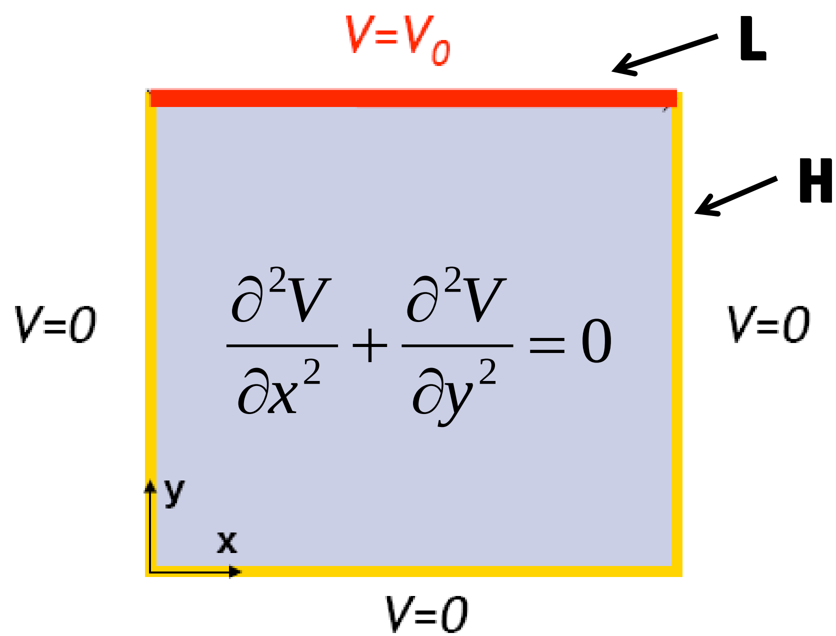


Objectifs de la semaine

1^{re} loi de Maxwell	• **Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle** afin d'obtenir la 1^{re} loi de Maxwell.
Équation de Laplace	• **Écrire l'équation de Laplace** qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.
Résolution analytique de l'équation de Laplace (cas symétriques en 1D)	• **Déterminer le potentiel** dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.
Résolution numérique de l'équation de Laplace par différences finies	• **Appliquer la méthode des différences finies** pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

Comment résoudre pour une situation générale ?

Il peut être complexe de résoudre l'équation de Laplace en 2D, même pour des problèmes en l'apparence simples.



Exemple
Domaine rectangulaire avec potentiel nul sur 3 des 4 faces et potentiel V_0 sur la face du haut.

Une solution analytique existe pour ce problème, mais elle est passablement complexe…

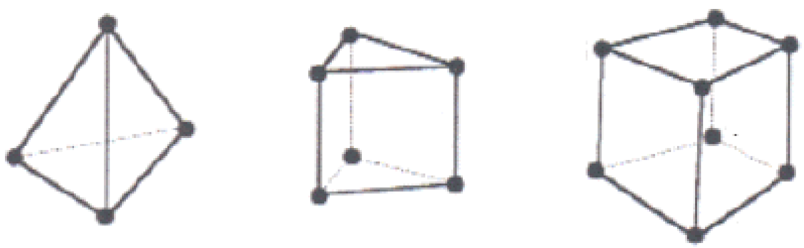
$$\boxed{V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{\sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}y\right)}{\sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}H\right)}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)}$$

En général, pour résoudre un problème dont la solution analytique est inconnue ou trop complexe à obtenir, on utilise des méthodes de résolution numériques.

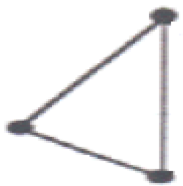
Méthodes de résolution numériques

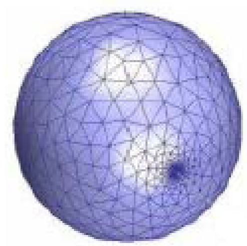
L'idée générale d'une méthode numérique est de **discrétiser le domaine de résolution pour créer un maillage** (un ensemble de points) sur lequel une **solution numérique approximative** peut être calculée. **Plus le maillage est fin, plus la solution numérique s'approche de la solution analytique.**

méthode des éléments finis:
éléments de volume (3D)



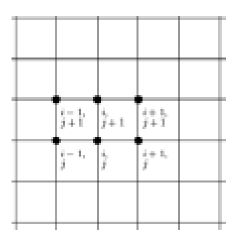
méthode des éléments frontières:
éléments de surface (triangles) séparant des régions différentes

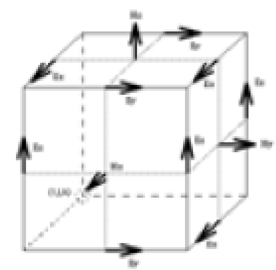




méthode des différences finies:
carrés (2D) ou cubes (3D)

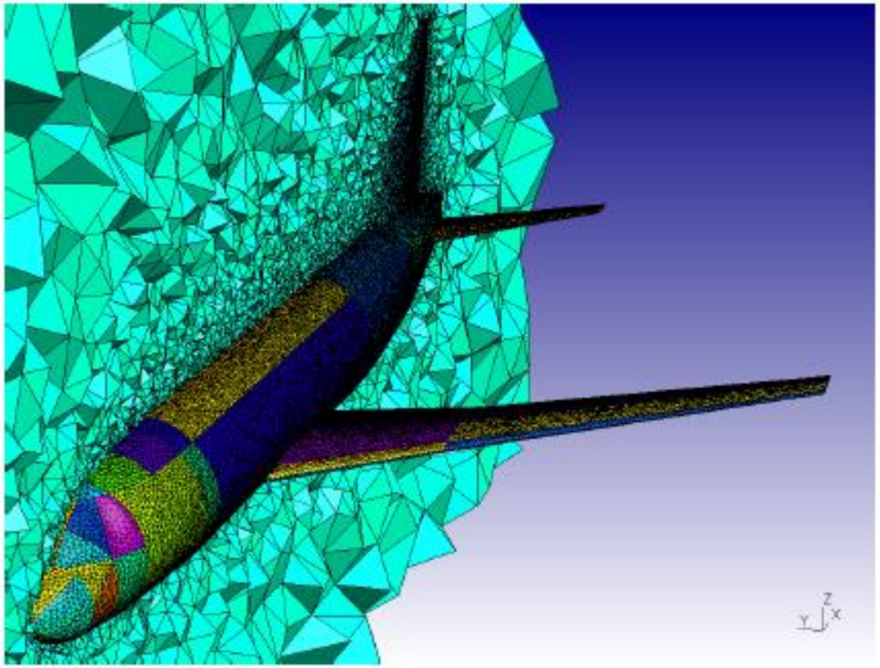
Vue dans ce cours



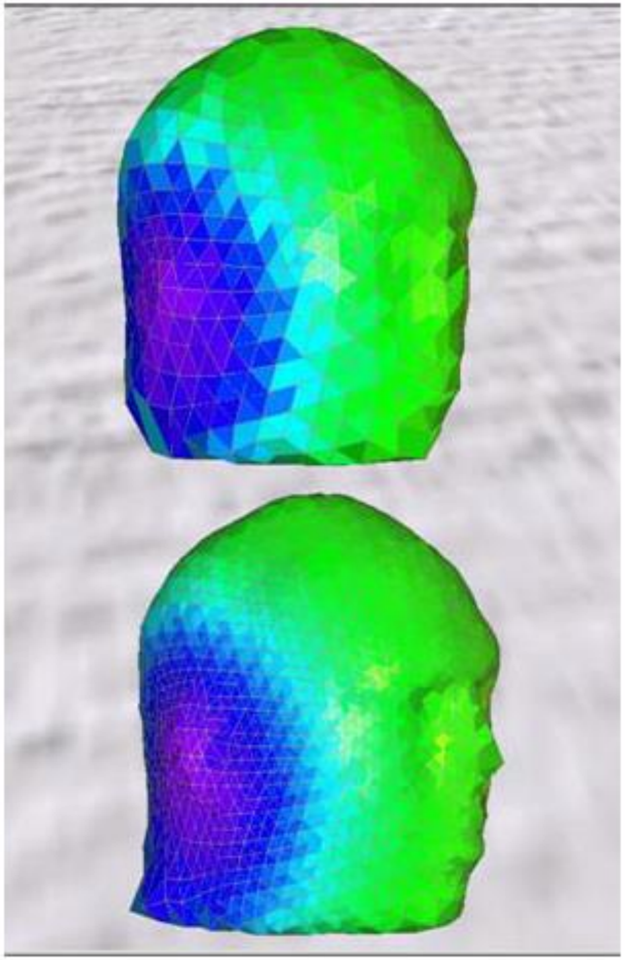


Méthode des éléments finis

Cette méthode est puissante, car elle s'applique à des géométries variées. Elle est souvent utilisée en ingénierie. Par contre, elle est trop complexe pour être vue dans ce cours.



Mécanique des fluides

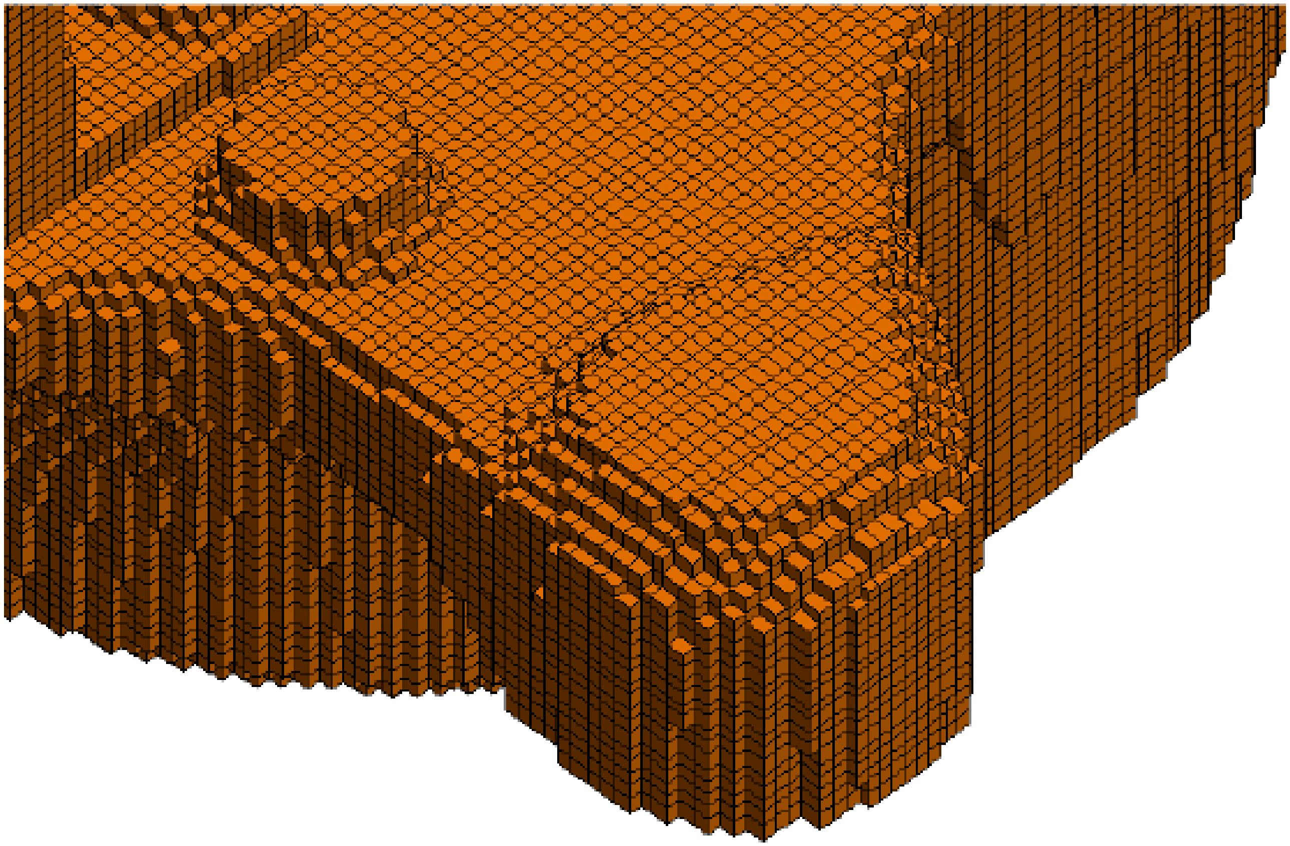


Effet des ondes électromagnétiques (téléphone cellulaire)

Méthode des différences finies

Cette méthode est plus simple à implémenter que celle des éléments finis, mais elle est limitée à des maillages rectangulaires. Il est donc plus difficile de représenter fidèlement une géométrie complexe de manière lisse.

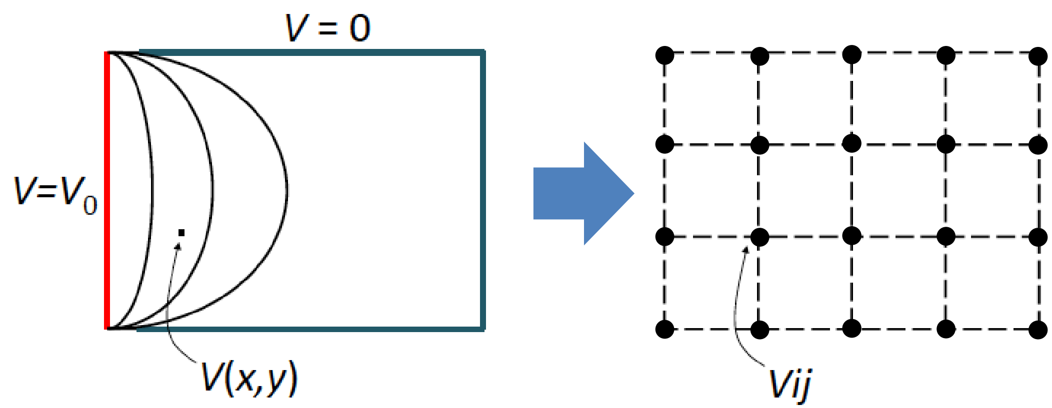
Maillage rectangulaire d'une pièce mécanique



Méthode des différences finies

Voici les étapes principales à suivre pour appliquer la méthode des différences finies.

1. **Définir un maillage rectangulaire**
   Il s'agit de discrétiser le domaine continu en créant un maillage rectangulaire. L'équation sera résolue sur les points du maillage.



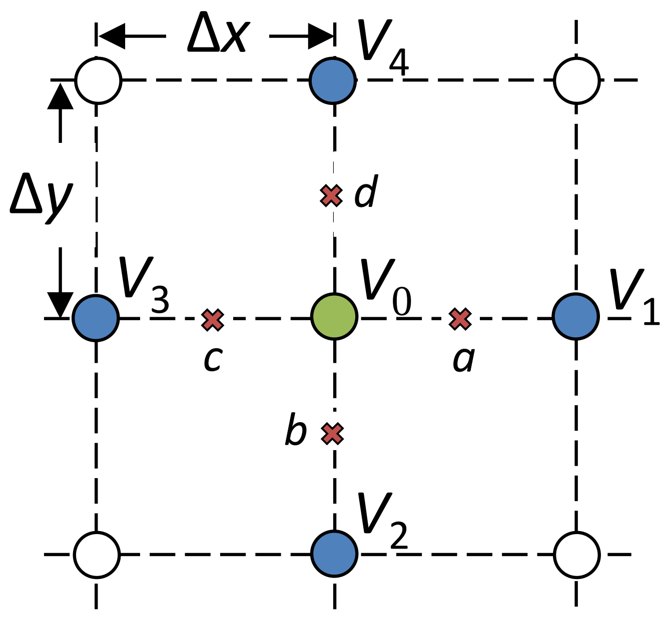
2. **Discrétiser l'équation différentielle avec des formules de différences finies**
   Il faut réécrire l'équation différentielle à chaque nœud du maillage (intérieur et frontières) en fonction des valeurs V_{ij} de la solution aux nœuds voisins.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad ?$$

3. **Résoudre l'équation différentielle discrétisée**
   Il faut résoudre le système d'équations (de manière directe ou itérative) formé des équations discrétisées décrivant tous les nœuds du maillage.

Discrétisation de l'équation de Laplace en 2D

Remplacer les dérivées secondes du laplacien par des formules de différences finies.



Dérivées premières par rapport à x

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \approx \frac{V_1 - V_0}{\Delta x} \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \approx \frac{V_0 - V_3}{\Delta x}$$

Dérivée seconde par rapport à x au point (0,0)

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{\Delta x} \approx \frac{-2V_0 + V_1 + V_3}{(\Delta x)^2}$$

Dérivée seconde par rapport à y en (0,0)

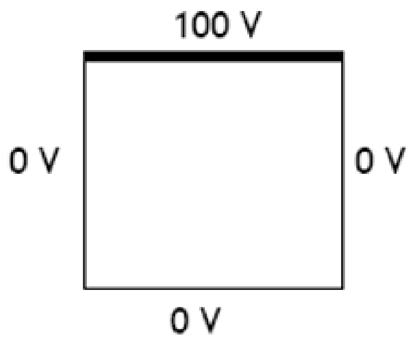
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} \approx \frac{-2V_0 + V_2 + V_4}{(\Delta y)^2}$$

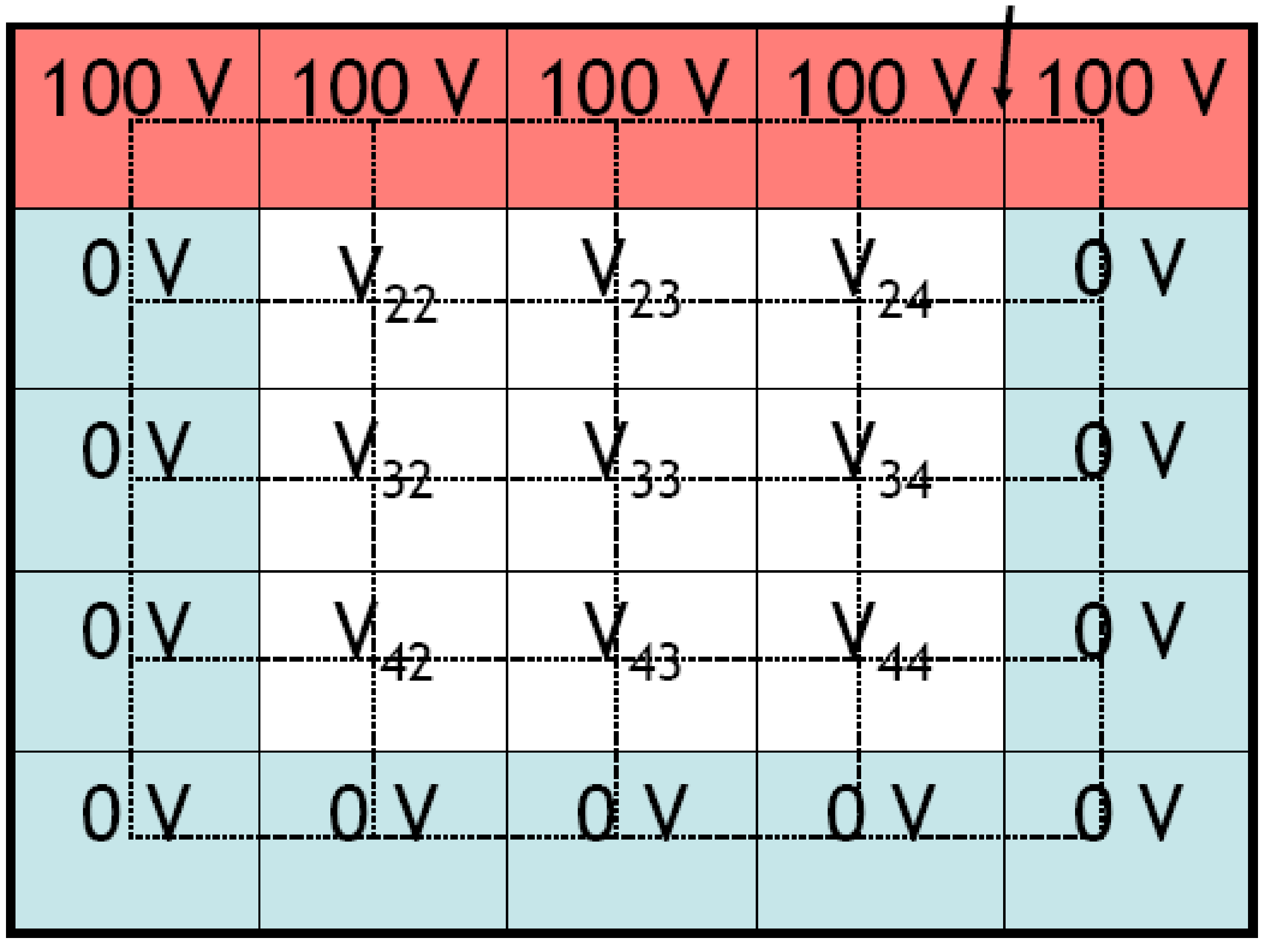
Équation de Laplace discrétisée (maillage carré $\Delta x = \Delta y$)

Valide à l'intérieur du domaine seulement

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{-4V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}}$$

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet





Nœuds blancs

Appliquer l'équation de Laplace discrétisée

$$\boxed{V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}}$$

Nœuds rouges et bleus

Conditions de Dirichlet : potentiel constant maintenu tout au long de la résolution

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	V_{22}	V_{23}	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

Conditions initiales sur le maillage : potentiel nul sur les nœuds intérieurs (blancs)

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	V_{22}'	V_{23}	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1[re] itération : on applique l'équation de Laplace discrétisée à tous les nœuds intérieurs avec les valeurs du potentiel les plus à jour

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	V_{22}'	V_{23}'	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1re itération : on applique l'équation de Laplace discrétisée à tous les nœuds intérieurs avec les valeurs du potentiel les plus à jour

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	V_{22}'	V_{23}'	V_{24}'	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1re itération : on applique l'équation de Laplace discrétisée à tous les nœuds intérieurs avec les valeurs du potentiel les plus à jour

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	V_{22}'	V_{23}'	V_{24}'	0 V
0 V	V_{32}'	V_{33}'	V_{34}'	0 V
0 V	V_{42}'	V_{43}'	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1re itération : on applique l'équation de Laplace discrétisée à tous les nœuds intérieurs avec les valeurs du potentiel les plus à jour

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	V_{22}'	V_{23}'	V_{24}'	0 V
0 V	V_{32}'	V_{33}'	V_{34}'	0 V
0 V	V_{42}'	V_{43}'	V_{44}'	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

2e itération : on applique l'équation de Laplace discrétisée à tous les nœuds intérieurs avec les potentiels calculés à la 1re itération

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	25	V_{23}	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1re itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	25	31,25	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1^{re} itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	25	31,25	32,81	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1re itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	25	31,25	32,81	0 V
0 V	6,25	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1re itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	25	31,25	32,81	0 V
0 V	6,25	9,37	10,54	0 V
0 V	1,56	2,73	3,32	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1re itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	34,38	31,25	32,81	0 V
0 V	6,25	9,37	10,54	0 V
0 V	1,56	2,73	3,32	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

2e itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	42,82	52,64	42,84	0 V
0 V	18,72	24,97	18,73	0 V
0 V	7,13	9,81	7,13	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

10e itération : valeurs numériques

Est-ce que la convergence est atteinte ?

Pseudocode pour la méthode des différence finies

`V[i,j]`	Valeurs du potentiel dans un tableau
`Vnouveau`	Potentiel mis à jour en un point (moyenne des 4 voisins)
`Seuil`	Seuil de tolérance d'écart entre deux itérations
`Nitera`	Numéro de l'itération actuelle
`MaxItera`	Nombre maximum d'itérations à exécuter
`Convergence`	Variable booléenne (logique) indiquant si le système a convergé

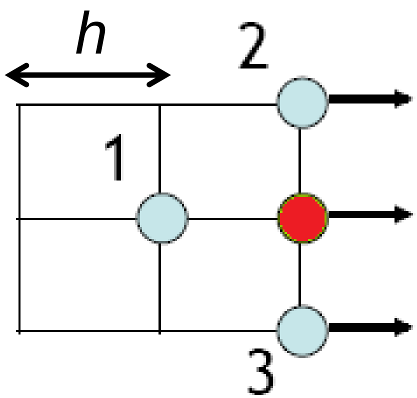
```
Initialiser le tableau V
(zéro à l'intérieur, valeurs appropriées aux frontières)
Nitera ← 0
Répéter :
  Incrémenter Nitera
  Convergence ← vrai

  Pour chaque point intérieur (i,j) , répéter:
     Vnouveau ← moyenne des 4 voisins
     Si | Vnouveau - V[i, j] | > Seuil
        Alors Convergence ← faux
     V[i, j] ← Vnouveau
Jusqu'à ce que Convergence soit vrai ou que Nitera > MaxItera
```

Conditions frontières de Neumann

Les conditions frontières de Neumann apparaissent lorsque la valeur du champ électrique (dérivée spatiale du potentiel) doit respecter les conditions frontières à une interface conducteur-diélectrique ou diélectrique-diélectrique.

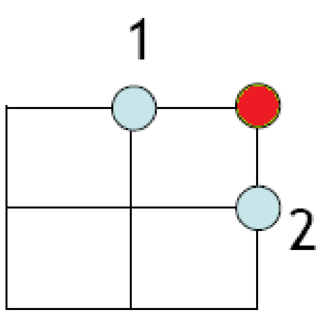
Nœud sur un côté du domaine

Souvent, la condition frontière est celle d'un diélectrique avec un conducteur, ou d'un conducteur avec un isolant : le champ normal est alors nul à l'interface et $k = 0$.



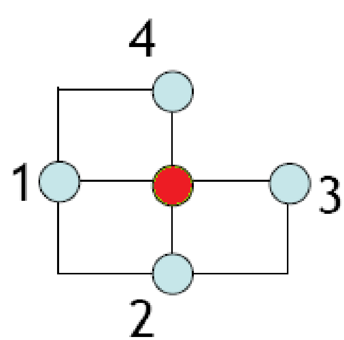
$$\frac{\partial V}{\partial n} = k \longrightarrow \boxed{V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4} + \frac{hk}{2}}$$

Nœud sur un coin du domaine ($k = 0$)



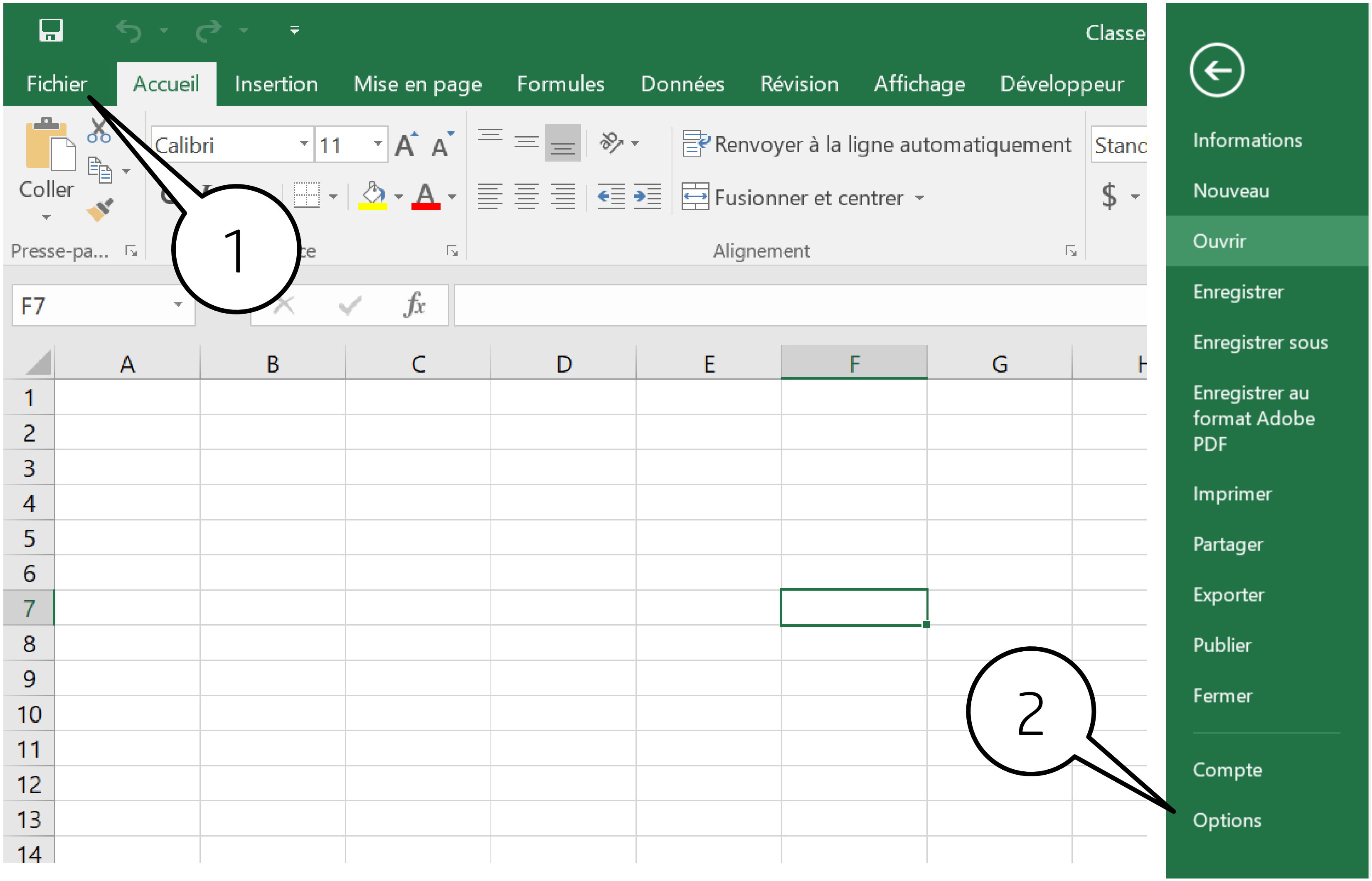
$$\boxed{V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}}$$

Nœud sur un coin « intérieur » du domaine ($k = 0$)

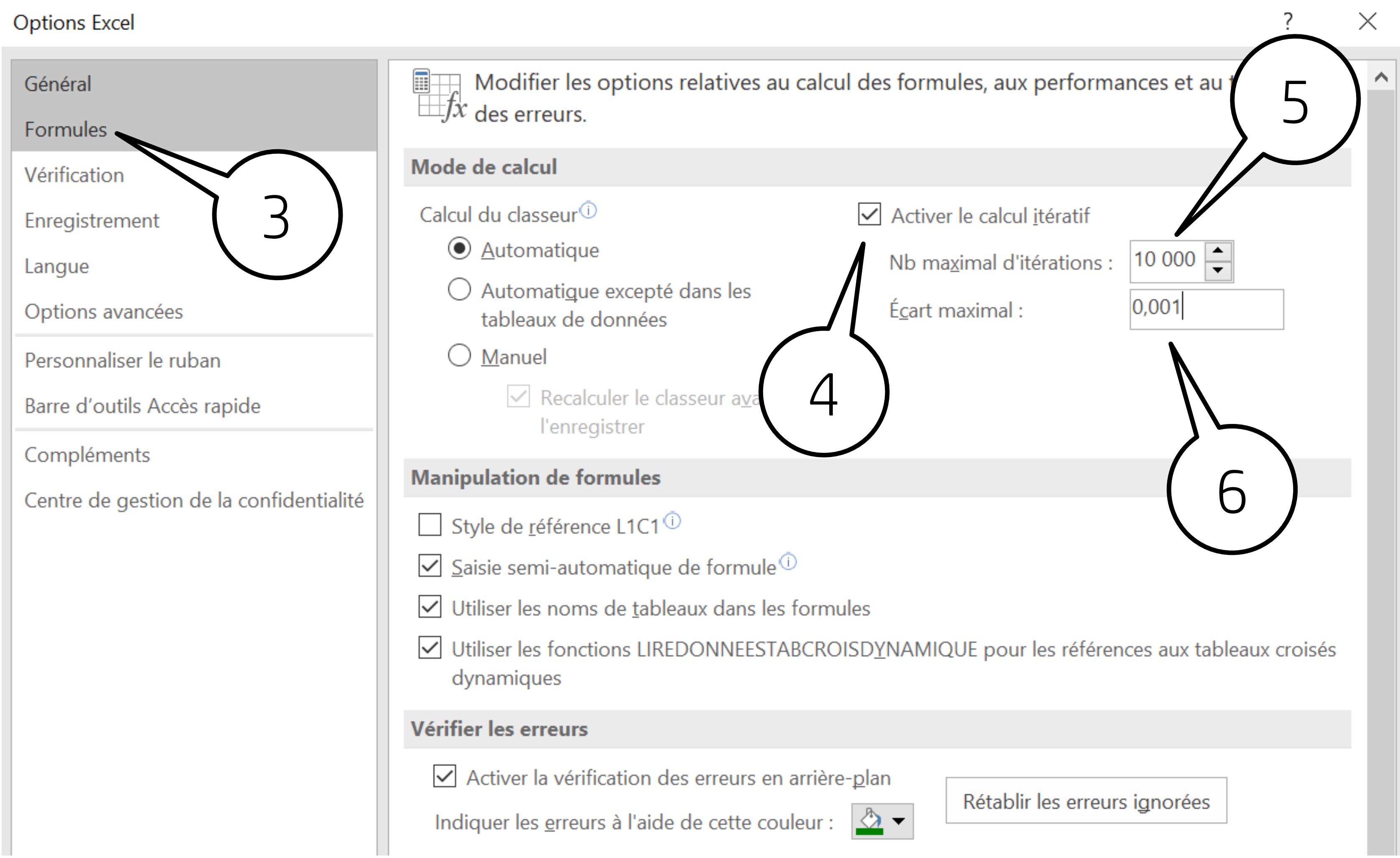


$$\boxed{V_0 = \frac{2V_1 + 2V_2 + V_3 + V_4}{6}}$$

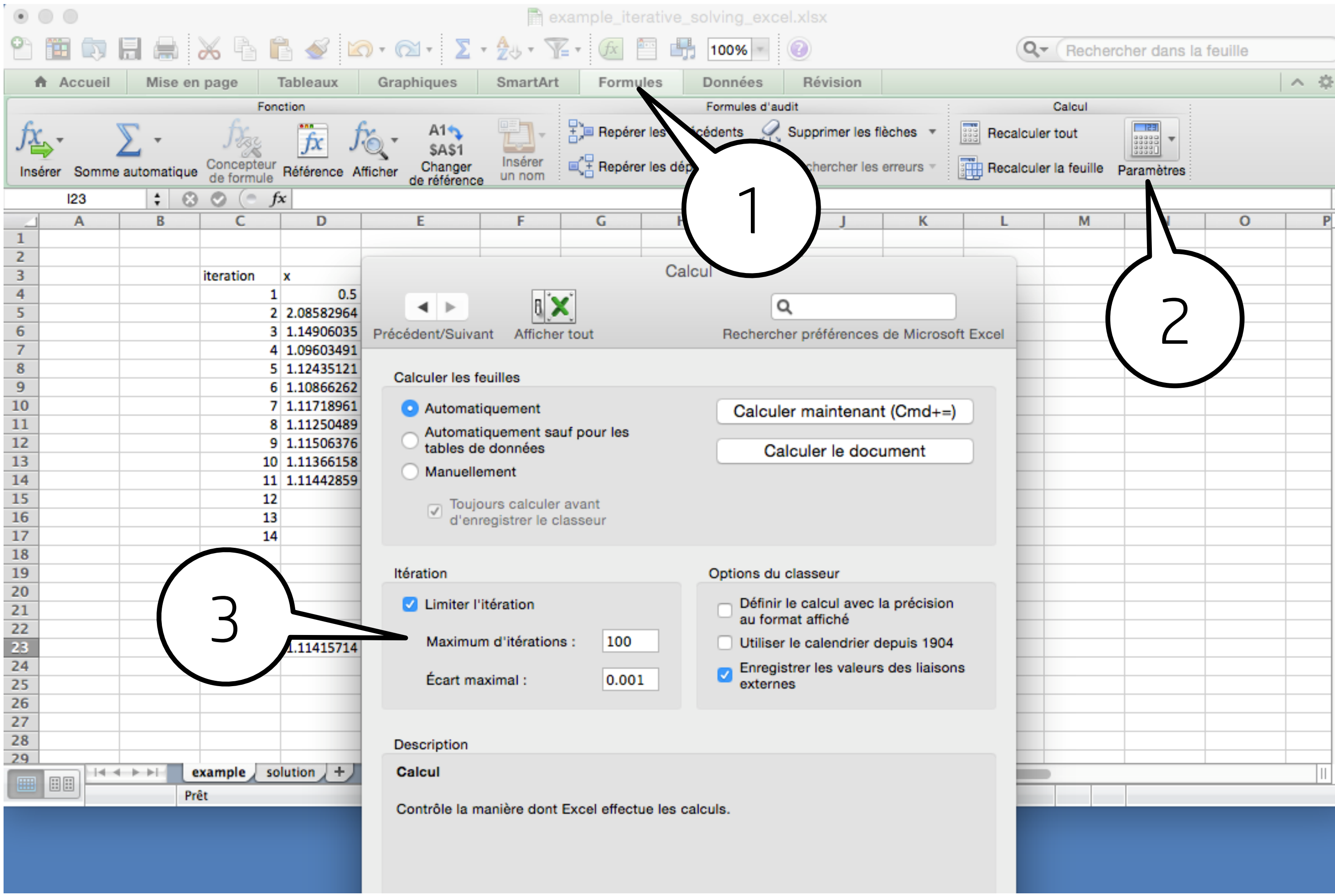
Méthode des différences finies – Excel 2016 PC



Méthode des différences finies – Excel 2016 PC



Méthode des différences finies – Excel 2013 Mac



Pour utiliser le calcul itératif d'Excel (en anglais)
https://www.youtube.com/watch?v=tLTm_P0ao1c