

Équations de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879)

I Théorème de Gauss

Forme intégrale

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

Forme différentielle

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

II Champ magnétique solénoïdal

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

III Équation de Maxwell-Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

IV Théorème d'Ampère généralisé

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

– PHS1102 –

Champs électromagnétiques

Cours 1

Loi de Coulomb

Champ électrique

Principe de superposition

Flux électrique

Densité de flux électrique

Théorème de Gauss (1^{re} équation de Maxwell)

Objectifs de la semaine

Loi de Coulomb

- Calculer la force entre des charges électriques.

Champ électrique

- Calculer le champ électrique dû à une distribution de charges (discrète et continue).
- Calculer la force ressentie par une charge test dans un champ électrique.

Principe de superposition

Flux électrique

- Décrire les propriétés du flux électrique.
- Représenter les lignes de flux électrique.

Densité de flux électrique

- Calculer la densité de flux électrique dans le vide à partir du champ électrique.

Théorème de Gauss
(1^{re} équation de Maxwell)

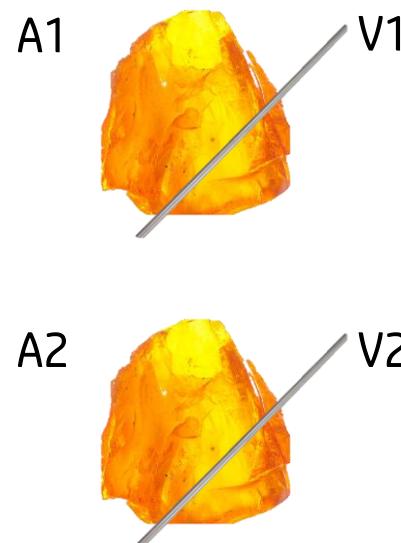
- Calculer le champ électrique d'une distribution de charges symétrique avec le théorème de Gauss

Observations expérimentales de la charge électrique

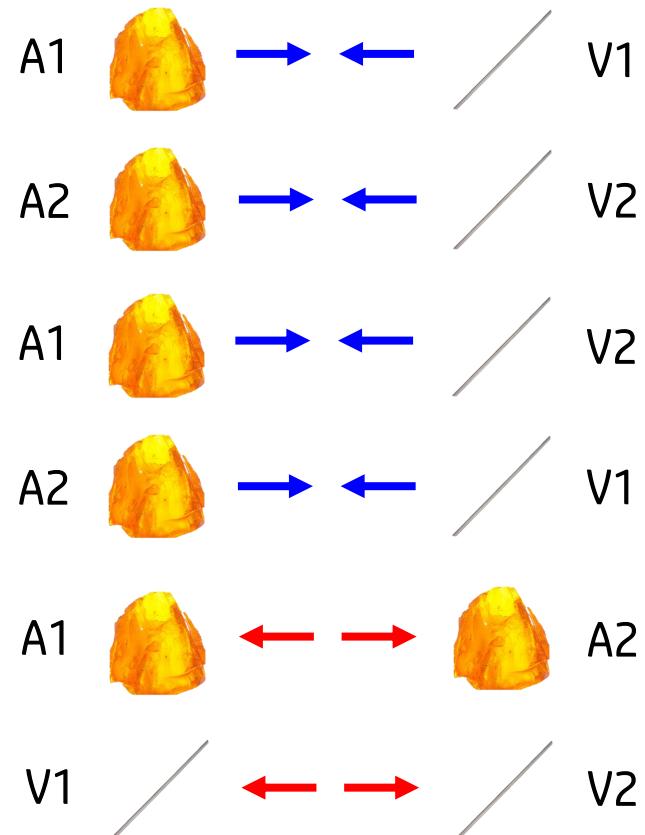
Les Grecs anciens savaient que l'on peut charger **certains objets en les frottant ensemble**. Une fois chargé, un objet peut alors attirer certains objets légers qui n'ont pas été chargés.

Expérience

On frotte un morceau d'ambre contre un morceau de verre, puis on les sépare. On répète l'expérience une 2^e fois avec un autre morceau de d'ambre et un autre morceau de verre.



Observations →



Certains objets chargés s'attirent tandis que d'autres se repoussent.
Il y a donc deux types de charges : positives et négatives.

Manipuler la charge électrique

Si l'on possède déjà un objet chargé, on peut l'utiliser pour charger d'autres objets.

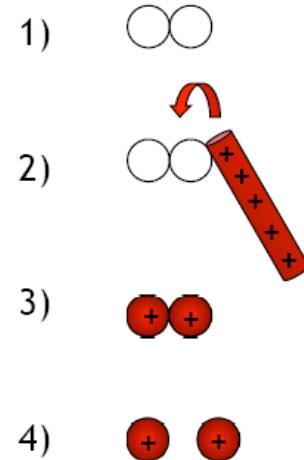
Conduction

On met en contact l'objet neutre avec un objet chargé. L'objet neutre acquiert une charge de même signe que celle de l'objet chargé.

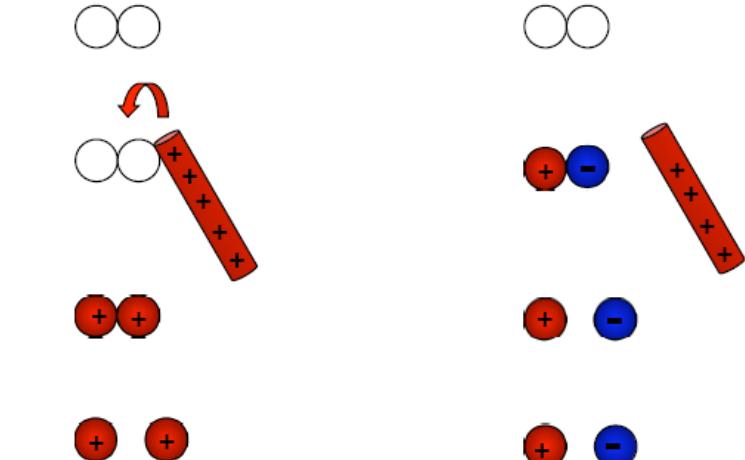
Induction

En approchant un objet chargé d'un objet neutre, les charges mobiles de l'objet neutre se déplacent. Les charges de signe opposé à l'objet chargé s'approchent de celui-ci, tandis que les charges de même signe s'en éloignent.

Conduction



Induction



Charge égale et de même signe

Charge égale et de signe opposé

Sphères conductrices

Quelle loi régit la force entre deux objets chargés ?
Comment mesurer cette force ?

Les expériences de Coulomb

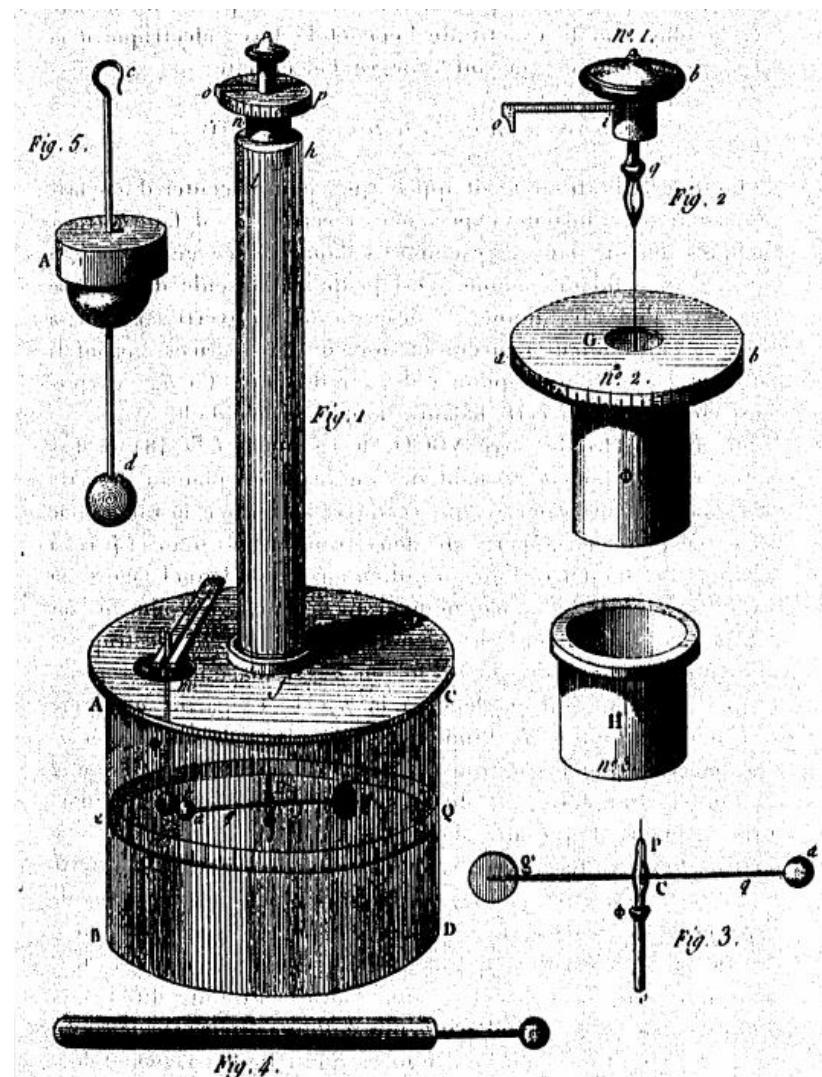
Coulomb construit une **balance de torsion** afin de mesurer la force entre deux sphères métalliques de charges égales.

Une sphère est maintenue en position fixe.
L'autre sphère est mobile : elle se déplace sur une trajectoire circulaire autour du fil en fonction de la force que le fil exerce sur elle.

L'angle de torsion du fil étant proportionnel à la force qu'il exerce sur la sphère mobile, Coulomb peut mesurer la force entre les deux sphères.



Charles-Augustin Coulomb
(France, 1736-1806)



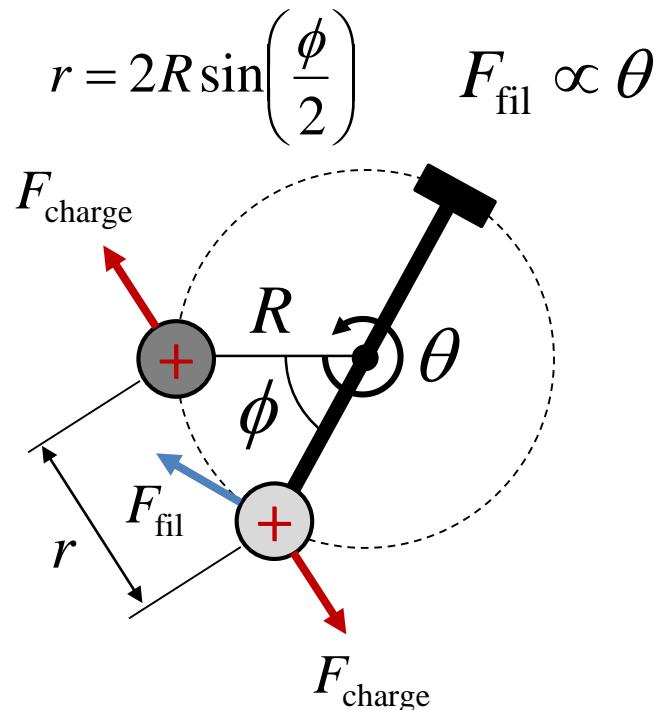
Les expériences de Coulomb

Expérience 1 (effet de la distance)

Les sphères sont chargées également et se repoussent. À l'équilibre, une distance r les sépare de sorte que la force du fil compense exactement la composante de la force électrique qui lui est parallèle. Les sphères sont immobiles.

Données historiques recueillies par Coulomb

Mesure	Angle ϕ entre les charges (°)	Angle θ de torsion du fil (°)
1	36	36
2	18	144
3	8,5	576



Quand ϕ (\approx distance entre les charges) est réduit de moitié, θ (force) quadruple.

Coulomb conclut que la force entre deux charges est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les charges.

Les expériences de Coulomb

Expérience 2 (effet de la charge)

Étape 1 : Les deux sphères sont chargées avec la même charge Q . On mesure l'angle et la distance.

Étape 2 : La sphère fixe est mise en contact avec une 3^e sphère neutre identique.

Quelle est la nouvelle charge de la sphère fixe ?

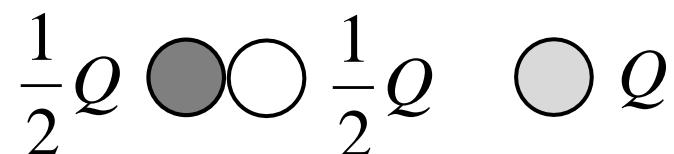
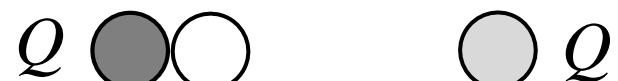
La charge totale se répartit également entre les deux sphères identiques (conduction).

Étape 3 : On mesure à nouveau l'angle et la distance avec la charge de la sphère fixe réduite de moitié.

Les mesures de Coulomb lui permettent de conclure que la force entre deux charges est proportionnelle au produit des charges.

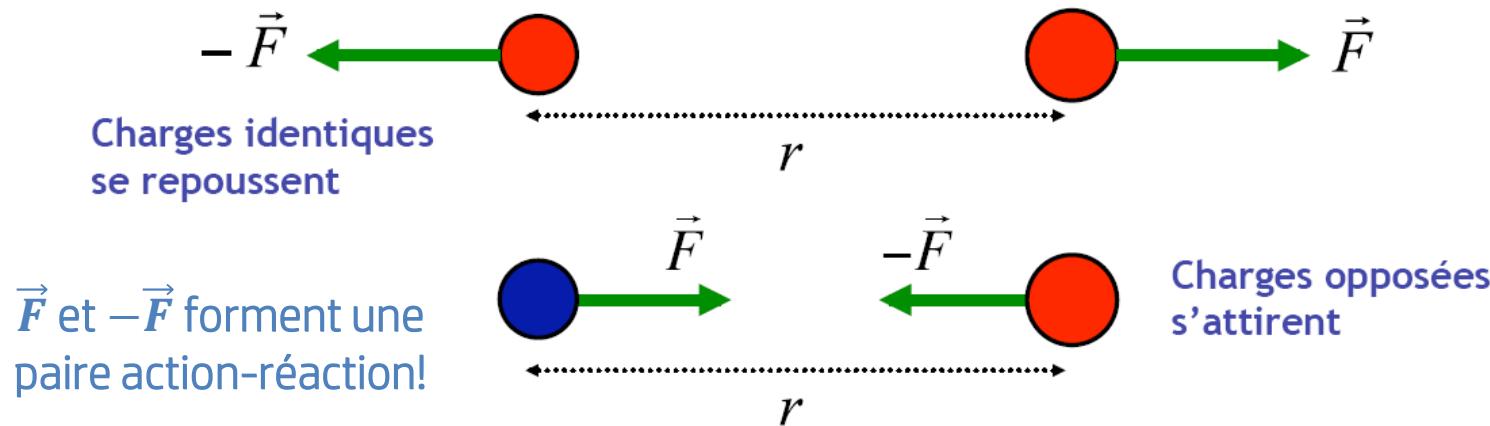
Sphère fixe

Sphère mobile
(liée au fil de torsion)



Résumé des observations expérimentales

1. Il existe deux types de charges (positives et négatives). Les charges de même signe se repoussent tandis que les charges de signe opposé s'attirent.



2. La force entre deux charges décroît avec le carré de la distance qui les sépare.

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

3. La force entre deux charges q et Q est proportionnelle à la magnitude de chaque charge.

$$F \propto q \quad F \propto Q$$

Comment combiner toutes ces observations en une seule loi ?

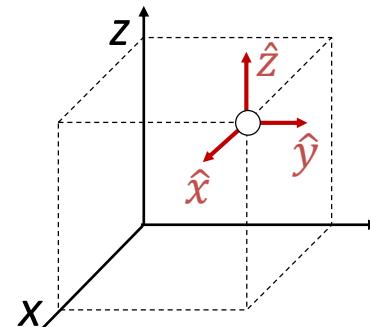
Rappels – Systèmes de coordonnées

On peut utiliser plusieurs **systèmes de coordonnées** pour décrire un même vecteur.
Les vecteurs unitaires d'un système forment une **base orthonormale**.

Cartésien:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$$

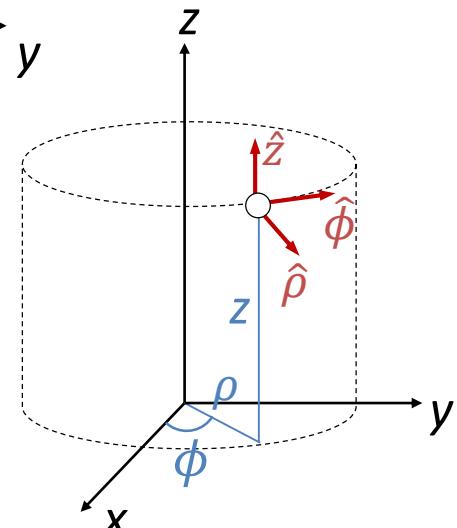
Vecteur unitaire



\hat{x} , \hat{y} et \hat{z} sont parfois notés \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .

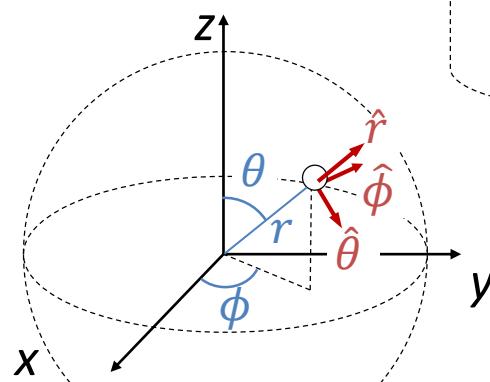
Cylindrique:

$$\vec{F}(\rho, \phi, z) = F_\rho \hat{\rho} + F_\phi \hat{\phi} + F_z \hat{z}$$



Sphérique:

$$\vec{F}(r, \phi, \theta) = F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi} + F_\theta \hat{\theta}$$



Rappels – Vecteur position

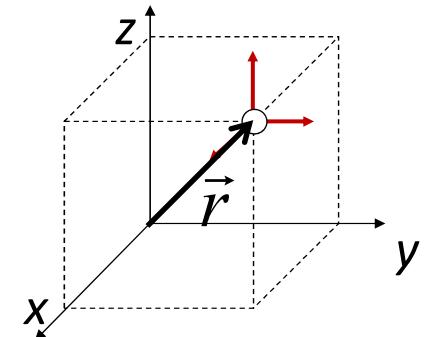
Il est utile d'exprimer un vecteur à l'aide de sa **norme** et d'un **vecteur unitaire** (de norme 1). Ceci est particulièrement le cas pour le **vecteur position** \vec{r} .

Expression du vecteur position à l'aide du vecteur unitaire

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

\hat{r} : vecteur unitaire dans la direction de \vec{r}
 r : norme du vecteur \vec{r}

Attention! Les notations $r = |\vec{r}| = \|\vec{r}\|$ sont équivalentes.



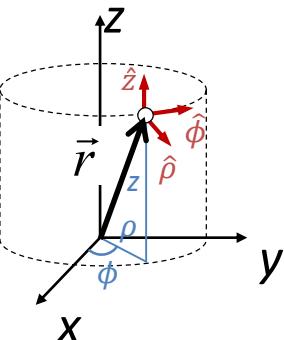
Coordonnées cartésiennes

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$\hat{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

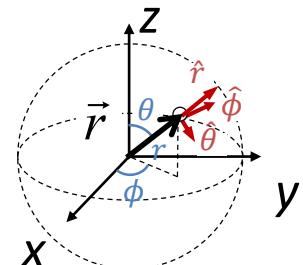


Coordonnées cylindriques

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{r} = r\hat{r}$$



Loi de Coulomb

En combinant toutes les observations expérimentales, la force produite par une charge Q sur une autre charge q s'écrit :

$$\vec{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$

\vec{F} : force exercée par la charge Q sur la charge q [N]
 q et Q : charges (en coulomb) [C]
 r : distance entre les charges [m]
 \hat{r} : vecteur unitaire orienté de Q vers q

Ici, k est une constante de proportionnalité qui dépend du système d'unités choisi. Dans le Système international d'unités (SI), cette constante est appelée **constante de Coulomb** et s'exprime en fonction de la **permittivité du vide** ϵ_0 :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9,0 \times 10^9 \text{ m/F}$$

$$\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Le farad [F] est l'unité de capacité (voir semaine 3).

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}) = 1 \text{ C/V}$$

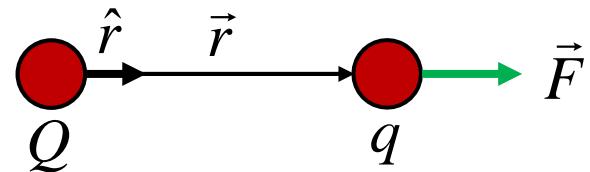
Formes équivalentes de la loi de Coulomb

Toutes les formes suivantes de la loi de Coulomb sont équivalentes en se basant sur la notation vue précédemment.

$$\vec{F} = \frac{kqQ}{r^2} \hat{r} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad \vec{r} = r\hat{r}$$

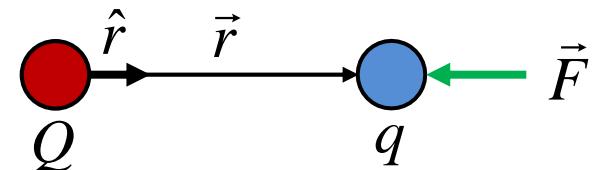
Charges de même signe

La charge q est repoussée par la charge Q si les charges sont de même signe ($qQ > 0$).



Charges de signe opposé

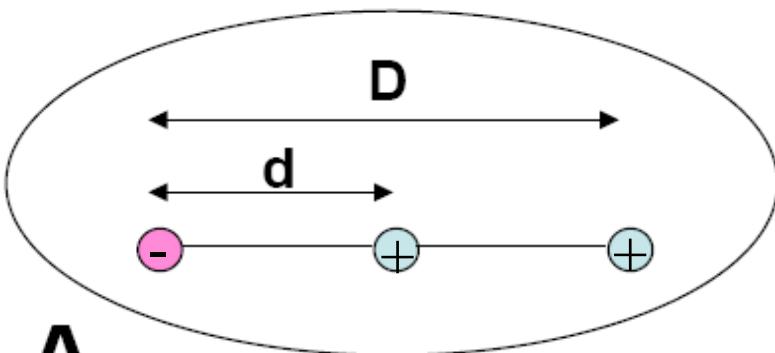
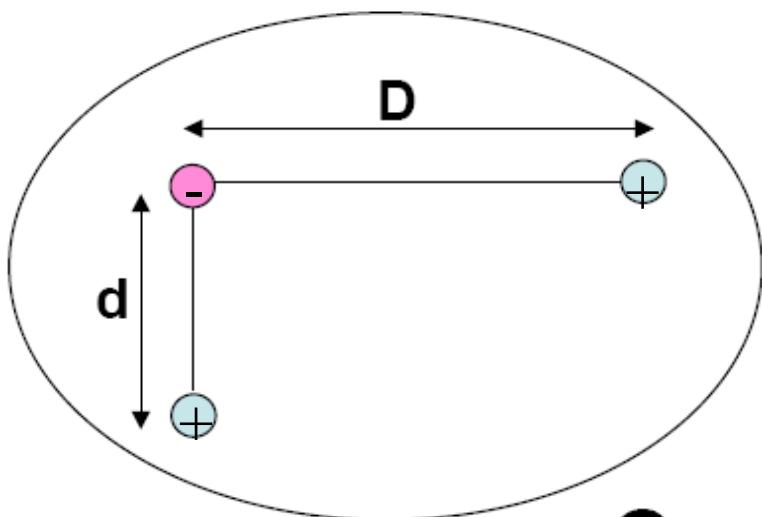
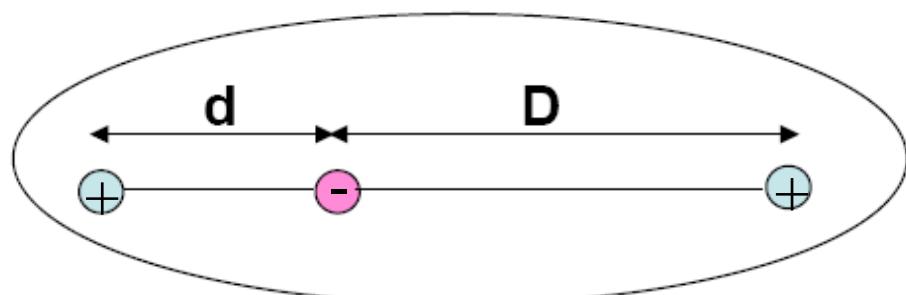
La charge q est attirée par la charge Q si les charges sont de signe opposé ($qQ < 0$).



Quiz !

On s'intéresse à la force ressentie par la charge négative (en rose) due aux deux charges positives (en bleu). Toutes les charges ont la même magnitude.

Classez les situations suivantes en fonction de la force ressentie par la charge négative.

**A****C****B****A > C > B**

Principe de superposition

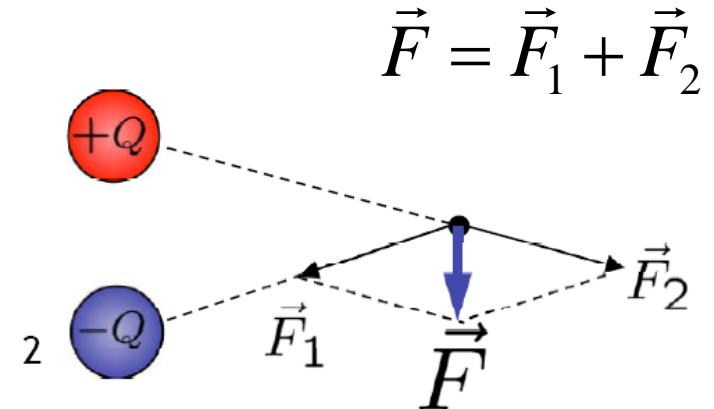
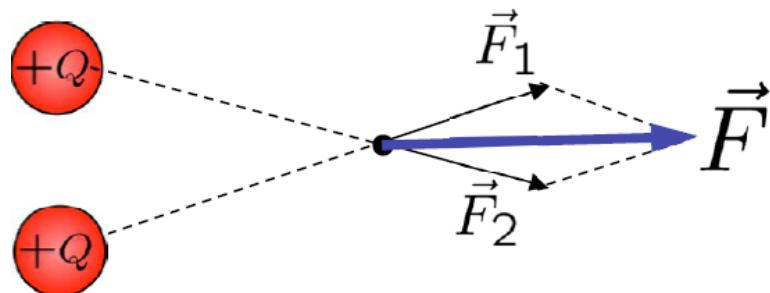
La **force totale ressentie** par une charge q due à un ensemble de charges Q_1, Q_2, \dots est la **résultante des forces individuelles** dues à chacune des charges.

$$\vec{F}_{\text{totale}}(Q_1, Q_2, \dots) = \sum_i \vec{F}(Q_i)$$

En insérant l'expression de la loi de Coulomb, on a donc :

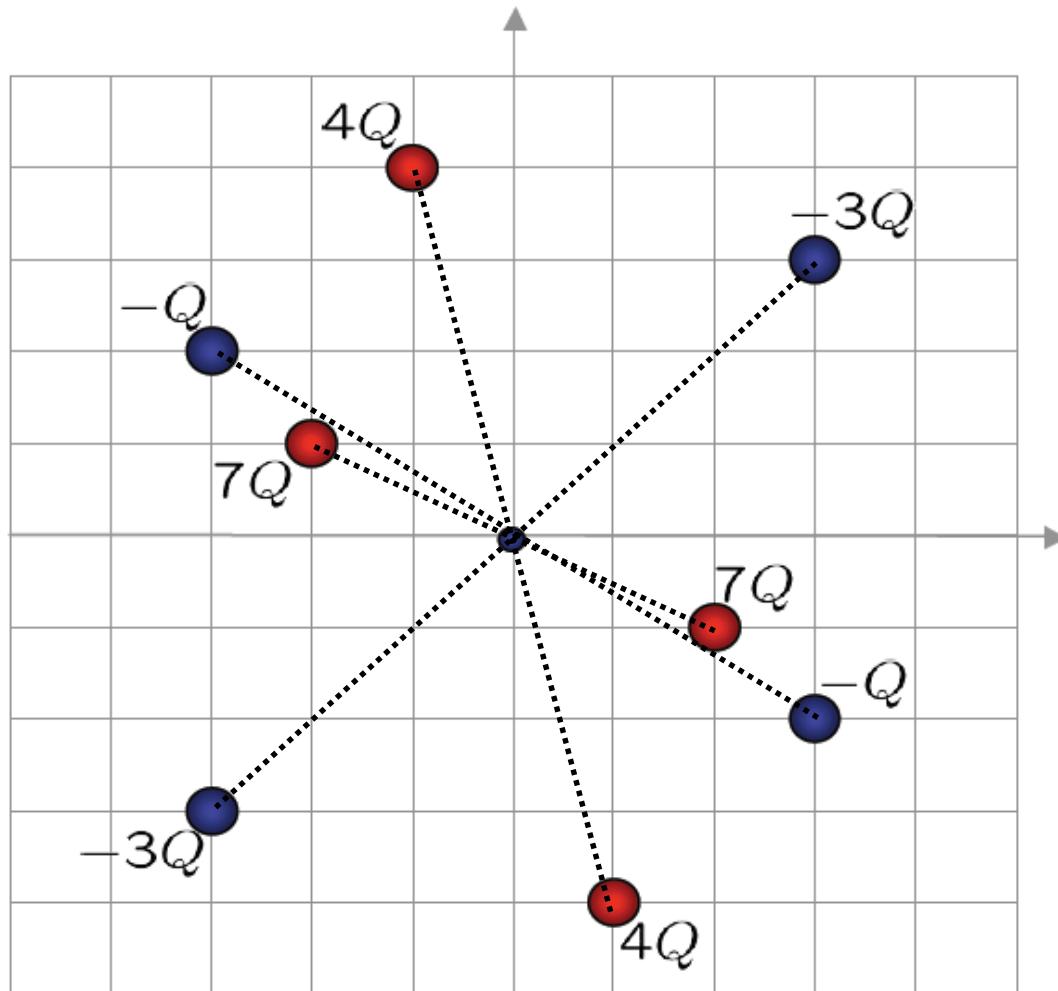
$$\vec{F}_{\text{totale}}(Q_1, Q_2, \dots) = \sum_i \frac{qQ_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

Exemples



Quiz !

Quelle serait la force totale ressentie par une charge placée à l'origine ?



Zéro !

En effet, la distribution de charge est symétrique par rapport à l'origine : toutes les forces s'annulent !

Champ électrique

En observant l'expression pour la force totale subie par une charge test q , on constate qu'il est possible de la décomposer en deux parties :

- L'une qui dépend de la charge test q subissant la force ;
- L'autre qui dépend de la distribution des charges Q_1, Q_2, \dots exerçant une force sur q .

$$\vec{F} = q \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

On définit alors le champ électrique \vec{E} produit par la distribution de charge :

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i \quad \text{Unité : V/m}$$

(1 V = 1 J/C = 1 N·m/C)

Remarque

La limite signifie que la présence de la charge test ne doit pas perturber la distribution de charge déjà présente. En effet, puisque la charge test subit une force due à la distribution, alors elle exerce aussi une force sur la distribution par action-réaction.

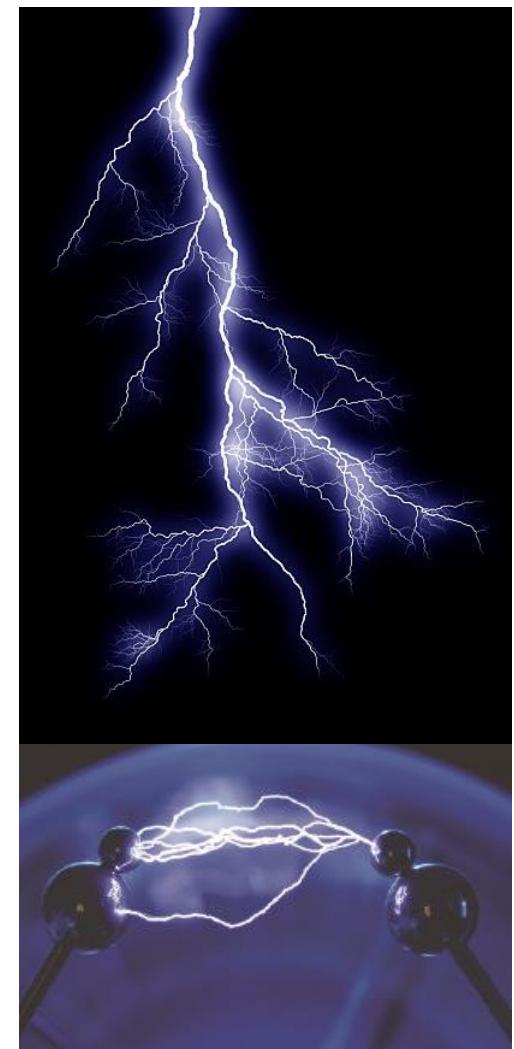
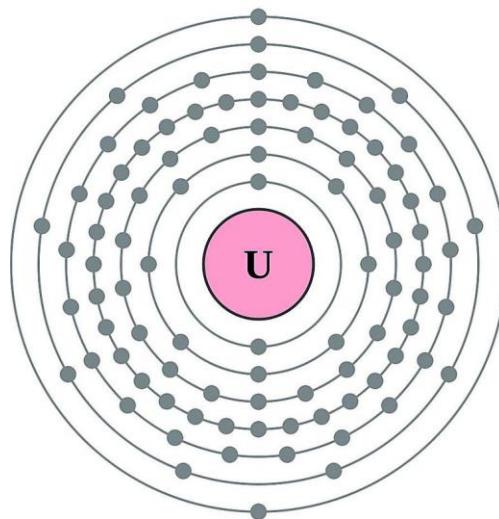
Ordre de grandeur du champ électrique

Exemples

surface d'un noyau d'uranium	3×10^{21} V/m
claquage dans l'air	3×10^6 V/m
près d'un peigne chargé	10^3 V/m
dans un fil de cuivre domestique	10^{-2} V/m

92: Uranium

2,8,18,32,21,9,2



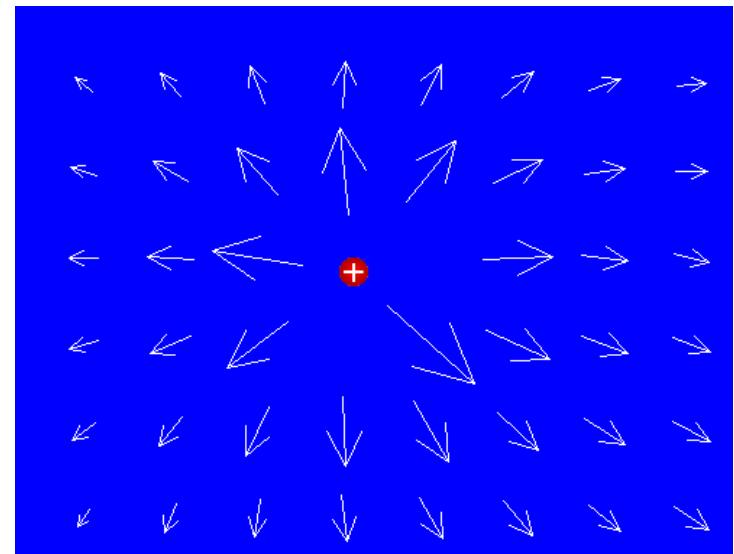
Champ électrique d'une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle Q située à l'origine produit un champ électrique

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

On représente un **champ vectoriel** en traçant le vecteur \vec{E} en différents points de l'espace, comme sur la figure. La **longueur d'une flèche** représente la **norme du champ** à cet endroit.

Comment faudrait-il modifier la figure si l'on changeait le signe de la charge ?



Champ électrique produit par une charge ponctuelle positive

Description mathématique du champ électrique

Le champ électrique est un **champ vectoriel**. Un champ vectoriel associe à chaque point de l'espace un vecteur. Ainsi, lorsqu'on écrit \vec{E} , il faut lire $\vec{E}(x, y, z)$ si l'on travaille en coordonnées cartésiennes, par exemple.

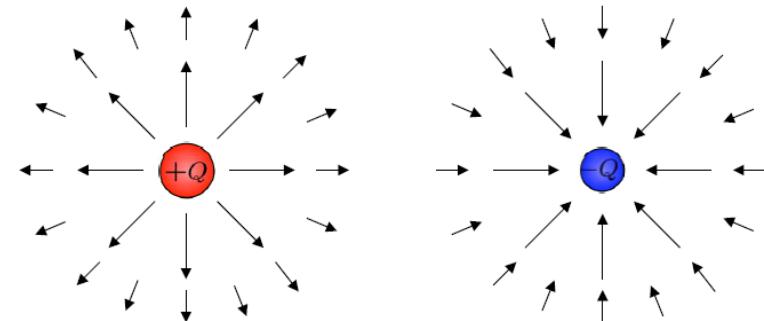


Représentations graphiques du champ électrique

Représentation du champ électrique

Longueur de la flèche : norme du champ

Orientation de la flèche : orientation du champ



Sens du champ électrique

Le sens correspond au sens de la force que subirait une charge test positive.

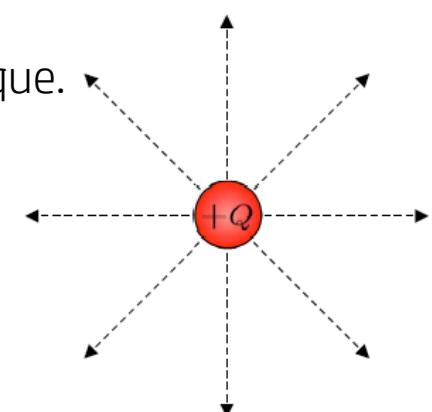


Représentation par lignes de champ

En suivant une ligne de champ, on suit l'orientation du champ électrique.

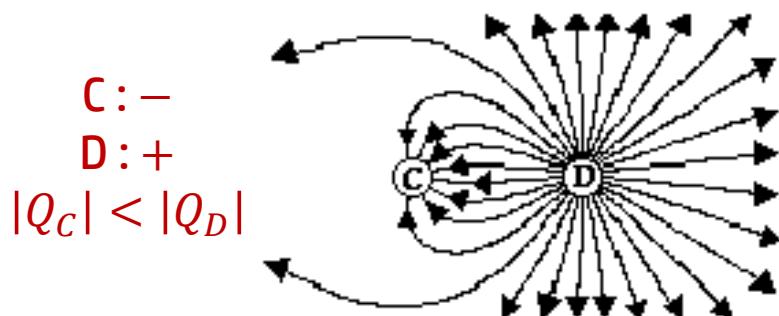
Comment estimer la norme du champ électrique
à partir des lignes de champ ?

La norme du champ électrique en un point est proportionnelle à la densité des lignes de champ en ce point.

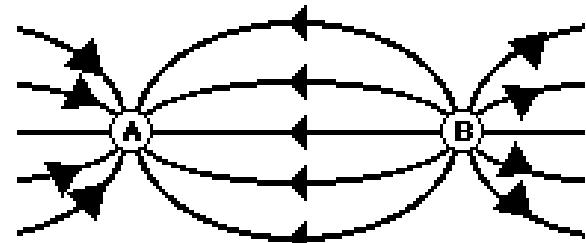


Quiz !

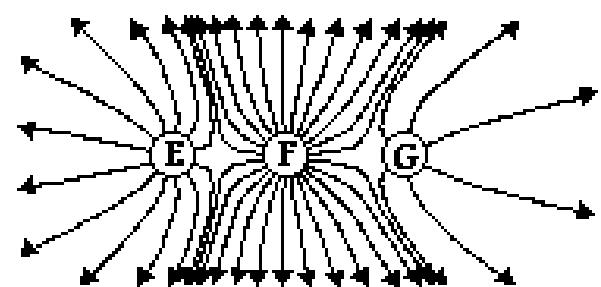
Identifiez le signe de chaque charge, puis classez les valeurs absolues des charges en ordre croissant.



A : -
B : +
 $|Q_A| = |Q_B|$

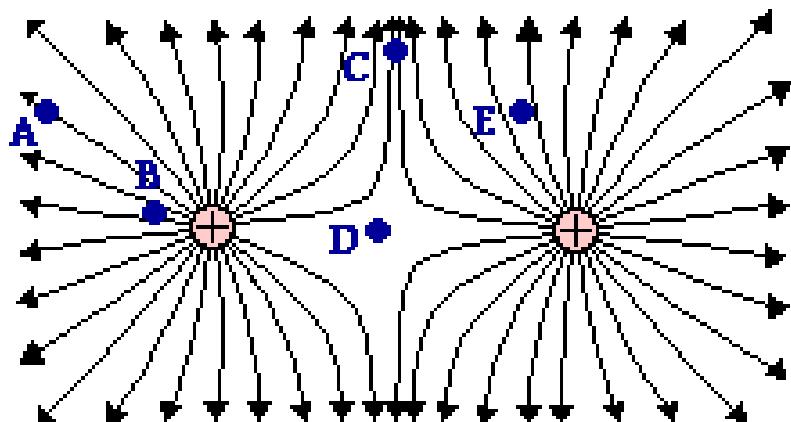


E : +
F : +
G : +



Classez les points suivants en fonction de la magnitude du champ électrique.

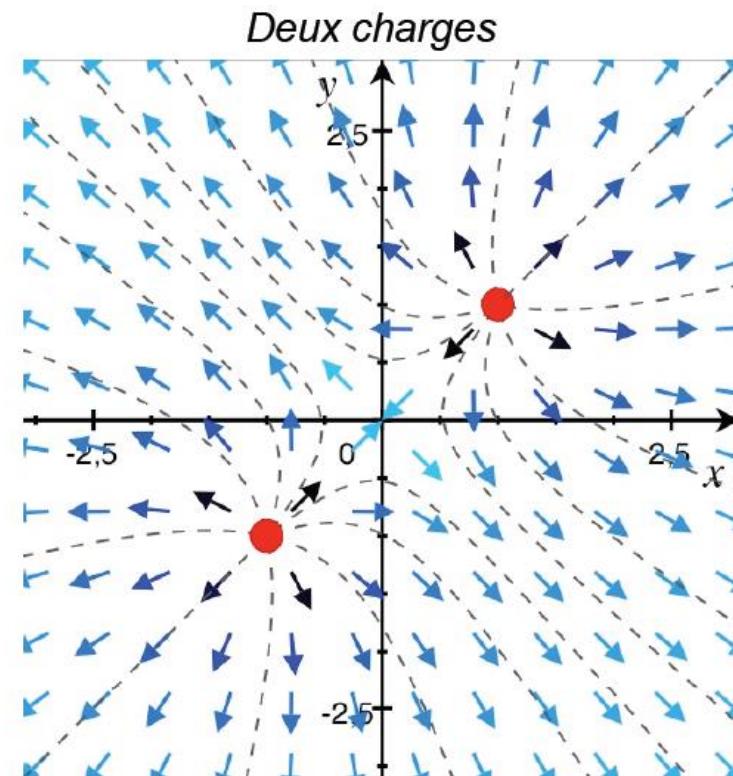
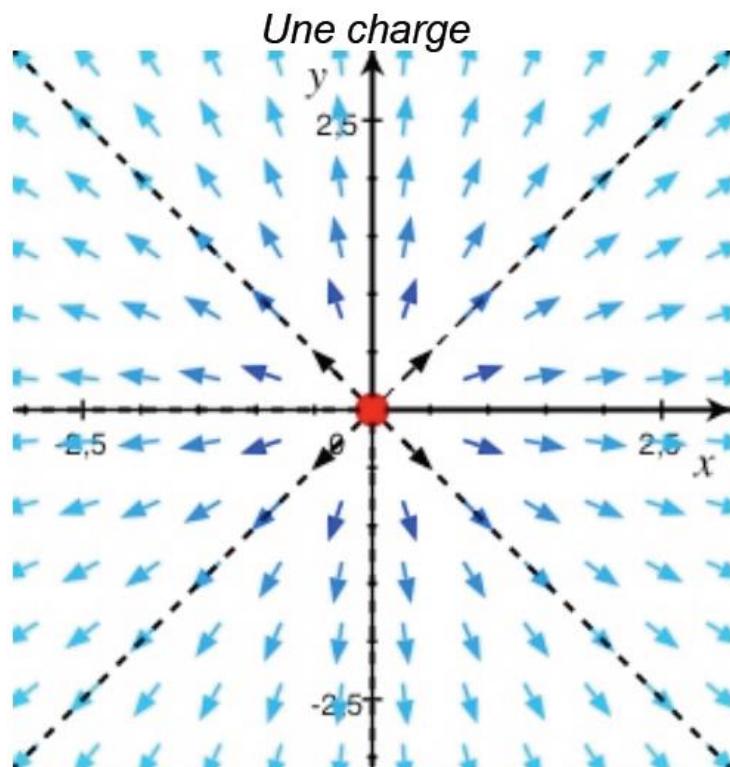
$E_B > E_C > E_E > E_A > E_D$
(l'ordre étant discutable)



Principe de superposition appliqué au champ électrique

Le **champ total** dû à un ensemble de charges Q_1, Q_2, \dots est la **résultante des champs individuels** dus à chacune des charges.

$$\vec{E}_{\text{total}}(Q_1, Q_2, \dots) = \sum_i \vec{E}(Q_i)$$



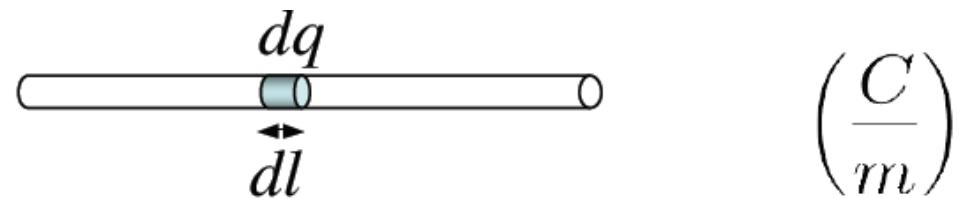
Distributions de charge continues

Une distribution de charge continue peut être vue comme une **la superposition d'une infinité de charges ponctuelles**.

Une distribution continue est alors représentée par une **densité de charge ρ** qui peut être **linéique, surfacique ou volumique** selon la situation.

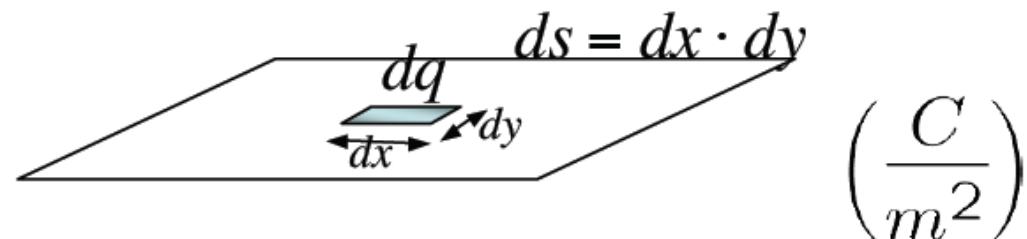
Densité linéique

$$\rho_l = \frac{dq}{dl}$$



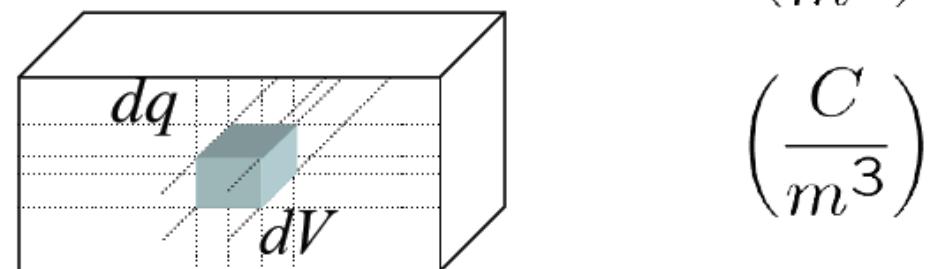
Densité surfacique

$$\rho_s = \frac{dq}{ds}$$



Densité volumique

$$\rho_V = \frac{dq}{dV}$$

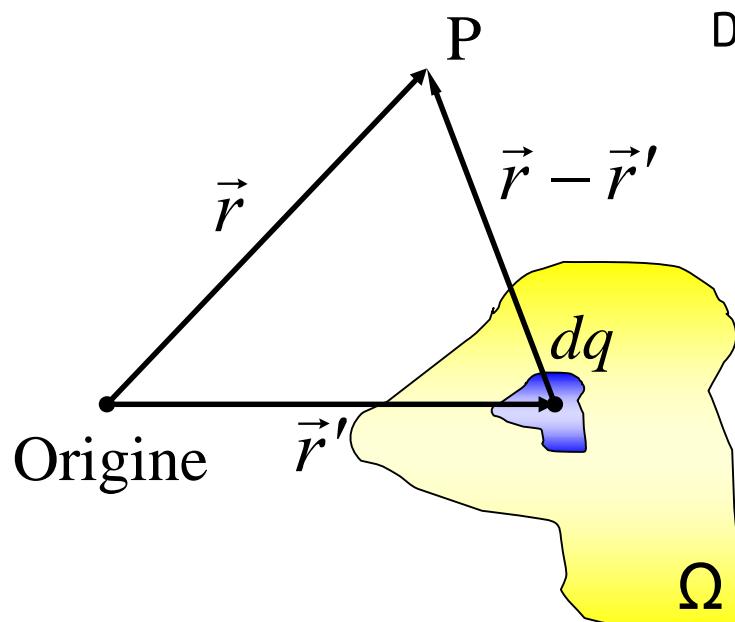


Distributions de charge continues

En utilisant la **loi de Coulomb** et le **principe de superposition**, on peut calculer le **champ électrique** produit (et donc la force exercée) par une distribution continue.

Il s'agit alors de **remplacer la somme par une intégrale** dans le principe de superposition.

$$\vec{E} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i \quad \rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$



Densité linéique	Densité surfacique	Densité volumique
$dq = \rho_l dl$	$dq = \rho_s dS$	$dq = \rho_v dV$

L'intégration se fait sur la variable \vec{r}' qui parcourt tout le domaine Ω (ligne, surface ou volume) occupée par la densité de charge.

Voir les annexes du polycopié pour les expressions de dl , dS et dV .



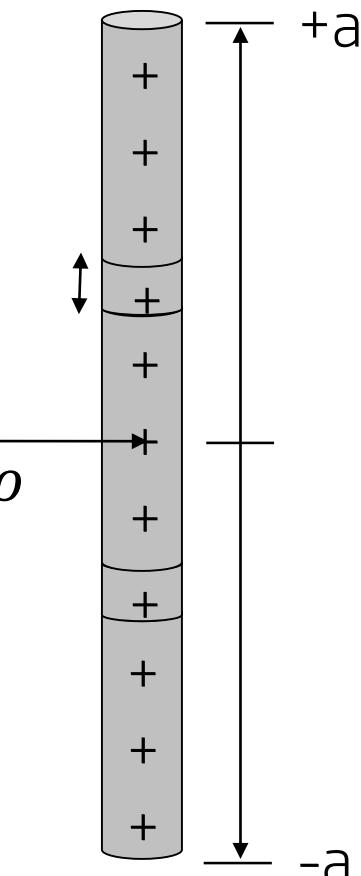
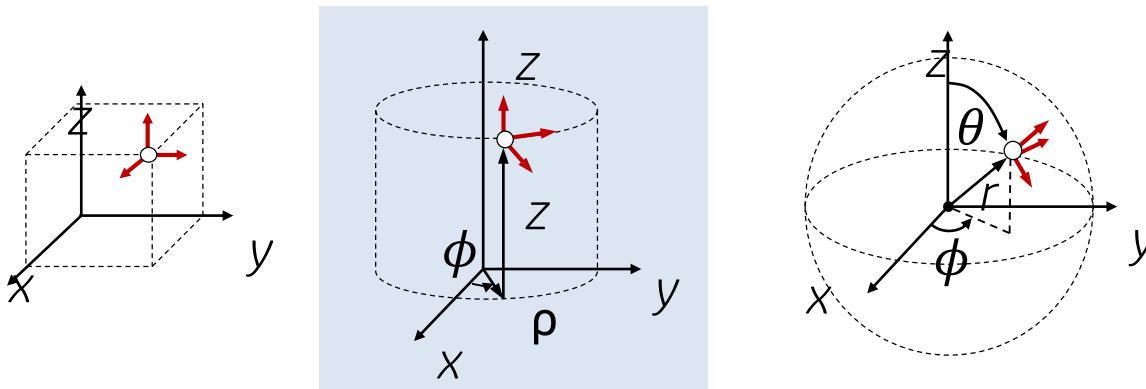
Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

Quelle est l'intensité du champ électrique \vec{E} en un point P situé à une distance ρ du centre d'une ligne de charges de densité uniforme ρ_l s'étendant sur une longueur finie $2a$?

On veut utiliser la formule suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

1. Quel système de coordonnées utiliser ?



La géométrie du fil possède une symétrie cylindrique.

Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

Quelle est l'intensité du champ électrique \vec{E} en un point P situé à une distance ρ du centre d'une ligne de charges de densité uniforme ρ_l s'étendant sur une longueur finie $2a$?

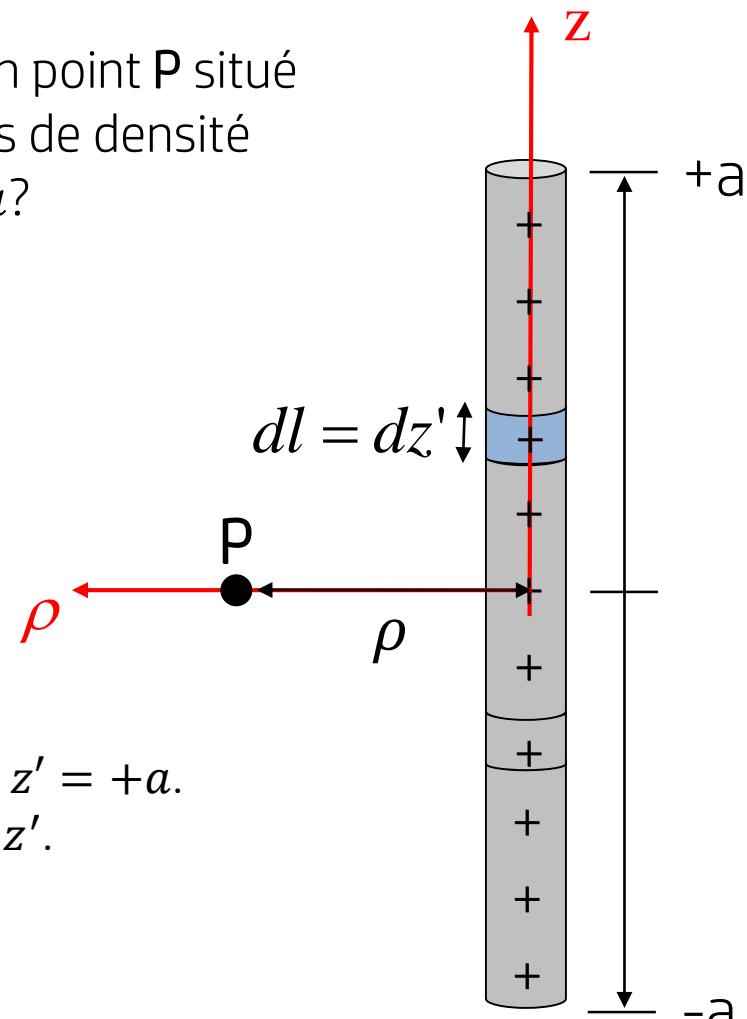
On veut utiliser la formule suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

2. Quel est le domaine d'intégration ?

L'origine est au centre du fil et on intègre de $z' = -a$ à $z' = +a$. La densité de charge est donnée par $dq = \rho_l dl = \rho_l dz'$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho_l dz'$$



Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

Quelle est l'intensité du champ électrique \vec{E} en un point P situé à une distance ρ du centre d'une ligne de charges de densité uniforme ρ_l s'étendant sur une longueur finie $2a$?

On veut utiliser la formule suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho_l dz'$$

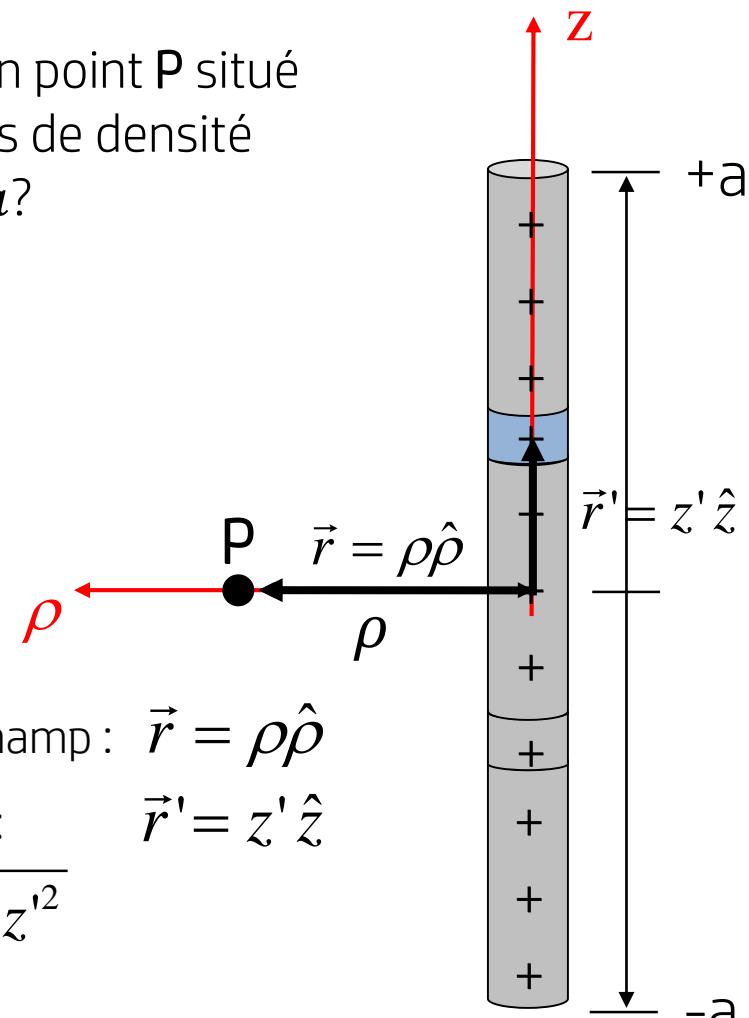
3. Que valent \vec{r} et \vec{r}' ?

Vecteur position d'un point P où l'on veut calculer le champ : $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$

Vecteur position d'un élément infinitésimal de charge : $\vec{r}' = z'\hat{z}$

$$\rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = |\rho\hat{\rho} - z'\hat{z}| = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\rho\hat{\rho} - z'\hat{z}}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \rho_l dz'$$



Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

Fonction paire	Fonction impaire
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l \rho \hat{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz' - \frac{\rho_l \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{z'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz'$	

Puisque le domaine d'intégration est symétrique ($z = -a$ à $z = +a$), on utilise les propriétés des fonctions paires et impaires pour alléger les calculs.

1. Si l'on intègre une **fonction impaire**, i.e. $f(-x) = -f(x)$, sur un domaine symétrique $x \in [-a, a]$, on obtient toujours **zéro**.
2. Si l'on intègre une **fonction paire**, i.e. $f(-x) = f(x)$, sur un domaine symétrique $x \in [-a, a]$, on obtient **deux fois l'intégrale sur la moitié du domaine $[0, a]$** .

L'intégrale en rouge est donc nulle et il suffit de calculer l'intégrale en vert seulement sur le demi-domaine $[0, a]$!

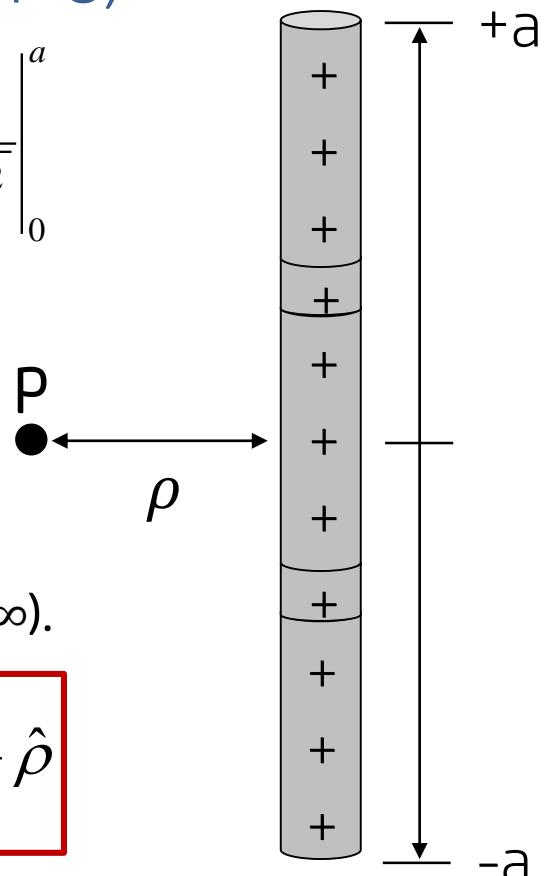
$$\vec{E}(\vec{r}) = 2 \frac{\rho_l \rho \hat{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{1}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz'$$


Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l \rho \hat{\rho}}{2\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{1}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz' = \frac{\rho_l \rho \hat{\rho}}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{z'}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right]_0^a$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l a}{2\pi\epsilon_0 \rho \sqrt{\rho^2 + a^2}} \hat{\rho}}$$

Champ électrique
au point P

Cas limite 1

P est très près de la ligne ($\rho \ll a$) ou la ligne est infinie ($a \rightarrow \infty$).

On peut négliger ρ^2 sous la racine carrée :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho}}$$

Cas limite 2

P est très loin de la ligne ($\rho \gg a$)

On peut négliger a^2 sous la racine carrée :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l a}{2\pi\epsilon_0 \rho^2} \hat{\rho}}$$

Champ produit par une charge ponctuelle de charge $q = 2\rho_l a$!

Flux électrique

Le **champ électrique** \vec{E} est un **champ vectoriel** associé à la force ressentie par une particule chargée (phénomène mesurable) due une distribution de charge environnante.

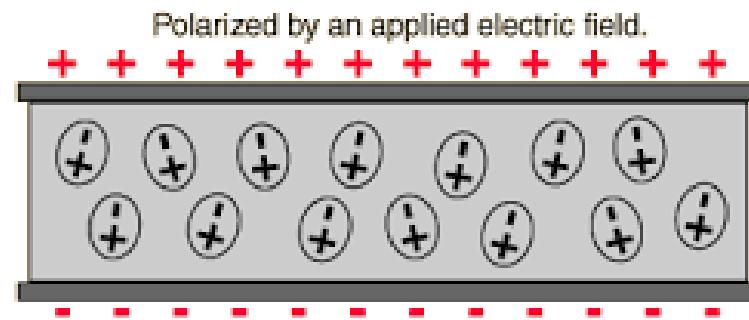
Le **flux électrique** est un concept plus abstrait, mais très puissant, car il permet de calculer le champ électrique dans les matériaux diélectriques (chapitre 3).

Matériaux conducteurs

Les matériaux conducteurs contiennent des **charges libres** qui peuvent se déplacer librement dans tout le matériau sous l'effet d'un champ électrique.

Matériaux diélectriques

Les matériaux diélectriques contiennent des **charges liées** qui ne peuvent pas se déplacer librement. L'application d'un champ externe a pour effet de **polariser** le diélectrique en déformant le nuage électronique autour des atomes et/ou en réorientant les molécules dans la direction du champ.



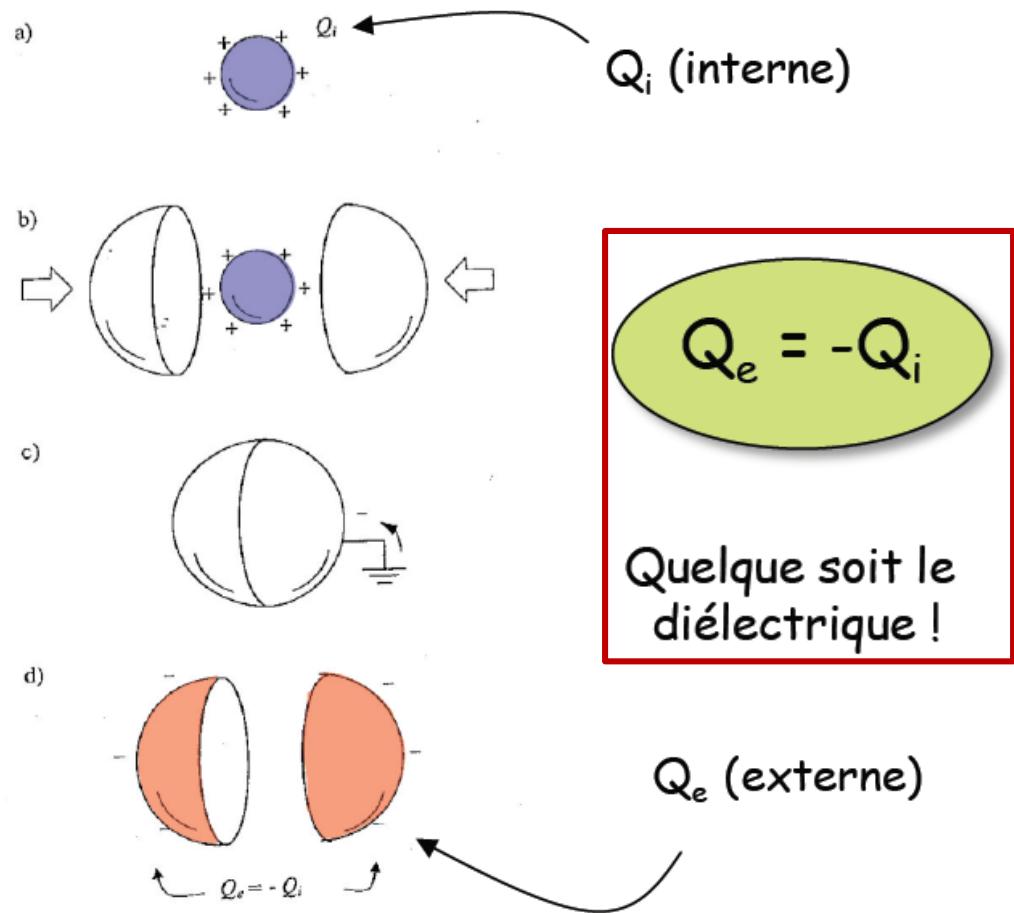
Expérience de Cavendish



Henry Cavendish
(1731-1810)

Physicien britannique

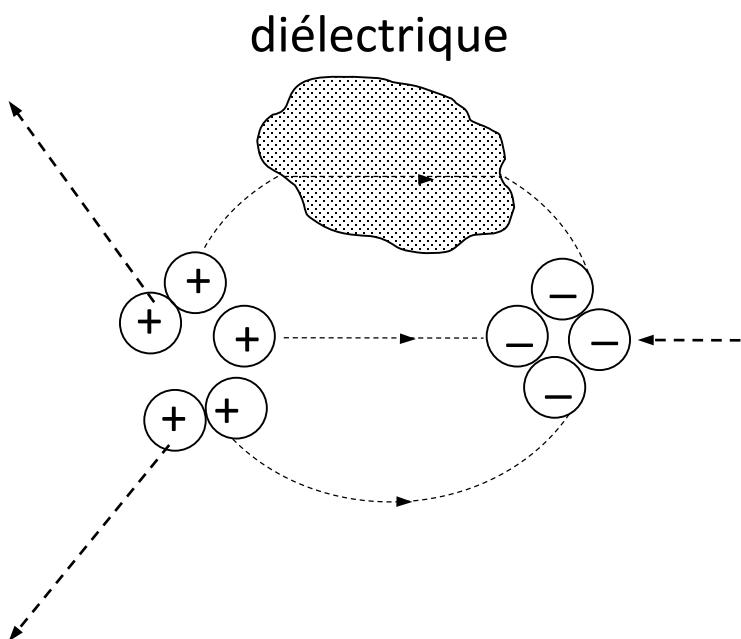
- Découvre « l'air inflammable » (H_2)
- Mesure la densité moyenne de la Terre ($5,45 \text{ g/cm}^3$)
- Mesure l'attraction gravitationnelle (balance à torsion)



Q_e a été déplacée par un flux électrique Φ émanant de la charge Q_i et n'est pas affectée par les charges liées du diélectrique!

Propriétés du flux électrique

Contrairement au **champ électrique** \vec{E} qui a pour source **toutes les charges (libres et liées)**, le **flux électrique** a seulement pour source les **charges libres**, tel que déterminé lors de l'**expérience de Cavendish**.



Propriétés du flux électrique

1. Le flux électrique dépend seulement des charges libres (souvent sur un conducteur) ;
2. Les lignes de flux électrique débutent sur des charges libres positives (ou à l'infini) et se terminent sur charges libres négatives (ou à l'infini) ;
3. Les lignes de flux ne sont pas interrompues par les diélectriques, mais peuvent être déviées ;
4. Par définition, une unité de charge libre génère une ligne de flux électrique : $\Phi = Q$.

Plus la charge est élevée, plus le flux électrique qu'elle produit est élevé.

Densité de flux électrique

La **densité de flux électrique** est un **vecteur** qui décrit la **quantité de flux** qui traverse une surface **infinitésimale** donnée.

\hat{n} : vecteur unitaire normal à l'élément de surface ΔS

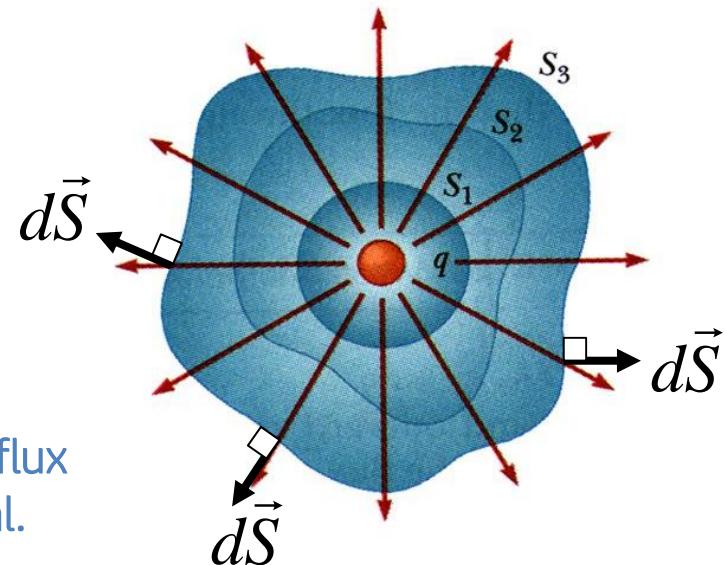
Si l'on considère une surface et que l'on intègre la densité de flux sur cette surface, on obtient le flux total qui traverse la surface.

$$\Phi = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS$$

Produit scalaire : seule la composante de la densité de flux normale à la surface contribue au flux électrique total.

$$\vec{D} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} \hat{n}$$

Unité : C/m²



Comment peut-on réécrire l'équation ci-dessus en faisant intervenir la quantité de charge libre à l'intérieur d'une surface fermée S ?

Théorème de Gauss

Une **surface fermée** intercepte tout le flux électrique émis par les charges qu'elle renferme. En combinant les définitions du flux électrique et de la densité de flux, on obtient ainsi le **théorème de Gauss** :

$$\Phi = Q \quad \rightarrow \quad Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$



Carl Friedrich Gauss,
le Prince des mathématiciens
(1777-1855)

Attention : Q représente la charge libre seulement!
Le cercle sur l'intégrale signifie que la surface est fermée.
Le vecteur $d\vec{S} = dS\hat{n}$ pointe vers l'extérieur de la surface.

Remarque

Le théorème de Gauss est une **approche équivalente** à l'approche du champ électrique qui est particulièrement utile pour des **distributions de charges symétriques**.

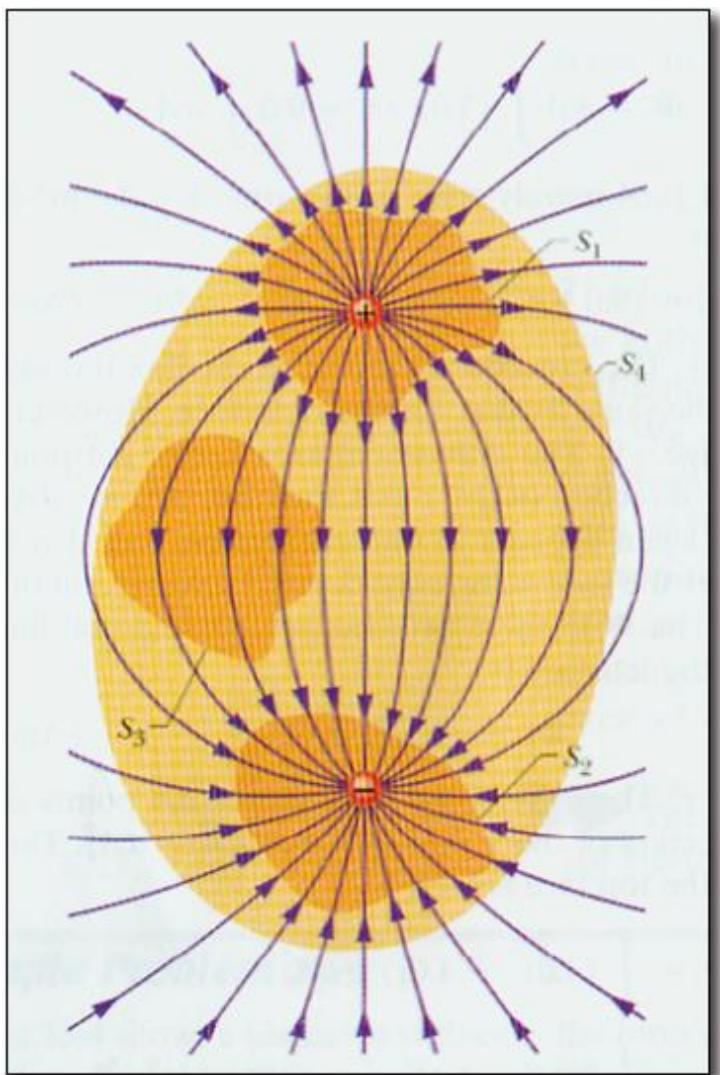
Interprétation du théorème de Gauss

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

S_1 : les lignes de flux sortent de la surface sans y revenir, ce qui crée un flux positif. La surface contient donc une charge positive.

S_2 : les lignes de flux entrent dans la surface sans en ressortir, ce qui crée un flux négatif. La surface contient donc une charge négative.

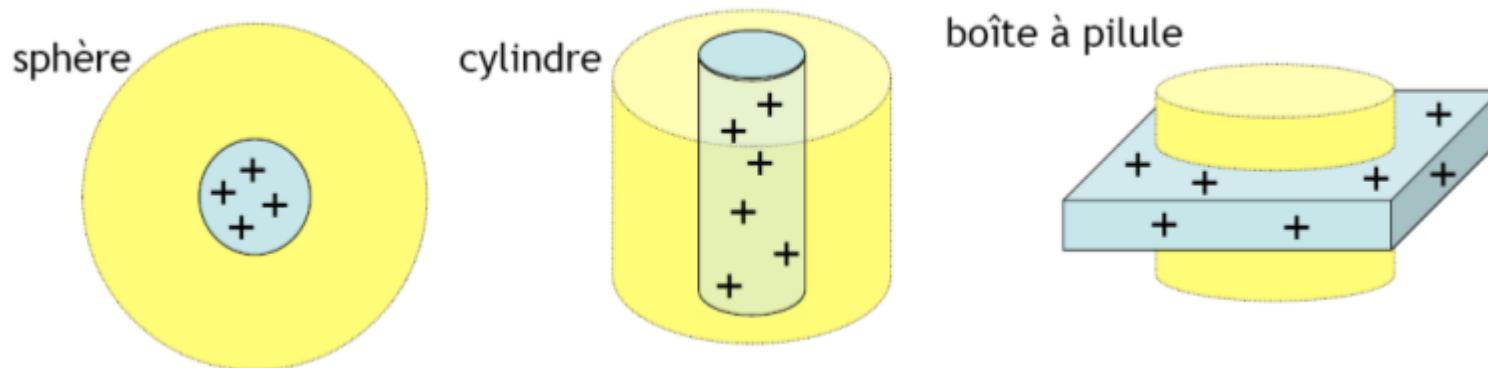
S_3 et S_4 : toutes les lignes de flux électrique qui sortent de la surface finissent par y rentrer de nouveau : la charge totale contenue est donc nulle.



Surfaces de Gauss

Pour appliquer le théorème de Gauss, il faut **choisir la surface fermée appropriée**.

Il existe **trois surfaces de Gauss** possibles. Il faut choisir celle qui convient à la **symétrie du problème** que l'on veut résoudre.



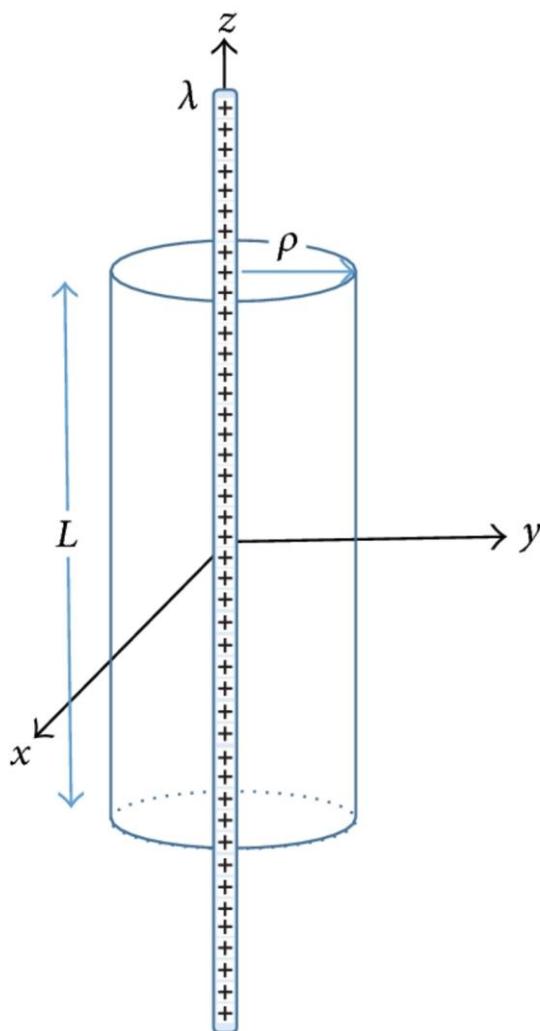
En choisissant bien la surface, il est possible de simplifier grandement l'intégrale. En effet, il s'agit d'avoir l'une des deux conditions suivantes sur chaque face de la surface de Gauss :

1. La densité de flux est constante et perpendiculaire à la surface, de sorte que $\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \pm D dS = \pm DS$;
2. La densité de flux est parallèle à la surface, de sorte que $\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$.

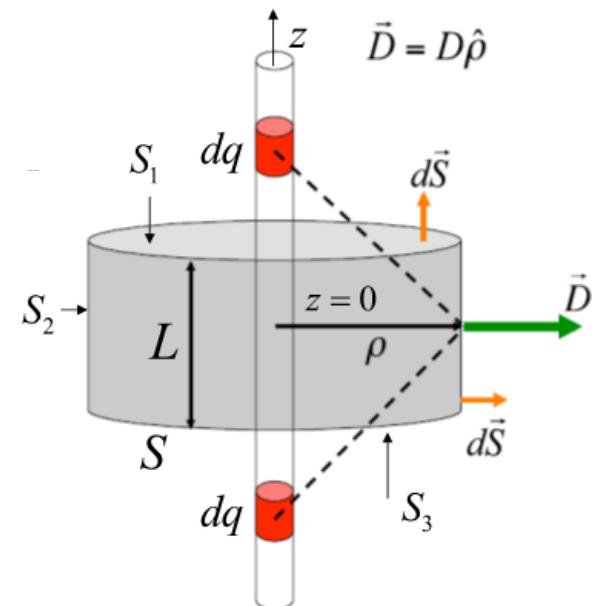
$Q =$

Exemple 1 – Tige infinie uniformément chargée

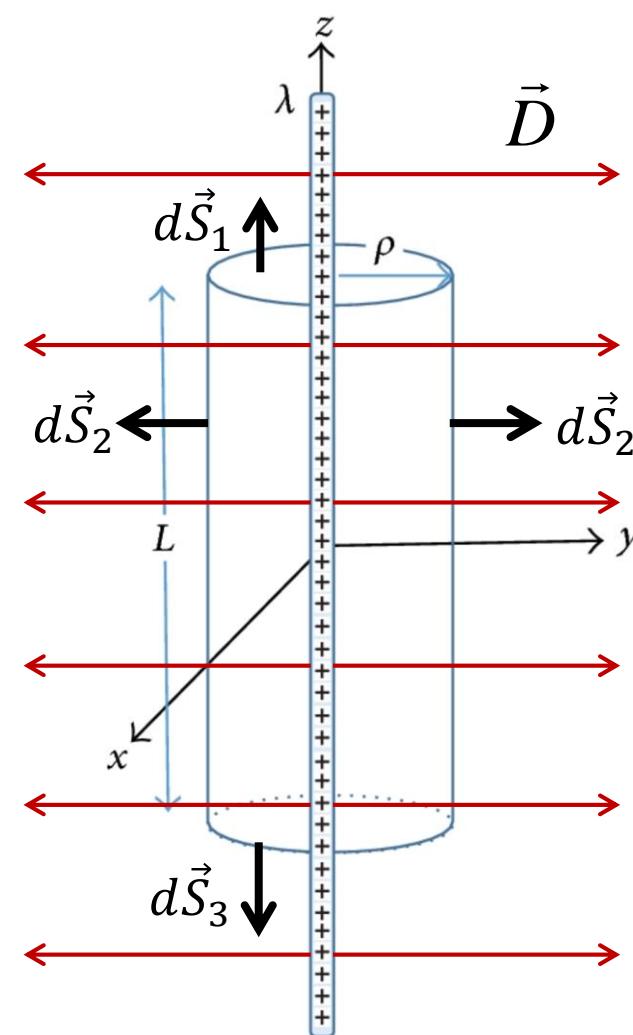
Quelle est la densité de flux électrique produite à une distance ρ de la tige infinie de densité linéique ρ_l ?



1. Le problème possède une **symétrie cylindrique**. On choisit donc une **surface de Gauss cylindrique** de longueur L centrée sur le fil.
2. La symétrie par rapport au plan $z = 0$ (plan xy) permet de déduire que la densité de flux est orientée radialement seulement et parallèle à au plan $z = 0$.



Exemple 1 – Tige infinie uniformément chargée



Quelle est la densité de flux électrique produite à une distance ρ de la tige infinie de densité linéique ρ_l ?

- La surface de Gauss possède 3 faces S_1 , S_2 et S_3 .

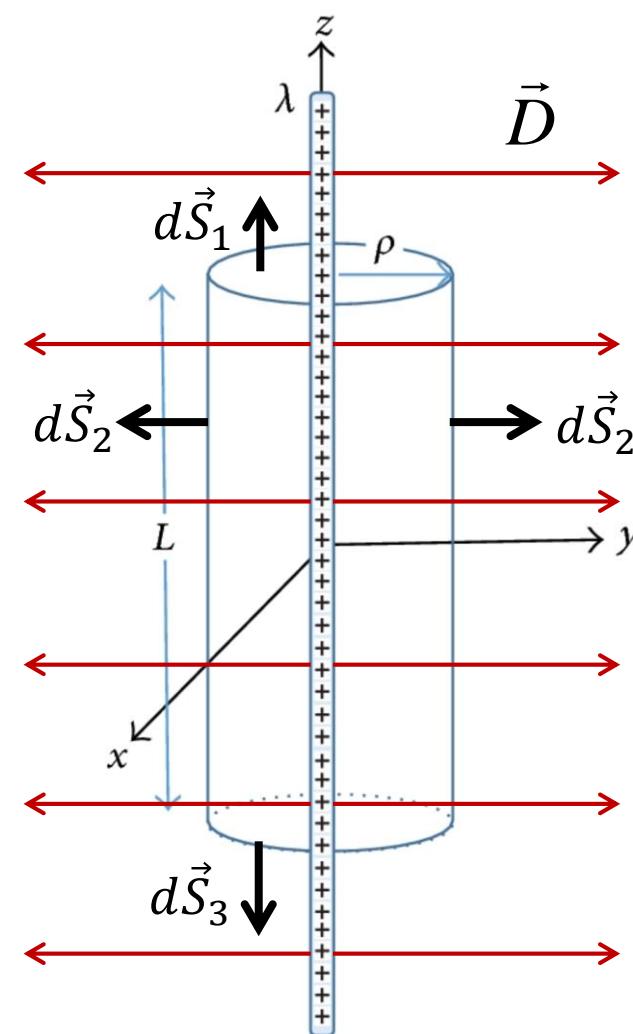
$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Puisque \vec{D} est parallèle à S_1 et S_3 (\vec{D} est perpendiculaire à $d\vec{S}_1$ et à $d\vec{S}_3$), les 1^{re} et 3^e intégrales sont nulles.

Puisque \vec{D} est perpendiculaire à S_2 (\vec{D} est parallèle à $d\vec{S}_2$) et uniforme sur cette surface, alors :

$$Q = \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = +DS = D2\pi\rho L$$

Exemple 1 – Tige infinie uniformément chargée



$$Q = D2\pi\rho L$$

4. La charge contenue dans la surface de Gauss est :

$$Q = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_l dz = \rho_l L$$

5. La densité de flux est donc :

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi\rho L} \hat{\rho} = \frac{\rho_l}{2\pi\rho} \hat{\rho}$$

Rappel de l'exemple 1.2

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

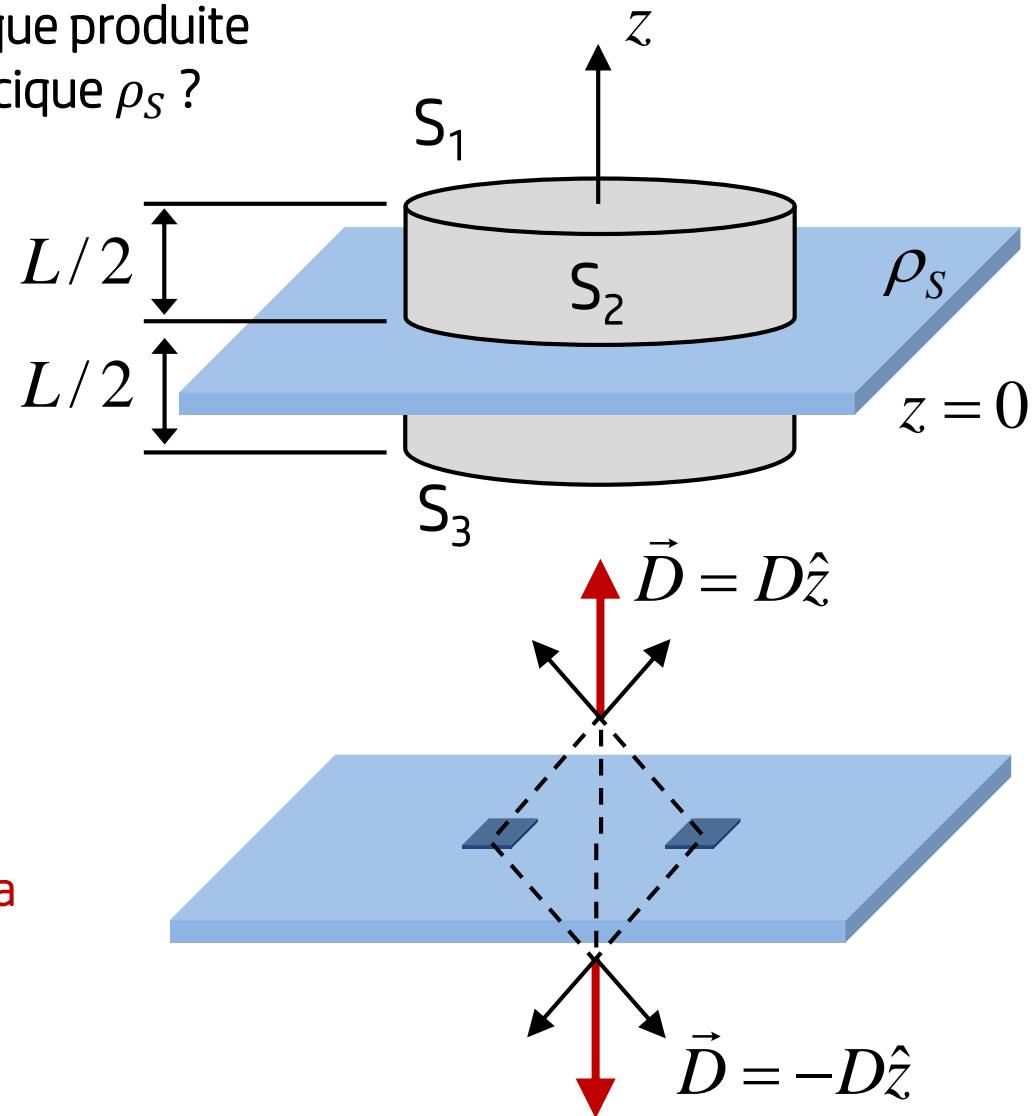
Relation entre la densité de flux
et le champ (dans le vide)

Exemple 2 – Plan conducteur infini

Quelle est la densité de flux électrique produite par le plan infini de densité surfacique ρ_S ?

1. Le problème possède une **symétrie plan** (miroir $z = 0$). On choisit donc une **surface de Gauss** de type boîte à pilule de longueur L et de section A centrée sur le plan.
2. Puisque le plan est **infini**, la densité de flux est orientée selon l'axe z .

La densité de flux étant parallèle à la surface S_2 du cylindre, seul le flux traversant les surfaces S_1 et S_3 contribuera à l'intégrale.



Exemple 2 – Plan conducteur infini

3. Théorème de Gauss :

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$Q = \int_{S_1} (\vec{D} \hat{z}) \cdot (dS \hat{z}) + 0 + \int_{S_3} (-\vec{D} \hat{z}) \cdot (-dS \hat{z})$$

$$Q = D \int_{S_1} dS + D \int_{S_3} dS = 2DA$$

4. Charge à l'intérieur de la boîte à pilule :

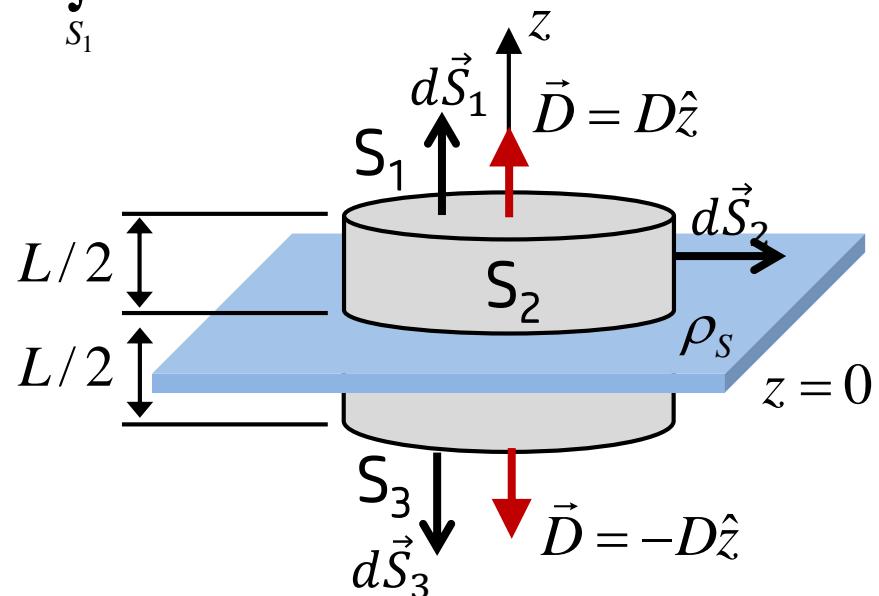
$$Q = \int_{S_1} \rho_s dS = \rho_s A$$

On a donc : $2DA = \rho_s A$

La densité de flux produite par un plan infini est constante !

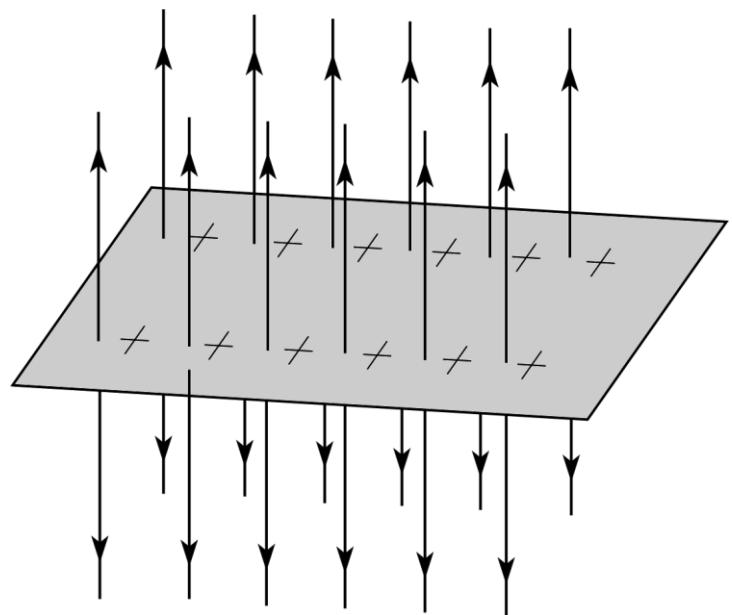
$$\vec{D} = \frac{\rho_s}{2} \hat{z} \quad \text{si } z > 0$$

$$\vec{D} = -\frac{\rho_s}{2} \hat{z} \quad \text{si } z < 0$$



Limites de l'hypothèse du plan infini

- Un plan infini n'existe pas !
- Un observateur très proche d'un plan de dimension finie perçoit ce dernier comme ayant une dimension presque infinie : il ressent donc un flux électrique à peu près constant ;
- Un observateur éloigné perçoit le plan comme une source ponctuelle de charge $\rho_S S$, où S est la surface du plan fini. Il ressent donc un flux électrique décroissant avec [le carré de] la distance.



Densité de flux produite par un plan infini

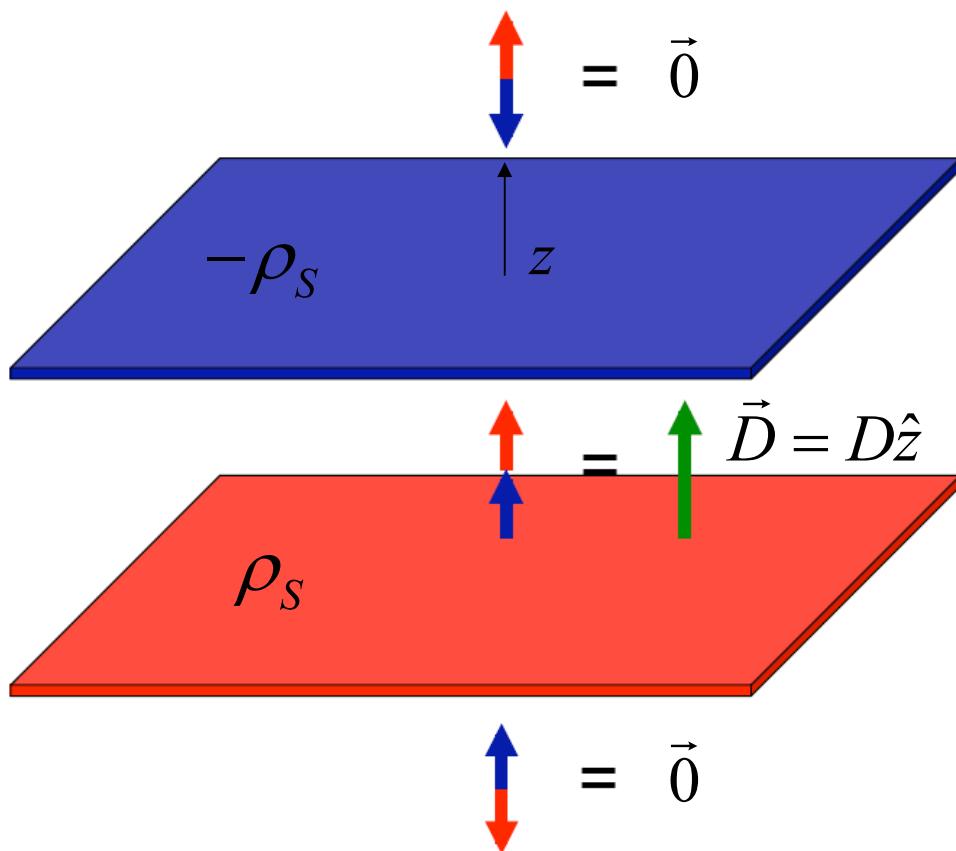
$$\vec{D} = \frac{\rho_S}{2} \hat{z} \quad \text{si } z > 0$$

$$\vec{D} = -\frac{\rho_S}{2} \hat{z} \quad \text{si } z < 0$$

Densité de flux dans un condensateur plan infini

Condensateur plan

Deux plaques métalliques parallèles chargées avec $\pm \rho_s$



Principe de superposition :

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{D}_+(\vec{r}) + \vec{D}_-(\vec{r})$$

Au-dessus :

$$\vec{D}_{\text{haut}}(\vec{r}) = \frac{\rho_s}{2} \hat{z} + \frac{-\rho_s}{2} \hat{z} = \vec{0}$$

Au centre :

$$\vec{D}_{\text{centre}}(\vec{r}) = \frac{\rho_s}{2} \hat{z} + \frac{\rho_s}{2} \hat{z} = \rho_s \hat{z}$$

Au-dessous :

$$\vec{D}_{\text{bas}}(\vec{r}) = \frac{-\rho_s}{2} \hat{z} + \frac{\rho_s}{2} \hat{z} = \vec{0}$$

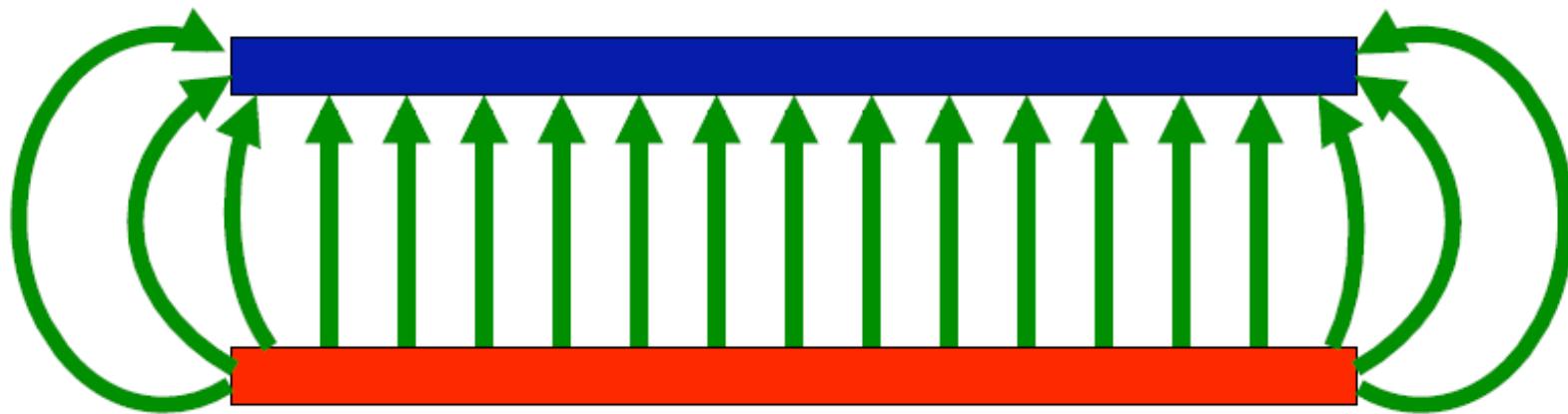
Validité de l'hypothèse du condensateur plan infini

Plaques infinies

Densité de flux électrique et champ électrique uniformes.

Plaques finies

Des effets de bords apparaissent aux extrémités des plaques.



L'approximation des plaques infinies (champ uniforme) est valide si l'on s'intéresse au **champ loin des bords** et que la **distance entre les plaques** est petite par rapport à leurs dimensions.

Dans ce cours, nous ferons plusieurs hypothèses simplificatrices afin de ne pas avoir à traiter des effets de bord qui sont en général complexes à considérer.

Résumé – Chapitre 1 – Électrostatique

1. Calculer le champ électrique produit par une distribution de charge statique.

Méthode #1 : Loi de Coulomb (distribution de charge quelconque)

Distribution discrète

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i Q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

\vec{r} : position où on calcule le champ

Distribution continue

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

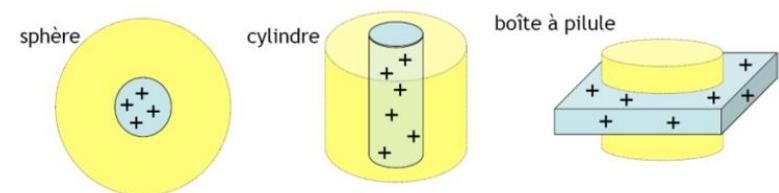
\vec{r}_i : position d'une charge ponctuelle

\vec{r}' : position d'un élément de charge dq

Méthode #2 : Loi de Gauss (distribution de charge symétrique)

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Q : charge libre à l'intérieur de la surface fermée S



Densité de flux électrique dans le vide

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

2. Calculer la force électrique subie par une charge q .

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

– PHS1102 –

Champs électromagnétiques

Chapitre 2

Différence de potentiel

Potentiel d'une charge ponctuelle

Potentiel d'une distribution de charge

Champ électrostatique conservatif

Potentiel et champ électrique (gradient)

Énergie emmagasinée dans le champ électrique

Objectifs de la semaine

Différence de potentiel

- Calculer la différence de potentiel entre deux points à partir du champ électrique.

Potentiel d'une charge ponctuelle et d'une distribution de charge

- Calculer le potentiel dû à un ensemble de charges ponctuelles ou à une distribution de charge.

Champ \vec{E} conservatif

- Expliquer pourquoi \vec{E} est un champ conservatif en électrostatique.
- Démontrer qu'un champ \vec{E} donné est conservatif.

Potentiel et champ électrique

- Calculer le champ électrique \vec{E} à partir d'un potentiel connu.

Énergie emmagasinée dans le champ électrique

- Calculer l'énergie emmagasinée dans un champ électrique \vec{E} connu.

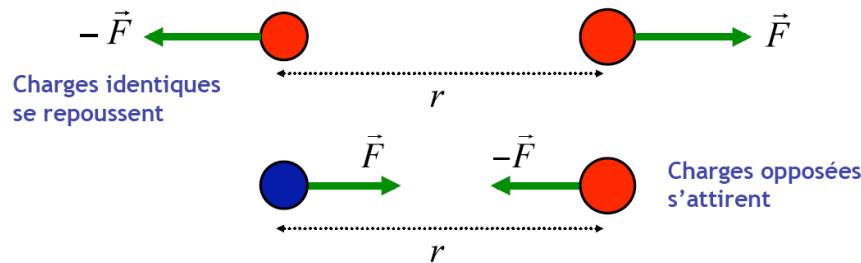
Une analogie entre deux forces de la nature...

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Loi de Coulomb
Force électrique entre deux particules

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Champ électrique
Produit par une charge ponctuelle

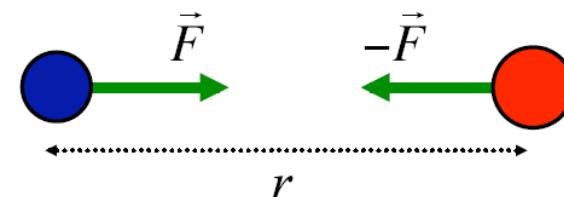


Loi de la gravitation
Force entre deux particules ayant une masse

$$\vec{F} = \frac{GmM}{r^2} \hat{r}$$

Champ gravitationnel
Produit par une charge ponctuelle

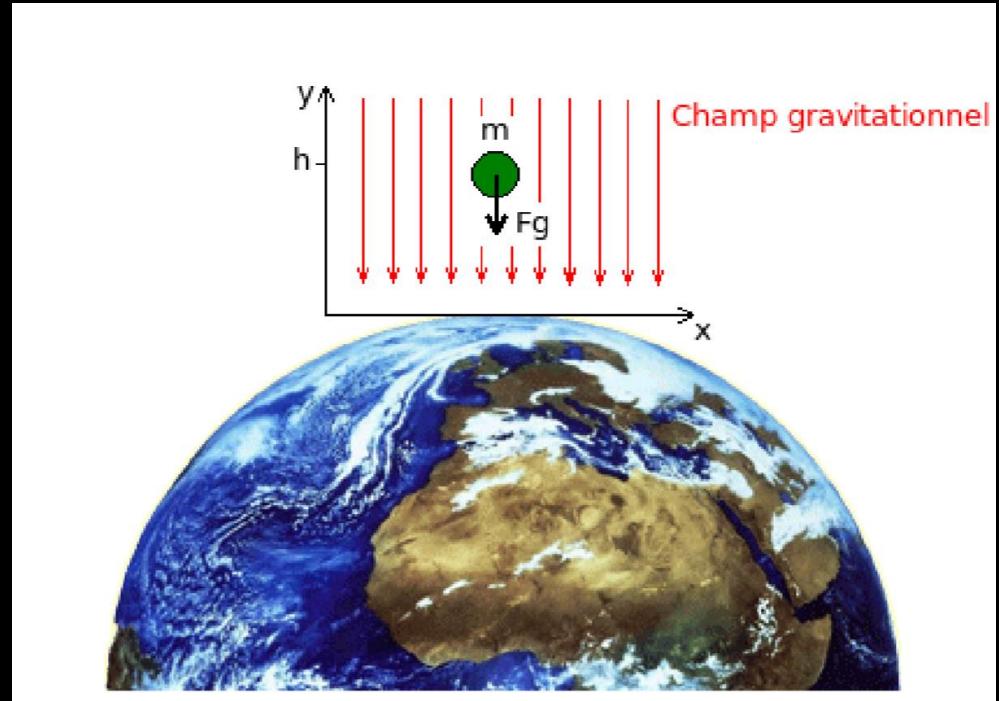
$$\vec{E} = \frac{GM}{r^2} \hat{r}$$



Les deux forces décroissent avec le carré de la distance, mais contrairement à la force électrique, la force gravitationnelle est seulement attractive.

Avec cette analogie, il est possible de réutiliser certains concepts qui ont été développés dans le cadre de la mécanique...

Énergie potentielle et énergie cinétique



- **Énergie cinétique** : énergie associée au mouvement ;
- **Énergie potentielle** : énergie emmagasinée dans un champ qui peut servir à faire un travail (donner de l'énergie cinétique à un corps) ;
- L'énergie potentielle est mesurée par rapport à une référence.

Travail effectué par la force électrique (charge ponctuelle)

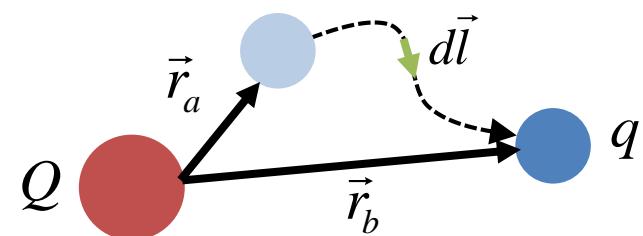
On considère le déplacement d'une charge q soumise au champ électrique d'une autre charge Q située à l'origine.

Soit \vec{r}_a et \vec{r}_b les positions initiale et finale de la charge q .

Le travail effectué par la force électrique est alors :

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$$

RAPPEL
Définition du travail

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$


Le champ de la charge Q a une symétrie sphérique : on utilise donc les coordonnées sphériques pour calculer l'intégrale.

Quelle est l'expression du vecteur $d\vec{l}$?

Rappels sur la notation vectorielle

On peut utiliser plusieurs **systèmes de coordonnées** pour décrire un même vecteur (une force, par exemple).

Sphérique :

$$\vec{F}(r, \phi, \theta) = F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi} + F_\theta \hat{\theta}$$

Annexe 4 du polycopié

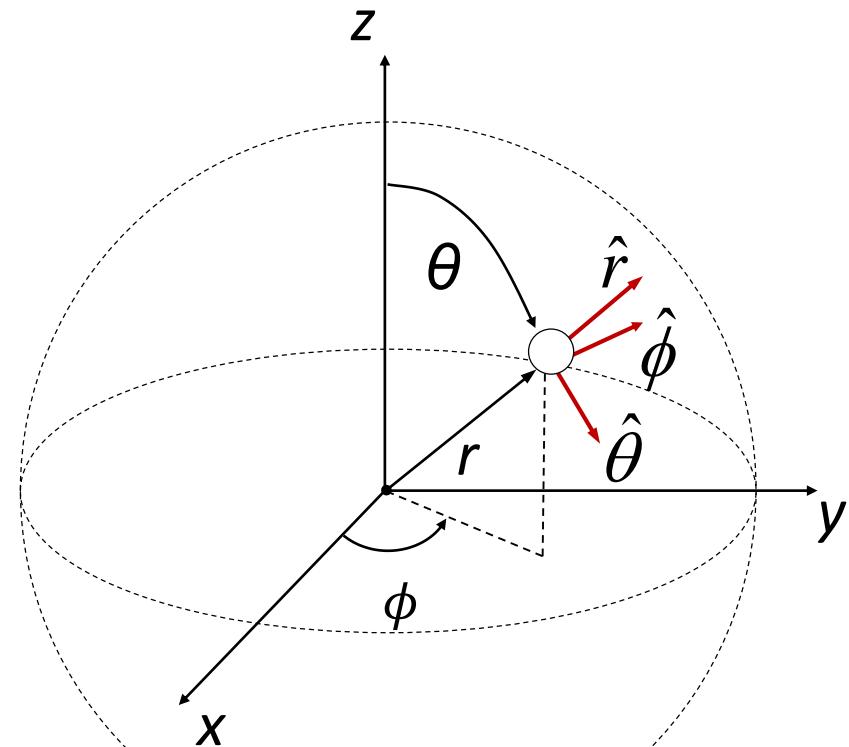
$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

Base orthonormée

$$\hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \quad \hat{\theta} \cdot \hat{r} = 0 \quad \hat{\phi} \cdot \hat{r} = 0$$

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 \quad \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 1 \quad \hat{\phi} \cdot \hat{\theta} = 0$$

$$\hat{r} \cdot \hat{\phi} = 0 \quad \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = 0 \quad \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = 1$$



Travail effectué par la force électrique (charge ponctuelle)

On considère le déplacement d'une charge q soumise au champ électrique d'une autre charge Q située à l'origine.

Soit \vec{r}_a et \vec{r}_b les positions initiale et finale de la charge q .

Le travail effectué par la force électrique est alors :

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$$

Le champ de la charge Q a une symétrie sphérique : on utilise donc les coordonnées sphériques pour calculer l'intégrale.

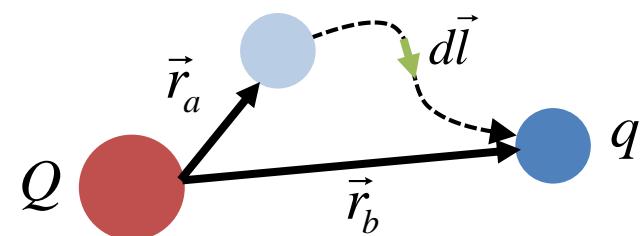
Quelle est l'expression du vecteur $d\vec{l}$?

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_a}^{r_b}$$

Travail fait par la force électrique
(deux charges ponctuelles)

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$



RAPPEL
Définition du travail

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Annexe 4 du polycopié

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi}$$

Base orthonormée

$$\hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \quad \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 \quad \hat{r} \cdot \hat{\phi} = 0$$

Est-ce que la force électrique est conservative ? Si oui, quelle quantité peut-on introduire ?

Énergie potentielle électrique (charge ponctuelle)

Puisque le travail fait par la force électrique ne dépend que des positions initiales et finales (et non pas du chemin parcouru), **la force électrique est une force conservative**.

On peut alors définir l'énergie potentielle électrique d'une charge q située à une distance r d'une autre charge Q .

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En joule [J]

N.B. Vérifiez que cette définition respecte les définitions (en gris).

Remarque

Il faut toujours une référence $U = 0$ pour calculer l'énergie potentielle.

Pour une charge ponctuelle, la référence $U = 0$ se trouve à $r \rightarrow \infty$.

$$U = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Comme pour la force électrique, on peut décomposer U en deux termes : l'un dépend de la charge q dont on calcule l'énergie tandis que l'autre dépend de la charge Q qui produit le champ.

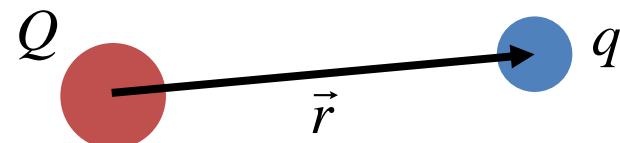
La quantité en vert porte un nom bien précis...

RAPPEL
Définition de l'énergie potentielle

$$\Delta U_{a \rightarrow b} = U_b - U_a = -W_{a \rightarrow b}$$

Travail (force électrique)

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$



Potentiel électrique

(distribution de charges ponctuelles)

On définit le **potentiel électrique** en suivant un raisonnement analogue à celui qui a été utilisé pour définir le **champ électrique**. Ici, on utilise le **principe de superposition** pour définir le potentiel d'un ensemble de charges ponctuelles.

Force électrique

$$\vec{F} = q \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

En newton [N]

Champ électrique

$$\vec{E} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

En volt/mètre [V/m]

Relation entre force et champ

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Énergie potentielle électrique

$$U = q \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

En joule [J]

Potentiel électrique

$$V = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Relation entre énergie potentielle et potentiel

$$U = qV$$

Remarques

1. La référence $V = 0$ du potentiel pour une charge ponctuelle est prise à $r \rightarrow \infty$;
2. La distance r_i est la distance entre la charge Q_i et le point où l'on veut calculer la quantité d'intérêt (force, champ, potentiel ou énergie potentielle).

Potentiel d'une distribution de charge

Comme pour le champ électrique, on utilise le principe de superposition pour déterminer le potentiel dû à une distribution de charge continue.

Potentiel produit par un ensemble de charges ponctuelles

$$V(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

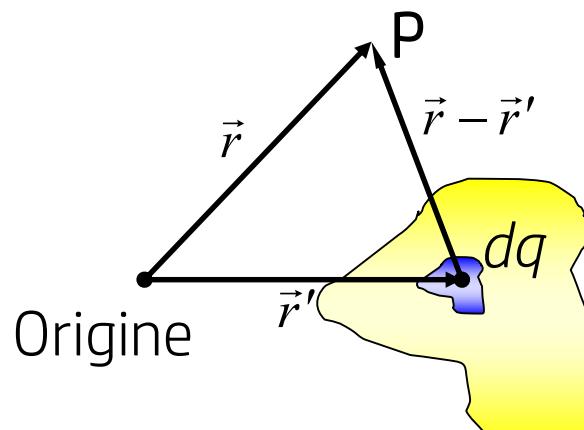
En volt [V]

Potentiel produit par une distribution de charge

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dq$$

\vec{r} : position du point où l'on calcule V

\vec{r}_i : position de la charge Q_i



\vec{r} : position du point où l'on calcule V

\vec{r}' : position de la charge dq

Ω : domaine d'intégration

Rappel sur la densité de charge

Selon le domaine d'intégration, on a :

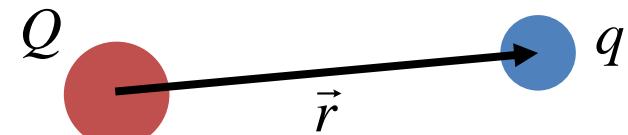
1. Ligne (1D) : $dq = \rho_l dl$
2. Surface (2D) : $dq = \rho_s dS$
3. Volume (3D) : $dq = \rho_v dV$

Exemple – Énergie potentielle

Deux charges Q et q de masses respectives M et m sont maintenues immobiles à une distance d l'une de l'autre. On lâche la charge q qui est ensuite libre de bouger. Quelle sera la vitesse de la charge q lorsqu'elle sera loin de la charge Q ? On néglige tout frottement.

Information connue

1. Valeurs des charges et des masses ;
2. Distances initiale (d) et finale ($r \rightarrow \infty$) entre les charges.



Que cherche-t-on ?

La vitesse de la charge q à $r \rightarrow \infty$; La vitesse de la charge est reliée à son énergie cinétique.

Stratégie de résolution

La force électrique étant conservative, il y a conservation de l'énergie de la charge q .

$$E = T + U = \text{cste}$$

$$qV_1 = \frac{1}{2}mv^2 + qV_2$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d} \quad V_2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$$



$$v = \sqrt{\frac{2q(V_1 - V_2)}{m}} = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 md}}$$

C'est la différence de potentiel $\Delta V = V_2 - V_1$ qui est importante du point de vue physique.

Différence de potentiel (tension)

La valeur absolue du potentiel n'a pas de sens physique. C'est plutôt la **variation du potentiel** qui est importante, puisqu'elle est reliée au **champ électrique**. En effet :

$$\begin{aligned} U &= qV \\ \vec{F} &= q\vec{E} \\ \Delta U_{a \rightarrow b} &= - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{a \rightarrow b} &= q \Delta V_{a \rightarrow b} \\ \Delta U_{a \rightarrow b} &= -q \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned} \right\}$$

En volt [V]

$$\Delta V_{a \rightarrow b} = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Différence de potentiel
(tension) entre deux points

L'équation ci-dessus permet de calculer la différence de potentiel entre deux points si l'on connaît le champ électrique dû à la distribution de charge.

Notation du polycopié

Le polycopié utilise la notation $V_{ba} = - \int_{ab} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ qui se lit « différence de potentiel de b par rapport à a ». On a $V_{ba} = \Delta V_{a \rightarrow b}$ avec la notation ci-haut.



Exemple – Condensateur plan

Le milieu entre les plaques est le vide.

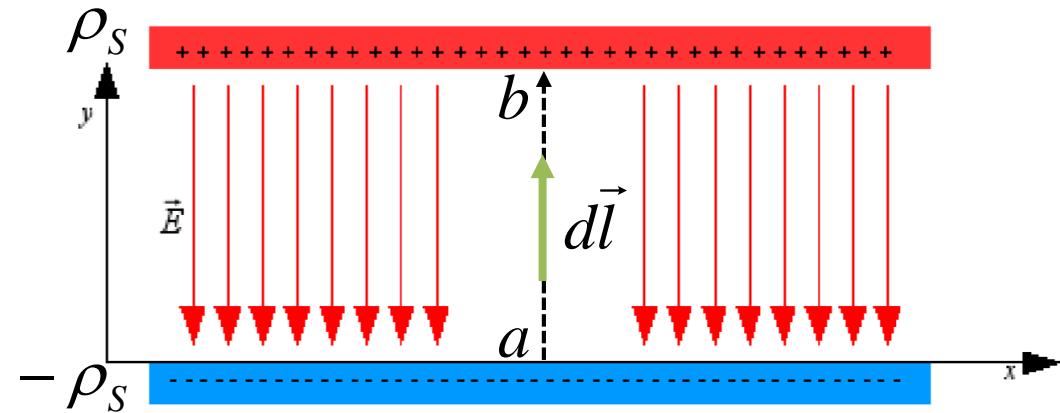
La distance entre les plaques est d .

La surface S des plaques est grande devant d : effets de bord négligeables.

Nous savons du chapitre 1 que :

$$\vec{D} = -\rho_s \hat{y} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{y} = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} \hat{y}$$



Quelle est la différence de potentiel entre les plaques du condensateur ?

Puisque le champ est conservatif, le résultat ne dépend pas du chemin suivi. On choisit donc le chemin le plus simple : une ligne droite qui part de la plaque du bas et qui se termine sur la plaque du haut.

$$V_{ba} = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^d \left(-\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{y} \right) \cdot (dy \hat{y}) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \int_0^d dy$$

$$V_{ba} = \frac{\rho_s d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

Quiz – Condensateur plan

1. Où le potentiel est-il le plus faible ?
Où est-il le plus élevé ?

Le potentiel diminue dans la direction du champ électrique.

Plus faible : plaque négative
Plus élevé : plaque positive.

2. Quelle force f faut-il exercer sur une particule de charge q pour la déplacer à vitesse constante de la plaque négative vers la plaque positive ?

Vitesse constante :

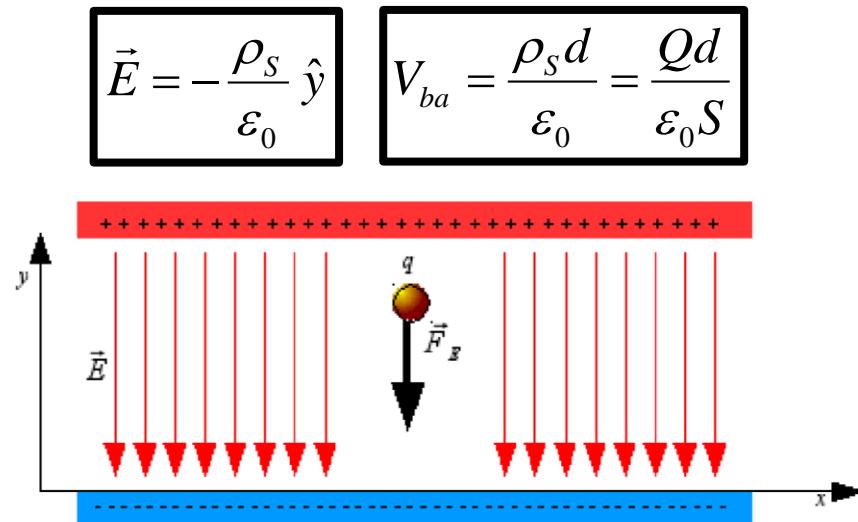
$$\sum F_y = f - qE = 0$$

$$f = \frac{qQ}{\epsilon_0 S}$$

3. En se déplaçant vers la plaque positive, qu'arrive-t-il à l'énergie potentielle de la particule ?

$$\Delta U = q\Delta V$$

Charge positive (ex : proton) : l'énergie augmente
Charge négative (ex : électron) : l'énergie diminue



$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{y}$$

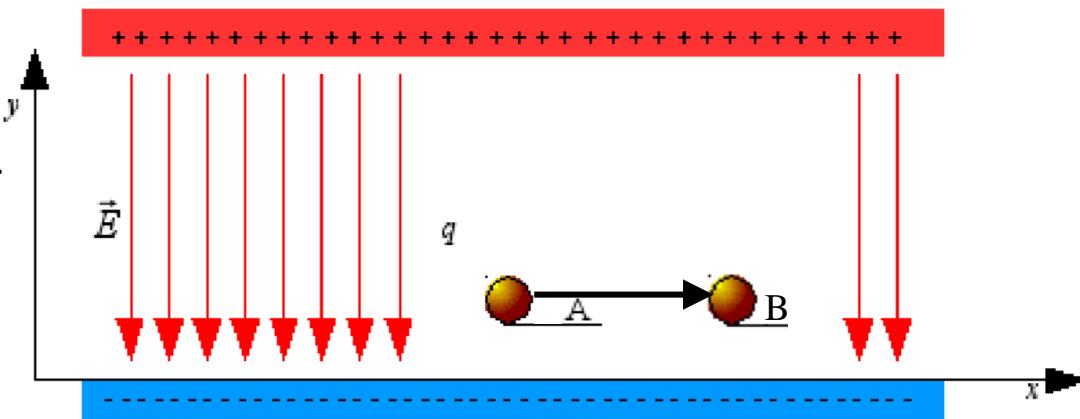
$$V_{ba} = \frac{\rho_s d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

Surfaces équipotentielles

Quelle force f faut-il exercer sur la charge pour la déplacer horizontalement (de A à B) à vitesse constante ?

Puisque le champ est vertical et que $\vec{F} = q\vec{E}$, alors les plaques n'exercent aucune force horizontale sur la charge.

Aucune force f horizontale n'est requise pour déplacer la charge de A à B à vitesse constante!



En se déplaçant horizontalement, la charge se déplace sur une **surface équipotentielle où le potentiel est constant**. Sur une équipotentielle, l'énergie potentielle électrique reste constante, ce qui implique que **la force électrique ne fait pas de travail sur la charge**.

Équipotentielles d'un condensateur plan

Potentiel en fonction de y
($V = 0$ sur la plaque du bas)

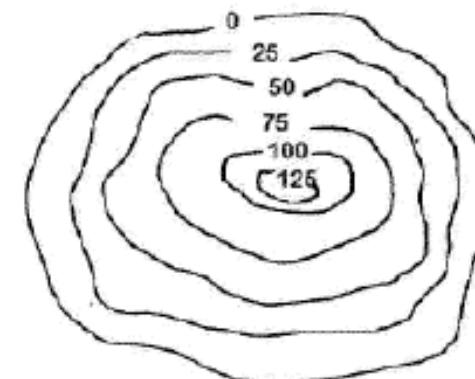
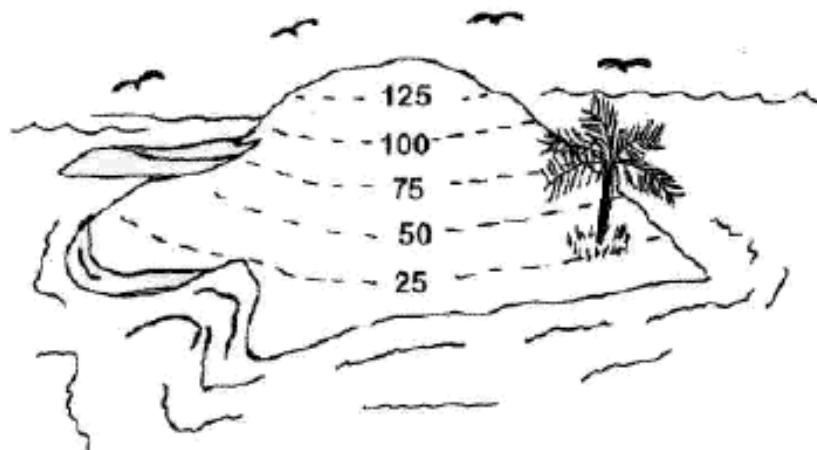
$$V(y) = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \int_0^y dy = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} y$$



Les équipotentielles $V = \text{cste}$ du condensateur plan sont les surfaces $y = \text{cste}$ parallèles aux plaques du condensateur.

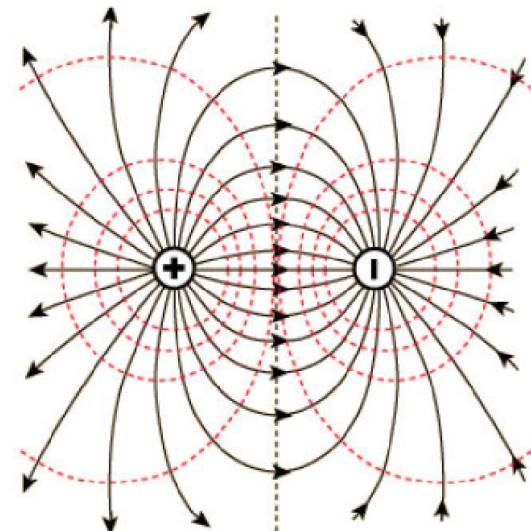
Surfaces équipotentielles

Surfaces équipotentielles (champ gravitationnel)



Aucun travail n'est requis pour se déplacer sur une équipotentielle à vitesse constante.

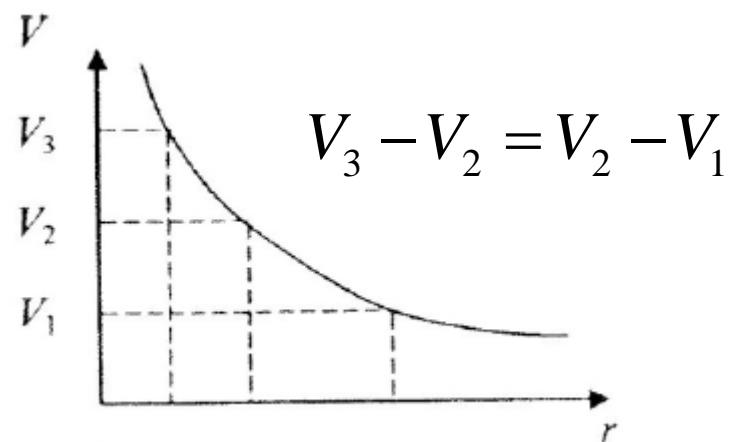
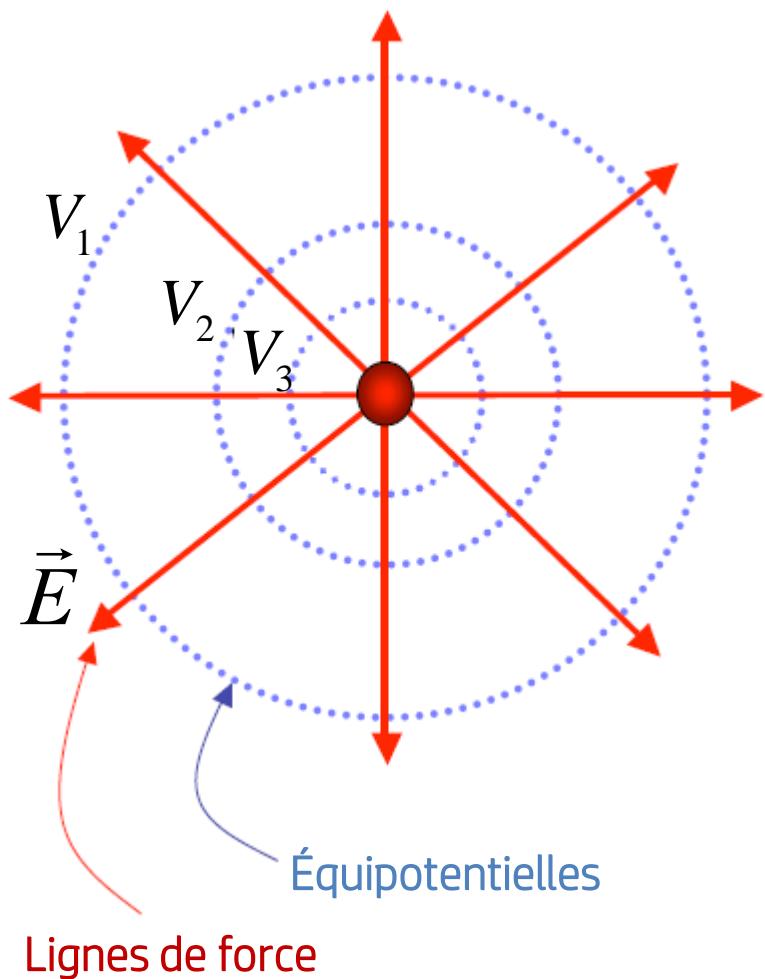
Quelle est la relation entre les lignes de force et les équipotentielles ?



Surfaces équipotentielles en rouge (dipôle électrique)

Représentation graphique des équipotentielles

Lignes de force et équipotentielles pour une charge ponctuelle $Q > 0$



Propriété des équipotentielles

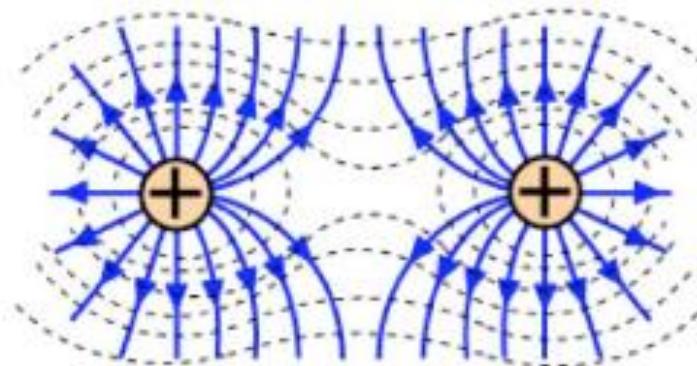
Les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de force en tout point de l'espace.

Représentation des équipotentielles

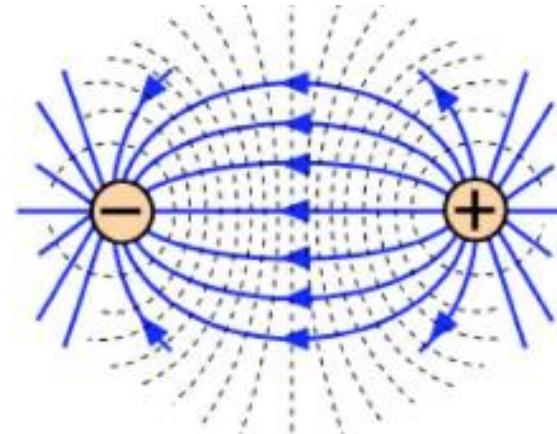
La différence de potentiel entre deux équipotentielles adjacentes est toujours la même. Plus les équipotentielles sont rapprochées, plus le potentiel varie rapidement.

Exemples de surfaces équipotentielles

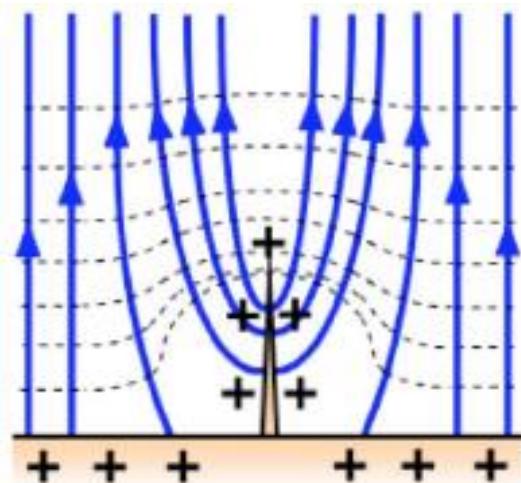
Deux charges positives identiques



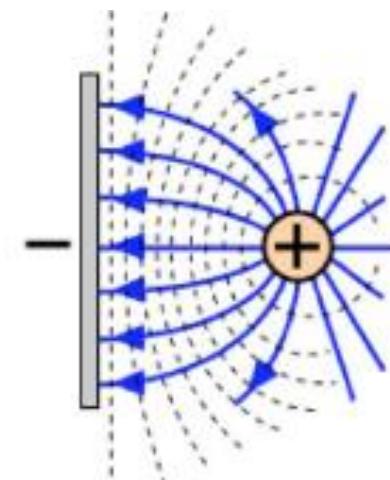
Deux charges identiques de signe opposé



Pointe chargée

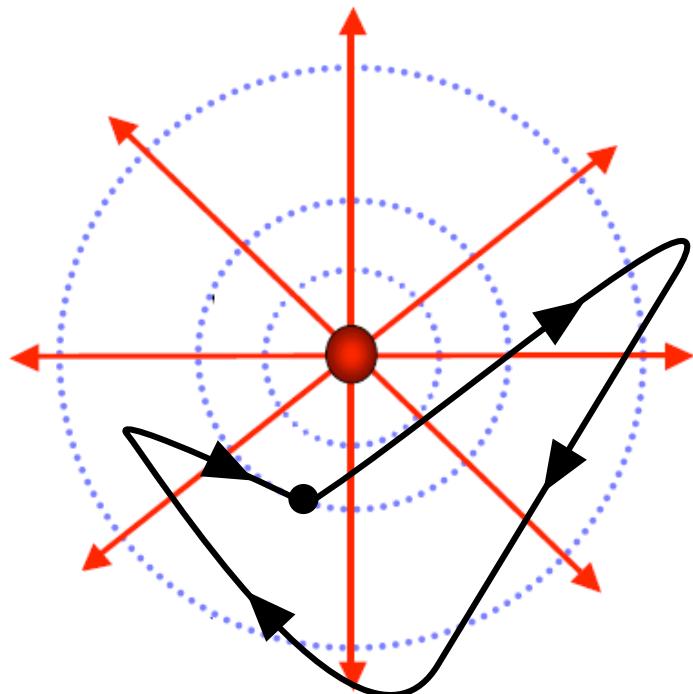


Charge positive et plan conducteur mis à la masse



Champ électrique conservatif (cas statique)

Quelle est la variation de potentiel sur une boucle (trajectoire fermée) ?



Le champ étant conservatif, le potentiel ne dépend que de la position. Si les positions initiale et finale sont identiques, comme c'est le cas sur une trajectoire fermée, alors la différence de potentiel est nulle.

Champ électrique conservatif
(cas statique)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

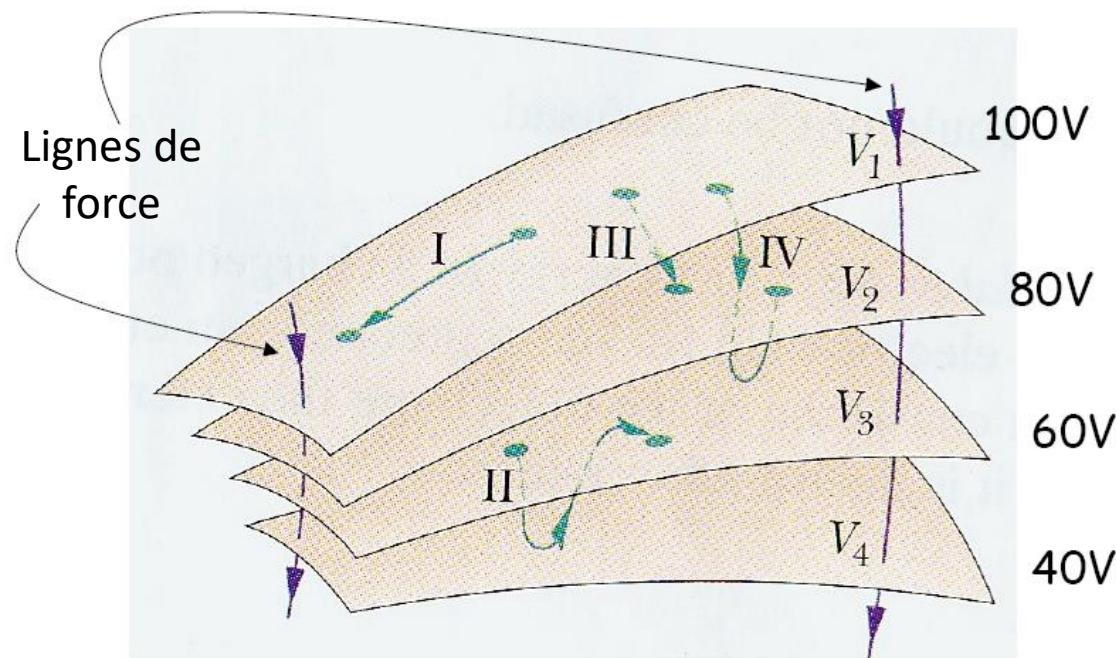
$$\Delta V_{a \rightarrow b} = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Le champ électrique est conservatif seulement dans le cas statique (les champs ne varient pas dans le temps).



Quiz – Surfaces équipotentielles

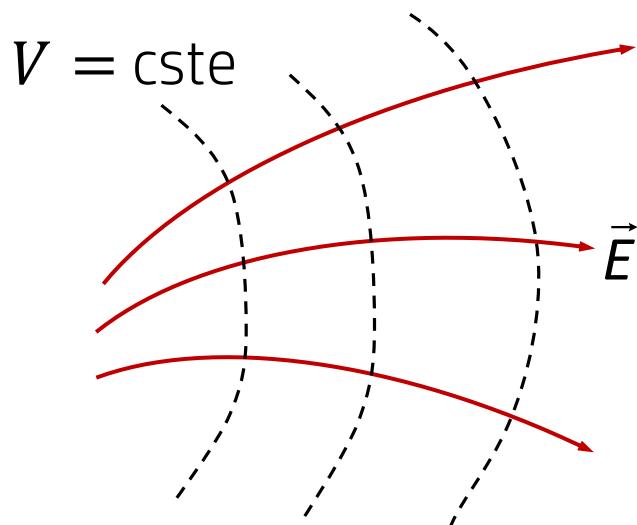
Quelle est la variation de potentiel sur chacune des quatre trajectoires I, II, III et IV ?



- I : Parcours sur une surface équipotentielle : $\Delta V = 0$
- II : Points de départ et d'arrivée sur la même équipotentielle : $\Delta V = 0$
- III : Diminution du potentiel de 20 V
- IV : Diminution du potentiel de 40 V

Calculer le champ à partir du potentiel

Si l'on connaît le potentiel, peut-on calculer le champ électrique ?



Opérateur gradient
(annexe 4 du polycopié)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

Élément de longueur $d\vec{l}$

$$d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

1. On écrit la définition de la différence de potentiel pour une variation infinitésimale du potentiel :

$$\Delta V_{a \rightarrow b} = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \rightarrow \quad dV = - \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

2. On exprime dV par sa différentielle totale :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l}$$

3. On a enfin : $\vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = - \vec{E} \cdot d\vec{l}$

et puisque cette égalité doit tenir pour n'importe quel déplacement $d\vec{l}$, alors on doit avoir :

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} V$$

Le champ électrique est l'opposé du gradient du potentiel.

Stratégies de résolution (champ et potentiel)

1. Calculer le champ par intégration, puis en déduire le potentiel

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq \quad \rightarrow \quad \Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Avantage : s'applique toujours, peu importe la symétrie.

Inconvénient : il faut résoudre deux intégrales, dont l'une est vectorielle (champ).

2. Calculer le champ par le théorème de Gauss, puis en déduire le potentiel

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \rightarrow \quad \Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Avantage : l'intégrale de Gauss est simple (cas symétriques).

Inconvénient : la méthode s'applique seulement aux cas symétriques.

3. Calculer le potentiel, puis en déduire le champ

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dq \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Avantage : une seule intégrale scalaire qui s'applique toujours, peu importe la symétrie.

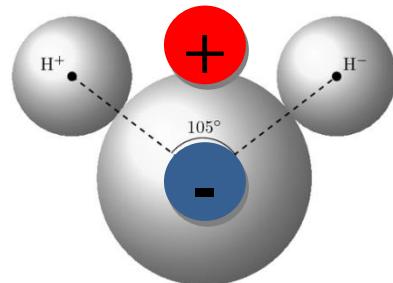
Inconvénient : pour les cas symétriques, plus long que le théorème de Gauss.

Exemple – Dipôle électrique

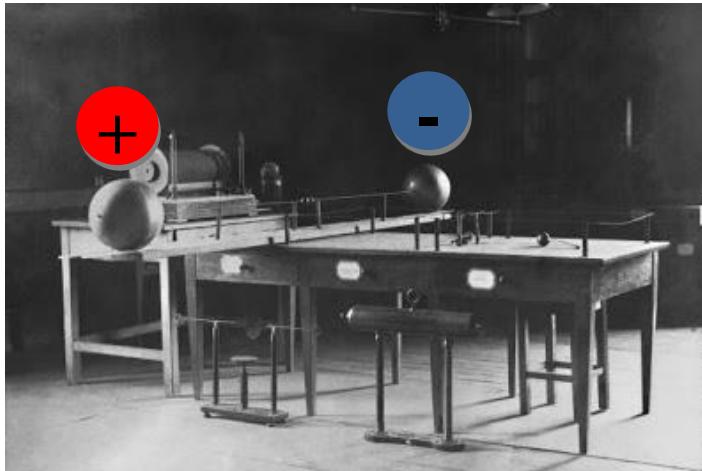
Dipôle électrique : deux charges opposées de même magnitude



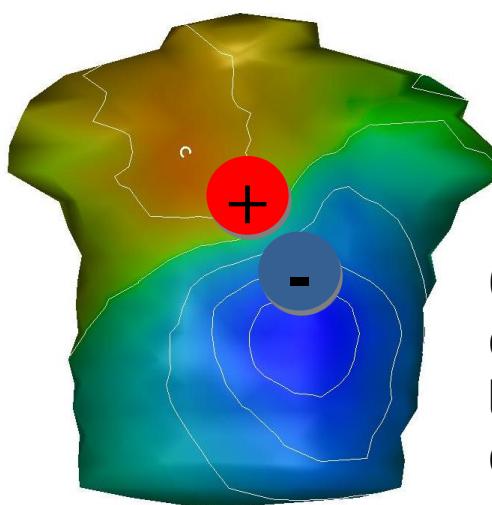
antenne TV de type
« oreilles de lapin »



Molécule d'eau



Expérience
de Hertz:
émission
d'une onde
EM par une
antenne
dipolaire



Génération de l'électro-
cardiogramme par
l'activation électrique
du cœur

Exemple – Potentiel et champ d'un dipôle électrique

Stratégie de résolution

Gauss ne s'applique pas, car il n'est pas possible de déterminer une surface de Gauss où la densité de flux est constante en magnitude.

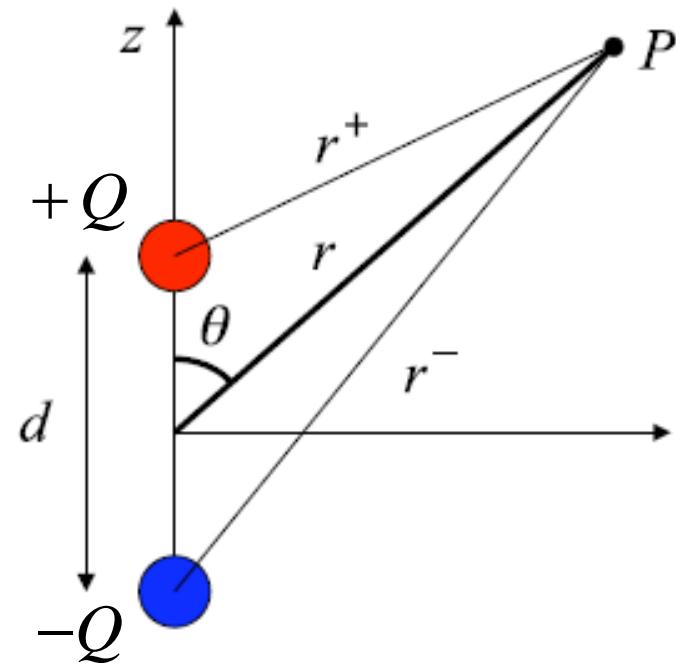
On choisit de calculer V , puis de déduire \vec{E} puisqu'il est plus facile de faire l'intégrale scalaire du potentiel que l'intégrale vectorielle du champ électrique.

Principe de superposition

Le potentiel au point P est la somme des potentiels de chaque charge.

$$V(\vec{r}) = V_+(\vec{r}) + V_-(\vec{r})$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right)$$



$$r_+ = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r \frac{d}{2} \cos\theta}$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r \frac{d}{2} \cos(180^\circ - \theta)}$$

Exemple – Potentiel d'un dipôle électrique

Cas limite : loin du dipôle ($r \gg d$)

Développement de Taylor autour de $d = 0$.

Rappel : $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ si $x \ll 1$.

$$r_+ = \sqrt{r^2 - rd \cos \theta + \frac{d^2}{4}} \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + rd \cos \theta + \frac{d^2}{4}} \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta$$

On a donc : $r_- - r_+ \approx d \cos \theta$ $r_+ r_- \approx r^2$

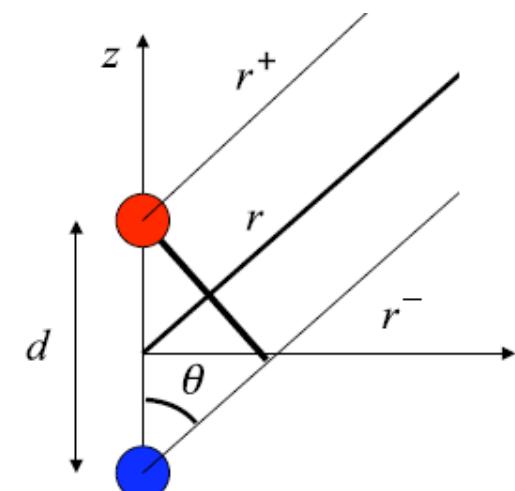
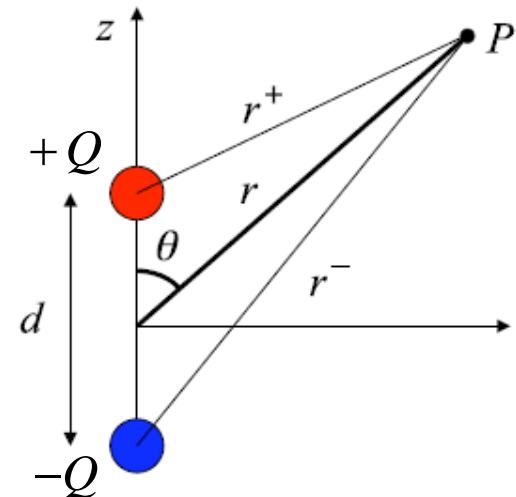
Le potentiel devient alors :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right) \rightarrow$$

Potentiel loin d'un dipôle

$$V(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

Le potentiel du dipôle décroît plus rapidement que le potentiel d'une charge ponctuelle.



Exemple – Champ d'un dipôle électrique

Potentiel loin d'un dipôle

$$V(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

Calcul du champ électrique loin du dipôle

On calcule le gradient du potentiel avec le gradient en coordonnées sphériques :

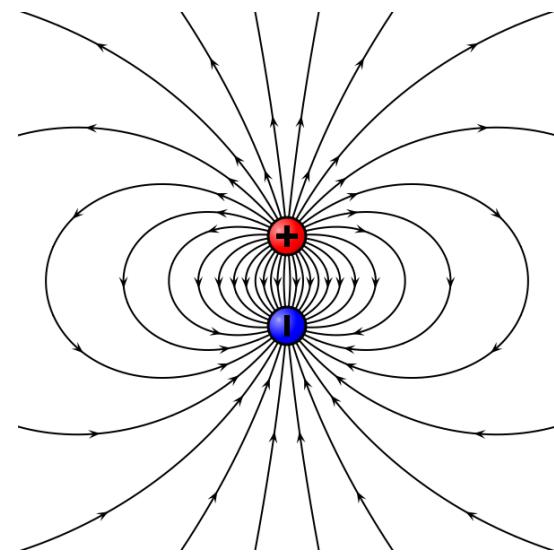
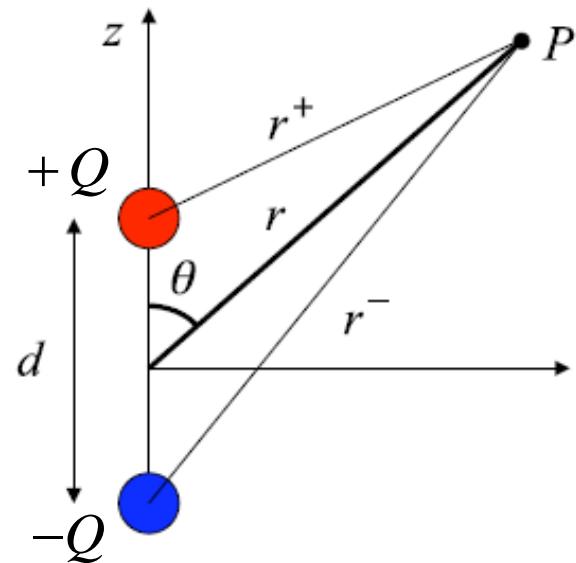
$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{r} - \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\theta} \right)$$

Champ électrique loin d'un dipôle



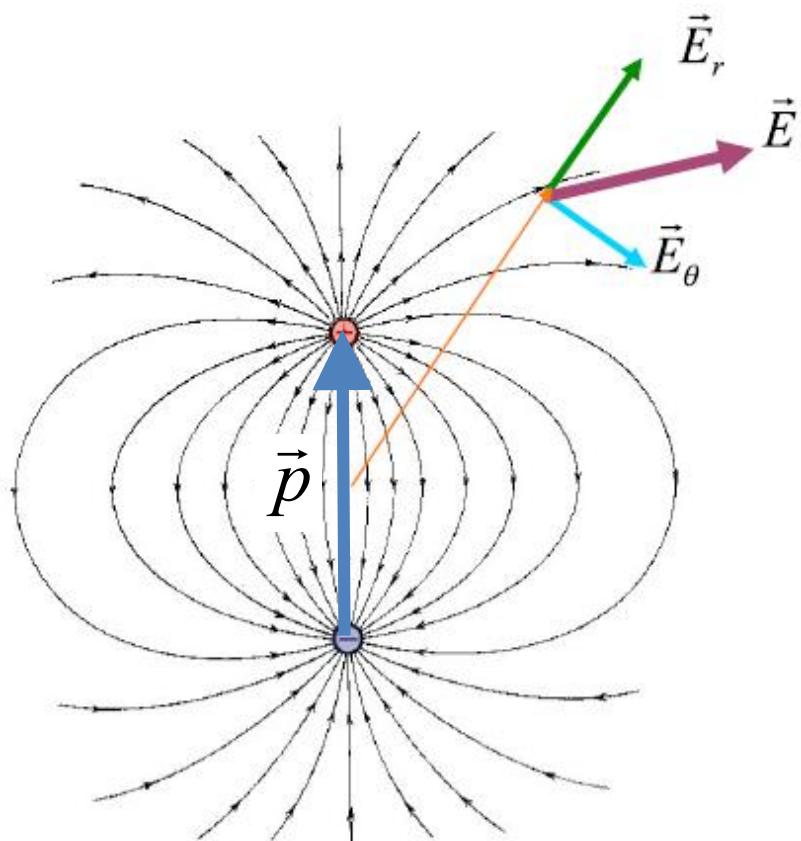
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$



Moment dipolaire électrique

Champ électrique loin d'un dipôle

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta} \right)$$

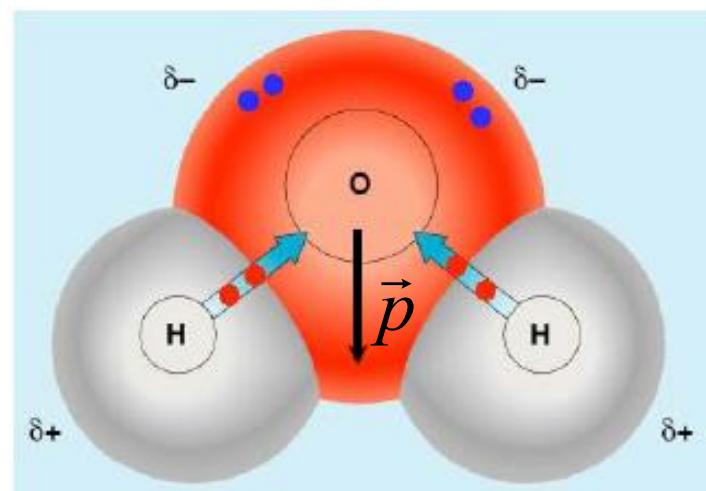


Le champ du dipôle décroît en r^{-3} , soit plus rapidement que le champ d'une charge ponctuelle (en r^{-2}).

Moment dipolaire électrique

$$\vec{p} = Q\vec{d} \quad [\text{C}\cdot\text{m}]$$

\vec{d} : dirigé de la charge négative vers la charge positive du dipôle



Exemple – Câble coaxial

Quelle est la valeur de la charge Q sur chacun des conducteurs lorsqu'une différence de potentiel V est appliquée entre ces derniers ?

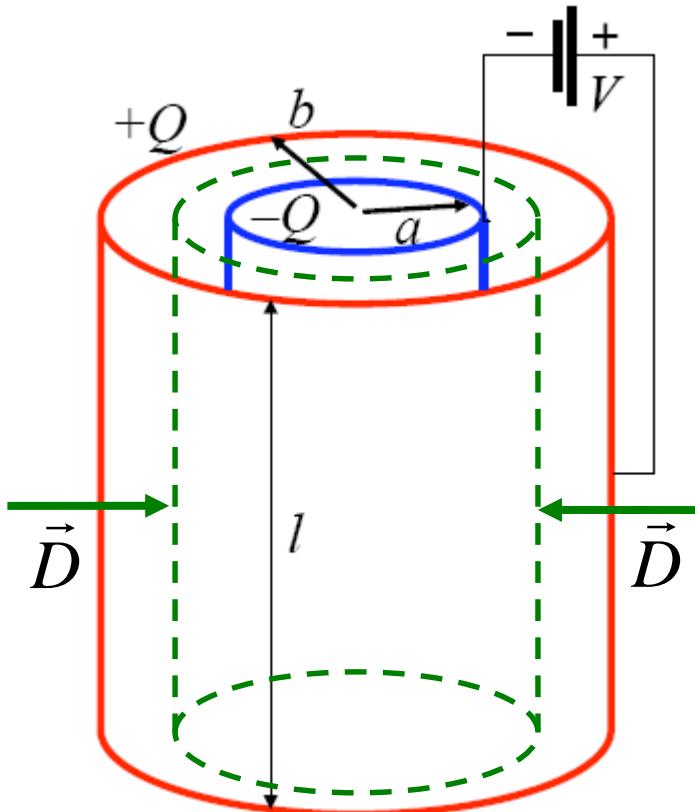
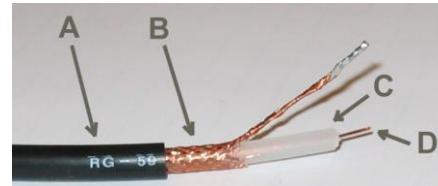
Stratégie de résolution

En négligeant les effets de bord, la situation possède une **symétrie cylindrique** et la **densité de flux est purement radiale**, ce qui permet d'appliquer le **théorème de Gauss** avec **la surface cylindrique de rayon $a < \rho < b$** (en vert). L'intégrale sera nulle sur les extrémités planes du cylindre (flux tangent à la surface).

$$-Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Avec l'expression de \vec{D} en fonction de Q , on en déduit \vec{E} , puis V en fonction de Q .

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Le câble coaxial suivant est formé de deux armatures conductrices cylindriques (en bleu et en rouge) séparées par du vide.

Exemple – Câble coaxial

Quelle est la valeur de la charge Q sur chacun des conducteurs lorsqu'une différence de potentiel V est appliquée entre ces derniers ?

Théorème de Gauss ($a < \rho < b$)

$$-Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D2\pi\rho l$$

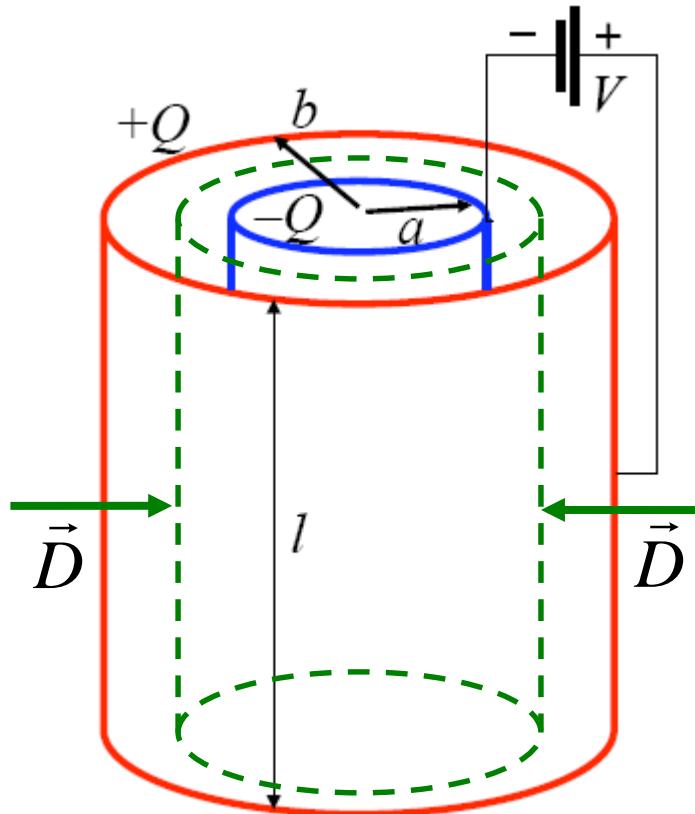
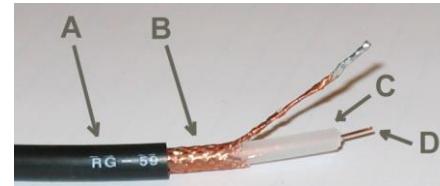
$$\rightarrow \vec{D} = -\frac{Q}{2\pi\rho l} \hat{\rho} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\rho l} \hat{\rho}$$

Calcul de la différence de potentiel V

Chemin d'intégration radial de $\rho = a$ à $\rho = b$.

$$d\vec{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 l V}{\ln(b/a)}$$

Quiz – Câble coaxial

Que vaut le champ électrique à l'intérieur de l'armature intérieure (en bleu) ?

Que vaut le champ électrique à l'extérieur du câble (à l'extérieur de l'armature rouge) ?

Dans les deux cas, le champ électrique est nul!

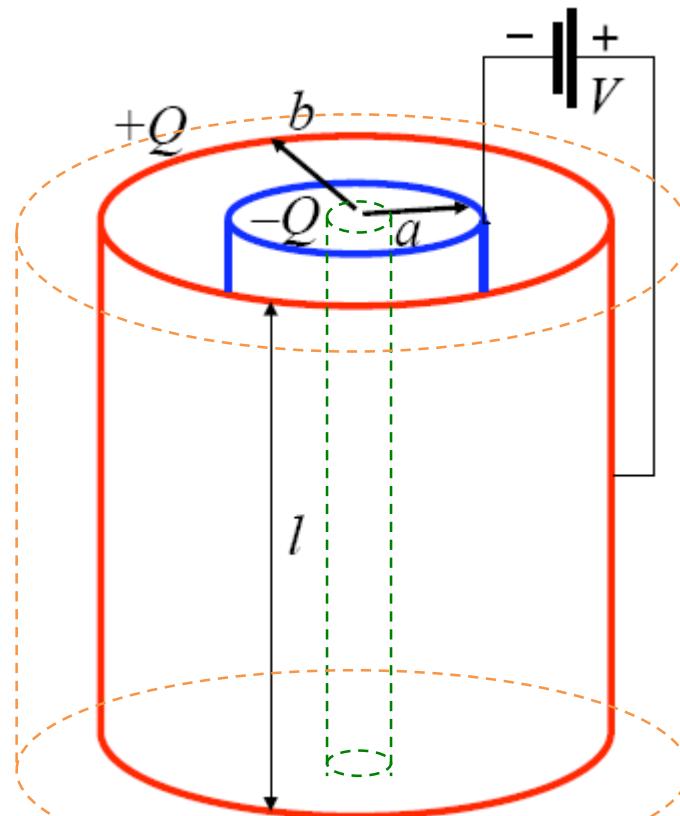
$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Surface de Gauss pour $\rho < a$ (en vert)

Il n'y a aucune charge libre à l'intérieur : le champ est nul.

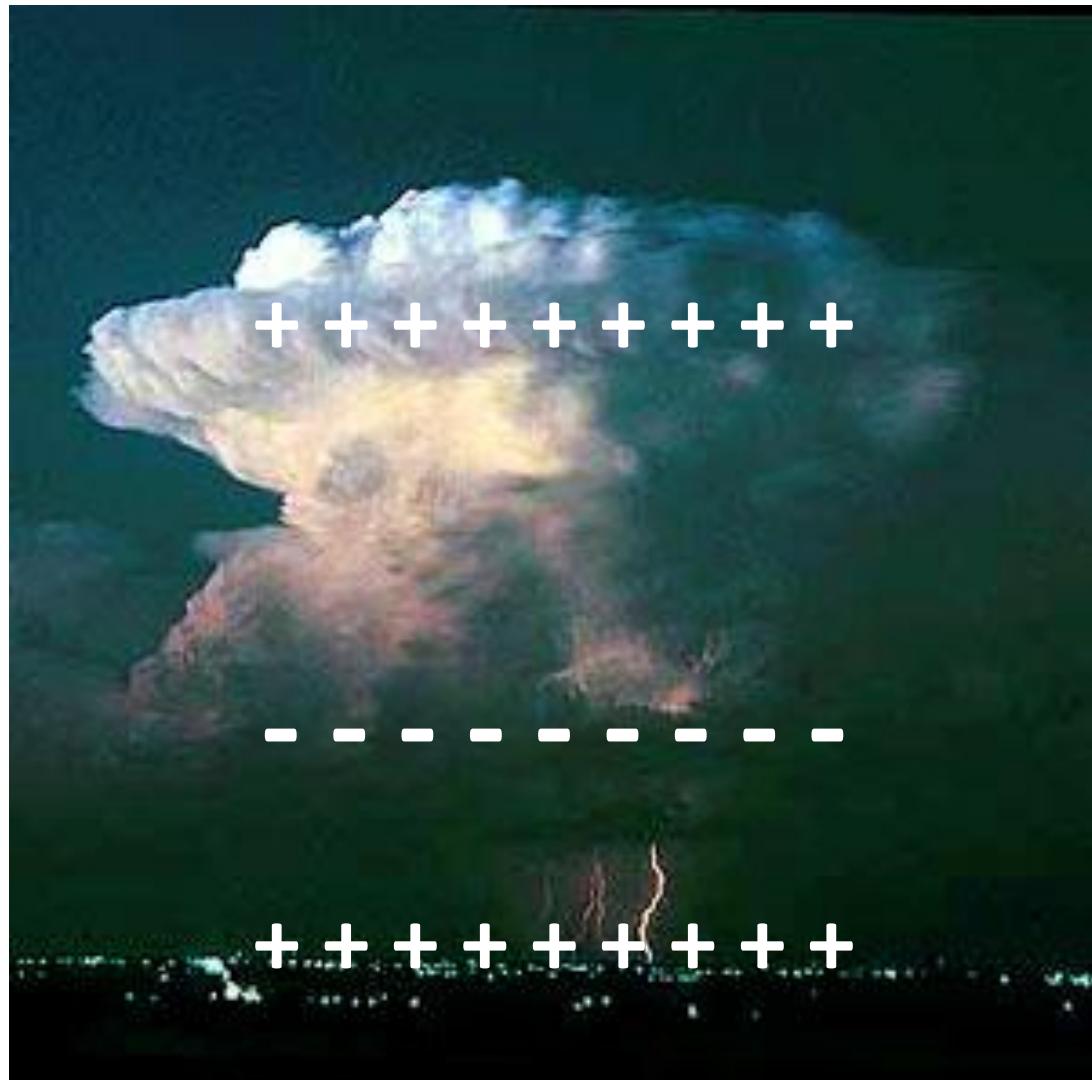
Surface de Gauss pour $\rho > b$ (en orange)

La charge libre totale à l'intérieur est aussi nulle ($+Q - Q = 0$) : le champ est nul.



Les vents ascendants transportent des gouttelettes d'eau qui frappent les particules de glace qui tombent. Ces particules deviennent chargées par frottement. La glace négative s'accumule à la base du nuage et le sol se charge positivement par induction.

Si le champ électrique entre la base du nuage et le sol est assez élevé, l'énergie emmagasinée dans ce champ est soudainement libérée : c'est la foudre.



Énergie emmagasinée dans le champ électrique

L'énergie emmagasinée dans le champ électrique est l'énergie emmagasinée par chaque charge en la déplaçant de l'infini jusqu'à sa position finale.

$$U = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Rappel : $U = 0$ à l'infini

Exemple – Trois charges ponctuelles

1^{re} charge : aucun travail nécessaire (elle est seule) ;

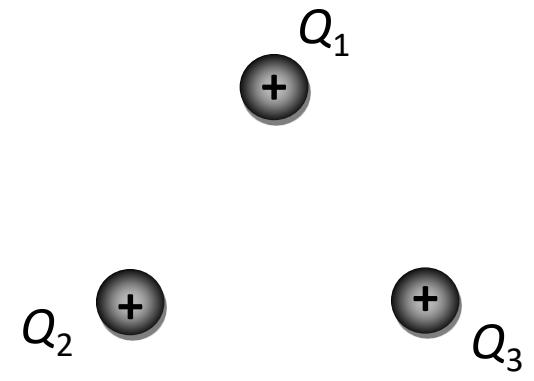
$$U_1 = -Q_1 \int_{\infty}^{\vec{r}_1} \vec{0} \cdot d\vec{l} = 0$$

2^e charge : il faut faire un travail qui s'oppose au champ produit par la 1^{re} charge ;

$$U_2 = -Q_2 \int_{\infty}^{\vec{r}_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = Q_2 V_{21}$$

3^e charge : il faut faire un travail qui s'oppose au champ produit par la 1^{re} et la 2^e charges.

$$U_3 = -Q_3 \int_{\infty}^{\vec{r}_3} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot d\vec{l} = Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32}$$



$$U = Q_2 V_{21} + Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32}$$

Énergie emmagasinée dans le champ électrique

On peut réécrire l'énergie emmagasinée par N charges en utilisant les identités suivantes :

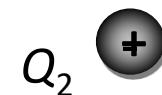
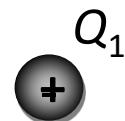
Énergie de i due à j est
égale à l'énergie de j due à i

$$Q_i V_{ij} = \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = Q_j V_{ji}$$

→ $Q_i V_{ij} = \frac{1}{2} (Q_i V_{ij} + Q_j V_{ji})$

Potentiel de i dû à toutes
les autres charges $j \neq i$

$$V_i = \sum_{j \neq i} V_{ij}$$



Exemple – Trois charges ponctuelles

$$U = Q_2 V_{21} + Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (Q_1 V_{12} + Q_2 V_{21} + Q_1 V_{13} + Q_3 V_{31} + Q_2 V_{23} + Q_3 V_{32}) \\ &= \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3) \end{aligned}$$

Énergie emmagasinée dans
le champ électrique
(N charges ponctuelles)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

Énergie emmagasinée dans le champ électrique

Pour calculer l'énergie emmagasinée dans une **distribution de charge continue**, on ne peut pas utiliser l'équation de la page précédente. Il faut la généraliser.

Charges ponctuelles

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

$$Q_i \rightarrow \int_{\Omega} dq = \int_{\Omega} \rho_v dv$$



Distribution de charge

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv$$

Potentiel

Volume

En utilisant le théorème de Gauss sous forme différentielle ($\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$) ainsi que la relation $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, on peut montrer (section 2.6 du manuel) que :

Énergie emmagasinée
dans le champ d'une
distribution de charge

$$U = \frac{1}{2} \int_v \epsilon E^2 dv$$

E^2 est le carré de la norme du
champ électrique.

ϵ est la permittivité du milieu
(vide ou diélectrique).

Il faut intégrer partout où le champ E dû à la distribution de charge est non nul.

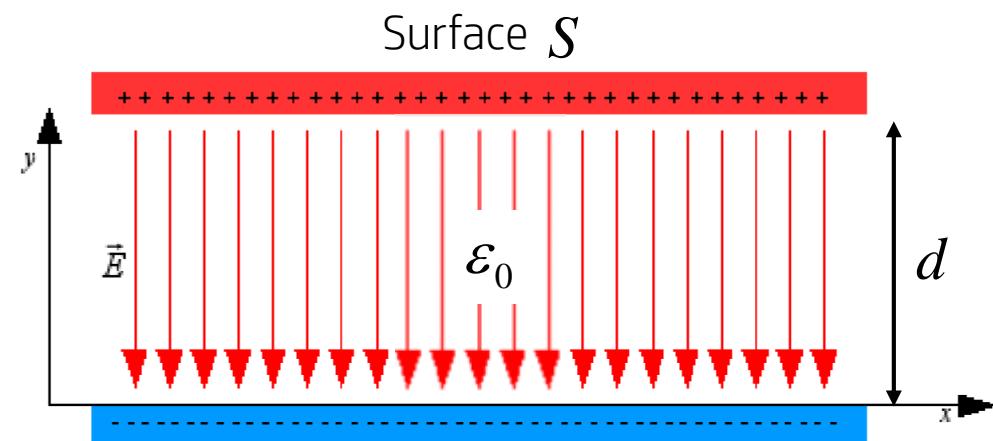
Exemple 2.3 – Énergie emmagasinée dans un condensateur plan

Champ électrique entre les plaques

$$\vec{E} = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} \hat{y}$$

Différence de potentiel entre les plaques

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$



Quelle est l'énergie emmagasinée par le condensateur ?

Le champ est constant entre les plaques et il est nul à l'extérieur du condensateur. Le domaine d'intégration est donc le volume entre les plaques.

$$U = \frac{1}{2} \int_v \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \right)^2 \boxed{\int_v dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \right)^2 Sd \quad \rightarrow \boxed{U = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 S}}$$

Volume entre les plaques : Sd

Énergie dans les supercondensateurs

Dans un supercondensateur, la séparation des charges est de l'ordre du nanomètre (double couche de charges).

Densité énergie (J/m^3) des supercondensateurs = 100 à 1000 fois plus élevée que la densité d'énergie des condensateurs électrolytiques.



Supercondensateurs



Tramway sans fil

– PHS1102 –

Champs électromagnétiques

Chapitre 3 – Matériaux diélectriques

Polarisation

Permittivité et permittivité relative

Capacité d'un condensateur

Claquage

Structure du cours

Concepts clés

Matériau diélectrique

Polarisation

Permittivité

Permittivité relative

Susceptibilité

Capacité d'un condensateur

Rigidité diélectrique

Claquage

Objectifs (compétences à développer)

- Expliquer le phénomène de polarisation dans un diélectrique.
- Calculer la polarisation et la densité de charges à la surface d'un diélectrique.
- Calculer le champ électrique dans un diélectrique.

- Calculer la capacité d'un condensateur seul ou d'un arrangement de condensateurs en série et en parallèle.
- Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur.

- Expliquer le phénomène de claquage.

Rappel – Matériaux diélectriques

Le **champ électrique** \vec{E} est un **champ vectoriel** associé à la force ressentie par une particule chargée (phénomène mesurable) due une distribution de charge environnante.

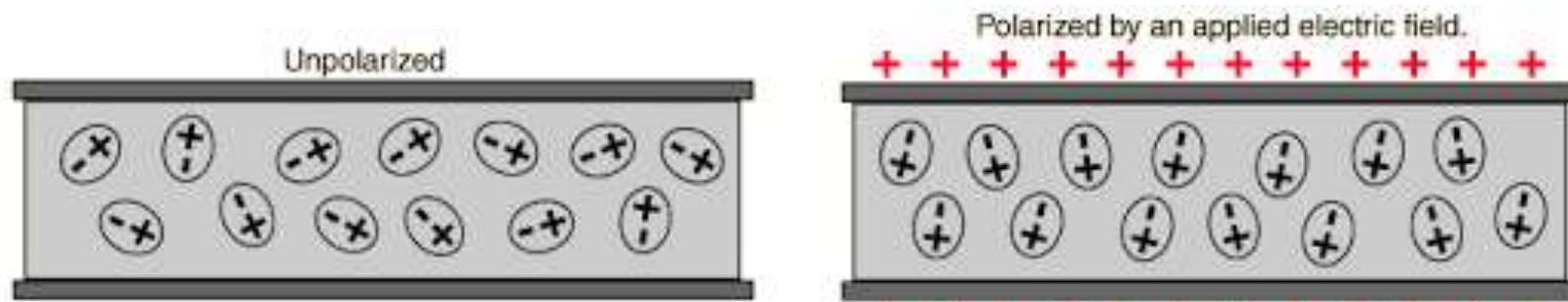
Le **flux électrique** est un concept plus abstrait, mais très puissant, car il permet de calculer le champ électrique dans les matériaux diélectriques.

Matériaux conducteurs

Les matériaux conducteurs contiennent des **charges libres** qui peuvent se déplacer librement dans tout le matériau sous l'effet d'un champ électrique.

Matériaux diélectriques (isolants)

Les matériaux diélectriques contiennent des **charges liées** qui ne peuvent pas se déplacer librement. L'application d'un champ externe a pour effet de **polariser** le diélectrique en déformant le nuage électronique autour des atomes et/ou en réorientant les molécules dans la direction du champ.



Types de polarisation

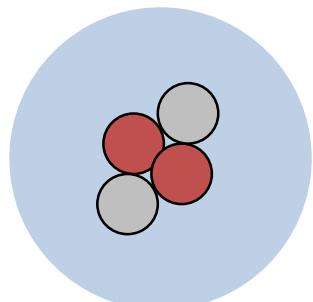
Puisqu'un diélectrique ne contient pas de charge libre, il ne peut pas y avoir de courant électrique continu lorsqu'un champ électrique est appliqué.

Par contre, les **charges liées** réagissent au champ électrique, ce qui a pour effet de **polariser le matériau**.

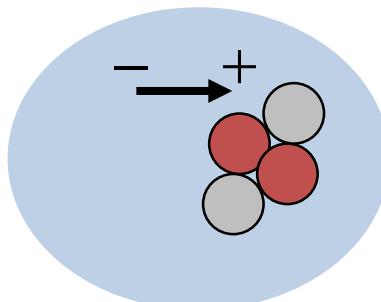
1. Polarisation électronique (tous les diélectriques)

Chaque atome possède un noyau positif autour duquel gravitent des électrons négatifs. **Le champ électrique externe déforme le nuage électronique**, ce qui crée un moment dipolaire électrique (\vec{p}).

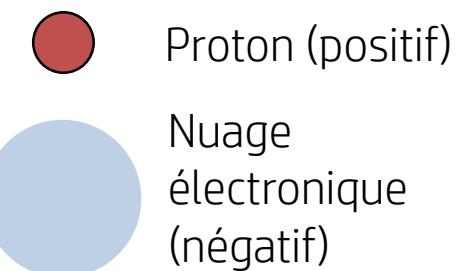
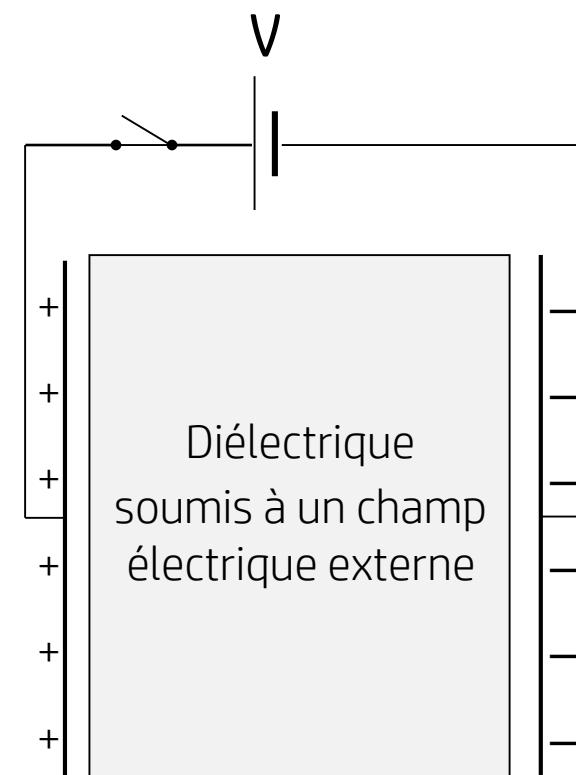
$$E = 0 \quad p = 0$$



$$p \neq 0$$



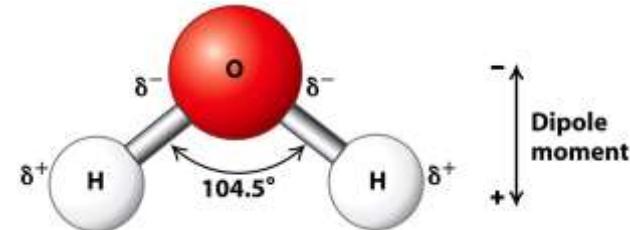
$$E \neq 0$$



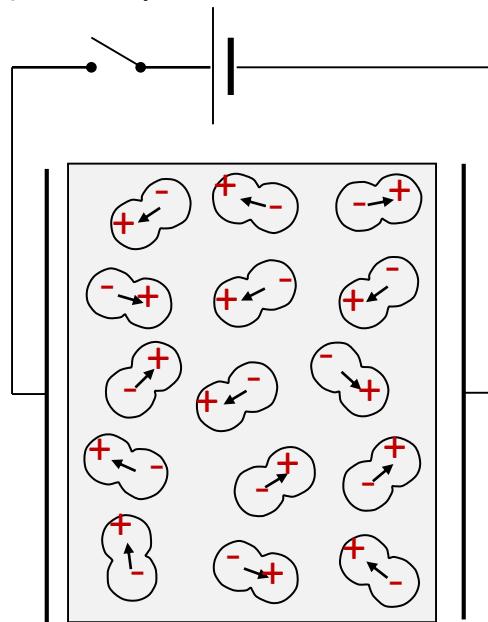
Types de polarisation

2. Polarisation d'orientation (diélectriques polaires)

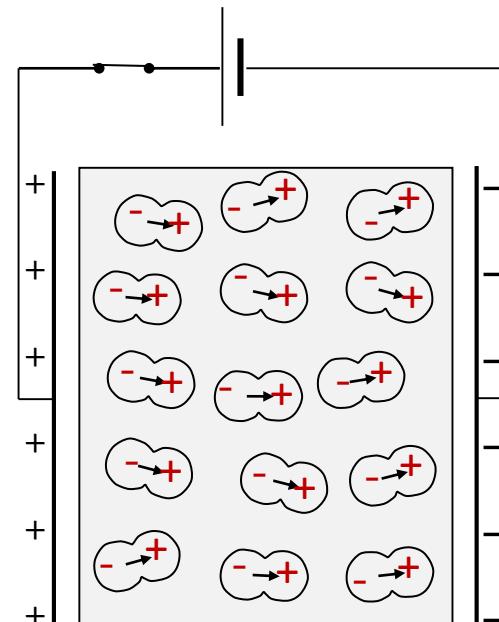
Les molécules qui composent les diélectriques polaires possèdent un **moment dipolaire permanent** (ex. : l'eau).



$E = 0$: les molécules sont orientées aléatoirement sous l'effet de l'agitation thermique : la **polarisation totale est nulle**.

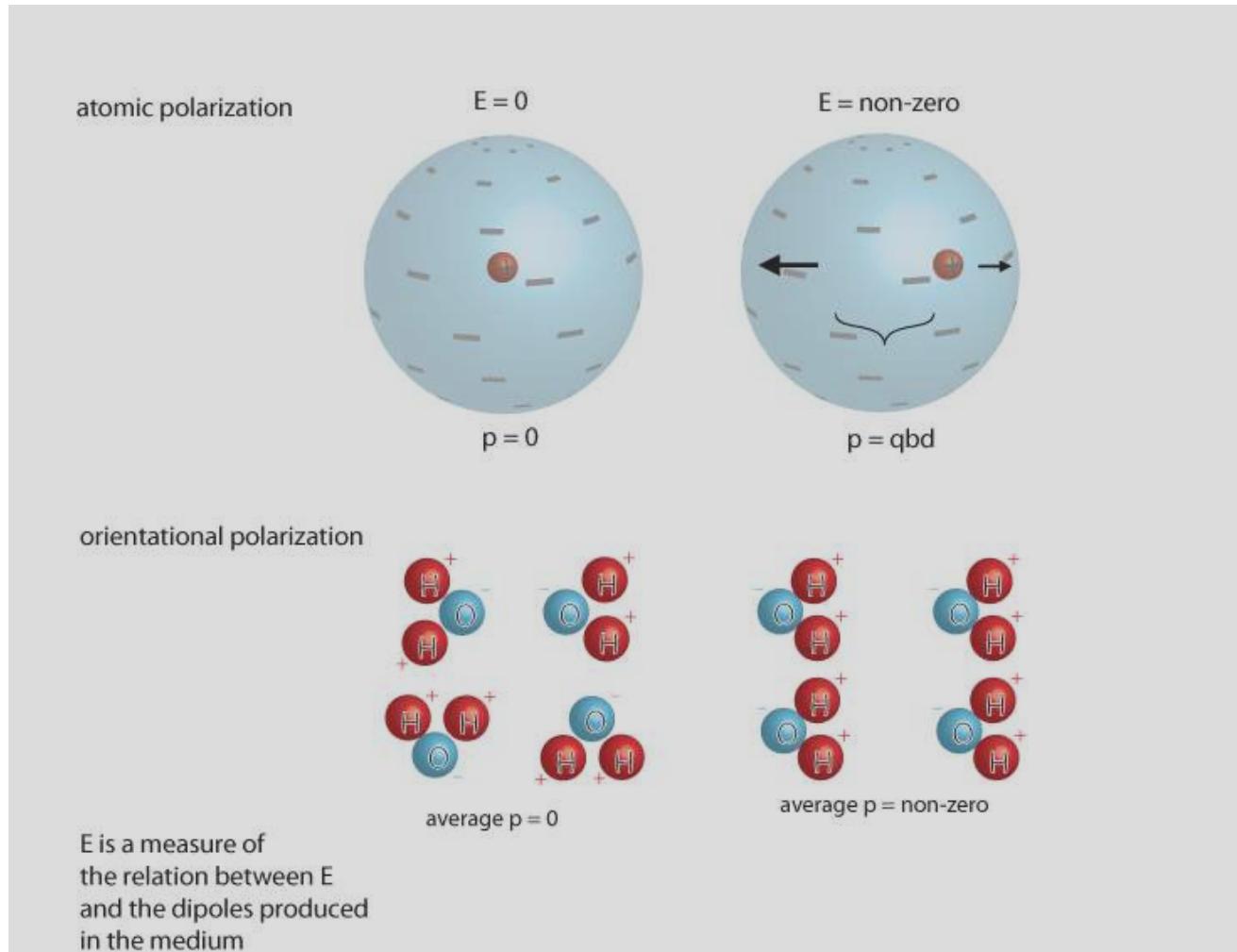


$E \neq 0$: les molécules s'orientent en direction du champ, ce qui crée une **polarisation totale non nulle**.



Types de polarisation

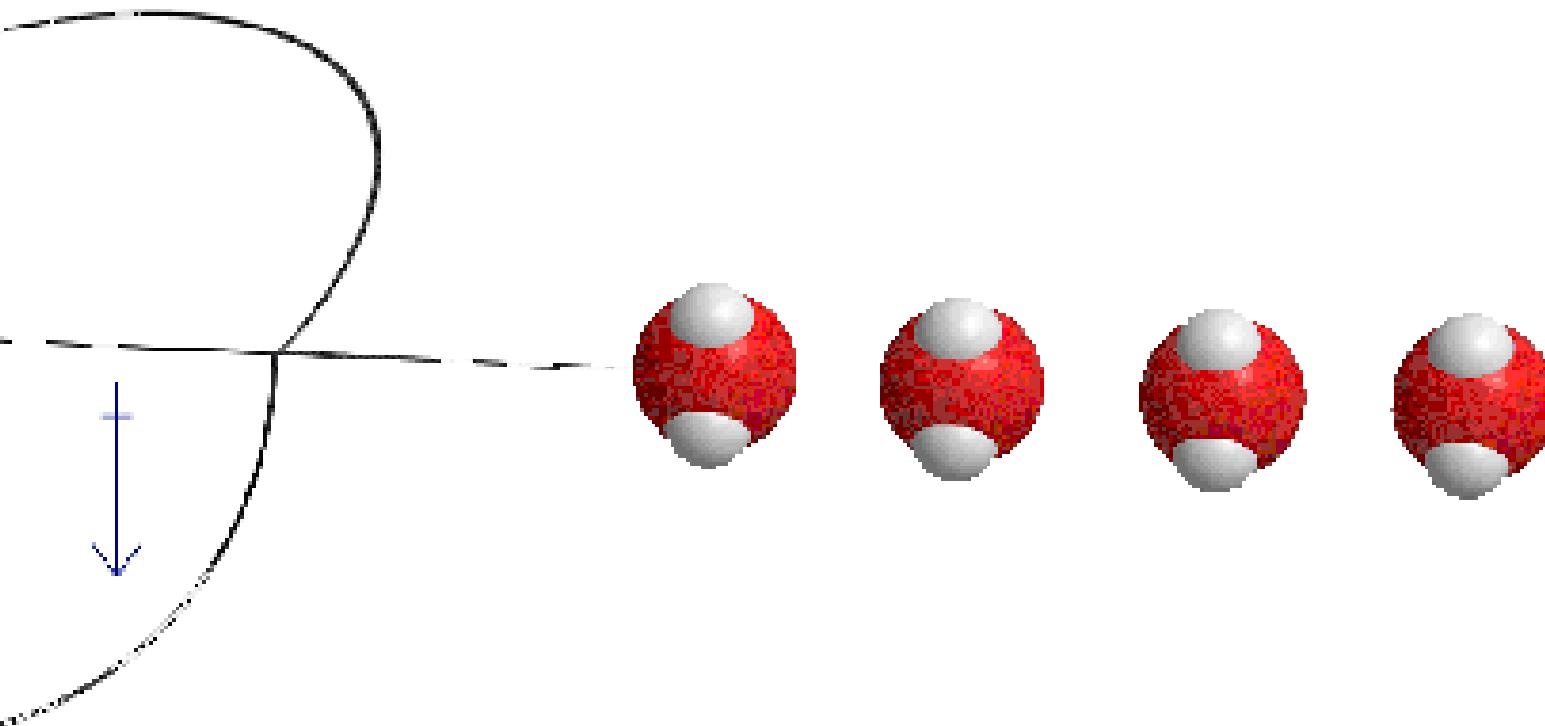
Polarisation électronique (atomique) et polarisation d'orientation



La polarisation électronique existe dans tous les diélectriques.

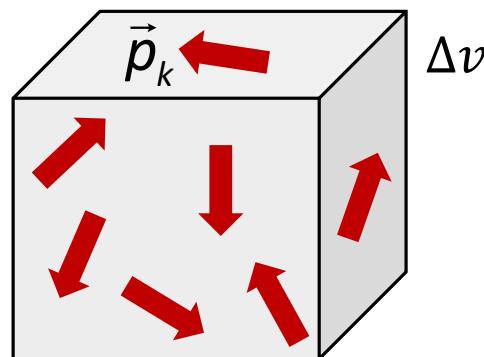
La polarisation d'orientation s'ajoute à la polarisation électronique pour les diélectriques polaires.

Un champ électrique alternatif (qui varie dans le temps) force les molécules polaires à se réorienter constamment, ce qui a pour effet d'augmenter leur température (chauffage micro-ondes).



Vecteur polarisation

Chaque molécule d'un diélectrique possède son propre moment dipolaire élémentaire \vec{p}_k (qui peut être nul si les molécules ne sont pas polaires).

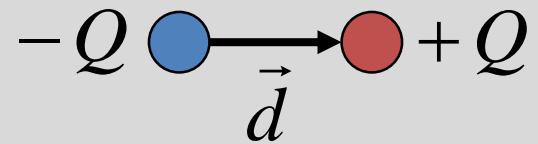


Le vecteur polarisation \vec{P} est la somme vectorielle des moments dipolaires élémentaires par unité de volume élémentaire Δv .

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_k \vec{p}_k \quad [\text{C/m}^2]$$

RAPPEL
Moment dipolaire
d'un dipôle électrique

$$\vec{p} = Q \vec{d} \quad [\text{C}\cdot\text{m}]$$



Quelle autre quantité déjà vue possède les mêmes unités ?

Vecteur polarisation et charge induite sur une surface

Lorsqu'un diélectrique est polarisé dû à un champ électrique externe, ses surfaces deviennent localement chargées (**charges liées**).

Exemple du condensateur plan

Près des surfaces du diélectrique, une charge liée $\pm Q_{\text{ind}}$ s'est accumulée due à la polarisation.

Surface gauche : $\rho_{s,\text{gauche}} = -\rho_{s,\text{ind}} = -Q_{\text{ind}}/S$.

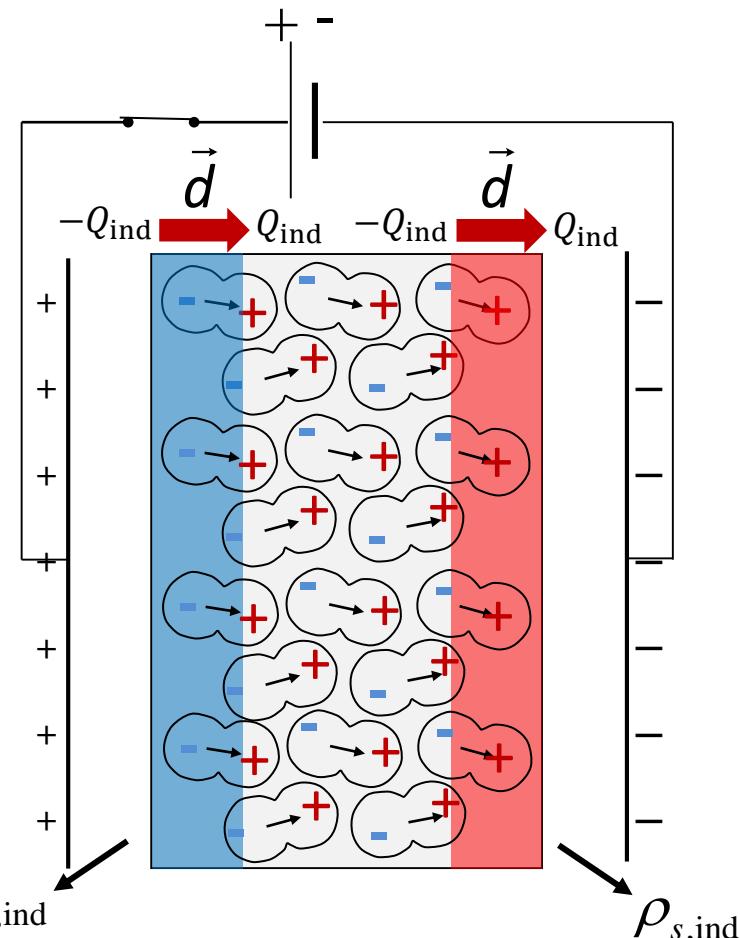
Surface droite : $\rho_{s,\text{droite}} = \rho_{s,\text{ind}} = Q_{\text{ind}}/S$.

Densité de charge induite dans la couche mince de largeur d (contenant N dipôles élémentaires $\vec{p} = q\vec{d}$) près de la surface du diélectrique :

$$|\rho_{s,\text{ind}}| = \frac{Q_{\text{ind}}}{S} = \frac{Nq}{S} = \frac{N}{Sd} qd = \frac{N}{\Delta\nu} p$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta\nu} \sum_k \vec{p}_k \right| = |\vec{P}|$$

La densité surfacique de charge induite est égale à la polarisation.



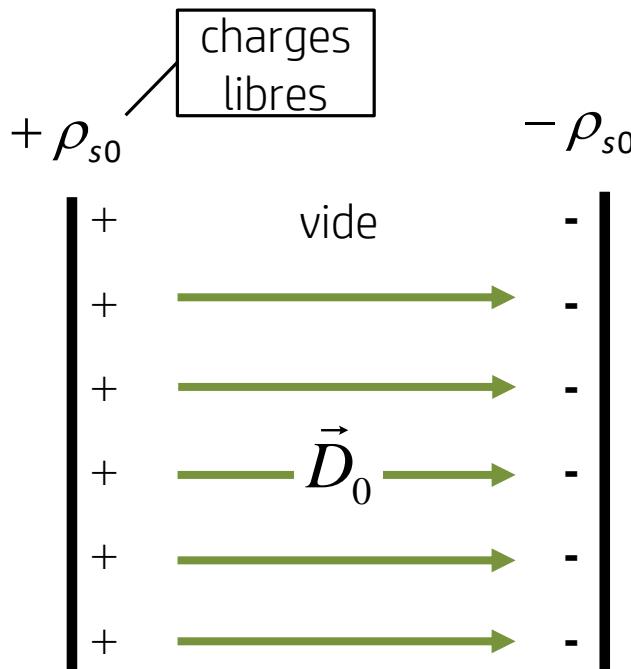
$$|\rho_{s,\text{ind}}| = P$$

Densité de flux et champ dans les diélectriques

Rappels

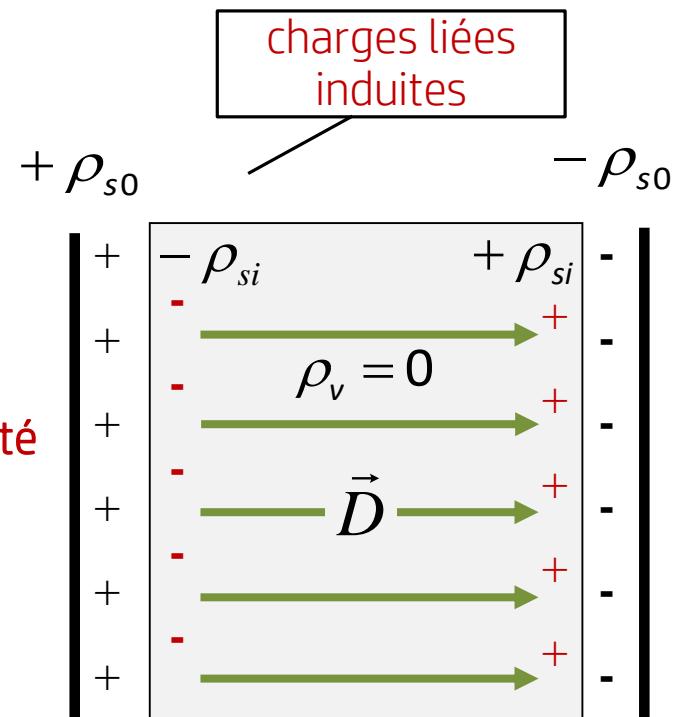
Sources du champ électrique \vec{E} : charges libres et charges liées.

Sources de la densité de flux électrique \vec{D} : charges libres seulement.



$$D_0 = \rho_{s0}$$

Que vaut la densité de flux dans le diélectrique ?



$$D = D_0 = \rho_{s0}$$

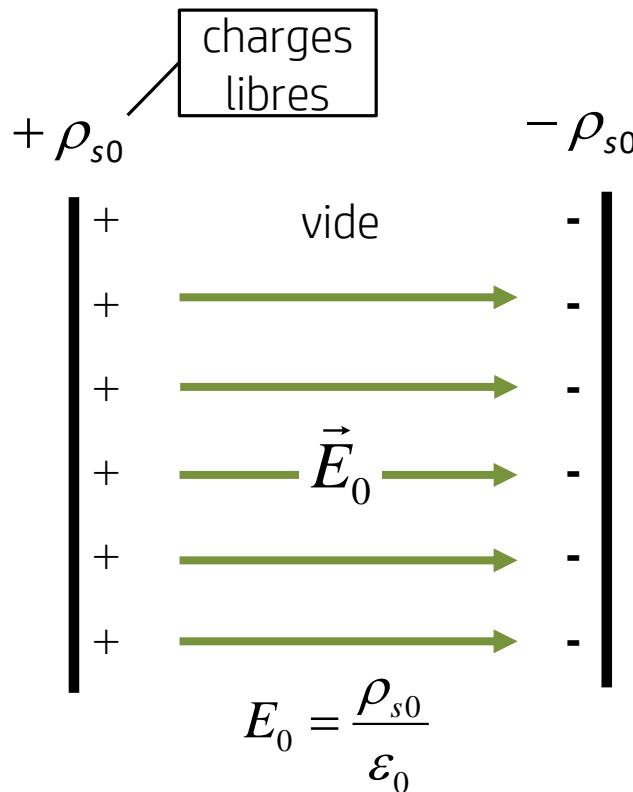
La densité de flux reste la même puisque la densité de charges libres sur les armatures du condensateur reste la même.

Densité de flux et champ dans les diélectriques

Rappels

Sources du champ électrique \vec{E} : charges libres et charges liées.

Sources de la densité de flux électrique \vec{D} : charges libres seulement.

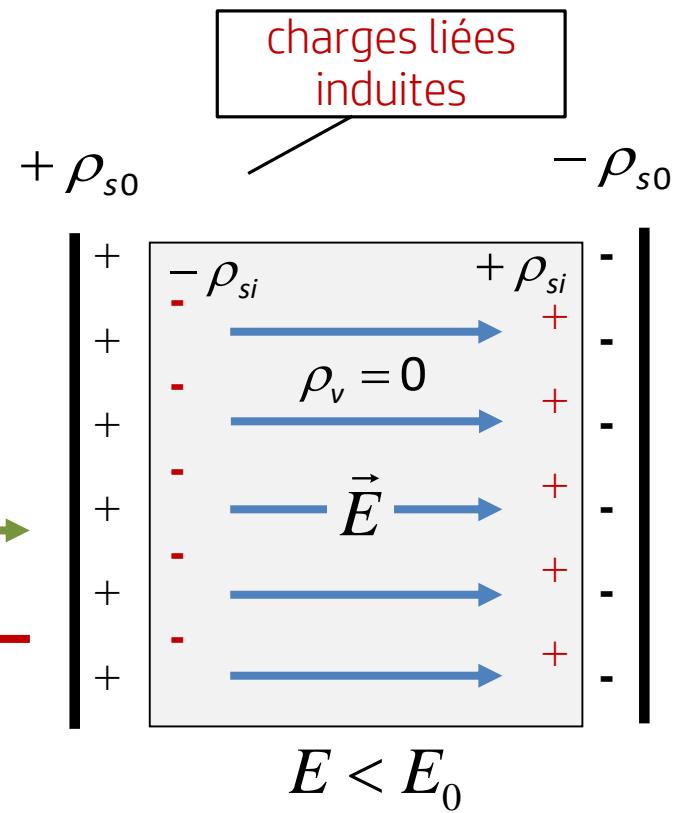


Que vaut le champ dans le diélectrique ?

Charges libres

Charges liées

Champ total

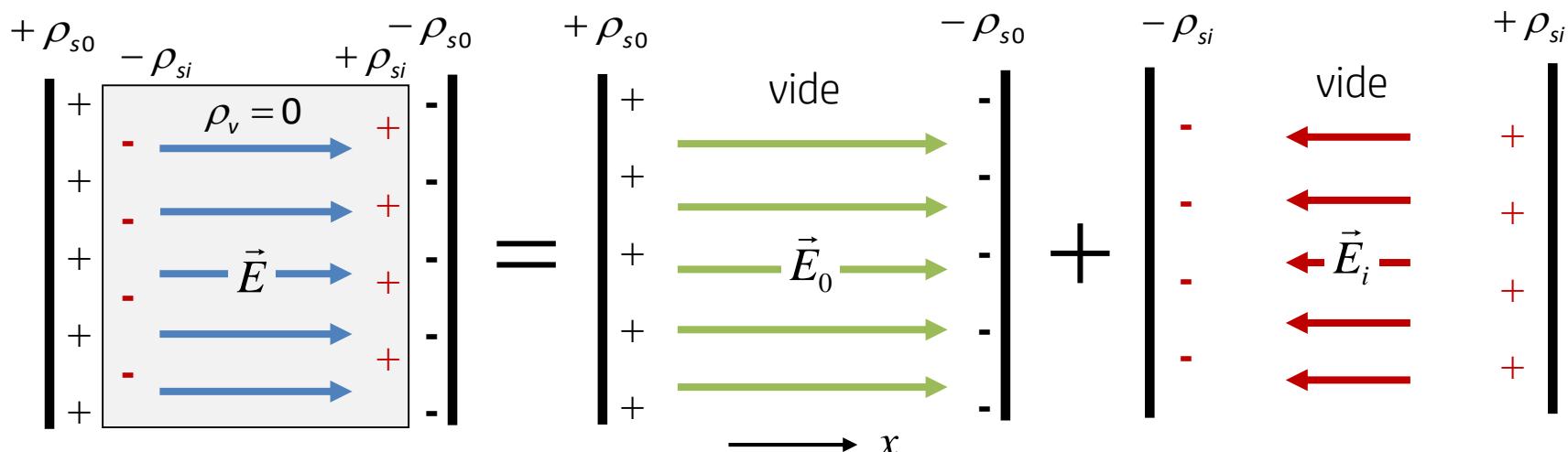


Les charges liées créent un champ électrique opposé à celui des charges libres.
Le champ électrique dans le diélectrique est donc plus faible.

Densité de flux et champ dans les diélectriques

Que vaut le champ électrique dans un diélectrique ?

Puisque le volume du diélectrique est neutre ($\rho_v = 0$, seules ses surfaces possèdent une charge induite), le champ du condensateur avec diélectrique peut être vu comme la **superposition des champs de deux condensateurs plans dans le vide** : l'un avec les charges libres ρ_{s0} et l'autre avec les charges induites ρ_{si} .



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \quad \rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} \hat{x} - \frac{\rho_{si}}{\epsilon_0} \hat{x}$$

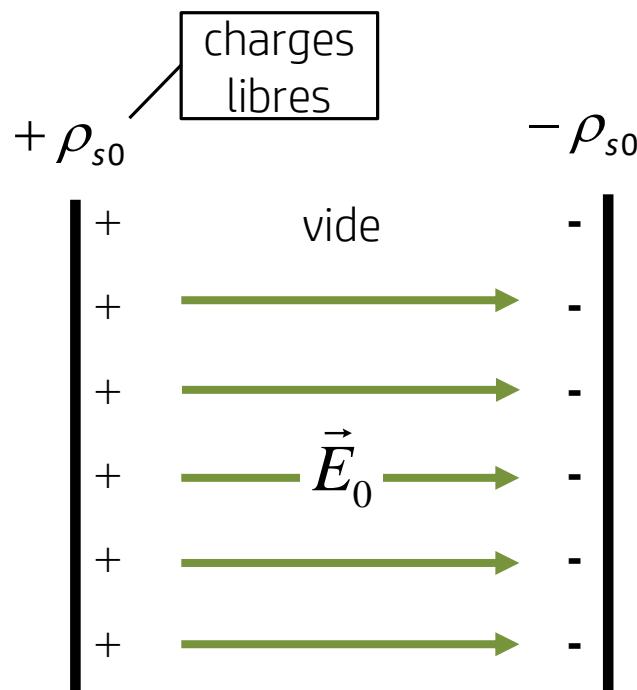
$$P = \rho_{si}$$

$$D = \rho_{s0}$$

$$\rightarrow$$

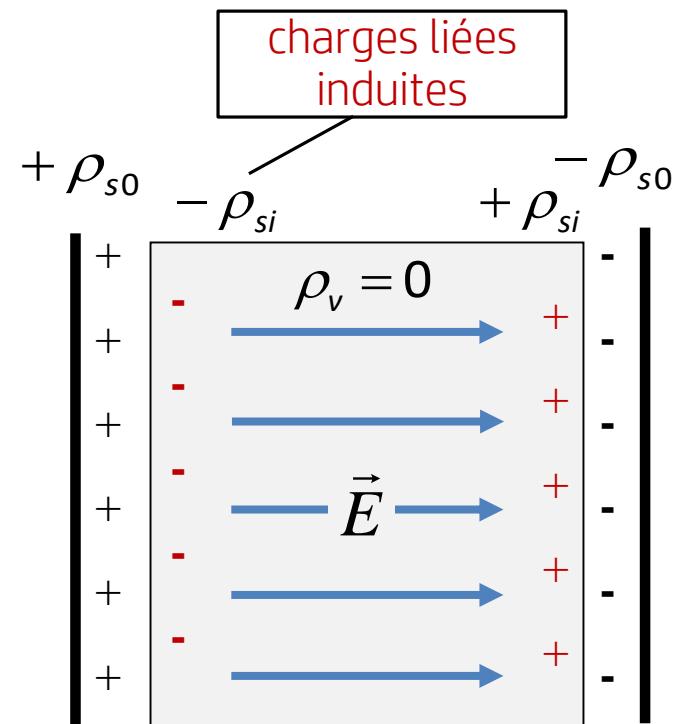
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Résumé – Densité de flux et champ dans les diélectriques



$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Relation entre \vec{D} et \vec{E}
dans un diélectrique



$$D_0 = \rho_{s0}$$

$$E_0 = \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}$$

Charges libres

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

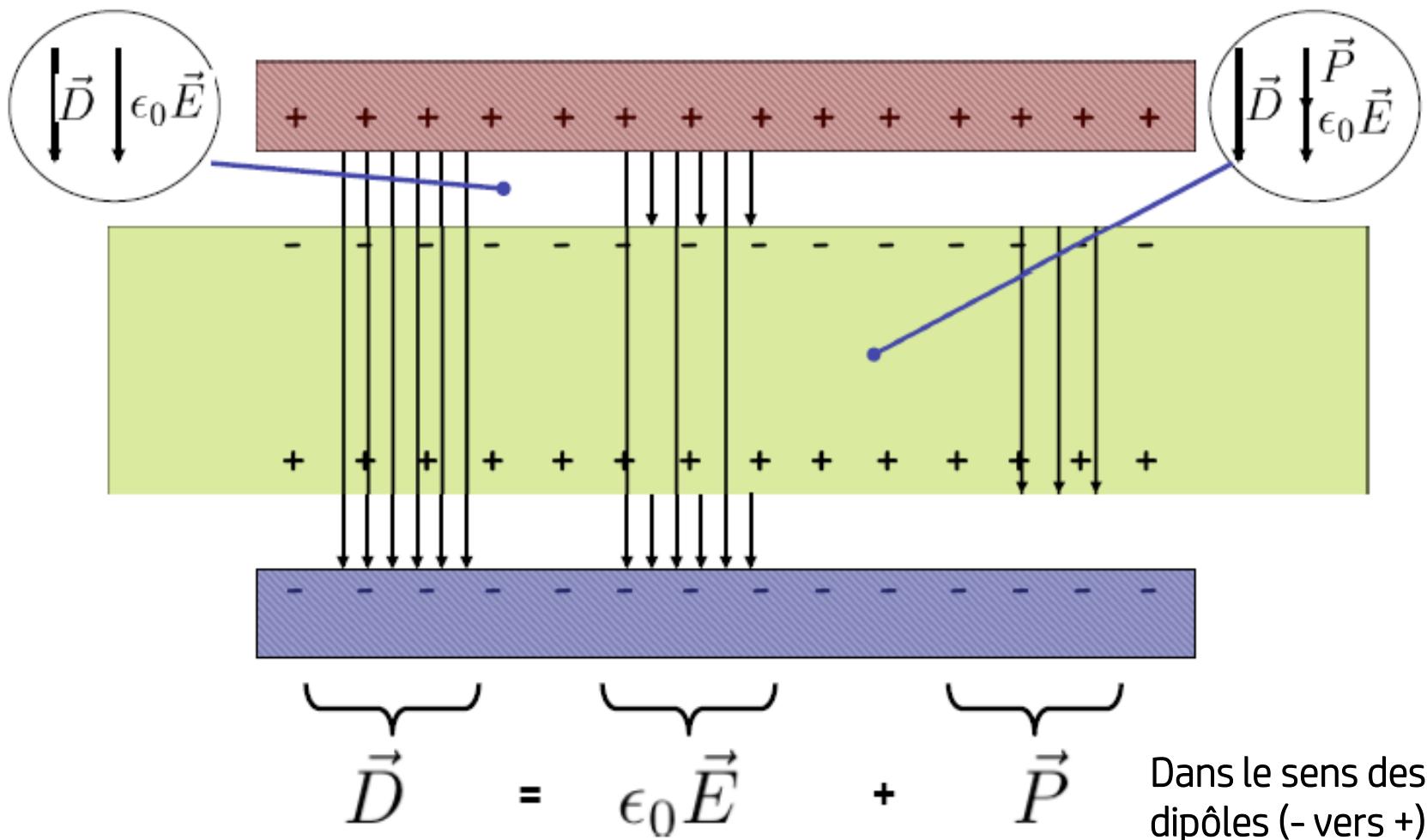
Charges libres
et charges liées

$$D = D_0 = \rho_{s0}$$

$$E = \frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0} - \frac{\rho_{si}}{\epsilon_0}$$

Charges liées

Les champs \vec{D} , \vec{E} et \vec{P}



Existe-t-il une relation simple entre \vec{P} et \vec{E} ?

Permittivité d'un diélectrique

En général, la relation entre \vec{P} et \vec{E} est complexe. Par contre, si l'on pose un certain nombre d'hypothèses sur le diélectrique, on peut obtenir une relation simple.

Le diélectrique est uniforme.

La polarisation est uniforme dans tout le matériau.

Le diélectrique est isotrope.

La polarisation est toujours parallèle au champ électrique et sa magnitude ne dépend pas de l'orientation du champ par rapport au matériau.

Le diélectrique est linéaire.

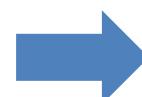
La polarisation est proportionnelle au champ électrique.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Sous ces hypothèses, on peut décrire la capacité d'un diélectrique à se polariser sous l'effet d'un champ à l'aide d'un seul nombre adimensionnel : la susceptibilité électrique χ_e .

Polarisation et susceptibilité électrique

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$



$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}\end{aligned}$$

Permittivité d'un diélectrique

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon\vec{E}$$

Permittivité relative (ϵ_r)

Nombre adimensionnel relié à la susceptibilité électrique.

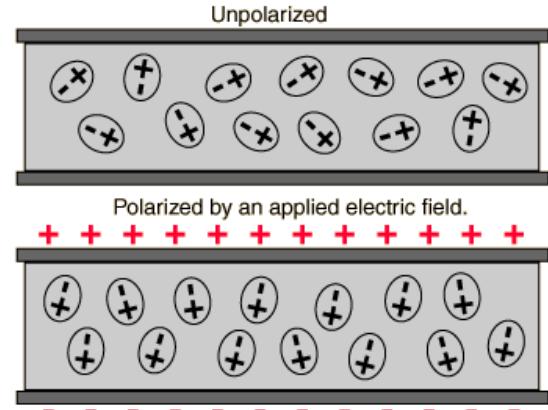
Permittivité (ϵ)

Produit de la permittivité relative et de la permittivité du vide. La permittivité est en F/m.

Permittivité et indice de réfraction

L'indice de réfraction n d'un milieu est relié à la vitesse de propagation de la lumière (onde électromagnétique) dans le milieu.

En interagissant avec le milieu via son champ électrique, la lumière polarise les molécules et atomes. En général, plus le milieu se polarise facilement, plus l'indice de réfraction est élevé.



$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

$$v = \frac{c}{n}$$

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

(matériau non magnétique)

Permittivité relative – Table de valeurs

Matériau	Permittivité relative
Vide	1,0
Air	1,00054
Papier	3,5
Mica	5,4
Porcelaine	6,5
Verre	4,5
Téflon	2,1
Huile	4,5

Remarques

1. Dans ce cours, on utilisera $\epsilon_r = 1$ pour l'air (sauf indication contraire) ;
2. La grande majorité des diélectriques trouvés dans la nature ont une permittivité relative $\epsilon_r > 1$. Il est toutefois possible de fabriquer des métamatériaux tels que $0 < \epsilon_r < 1$ ou même $\epsilon_r < 0$, ce qui leur confère des propriétés intéressantes.

Métamatériaux à indice de réfraction négatif

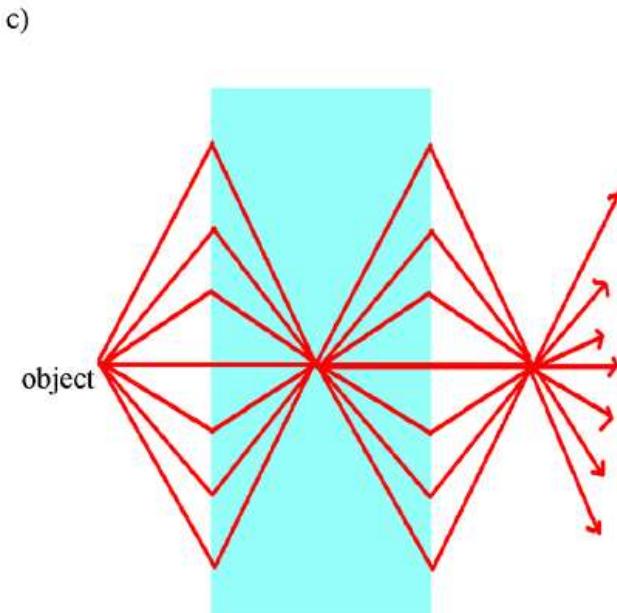
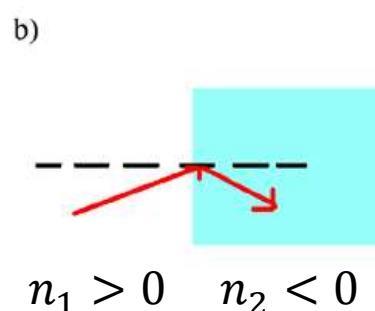
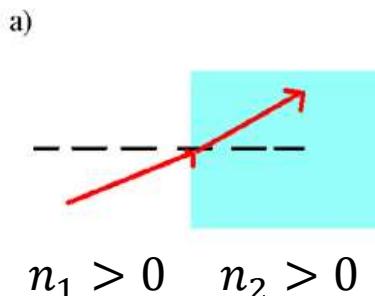
Métamatériaux d'indice négatif

Lorsque la lumière passe d'un matériau d'indice positif à un matériau d'indice négatif, la lumière est réfractée en restant du même côté que la lumière incidente.

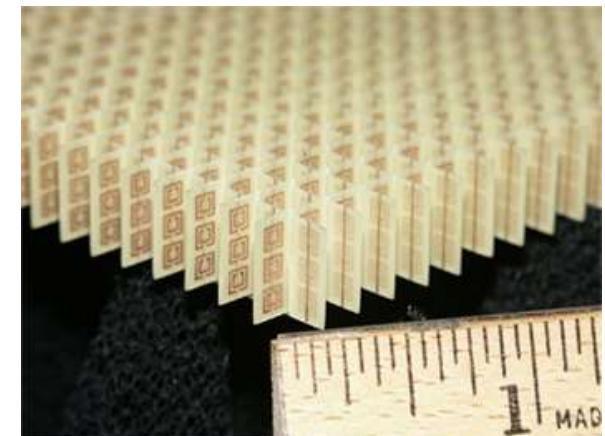
Cela permet d'utiliser le métamatériaux comme une superlentille surpassant la limite de la diffraction afin d'imager des structures plus fines que la longueur d'onde de la lumière utilisée.

Limite de la diffraction

$$\Delta x_{\min} \approx \lambda$$



Exemple de métamatériaux
d'indice négatif
(structure périodique)



Matériaux diélectriques – Les électrets

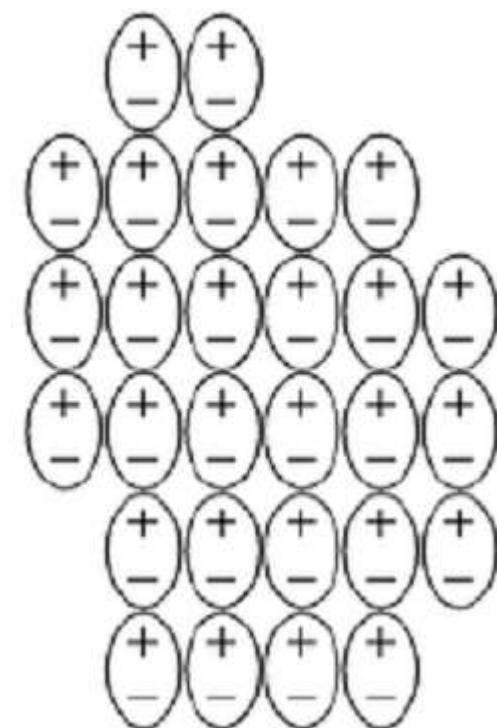
Un électret est un matériau qui peut garder une polarisation permanente après un traitement spécifique.

Des exemples de traitements possibles sont :

- Illumination et application d'un champ électrique ;
- Chauffage et application d'un champ électrique.

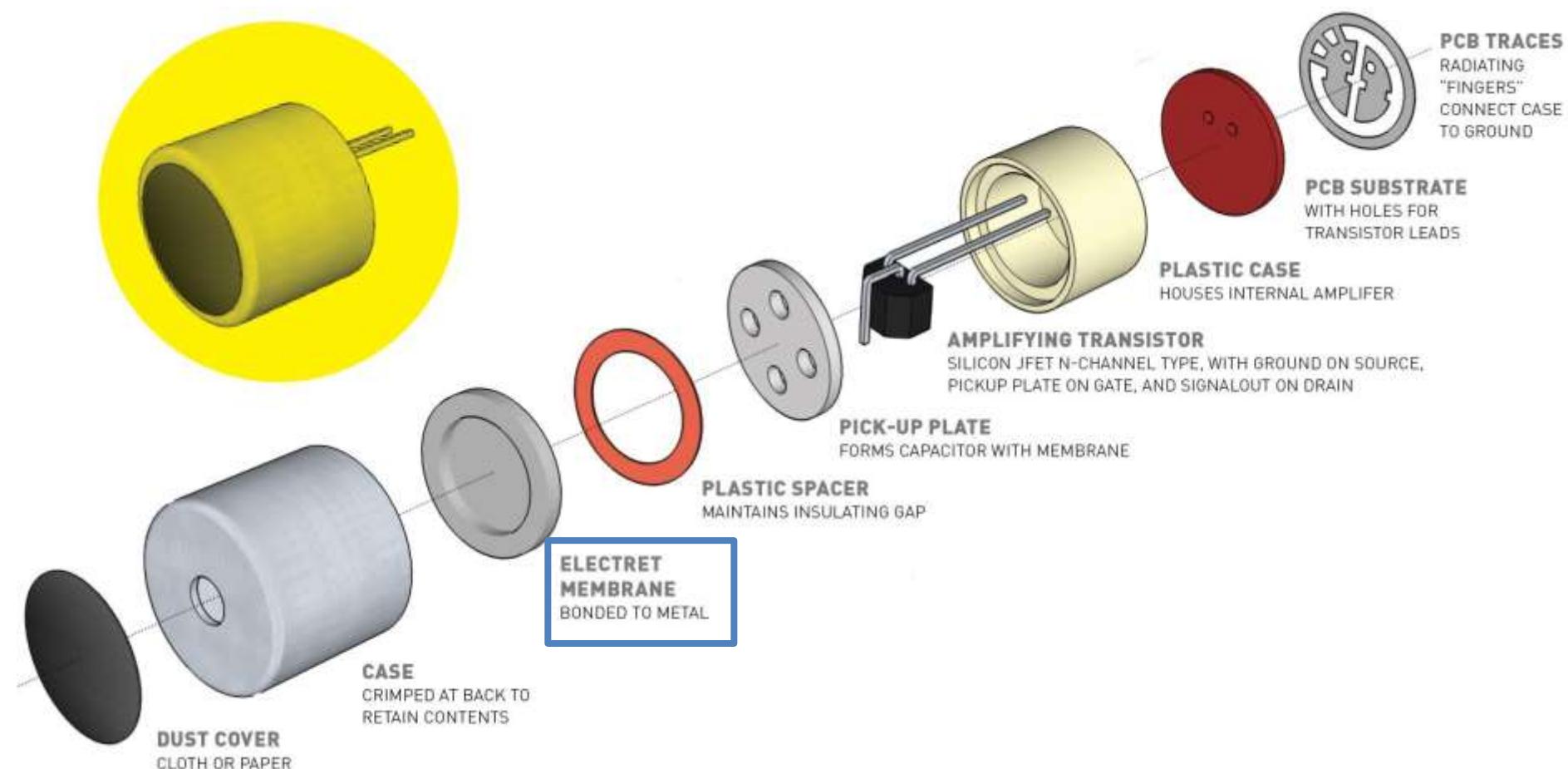
Une fois traité, l'**électret produit son propre champ électrique**, comme un aimant permanent produit son propre champ magnétique.

Les électrets sont utilisés notamment dans certains microphones dont le circuit électronique de détection requiert une **source de tension**. Au lieu d'utiliser une source externe (batterie), l'électret est un moyen abordable et pratique de fournir cette tension.



Le terme « électret » vient d'un combinaison des termes « electricity » et « magnet ».

Microphone électrostatique à électret



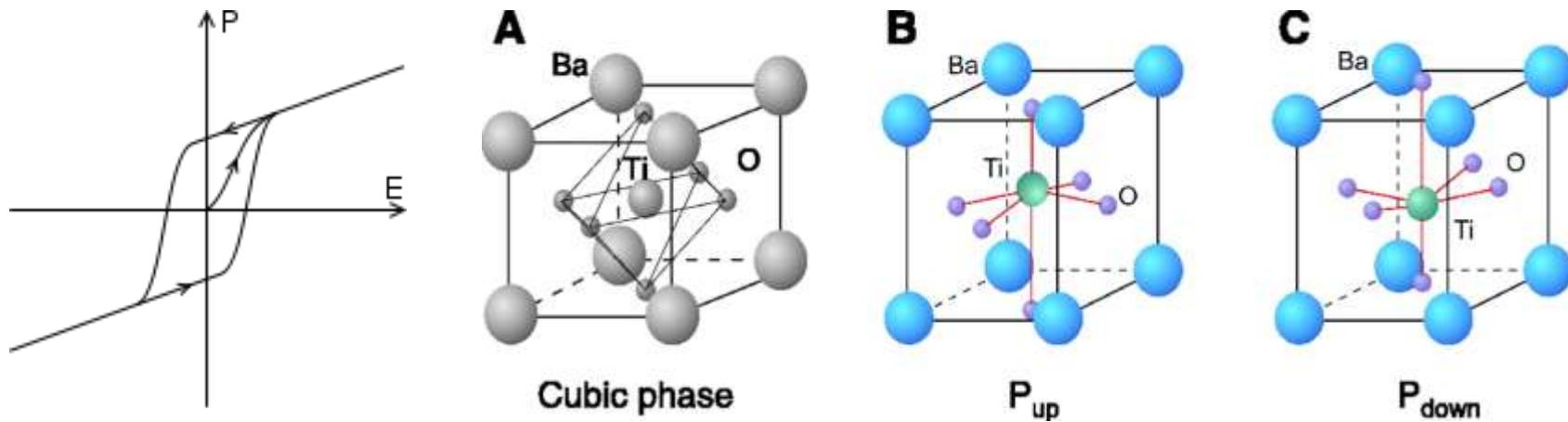
Matériaux diélectriques – Les ferroélectriques

Un ferroélectrique est un matériau qui possède une polarisation spontanée.

Propriétés des ferroélectriques :

- La polarisation spontanée existe seulement en dessous d'une température spécifique qui dépend du matériau (**température de Curie**). Au-dessus de la température de Curie, un ferroélectrique se comporte comme un diélectrique ordinaire ;
- Ils ne sont pas associés au fer. Leur nom vient plutôt de leur **comportement qui est analogue à celui des matériaux ferromagnétiques**.

États possibles de polarisation du titanate de baryum (BaTiO_3)

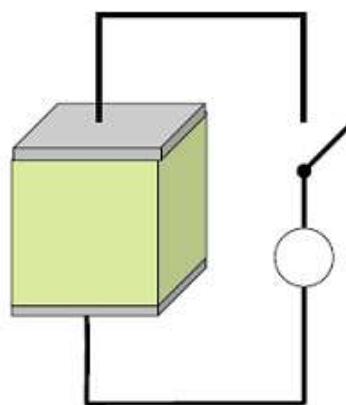


On peut utiliser les ferroélectriques comme éléments de mémoire.

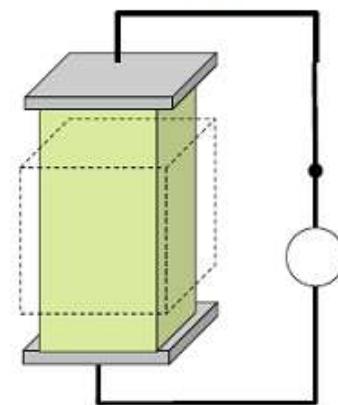
Matériaux diélectriques – Les piézoélectriques

Un piézoélectrique est un matériau qui produit un champ électrique lorsqu'il est déformé, et qui se déforme sous l'effet d'un champ électrique.

Circuit ouvert



Circuit fermé

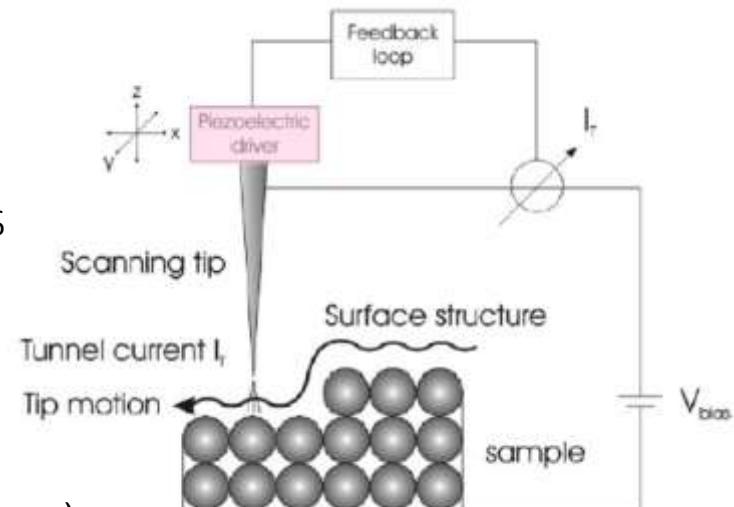


En appliquant une tension sur le piézoélectrique (en jaune), ce dernier se déforme.

Application – Microscope à force atomique (AFM)

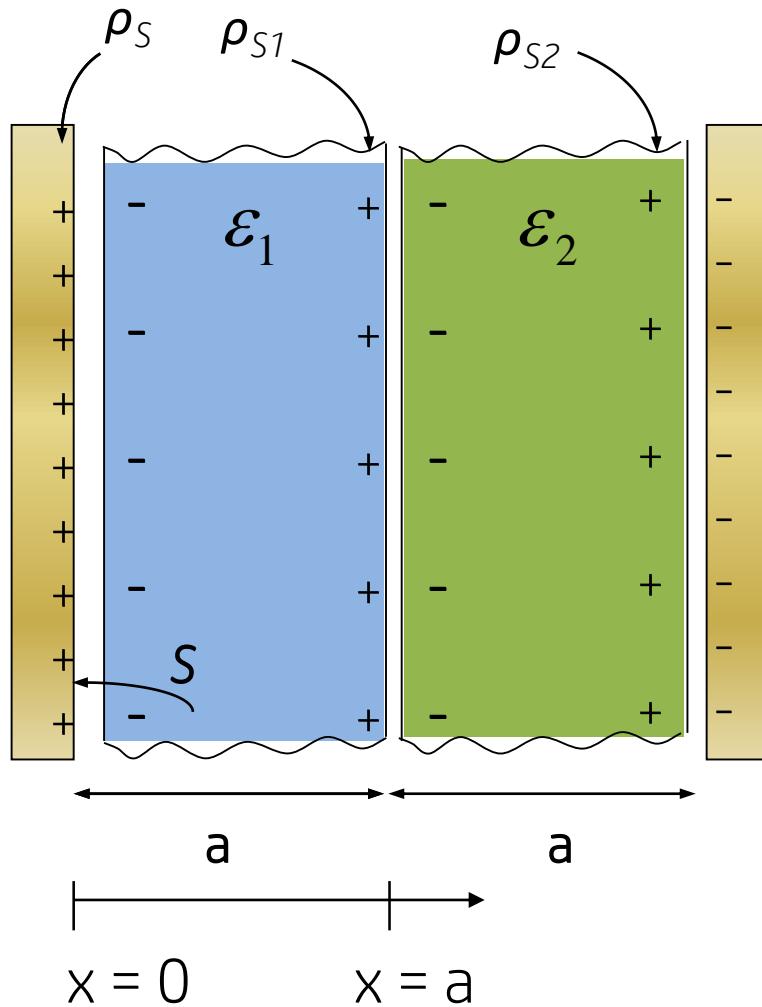
La pointe du microscope détecte de faibles variations de courant (effet tunnel) en fonction de la hauteur de la surface de l'échantillon. La pointe est sensible à la présence d'un seul plan atomique!

La pointe balaie la surface grâce à trois piézoélectriques contrôlant son mouvement (un par axe).



Exemple 3.2 – Condensateur plan à deux diélectriques

Quel est le champ partout dans le condensateur plan ?



La densité de flux entre les armatures n'est pas affectée par la présence des diélectriques.

$$\vec{D} = \rho_s \hat{x}$$

On en déduit le champ dans chaque région.

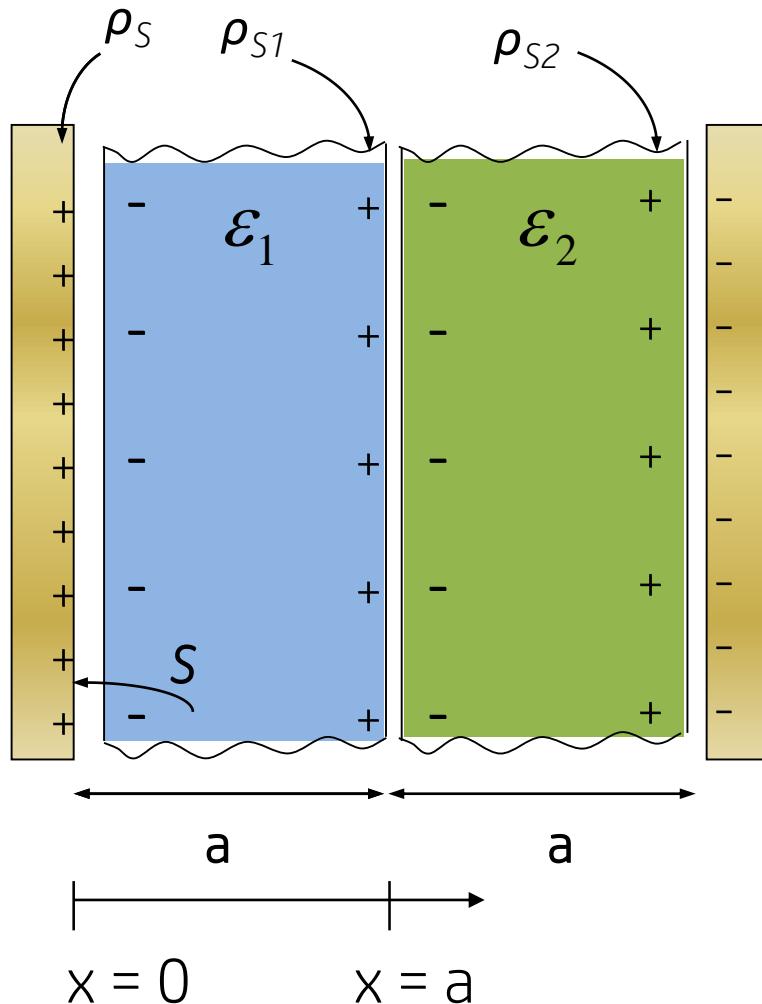
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{\epsilon_1} \hat{x} & 0 < x < a \\ \frac{\rho_s}{\epsilon_2} \hat{x} & a < x < 2a \end{cases}$$

Le champ est-il continu à l'interface entre les diélectriques ?

Exemple 3.2 – Condensateur plan à deux diélectriques

Quelles sont les densités de charges induites à la surface de chaque diélectrique ?



La densité de charges induites est égale (en module) à la polarisation.

$$\rho_{si} = P$$

On exprime la polarisation en fonction de \vec{D} .

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \epsilon \vec{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{D}$$

$$\vec{D} = \rho_s \vec{x}$$

$$\boxed{\rho_{s1} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) \rho_s}$$

$$\boxed{\rho_{s2} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right) \rho_s}$$

La densité de charges induites est toujours inférieure à la densité de charges libres!

En résumé...

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ électrique externe \vec{E}_0 , il devient polarisé.

Nous avons vu deux mécanismes de polarisation : atomique et d'orientation.

Le champ polarisation \vec{P} décrit le moment dipolaire par unité de volume (en C/m²).

Un diélectrique polarisé possède une densité de charge induite :

- volumique $\rho_v = 0$ dans son intérieur ;
- surfacique $\rho_{s,ind} = \pm |\vec{P}|$ sur ses surfaces perpendiculaires à \vec{P} .

Un diélectrique polarisé produit un champ \vec{E}_{ind} qui s'oppose au champ externe \vec{E}_0 . Ce phénomène est décrit par la relation :

Si le diélectrique est uniforme, isotrope et linéaire, alors la polarisation est proportionnelle au champ :

Sous ces hypothèses, la densité de flux électrique est proportionnelle au champ électrique : la constante de proportionnalité est appelée permittivité.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Les condensateurs

Les condensateurs sont des composants essentiels des circuits électriques et électroniques.

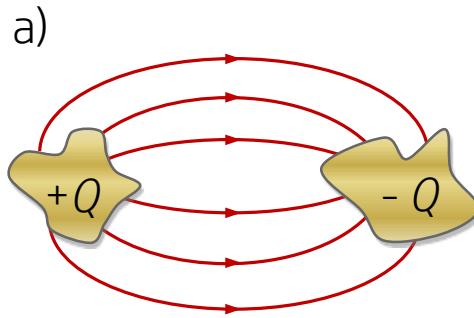


À quoi peut servir un condensateur ?

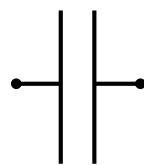
Qu'est-ce qu'un condensateur ?

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs chargés et isolés.

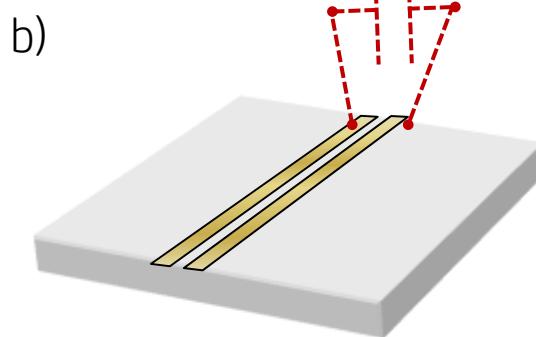
Il existe une multitude de configurations qui agissent comme des condensateurs.



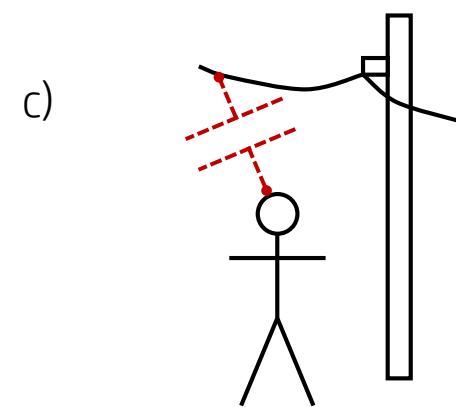
Deux conducteurs isolés constituent un condensateur.



Symbole d'un condensateur dans un schéma de circuit.



Deux rubans sur un circuit imprimé sont un condensateur.



Un homme et une ligne de transmission sont un condensateur.

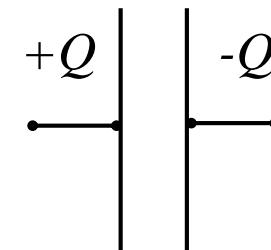
Lors de la conception de circuits, il faut tenir compte des capacités parasites afin de s'assurer qu'elles n'interfèrent pas avec le fonctionnement du circuit.

Capacité d'un condensateur

La capacité d'un condensateur mesure sa capacité à emmagasiner des charges électriques.

La capacité dépend :

- De la géométrie des armatures du condensateur ;
- De la séparation entre les armatures ;
- Du matériau diélectrique entre les armatures.



La capacité est définie comme la quantité de charge accumulée par unité de différence de potentiel entre les armatures.

Q : magnitude de la charge sur les armatures [C]

V : différence de potentiel entre les armatures [V]

$$C = \frac{Q}{V}$$

En farad
[1 F = 1 C/V]

En général la **capacité augmente** lorsque :

- La **surface** des armatures portant les charges **augmente** ;
- La **permittivité** du diélectrique **augmente** ;
- La **distance de séparation** entre les armatures **diminue**.



Exemple 3.4 – Capacité d'un condensateur plan

Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan en fonction de ses paramètres.

Par le théorème de Gauss, la densité de flux entre les armatures vaut :

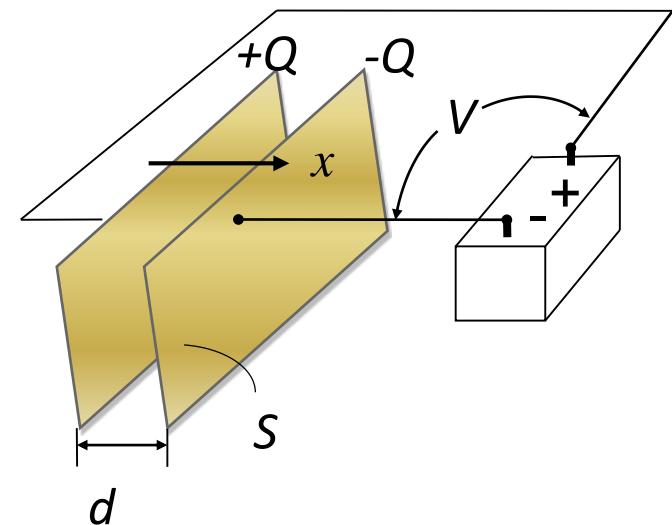
$$\vec{D} = \rho_s \hat{x} = \frac{Q}{S} \hat{x}$$

On en déduit le champ électrique entre les armatures :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon S} \hat{x}$$

On peut alors calculer la différence de potentiel entre les armatures :

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{x=d}^{x=0} E dx = \frac{Qd}{\epsilon S} \quad \rightarrow$$



Capacité d'un condensateur plan

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d}$$

Que faut-il faire pour augmenter la capacité du condensateur ?

Énergie emmagasinée dans un condensateur

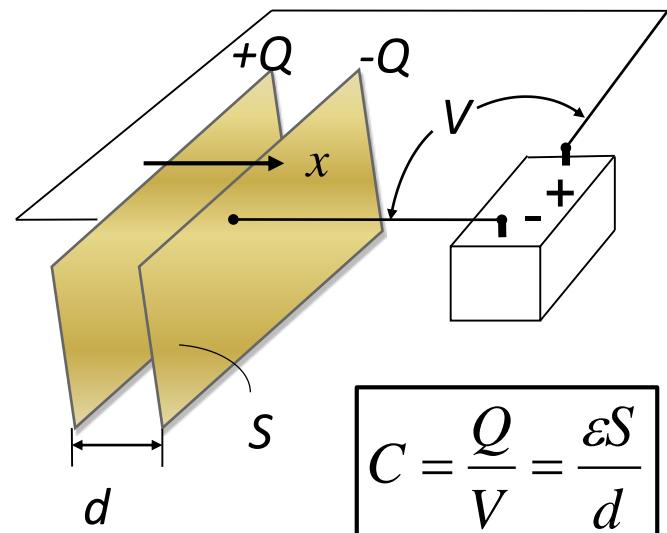
On a démontré à l'exemple 2.3 de la semaine 2 que l'énergie emmagasinée est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{Q}{\epsilon S} \right)^2 S d = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon S}$$

On peut réécrire l'énergie en utilisant la capacité et la différence de potentiel du condensateur.

$$U = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{\epsilon S} = \frac{1}{2} (CV)^2 \frac{1}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

L'expression obtenue pour l'énergie est tout à fait générale. On peut l'appliquer à n'importe quel condensateur, peu importe sa géométrie. Il suffit de connaître sa capacité et sa différence de potentiel.



Énergie emmagasinée dans un condensateur (général)

→

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

Exemple 3.5 – Capacité d'un câble coaxial

Déterminer l'expression de la capacité par unité de longueur d'un câble coaxial.

On suppose que le câble est assez long pour négliger les effets de bord.

- Théorème de Gauss
(cylindre de rayon $a < \rho < b$ et de longueur $l \ll L$)

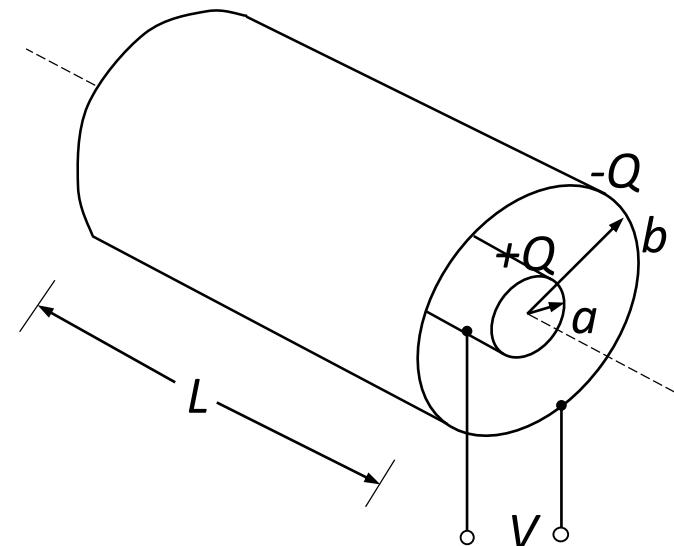
$$Q_l = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D 2\pi \rho l$$

$$\rightarrow \vec{D} = \frac{Q_l}{2\pi \rho l} \hat{\rho} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q_l}{2\pi \epsilon \rho l} \hat{\rho}$$

- Différence de potentiel entre les armatures :

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{Q_l}{2\pi \epsilon l} \int_{\rho=b}^{\rho=a} \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{Q_l}{2\pi \epsilon l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Capacité par unité de longueur : $C_l = \frac{C}{l} = \frac{1}{l} \frac{Q_l}{V} = \frac{Q_l}{2\pi \epsilon l} \ln\left(\frac{b}{a}\right) l$



Capacité par unité de longueur [F/m]

$$C_l = \frac{2\pi \epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

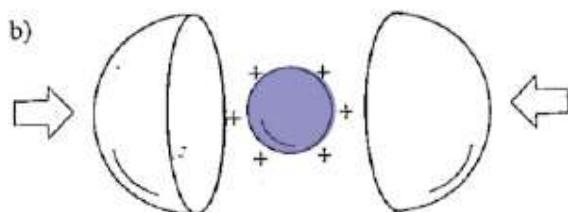
Rappel – Expérience de Cavendish

a)



Q_i (interne)

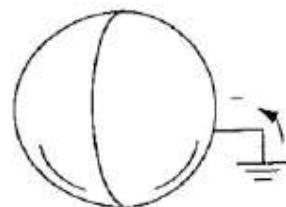
b)



$$Q_e = -Q_i$$

La charge externe Q_e a été déplacée par le flux électrique Φ produit par la charge interne Q_i .

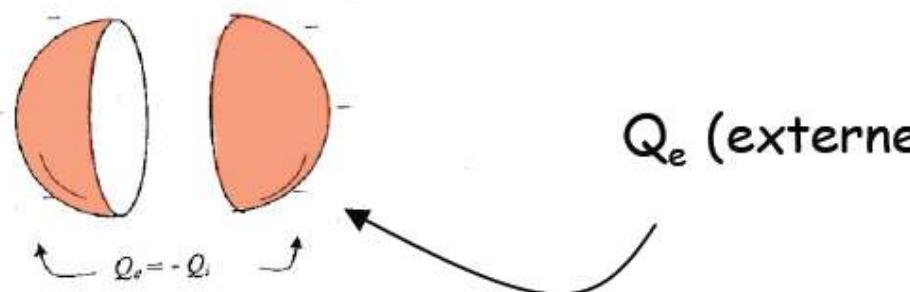
c)



Quelque soit le diélectrique !

La densité de flux électrique \vec{D} entre les deux sphères n'est pas affectée par la présence du diélectrique.

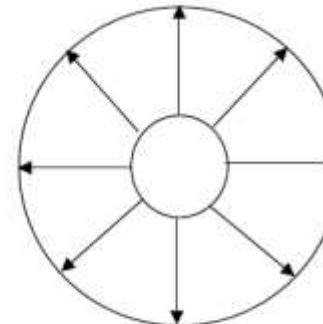
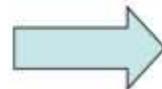
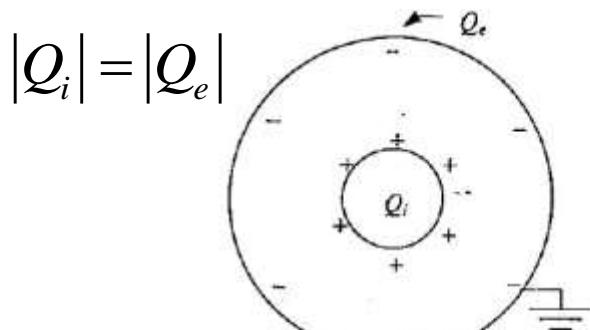
d)



Q_e (externe)

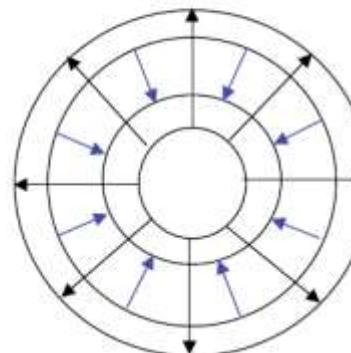
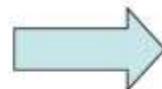
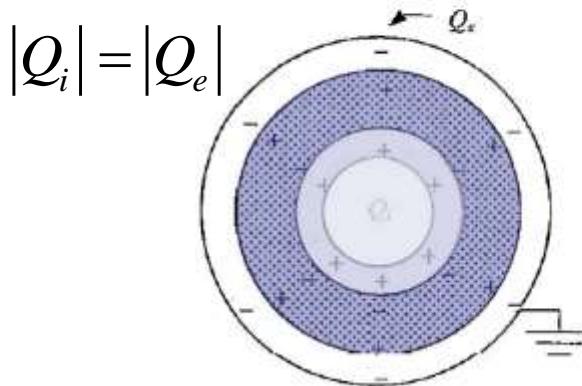
Retour sur l'expérience de Cavendish

VIDE



$$D_0 \quad E_0 \quad V_0$$

DIÉLECTRIQUE



$$D = D_0$$

$$E < E_0$$

$$V = ?$$

Qu'arrive-t-il à la différence de potentiel entre les sphères conductrices quand on ajoute le diélectrique ?

$$C = \frac{Q}{V} \quad \rightarrow \quad V = \frac{Q}{C}$$

Q est la même.
 C augmente en ajoutant le diélectrique ($\epsilon_r > 1$).



$$V < V_0$$

Quiz !

Deux condensateurs plans de géométries identiques sont maintenus à une différence de potentiel constante V grâce à une batterie. Le milieu entre les armatures est le vide pour le 1^{er} condensateur, et un diélectrique ($\epsilon_r > 1$) pour le 2^e condensateur.

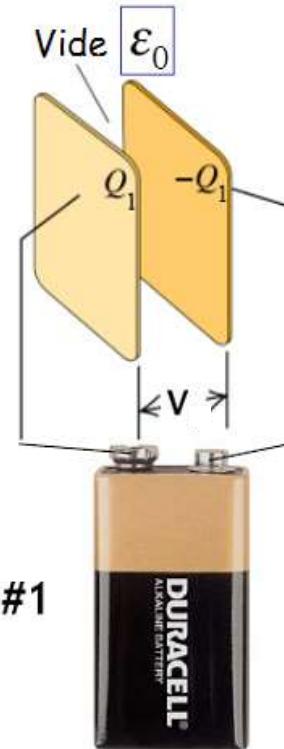
En considérant le milieu entre les armatures du condensateur, laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A. $E_2 < E_1$; **Faux**
- B. $D_2 = D_1$; **Faux**
- C. $Q_2 > Q_1$. **Vrai**

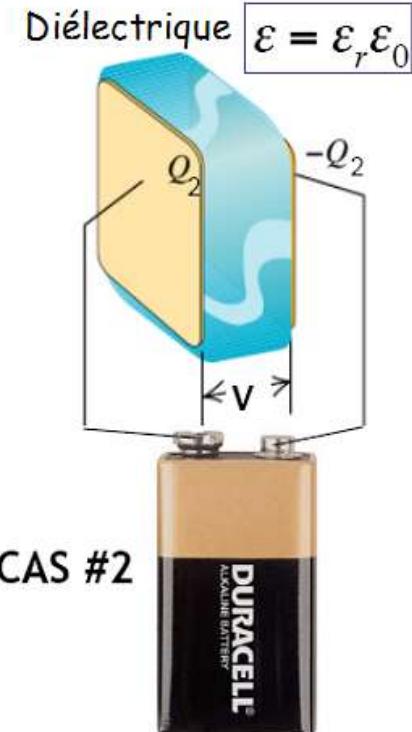
$V_2 = V_1 = V$
et distance d identique
entre les armatures



$$E_2 = E_1 = \frac{V}{d}$$



CAS #1



CAS #2

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$D = \rho_s = Q/S$$



$$D_2 > D_1$$

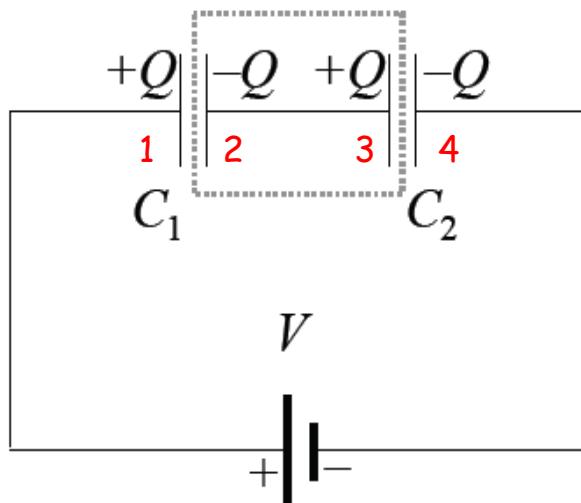


$$Q_2 > Q_1$$

Qu'en est-il de l'énergie ?

Capacité équivalente de condensateurs en série et en parallèle

Condensateurs en série



Rappel – Capacité

$$C = \frac{Q}{V}$$

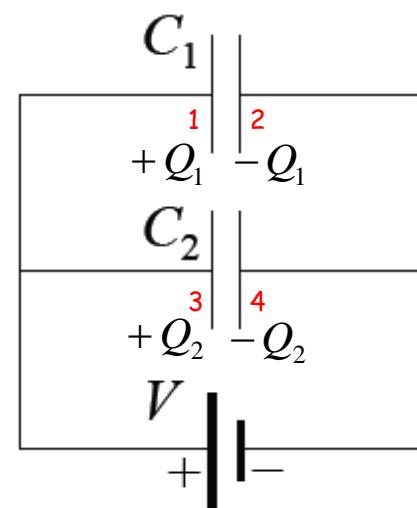
Q est la même sur chaque condensateur.

V se répartit entre les condensateurs.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \rightarrow \frac{Q}{V} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Condensateurs en parallèle



Q se répartit sur tous les condensateurs.

V est la même pour tous les condensateurs.

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$

$$C = \sum_i C_i$$

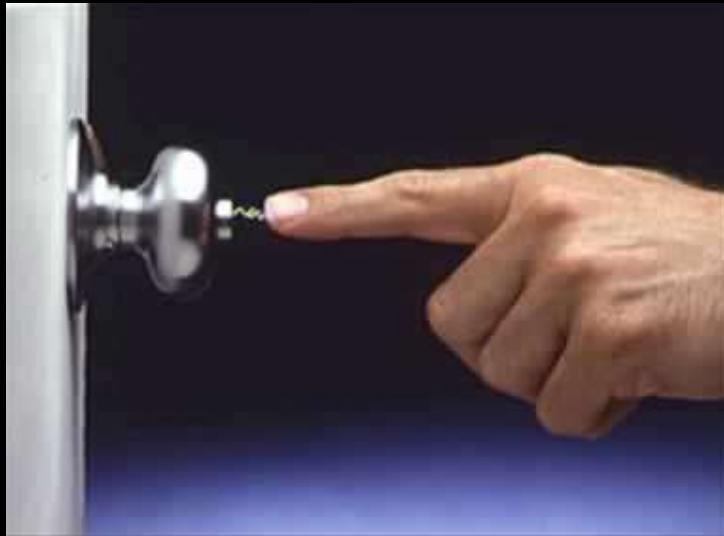
Claquage dans les diélectriques

Lorsque l'intensité du champ électrique devient très grande (typiquement de l'ordre de quelques MV/m), les forces électrostatiques qui s'exercent sur les charges liées **transforment ces charges liées en charges libres** et le diélectrique devient un matériau conducteur.



Claquage dans un bloc de Plexiglas. Le matériau change de propriétés et d'apparence où le courant a circulé.

Claquage dans l'air

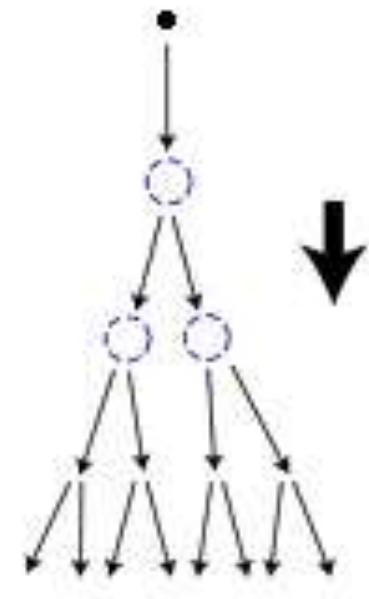


Rigidité diélectrique et claquage

Explication du phénomène de claquage

Le mécanisme repose sur un effet avalanche :

1. Le champ électrique élevé accélère les ions déjà présents dans le milieu et/ou ionise partiellement le milieu et accélère les ions ainsi produits ;
2. Les ions entrent en collision avec les atomes neutres ;
3. Ces collisions génèrent de nouveaux ions ;
4. Ces ions sont accélérés par le champ électrique et le cycle recommence.



Rigidité diélectrique

Champ électrique maximum pouvant être appliqué sur un matériau avant de déclencher le phénomène de claquage.

Rigidité diélectrique de l'air : environ 3 MV/m

Rigidité diélectrique – Table de valeurs

Matériau	Permittivité relative	Rigidité diélectrique (V/m) × 10 ⁶
Vide	1,0	∞
Air	1,00054	3
Papier	3,5	14
Mica	5,4	160
Porcelaine	6,5	4
Verre	4,5	13
Téflon	2,1	60
Huile	4,5	12

Claquage dans un solide



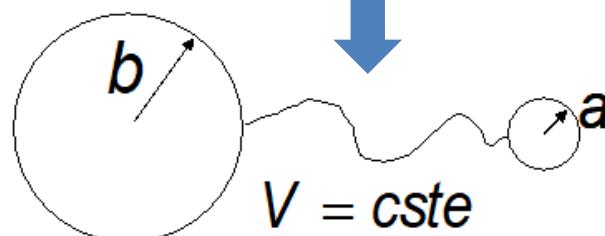
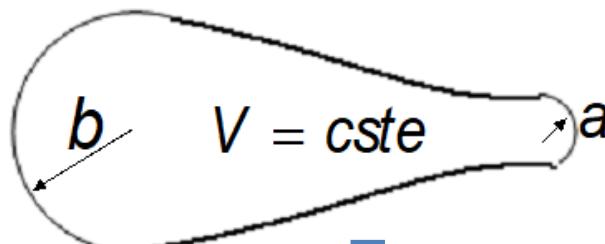
<https://www.youtube.com/watch?v=dja1CrpJxXc>

Effet de pointe et claquage

Effet de pointe

Le champ électrique est plus intense près des pointes d'un conducteur. Le claquage est donc plus susceptible de survenir autour de ces régions.

Conducteur à un potentiel constant



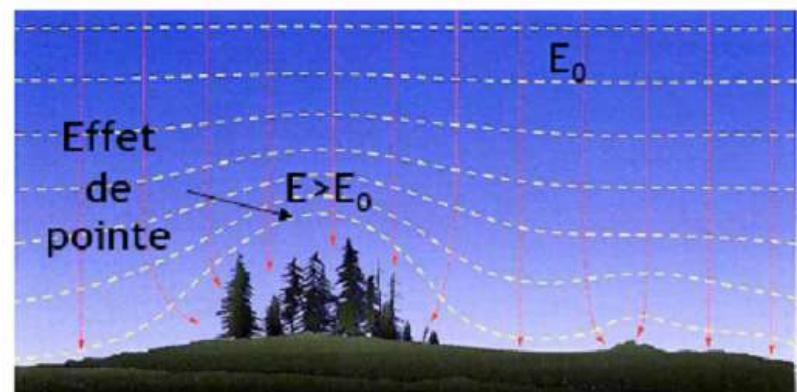
Approximation par deux sphères conductrices reliées par un fil

Le champ électrique à la surface de la sphère est d'autant plus élevé que le rayon de la sphère est petit!

Potentiel et champ électrique d'une sphère conductrice

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\rightarrow E = \frac{V}{r} \rightarrow E_a \approx \frac{b}{a} E_b$$



– PHS1102 –

Champs électromagnétiques

Chapitre 4 – Matériaux conducteurs

Courant électrique

Densité de courant électrique

Équation de continuité

Conductivité et résistivité électriques

Résistance et loi d'Ohm

Puissance dissipée

Objectifs de la semaine

Courant électrique

- Calculer un courant électrique par sa définition.
- Décrire les différentes mécanismes du courant.

Densité de courant électrique

- **Calculer la densité de courant électrique qui traverse une surface** (porteurs de charge positive et négative).

Équation de continuité

- Expliquer la signification de l'hypothèse de courant stationnaire et poser l'équation de continuité du courant sous cette hypothèse.

Conductivité et résistivité électriques

- Définir la conductivité et la résistivité à partir de la densité de courant et du champ électrique.
- **Calculer la résistance d'un conducteur** à l'aide de la loi d'Ohm.
- Décrire le comportement de la résistivité des métaux en fonction de la température.

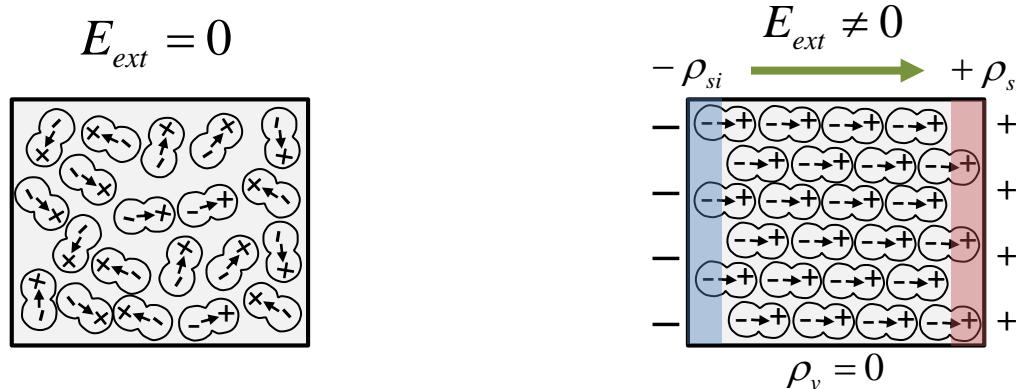
Résistance et loi d'Ohm

- **Calculer la puissance dissipée dans un conducteur** avec la loi de Joule.

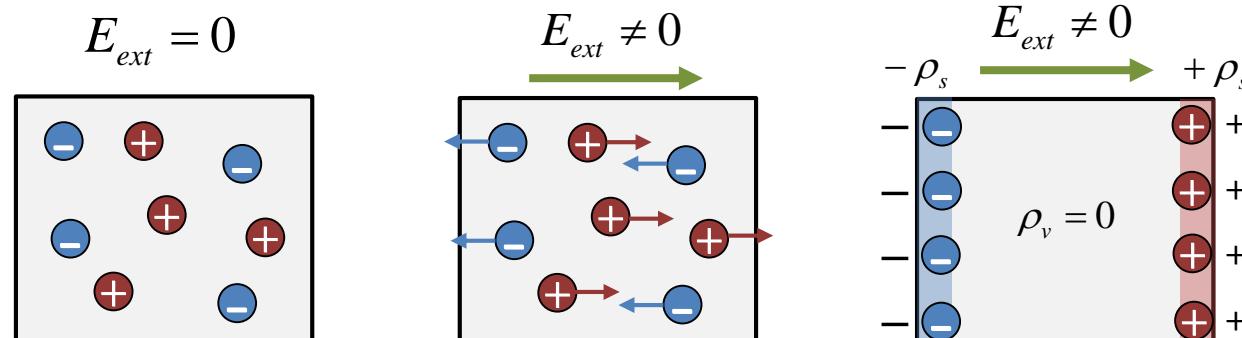
Puissance dissipée

Effet d'un champ électrique sur un conducteur isolé

Diélectrique : Les charges se déplacent en restant liées pour former des dipôles alignés : le matériau devient polarisé. Son volume reste neutre, mais les surfaces perpendiculaires au champ acquièrent une densité de charges induites.



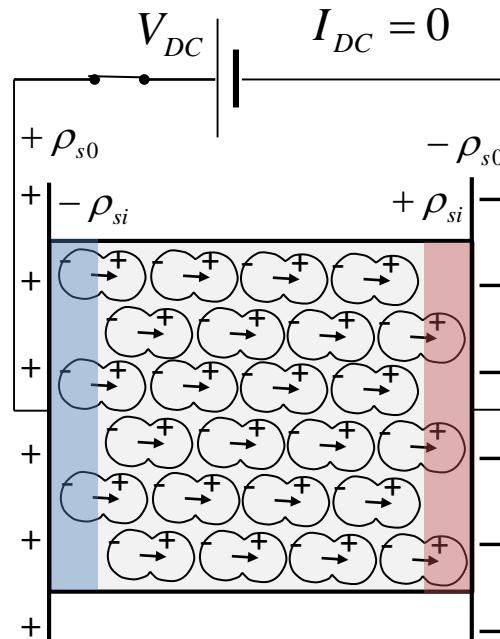
Conducteur : Le matériau contient des charges libres qui se déplacent dans tout le volume du matériau sous l'effet du champ. Les charges libres s'accumulent à la surface du conducteur qui devient alors chargée.



Les charges libres sont appelées porteurs de charge.

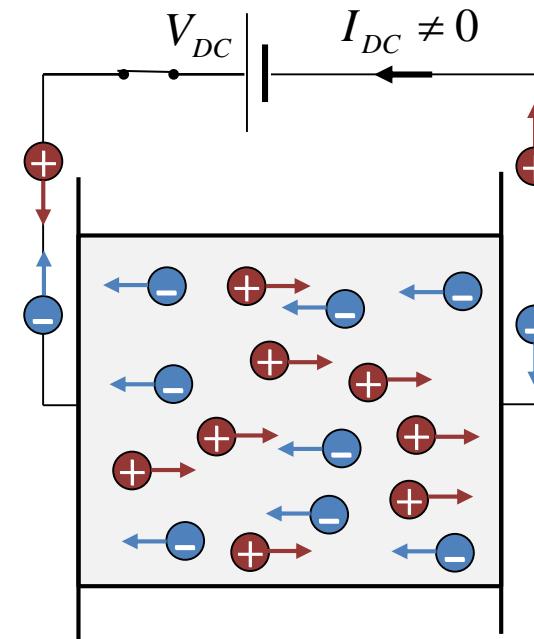
Diélectrique et conducteur dans un circuit

Comment se comportent un diélectrique et un conducteur lorsqu'ils sont alimentés par une source de tension continue (DC) ?



Diélectrique

Les charges étant liées, elles ne peuvent pas circuler dans le circuit.
Il n'y a pas de courant continu.

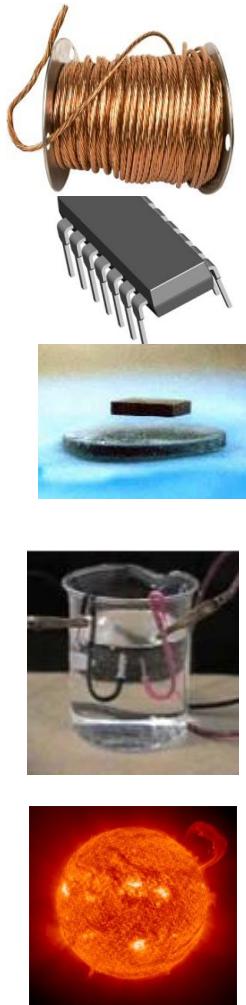


Conducteur

Les porteurs de charges se déplacent dans le circuit et un courant continu apparaît.

Matériaux conducteurs

Il existe des matériaux conducteurs pour tous les états de la matière.



État de la matière	Matériau	Porteurs de charge
Solide	<ul style="list-style-type: none">• Métaux• Semiconducteurs• Supraconducteurs	<ul style="list-style-type: none">• Électrons -• Électrons - et trous +• Paires d'électrons - - (paires de Cooper)
Liquide	<ul style="list-style-type: none">• Électrolytes	<ul style="list-style-type: none">• Ions + et - (ex : Na^+ et Cl^-)
Gaz/plasma	<ul style="list-style-type: none">• Plasmas chauds ou froids	<ul style="list-style-type: none">• Ions + et -

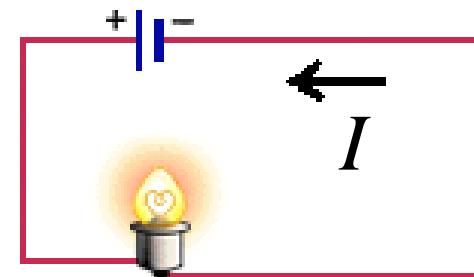
Définition du courant électrique

Le courant I est la quantité de charge qui traverse une surface par unité de temps.

Courant électrique

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

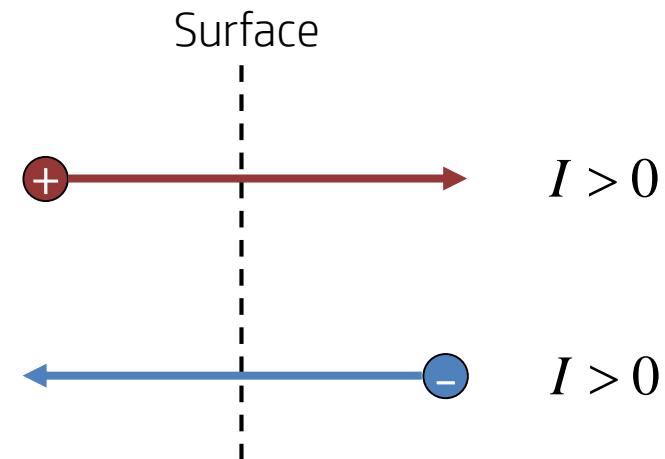
Scalaire
en ampère
[A] = [C/s]



Signe du courant

Le courant est une **quantité scalaire** qui peut être **positive ou négative**.

1. Le **sens positif du courant** est défini par le sens du **déplacement des charges positives** (sens conventionnel) ;
2. Une **charge négative** qui se déplace en **sens opposé** au déplacement des charges positives génère également un **courant positif** !



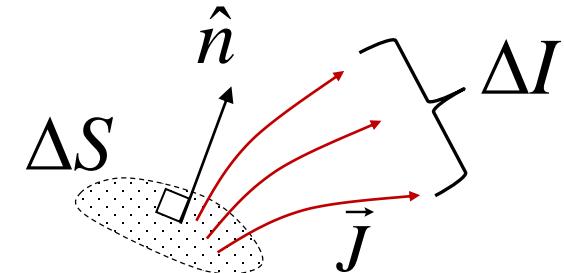
Densité de courant électrique

La densité de courant J est la quantité de courant qui traverse une surface infinitésimale.

Densité de courant

$$\vec{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{n}$$

Champ vectoriel
[A/m²]



Calcul du courant total

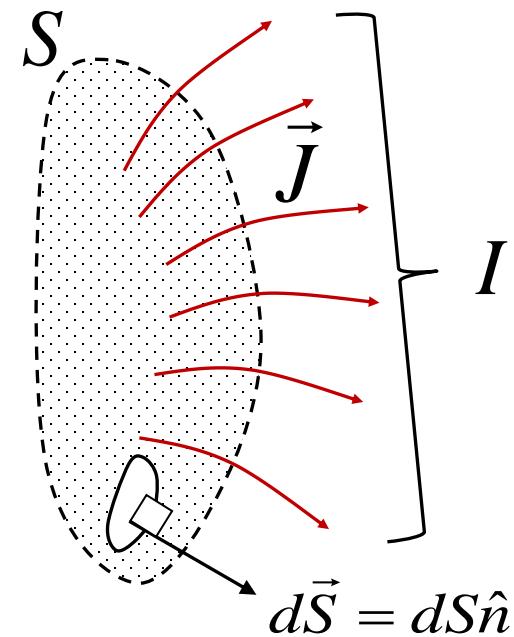
Si l'on connaît la densité de courant, le courant total qui traverse une surface est :

Courant traversant une surface

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Produit scalaire : seule la composante de \vec{J} perpendiculaire à la surface contribue au courant.

Rappel : perpendiculaire à la surface veut dire parallèle à $d\vec{S}$.



Continuité du courant

Tout comme l'énergie, la charge électrique est une quantité qui est toujours conservée.

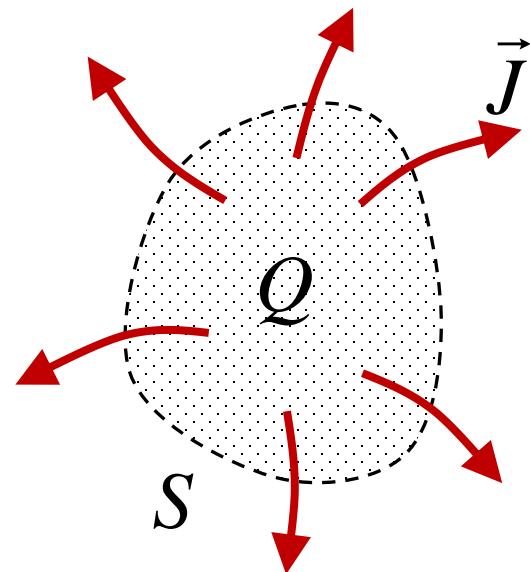
L'équation de continuité décrit la conservation de la charge.

Soit une surface fermée S qui contient une charge Q .

Par conservation de la charge, si la charge à l'intérieur de la surface varie, c'est qu'une certaine quantité de charge a traversé la surface sous forme d'un courant.

Équation de continuité

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}$$



Interprétation

(Rappel : $d\vec{S}$ pointe vers l'extérieur de la surface S .)

Si Q augmente, une quantité de charge est entrée à l'intérieur de S (courant I négatif).

Si Q diminue, une quantité de charge est sortie de l'intérieur de S (courant I positif).

Équation de continuité (courants stationnaires)

Un courant stationnaire ne varie pas dans le temps.

Observation expérimentale sur l'équation de continuité

Il n'y a pas de source ou de drain de porteurs de charge, car toute création ou annihilation de charge conserve la charge. On ne peut pas créer de charge positive sans créer la même quantité de charge négative.

Ex. : Source : création de porteurs dans une cellule solaire (électron + trou),
 Drain : recombinaison de porteurs dans une cellule solaire (électron + trou).

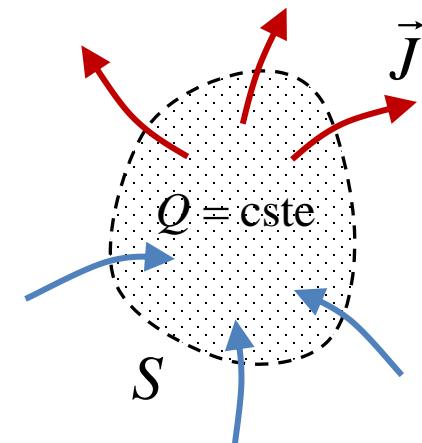
On s'intéresse ici aux **courants et distributions de charge stationnaires**. Dans ce cas, tout courant qui entre dans une surface S doit en ressortir afin de garder la quantité de charge Q constante à l'intérieur.

Courants
stationnaires

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

Équation de continuité
(courants stationnaires)

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$



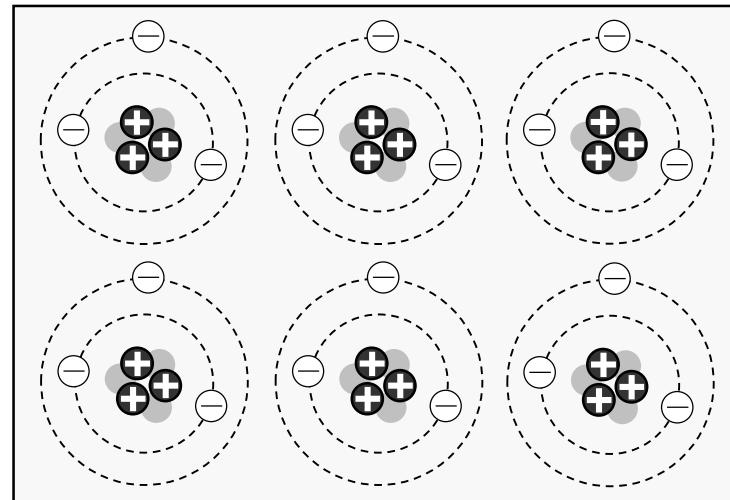
Courant stationnaire

Une distribution de charge stationnaire ne veut pas dire une absence de courant.

Bloc de 6 atomes de lithium

$$Q_{total} = 18 \text{ protons} - 18 \text{ électrons} = 0$$

$$\rho_v = 0$$

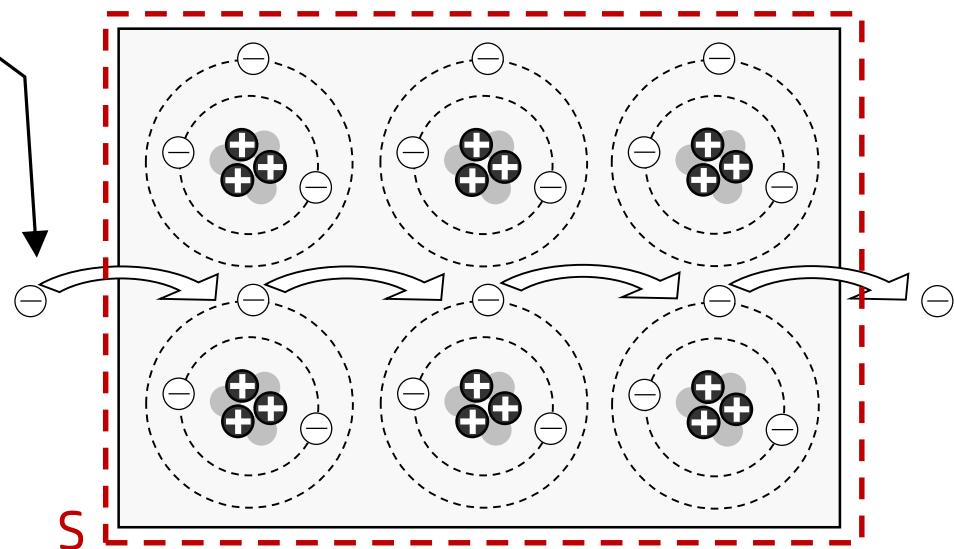


Arrivée et sortie d'électrons dans le bloc qui est placé dans un circuit.

La charge du matériau reste constante (ici nulle) malgré le courant.

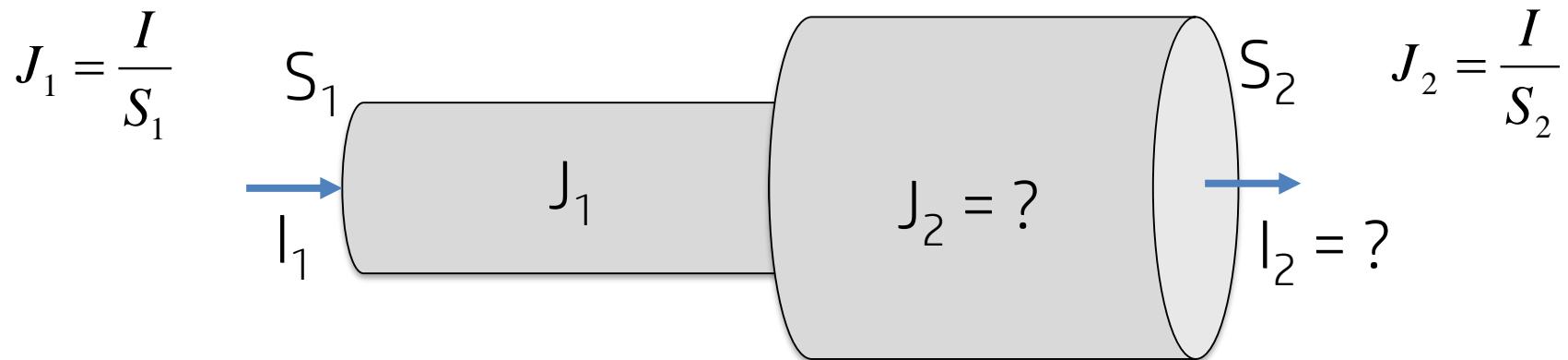
$$Q_{total} = 18 \text{ protons} - 18 \text{ électrons} = 0$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$



Quiz !

La pièce conductrice ci-dessous est formée de deux cylindres de sections $S_1 < S_2$. Un courant I_1 circule entre par la section S_1 de la pièce. On suppose que le courant est confiné dans la pièce (pas de fuite par la surface courbe d'un cylindre).



Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

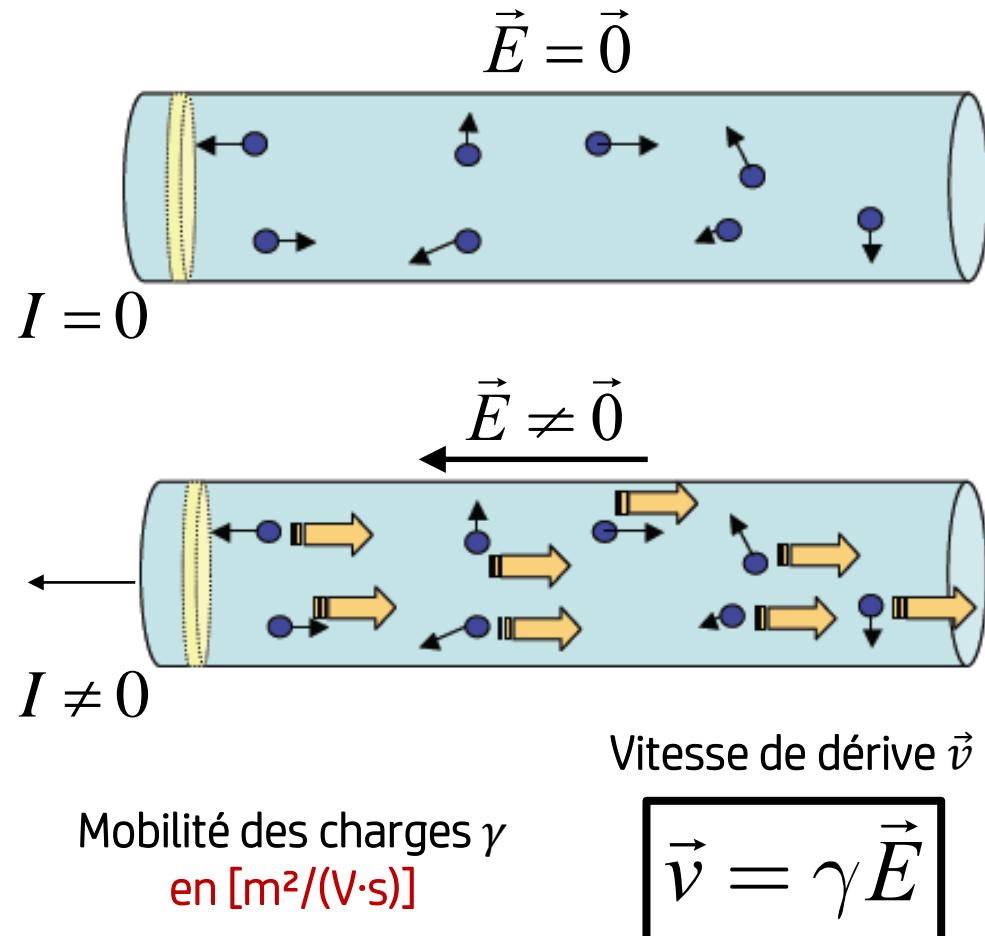
- A. $I_1 < I_2$ et $J_1 = J_2$; **Faux**
- B. $I_1 > I_2$ et $J_1 = J_2$; **Faux**
- C. $I_1 > I_2$ et $J_1 = J_2$; **Faux**
- D. $I_1 = I_2$ et $J_1 < J_2$; **Faux**
- E. $I_1 = I_2$ et $J_1 > J_2$. **Vrai**

Le courant qui entre dans la section S_1 doit en ressortir complètement (courant stationnaire).
Le même courant circule donc dans S_2 .

$$I_1 = I_2 = I \quad \longrightarrow \quad J_2 = \frac{S_2}{S_1} J_1$$

Vitesse de dérive dans un conducteur métallique

Un conducteur métallique peut être modélisé comme un « gaz » d'électrons libres (délocalisés) circulant entre les atomes du métal.



Absence de champ externe

Les électrons délocalisés se déplacent de manière aléatoire à la **vitesse de Fermi** ($\approx 10^5$ m/s). Cette vitesse augmente avec la température (agitation thermique).

Application d'un champ externe

Le champ électrique accélère les électrons et leur confère globalement une **vitesse de dérive** (\approx mm/s). Celle-ci est **proportionnelle au champ**, mais est **limitée par les collisions avec les atomes** du métal.

Densité de courant et champ électrique

Le courant est proportionnel à la vitesse de dérive des porteurs de charge.

Soit une quantité de charge Δq répartie sur un volume infinitésimal $\Delta V = \Delta S \Delta x$. On considère le déplacement de la charge sur une distance Δx en un temps Δt .

La densité de courant vaut :

$$\vec{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{n}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta q}{\Delta S \Delta t} \hat{n}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho_v \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{n}$$

$$\boxed{\vec{J} = \rho_v \vec{v}}$$

Vitesse de dérive

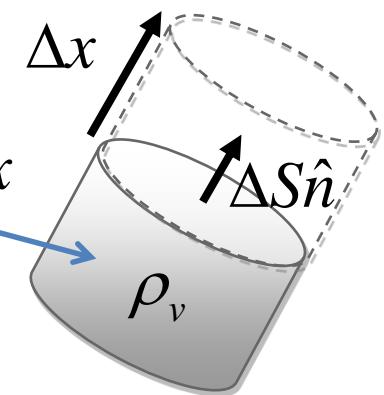
Définition de la densité de courant

Définition d'un courant

Expression de Δq

Définition de la vitesse

$$\Delta q = \rho_v \Delta S \Delta x$$



En utilisant la définition de la vitesse de dérive proportionnelle au champ électrique, on obtient :

$$\vec{J} = \rho_v \gamma \vec{E}$$

La constante de proportionnalité porte un nom bien précis...

Conductivité électrique et résistivité

La conductivité électrique est la constante de proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrique.

Définition de la conductivité

$$\vec{J} = \rho_v \gamma \vec{E} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma = \rho_v \gamma}$$

Densité de courant et champ électrique

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

en siemens par mètre
[S/m = A/(V·m)]

Plus la conductivité d'un matériau est élevée, plus le courant de conduction dû à l'application d'un champ électrique est élevé.

Définition de la résistivité

À partir de la conductivité, on définit également la résistivité ρ .

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}}$$

en ohm-mètre
[Ω·m = m/S = V·m/A]

Quiz – Conductivité des métaux

Lequel des métaux suivants est le plus conducteur ?

Or



Argent



Cuivre



Platine



Aluminium



Conductivité électrique – Table de valeurs

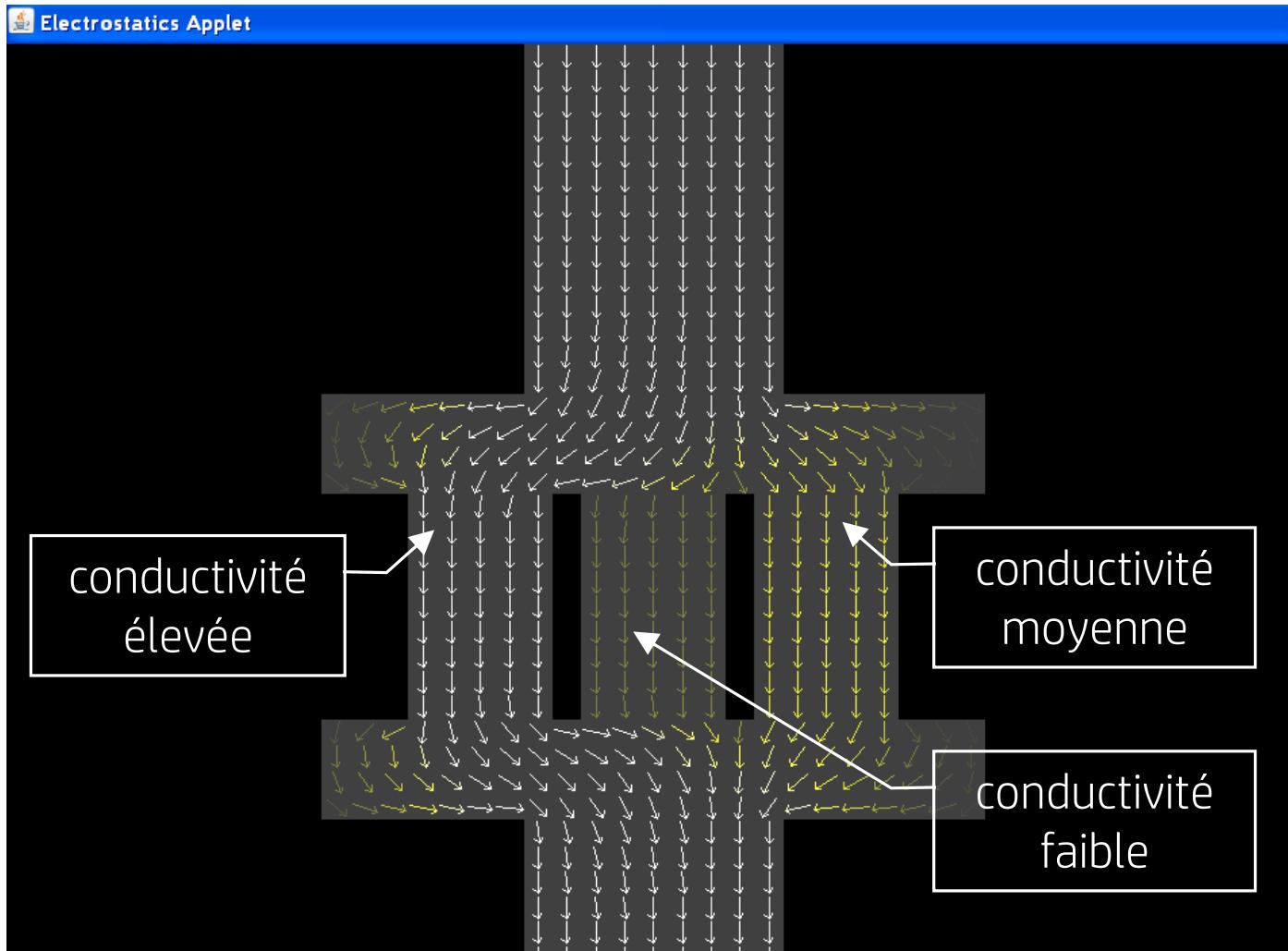
Matériau	Conductivité ($\Omega^{-1}m^{-1}$)	Matériau	Conductivité ($\Omega^{-1}m^{-1}$)
Quartz	$\approx 10^{-17}$	Eau de mer	≈ 4
Polystyrène	$\approx 10^{-16}$	Silicium	$\approx 10^3$
Mica	$\approx 10^{-15}$	Graphite	$\approx 10^5$
Verre	$\approx 10^{-14}$	Mercure	$\approx 10^6$
Eau distillée	$\approx 10^{-4}$	Tungstène	$1,8 \times 10^7$
Muscle	$\approx 0,35$	Or	$4,1 \times 10^7$

Quelle classe de matériaux possède la plus grande conductivité ?

Quelle est la conductivité d'un isolant parfait ? d'un conducteur parfait ?

Effet de la conductivité

Moodle Section 15 : Chap 1-6 Électrostatique 2D (setup : resistors in parallel)



Résistance et loi d'Ohm

Le courant est proportionnel à la différence de potentiel appliquée sur un objet.

En appliquant une différence de potentiel V entre deux bornes mises en contact avec un conducteur, un courant I circule entre les bornes.

Loi d'Ohm

$$V = RI$$



Gregor Simon Ohm
(1789-1854)

Résistance

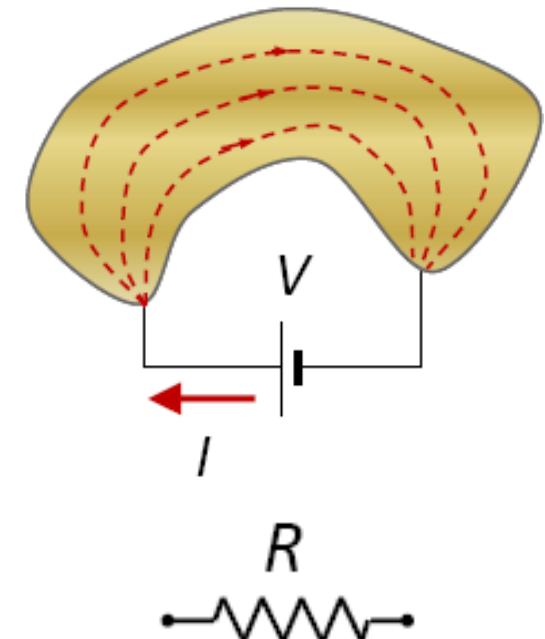
$$R = \frac{V}{I}$$

en ohm
[$\Omega = V/A$]

Conductance

$$G = \frac{1}{R}$$

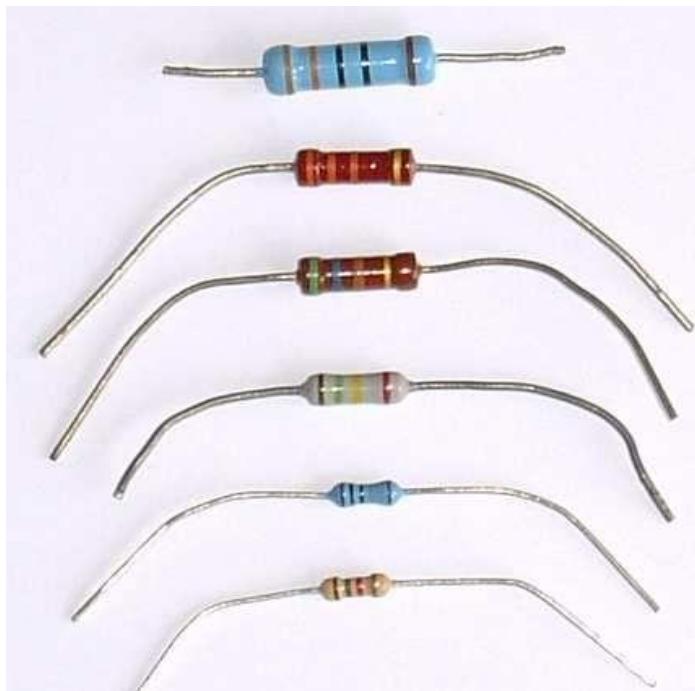
en siemens
[$S = 1/\Omega$]



La résistance (conductance) dépend de :

- La conductivité (résistivité) de l'objet ;
- La géométrie de l'objet ;
- La position des bornes sur l'objet.

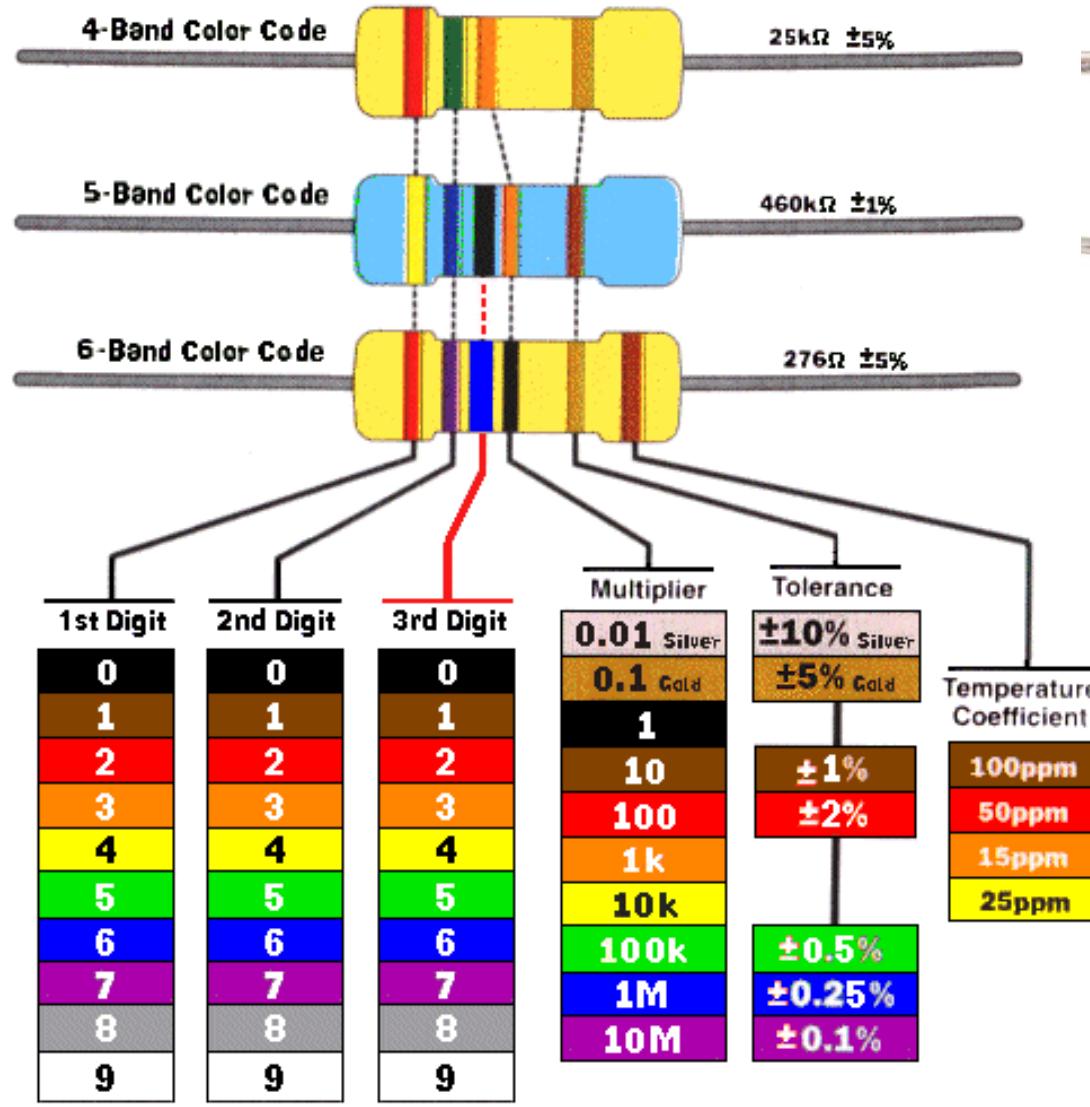
Résistances



résistances variables
(potentiomètres)



Code de couleur des résistances



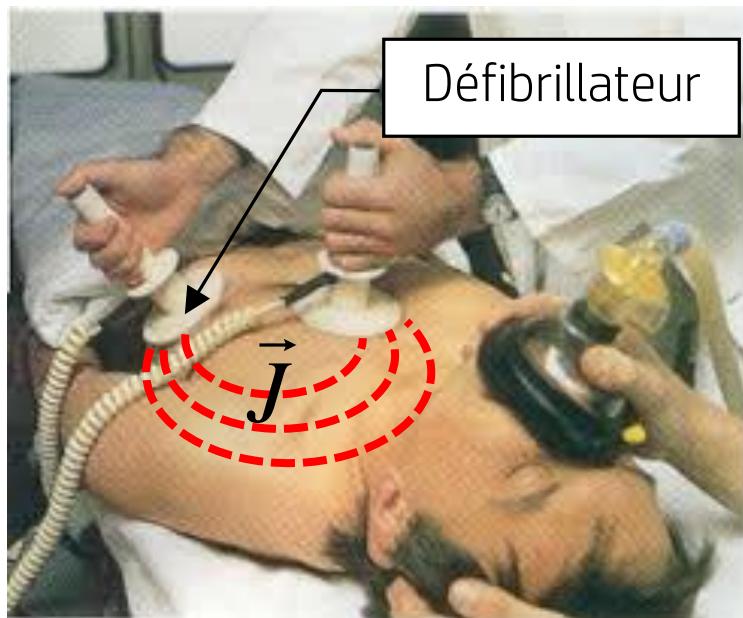
Résistance du haut

$$10 \times 10 \text{ k}\Omega = 100 \text{ k}\Omega \pm 5 \%$$

Résistance du bas

$$100 \times 1 \text{ k}\Omega = 100 \text{ k}\Omega \pm 1 \%$$

Méthode pour calculer la résistance d'un volume conducteur



Calcul de la résistance :

1. Déterminer la symétrie pour exprimer le vecteur \vec{J} en fonction de I et de S ($J = I/S$) ;
2. Calculer le champ électrique $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$;
3. Calculer la différence de potentiel $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$;
4. Calculer la résistance $R = V/I$.

Choisir un parcours simple qui permet de calculer l'intégrale facilement.

Exemple 4.1 – Résistance d'un conducteur de section constante

Déterminer la résistance d'un barreau de longueur L et de section S constante.

1. Symétrie pour exprimer $J = I/S$

Le courant circule parallèlement à l'axe du barreau (selon x). On considère donc la section S du conducteur traversée par le courant.

2. Champ électrique $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$

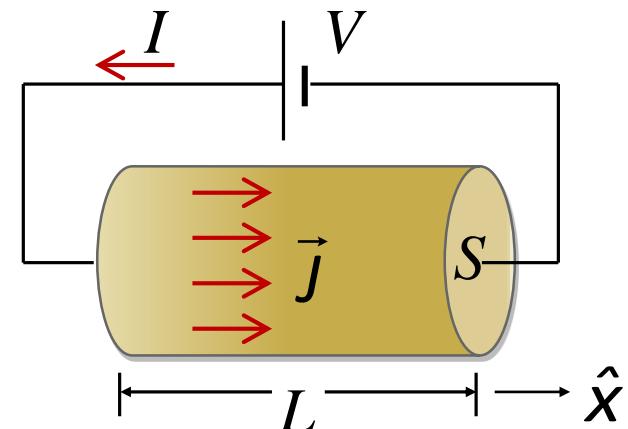
3. Différence de potentiel $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Chemin d'intégration le plus simple entre les bornes : horizontalement de $x = L$ (borne négative) à $x = 0$ (borne positive).

4. Résistance $R = V/I$

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{I}{\sigma S} \hat{x}$$



$$V = - \int_L^0 \frac{I}{\sigma S} \hat{x} \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) = \int_0^L \frac{I}{\sigma S} dx = \frac{IL}{\sigma S}$$

Deux barreaux en série : L double et la résistance double.

Deux barreaux en parallèle : S double et la résistance diminuée de moitié.

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

Exemple – Résistances en série

Déterminer la résistance équivalente de deux barreaux distincts placés en série.

1. Champ électrique dans chaque barreau ($i = 1, 2$)

On a déjà trouvé que : $\vec{J}_i = \frac{I}{S_i} \hat{x}$ $\vec{E}_i = \frac{I}{\sigma_i S_i} \hat{x}$

2. Différence de potentiel totale

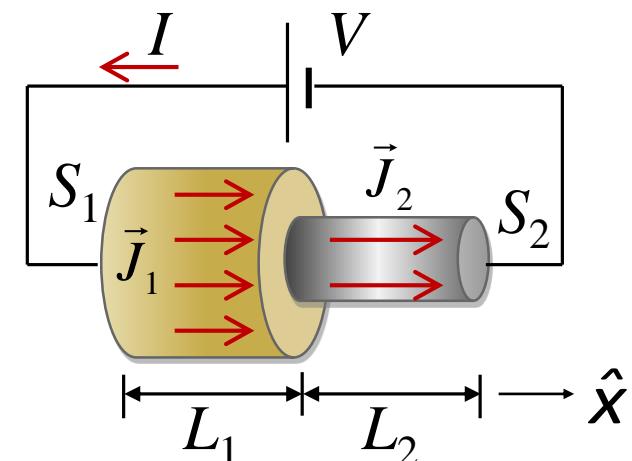
Il faut intégrer sur un chemin qui parcourt les deux barreaux :

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{L_1}^0 \frac{I}{\sigma_1 S_1} dx - \int_{L_1+L_2}^{L_1} \frac{I}{\sigma_2 S_2} dx \quad \rightarrow \quad V = I \left(\frac{L_1}{\sigma_1 S_1} + \frac{L_2}{\sigma_2 S_2} \right)$$

3. Résistance équivalente $R_{eq} = V/I$

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{L_1}{\sigma_1 S_1} + \frac{L_2}{\sigma_2 S_2} = R_1 + R_2$$

Loi pour les
résistances en
série



RAPPEL
Résistance d'un barreau

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

Surfaces de Gauss pour la densité de courant

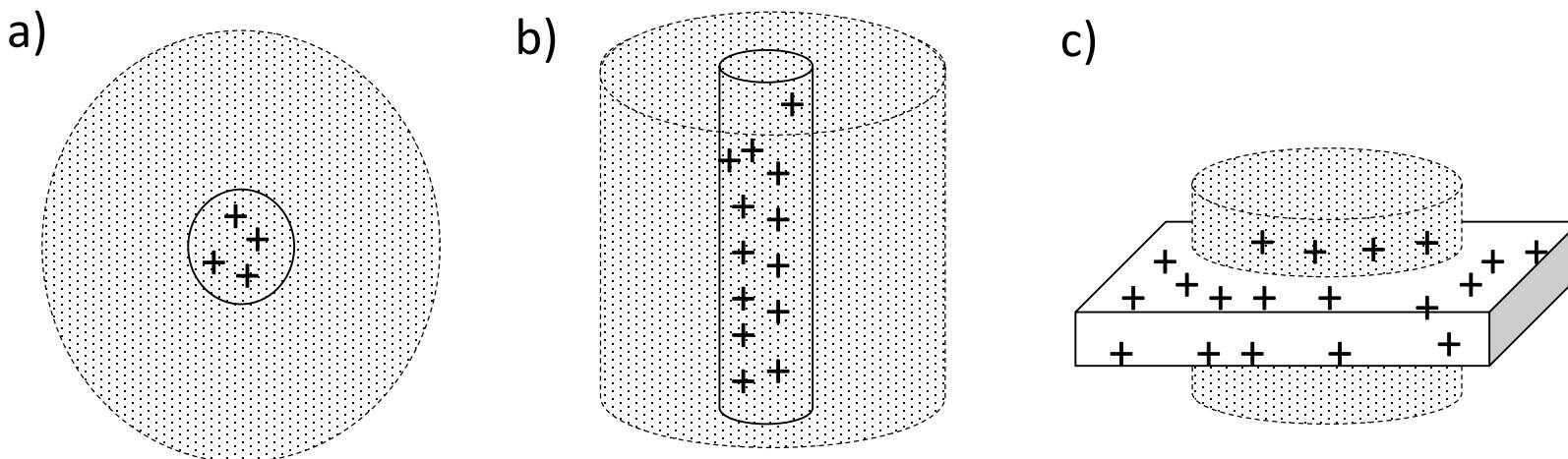
La relation entre courant I et densité de courant \vec{J} est similaire à la relation entre la charge libre Q et la densité de flux \vec{D} . On peut donc appliquer la même méthode de résolution.

$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Pour déterminer l'expression de \vec{J} , on examine la symétrie du problème et on choisit une des trois surfaces de Gauss pour laquelle \vec{J} :

1. Est constante et perpendiculaire à la surface : $\int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int \pm J dS = \pm JS$;
2. Est parallèle à la surface : $\int \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$.



Les trois surfaces de Gauss symétriques: a) sphère ; b) cylindre ; c) boîte à pilules.

Exemple 4.2 – Résistance de fuite d'un câble coaxial

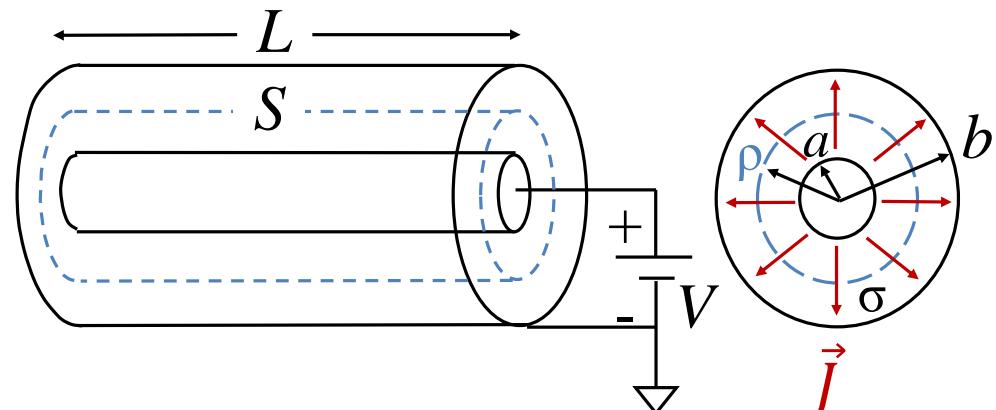
En pratique, le diélectrique placé entre les armatures cylindriques du câble n'est pas un isolant parfait : il possède une certaine conductivité σ non nulle et un courant de fuite I circule entre les armatures, ce qui cause des pertes.

1. Symétrie pour exprimer $J = I/S$

Dans quelle direction est la densité de courant ?

Le courant circule **radialement** entre les deux armatures. La géométrie cylindrique incite à utiliser les **coordonnées cylindriques**.

Pour exprimer \vec{J} , on utilise une surface S cylindrique de rayon $a < \rho < b$.



2. Champ électrique $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$

3. Différence de potentiel $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Quel parcours d'intégration choisir ?

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{\rho} = \frac{I}{2\pi\rho L} \hat{\rho}$$

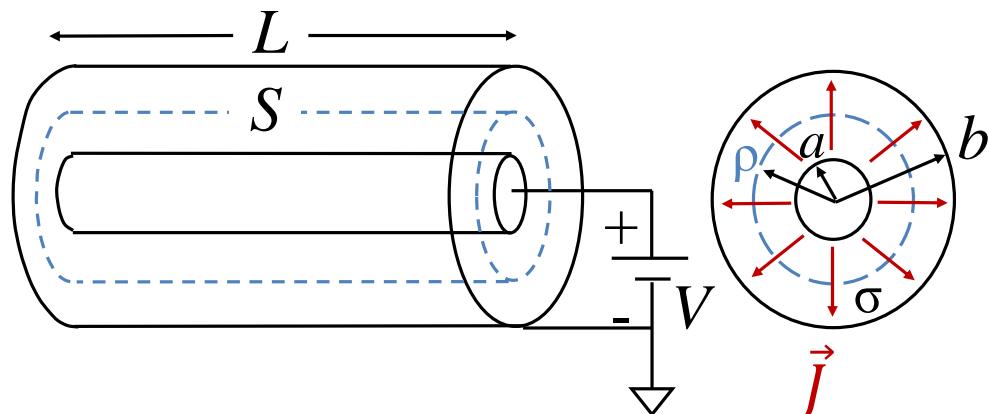
$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma\rho L} \hat{\rho}$$

Exemple 4.2 – Résistance de fuite d'un câble coaxial

3. Différence de potentiel $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Quel parcours d'intégration choisir ?

On part de l'armature négative ($\rho = b$) vers l'armature positive ($\rho = a$) de façon purement radiale (chemin le plus simple)



$$V = - \int_b^a \frac{I}{2\pi\sigma\rho L} \hat{\rho} \cdot (d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}) = \frac{I}{2\pi\sigma L} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4. Résistance $R = V/I$

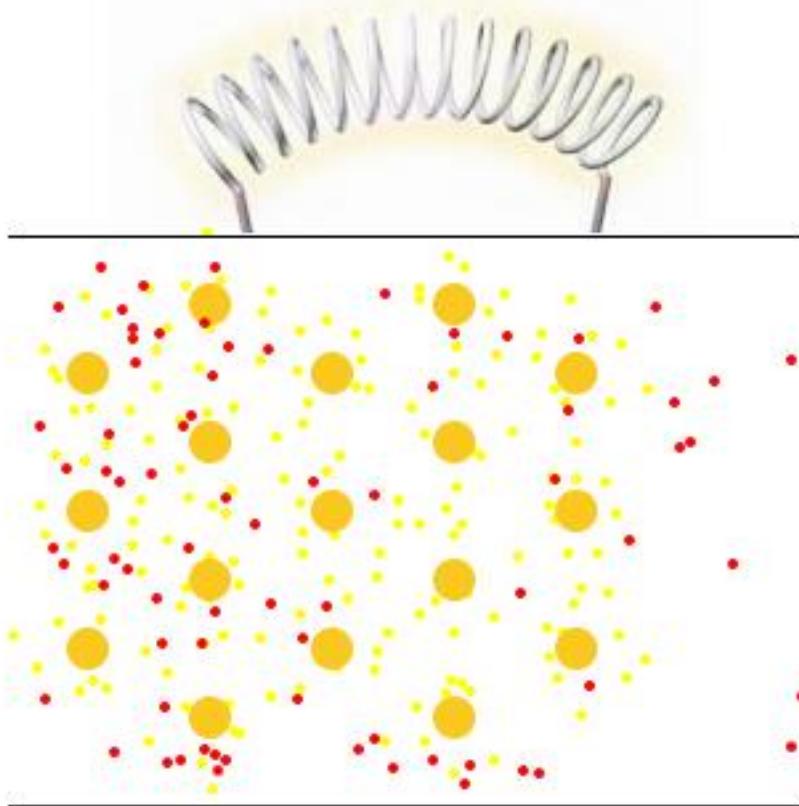
$$R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma L}$$

Si l'on augmente b ou si l'on diminue a , la résistance augmente (résistances en série).

Si l'on augmente L , la résistance diminue (résistances en parallèle).

Puissance dissipée dans un conducteur

Moodle Section 15
Applet : Chap 4 Conductivité



Lorsqu'un courant circule dans un conducteur, de la **puissance est dissipée à cause des collisions** entre les porteurs de charge et les atomes du matériau. Une certaine quantité d'énergie est alors convertie en **chaleur**.

Plus le courant est élevé, plus le nombre de collisions augmente et plus la puissance dissipée est grande.

Puissance électrique et puissance dissipée

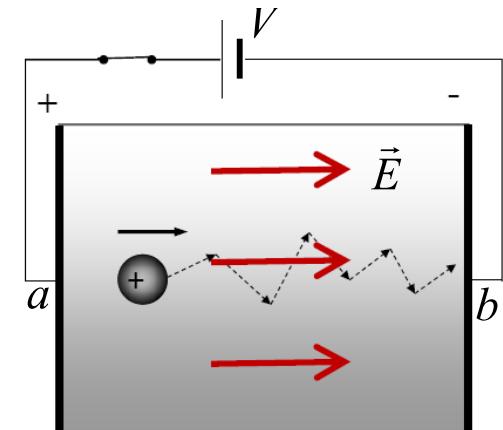
Puissance électrique

La puissance électrique est le travail fait sur les charges par unité de temps.

Pour qu'un courant I circule à travers le conducteur, la pile doit fournir une différence de potentiel V .

En parcourant le conducteur, une charge $\pm\Delta Q$ perd (signe négatif) une énergie potentielle $\Delta U = -V\Delta Q$.

La pile redonne à la charge à son énergie potentielle initiale en effectuant un travail positif $W = -\Delta U = V\Delta Q$ sur la charge.



Puissance électrique (loi de Joule)

En utilisant la définition du courant électrique, on a :

$$W = V\Delta Q = V(I\Delta t)$$



$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = VI$$

en watt
[W = V·A = J/s]

Puissance dissipée dans une résistance R

En utilisant la loi d'Ohm $V = RI$, on obtient :

Puissance dissipée = convertie en chaleur
Aussi appelée « pertes ohmiques »

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$



Densité de puissance dissipée

Densité de puissance dissipée

Pour calculer la puissance dissipée par un conducteur de forme quelconque, il faut définir la densité de puissance dissipée.

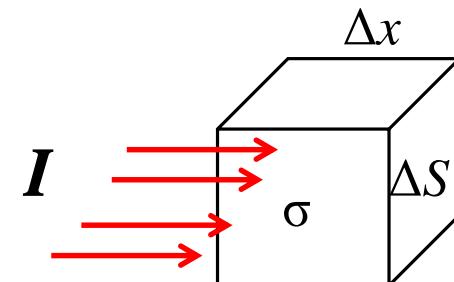
On calcule la puissance dissipée en appliquant la loi d'Ohm à un volume infinitésimal de longueur Δx et de section ΔS traversée par un courant I .

En utilisant le résultat pour la résistance d'un barreau de section constante, la résistance du volume est :

$$R = \frac{L}{\sigma S} \quad \rightarrow \quad R = \frac{\Delta x}{\sigma \Delta S}$$

La densité de puissance p est la puissance par unité de volume ΔV :

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} \frac{V^2 / R}{\Delta x \Delta S} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} V^2 \frac{\sigma \Delta S / \Delta x}{\Delta x \Delta S} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} \sigma \left(\frac{V}{\Delta x} \right)^2$$

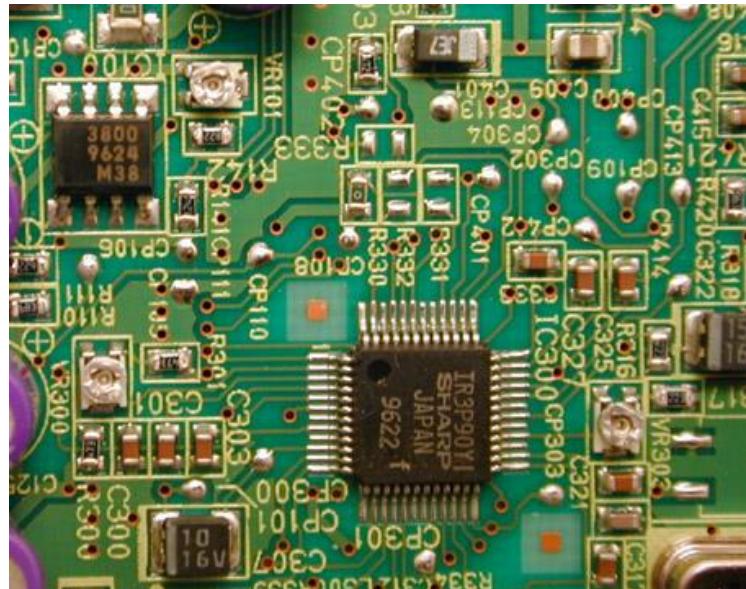


Densité de puissance dissipée

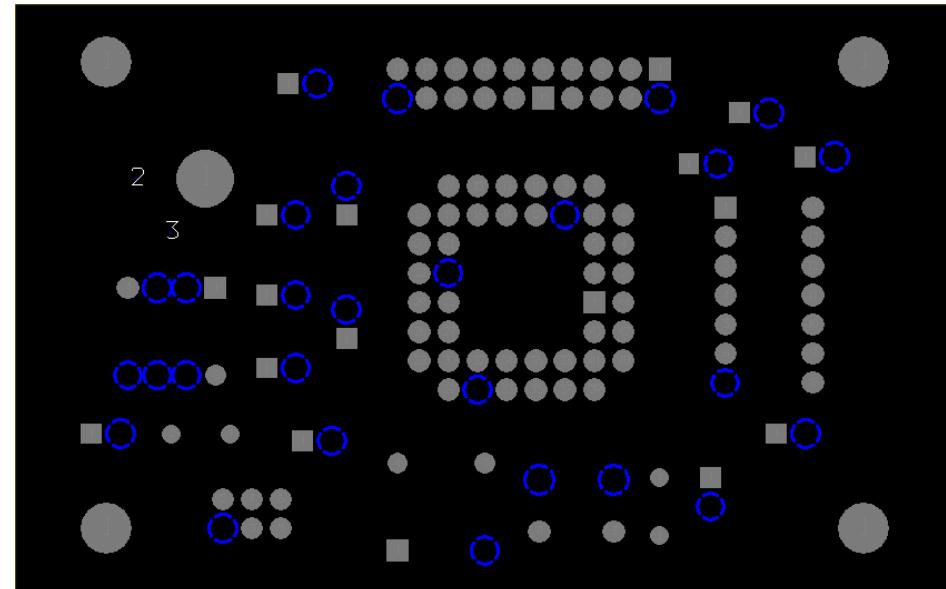
$$p = \sigma E^2$$

en watt/m³
[W/m³]

Exemple – Plan de masse d'un circuit imprimé



Circuit imprimé



Plan de masse
(*ground plane*)

Le plan de masse est une feuille conductrice qui sert de chemin de retour pour le courant circulant à travers les différents composants du circuit imprimé.

Exemple 4.8.2 – Puissance dissipée dans un plan de masse

Quelle est la puissance dissipée dans le plan de masse ?

Trouver la différence de potentiel entre les électrodes,
puis appliquer la loi de Joule.

1. Symétrie pour exprimer $J = I/S$

Dans quelle direction est la densité de courant ?

Chaque électrode est de forme cylindrique (rayon a , épaisseur d). Par symétrie cylindrique, la densité de courant d'une électrode est purement radiale.

En choisissant une surface cylindrique de rayon $\rho > a$ centrée sur une électrode, on a donc :

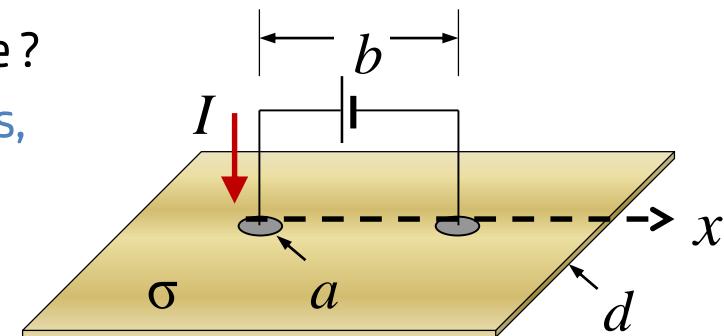
2. Champ électrique produit par les deux électrodes

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma\rho d} \hat{\rho}$$

(pour une seule électrode)



Principe de
superposition
appliqué sur l'axe x



$$a = 0,2 \text{ mm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad d = 0,025 \text{ mm}, \\ \sigma = 6 \times 10^7 \text{ S/m}, \quad I = 0,5 \text{ A}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{\rho} = \frac{I}{2\pi\rho d} \hat{\rho}$$

(pour une seule électrode)

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma d} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right] \hat{x}$$

($x = 0$ sur l'électrode gauche)

Exemple 4.8.2 – Puissance dissipée dans un plan de masse

Quelle est la puissance dissipée dans le plan de masse ?

Trouver la différence de potentiel entre les électrodes,
puis appliquer la loi de Joule.

3. Différence de potentiel entre les électrodes

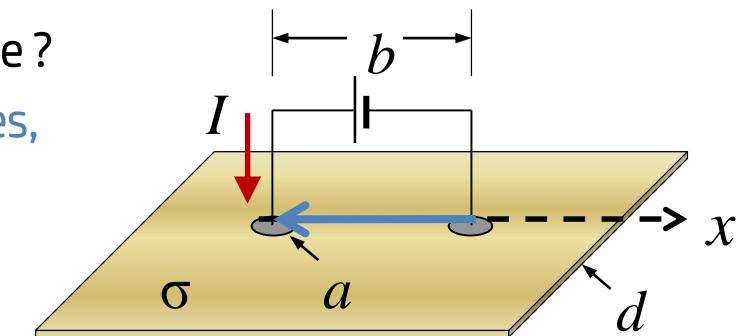
On intègre $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ en suivant l'axe des x , en
allant de $x = b - a$ à $x = a$.

$$V = - \int_{b-a}^a \frac{I}{2\pi\sigma d} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) \hat{x} \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z})$$

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma d} \int_a^{b-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) dx = \frac{I}{2\pi\sigma d} [\ln(x) - \ln(b-x)]_a^{b-a} = \frac{I}{\pi\sigma d} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right)$$

4. Puissance dissipée

$$P = VI = \frac{I^2}{\pi\sigma d} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) \approx 0,3 \text{ mW}$$



$$a = 0,2 \text{ mm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad d = 0,025 \text{ mm}, \\ \sigma = 6 \times 10^7 \text{ S/m}, \quad I = 0,5 \text{ A}$$

Où la densité de puissance dissipée est-elle la plus élevée ?

$$p = \sigma E^2 = \sigma \left(\frac{I}{2\pi\sigma d} \right)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right)^2$$

Maximum de p à $x = a$ et à $x = b - a$.

Effet de la température sur la résistivité des métaux

La puissance dissipée dans un métal (conducteur) dépend de sa résistance R , qui est elle-même proportionnelle à la résistivité ρ du métal.

Nous avons vu que la **résistivité** est due aux **collisions** entre les **porteurs de charge** et les **atomes du cristal**. Plus précisément, elle est causée par :

- La diffusion par les **défauts** dans le réseau cristallin ;
- La diffusion par les **vibrations thermiques** des atomes ;

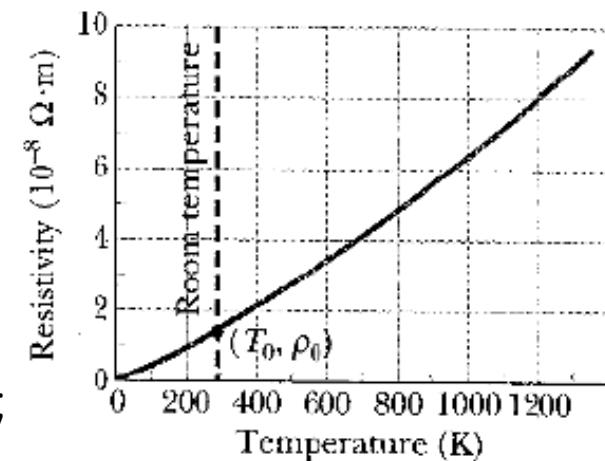
En réalité, la résistivité **dépend de la température** : elle augmente avec celle-ci.

Relation empirique pour la résistivité des métaux en fonction de la température

$$\rho^*(T) = \rho_0^*(1 + \alpha T + \beta T^2) \approx \rho_0^*(1 + \alpha T)$$

La relation empirique est quadratique, mais une relation linéaire est souvent suffisante ($\beta \approx 0$).

Résistivité du cuivre en fonction de la température



ρ_0^* : résistivité à $T = 0^\circ\text{C}$

Empirique : établie à partir d'observations expérimentales

Effet de la température sur la résistivité des métaux

$$\rho^*(T) = \rho_0^*(1 + \alpha T + \beta T^2) \approx \rho_0^*(1 + \alpha T)$$

ρ_0^* : résistivité à $T = 0^\circ\text{C}$

Matériaux	Conductivité σ ($\Omega^{-1}m^{-1}$)	Coefficient thermique de résistivité α (deg^{-1})
Argent	$6,14 \times 10^7$	4×10^{-3}
Cuivre	$5,8 \times 10^7$	4×10^{-3}
Platine	$1,0 \times 10^7$	4×10^{-3}
Fer (99,98%)	$1,0 \times 10^7$	5×10^{-3}
Plomb	$4,5 \times 10^7$	4×10^{-3}
Aluminium	$3,54 \times 10^7$	4×10^{-3}
Nichrome	$0,1 \times 10^7$	4×10^{-3}
Constantan	$0,2 \times 10^7$	$0,01 \times 10^{-3}$

Effet de la température sur les réseaux électriques

Période de pointe pour les réseaux électriques :

- au Québec, durant les journées les plus froides de l'**hiver** à cause du chauffage ;
- en Floride, durant les journées les plus chaudes de l'**été** à cause de la climatisation.

Pour une même quantité d'énergie électrique à transporter en période de pointe, les pertes ohmiques seront-elles plus élevées au Québec ou en Floride ?

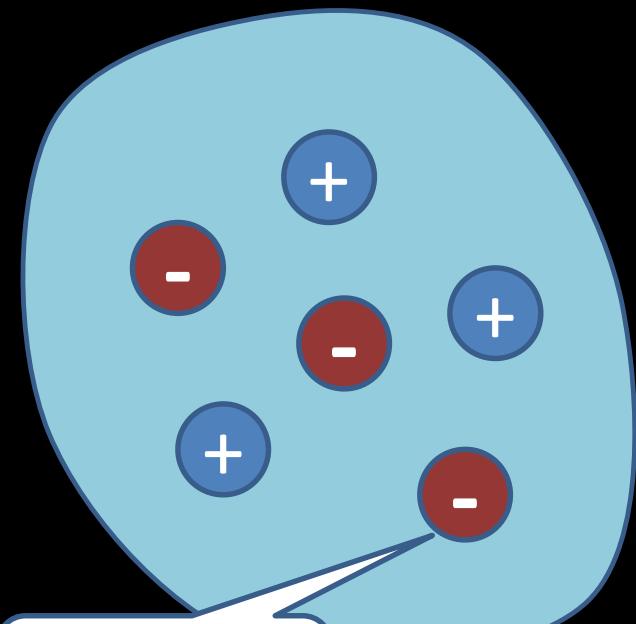
En supposant un écart de $+60\text{ }^{\circ}\text{C}$ entre la Floride et le Québec, la résistivité des conducteurs en aluminium augmente de $60 \cdot (4 \times 10^{-3}) = 0,24 = 24\text{ \%}$. Puisque $P = RI^2$, les pertes ohmiques augmentent donc également de 24 %.

La puissance en période de pointe étant très coûteuse, le froid hivernal permet de minimiser les coûts de transport.



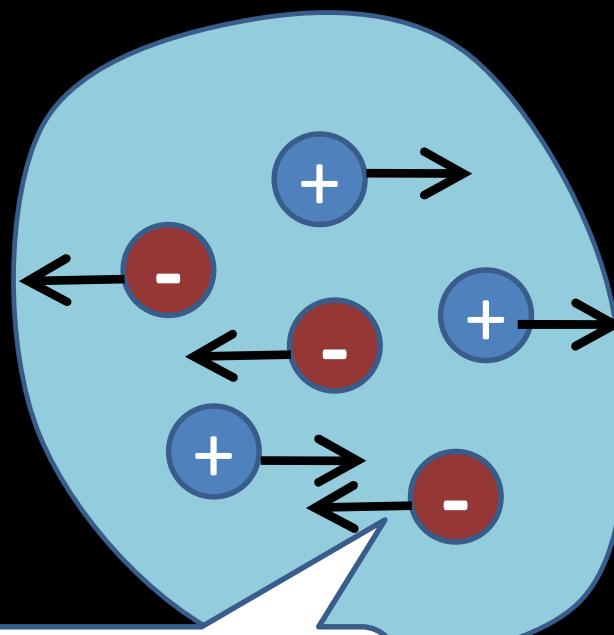
Milieu conducteur: porteurs de charge

CHAMP ÉLECTRIQUE
APPLIQUÉ NUL



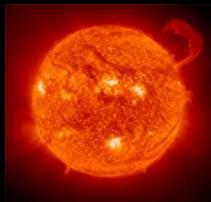
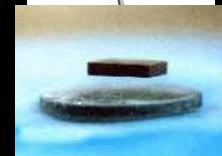
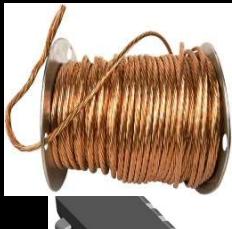
porteurs
de charge

CHAMP ÉLECTRIQUE
APPLIQUÉ



déplacement
des porteurs de
charge

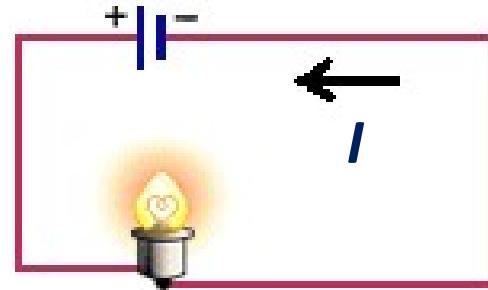
Matériaux conducteurs



milieu	matériau	porteurs de charge
solide	<ul style="list-style-type: none">• métal• semiconducteur• supraconducteur	<ul style="list-style-type: none">• électrons-• électrons- et trous +• paire d'électrons - -
liquide	<ul style="list-style-type: none">• électrolyte	<ul style="list-style-type: none">• ions + et – <p><i>par exemple: Na^+ et Cl^-</i></p>
gaz	<ul style="list-style-type: none">• plasma (chaud ou froid)	<ul style="list-style-type: none">• ions + et –

Courant

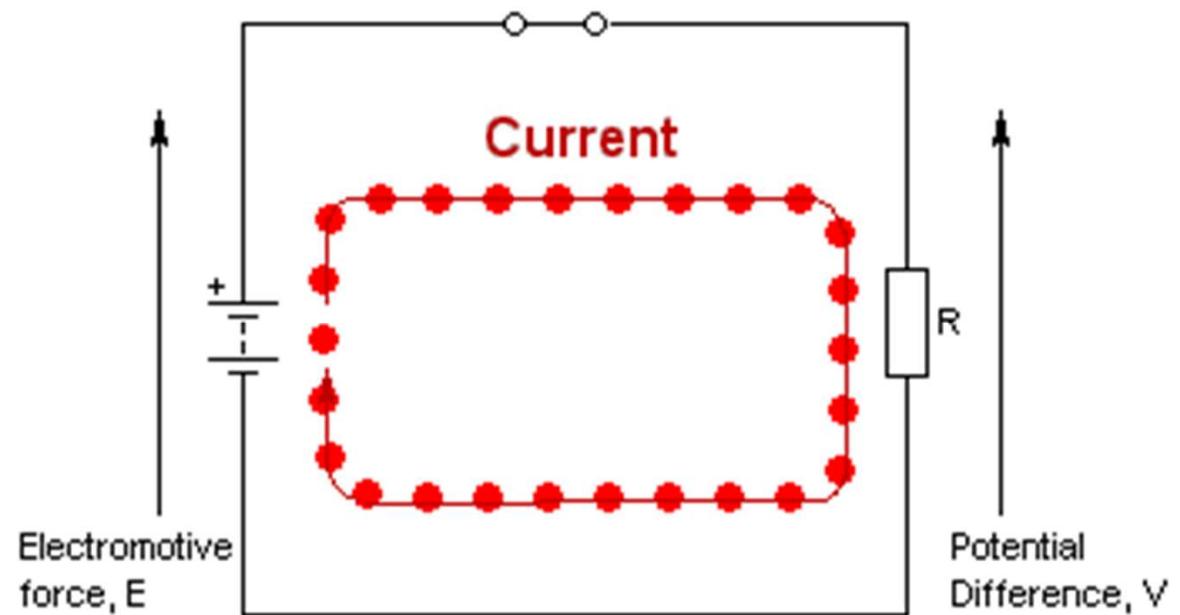
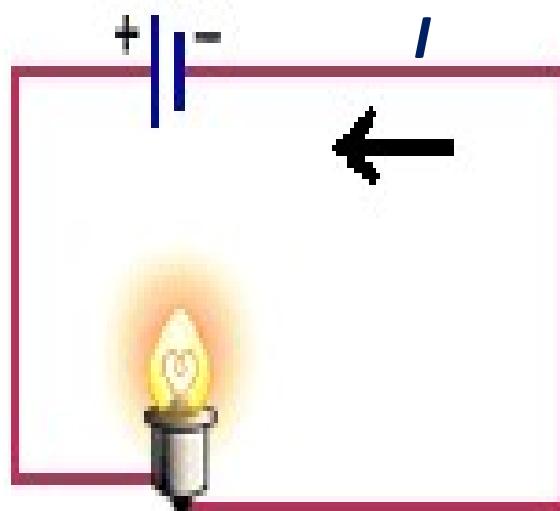
$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$



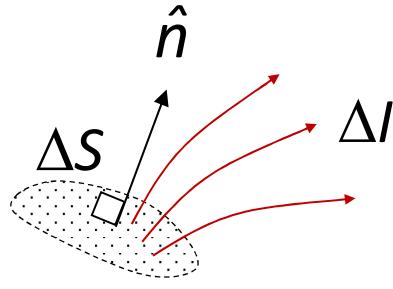
- Le courant I est égal à la quantité de charges Q qui traverse une frontière par unité de temps
- L'unité du courant est l'ampère ($A = C/s$)
- Le courant I est une grandeur scalaire qui peut prendre des valeurs positives ou négatives
- Par convention, la direction des porteurs de charge positive définit la direction du courant I positif
- Le courant est également *positif si une charge négative se déplace dans le sens négatif*

Courant

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

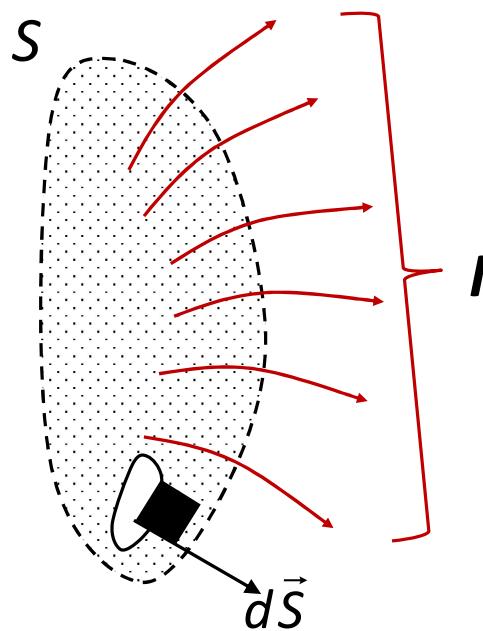


Densité de courant dans un volume conducteur



La densité de courant (A/m^2) est un champ vectoriel défini par:

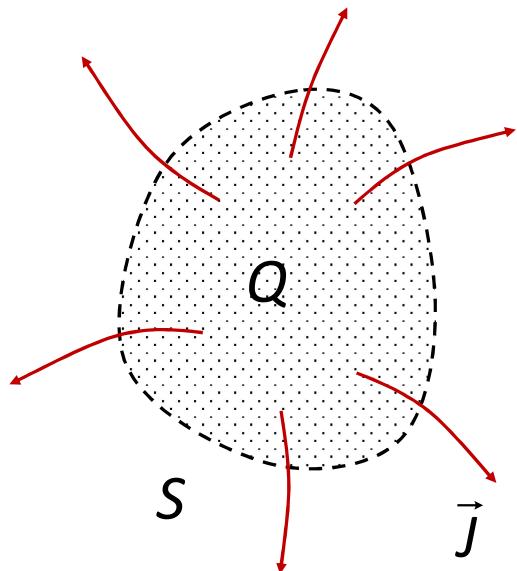
$$\vec{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{n}$$



Le courant I , qui traverse une surface S quelconque peut être calculé par:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Continuité du courant



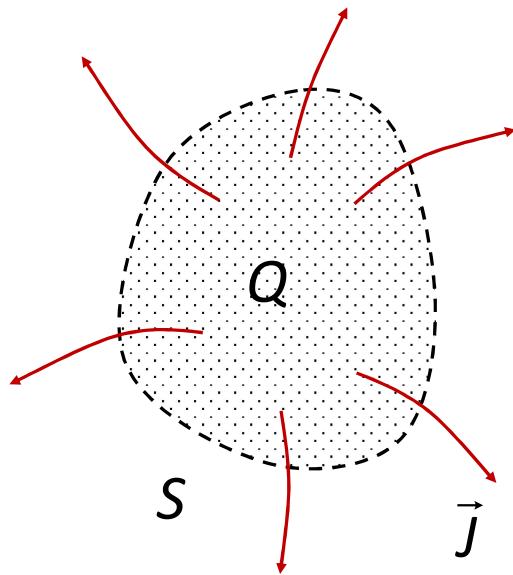
Pour une surface fermée S , le courant sortant de S est égal à la perte des charges Q contenues dans S :

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

Pour un courant stationnaire (constant):

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0}$$

Continuité du courant



Pour un courant stationnaire (constant):

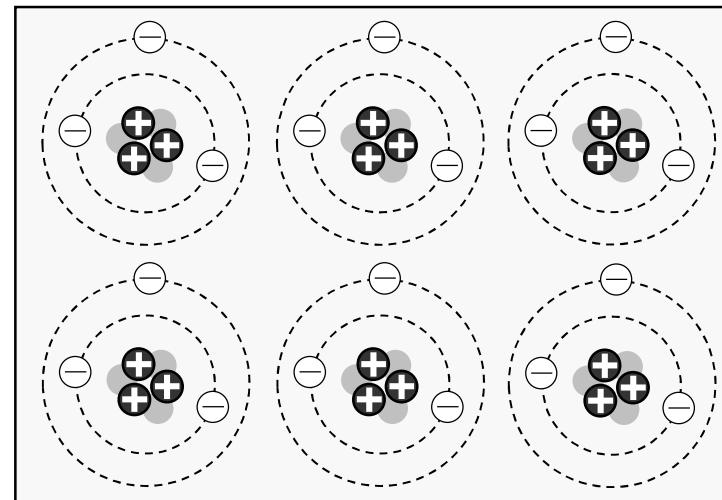
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Continuité d'un courant stationnaire

Bloc de 6 atomes de lithium

$$Q_{total} = 18 \text{ protons} - 18 \text{ électrons} = 0$$

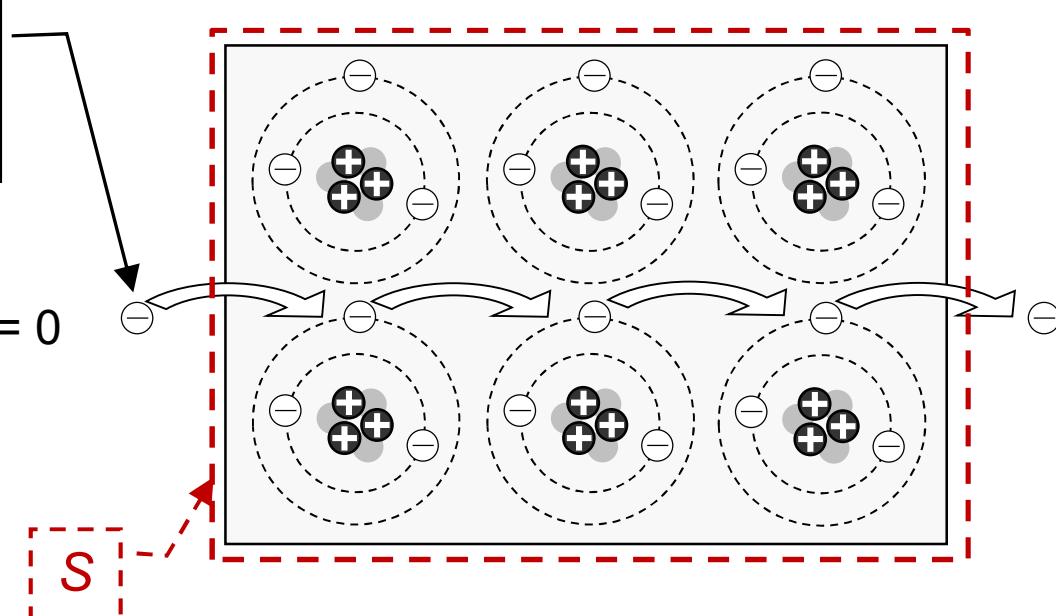
$$\rho_v = 0$$



arrivée et sortie d'électrons
dans le bloc qui est placé
dans un circuit

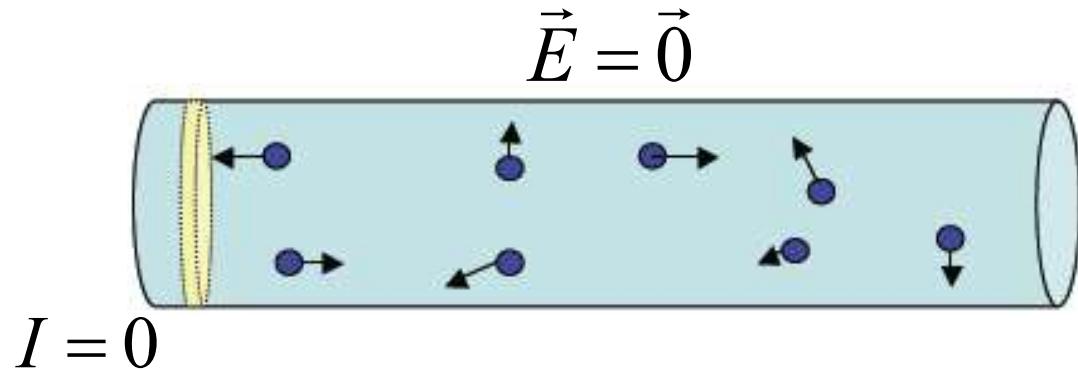
$$Q_{total} = 18 \text{ protons} - 18 \text{ électrons} = 0$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

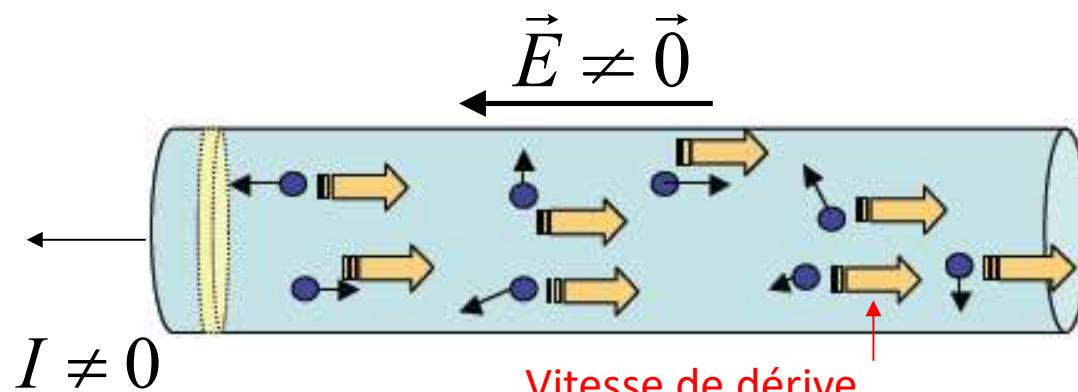


Mécanisme de la conduction : la mobilité

Conducteur métallique : « gaz » d'électrons libres



$$I = 0$$



$$I \neq 0$$

Mobilité des charges
 γ dans un matériau :

$$\vec{v} = \gamma \vec{E} \Sigma$$

$$[m \cdot C/s \cdot N = S \cdot m^2/C]$$

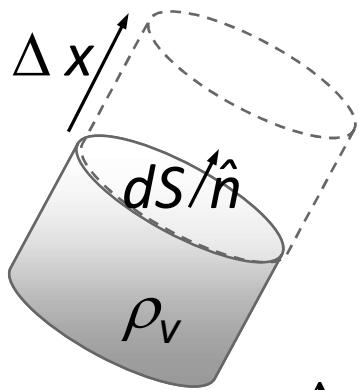
Agitation thermique: vitesse résultant en mouvement aléatoire

$$v_F = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}} \approx 10^5 \text{ m/s}$$

Application champ électrique: électrons ralentis et (sens opposé) accélérés.

Résultat: mouvement collectif dirigé sens opposé au champ avec vitesse de dérive non nulle (effet statistique).

Conductivité σ



Élément de volume,
charges $\Delta q = \rho_v \Delta S \Delta x$ se déplacent de
distance Δx en Δt , produisent courant ΔI

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\vec{J} = \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{n} = \rho_v \vec{v} = \rho_v \gamma \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

$\rho_v \gamma = \sigma$ dépend du matériau

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

conductivité, siemens/m ou 1/(ohm-m)

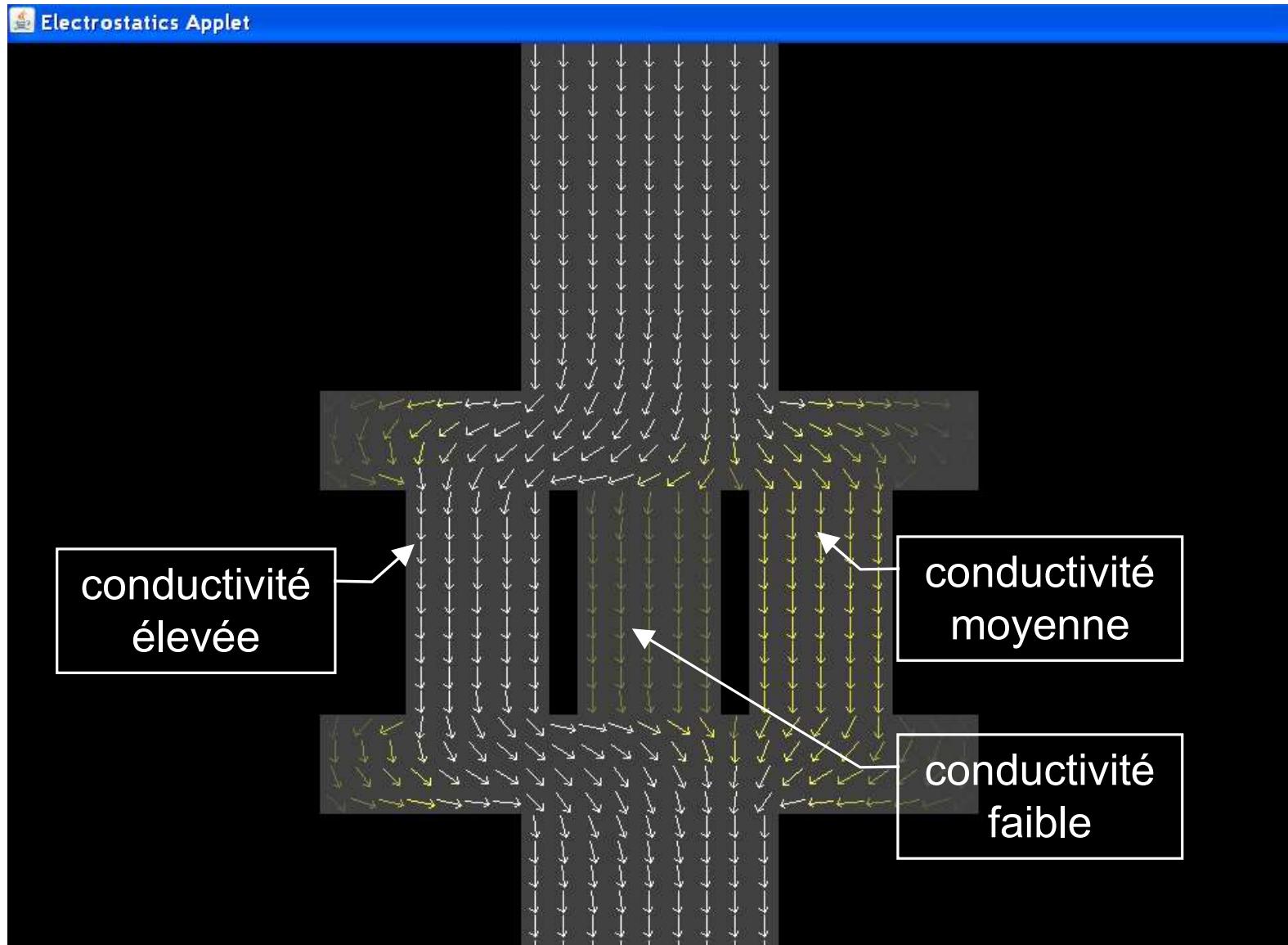
Conductivité σ

Matériaux	Conductivité ($\Omega^{-1}m^{-1}$)	Matériaux	Conductivité ($\Omega^{-1}m^{-1}$)
Quartz	$\approx 10^{-17}$	Eau de mer	≈ 4
Polystyrène	$\approx 10^{-16}$	Silicium	10^3
Mica	$\approx 10^{-15}$	Graphite	$\approx 10^5$
Verre	$\approx 10^{-14}$	Mercure	10^6
Eau distillée	$\approx 10^{-4}$	Tungstène	$1,8 \times 10^7$
Muscle	$\approx 0,35$	Or	$4,1 \times 10^7$

(Note: la résistivité ρ est l'inverse de la conductivité, soit: $\rho = 1/\sigma$)

Effet de la conductivité

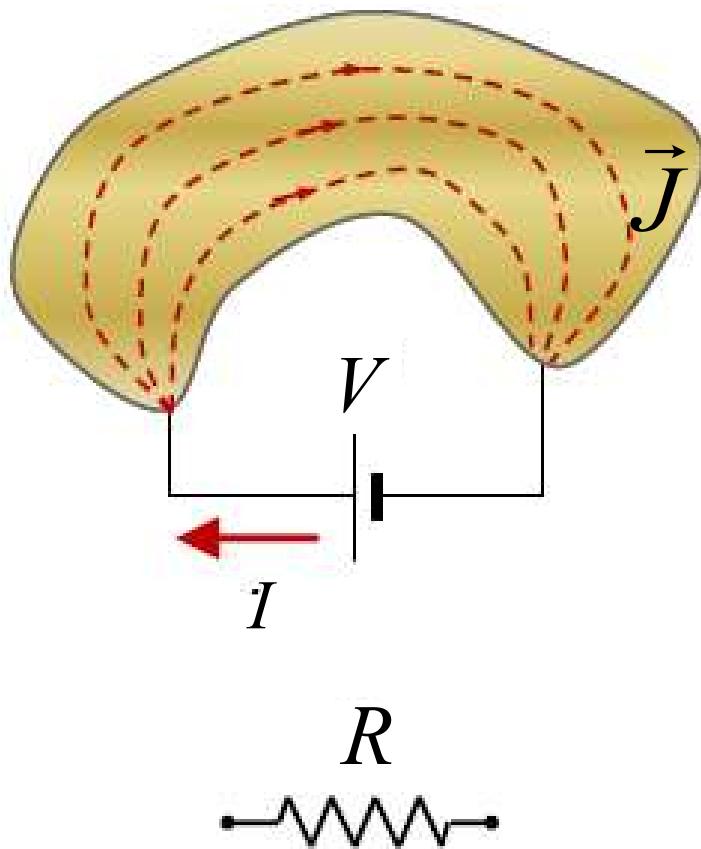
Applet: Chap 1-6 Electrostatics 2D: setup resistors in parallel



Loi d'Ohm

Soit un conducteur (géom. arbit.). Source maintient différence de potentiel V entre 2 bornes appliquées sur l'objet permet d'y injecter un courant I .

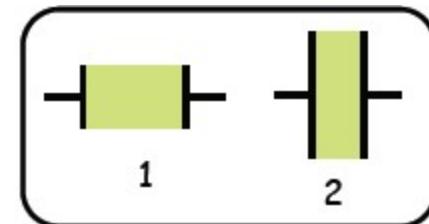
Relation entre V et I donnée par Loi d' Ohm :



$$\Sigma \boxed{V = RI}$$

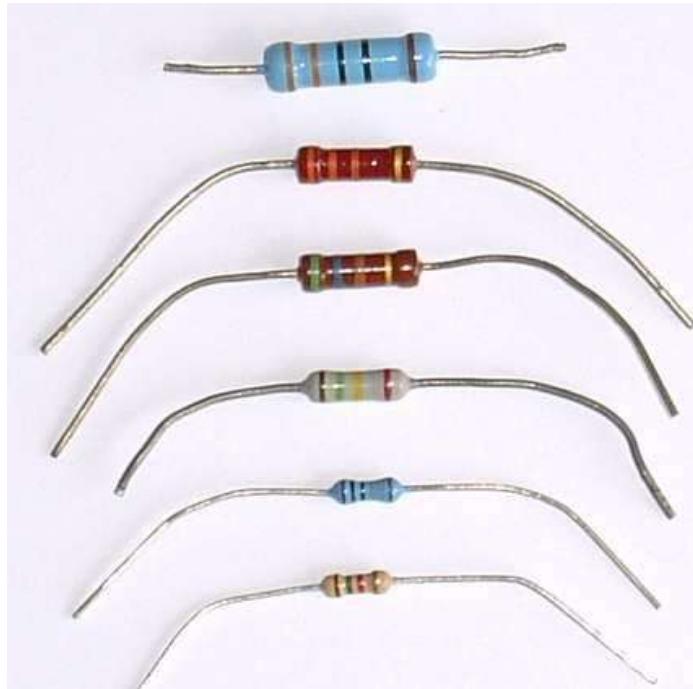
Résistance $R = \frac{V}{I}$ [V/A = Ω] dépend de :

- conductivité de l'objet
- géométrie de l'objet
- position des bornes source sur l'objet



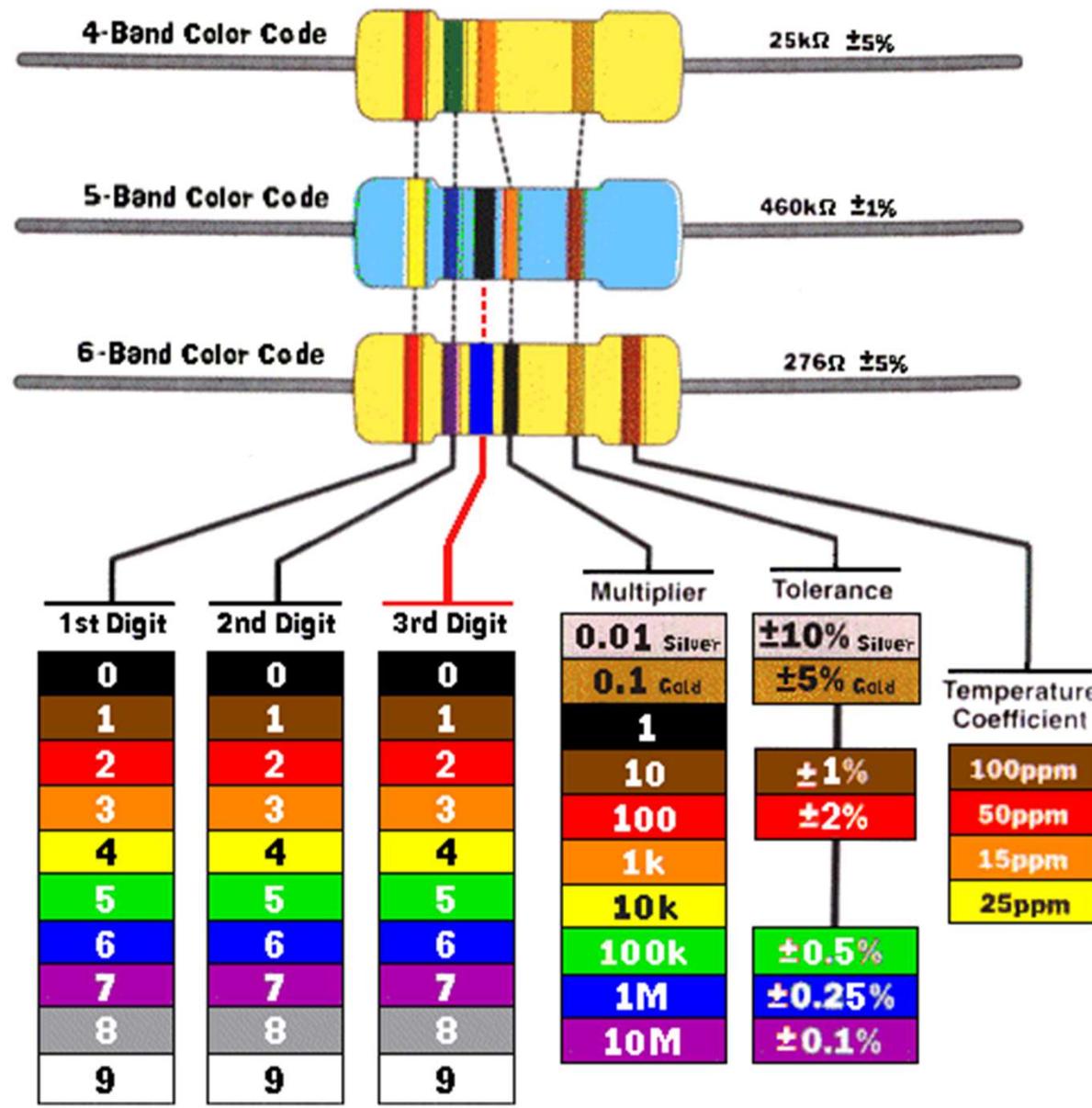
Gregor Simon Ohm
(1789-1854)

Exemples de résistances

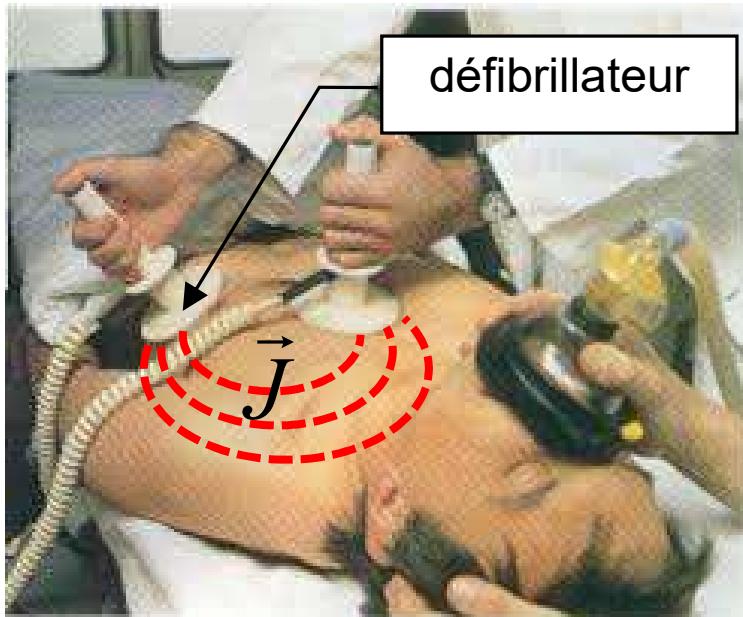


résistances variables
(potentiomètres)

Code de couleur des résistances



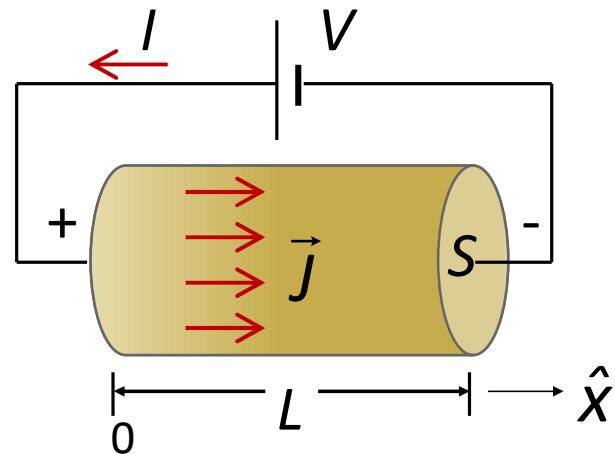
Résistance des volumes conducteurs



Pour calculer R , on trouve:

1. $J = I / S$
2. $E = J/\sigma$
3. $V = - \int E \cdot dI$
4. $R = V / I$

Résistance: conducteur à section uniforme



Pour calculer R , on trouve:

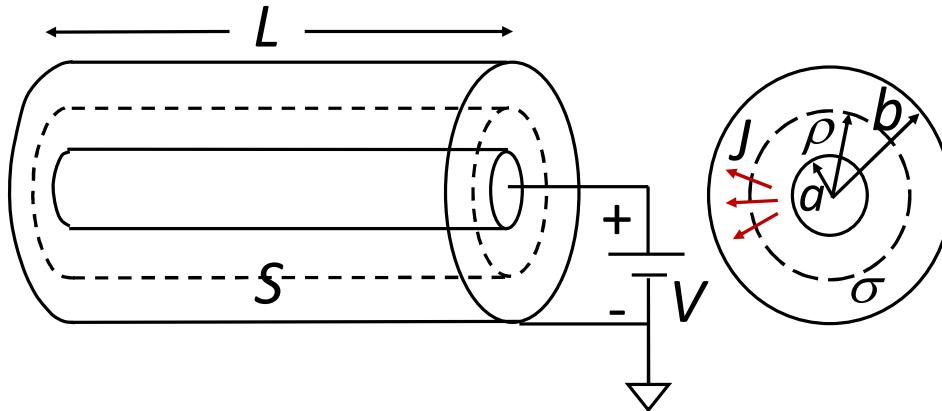
1. $J = I / S$
2. $E = J/\sigma$
3. $V = - \int E \cdot dI$
4. $R = V / I$

On remarque:

- Si double longueur L (2 résistances identiques en série), résistance double.
- Si double section S (2 résistances identiques en parallèle), résistance diminuée de moitié.

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L}{\sigma S}$$

Résistance de fuite d'un câble coaxial



Dans quelle direction est le courant ?

radial

Quel système de coordonnées utiliser ?

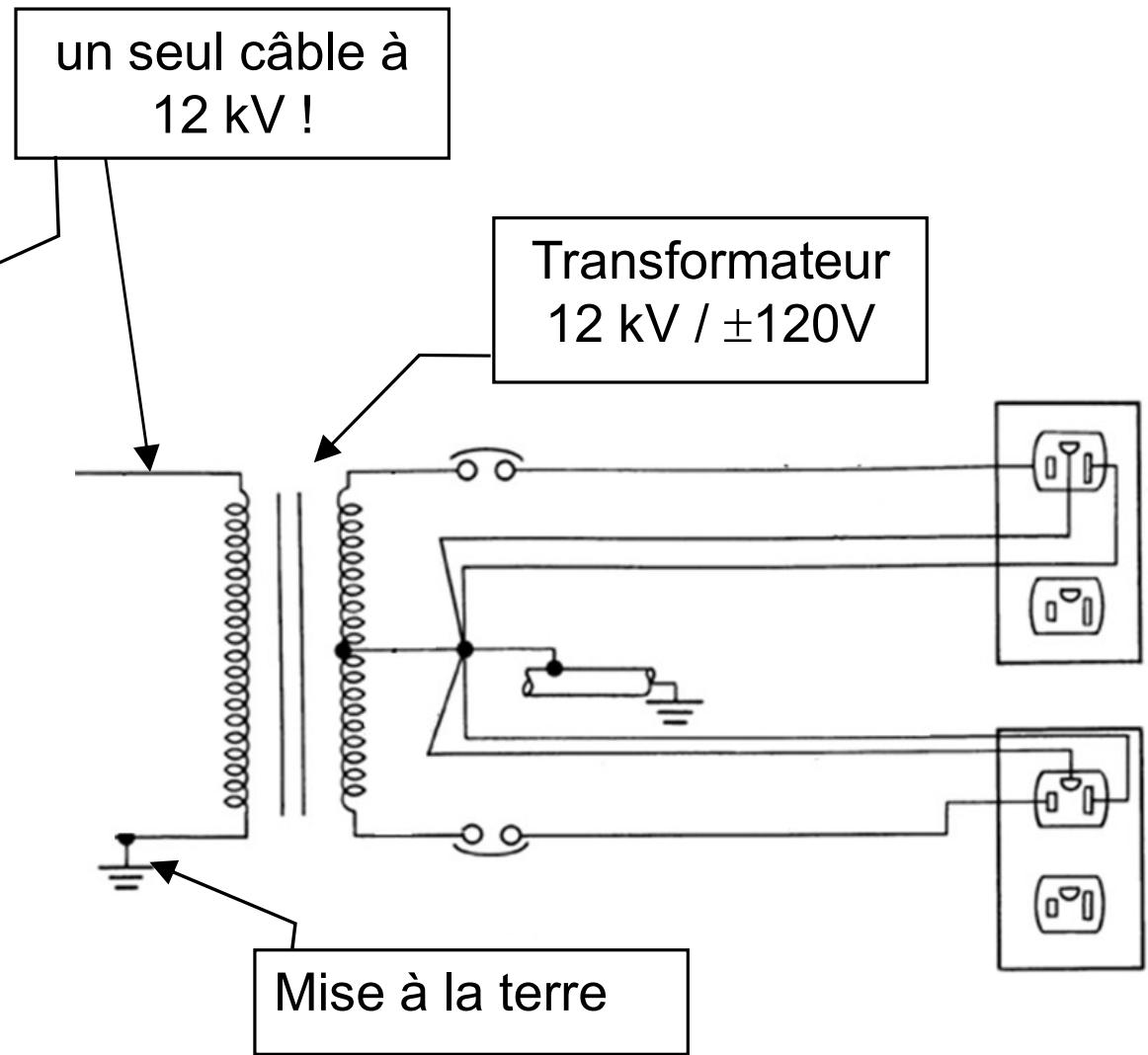
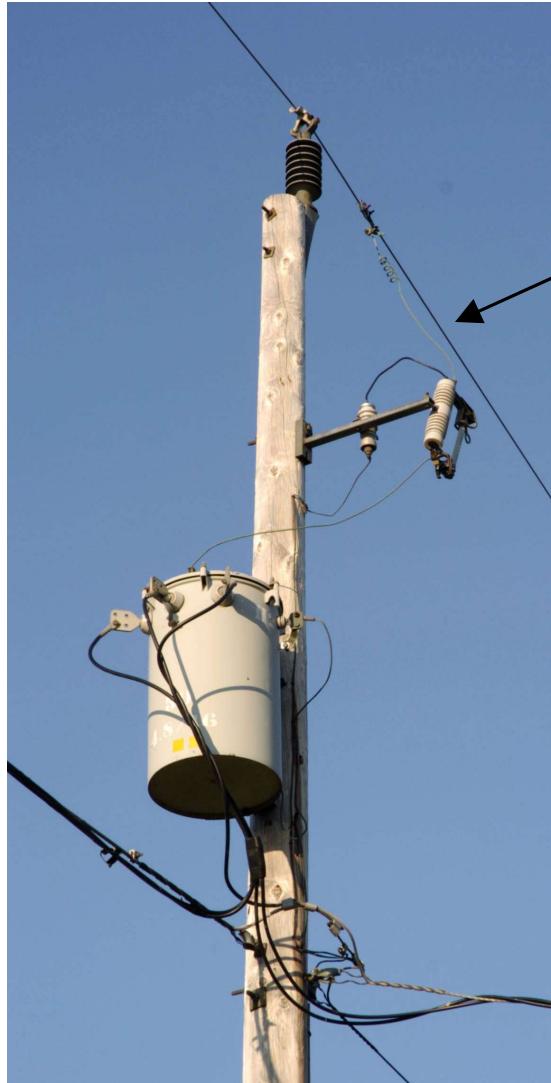
cylindriques

Quelle est S ? $2\pi\rho L$

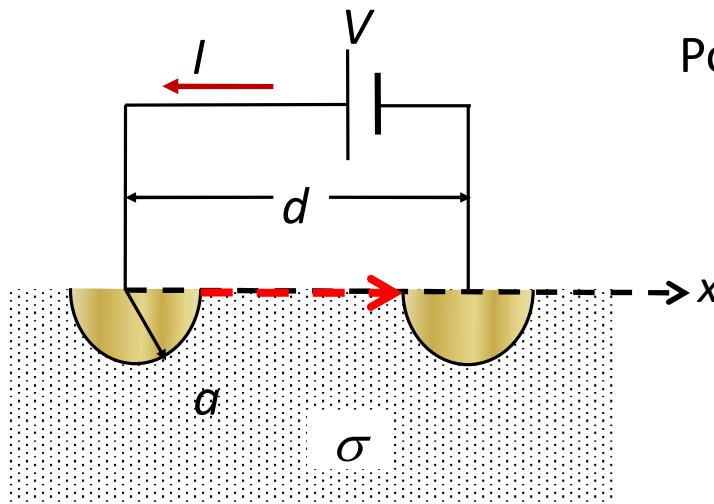
Pour calculer R , on trouve:

1. $J = I / S$
2. $E = J / \sigma$
3. $V = - \int E \cdot dI$
4. $R = V / I$

Retour du courant par le sol



Résistance de retour par le sol



Pour une seule électrode :

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{r}$$

Dans quelle direction est le courant ?

Quelle est S ?

radial

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{r} = \frac{I}{\left(\frac{4\pi r^2}{2}\right)} \hat{r} = \frac{I}{2\pi r^2} \hat{r}$$

Calculons \vec{E} pour trouver V

Quel est \vec{E} pour la 2^e électrode ?

Quel parcours pourrions-nous utiliser ?

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{(d-x)^2} \hat{x}$$

$$\hat{r} \rightarrow \hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{x^2} \hat{x}$$

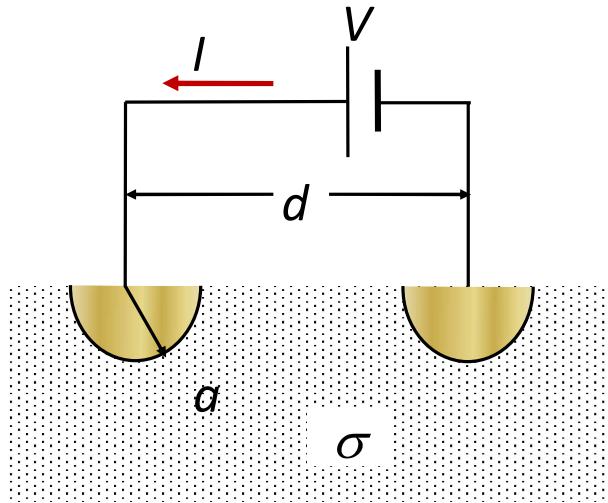
Pour calculer R , on trouve:

1. $J = I / S$
2. $E = J/\sigma$
3. $V = - \int E \cdot dI$
4. $R = V / I$

Pour deux électrodes, par superposition :

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \hat{x}$$

Résistance de retour par le sol



Pour deux électrodes, par superposition :

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right) \hat{x}$$

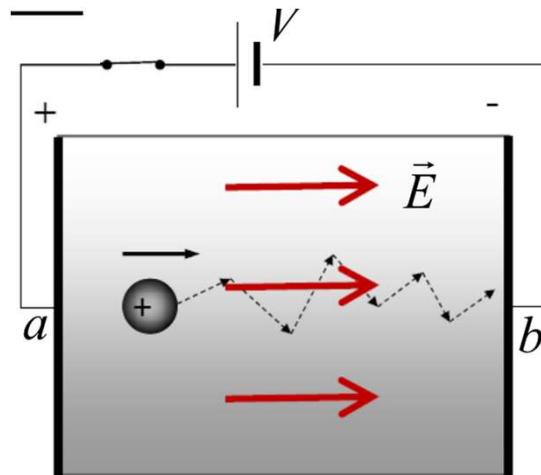
$$V = - \int_{d-a}^a \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right) dx = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(d-x)} \right) \right]_{d-a}^a$$

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(d-a)} - \frac{1}{(d-a)} + \frac{1}{a} \right] = \frac{I}{\pi\sigma} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(d-a)} \right] \approx \frac{I}{\pi\sigma a}$$

On remarque que: R ne dépend pas de d !

$$R = \frac{V}{I} \approx \frac{1}{\pi\sigma a}$$

Puissance dissipée



$$U = QV$$

$$\text{c/s} \quad \Delta W = \overset{*}{(I \Delta t)} V^s$$

énergie pour Q après
avoir parcouru L

énergie pour I

$$P = \Delta W / \Delta t = I V$$

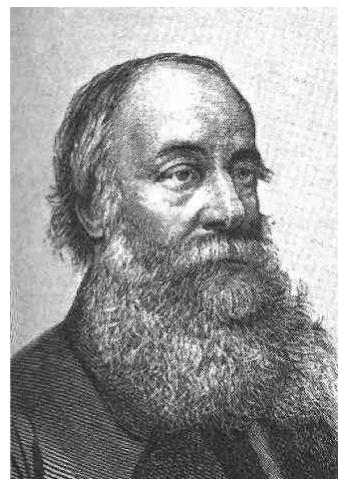
puissance pour I

$$P = I V$$

loi de Joule
watt (W)

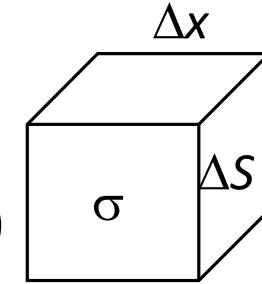
$$P = \frac{V^2}{R} = R I^2$$

puissance pour R



Densité de puissance dissipée

Loi de Joule appliquée à élément de volume différentiel, $\Delta x \Delta S$, de conductivité σ et résistance $R = \Delta x / (\Delta S \sigma)$ pour calculer densité de puissance dissipée p (W/m³) en un point :

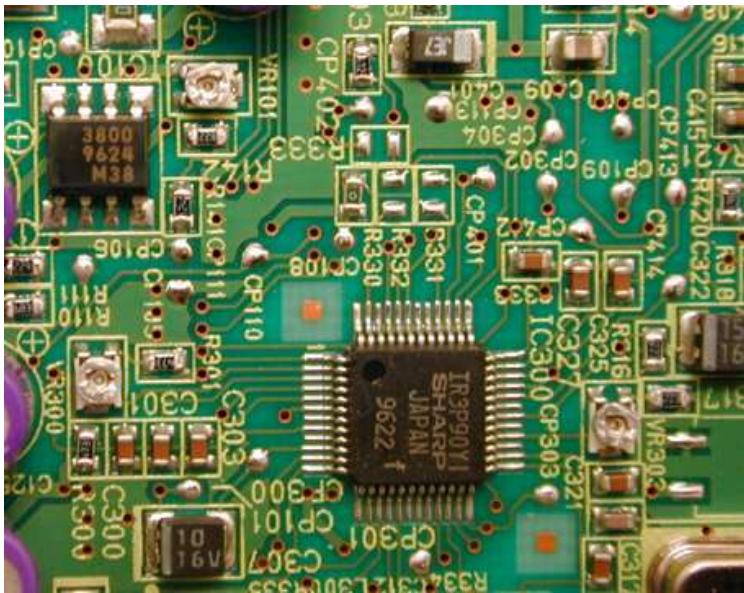


$$p = \frac{P}{\Delta x \Delta S} = \frac{\left(\frac{V^2}{R}\right)}{\Delta x \Delta S} = V^2 \frac{\left(\frac{\sigma \Delta S}{\Delta x}\right)}{\Delta x \Delta S} = \sigma \left(\frac{V}{\Delta x}\right)^2 = \sigma E^2$$

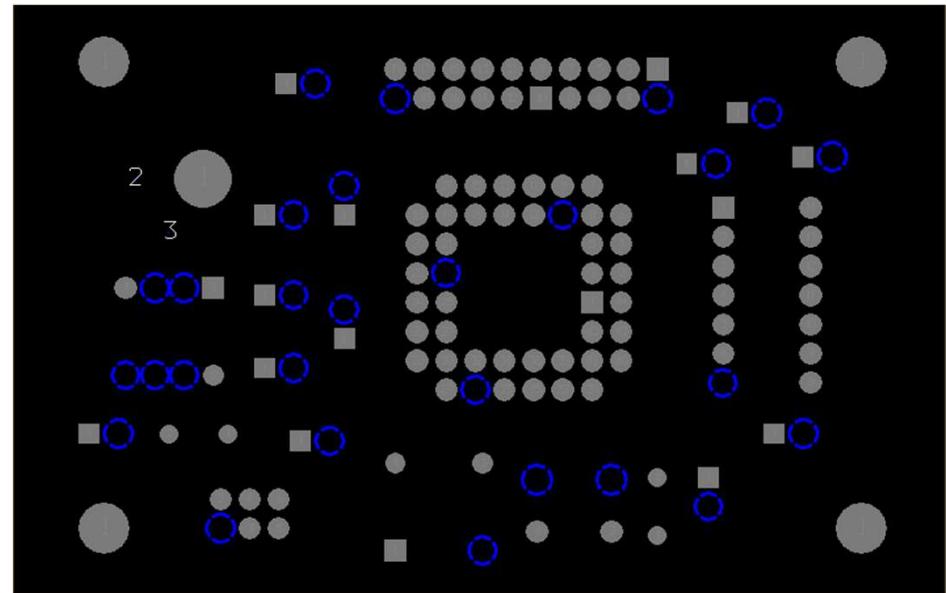
$$p = \sigma E^2$$

densité de puissance (W/m³)

Plan de masse d'un circuit imprimé

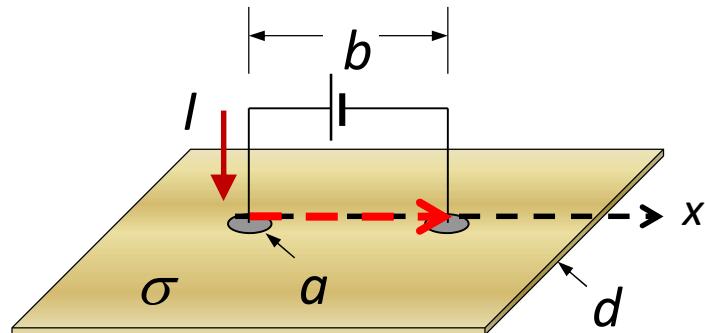


circuit imprimé



plan de masse
(*ground plane*)

Puissance dissipée dans un plan de masse d'un circuit imprimé



$$a = 0,2 \text{ mm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad d = 0,025 \text{ mm}, \\ \sigma = 6 \times 10^7 \text{ S/m}, \quad I = 0,5 \text{ A}$$

Pour calculer P , on trouve:

1. $J = I / S$
2. $E = J/\sigma$
3. $V = - \int E \cdot d l$
4. $R = V / I$
5. $P = VI$
6. $p = \sigma E^2$

Résistance dans les métaux

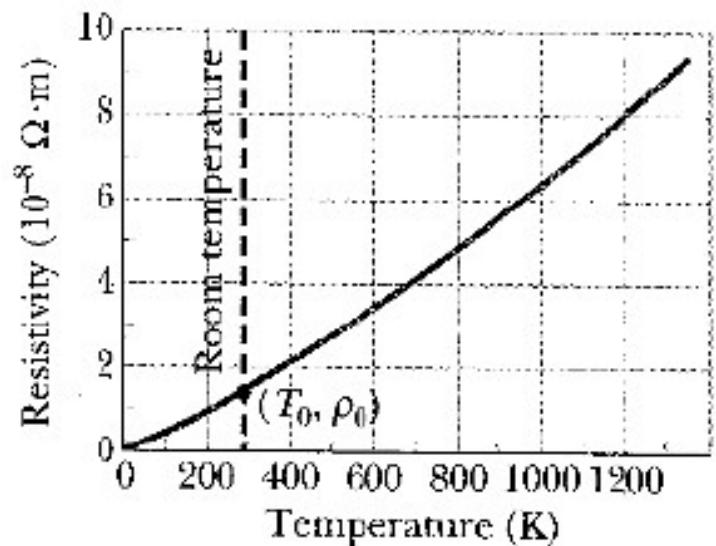
La résistance est due à la :

- diffusion par les défauts dans le réseau cristallin
- diffusion par les vibrations thermiques des atomes

Donc, la résistance augmente avec la température :

- $\rho^*(T)$ est une relation quadratique empirique
- Pour la plupart des matériaux, une relation linéaire est suffisante.

Cuivre



$$\rho^*(T) = \rho_0^*(1 + \alpha T + \beta T^2) \approx \rho_0^*(1 + \alpha T)$$

Effet de la température

Pour les métaux, la relation entre la résistivité ρ^* et la température T (en °C) s'exprime selon une loi empirique :

$$\rho^*(T) = \rho_0 * (1 + \alpha T + \beta T^2)$$

où α et β sont les coefficients thermiques linéaires et quadratiques de résistivité et ρ_0^* est la résistivité à 0°C.

Pour la plupart des métaux, $\beta \approx 0$

Matériau	Conductivité σ ($\Omega^{-1}m^{-1}$)	Coefficient thermique de résistivité α (deg $^{-1}$)
Argent	$6,14 \times 10^7$	4×10^{-3}
Cuivre	$5,8 \times 10^7$	4×10^{-3}
Platine	$1,0 \times 10^7$	4×10^{-3}
Fer (99,98%)	$1,0 \times 10^7$	5×10^{-3}
Plomb	$4,5 \times 10^7$	4×10^{-3}
Aluminium	$3,54 \times 10^7$	4×10^{-3}
Nichrome	$0,1 \times 10^7$	4×10^{-3}
Constantan	$0,2 \times 10^7$	$0,01 \times 10^{-3}$

Effet de la température sur le réseau électrique

Période de pointe pour les réseaux électriques:

- *au Québec, durant les journées les plus froides de l'hiver à cause du chauffage*
- *en Floride, durant les journées les plus chaudes de l'été à cause de la climatisation*

Pour un écart de +60°C, la résistance dans les conducteurs d'aluminium du réseau de transport augmente de 60×0.004 , soit un facteur 0,24 (+24%)

Les pertes ohmiques dans le réseau de transport (RI^2 , soit environ 2-4% de la puissance produite) augmentent donc de 24%

La puissance de pointe étant très couteuse, le froid hivernal permet de la minimiser

Rappel : Application de Gauss pour calculer D

Par symétrie, trouver une surface d'intégration S telle que:

1. D est parallèle à dS ou D est perpendiculaire à dS
2. D est constant

Ensuite, intégrer :

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = D \oint_S ds = Q_{in}$$

pour obtenir $D = Q_{in}/S$

Analogie pour calculer J

Par symétrie, trouver une surface d'intégration S telle que:

1. J est parallèle à dS
2. J est constant

Ensuite, intégrer : $\int_S \vec{J} \bullet d\vec{S} = J \int_S dS = I$

pour obtenir $J = I/S$

Rappel : Les trois surfaces de Gauss

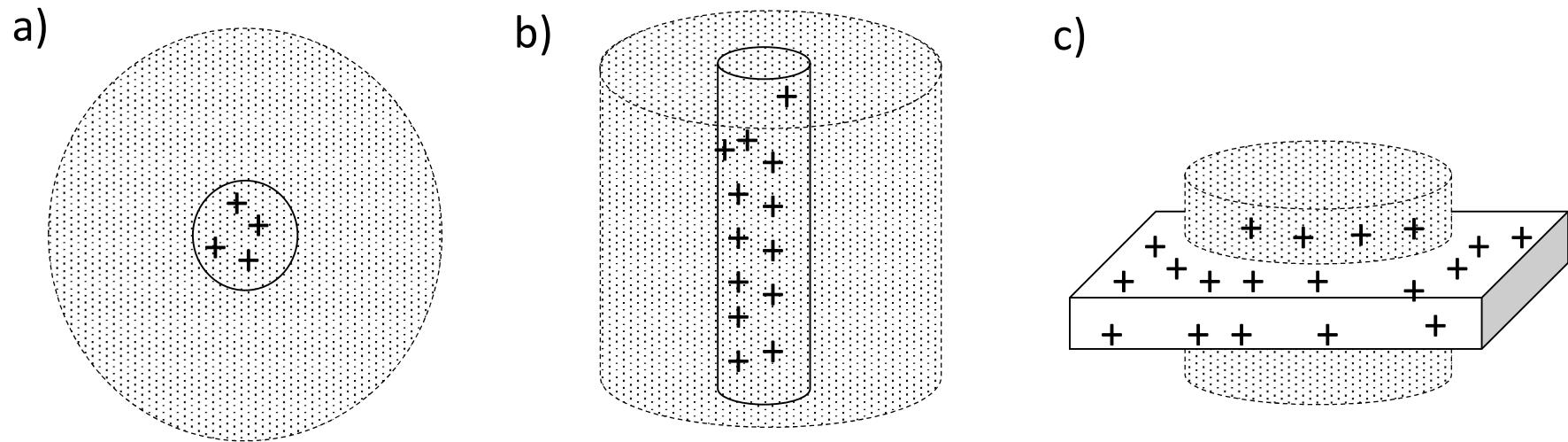


Figure 1.16 Les trois surfaces de Gauss symétriques: a) sphère; b) cylindre; c) boîte à pilules.

Surfaces pour J

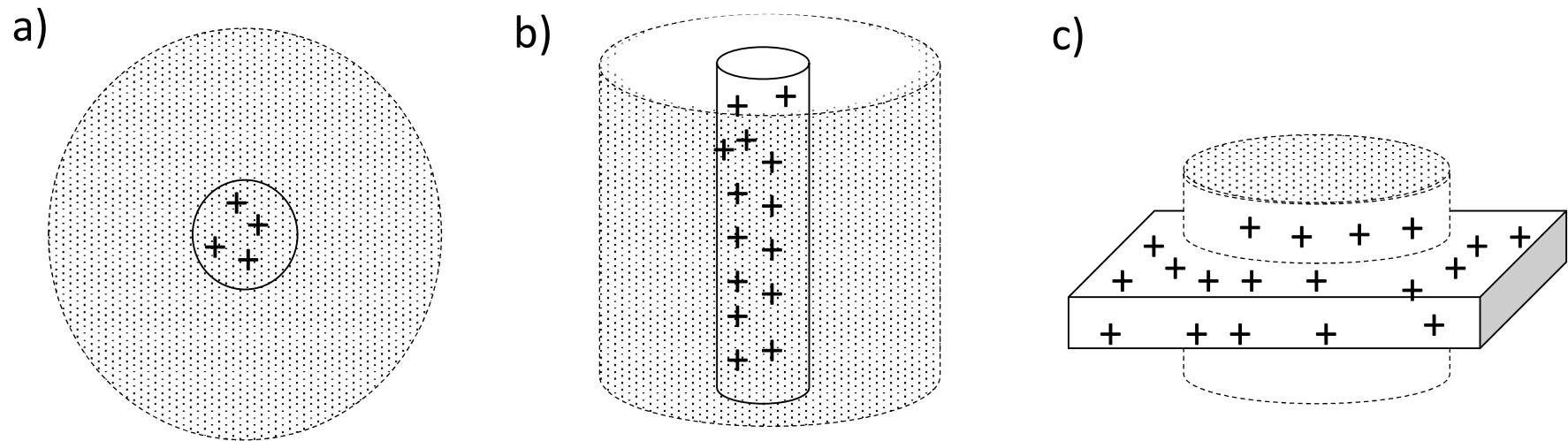
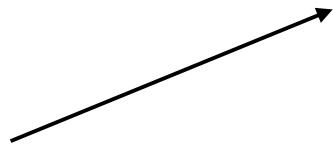
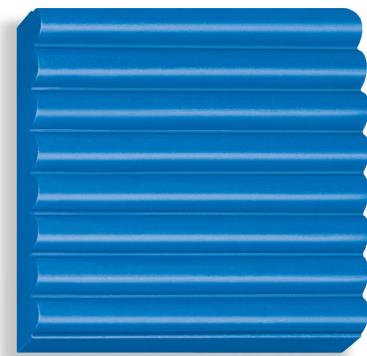


Figure 1.16 a) sphère; b) cylindre; c) boîte à pilules.



Un volume fixe de pâtes à modeler peut faire un cylindre plus **épais**, ou un cylindre plus mince et **deux fois** plus long.





Un volume fixe de pâtes à modeler peut faire un cylindre plus **épais**, ou un cylindre plus mince et **deux fois** plus long.

$$A_1$$



$$L_1$$

$$R_1$$

$$L_2 = 2 L_1$$

$$A_2 = 0,5 A_1$$

$$R_2$$



Trouvez le rapport correct entre les deux résistances, sachant qu'elles ont le **même volume**!

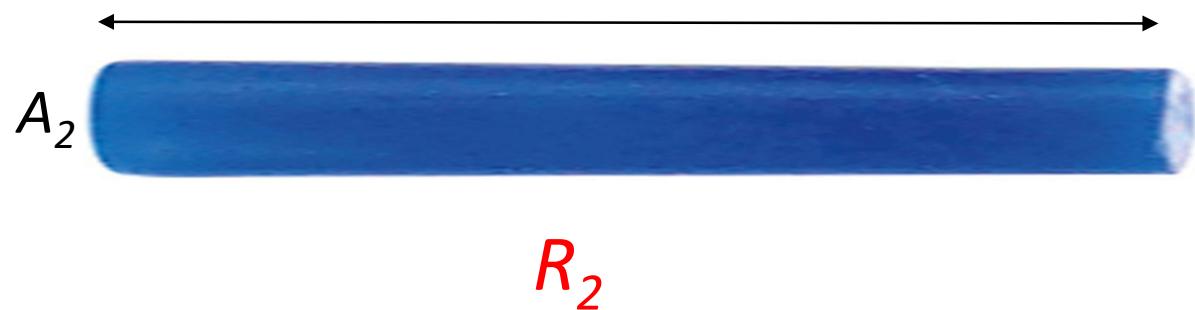
$$R_1 / R_2 = ?$$

- A. 1
- B. 2
- C. $\frac{1}{2}$
- D. 4
- E. $\frac{1}{4}$
- F. Aucune de ces réponses

$$A_1 = 2 A_2$$



$$L_2 = 2 L_1$$



Vitesse de dérive des électrons dans une ampoule

Il faut voir le cuivre comme un matériau dans lequel circule un « gaz » d'électrons libres

$P = VI$

$J_v = \rho_v v$

$\rho_v = \frac{eN_A \rho_{Cu}}{M_{Cu}} = 13600 \left[\frac{\text{C}}{\text{cm}^3} \right]$

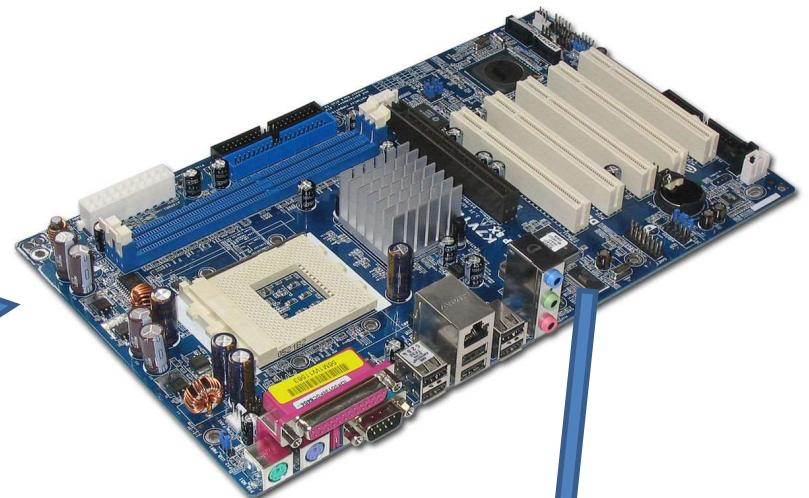
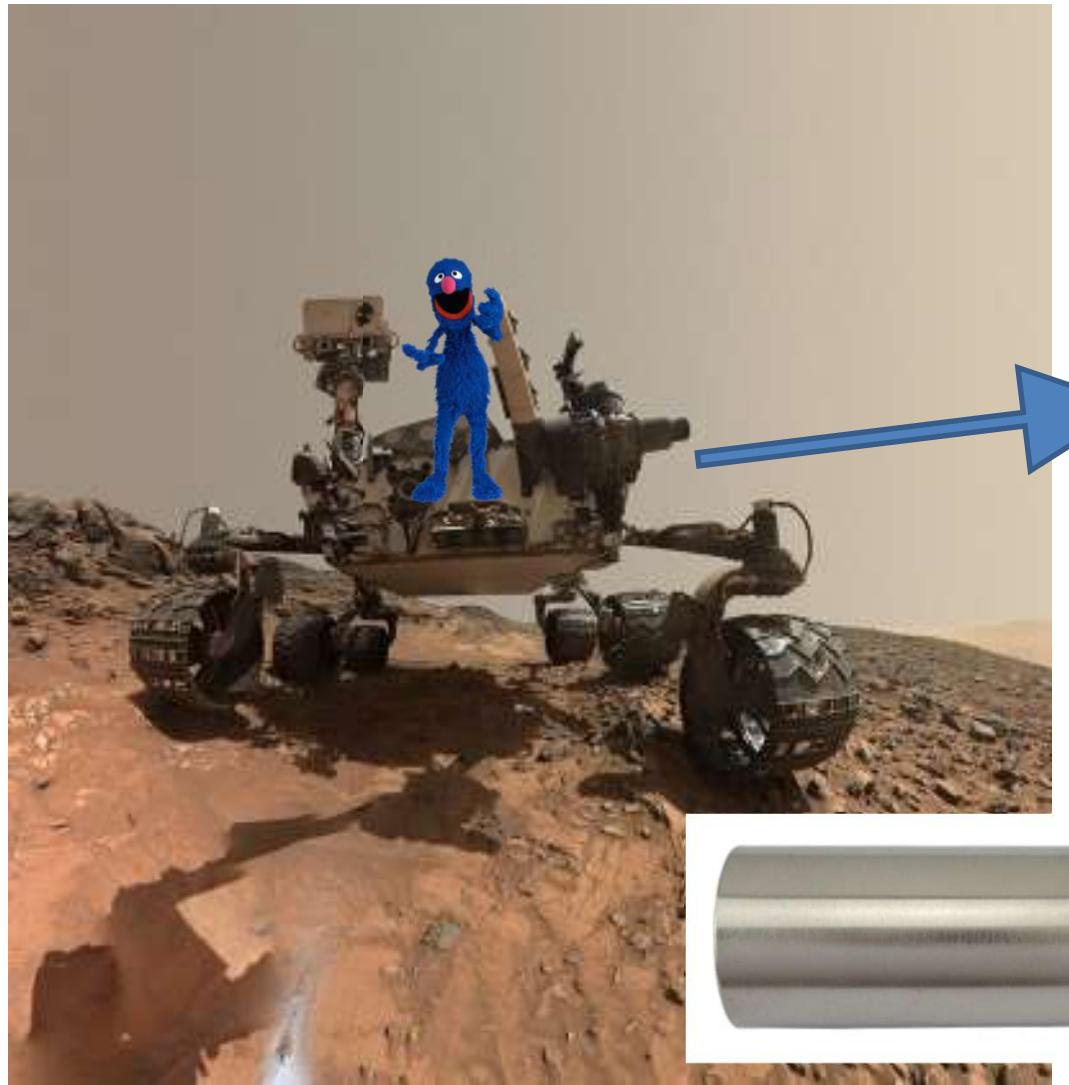
$V_{rms} = ?$

$I = ?$

$J = \frac{I}{S} = ?$

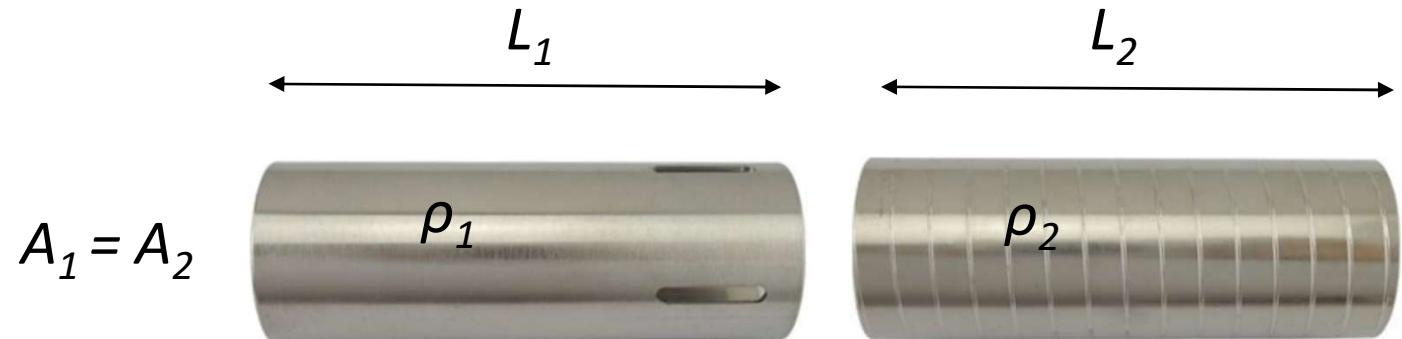
$v = \frac{J}{\rho_v} = ?$

$S = 1 \text{ mm}^2$





Peut-on construire une résistance
indépendante de la température?



Resistivities and Temperature Coefficients of Resistivity
for Various Materials (at 20°C)

Material	Resistivity ($\Omega \cdot \text{m}$)	Temperature Coefficient of Resistivity $[({}^\circ\text{C})^{-1}]$
Silver	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Copper	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Gold	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Aluminum	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Tungsten	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Iron	10.0×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Platinum	11×10^{-8}	3.92×10^{-3}
Lead	22×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Nichrome ^a	150×10^{-8}	0.4×10^{-3}
Carbon	3.5×10^5	-0.5×10^{-3}
Germanium	0.46	-48×10^{-3}
Silicon	0.40	-75×10^{-3}

(1)

(2)



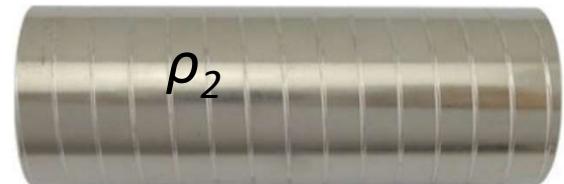
$$L_1$$

$$L_2$$

$$A_1 = A_2$$

$$\rho_1$$

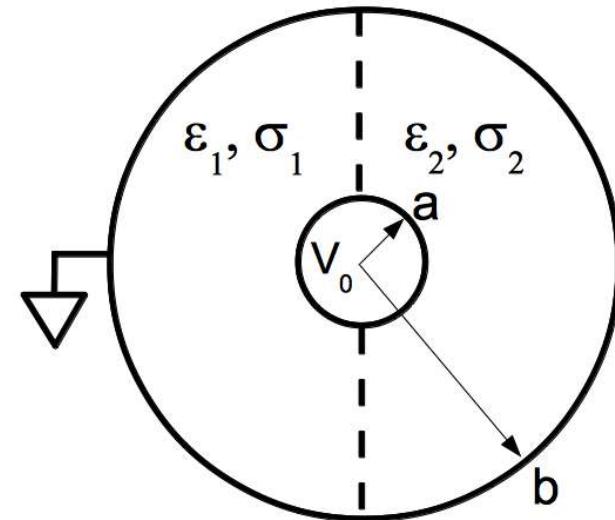
$$\rho_2$$



Exercice supplémentaire : Condensateur sphérique

V_0 appliqué sur conducteur central de rayon a .

Conducteur externe rayon b mis à la terre



a) Capacité $C = ?$

densité charges différentes (1) et (2)

b) Résistance fuite $R = ?$

(si milieu 1 = air, milieu 2: conductivité non nulle)

c) Puissance dissipée $P = RI^2 = ?$

– PHS1102 –

Champs électromagnétiques

Chapitre 5 – Conditions frontières aux interfaces et théorie des images

Conditions frontières aux interfaces

Champ électrique dans un conducteur statique

Interface diélectrique-conducteur

Interface diélectrique-diélectrique

Théorie des images

Objectifs de la semaine

Conditions frontières aux interfaces

- Décrire le comportement d'un matériau conducteur dans un champ statique.
- Déterminer le champ électrique et la densité de flux aux interfaces conducteur-diélectrique et diélectrique-diélectrique.

Théorie des images

- Calculer le champ électrique et le potentiel d'une distribution de charge en présence de plans conducteurs mis à la masse.

Objectifs de la semaine

Conditions frontières aux interfaces

- Décrire le comportement d'un matériau conducteur dans un champ statique.
- Déterminer le champ électrique et la densité de flux aux interfaces conducteur-diélectrique et diélectrique-diélectrique.

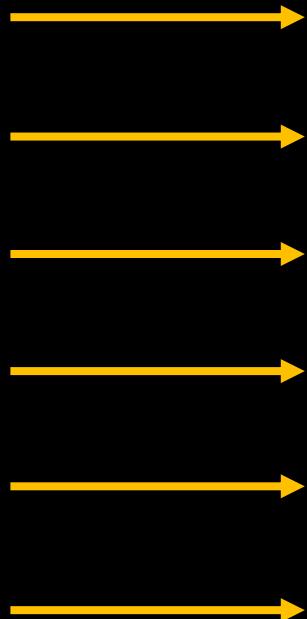
Théorie des images

- Calculer le champ électrique et le potentiel d'une distribution de charge en présence de plans conducteurs mis à la masse.

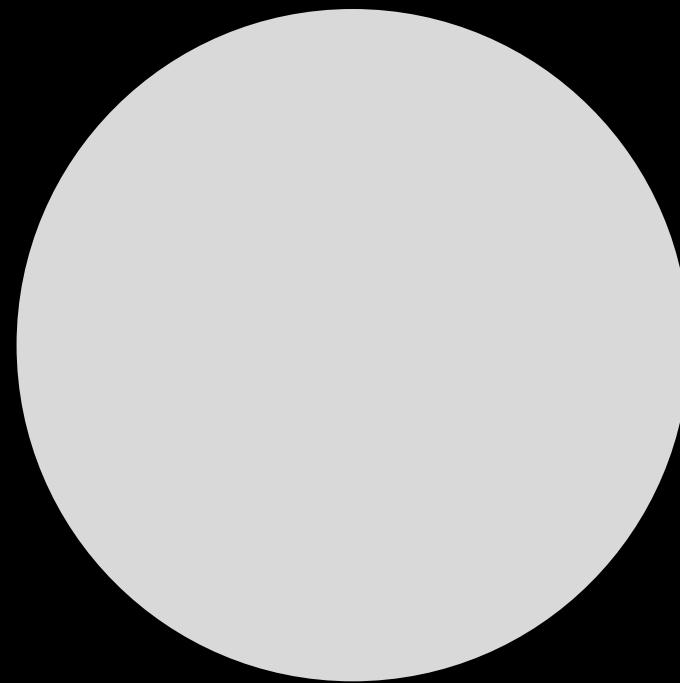
Quel est le champ électrique dans le conducteur ?

Quelle est la distribution de charge à l'intérieur du conducteur ?

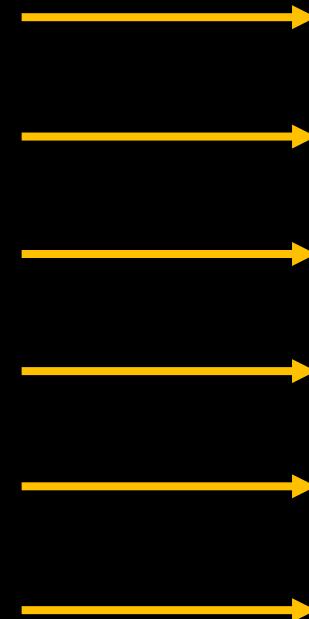
Champ externe \vec{E}_0



Matériau conducteur

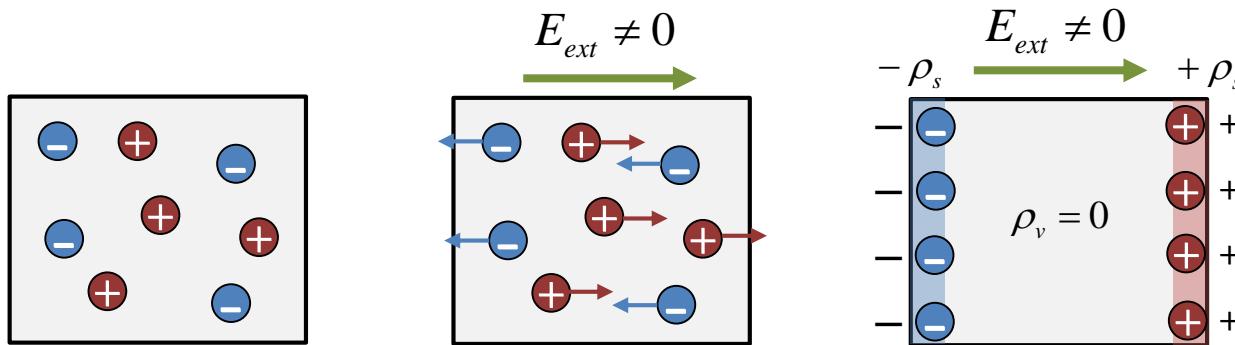


Champ externe \vec{E}_0



Conducteur dans un champ externe statique

Lorsqu'un conducteur est soumis à un **champ électrique externe**, les **charges libres** se déplacent jusqu'à atteindre une distribution de charge à l'équilibre.



1. À l'équilibre, le champ électrique est nul partout à l'intérieur d'un conducteur.

En effet, si le champ électrique était non nul à l'intérieur du conducteur, les charges libres continueraient à se déplacer sous l'effet de ce champ jusqu'à atteindre une nouvelle distribution à l'équilibre où le champ interne serait nul.

2. La densité de charge est nulle partout à l'intérieur d'un conducteur. Les charges libres s'accumulent sur la surface du conducteur.

Application du théorème de Gauss sur un volume ΔV à l'intérieur du conducteur : puisque $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur, il ne peut y avoir de charge libre.

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\rho_v = 0$$

Conducteur dans un champ externe statique

Sachant que le champ électrique est nul dans un conducteur, que peut-on dire sur le potentiel à l'intérieur du conducteur ?

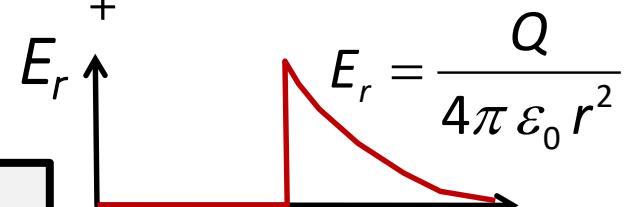
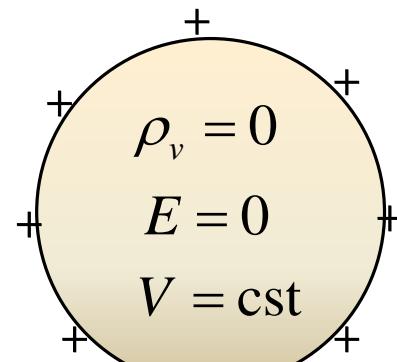
$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si le champ est nul, le potentiel ne varie pas. Un conducteur soumis à un champ statique est donc une surface équipotentielle.

Dans un conducteur soumis à un champ statique :

1. La densité de charge est nulle ; $\rho_v = 0$
2. Le champ électrique est nul ; $E = 0$
3. Le potentiel est constant. $V = \text{cst}$

Charge $+Q$ répartie en surface

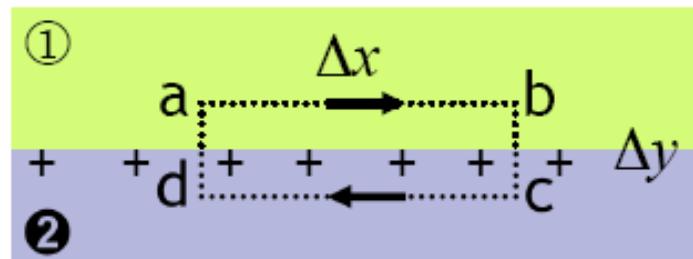


Condition aux frontières – Diélectrique-conducteur

La composante tangentielle du champ \vec{E} est nulle à l'interface.

Milieu 1 : diélectrique

Milieu 2 : conducteur



$E = 0$ à l'intérieur
du milieu 2

Principe

Choisir un parcours rectangulaire fermé $abcd$ et calculer la différence de potentiel.

La différence de potentiel est nulle, car le parcours est fermé (champ conservatif).

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

En faisant tendre $\Delta y \rightarrow 0$, les intégrales de b à c et de d à a tendent vers 0. De plus, l'intégrale de c à d est nulle, car $E = 0$ dans le conducteur. On a donc :

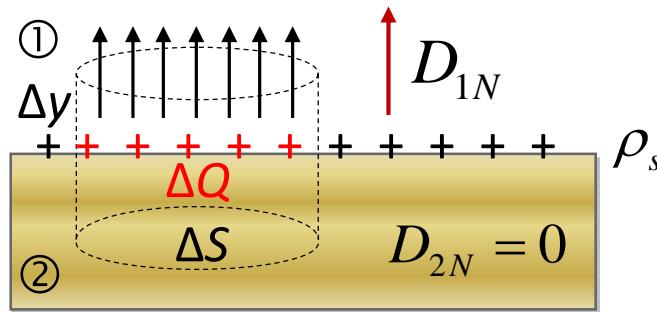
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1T} \Delta x + 0 + 0 + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad E_{1T} = 0$$

Condition aux frontières – Diélectrique-conducteur

La composante normale de la densité de flux \vec{D} dans le diélectrique est égale à la densité de charge surfacique à l'interface.

Milieu 1 : diélectrique

Milieu 2 : conducteur



(lignes de flux s'éloignent des charges positives.)

$D = 0$ à l'intérieur du milieu 2

Principe

Appliquer le théorème de Gauss avec une surface « boîte à pilule » de section ΔS infinitésimale et de hauteur Δy traversant l'interface.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Haut}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Côté}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Bas}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libres}}$$

En faisant tendre $\Delta y \rightarrow 0$, l'intégrale sur le côté tend vers 0. De plus, l'intégrale du bas est nulle, car $D = 0$ dans le conducteur. Avec ΔQ la charge à l'intérieur de la surface de Gauss :

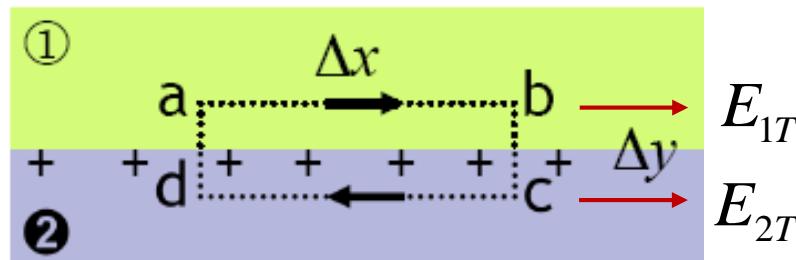
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{1N} \Delta S + 0 + 0 = \Delta Q \rightarrow D_{1N} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \rightarrow D_{1N} = \rho_s$$

Condition aux frontières – Diélectrique-diélectrique

La composante tangentielle du champ \vec{E} est continue à l'interface.

Milieu 1 : diélectrique

Milieu 2 : diélectrique



Principe

Choisir un parcours rectangulaire fermé $abcd$ et calculer la différence de potentiel.

La différence de potentiel est nulle, car le parcours est fermé (champ conservatif).

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

En faisant tendre $\Delta y \rightarrow 0$, les intégrales de b à c et de d à a tendent vers 0. On a donc :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1T} \Delta x + 0 - E_{2T} \Delta x + 0 = 0 \quad \rightarrow$$

$$E_{1T} = E_{2T}$$

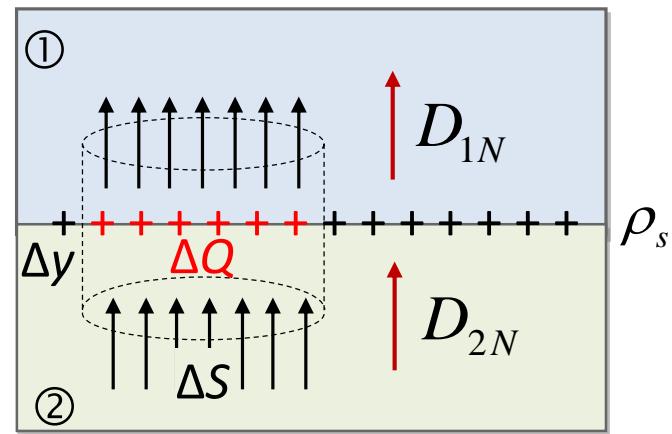
Condition aux frontières – Diélectrique-diélectrique

La variation de la composante normale de la densité de flux \vec{D} est égale à la densité de charge surfacique à l'interface.

Principe

Appliquer le théorème de Gauss avec une surface « boîte à pilule » de section ΔS infinitésimale et de hauteur Δy traversant l'interface.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Haut}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Côté}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Bas}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libres}}$$



En faisant tendre $\Delta y \rightarrow 0$, l'intégrale sur le côté tend vers 0. L'intégrale sur la surface du haut est positive, car D_{1N} sort de la surface de Gauss. Similairement, l'intégrale sur la surface du bas est négative, car D_{2N} entre dans la surface de Gauss.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{1N} \Delta S + 0 - D_{2N} \Delta S = \Delta Q$$

$$\rightarrow D_{1N} - D_{2N} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \rightarrow$$

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$

Condition aux frontières – Résumé

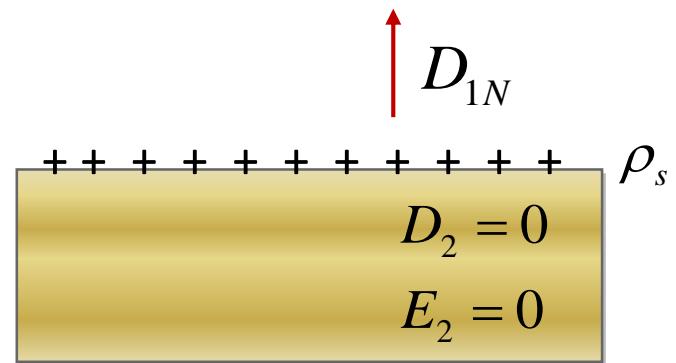
Interface diélectrique - conducteur

$$D_{1N} = \rho_s$$

$$E_{1T} = 0$$

ATTENTION!

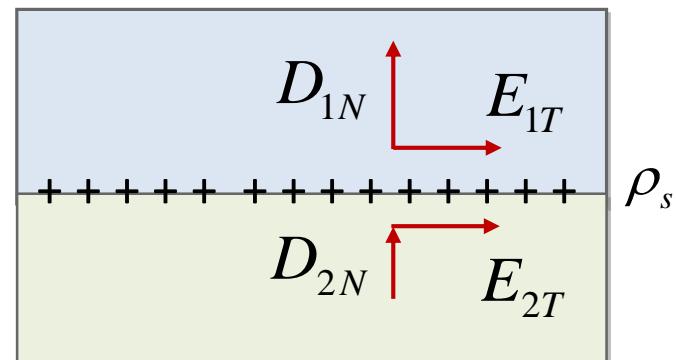
Les composantes de D et de E peuvent être positives ou négatives selon leur sens.



Interface diélectrique - diélectrique

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$

$$E_{1T} = E_{2T}$$

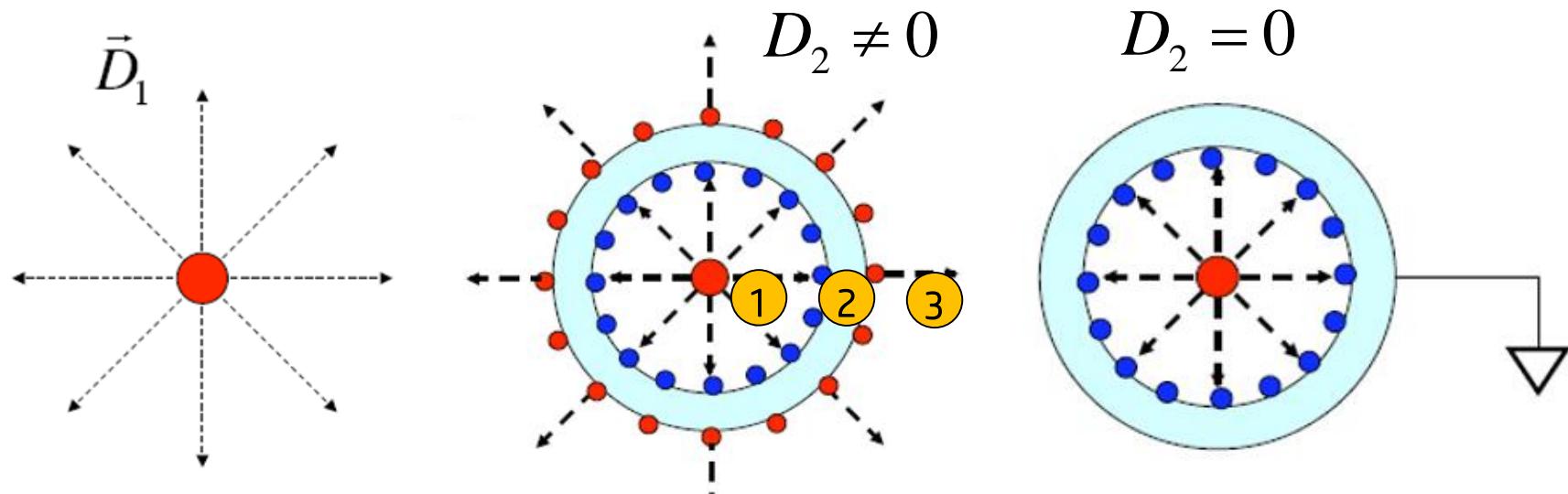




Blindage électrostatique

Les matériaux conducteurs permettent d'éliminer le champ électrique afin, entre autres :

- D'éviter les effets d'interférence sur un composant électronique ;
- D'empêcher qu'une pièce électronique ne soit endommagée lors de son transport.



En entourant une charge d'un conducteur neutre (en bleu), les charges libres du conducteur se répartissent sur ses surfaces internes et externes par induction, mais le champ est inchangé dans les régions 1 et 3 situées à l'extérieur du conducteur.

En mettant le conducteur à la masse (réservoir infini de charges), les charges de la surface externe sont neutralisées : il n'y a plus de champ dans la région 3.



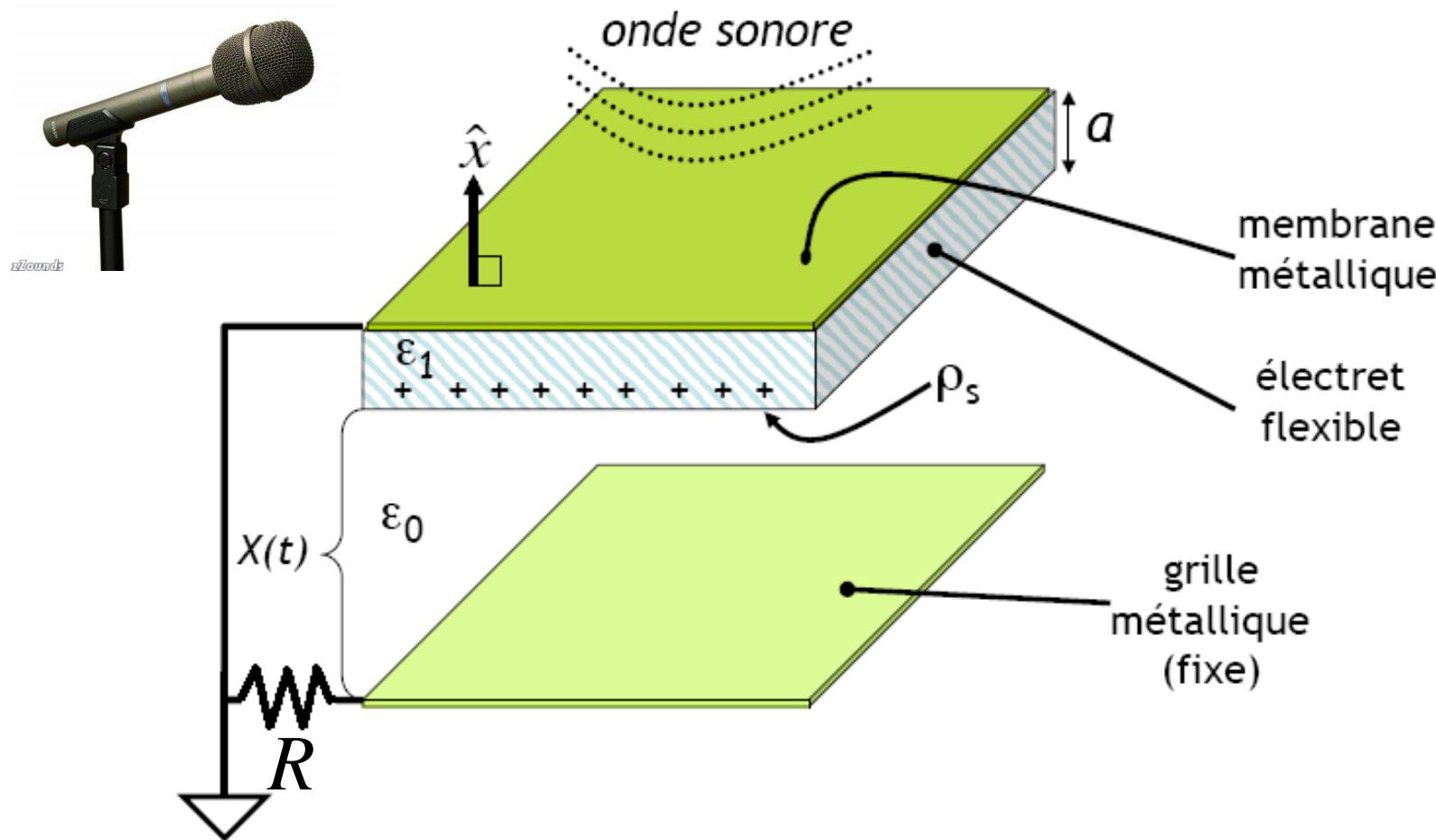
Sac dissipatif antistatique (rose)
Empêche l'accumulation de charges statiques sur la surface du sac, mais n'empêche pas les chocs.



Sac antistatique conducteur
Prévient les chocs grâce à un couche métallique (cage de Faraday).

Exemple 5.2 – Microphone électrostatique

- Quels sont les champs électriques (supposés uniformes) dans l'air et l'électret ?
- Quel est le courant dans la résistance si $X(t) = X_0 + b \sin(\omega t)$ où $X_0 \gg b$?



Exemple 5.2 – Microphone électrostatique

a) Quels sont les champs électriques (supposés uniformes) dans l'air et l'électret ?

Condition frontière diélectrique-diélectrique

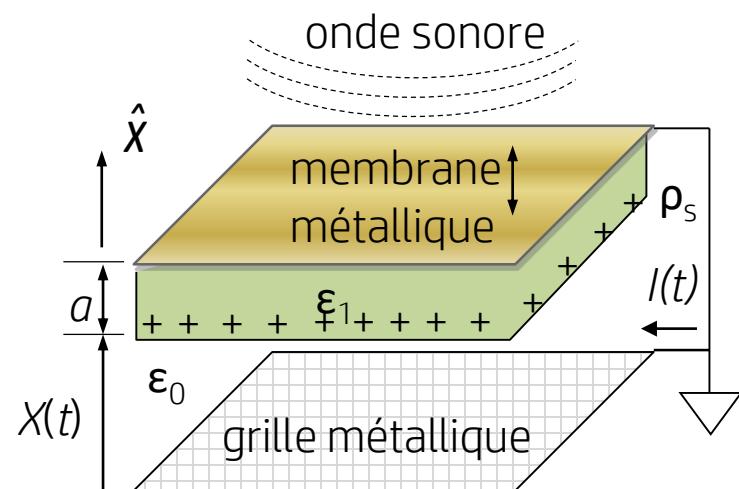
$$D_{1N} - D_{0N} = \rho_s$$

Champ uniforme
selon x

$$D_{1x} - D_{0x} = \rho_s$$

$$\boxed{\epsilon_1 E_{1x} - \epsilon_0 E_{0x} = \rho_s}$$

Attention, E_{0x} est
négatif ici!



Différence de potentiel entre la surface chargée et les conducteurs mis à la masse ($V = 0$)

$$V_a = - \int_0^{X(t)} (E_{0x} \hat{x}) \cdot d\vec{l} = - \int_0^{X(t)} E_{0x} dx = -E_{0x} X(t)$$

$$V_a = - \int_{X(t)+a}^{X(t)} (E_{1x} \hat{x}) \cdot d\vec{l} = \int_{X(t)}^{X(t)+a} E_{1x} dx = E_{1x} a$$

$$\boxed{E_{0x} X(t) = -E_{1x} a}$$

$$\boxed{E_{0x} = \frac{-\rho_s}{\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1 X(t)}{a}}}$$

$$\boxed{E_{1x} = \frac{\rho_s}{\epsilon_1 + \frac{\epsilon_0 a}{X(t)}}}$$

Exemple 5.2 – Microphone électrostatique

- b) Quel est le courant dans la faible résistance de grille si $X(t) = X_0 + b \sin(\omega t)$, où $X_0 \gg b$?

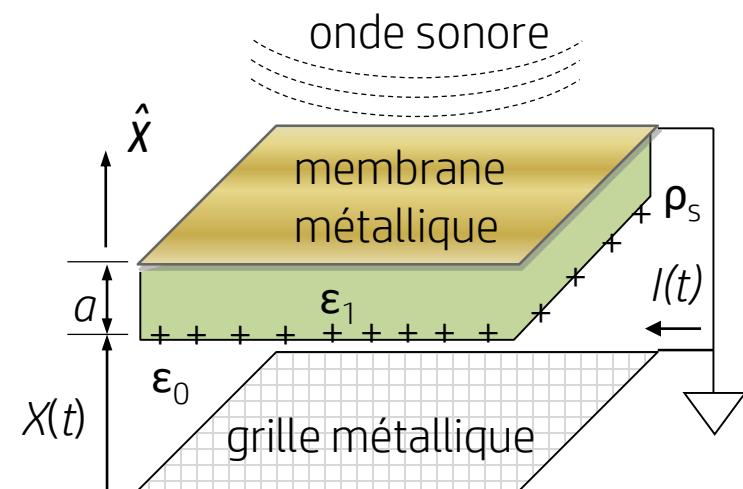
Quantité de charge sur la grille de surface S

$$Q = \rho_g S$$

$$D_{0x} = \epsilon_0 E_{0x} = \rho_g \quad \text{Condition frontière air-grille conductrice}$$

Courant circulant dans la faible résistance de grille

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} = S \frac{d\rho_g}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{\epsilon_0 \rho_s S}{\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1 X(t)}{a}} \\ &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \rho_s S}{a \left(\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1 X(t)}{a} \right)^2} \frac{dX(t)}{dt} \end{aligned}$$



$$E_0 = \frac{-\rho_s}{\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1 X(t)}{a}}$$

$$I = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 b \rho_s S \omega}{a \left(\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1 X(t)}{a} \right)^2} \cos(\omega t)$$

Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

Quelle est la capacité de ce condensateur variable en fonction de l'angle α ?

Deux condensateurs en parallèle : régions intérieure et extérieure aux armatures

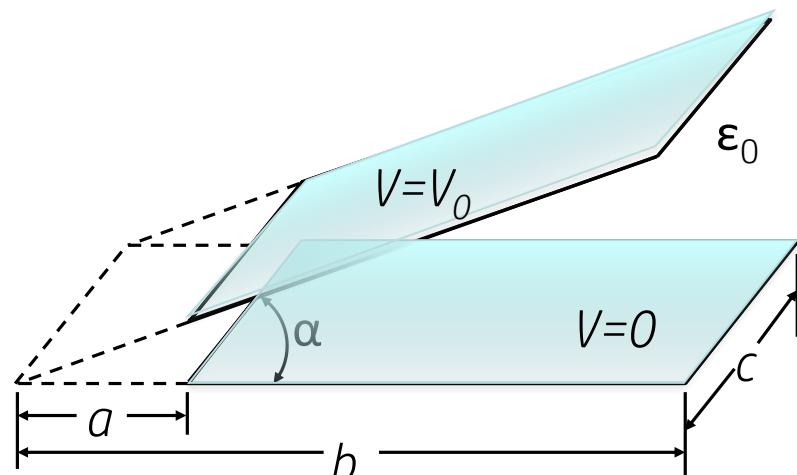
1. Symétrie

On néglige les effets de bord (armatures très grandes), de sorte que V dépend de l'angle ϕ seulement par la symétrie.

$$V(\vec{r}) = V(\phi)$$

2. Choix de la solution à l'équation de Laplace

La solution pour une symétrie selon l'angle ϕ en coordonnées cylindriques est :



$$\begin{aligned} \nabla^2 V = 0 &\quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \\ V(\vec{r}) = V(\phi) & \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

3. Conditions frontières

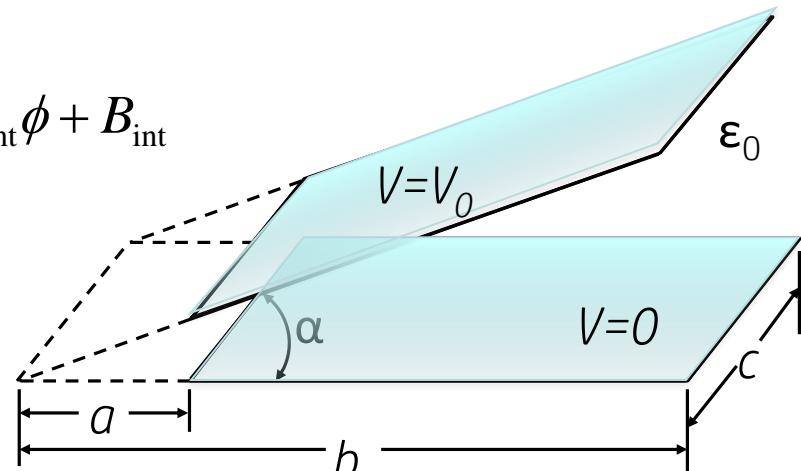
On applique la solution à l'équation de Laplace dans chacune des deux régions.

Région intérieure ($0 < \phi < \alpha$) $V_{\text{int}}(\phi) = A_{\text{int}}\phi + B_{\text{int}}$

$$V_{\text{int}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad B_{\text{int}} = 0$$

$$V_{\text{int}}(\alpha) = V_0 \quad \rightarrow \quad A_{\text{int}} = \frac{V_0}{\alpha}$$

$$\boxed{V_{\text{int}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha} \phi}$$

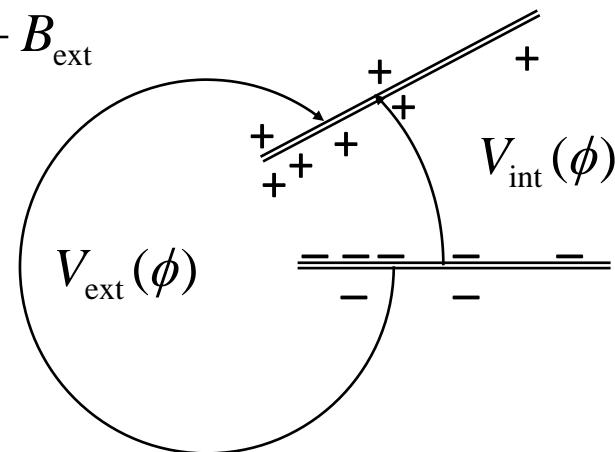


Région extérieure ($\alpha - 2\pi < \phi < 0$) $V_{\text{ext}}(\phi) = A_{\text{ext}}\phi + B_{\text{ext}}$

$$V_{\text{ext}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad B_{\text{ext}} = 0$$

$$V_{\text{ext}}(\alpha - 2\pi) = V_0 \quad \rightarrow \quad A_{\text{ext}} = \frac{V_0}{\alpha - 2\pi}$$

$$\boxed{V_{\text{ext}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha - 2\pi} \phi}$$



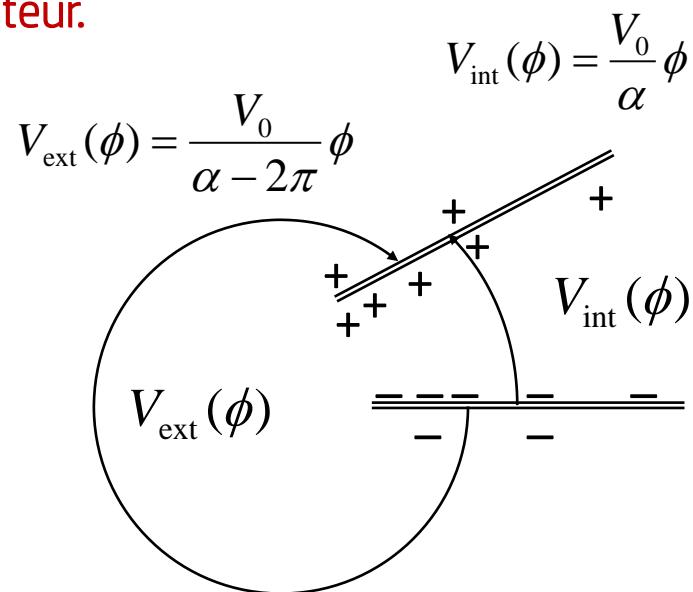
Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

Pour calculer la capacité, il faut déterminer la charge sur les armatures du condensateur.

4. Interface diélectrique-diélectrique ($\phi = 0$)

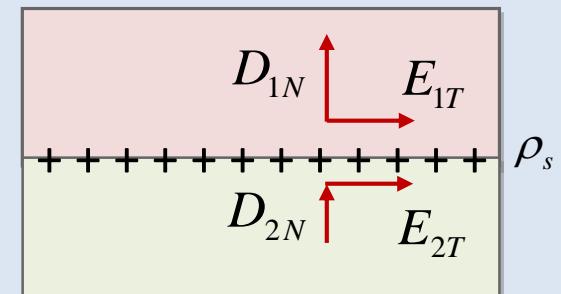
En supposant que l'armature est infiniment mince, l'armature agit en fait comme une densité de charge surfacique ρ_s à l'interface entre les diélectriques à l'intérieur et à l'extérieur des armatures. On peut donc appliquer la condition frontière à l'interface entre deux diélectriques.

Il faut calculer le champ électrique, puis la densité de flux de chaque côté de l'armature pour appliquer la condition.



RAPPEL

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$



Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

Pour calculer la capacité, il faut déterminer la charge sur les armatures du condensateur.

5. Champ et densité de flux à $\phi = 0$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial \phi} \hat{\phi} = -\frac{V_0}{\alpha \rho} \hat{\phi} \quad \vec{E}_{\text{ext}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial \phi} \hat{\phi} = -\frac{V_0}{(\alpha - 2\pi)\rho} \hat{\phi}$$

$$\vec{D}_{\text{int}} = -\frac{\epsilon V_0}{\alpha \rho} \hat{\phi}$$

$$\vec{D}_{\text{ext}} = -\frac{\epsilon V_0}{(\alpha - 2\pi)\rho} \hat{\phi}$$

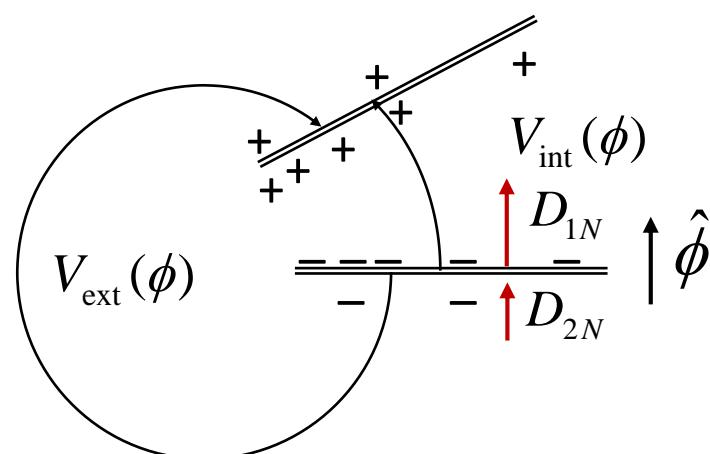
Interface diélectrique-diélectrique

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s \rightarrow -\frac{\epsilon V_0}{\alpha \rho} - \left(-\frac{\epsilon V_0}{(\alpha - 2\pi)\rho} \right) = \rho_s$$

$$\rho_s = -\frac{\epsilon V_0}{\rho} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha} \right)$$

$$V_{\text{int}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha} \phi$$

$$V_{\text{ext}}(\phi) = \frac{V_0}{\alpha - 2\pi} \phi$$



Peut-on simplement écrire $Q = \rho_s S$?

Exemple 6.7.2 – Capacité d'un condensateur variable

Pour calculer la capacité, il faut déterminer la charge sur les armatures du condensateur.

- Intégrer la densité de charge surfacique pour trouver la charge totale sur une armature
Il faut intégrer, car ρ_s dépend du rayon ρ .

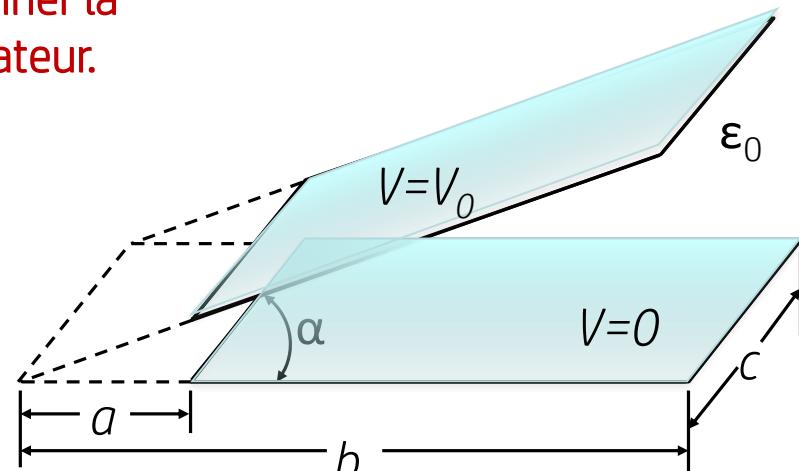
$$Q = \int_S \rho_s dS = \int_0^c \int_a^b \rho_s d\rho dz$$

Expression de dS pour ϕ constant ($d\phi = 0$) vient de l'annexe 4 du manuel.

$$Q = -\epsilon V_0 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha} \right) \int_0^c \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho dz = -\epsilon V_0 c \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha} \right) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacité vaut :

$$C = \frac{|Q|}{V_0} = \epsilon c \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha} \right) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



$$\rho_s = -\frac{\epsilon V_0}{\rho} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha} \right)$$

Capacité toujours positive : on prend la valeur absolue de Q .

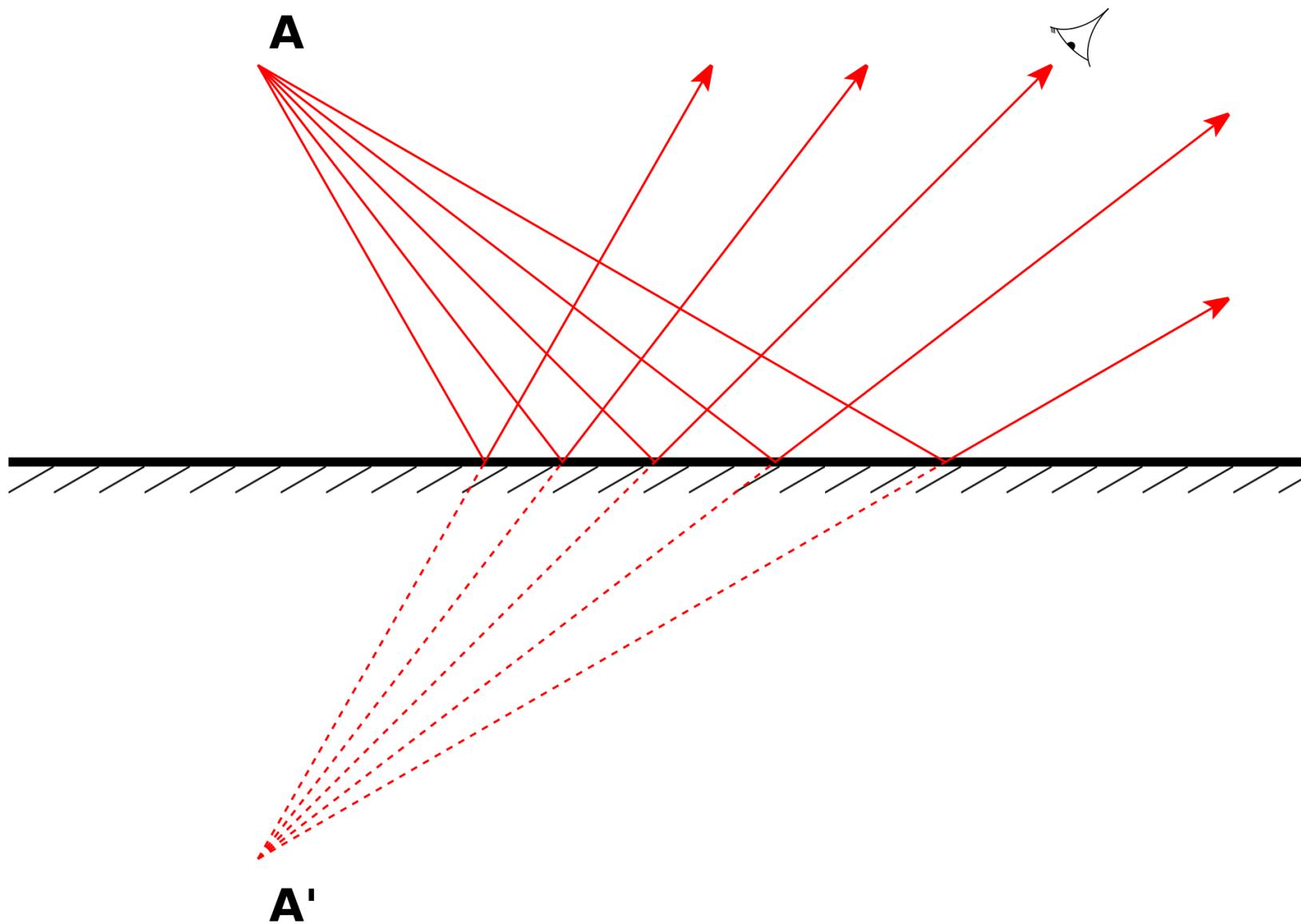
Objectifs de la semaine

Conditions frontières aux interfaces

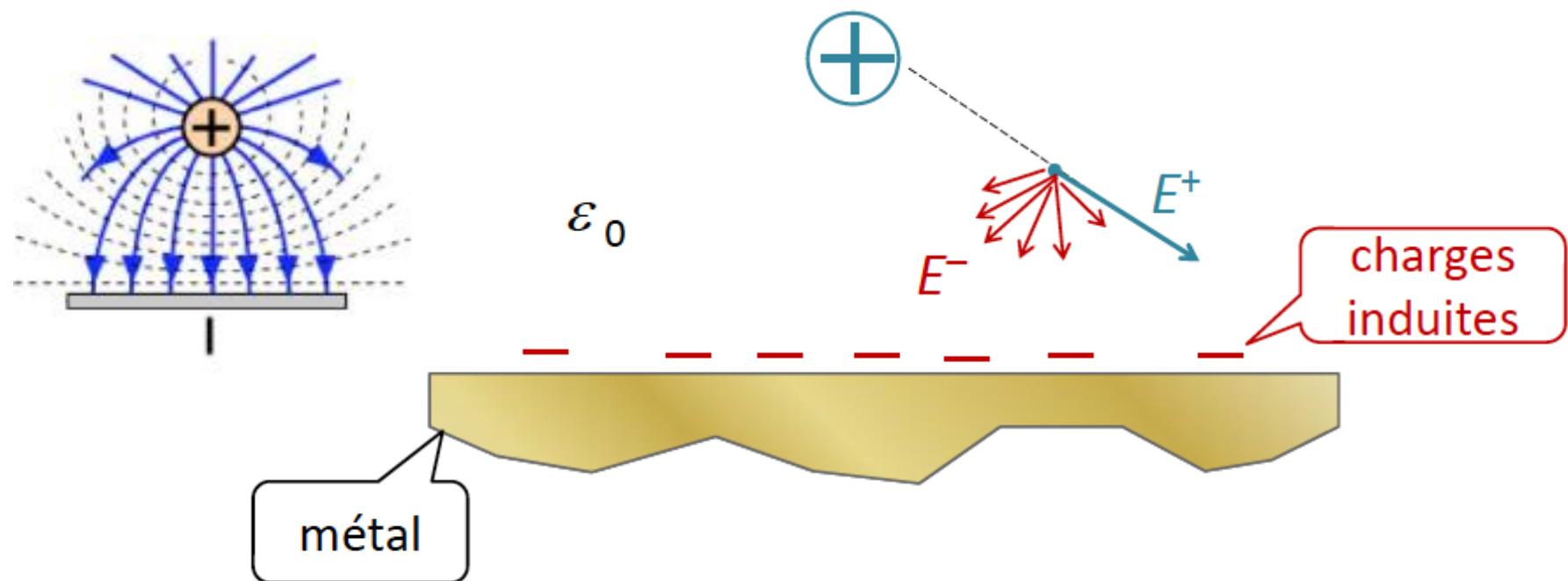
- Décrire le comportement d'un matériau conducteur dans un champ statique.
- Déterminer le champ électrique et la densité de flux aux interfaces conducteur-diélectrique et diélectrique-diélectrique.

Théorie des images

- Calculer le champ électrique et le potentiel d'une distribution de charge en présence de plans conducteurs mis à la masse.



Charge ponctuelle en présence d'un plan conducteur infini mis à la masse ($V = 0$)



1. Quelle est l'orientation du champ électrique près de la charge ponctuelle ?

Près de la charge, le champ est radial.

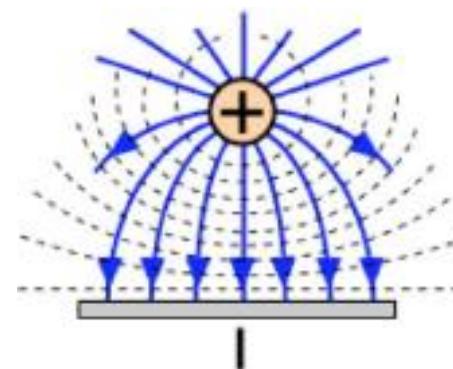
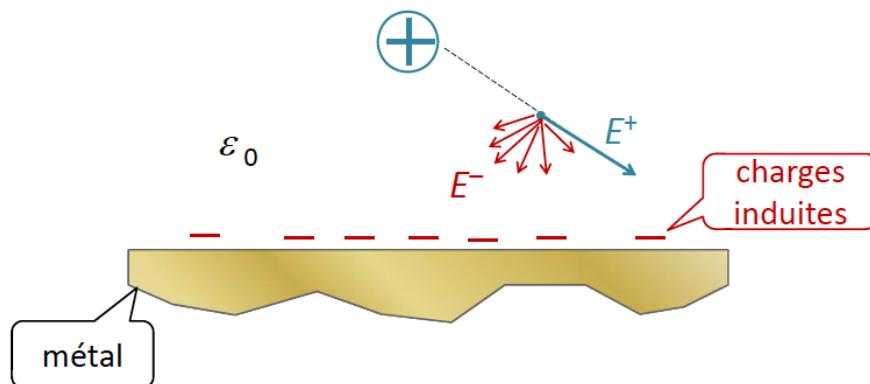
2. Quelle est l'orientation du champ électrique à l'interface avec le plan conducteur ?

Le champ électrique est normal au plan conducteur.

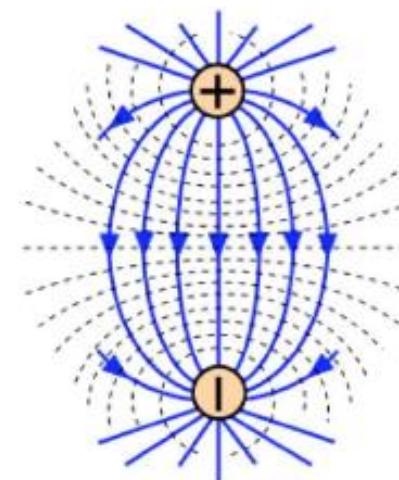
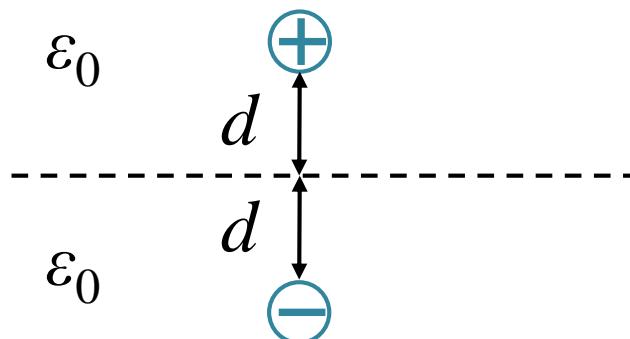
Théorie des images

Pour calculer le champ électrique, il faudrait additionner le champ de la charge ponctuelle et le champ produit par les charges induites sur le plan.

Difficulté : on ne connaît pas la densité non uniforme de charge induite sur le plan.

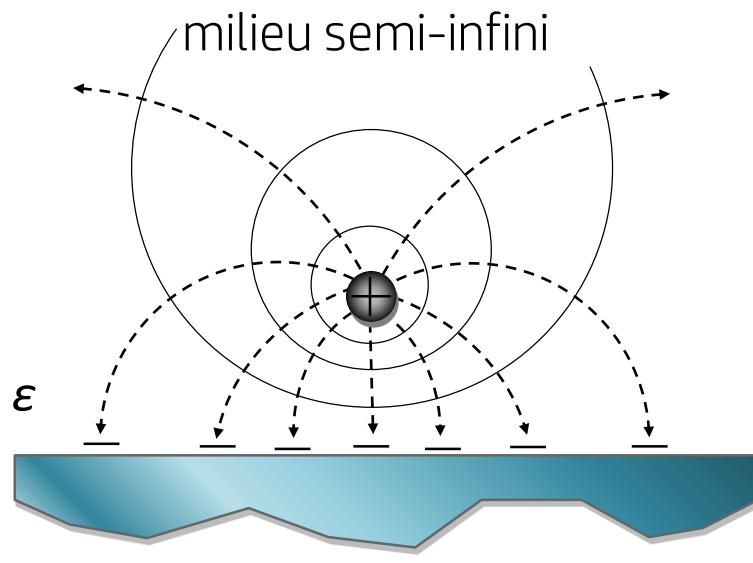


Le plan conducteur infini peut être remplacé par une charge ponctuelle de signe opposé à égale distance du plan.



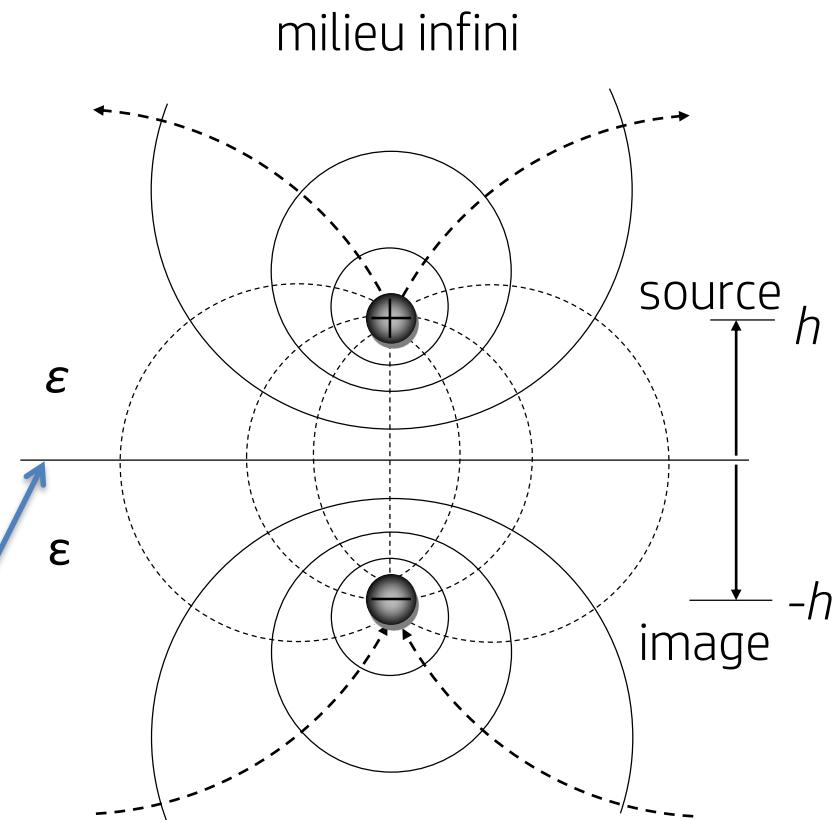
Théorie des images

Le champ électrique dans le milieu semi-infini au-dessus du plan est la superposition des champs des deux charges ponctuelles.



plan conducteur
mis à la masse ($V = 0$)

$$V = 0$$



Exemple 5.3 – Capacité d'une ligne aérienne

Le sol est l'équivalent d'un plan conducteur mis à la masse du point de vue de la ligne de transmission.

Par quelle(s) image(s) doit-on remplacer le plan conducteur pour obtenir le même champ dans la région au-dessus du plan ?

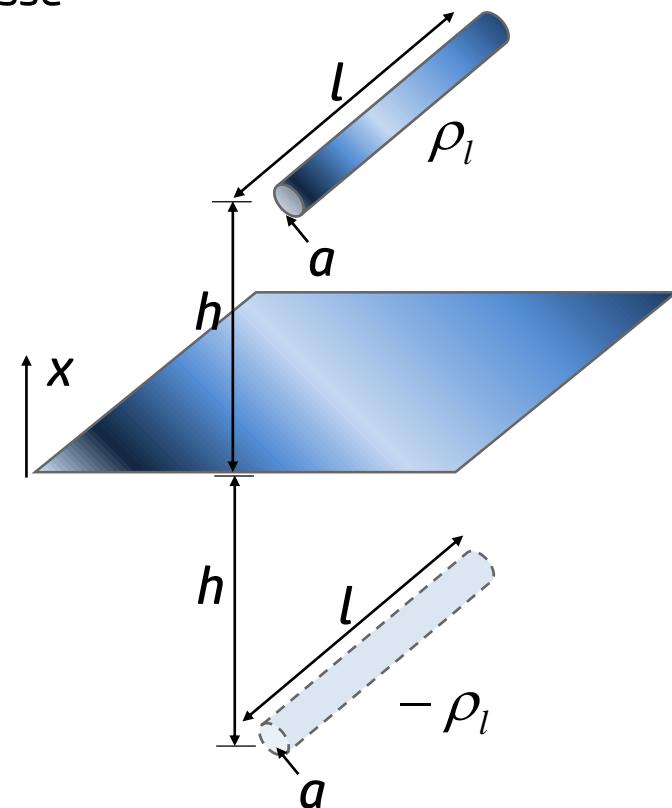
On remplace le plan par un fil de même dimension et de densité de charge opposée situé à une hauteur h sous le plan, de sorte que $V = 0$ partout sur le plan.

Champ produit par un fil conducteur

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

Champ produit par la ligne et le sol sur l'axe x joignant les fils

$$\vec{E} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0(h-x)} \hat{x} + \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0(h+x)} \hat{x}$$



Exemple 5.3 – Capacité d'une ligne aérienne

Champ produit par la ligne et le sol sur l'axe x

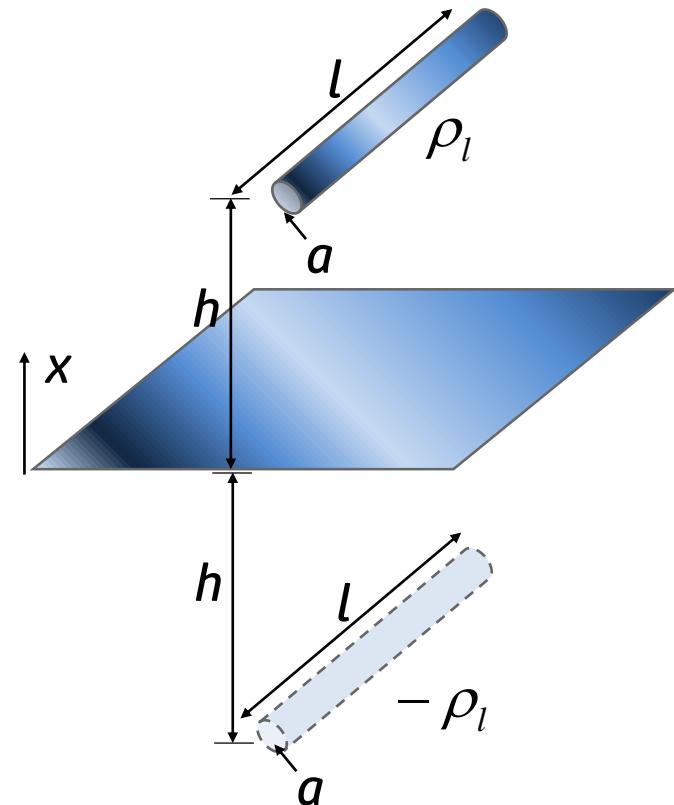
$$\vec{E} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{h-x} + \frac{1}{h+x} \right] \hat{x}$$

Différence de potentiel entre la ligne et le sol

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^{h-a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_0^h \left[\frac{1}{h-x} + \frac{1}{h+x} \right] dx \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left[-\ln(h-x) + \ln(h+x) \right]_0^{h-a} \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{h+x}{h-x}\right) \right]_0^{h-a} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h-a}{a}\right) \end{aligned}$$

Capacité de la ligne

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_l l}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{2h-a}{a}\right)}$$

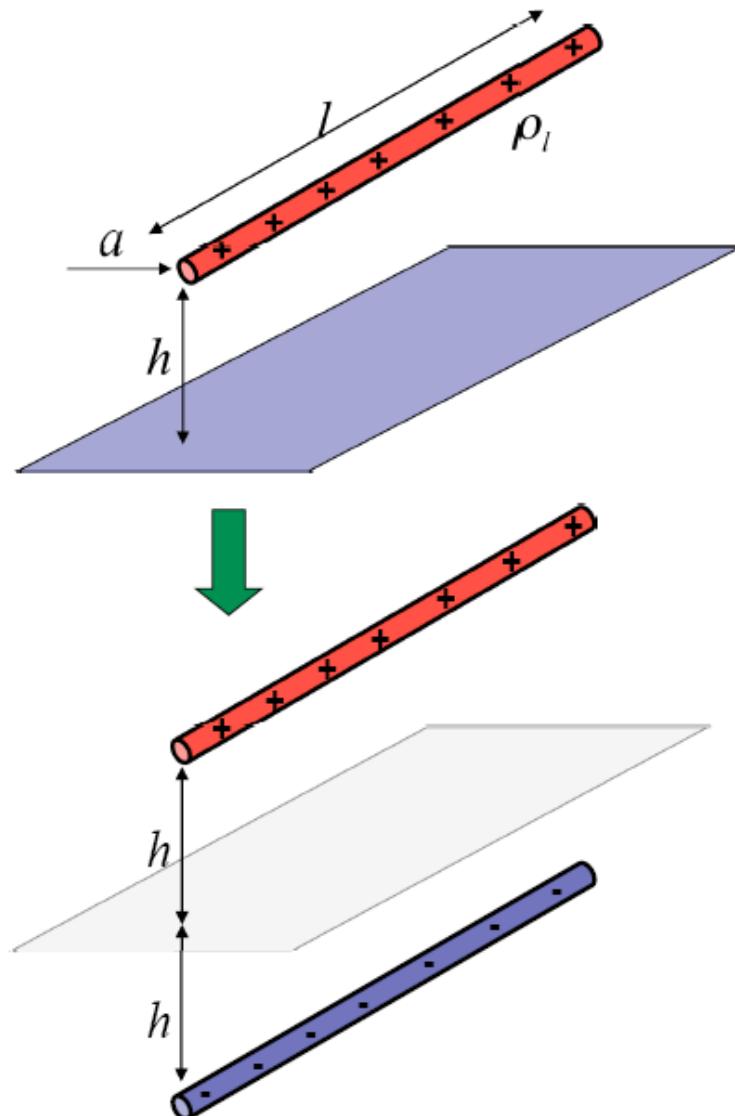


Qu'arrive-t-il si $a \rightarrow h$?

La capacité tend vers ∞ , car la distance entre les conducteurs diminue.

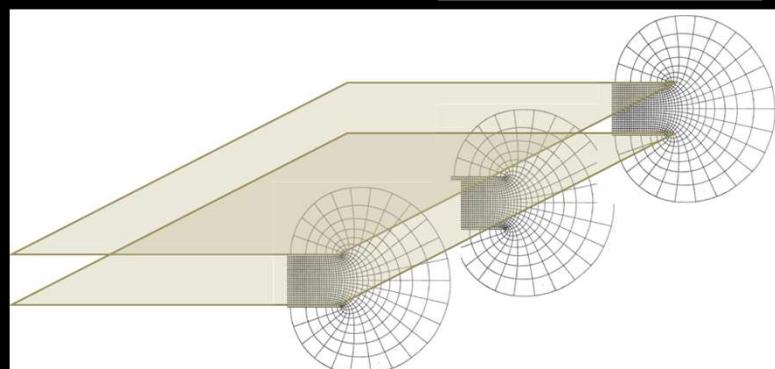
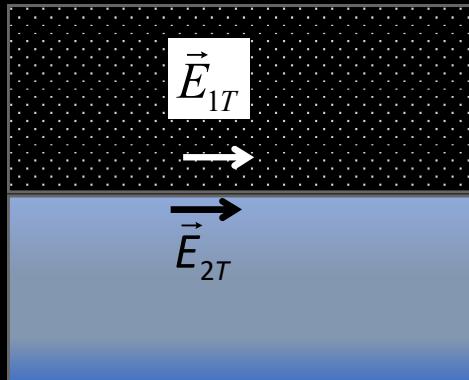
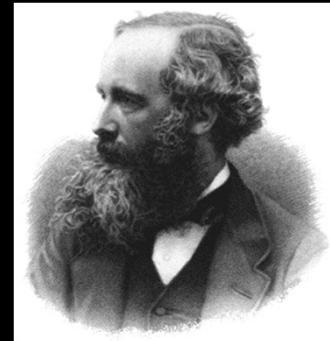
Théorie des images – Résumé

1. Déterminer si les lignes de flux et les équipotentielles du problème s'apparentent à celles d'un autre problème simple et connu ;
2. Remplacer le plan conducteur par une distribution de charge image telle que le potentiel soit nul ($V = 0$) sur tout le plan conducteur ;
3. Calculer le champ électrique dans le problème où le plan est remplacé par la distribution de charge image ;
4. Déterminer la quantité d'intérêt à partir du champ calculé (différence de potentiel, capacité, etc.).



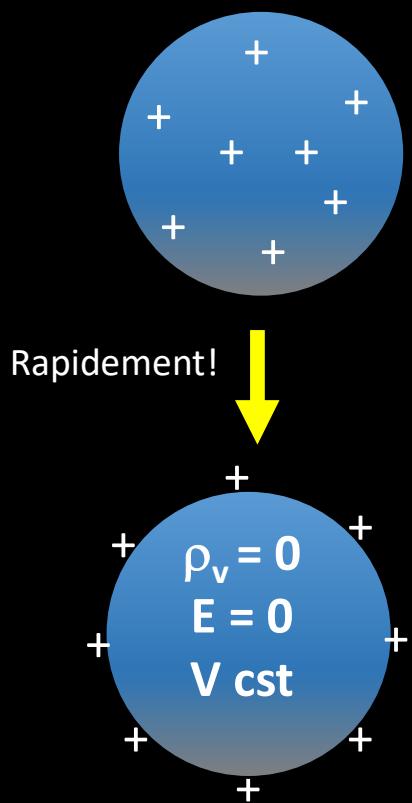
Cours #5 : Interfaces

- Équilibre électrostatique
- Interface Conducteur – Diélectrique
- Interface Diélectrique – Diélectrique
- Cartographie des champs
- Théorie des images



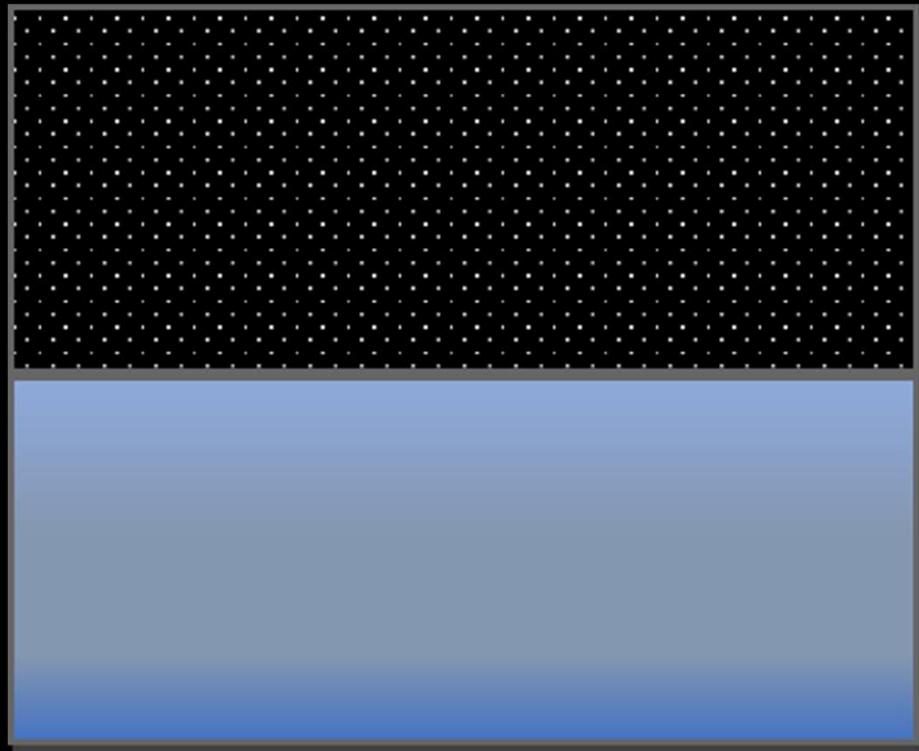
Conditions statiques dans un conducteur

$+Q$ répartie en surface

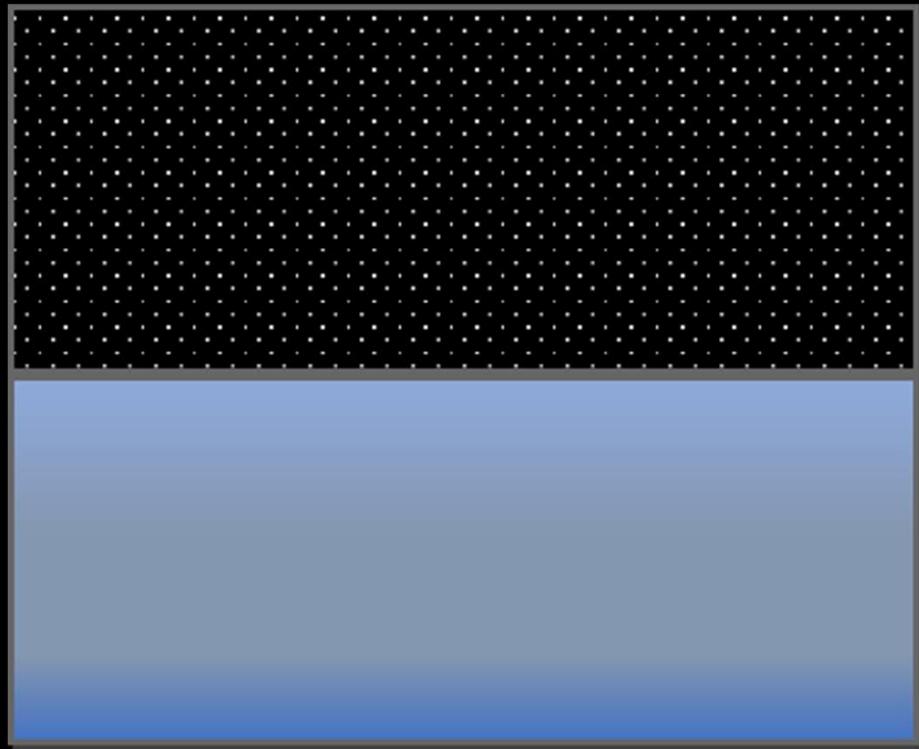


1. Densité de charge nette nulle, $\rho_v = 0$
charges excédentaires en surface pour minimiser l'énergie
2. Intensité du champ électrique nulle
Comme $J = 0$ cas statique, $E = J / \sigma = 0$
3. Potentiel uniforme
Puisque $E = -\nabla V = 0$, V ne varie pas en fonction de r

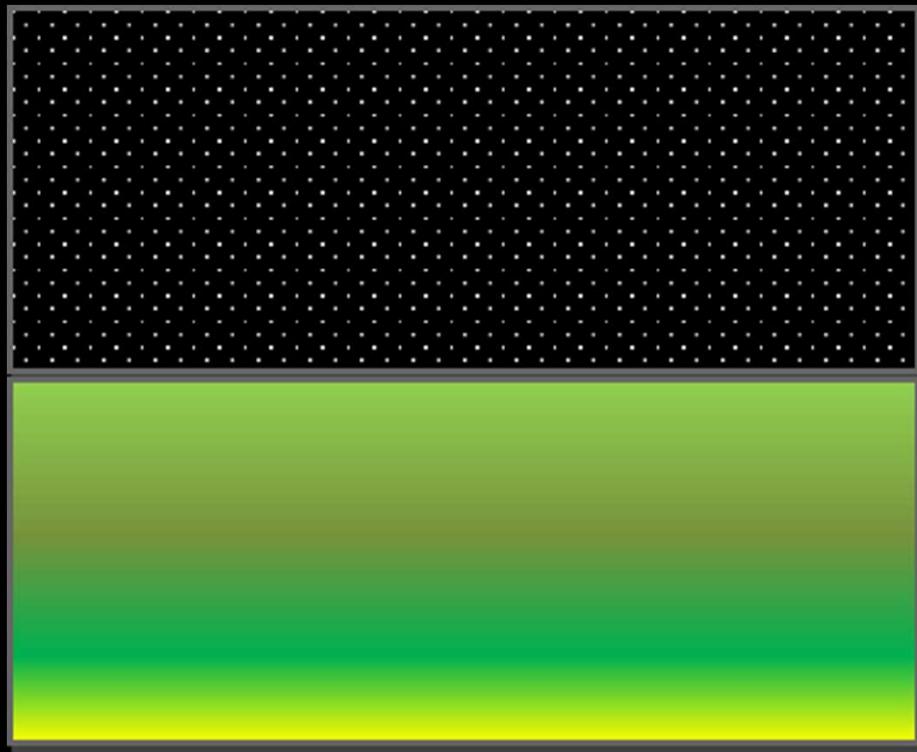
Interface Diélectrique- Conducteur



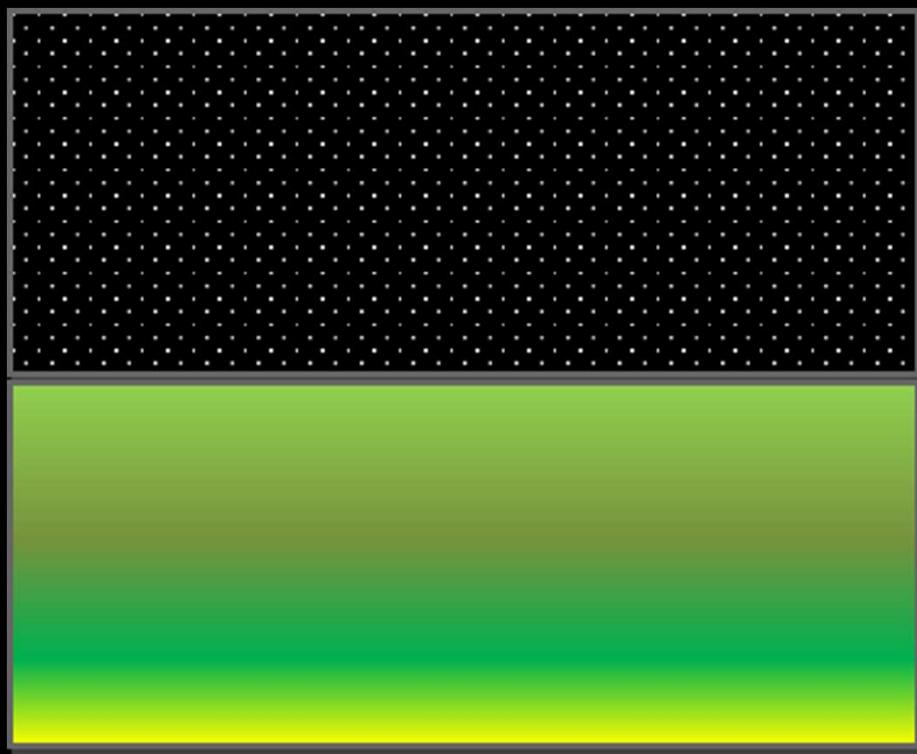
Interface Diélectrique- Conducteur



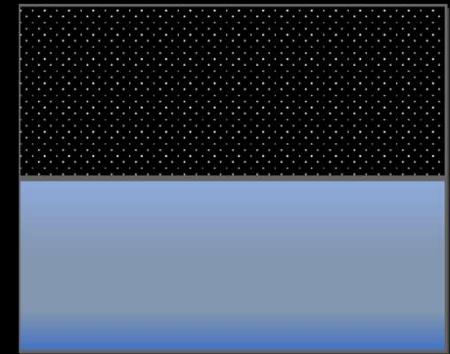
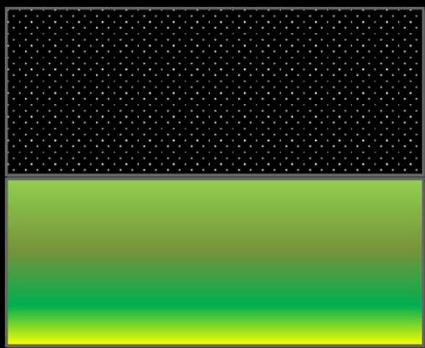
Interface Diélectrique- Diélectrique



Interface Diélectrique- Diélectrique



Interfaces: un résumé



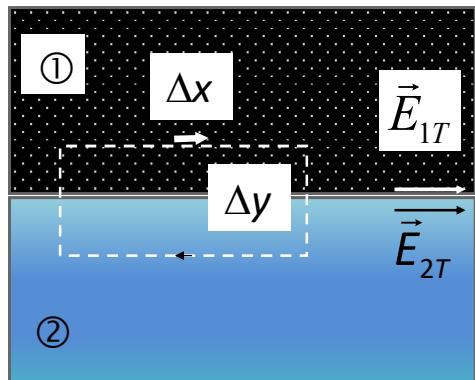
$$E_{1T} = E_{2T}$$

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$

Interfaces

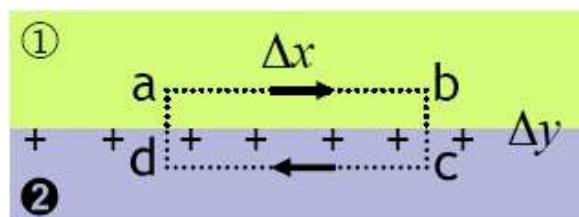
diélectrique-conducteur

**Frontière entre diélectrique (milieu 1) conducteur (milieu 2),
composante tangentielle du champ (E_{1T}) nulle dans le
diélectrique :** $E_{1T} = 0$



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1T} \Delta x + 0 + 0 + 0 = 0$$



2ie et 4ie termes nuls car Δy tend vers zéro,
3ie terme nul: E nul dans un conducteur, et il
reste : $E_{1T} = 0$

E perpendiculaire aux surfaces conductrices

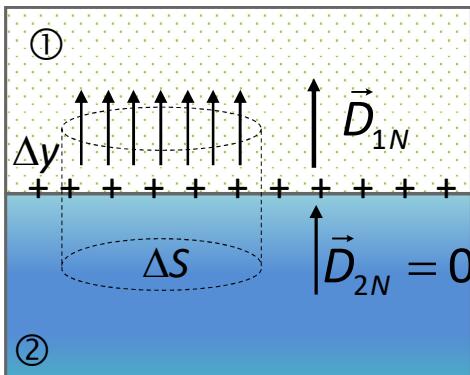
Interfaces

diélectrique-conducteur

Frontière entre diélectrique (milieu 1) et conducteur (milieu 2), composante normale (conducteur vers diélectrique) de la densité de flux (D_{1N}) égale la densité de charge surfacique:

$$D_{1N} = \rho_x$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Haut}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Côté}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Bas}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libres}}$$



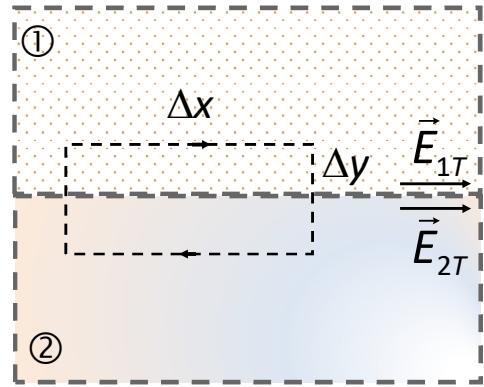
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Delta S D_{1N} + 0 + 0 = \Delta Q$$

2ie terme nul car Δy tend vers zéro
3ie terme nul parce que E nul dans le milieu conducteur:

$$D_{1N} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s$$

Interfaces diélectrique-diélectrique

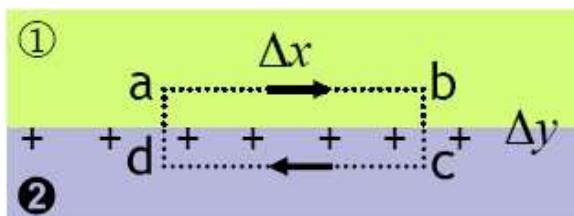
Frontière entre deux diélectriques (milieux 1 et 2),
composantes tangentielles des champs électriques dans les
deux milieux sont égales : $E_{1T} = E_{2T}$



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1T} \Delta x + 0 - E_{2T} \Delta x + 0 = 0$$

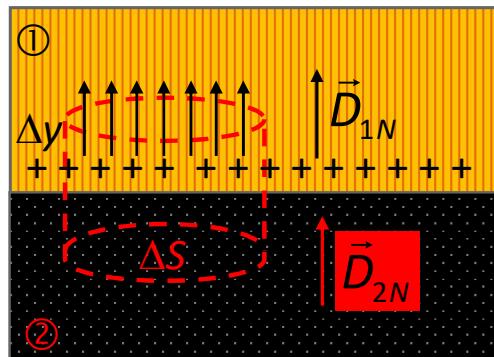
2ie et 4ie termes nuls car Δy tend vers zéro,
3ie terme négatif car intégration dans sens
opposé au champ électrique



Interfaces diélectrique-diélectrique

Frontière entre deux diélectriques 1 et 2 où on retrouve une densité de charge surfacique ρ_s (charges libres), différence entre composantes normales (de 1 à 2) des densités de flux égale la densité de charge surfacique :

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$

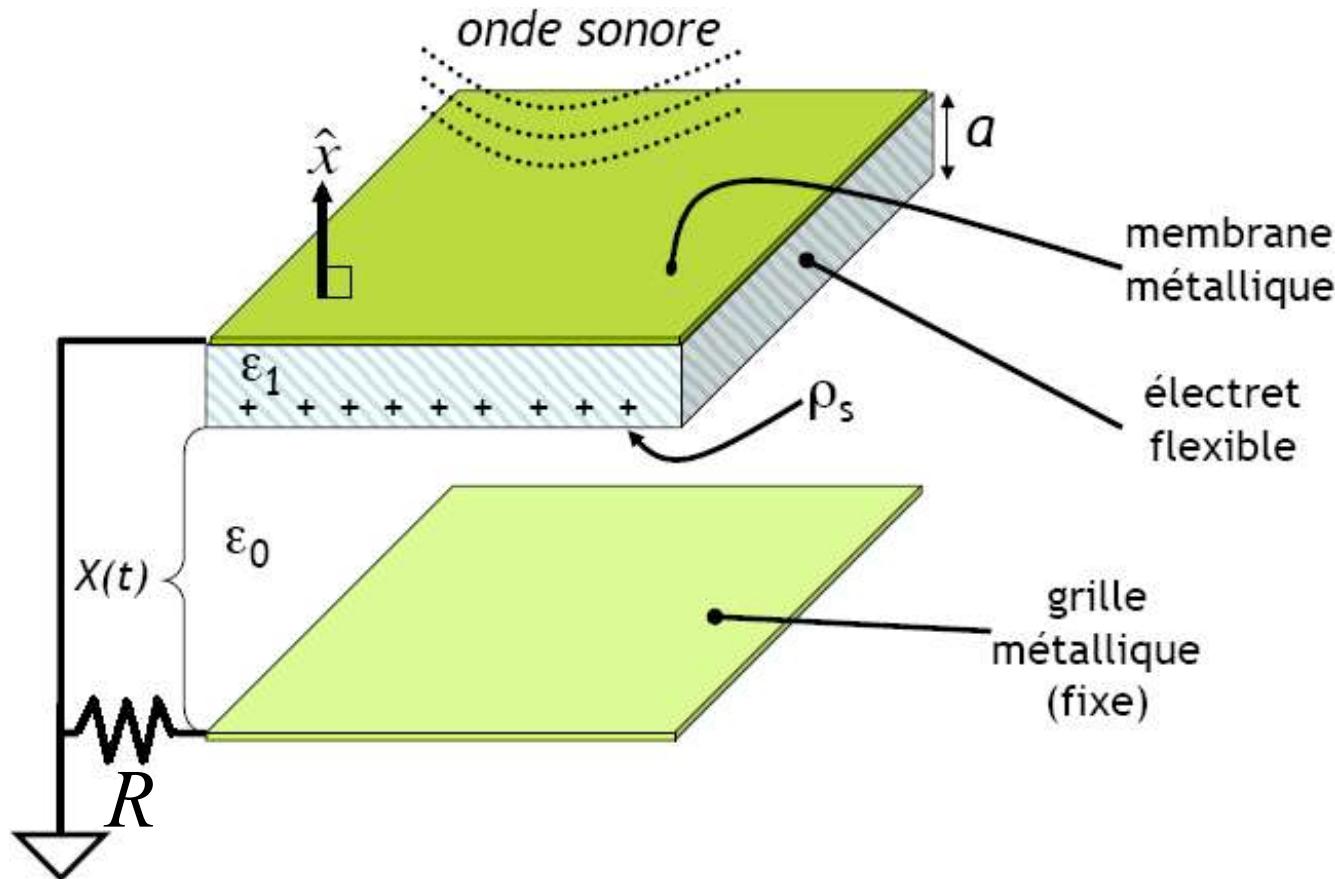


$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Delta S D_{1N} + 0 - \Delta S D_{2N} = \Delta Q$$

1^{er} terme: surface du haut,
2^{ie} terme: côtés courbés, nul, $\Delta y \rightarrow 0$,
3^{ie} terme négatif car normale à la surface pointe vers le bas.

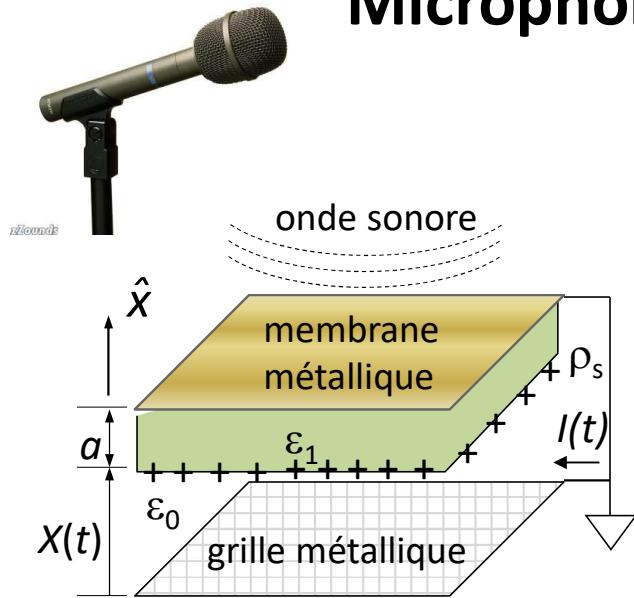
$$D_{1N} - D_{2N} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s$$

Microphone électrostatique : exemple

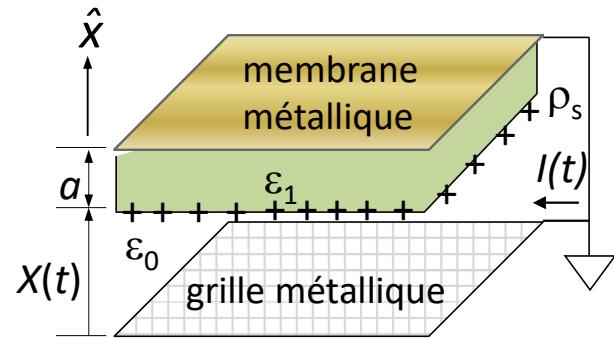


- Quels sont les champs électriques (supposés uniformes) dans l'air et l'électret.
- Quel est le courant dans la résistance si $X(t) = X_0 + b \sin(\omega t)$

Microphone électrostatique

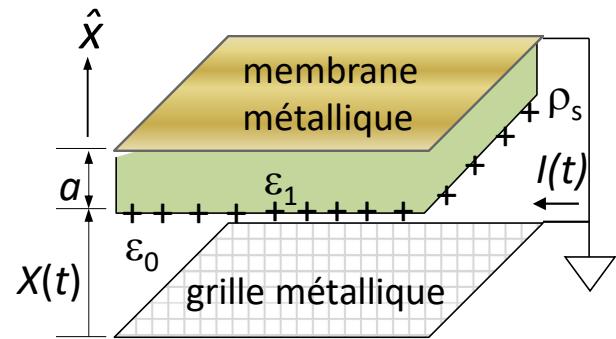


Microphone électrostatique



- a) Quels sont les champs électriques (supposés uniformes) dans l'air et l'électret.

Microphone électrostatique



b) Quel est le courant dans la résistance si $X(t) = X_0 + b \sin(\omega t)$

Méthode graphique

Proposée par James Clerk Maxwell

In certain classes of cases, such as those relating to spheres, there are known mathematical methods by which we may proceed. In other cases we cannot afford to despise the humbler method of actually drawing tentative figures on paper.

The latter method I think may be of some use, even in cases in which the exact solution has been obtained, for I find that an eye-knowledge of the forms of the equipotential surfaces leads to a right selection of mathematical method of solution.



Méthode graphique: avantages

1. Permet de guider les techniques analytiques, comme les techniques pour résoudre l'équation de Laplace (chapitre 6)
2. Très rapide: utile pour le design
3. Intuitive: accroît la compréhension
4. Permet de valider les résultats analytiques ou numériques
5. Applicable aux milieux diélectriques et conducteurs
6. Permet de calculer: capacité, résistance, potentiel
7. Relativement précise (5%)

Cartographie des champs

Quel est la capacité d'un câble coaxial écrasé sur un côté?

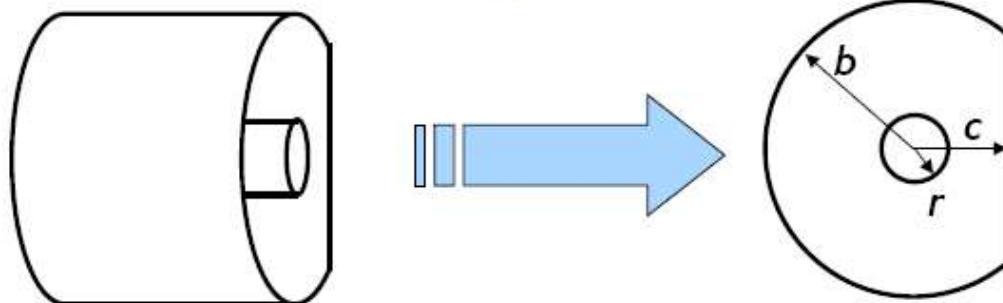
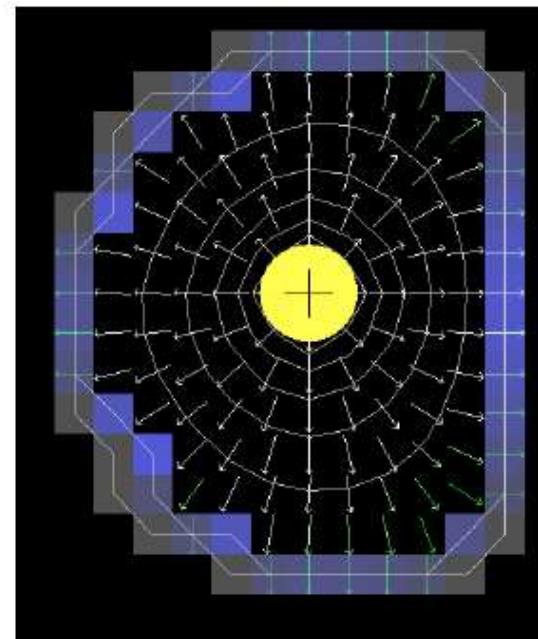
Difficile de procéder par la méthode standard (peu de symétrie, charges distribuées non uniformément, lignes de potentiel de forme quelconque)

Mais y aurait-il moyen d'estimer C rapidement en fonction de C_0 , la capacité d'un câble coaxial normal?

Ce qu'on sait:

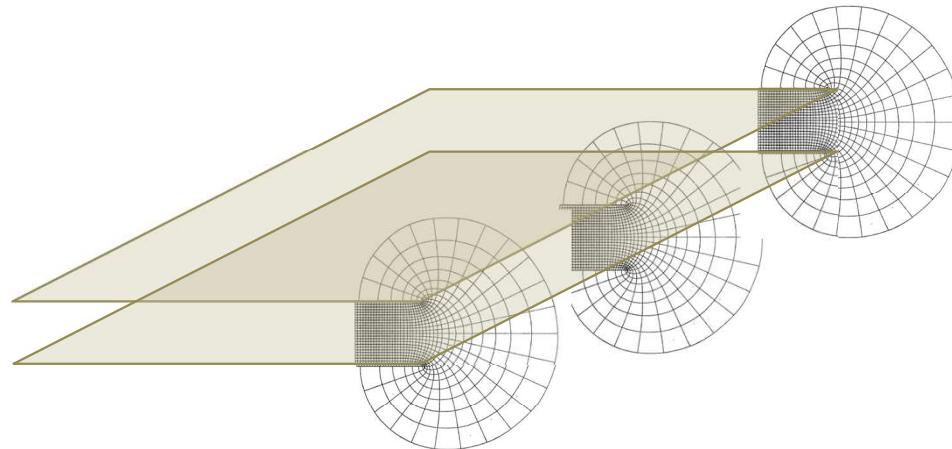
- C plus grand que C_0 (charges rapprochées)
- C proche de C_0 (p-ê 25% d'erreur?)

Pour une meilleure estimation, on doit cartographier notre champ



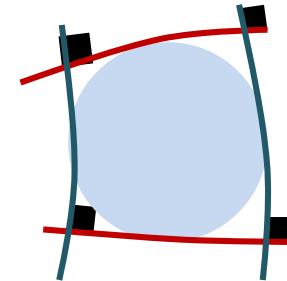
Méthode graphique : conditions

1. Les charges libres doivent être réparties seulement sur la surface des conducteurs et non à l'intérieur du diélectrique où on trace le champ, soit : $\rho_v = 0$
2. Pour le calcul de la capacité ou de la résistance, la distribution de potentiel ne doit dépendre que de deux variables, c'est-à-dire : le champ dans le plan de l'esquisse sera le même à différentes profondeurs.



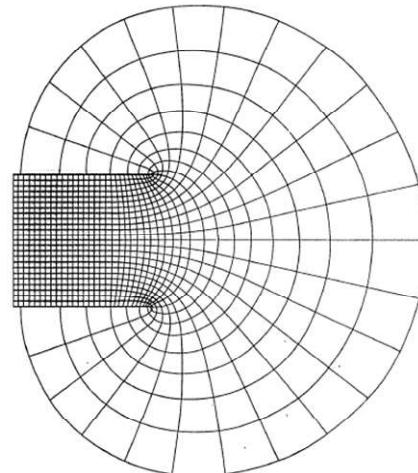
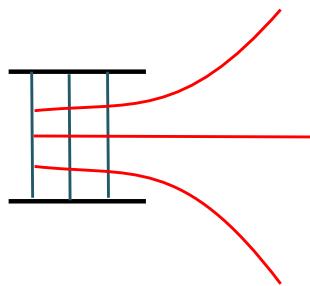
Méthode graphique: règles

1. Dessiner des cellules curvilinéaires (4 côtés approximativement égaux) dont deux côtés représentent des **lignes équipotentielles** et 2 côtés des **lignes de flux**
2. Ligne équipotentielle \perp ligne de flux
3. Les **lignes de flux** débutent et finissent sur des **surfaces conductrices**
4. Les surfaces conductrices sont **équipotentielles**

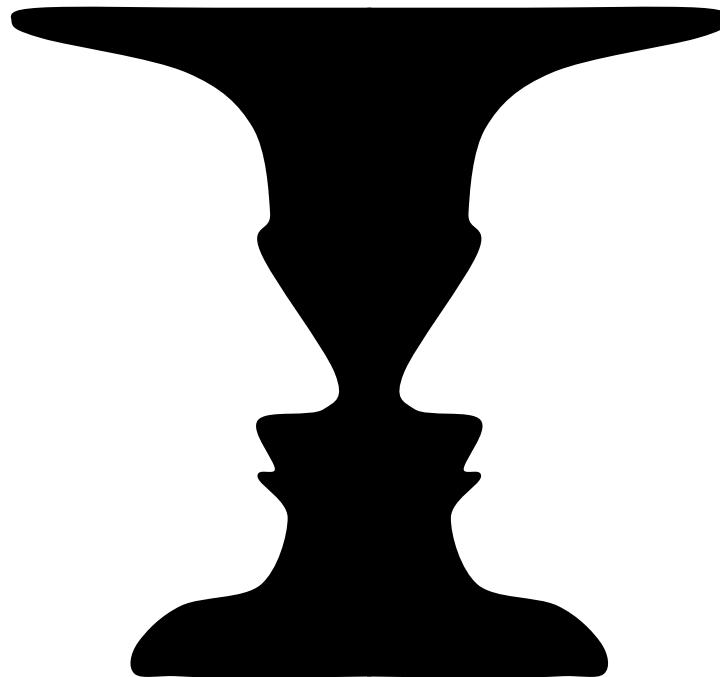


Méthode graphique: suggestions pratiques

- Faire les esquisses à main levée et ne pas utiliser de règle
- Utiliser une crayon à mine et une gomme à effacer
- Commencer par un brouillon où les lignes de flux vont d'une surface conductrice à l'autre

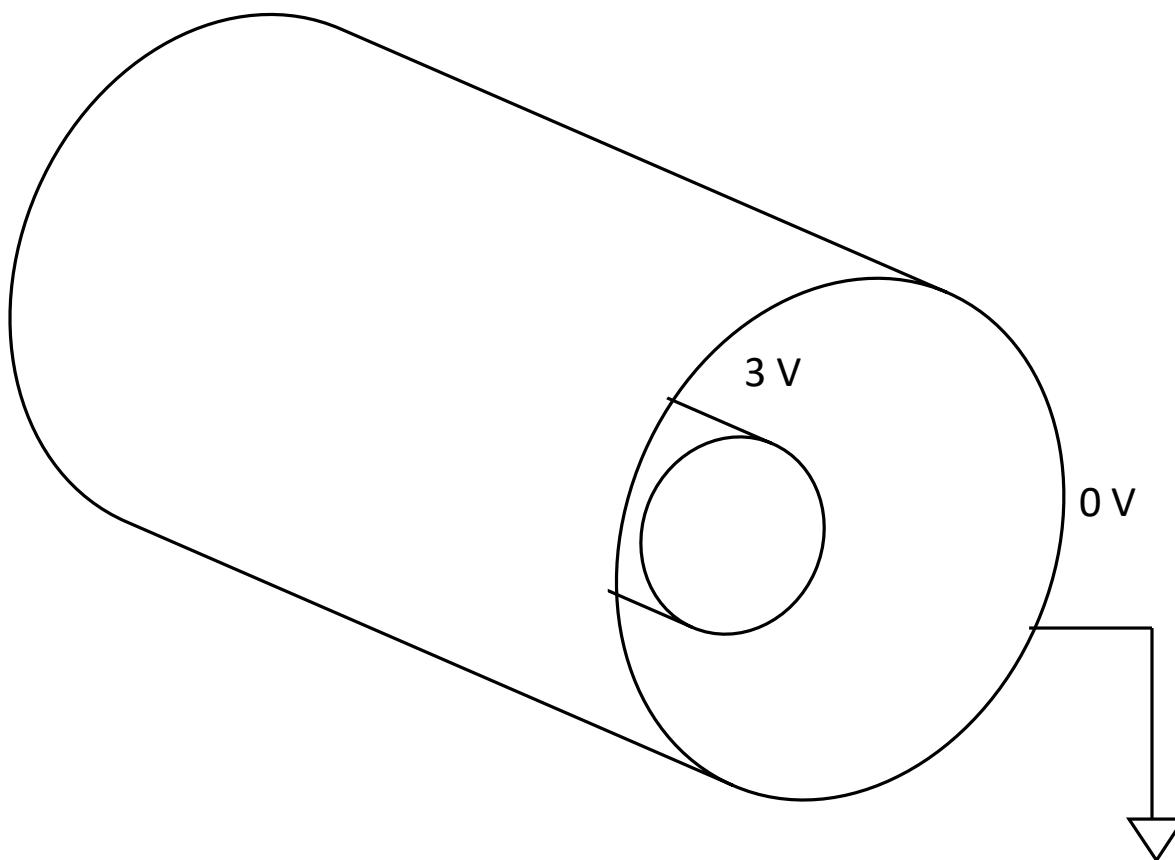


Méthode graphique: piège visuel



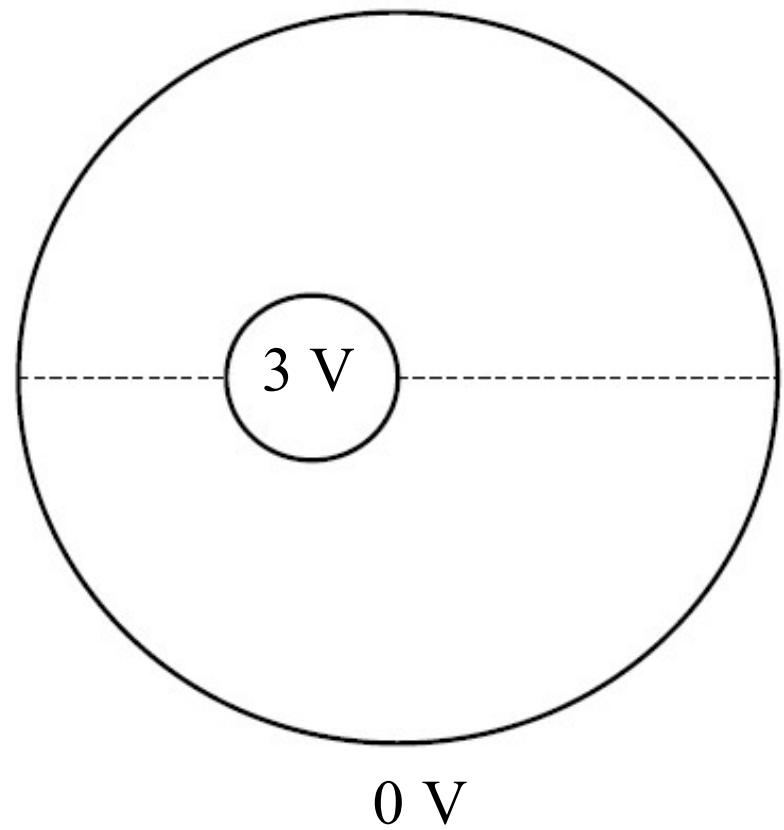
Pour ne pas confondre entre lignes équipotentielles et lignes de flux:
se souvenir que les lignes de flux débutent et finissent
sur des surfaces conductrices

Méthode graphique: câble non coaxial



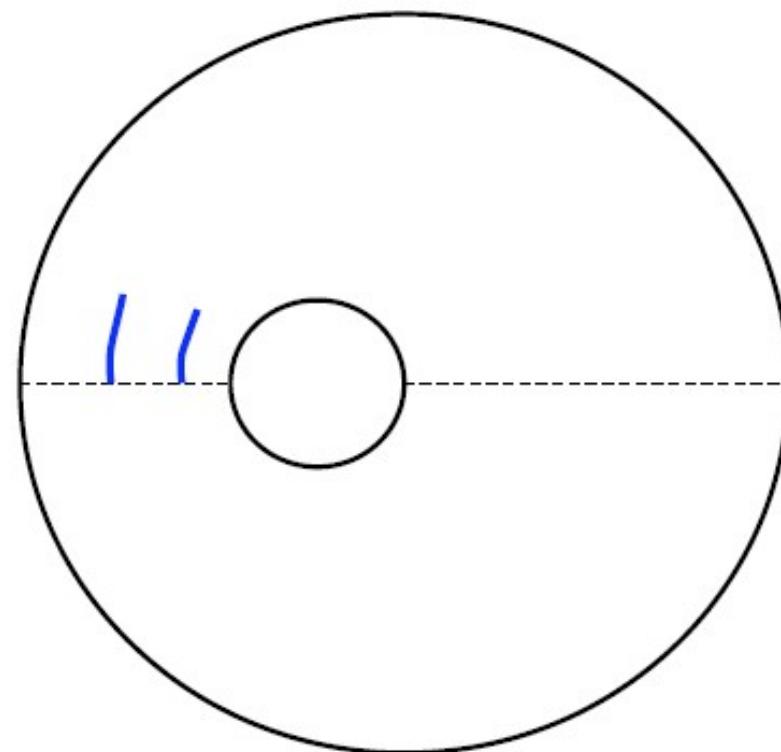
Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous.



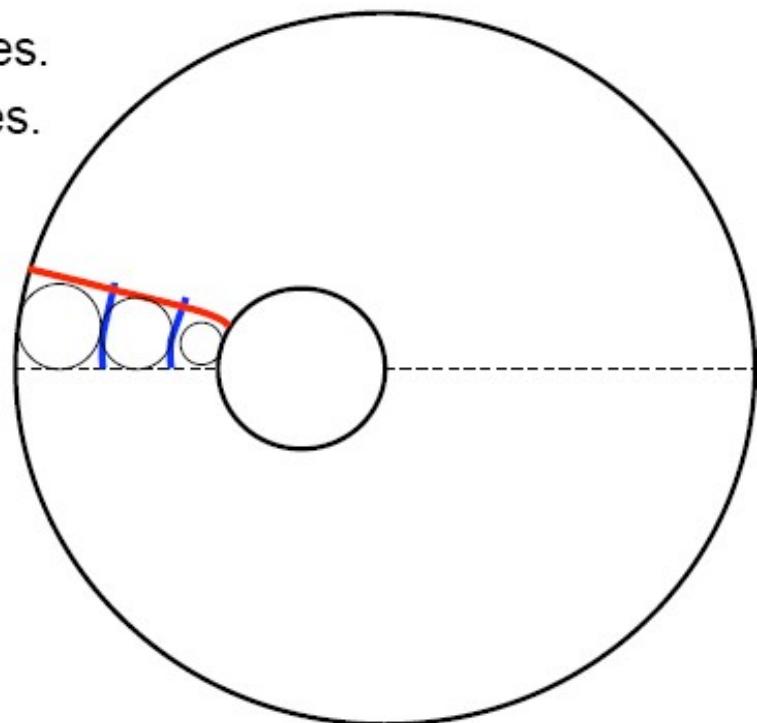
Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous
- 0, 1, 2, 3V



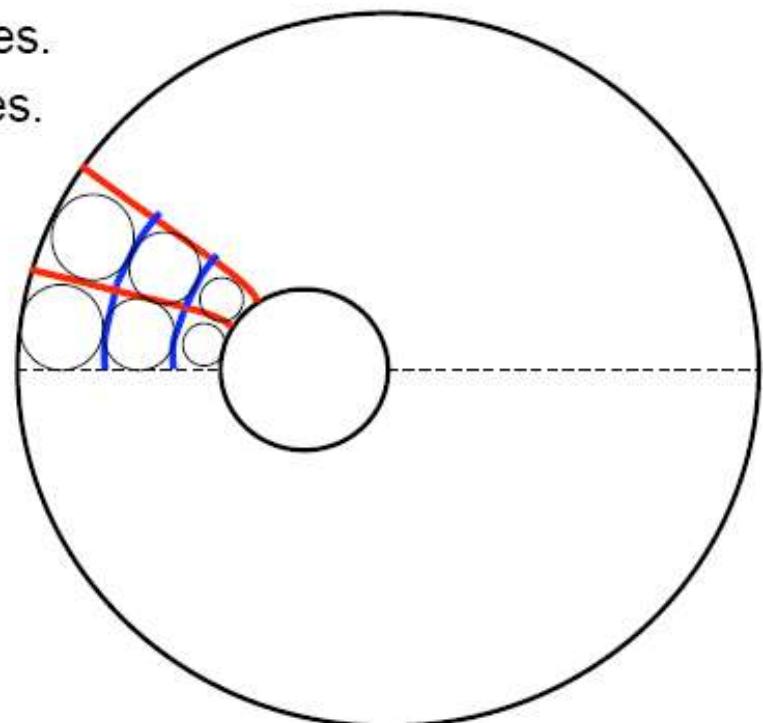
Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous.
- Lignes équipotentielles:
 - 0, 1, 2, 3 V
- Ligne de flux \perp lignes équipotentielles.
- Ligne de flux \perp surfaces conductrices.
- Carrés (cercles à l'intérieur).



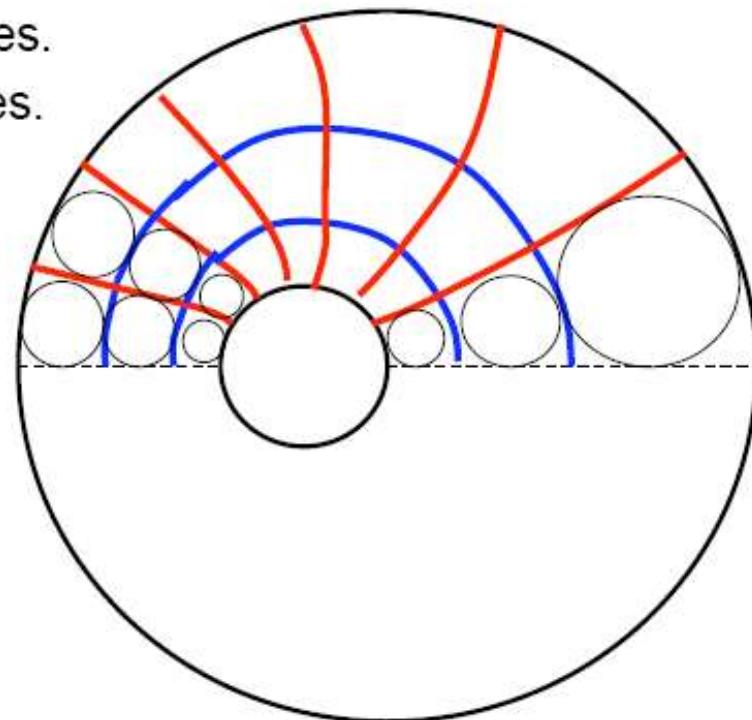
Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous.
- Lignes équipotentielles:
 - 0, 1, 2, 3 V
- Ligne de flux \perp lignes équipotentielles.
- Ligne de flux \perp surfaces conductrices.
- Carrés (cercles à l'intérieur).



Cartographie des champs : exemple

- Symétrie par rapport à une ligne horizontale centrale.
- Champ au-dessus = champ au-dessous.
- Lignes équipotentielles:
 - 0, 1, 2, 3 V
- Ligne de flux \perp lignes équipotentielles.
- Ligne de flux \perp surfaces conductrices.
- Carrés (cercles à l'intérieur).



Calcul de la capacité d'une cellule curviligne

- Capacité d'une cellule curviligne.

- Condensateur plan
 - Plans équipotentiels.
 - Champ uniforme.

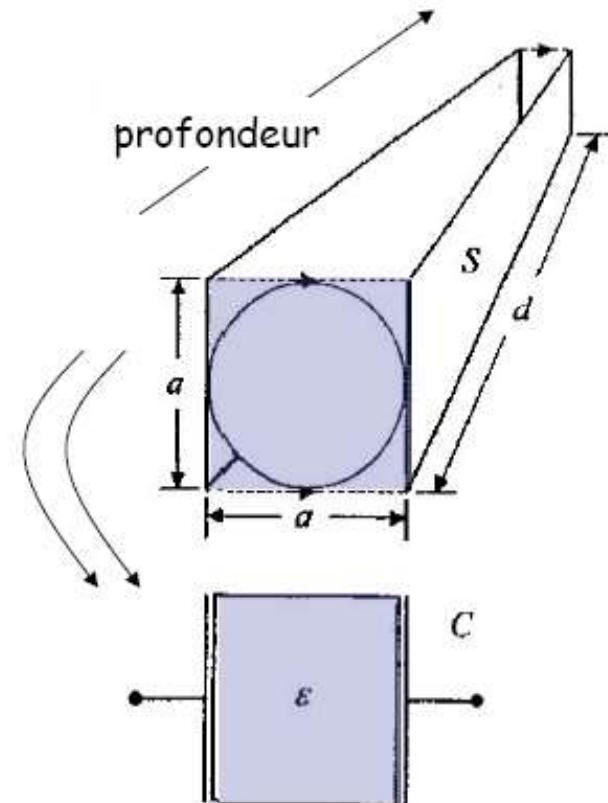
- Capacité : $C = \frac{\epsilon S}{a}$

$$C = \frac{\epsilon(ad)}{a} = \epsilon d \quad \Sigma$$

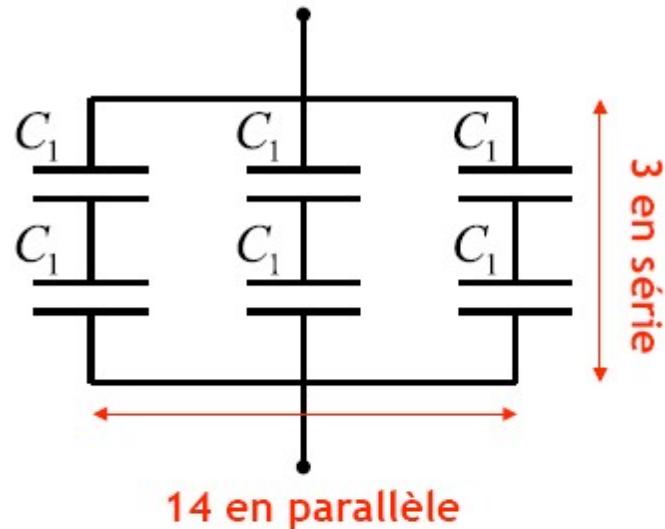


La capacité ne dépend pas des dimensions du carré.

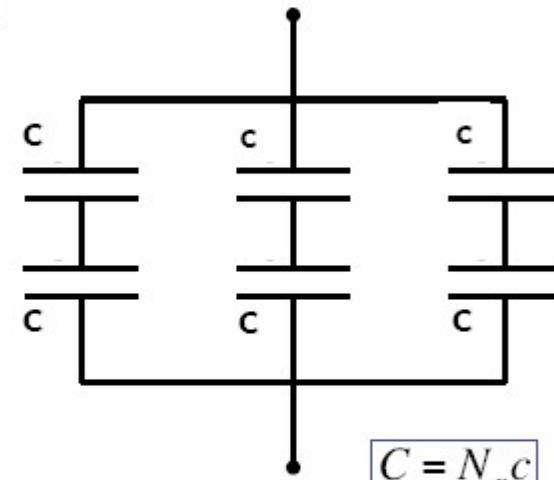
Toutes les cellules ont la même capacité.



Calcul de la capacité totale

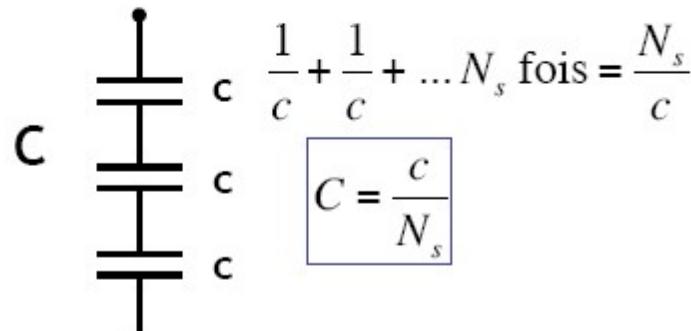


- Les capacités en parallèle s'ajoutent
- Les capacités en séries divisent le potentiel



$$C = N_p c$$

Conducteur central



Gaine

$$C_{tot} = \frac{N_p c}{N_s}$$

Cartographie des champs : exemple

- capacité :

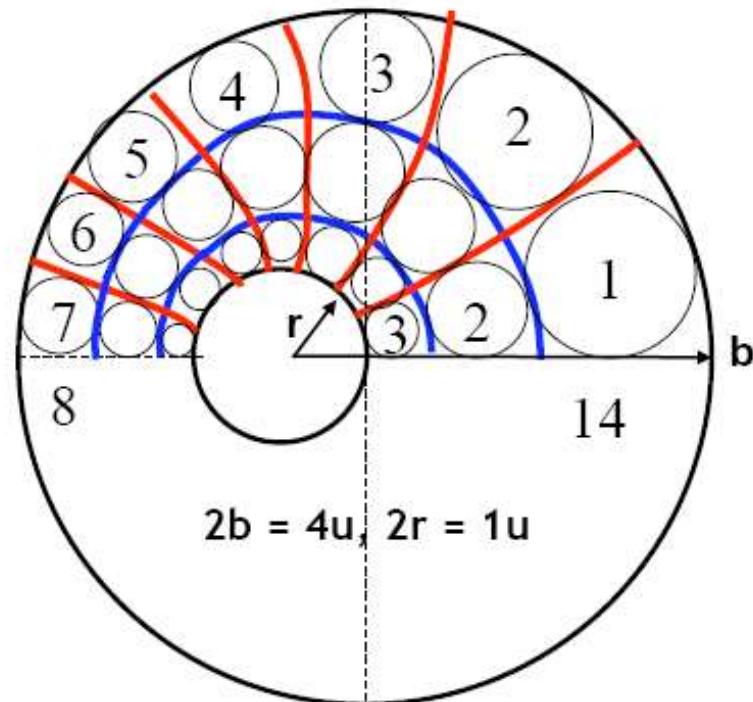
$$C \approx \frac{N_p \epsilon d}{N_s} = \frac{14 \epsilon d}{3} \approx 4,7 \epsilon d$$

Solution analytique :

$$C = \frac{-2\pi \epsilon d}{\ln\left(\frac{b}{2r} - \sqrt{\left(\frac{b}{2r}\right)^2 - 1}\right)} = 4,77 \epsilon d$$

Solution pour un câble coaxial « normal » :

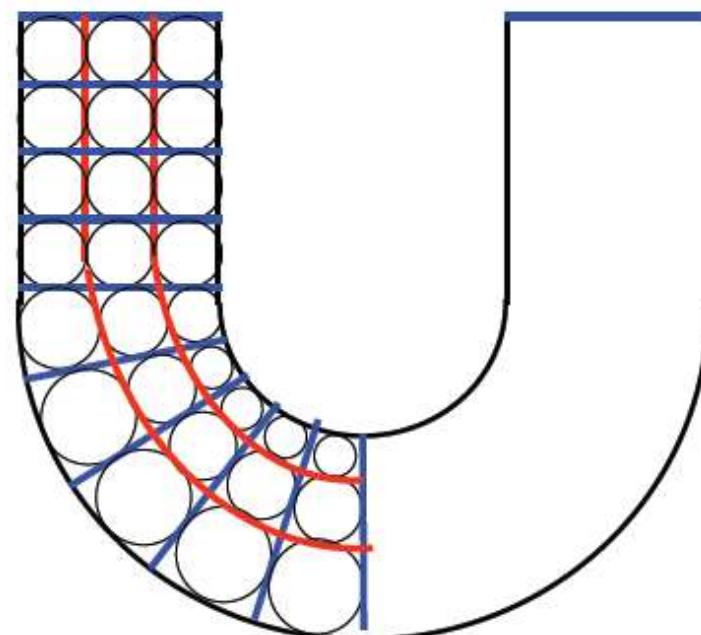
$$C = \frac{2\pi \epsilon d}{\ln\left(\frac{b}{r}\right)} = 4,53 \epsilon d$$



On peut faire un réseau plus fin pour augmenter la précision.
Par exemple : faire les lignes équipotentielles à $V/6$ au lieu de $V/3$.

Cartographie du courant : exemple

- Symétrie par rapport d'un plan central.
- Lignes équipotentielles : contacts.
- Lignes de courant : \perp lignes équipotentielles.
- Nombre de lignes de courant : 3.
- Lignes équipotentielles \perp surfaces isolantes.
- Densité de courant plus élevée à l'intérieur du « virage ».



Calcul de la résistance d'une cellule curviligne

- résistance d'une cellule curviligne.

- barreau conducteur homogène
 - Plans équipotentiels.
 - Champ uniforme.

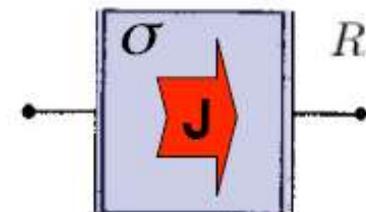
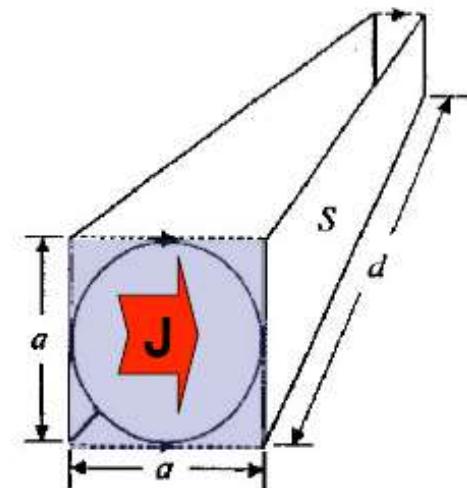
- résistance :

$$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

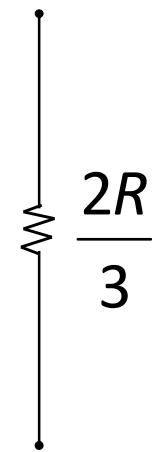
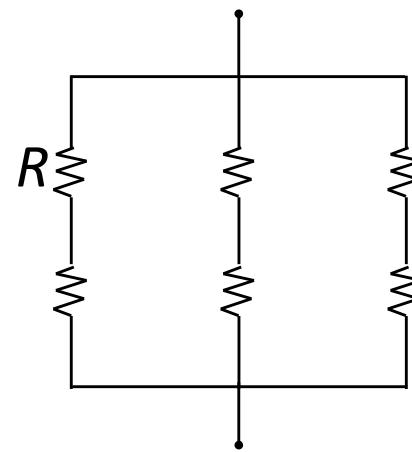
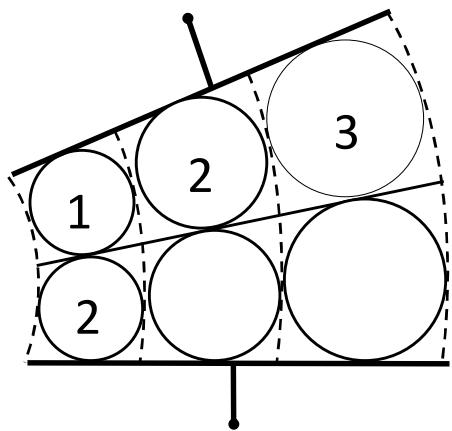
$$r = \frac{a}{\sigma ad} = \frac{1}{\sigma d}$$



La résistance ne dépend pas de la section de la cellule curviligne.
Toutes les cellules ont la même résistance.



Méthode graphique: calcul de la résistance



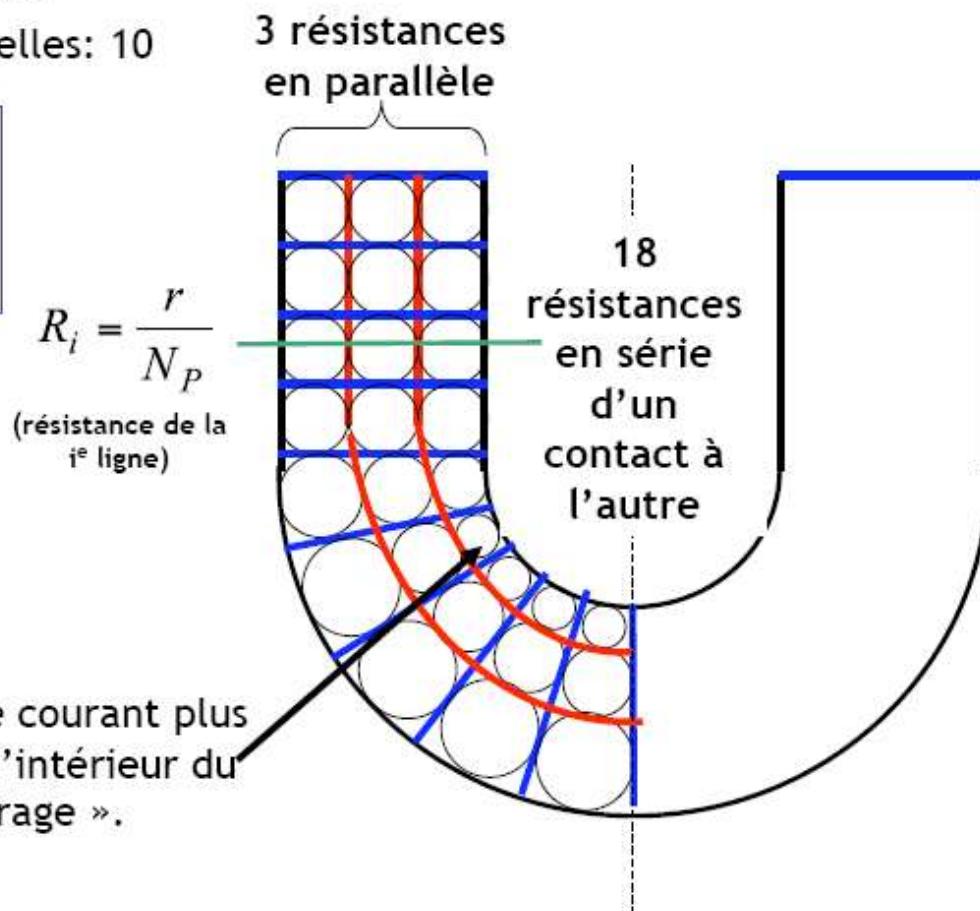
Calcul de la résistance totale

nos choix:

- Nombre de lignes de courant : 3.
- Nombre de lignes équipotentielles: 10

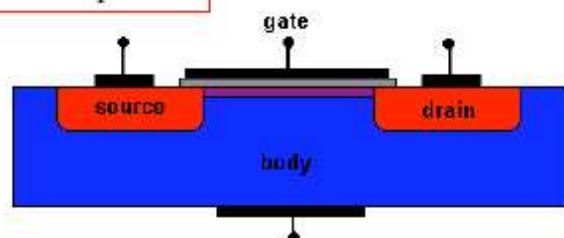
$$R_{tot} = \sum_{i=1}^{N_S} R_i = \frac{N_S}{N_P} r$$

$$R_{tot} = \frac{N_S}{N_P} \frac{1}{\sigma d} \quad \Sigma$$

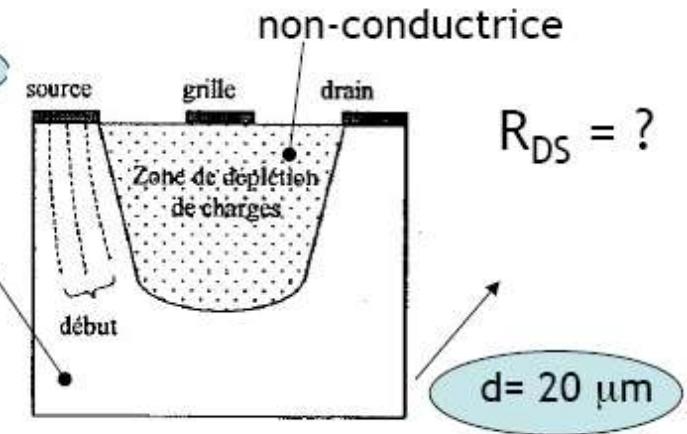


Transistor à effet de champ : exemple

$$R = \frac{N_s}{N_p} \frac{1}{\sigma d}$$

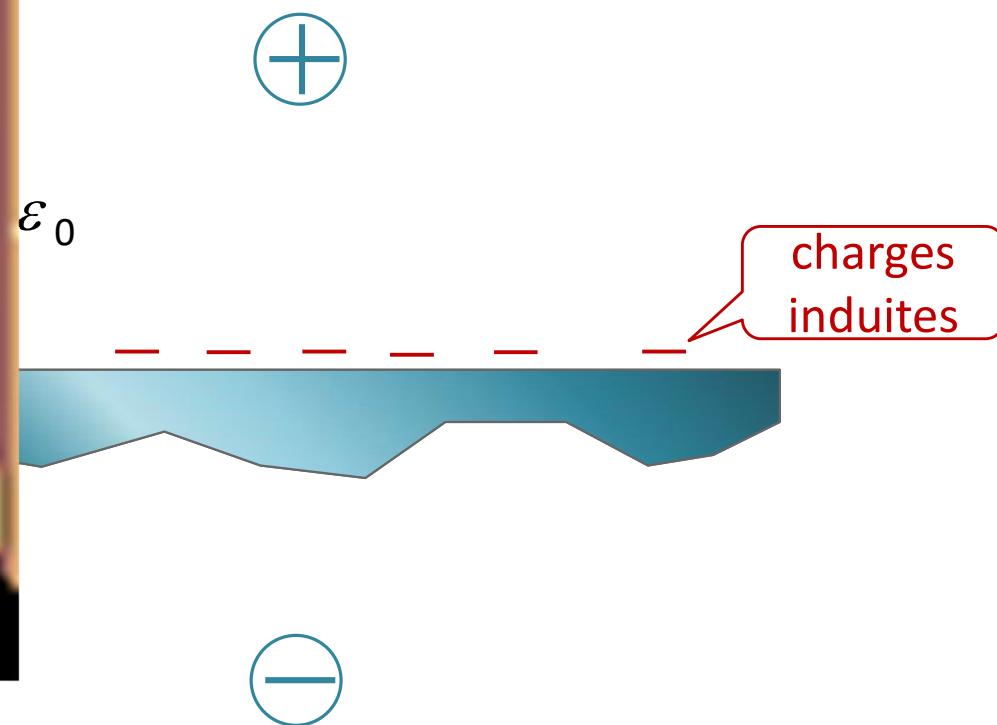


$$\sigma = 700 \text{ S/m}$$

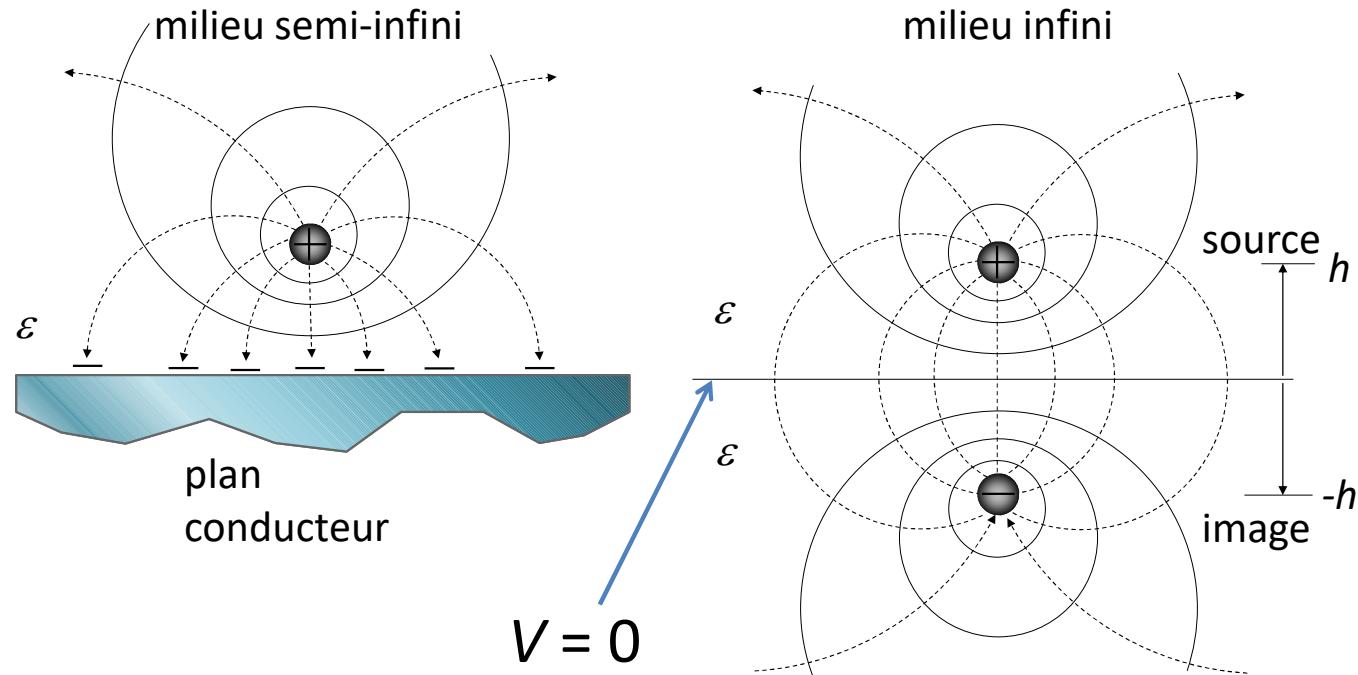


$$R_{DS} = ?$$

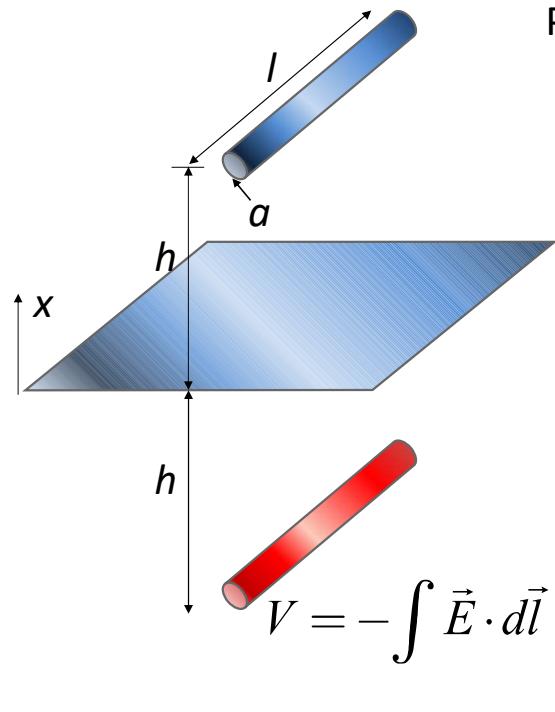
Théorie des images



Théorie des images



Capacité d'une ligne aérienne

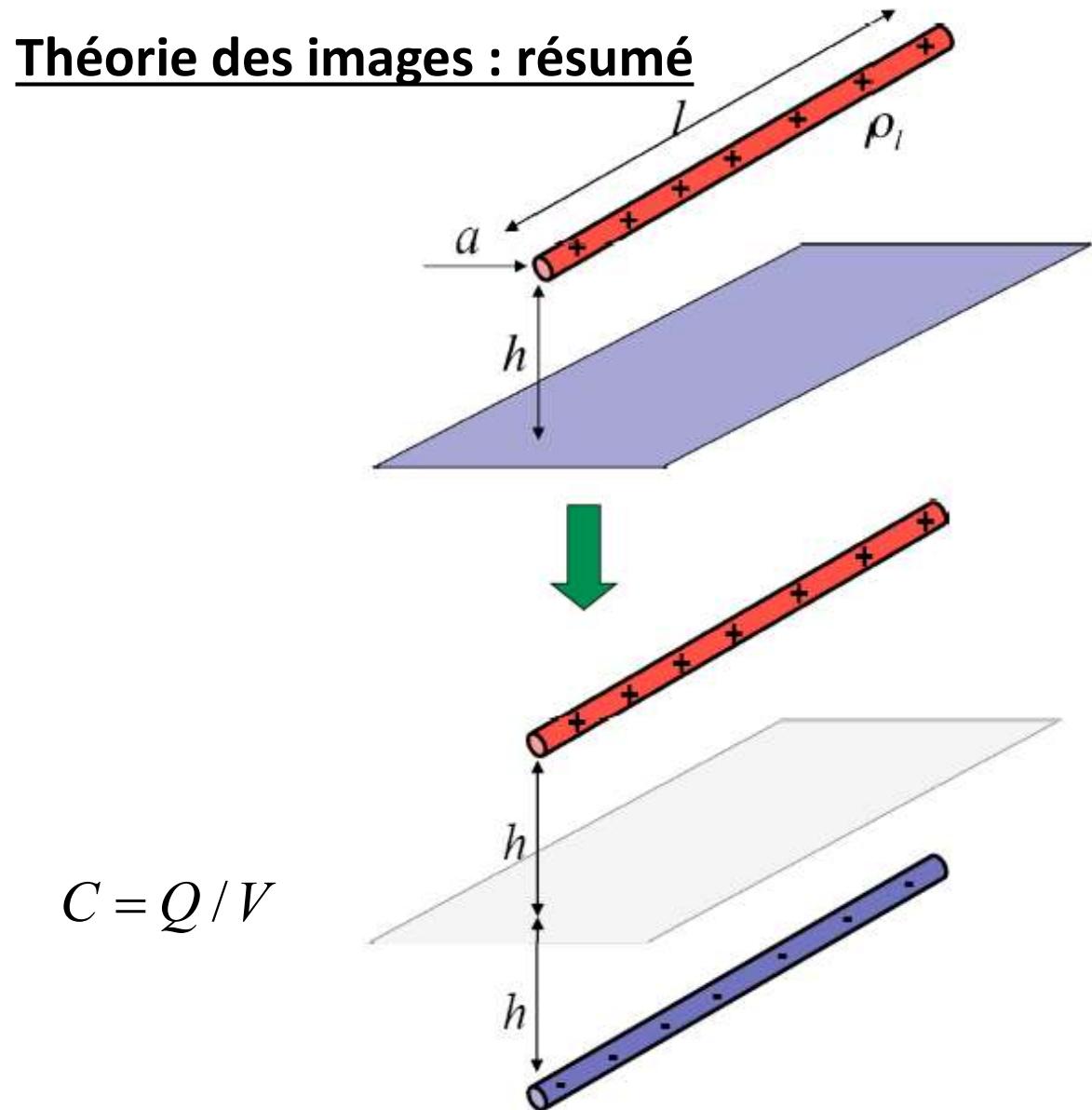


Superposition d'une ligne source à $x=+h$
et d'une ligne image à $x=-h$ (cartésien):

$$\vec{E} = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h+x} + \frac{1}{h-x} \right) \hat{x}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left(\frac{2h-a}{a} \right)}$$

Théorie des images : résumé

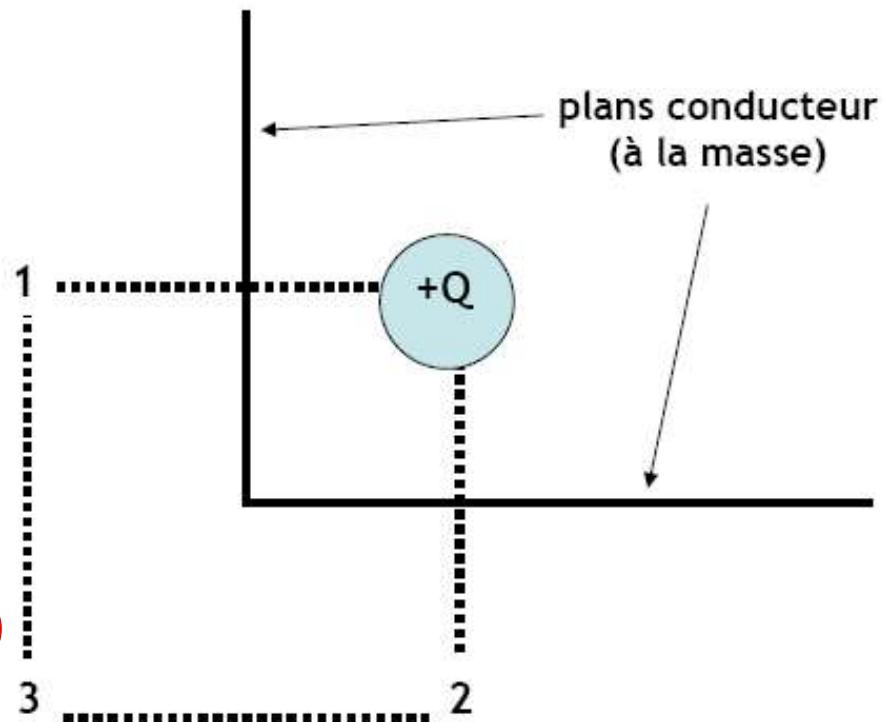


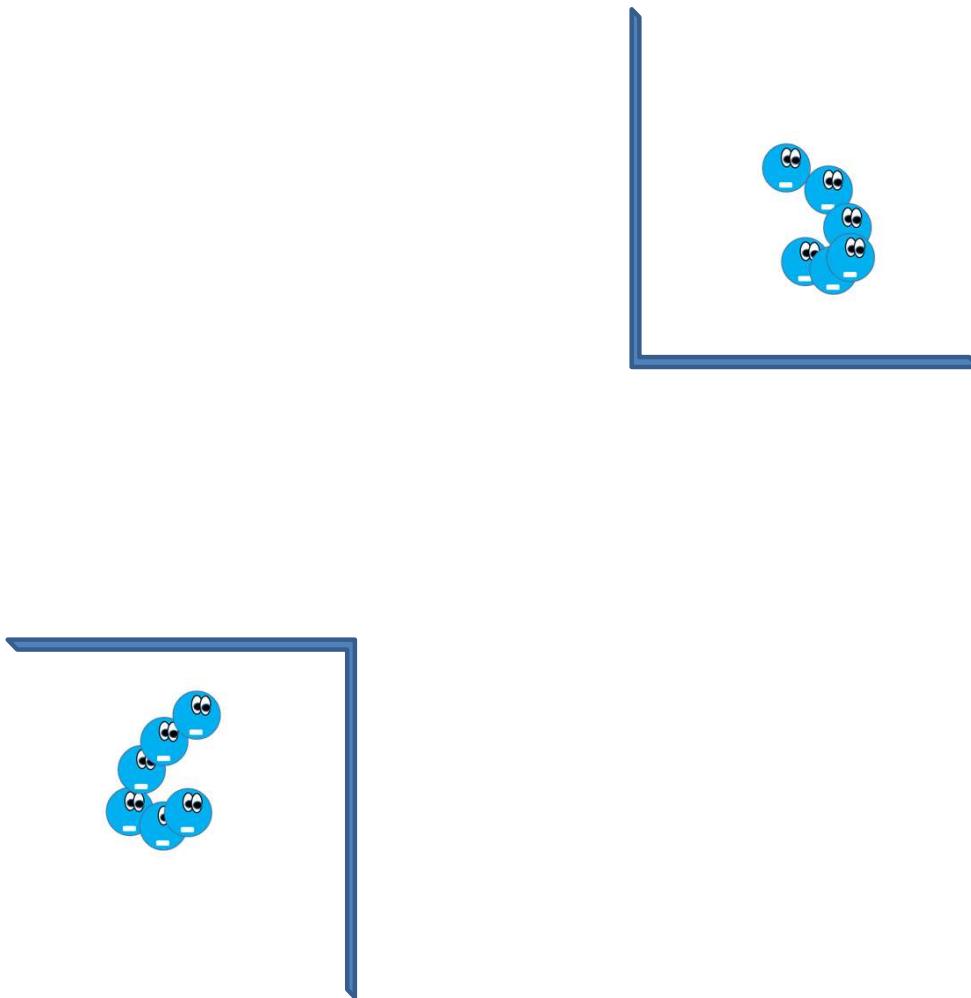
Théorie des images : Quiz !

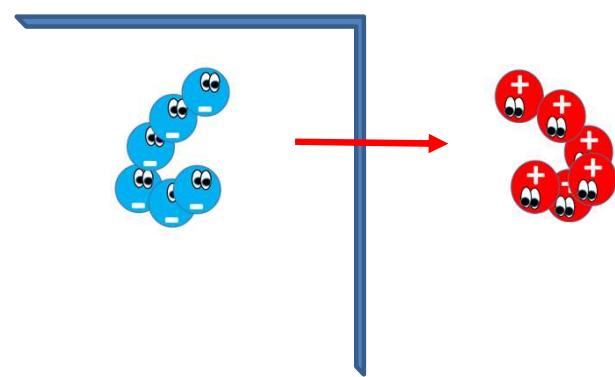
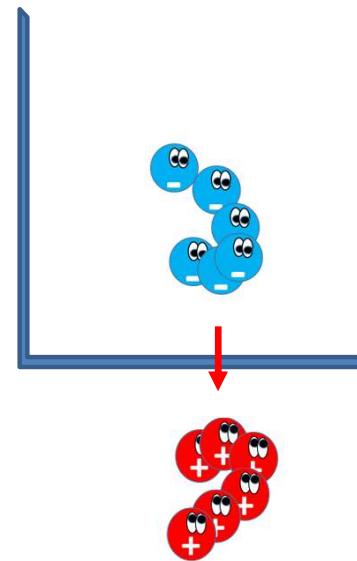
Une charge $+Q$ est située près de deux plans conducteurs: un plan horizontal et un plan vertical. Ces deux plans sont mis à la masse. Pour calculer le champ électrique, nous désirons remplacer ces plans par des charges images. Quel doit être l'arrangement des charges images?

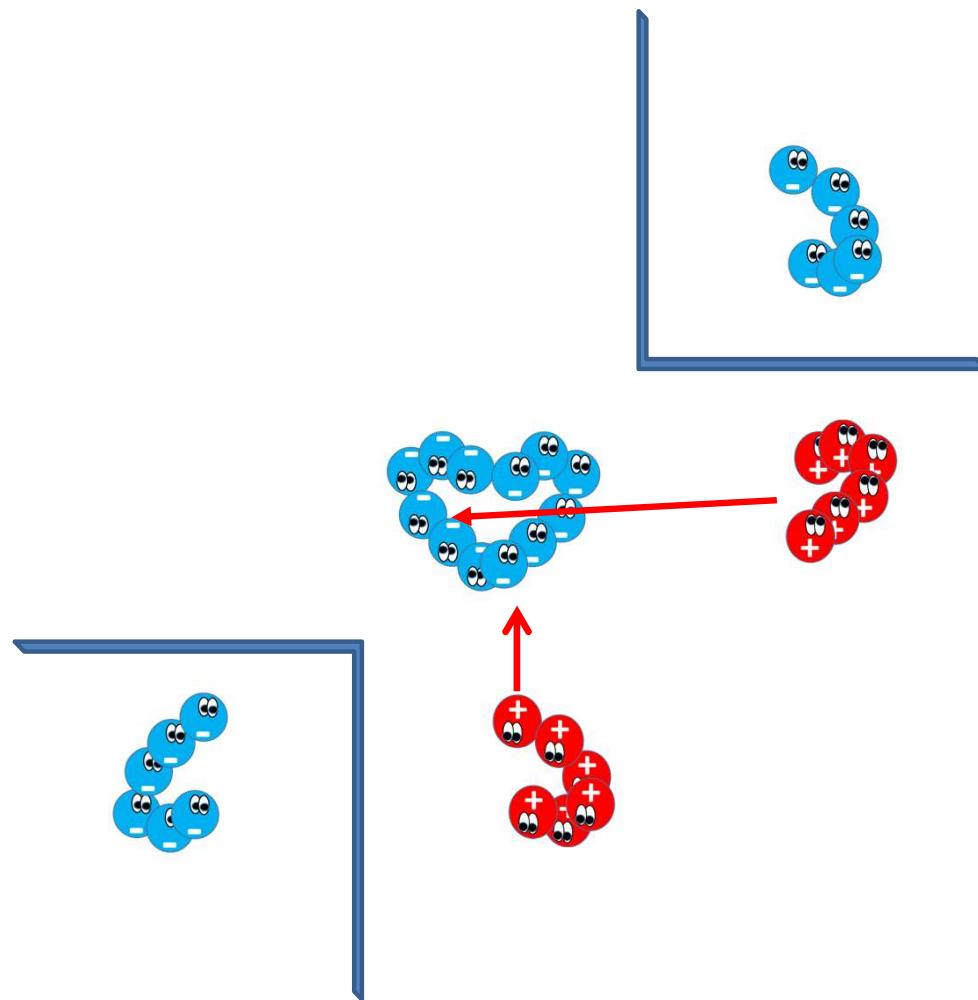
Choix de réponse

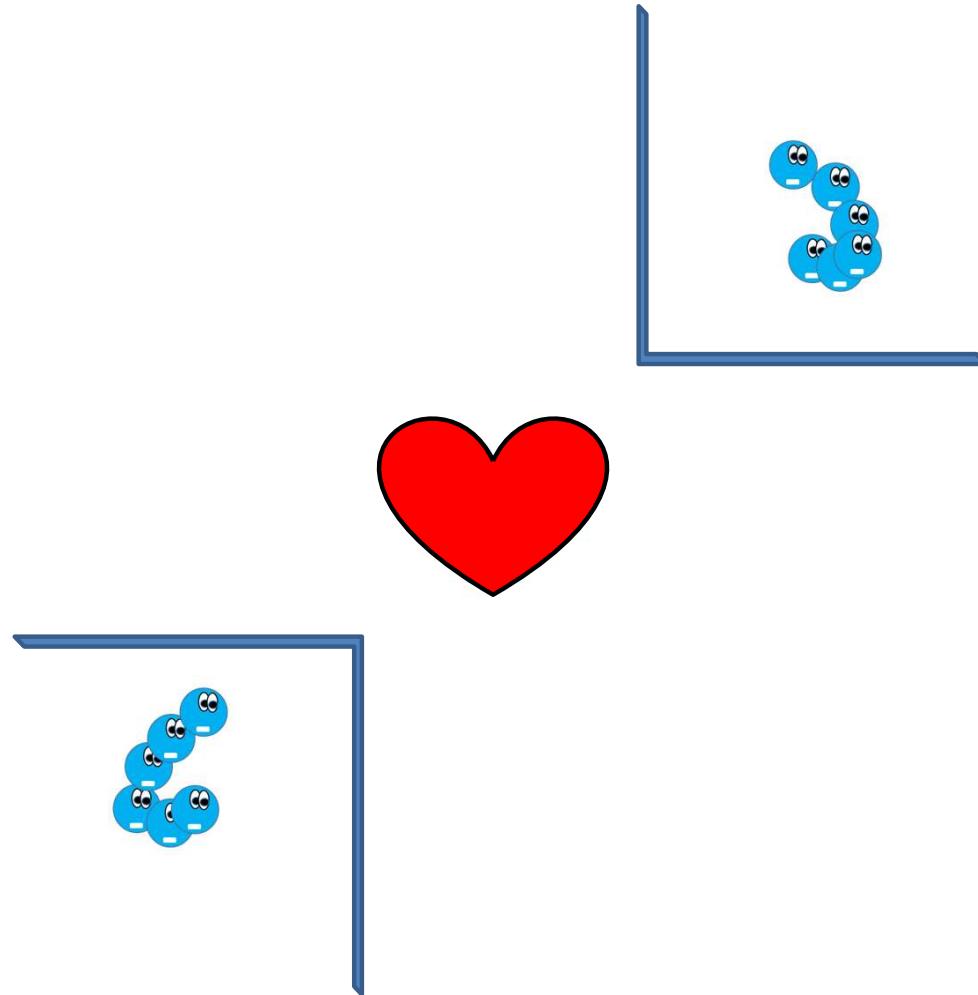
- a. charge $-Q$ au point 1;
charge $-Q$ au point 2;
charge $-2Q$ au point 3.
- b. charge $-Q$ au point 1;
charge $-Q$ au point 2.
- c. charge $-Q$ au point 1;
charge $-Q$ au point 2;
charge $+2Q$ au point 3.
- d. charge $-Q$ au point 1;
charge $-Q$ au point 2;
charge $+Q$ au point 3.

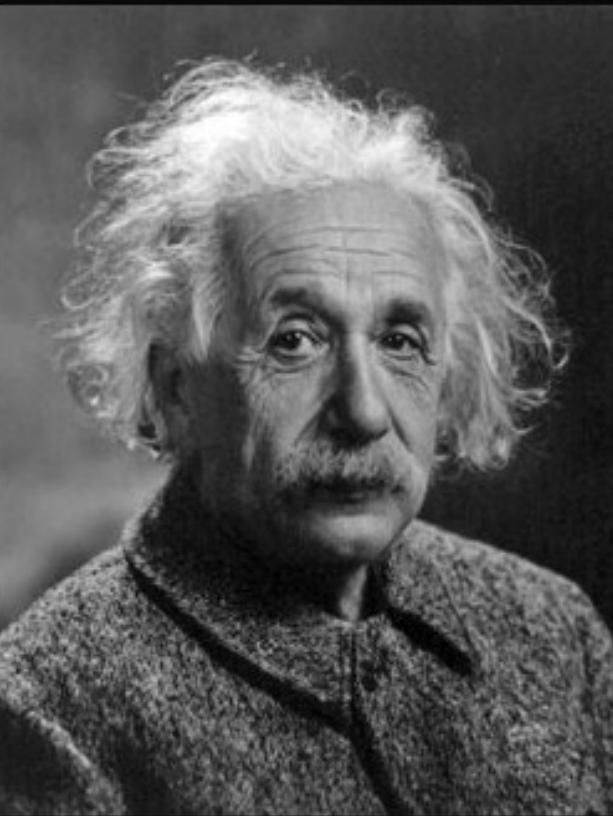










A black and white portrait of Albert Einstein, showing him from the chest up. He has his characteristic wild, white hair and a well-groomed, light-colored beard and mustache. He is looking slightly to the right of the camera with a thoughtful expression.

Never regard study as a duty, but as the
enviable opportunity to learn

for your own personal joy and to the
profit of the community to which your later
work belongs.

(Albert Einstein)

– PHS1102 –

Champs électromagnétiques

Chapitre 6 – Équation de Laplace

1^{re} équation de Maxwell

Équation de Poisson

Équation de Laplace

Solutions analytiques en 1D (cas symétriques)

Résolution numérique par différences finies

Objectifs de la semaine

1^{re} loi de Maxwell

- Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle afin d'obtenir la 1^{re} loi de Maxwell.

Équation de Laplace

- Écrire l'équation de Laplace qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.

Résolution analytique de
l'équation de Laplace
(cas symétriques en 1D)

- Déterminer le potentiel dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.

Résolution numérique de
l'équation de Laplace
par différences finies

- Appliquer la méthode des différences finies pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

Objectifs de la semaine

1^{re} loi de Maxwell

- Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle afin d'obtenir la 1^{re} loi de Maxwell.

Équation de Laplace

- Écrire l'équation de Laplace qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.

Résolution analytique de
l'équation de Laplace
(cas symétriques en 1D)

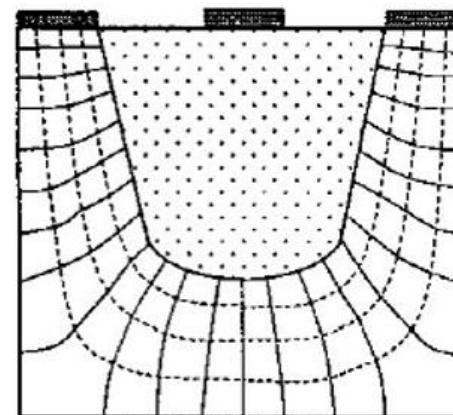
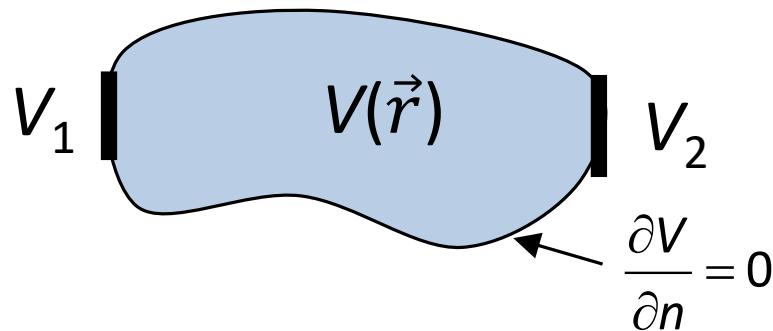
- Déterminer le potentiel dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.

Résolution numérique de
l'équation de Laplace
par différences finies

- Appliquer la méthode des différences finies pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

Comment résoudre pour une situation générale ?

Comment calculer le potentiel dans une région soumise à des conditions frontières, sans devoir calculer le champ électrique ?



Exemple

Quel est le potentiel $V(\vec{r})$ dans un matériau conducteur mis en contact avec deux électrodes maintenues à des potentiels constants V_1 et V_2 ? Le conducteur est entouré d'un matériau isolant (air).

On souhaite développer une équation différentielle qui permet de décrire le potentiel dans la région sans avoir à calculer le champ électrique ou la charge sur les électrodes.

Pour cela, il faut réécrire la loi de Gauss et l'équation de continuité du courant sous leur forme différentielle grâce à l'opérateur divergence.

Réécrivons la loi de Gauss...

Appliquons la loi de Gauss à un volume élémentaire $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

$$\Delta Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

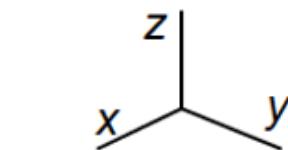
$$\Delta Q = \oint_{S_1 \cup \dots \cup S_6} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\Delta Q = (D_x^+ S_1 - D_x^- S_2) + (D_y^+ S_3 - D_y^- S_4) + (D_z^+ S_5 - D_z^- S_6)$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{D_x^+ - D_x^-}{\Delta x} + \frac{D_y^+ - D_y^-}{\Delta y} + \frac{D_z^+ - D_z^-}{\Delta z}$$

Densité volumique de charge

$$\rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

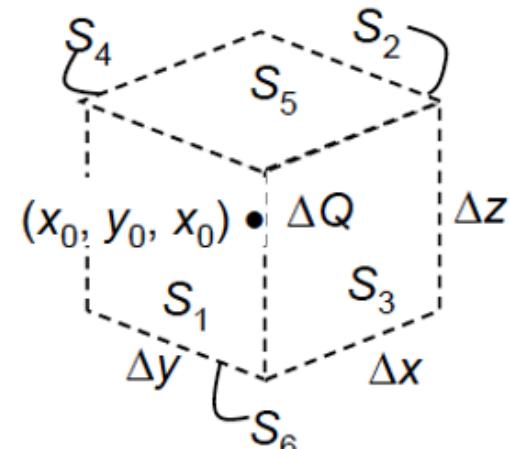


$$S_1 = S_2 = \Delta y \Delta z$$

$$S_3 = S_4 = \Delta x \Delta z$$

$$S_5 = S_6 = \Delta x \Delta y$$

D^+ : faces avant (1, 3 et 5) D^- : faces arrière (2, 4 et 6)



Signes : \vec{D} positif dans le sens positif des axes.

On remplace les S_i et on divise l'équation par ΔV .

On prend la limite quand les dimensions du volume tendent vers 0.

Opérateur divergence

L'équation obtenue peut se réécrire en utilisant l'**opérateur divergence**.

$$\rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Opérateur divergence en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, on obtient la divergence d'un champ vectoriel $\vec{F}(\vec{r})$ en prenant le produit scalaire avec l'opérateur gradient.

Champ vectoriel \vec{F} $\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$

Gradient $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$



$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

L'opérateur divergence s'applique à un champ vectoriel et produit un champ scalaire.

Est-ce que l'opérateur divergence s'écrit de cette façon dans tous les systèmes de coordonnées ?

Opérateur divergence

Les expressions de l'opérateur divergence dans les différents systèmes de coordonnées se retrouvent à l'annexe 4 du manuel.

Champ vectoriel	Divergence	Champ scalaire
$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$	→	$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

Coordonnées cartésiennes

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques

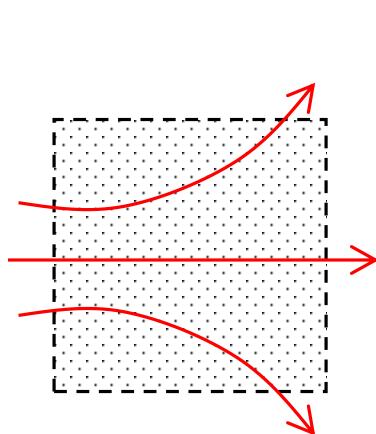
$$\nabla \cdot \vec{F}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques

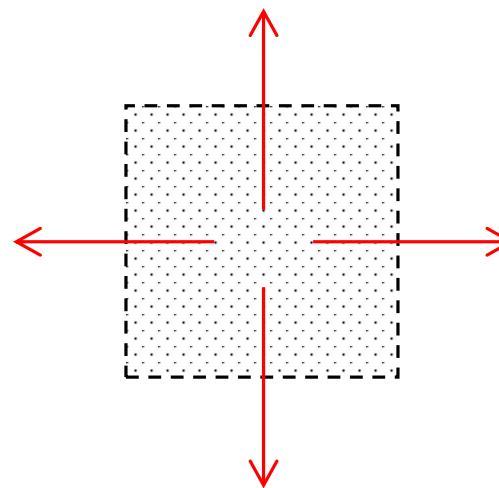
$$\nabla \cdot \vec{F}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

Interprétation de l'opérateur divergence

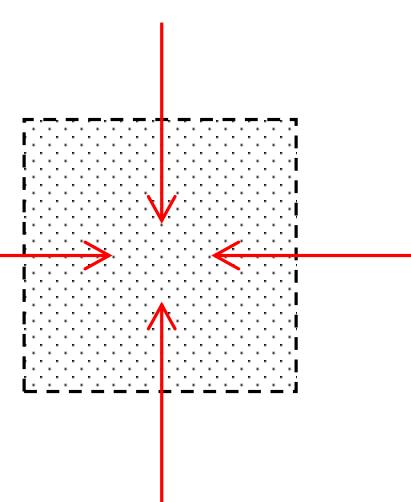
La divergence d'une quantité en un point donné représente le flux total de cette quantité qui sort d'un volume infinitésimal situé en ce point.



$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{D} > 0$$



$$\nabla \cdot \vec{D} < 0$$

1^{re} équation de Maxwell

Avec l'opérateur divergence, il est possible de relier la densité de flux électrique \vec{D} à la densité volumique de charge libre ρ_v .

$$\Delta Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$



$$\rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

La divergence de la densité de flux électrique est égale à la densité volumique de charge.

1^{re} équation de Maxwell

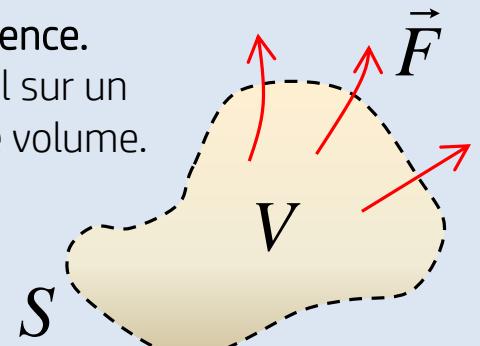
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

La 1^{re} équation de Maxwell est une équation différentielle équivalente à la loi de Gauss.

La 1^{re} équation de Maxwell découle du théorème de flux-divergence.

Le théorème relie l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume à l'intégrale du flux de ce champ sur la surface qui borne ce volume.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$



Objectifs de la semaine

1^{re} loi de Maxwell

- Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle afin d'obtenir la 1^{re} loi de Maxwell.

Équation de Laplace

- Écrire l'équation de Laplace qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.

Résolution analytique de
l'équation de Laplace
(cas symétriques en 1D)

- Déterminer le potentiel dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.

Résolution numérique de
l'équation de Laplace
par différences finies

- Appliquer la méthode des différences finies pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

Réécrivons la 1^{re} équation de Maxwell...

En exprimant la densité de flux en fonction du champ électrique, puis du potentiel dans la 1^{re} équation de Maxwell, on parvient à relier potentiel et densité de charge.

1^{re} équation de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

Relation entre \vec{D} et \vec{E}
(diélectrique linéaire et isotrope)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Relation entre \vec{E} et V

$$\vec{E} = -\nabla V$$

En remplaçant, on trouve :

Diélectrique homogène

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) \xrightarrow{\text{Diélectrique homogène}} \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon \nabla \cdot (-\nabla V) = -\epsilon \nabla^2 V$$

où l'opérateur ∇^2 est le laplacien scalaire (ou tout simplement laplacien). En coordonnées scalaires, le laplacien s'écrit :

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Opérateur laplacien

Les expressions de l'opérateur laplacien dans les différents systèmes de coordonnées se retrouvent à l'annexe 4 du manuel.

Champ scalaire

$$V(\vec{r})$$

Laplacien



Champ scalaire

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V)$$

Coordonnées cartésiennes

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordonnées cylindriques

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

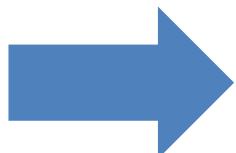
Équations de Poisson et de Laplace

dans un diélectrique homogène, linéaire et isotrope

1^{re} équation de Maxwell

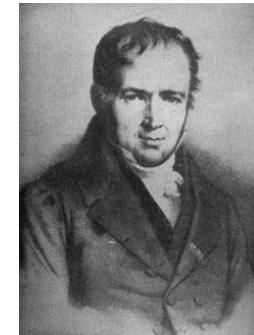
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = -\epsilon \nabla^2 V$$



Équation de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

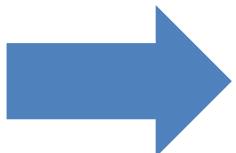


Siméon Denis Poisson
(1781-1840)

Si la densité de charge est nulle dans le diélectrique,
on a $\rho_v = 0$ et on trouve l'équation de Laplace.

Densité de charge nulle

$$\rho_v = 0$$



Équation de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$



Pierre-Simon de Laplace
(1749-1827)

Équation de Laplace

dans un conducteur homogène, linéaire et isotrope

L'équation de Laplace s'applique également dans les matériaux conducteurs dans lesquels circulent des courants stationnaires.

Équation de continuité (courants stationnaires)

Th. flux-divergence

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Relation entre \vec{J} et \vec{E}
dans un conducteur

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Relation entre \vec{E} et V

$$\vec{E} = -\nabla V$$

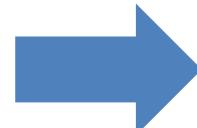
Par un développement similaire à celui qui a mené à l'équation de Laplace dans un diélectrique, on obtient ici l'équation de Laplace pour un conducteur.

$$\nabla \cdot \vec{J} = \sigma \nabla \cdot \vec{E}$$

$$= \sigma \nabla \cdot (-\nabla V)$$

$$= -\sigma \nabla^2 V = 0$$

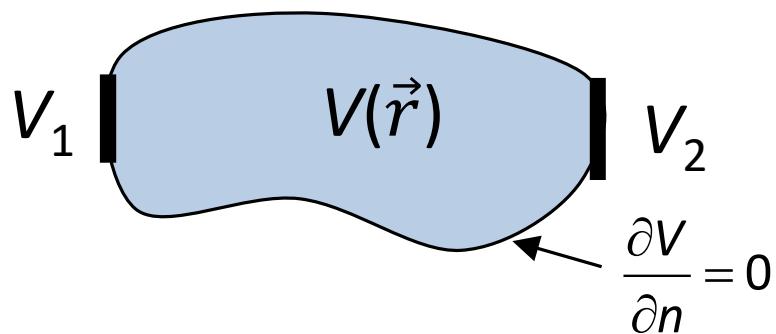
Équation de Laplace



$$\nabla^2 V = 0$$

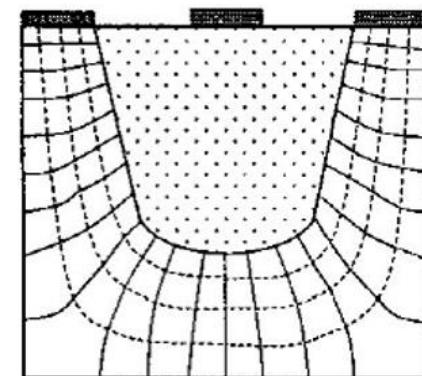
Résolution de l'équation de Laplace

L'équation de Laplace se résout sur une région en spécifiant des conditions frontières aux bords de cette région.



Équation de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$



L'objectif est donc de trouver la fonction potentiel $V(\vec{r})$ qui respecte simultanément :

1. L'équation de Laplace ;
2. Les conditions frontières spécifiées.

Théorème d'unicité de la solution

Il est possible de montrer qu'il n'existe qu'une seule fonction $V(\vec{r})$ qui respecte à la fois l'équation de Laplace et un ensemble donné de conditions frontières.

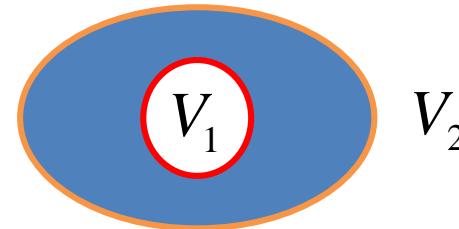
Types de conditions frontières

Dérivée directionnelle
selon le vecteur \hat{n}
normal à une surface.

$$\frac{\partial V}{\partial n} = (\nabla V) \cdot \hat{n}$$

1. Conditions de Dirichlet

$V(\vec{r})$ est connu sur toute la surface entourant le domaine.

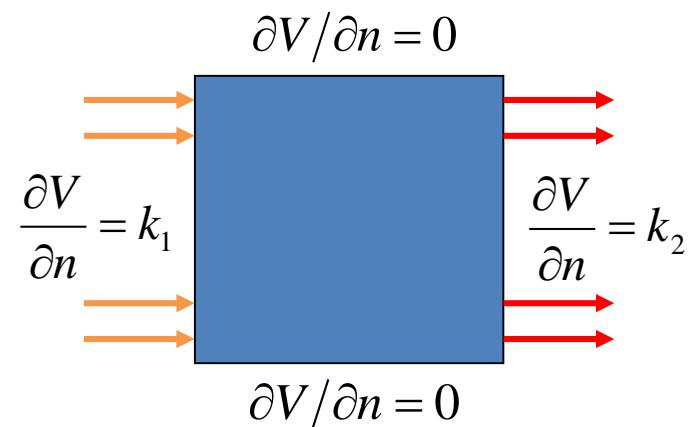


2. Conditions de Neumann

Dérivée normale de $V(\vec{r})$ est connue sur toute la surface entourant le domaine.

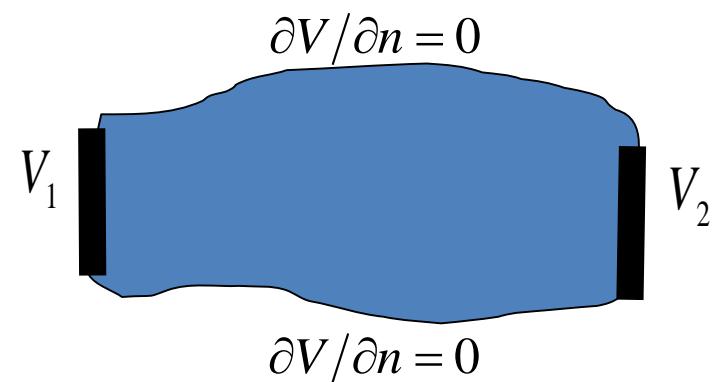
Que représente la dérivée normale du potentiel ?

Le champ électrique !



3. Conditions mixtes

$V(\vec{r})$ est connue sur une partie de la surface entourant le domaine et la dérivée normale de $V(\vec{r})$ est connue sur reste de la surface.



Objectifs de la semaine

1^{re} loi de Maxwell

- Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle afin d'obtenir la 1^{re} loi de Maxwell.

Équation de Laplace

- Écrire l'équation de Laplace qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.

Résolution analytique de
l'équation de Laplace
(cas symétriques en 1D)

- Déterminer le potentiel dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.

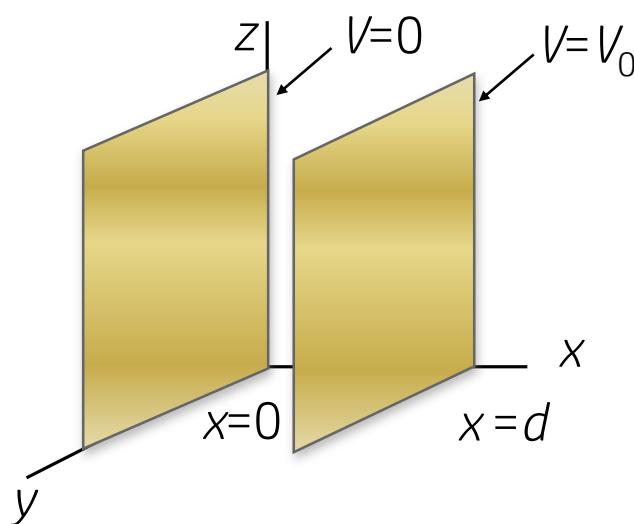
Résolution numérique de
l'équation de Laplace
par différences finies

- Appliquer la méthode des différences finies pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

Solutions 1D à l'équation de Laplace

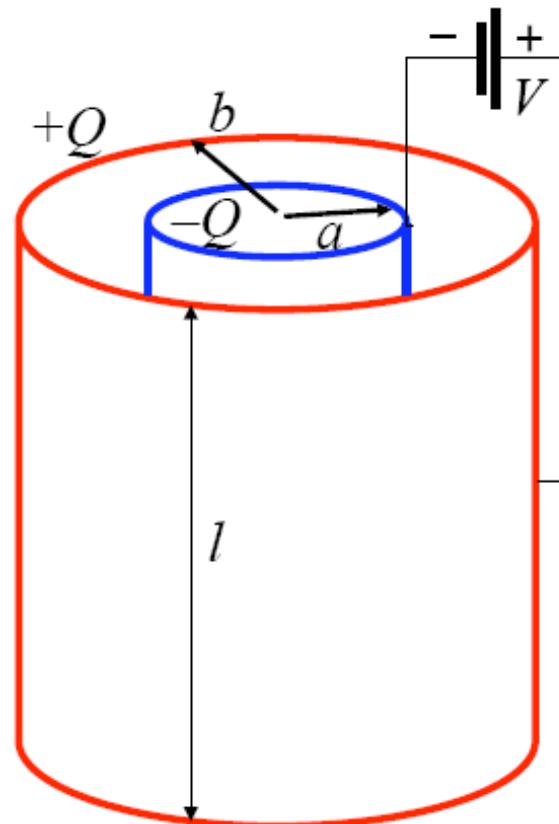
La solution analytique de l'équation de Laplace est connue pour certaines géométries simples où le potentiel ne dépend que d'une seule variable (1D).

Dans les situations suivantes, de quelle variable dépend le potentiel $V(\vec{r})$?



Condensateur plan à plaques parallèles
 $V(x)$

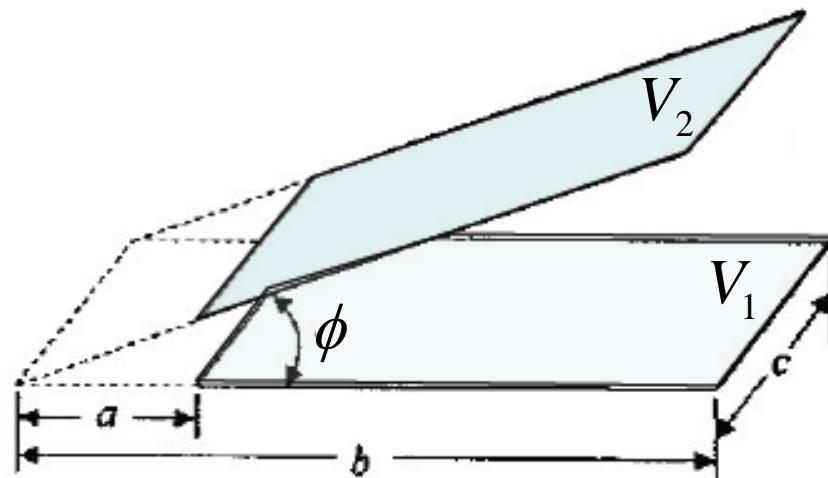
Câble coaxial
 $V(\rho)$



Solutions 1D à l'équation de Laplace

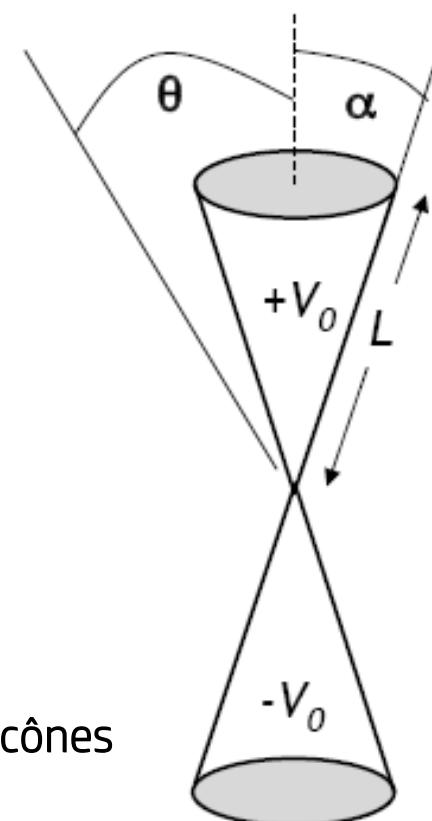
La solution analytique de l'équation de Laplace est connue pour certaines géométries simples où le potentiel ne dépend que d'une seule variable (1D).

Dans les situations suivantes, de quelle variable dépend le potentiel $V(\vec{r})$?



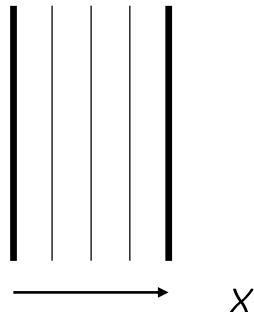
Condensateur plan en coin
 $V(\phi)$

Antenne doubles cônes
 $V(\theta)$



Solutions 1D à l'équation de Laplace

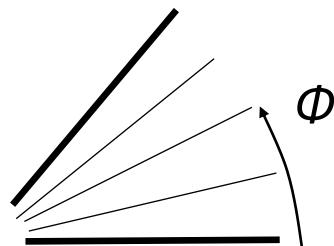
Cartésien



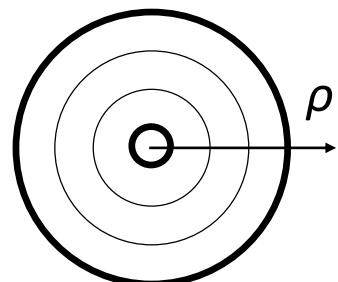
$$V(x) = Ax + B$$

Attention!
Les angles sont
exprimés en radians
et non en degrés.

Cylindrique

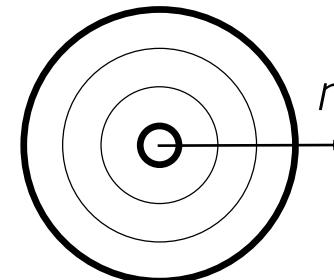


$$V(\phi) = A\phi + B$$

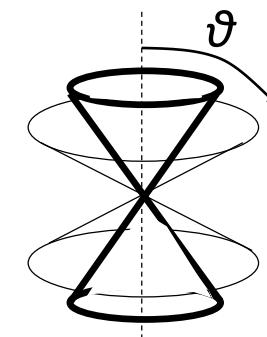


$$V(\rho) = A \ln \rho + B$$

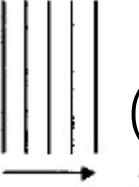
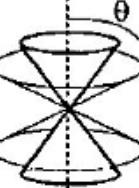
Sphérique



$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$



$$V(\theta) = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

Variables	Équation de Laplace	Solution générale
 x (ou y ou z)	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$	$V(x) = Ax + B$
 ϕ	$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$	$V(\phi) = A\phi + B$
 ρ	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$	$V(\rho) = A \ln(\rho) + B$
 r	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$	$V(r) = \frac{A}{r} + B$
 θ	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$	$V(\theta) = A \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] + B$

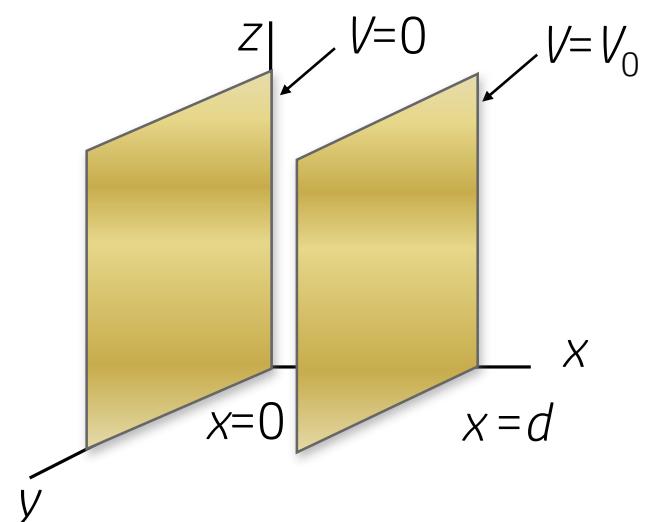
Exemple 6.1 – Potentiel dans un condensateur plan

Quelle est la distribution de potentiel $V(\vec{r})$ entre les armatures du condensateur ?

1. Symétrie

On néglige les effets de bord (armatures très grandes par rapport à d), de sorte que V dépend de x seulement.

$$V(\vec{r}) = V(x)$$



2. Choix de la solution à l'équation de Laplace

La solution pour une symétrie cartésienne est :

$$\nabla^2 V = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad V(x) = Ax + B$$

Comment déterminer les constantes A et B ?

Exemple 6.1 – Potentiel dans un condensateur plan

3. Conditions frontières

Le potentiel est spécifié sur les deux armatures.
Nous avons deux conditions pour déterminer les deux constantes A et B .

$$V(x) = Ax + B$$

$$V(0) = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$V(d) = V_0 \quad \rightarrow \quad Ad = V_0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{V_0}{d}$$

La solution est donc :

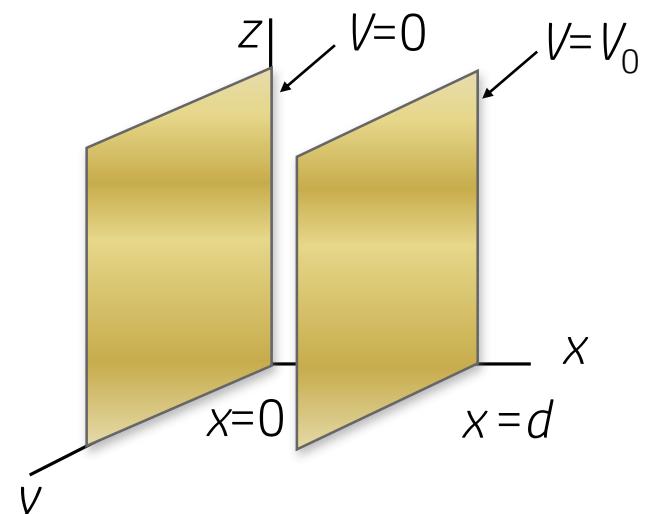
$$V(x) = \frac{V_0}{d} x$$

Une bonne habitude est de vérifier si la solution respecte bien les conditions frontières pour éviter les erreurs d'algèbre.

Est-ce cohérent avec les résultats des chapitres précédents ?

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_0}{d} \hat{x}$$

Oui, le champ électrique est constant, perpendiculaire aux armatures et orienté de l'armature positive vers l'armature négative.



Exemple 6.1 – Potentiel dans un condensateur plan

Que trouve-t-on pour la capacité du condensateur ?

Densité de flux entre les armatures

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{x} \quad \rightarrow \quad \vec{D} = -\frac{\epsilon V_0}{d} \hat{x}$$

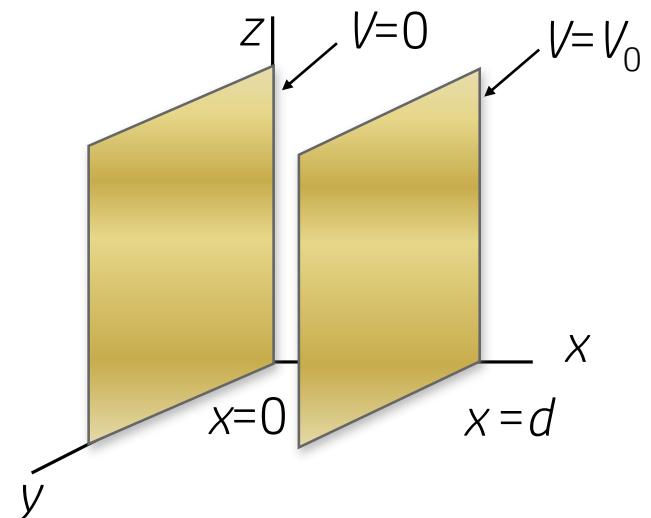
Interface diélectrique-conducteur (à $x = d$)

Pour avoir le bon signe pour la densité de charge ρ_s , il faut bien appliquer la condition frontière. La condition a été trouvée avec D_{1N} positif qui pointe du conducteur vers le diélectrique (vers les x négatifs ici). Dans ce problème, \vec{D} pointe vers les x négatifs, ce qui donne une densité de charge positive en $x = d$.

$$D_{1N} = \rho_s \quad \rightarrow \quad \rho_s = \frac{Q}{S} = \frac{\epsilon V_0}{d}$$

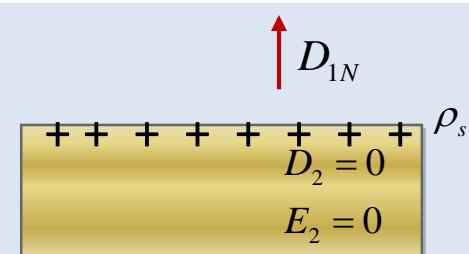
La capacité est donc :

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}$$



RAPPEL

$$D_{1N} = \rho_s$$



On retrouve bel et bien le résultat du chapitre 3 !

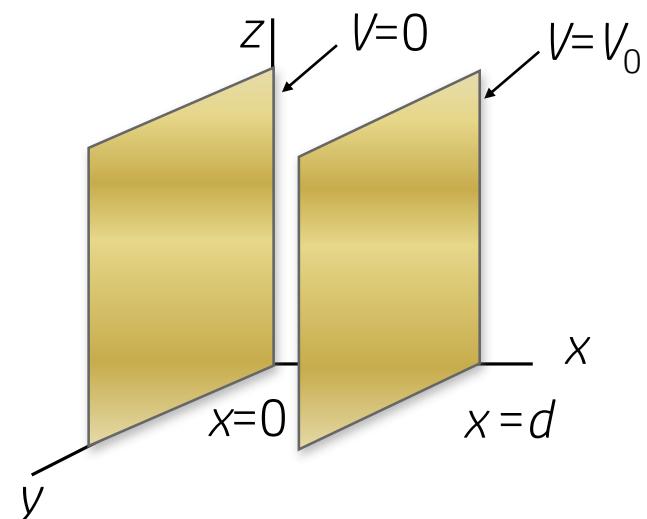
Retour sur l'unicité de la solution à l'équation de Laplace

Équation de Laplace

Si l'on ne spécifie pas de conditions frontières, il existe une infinité de solutions qui respectent l'équation de Laplace pour cette géométrie.

Symétrie

$$\nabla^2 V = 0 \quad \rightarrow \quad V(x) = Ax + B$$



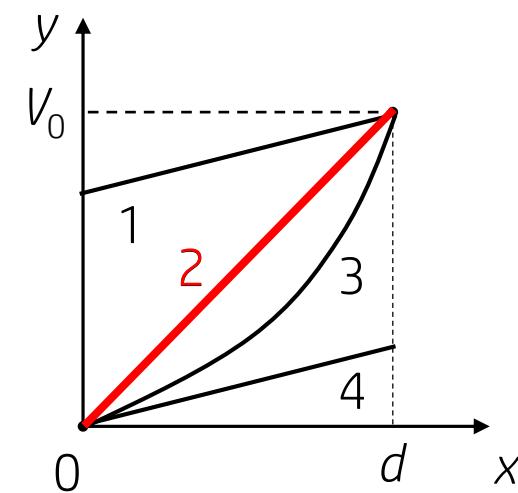
Courbes 1 et 4 : Solutions à l'équation de Laplace, mais ne respectent pas l'une des deux conditions frontières

Courbe 3 : Respecte les conditions frontières, mais n'est pas solution à l'équation de Laplace

Courbe 2 : Seule courbe à respecter simultanément l'équation de Laplace et les conditions frontières

$$V(0) = 0$$

$$V(d) = V_0$$



Objectifs de la semaine

1^{re} loi de Maxwell

- Écrire la loi de Gauss sous forme différentielle afin d'obtenir la 1^{re} loi de Maxwell.

Équation de Laplace

- Écrire l'équation de Laplace qui décrit le potentiel dans un milieu avec une densité de charge nulle.

Résolution analytique de
l'équation de Laplace
(cas symétriques en 1D)

- Déterminer le potentiel dans une région symétrique en choisissant la solution analytique de l'équation de Laplace en 1D et en appliquant les conditions frontières appropriées.

Résolution numérique de
l'équation de Laplace
par différences finies

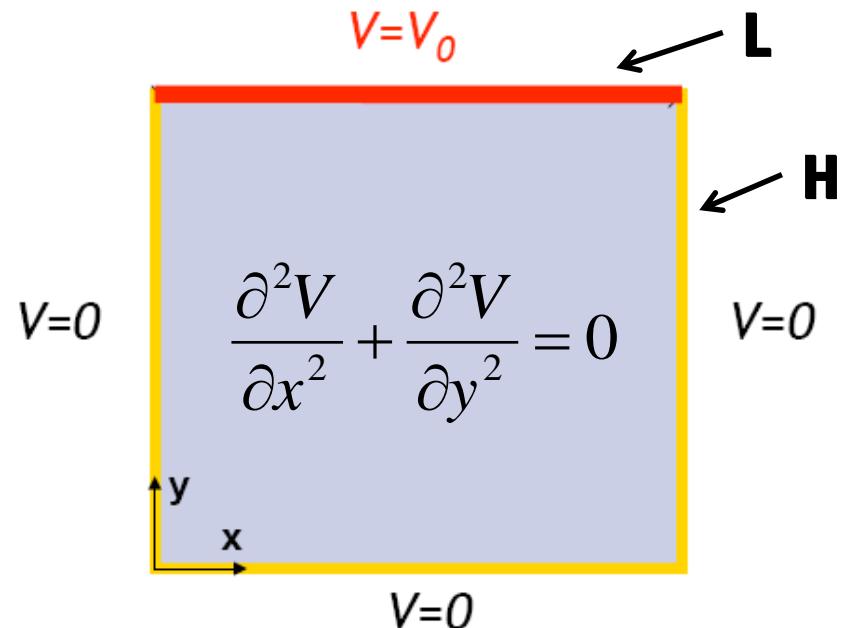
- Appliquer la méthode des différences finies pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

Comment résoudre pour une situation générale ?

Il peut être complexe de résoudre l'équation de Laplace en 2D, même pour des problèmes en l'apparence simples.

Exemple

Domaine rectangulaire avec potentiel nul sur 3 des 4 faces et potentiel V_0 sur la face du haut.



Une solution analytique existe pour ce problème, mais elle est passablement complexe...

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}y\right)}{\sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}H\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)$$

En général, pour résoudre un problème dont la solution analytique est inconnue ou trop complexe à obtenir, on utilise des méthodes de résolution numériques.

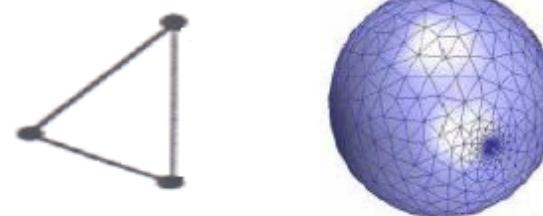
Méthodes de résolution numériques

L'idée générale d'une méthode numérique est de **discrétiser le domaine de résolution pour créer un maillage** (un ensemble de points) sur lequel une **solution numérique approximative** peut être calculée. Plus le maillage est fin, plus la solution numérique s'approche de la solution analytique.

méthode des éléments finis:
éléments de volume (3D)

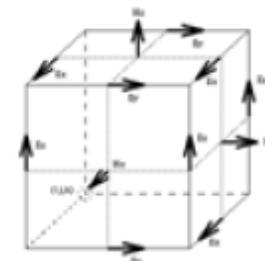
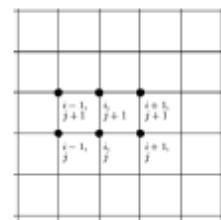


méthode des éléments frontières:
éléments de surface (triangles)
séparant des régions différentes



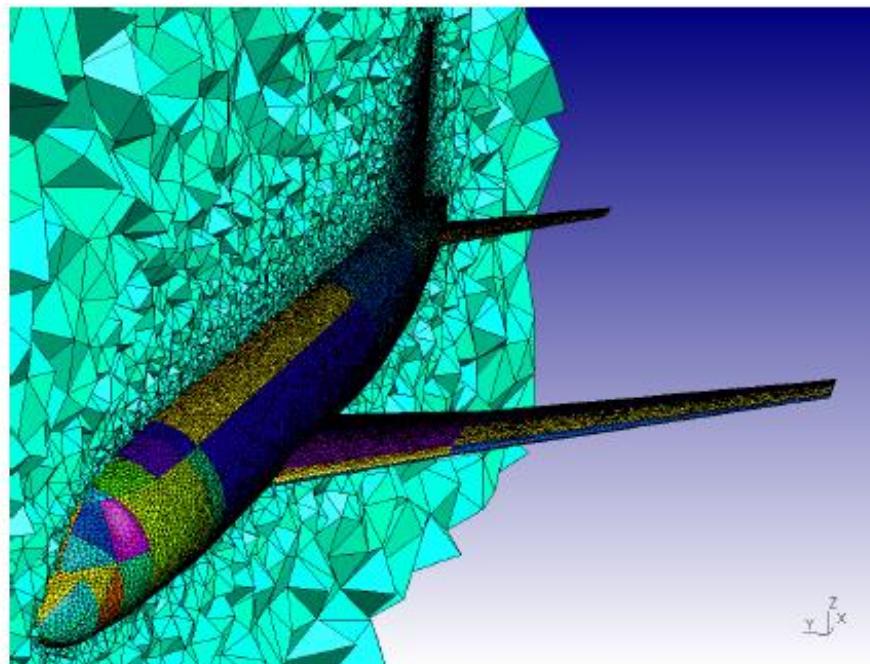
méthode des différences finies:
carrés (2D) ou cubes (3D)

Vue dans ce cours



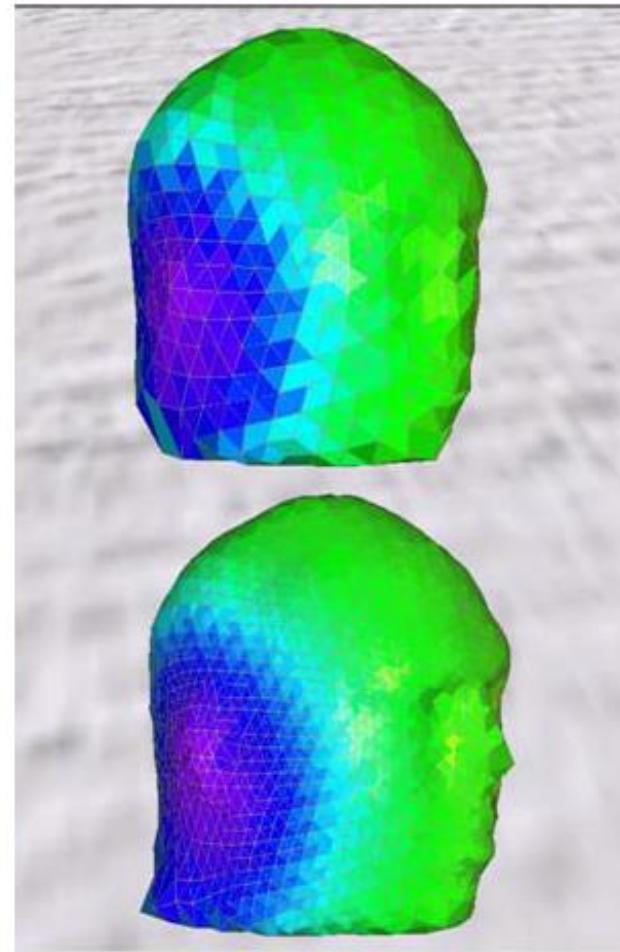
Méthode des éléments finis

Cette méthode est puissante, car elle s'applique à des géométries variées. Elle est souvent utilisée en ingénierie. Par contre, elle est trop complexe pour être vue dans ce cours.



Mécanique des fluides

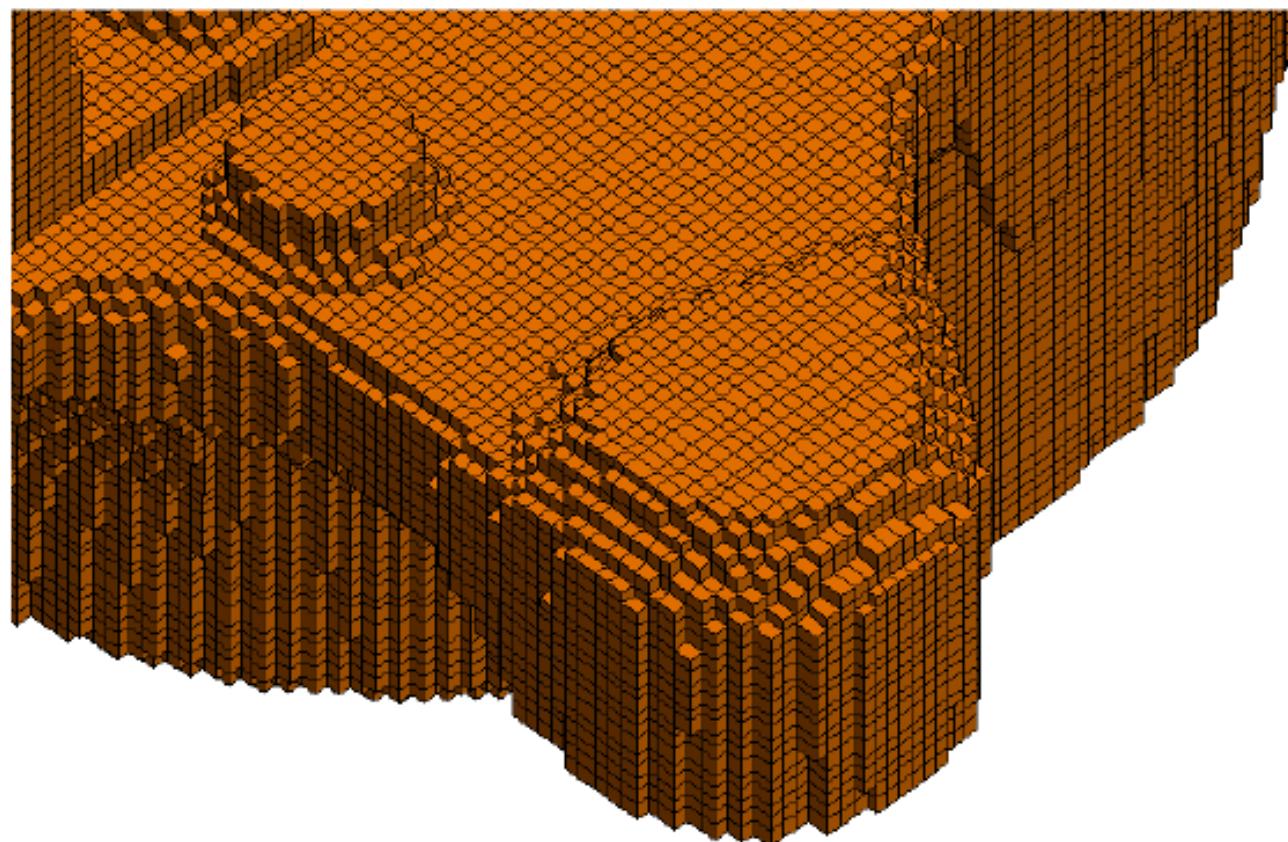
Effet des ondes
électromagnétiques
(téléphone cellulaire)



Méthode des différences finies

Cette méthode est plus simple à implémenter que celle des éléments finis, mais elle est limitée à des maillages rectangulaires. Il est donc plus difficile de représenter fidèlement une géométrie complexe de manière lisse.

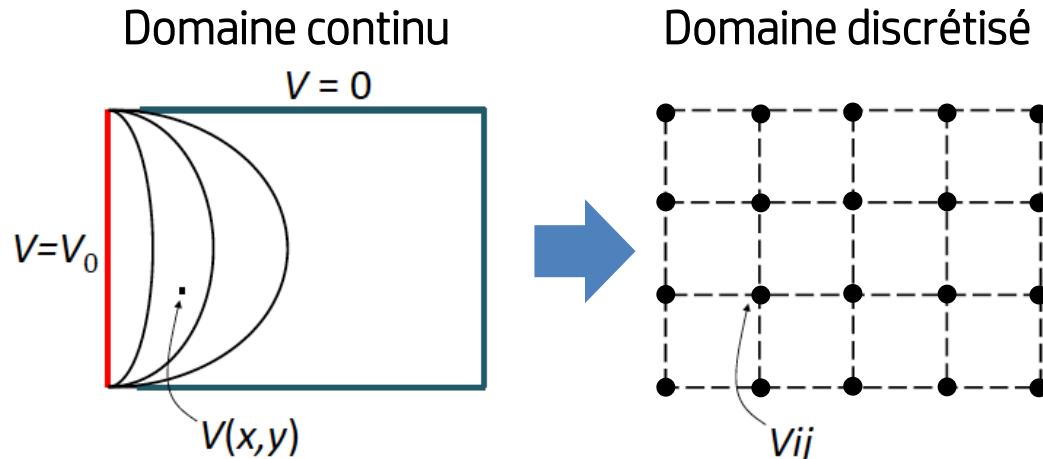
Maillage
rectangulaire d'une
pièce mécanique



Méthode des différences finies

Voici les étapes principales à suivre pour appliquer la méthode des différences finies.

- Définir un maillage rectangulaire**
Il s'agit de discréteriser le domaine continu en créant un maillage rectangulaire. L'équation sera résolue sur les points du maillage.



- Discréteriser l'équation différentielle avec des formules de différences finies**

Il faut réécrire l'équation différentielle à chaque nœud du maillage (intérieur et frontières) en fonction des valeurs V_{ij} de la solution aux nœuds voisins.

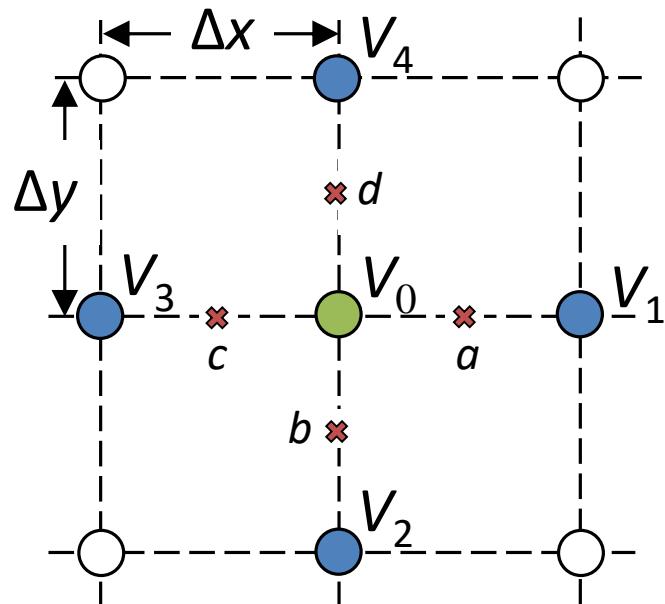
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \rightarrow ?$$

- Résoudre l'équation différentielle discrétrisée**

Il faut résoudre le système d'équations (de manière directe ou itérative) formé des équations discrétrisées décrivant tous les nœuds du maillage.

Discrétisation de l'équation de Laplace en 2D

Remplacer les dérivées secondes du laplacien par des formules de différences finies.



Dérivées premières par rapport à x

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_a \approx \frac{V_1 - V_0}{\Delta x} \quad \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_c \approx \frac{V_0 - V_3}{\Delta x}$$

Dérivée seconde par rapport à x au point (0,0)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} \approx \frac{\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_a - \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_c}{\Delta x} \approx \frac{-2V_0 + V_1 + V_3}{(\Delta x)^2}$$

Dérivée seconde par rapport à y en (0,0)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} \approx \frac{-2V_0 + V_2 + V_4}{(\Delta y)^2}$$

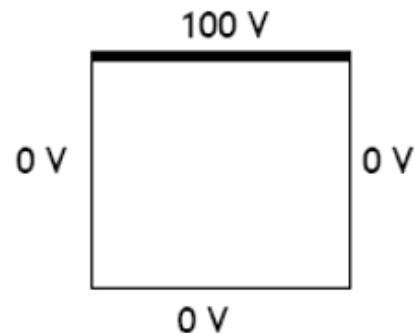
Équation de Laplace discrétisée (maillage carré $\Delta x = \Delta y$)

Valide à l'intérieur du domaine seulement

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{-4V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet



100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	V_{22}	V_{23}	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

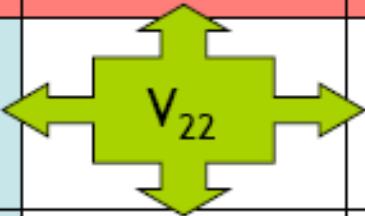
Nœuds blancs
Appliquer l'équation de
Laplace discréétisée

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Nœuds rouges et bleus

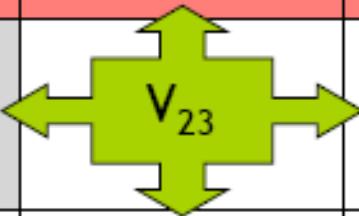
Conditions de Dirichlet : potentiel constant maintenu tout au long de la résolution

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	 V_{22}	V_{23}	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

Conditions initiales sur le maillage : potentiel nul sur les nœuds intérieurs (blancs)

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	v_{22}		v_{24}	0 V
0 V	v_{32}	v_{33}	v_{34}	0 V
0 V	v_{42}	v_{43}	v_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1^{re} itération : on applique l'équation de Laplace discrétisée à tous les nœuds intérieurs avec les valeurs du potentiel les plus à jour

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	v_{22}	v_{23}	v_{24}	0 V
0 V	v_{32}	v_{33}	v_{34}	0 V
0 V	v_{42}	v_{43}	v_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1^{re} itération : on applique l'équation de Laplace discrétisée à tous les nœuds intérieurs avec les valeurs du potentiel les plus à jour

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	v_{22}	v_{23}	v_{24}	0 V
0 V	v_{32}	v_{33}	v_{34}	0 V
0 V	v_{42}	v_{43}	v_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

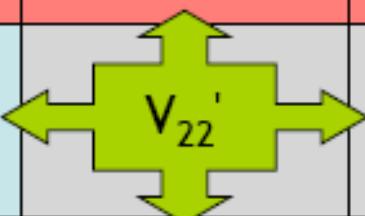
1^{re} itération : on applique l'équation de Laplace discréétisée à tous les nœuds intérieurs avec les valeurs du potentiel les plus à jour

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	v_{22}	v_{23}	v_{24}	0 V
0 V	v_{32}	v_{33}	v_{34}	0 V
0 V	v_{42}	v_{43}	v_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

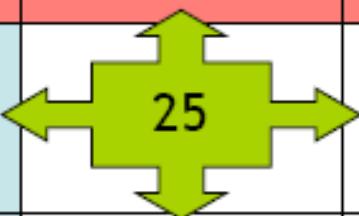
1^{re} itération : on applique l'équation de Laplace discréétisée à tous les nœuds intérieurs avec les valeurs du potentiel les plus à jour

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	v_{22}' 	v_{23}'	v_{24}'	0 V
0 V	v_{32}'	v_{33}'	v_{34}'	0 V
0 V	v_{42}'	v_{43}'	v_{44}'	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

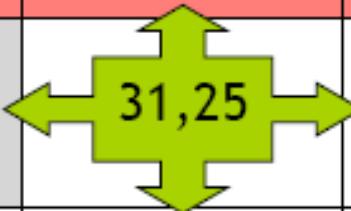
2^e itération : on applique l'équation de Laplace discrétisée à tous les nœuds intérieurs avec les potentiels calculés à la 1^{re} itération

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	 25	V_{23}	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1^{re} itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	25	 31,25	V_{24}	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1^{re} itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	25	31,25	32,81	0 V
0 V	V_{32}	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1^{re} itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V	100 V	100 V	100 V	100 V
0 V	25	31,25	32,81	0 V
0 V	 6,25	V_{33}	V_{34}	0 V
0 V	V_{42}	V_{43}	V_{44}	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1^{re} itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V				
0 V	25	31,25	32,81	0 V
0 V	6,25	9,37	10,54	0 V
0 V	1,56	2,73	3,32	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

1^{re} itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V				
0 V	34,38	31,25	32,81	0 V
0 V	6,25	9,37	10,54	0 V
0 V	1,56	2,73	3,32	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

2^e itération : valeurs numériques

Exemple 6.2 – Diélectrique avec conditions de Dirichlet

100 V				
0 V	42,82	52,64	42,84	0 V
0 V	18,72	24,97	18,73	0 V
0 V	7,13	9,81	7,13	0 V
0 V	0 V	0 V	0 V	0 V

10^e itération : valeurs numériques
Est-ce que la convergence est atteinte ?

Pseudocode pour la méthode des différences finies

<code>V[i, j]</code>	Valeurs du potentiel dans un tableau
<code>Vnouveau</code>	Potentiel mis à jour en un point (moyenne des 4 voisins)
<code>Seuil</code>	Seuil de tolérance d'écart entre deux itérations
<code>Nitera</code>	Numéro de l'itération actuelle
<code>MaxItera</code>	Nombre maximum d'itérations à exécuter
<code>Convergence</code>	Variable booléenne (logique) indiquant si le système a convergé

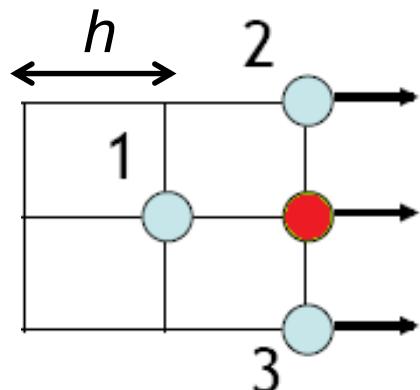
```
Initialiser le tableau V
(zéro à l'intérieur, valeurs appropriées aux frontières)
Nitera ← 0
Répéter :
    Incrémenter Nitera
    Convergence ← vrai

    Pour chaque point intérieur (i, j) , répéter:
        Vnouveau ← moyenne des 4 voisins
        Si | Vnouveau - V[i, j] | > Seuil
            Alors Convergence ← faux
            V[i, j] ← Vnouveau
    Jusqu'à ce que Convergence soit vrai ou que Nitera > MaxItera
```

Conditions frontières de Neumann

Les conditions frontières de Neumann apparaissent lorsque la valeur du champ électrique (dérivée spatiale du potentiel) doit respecter les conditions frontières à une interface conducteur-diélectrique ou diélectrique-diélectrique.

Nœud sur un côté du domaine

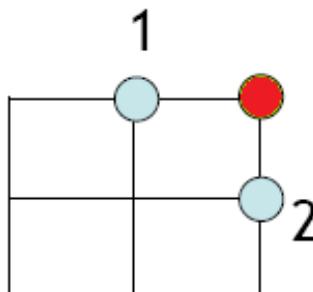


$$\frac{\partial V}{\partial n} = k \longrightarrow$$

Souvent, la condition frontière est celle d'un diélectrique avec un conducteur, ou d'un conducteur avec un isolant : le champ normal est alors nul à l'interface et $k = 0$.

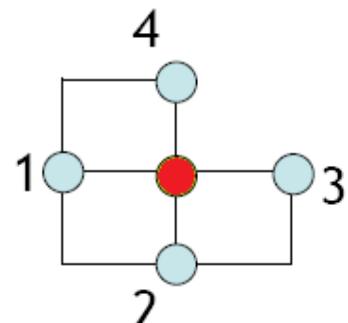
$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4} + \frac{hk}{2}$$

Nœud sur un coin du domaine ($k = 0$)



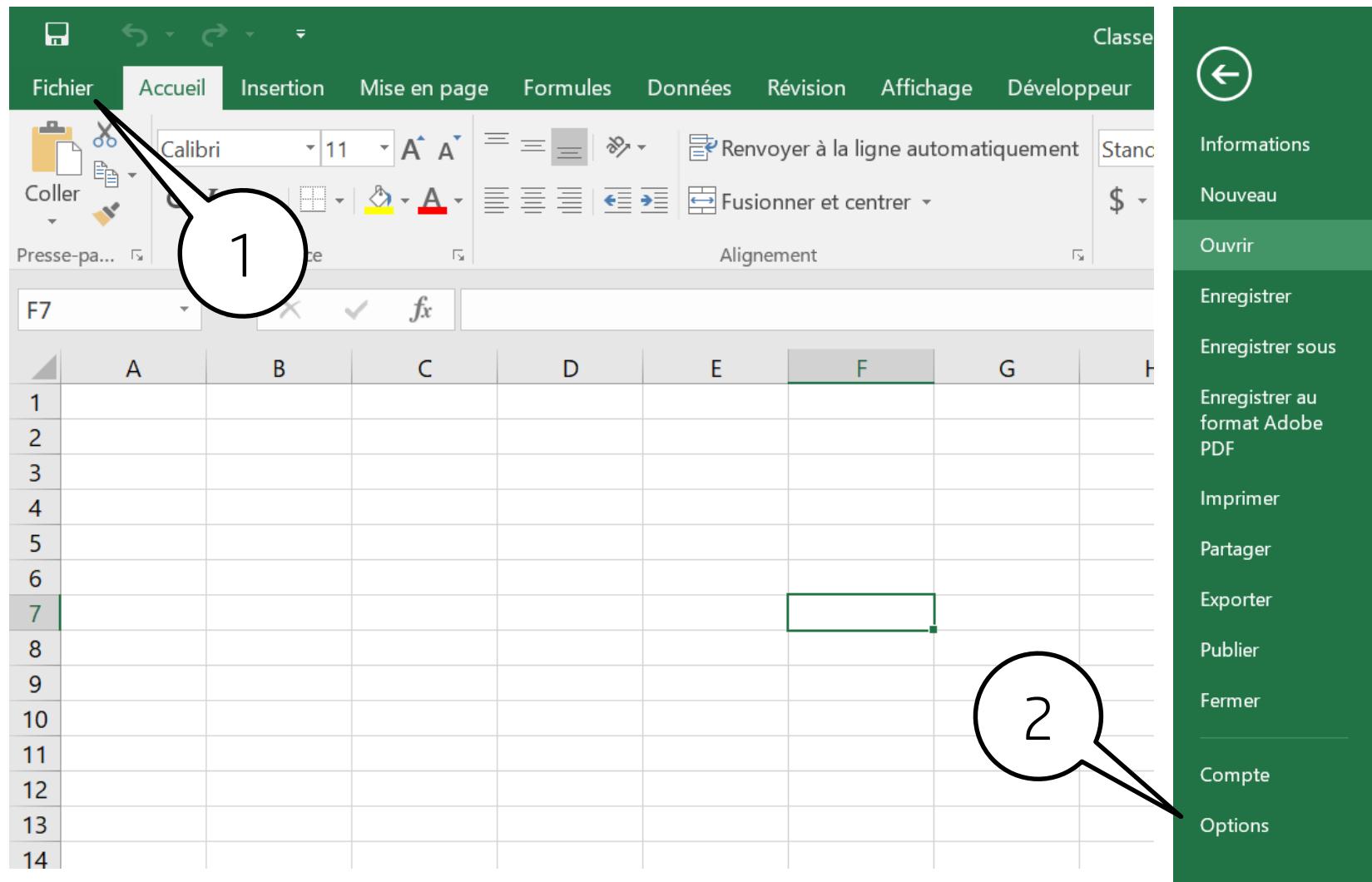
$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Nœud sur un coin « intérieur » du domaine ($k = 0$)



$$V_0 = \frac{2V_1 + 2V_2 + V_3 + V_4}{6}$$

Méthode des différences finies – Excel 2016 PC



Méthode des différences finies – Excel 2016 PC

Options Excel

The screenshot shows the 'Options Excel' dialog box. On the left, a sidebar lists categories: Général, Formules (selected), Vérification, Enregistrement, Langue, Options avancées, Personnaliser le ruban, Barre d'outils Accès rapide, Compléments, and Centre de gestion de la confidentialité. A large speech bubble labeled '3' points to the 'Formules' option.

Mode de calcul

Calcul du classeur Automatique Activer le calcul itératif
 Automatique excepté dans les tableaux de données
 Manuel
 Recalculer le classeur avant l'enregistrer

Nb maximal d'itérations : Écart maximal :

Manipulation de formules

Style de référence L1C1
 Saisie semi-automatique de formule
 Utiliser les noms de tableaux dans les formules
 Utiliser les fonctions LIREDONNEESTABCROISDYNAMIQUE pour les références aux tableaux croisés dynamiques

Vérifier les erreurs

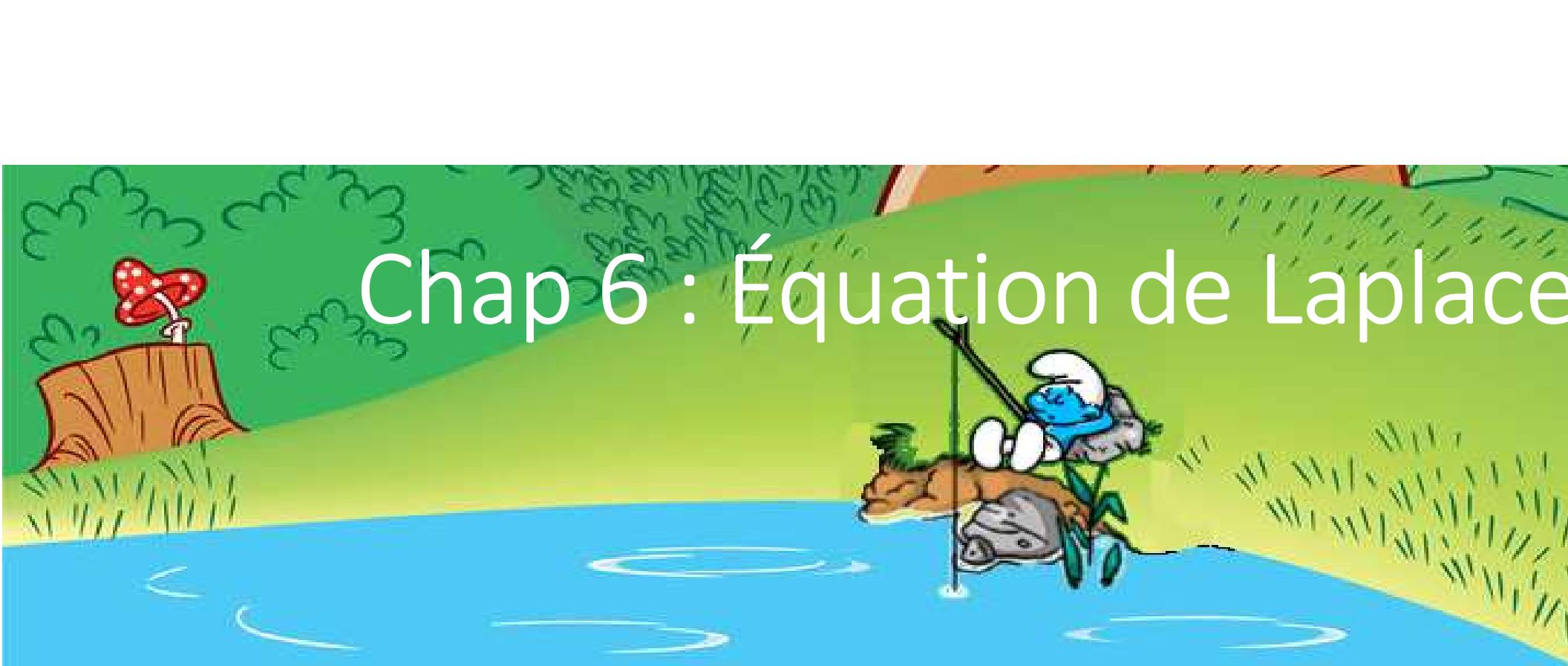
Activer la vérification des erreurs en arrière-plan
Indiquer les erreurs à l'aide de cette couleur : Rétablir les erreurs ignorées

A large speech bubble labeled '5' points to the 'Activer le calcul itératif' checkbox. A speech bubble labeled '4' points to the 'Recalculer le classeur avant l'enregistrer' checkbox. A speech bubble labeled '6' points to the 'Utiliser les fonctions LIREDONNEESTABCROISDYNAMIQUE pour les références aux tableaux croisés dynamiques' checkbox.

Méthode des différences finies – Excel 2013 Mac

The screenshot shows the Microsoft Excel 2013 interface on a Mac. The 'Formules' tab is active in the ribbon. A callout '1' points to the 'Calcul' button in the ribbon. A callout '2' points to the 'Recalculer tout' button in the ribbon. A callout '3' points to the value '1.11415714' in cell C23 of the worksheet. The worksheet contains a table with columns 'iteration' and 'x'. The 'iteration' column has values from 1 to 14. The 'x' column has values starting from 0.5 and decreasing to 1.11415714. The 'Recalculer tout' button is highlighted.

Pour utiliser le calcul itératif d'Excel (en anglais)
https://www.youtube.com/watch?v=tLTm_P0ao1c



Chap 6 : Équation de Laplace

La Divergence
Équation Laplace
Conditions frontières
Méthode Numérique (DEVOIR)

Définition de la divergence

Si $\vec{F}(x, y, z)$ est un champ vectoriel, $\nabla \cdot \vec{F}$ est un champ scalaire :

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot [F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}]$$

• Coordonnées cartésiennes :

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

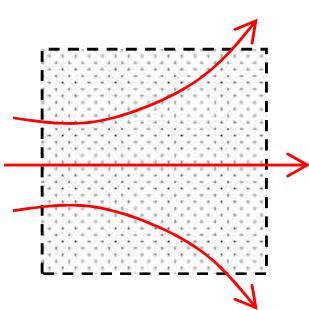
• Coordonnées cylindriques :

$$\nabla \cdot \vec{F}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

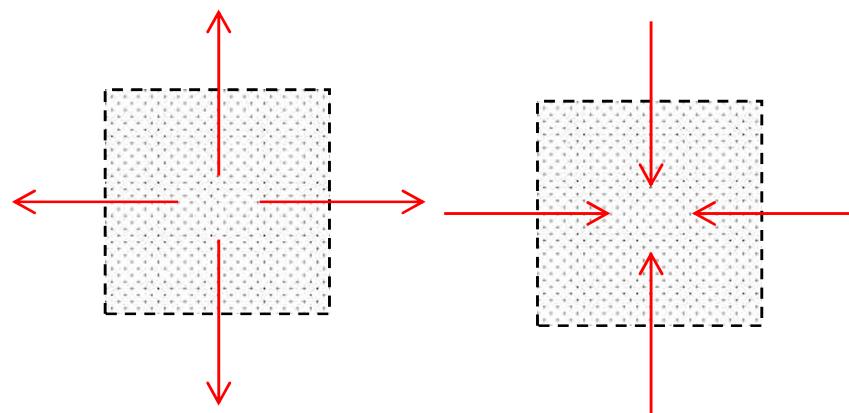
• Coordonnées sphériques :

$$\nabla \cdot \vec{F}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

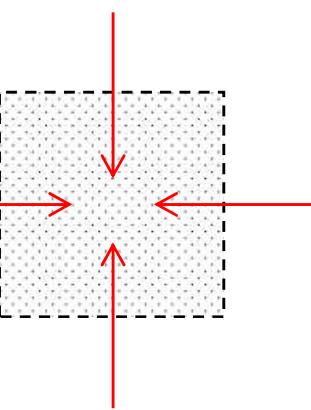
Divergence



$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{D} > 0$$

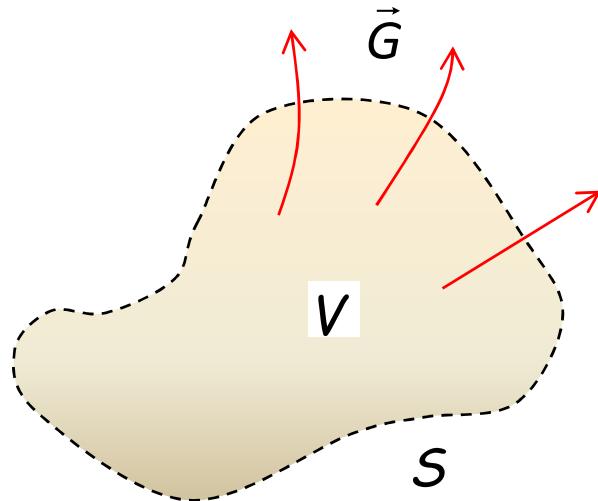


$$\nabla \cdot \vec{D} < 0$$

Théorème de la divergence

S'applique à n'importe quel champ vectoriel G .

Transformer intégrale sur une surface fermée S en intégrale dans volume V borné, par S :



$$\oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{G} dv$$

Équations de Poisson et Laplace dans un diélectrique

Maxwell #1:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

Permittivité ϵ :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Gradient:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Opérateur laplacien:

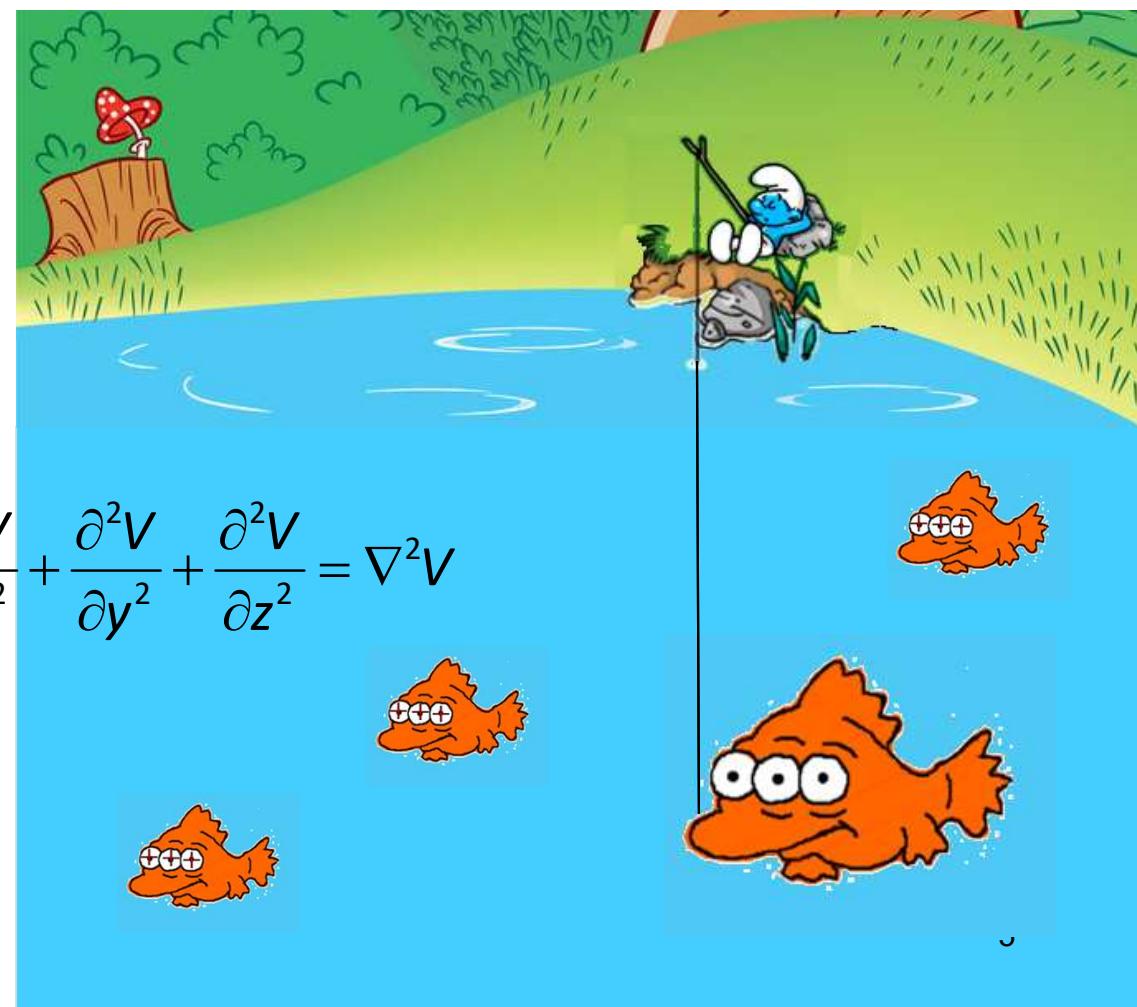
$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V$$

Équation de Poisson:

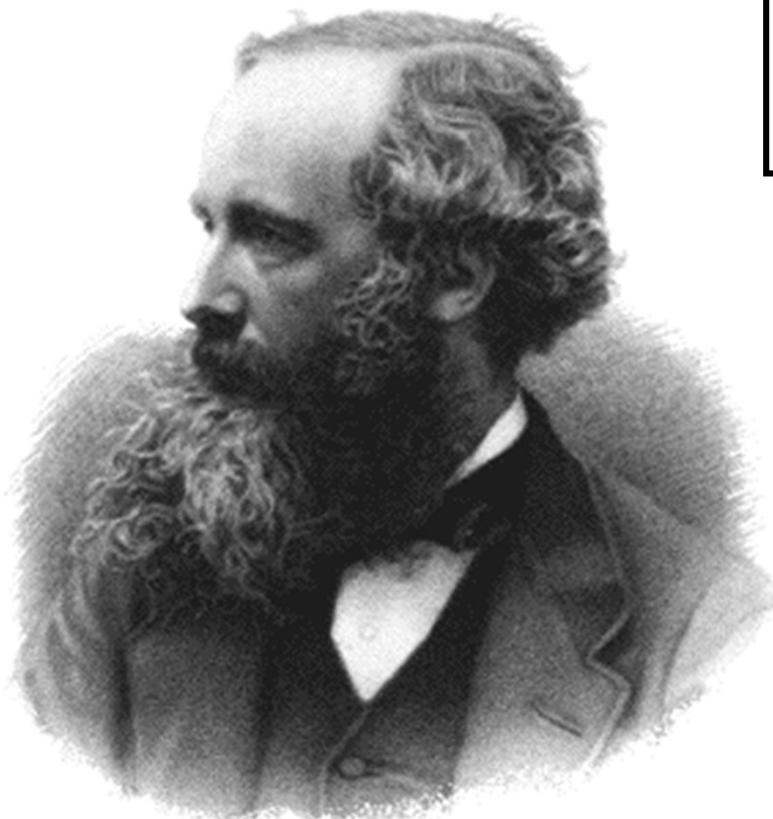
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Équation de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$



Méthode Laplace analytique



$$\nabla^2 V = 0$$

Solution générale

$$V(x) = Ax + B$$

$$V(\varphi) = A\varphi + B$$

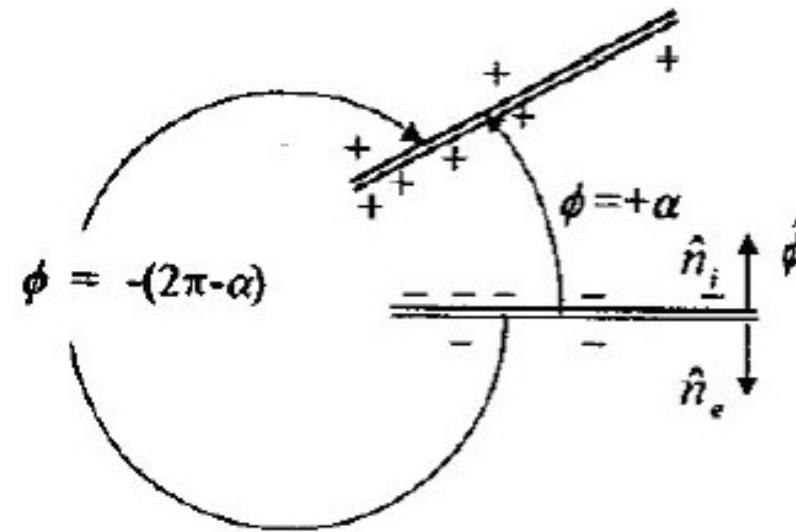
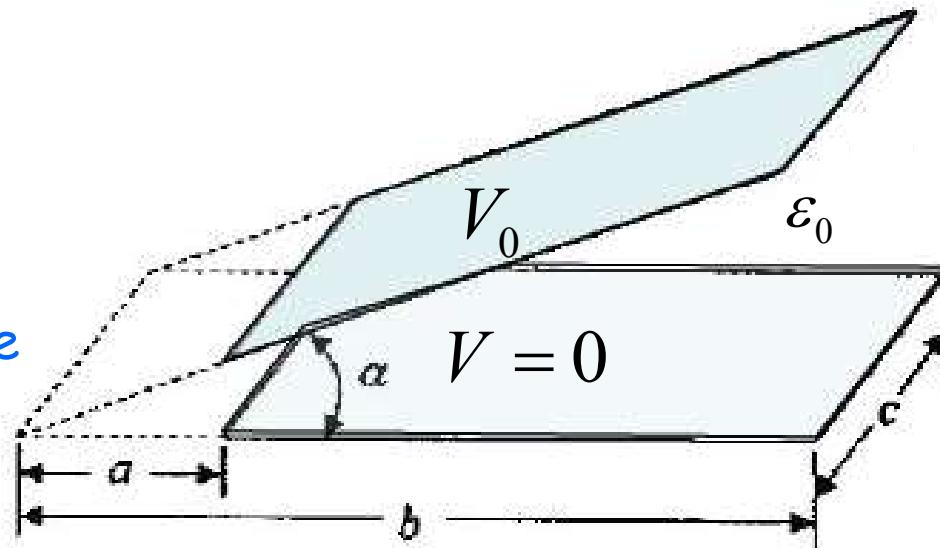
$$V(\rho) = A \ln(\rho) + B$$

$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$

$$V(\theta) = A \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] + B$$

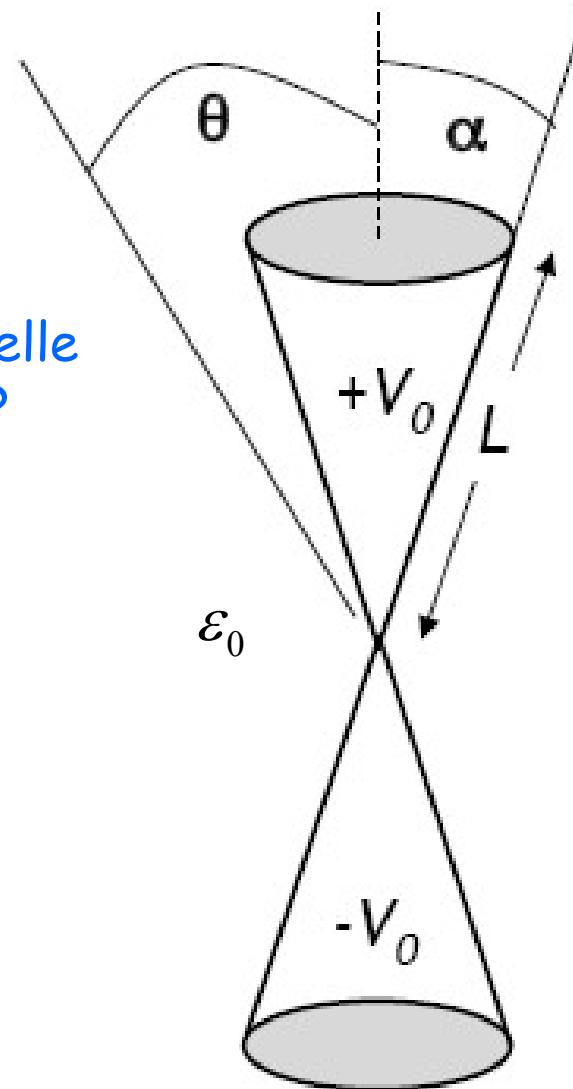
Condensateur en coin : exemple

V varie selon quelle coordonnée ?



Antenne double cône : exemple

V varie selon quelle coordonnée ?



Problèmes de conditions aux frontières

Résolution: trouver $V(r)$ qui satisfait à :

1. L'équation de Laplace
2. Les conditions aux frontières

Théorème de la solution unique dit que :

« Si une fonction de V satisfait à l'équation de Laplace ainsi qu'à toutes les conditions aux frontières, c'est la seule solution possible »

Types de conditions aux frontières

1. Conditions de Dirichlet

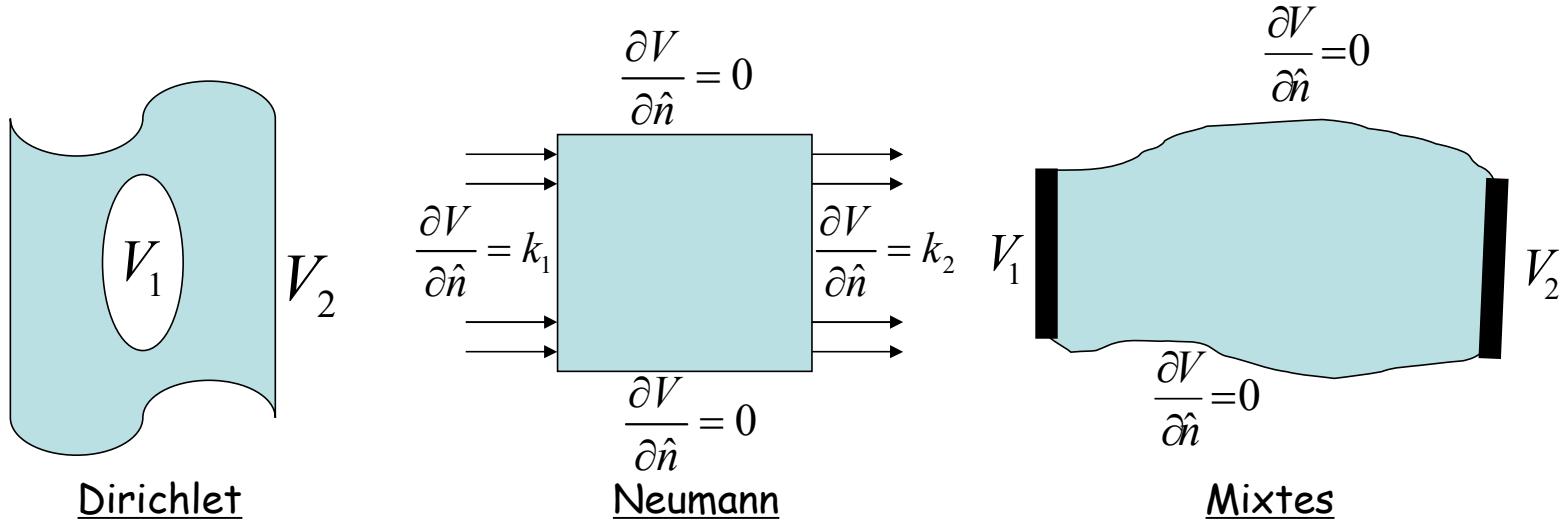
$V(r)$ connue sur toute la surface entourant le domaine.

2. Conditions de Neumann

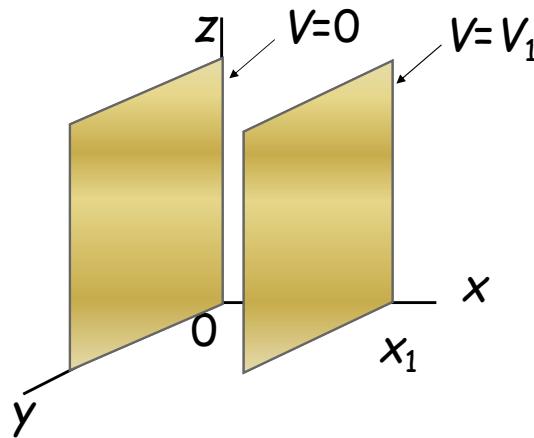
distribution de dérivée normale de V connue sur surface entourant le domaine.

3. Conditions mixtes

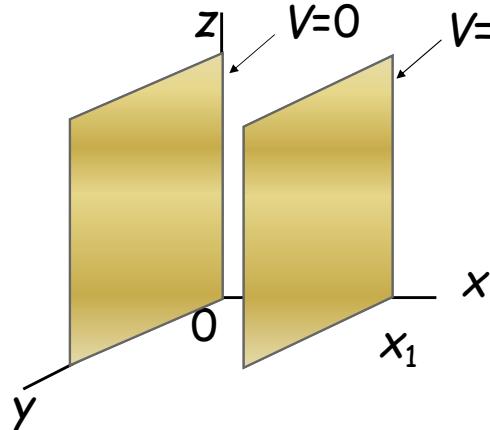
$V(r)$ connue sur partie de surface entourant le domaine,
distribution de dérivée normale de V connue sur reste de surface.



Intégration de l'équation de Laplace 1D



Intégration de l'équation de Laplace 1D



$$\nabla^2 V = 0$$

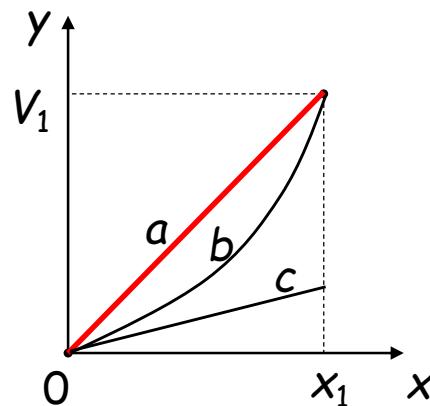
par symétrie:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

Ceci implique constante: $\frac{\partial V}{\partial x} = A$

$$\text{Intégration: } V = \int \partial V = \int A \partial x = Ax + B$$



Conditions frontières:

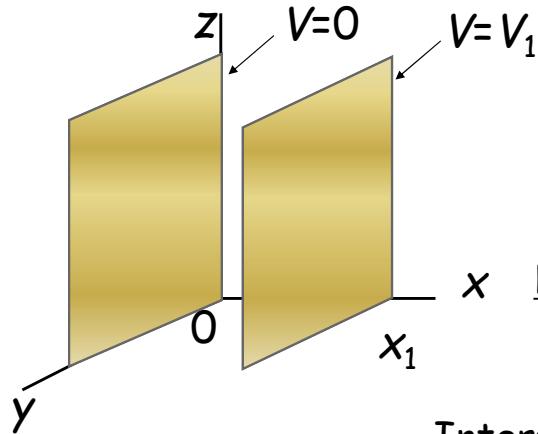
$$V = A \cdot 0 + B = 0 \quad B = 0$$

$$V = Ax_1 = V_1 \quad A = V_1/x_1$$

solution particulière:

$$V = \left(\frac{V_1}{x_1} \right) x$$

Capacité du Condensateur plan



$$V = \left(\frac{V_1}{x_1} \right) x$$

Champ électrique : $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \hat{x} = -\frac{V_1}{x_1} \hat{x}$

Densité de flux électrique : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = -\frac{\epsilon_0 V_1}{x_1} \hat{x}$

Interface conducteur-diélectrique (règle 5) :

$$D_{N,1} = \rho_S$$

$$\rho_S = \frac{\epsilon_0 V_1}{x_1}$$

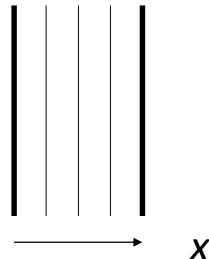
$$V_1 = \frac{\rho_S x_1}{\epsilon_0} = \frac{Q x_1}{\epsilon_0 S}$$

On obtient même résultat qu'avec loi de Coulomb ou thm de Gauss.

Capacité : $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1} = \frac{\epsilon_0 S}{x_1}$

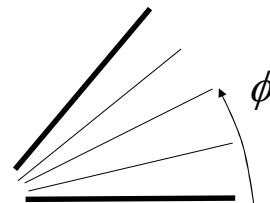
Les cinq équations générales (1D)

Cartésien



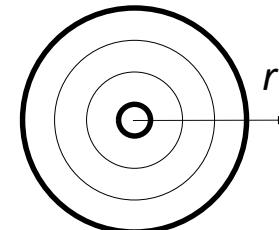
$$V(x) = Ax + B$$

Cylindrique



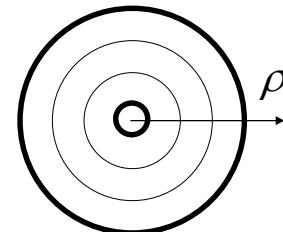
$$V(\phi) = A\phi + B$$

Sphérique

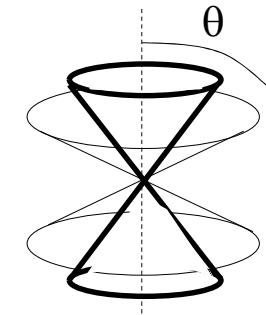


$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$

NOTE:
angles exprimés
en radian et non
en degré

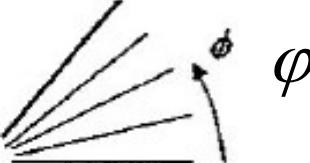
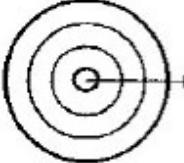
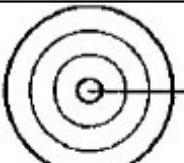
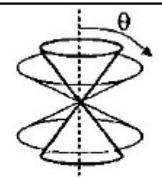


$$V(\rho) = A \ln \rho + B$$



$$V(\theta) = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

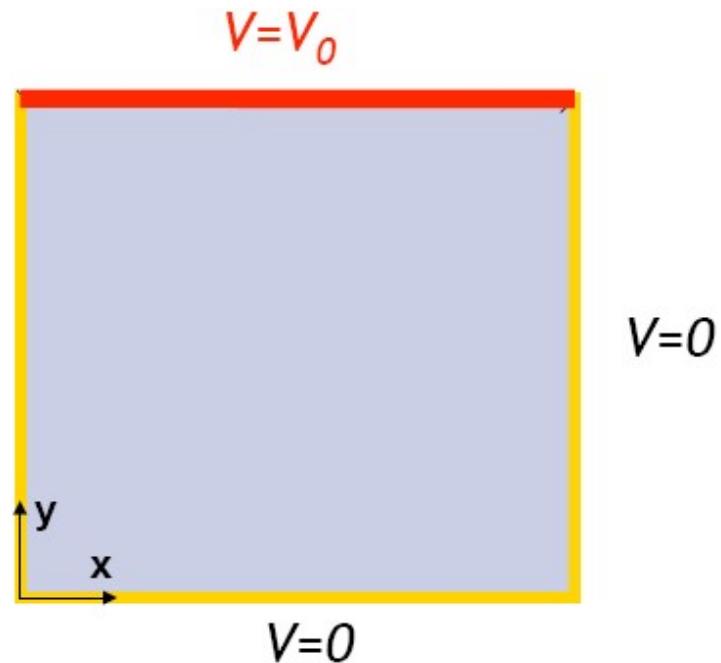
Solutions générales de l'équation de Laplace 1D

Variables	Équation de Laplace	Solution générale
 $x \ y \ z$	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$	$V(x) = Ax + B$
 φ	$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$	$V(\varphi) = A\varphi + B$
 ρ	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$	$V(\rho) = A \ln(\rho) + B$
 r	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$	$V(r) = \frac{A}{r} + B$
 θ	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$	$V(\theta) = A \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] + B$

Diélectrique à section rectangulaire : exemple

Quelle est $V(r)$ dans le diélectrique ?

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$



Équation de Laplace en 2D :

V dépend à la fois de x et
de y

(aucune solution simple)

Méthodes numériques

**Trouver solution qui satisfait l'équation de Laplace
et conditions aux frontières**



Calculer numériquement V sur les nœuds (points de calcul : petits éléments de volume ou de surface) dont l'ensemble constitue le système à l'étude.



Organigramme

$V[i, j]$	valeurs de potentiel dans un tableau
$V_{nouveau}$	potentiel nouvellement calculé par la moyenne des 4 voisins
<i>Seuil</i>	seuil de tolérance d'écart entre deux itérations
<i>Nitera</i>	nombre d'itérations
<i>MaxItera</i>	valeur maximale d'itérations
<i>Convergence</i>	variable logique indiquant si le système converge

Initialiser le tableau V (à zéro et aux frontières)

$Nitera \leftarrow 0$

Répéter :

 Incrémenter $Nitera$

Convergence \leftarrow vrai

Pour chaque point inconnu (i, j) , répéter:

$V_{nouveau} \leftarrow$ moyenne des 4 voisins

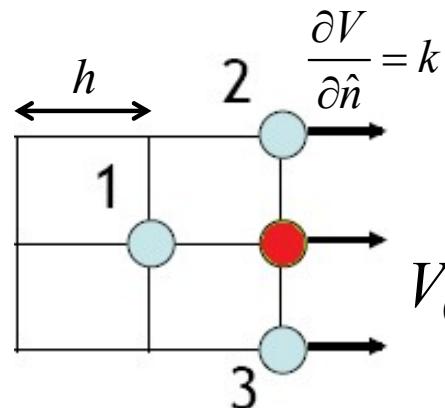
 Si $|V_{nouveau} - V[i, j]| > \text{Seuil}$

 Alors *Convergence* \leftarrow faux

$V[i, j] \leftarrow V_{nouveau}$

Jusqu'à ce que *Convergence* soit vrai ou que $Nitera > \text{MaxItera}$

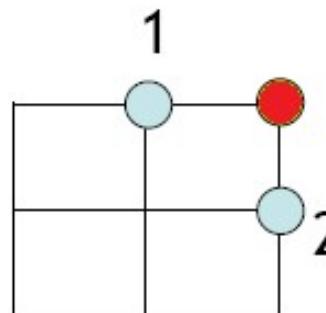
Règles aux interfaces conducteur/diélectrique



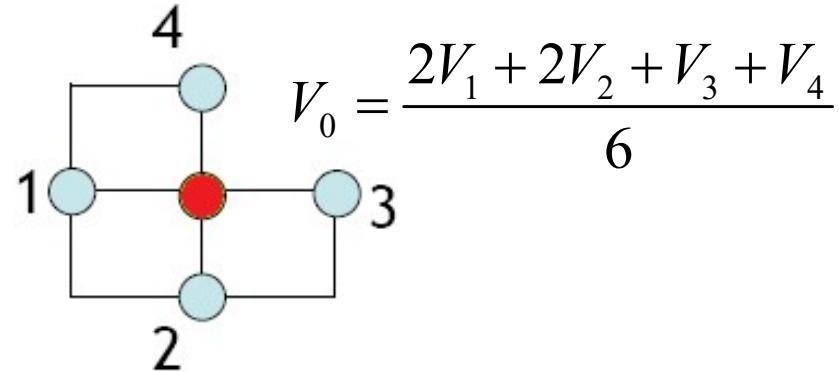
$$\frac{\partial V}{\partial \hat{n}} = k$$

$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4} + \frac{hk}{2}$$

généralement,
 $k=0$

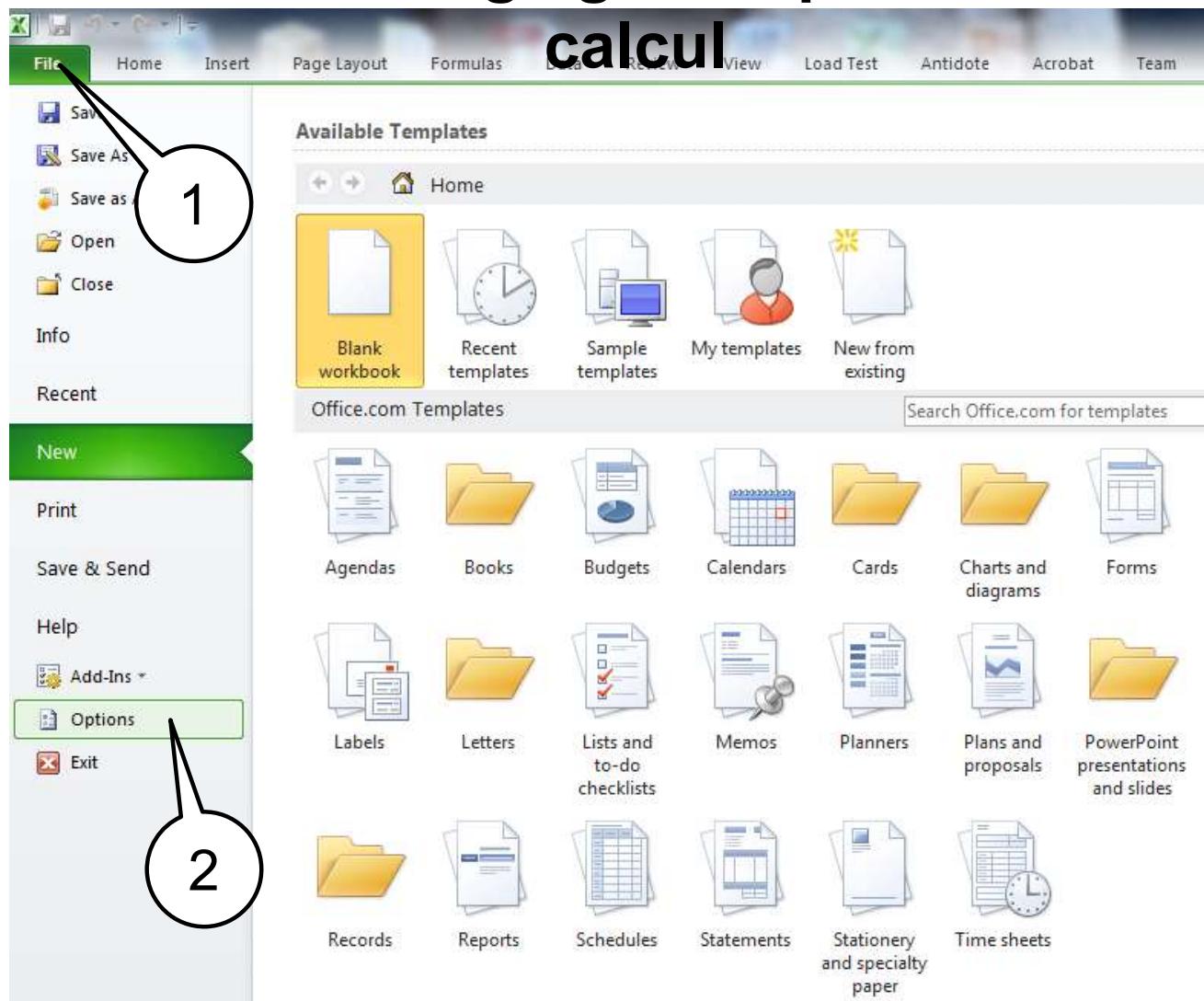


$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

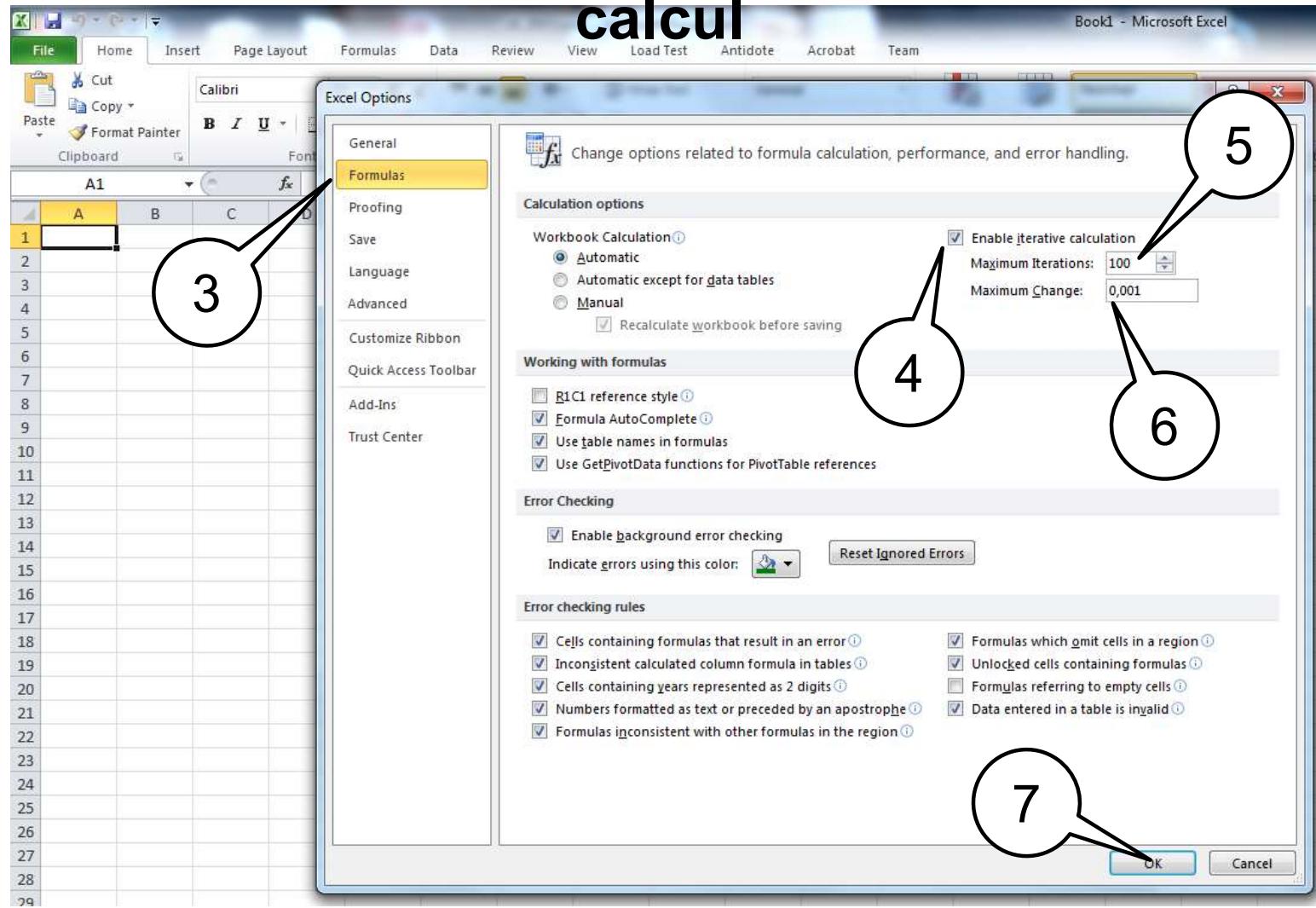


$$V_0 = \frac{2V_1 + 2V_2 + V_3 + V_4}{6}$$

Excel 2011: réglage des paramètres de calcul



Excel 2011: réglage des paramètres de calcul



Excel 2013

The screenshot shows the Microsoft Excel 2013 interface with a data table and the 'Calcul' dialog box open.

Data Table:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2																
3					iteration	x										
4					1	0.5										
5					2	2.08582964										
6					3	1.14906035										
7					4	1.09603491										
8					5	1.12435121										
9					6	1.10866262										
10					7	1.11718961										
11					8	1.11250489										
12					9	1.11506376										
13					10	1.11366158										
14					11	1.11442859										
15					12											
16					13											
17					14											
18																
19																
20																
21																
22					x	1.1141571										
23					1/sin(x)	1.1141571										
24																
25																
26																
27																
28																
29																

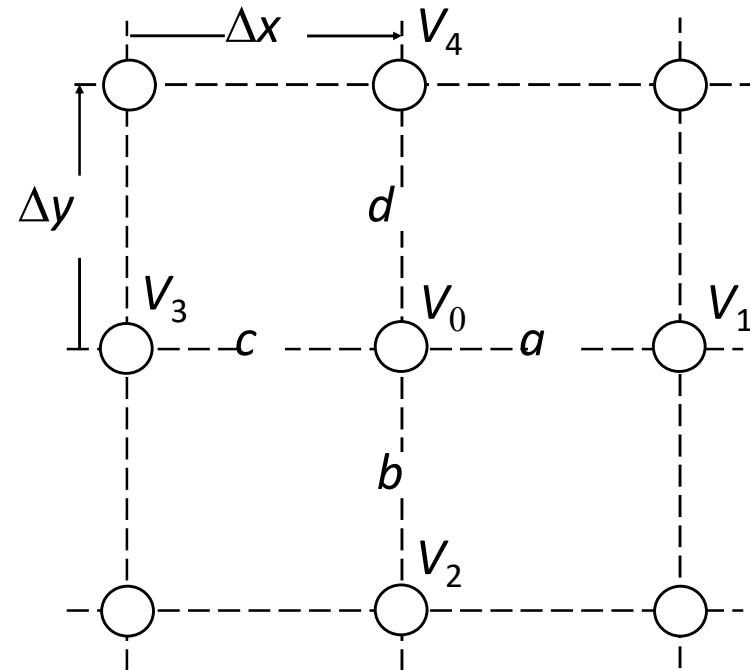
Calcul Dialog Box:

- Iteration:** Limiter l'itération (checked), Maximum d'itérations : 100, Écart maximal : 0.001.
- Options du classeur:** Définir le calcul avec la précision au format affiché (unchecked), Utiliser le calendrier depuis 1904 (unchecked), Enregistrer les valeurs des liaisons externes (checked).
- Description:** Contrôle la manière dont Excel effectue les calculs.

Text at the bottom:

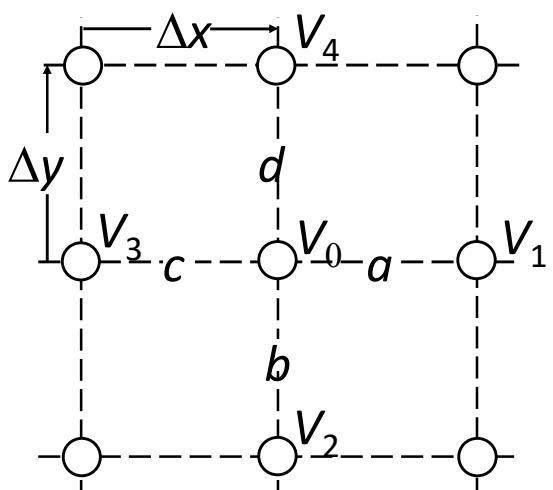
Pour utiliser le calcul itératif d'excel (en anglais)
https://www.youtube.com/watch?v=tLtm_PQao1c

Laplacien numérique



Éléments carrés: $h = \Delta x = \Delta y$

Laplacien numérique



$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \approx \frac{V_1 - V_0}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c \approx \frac{V_0 - V_3}{\Delta x}$$

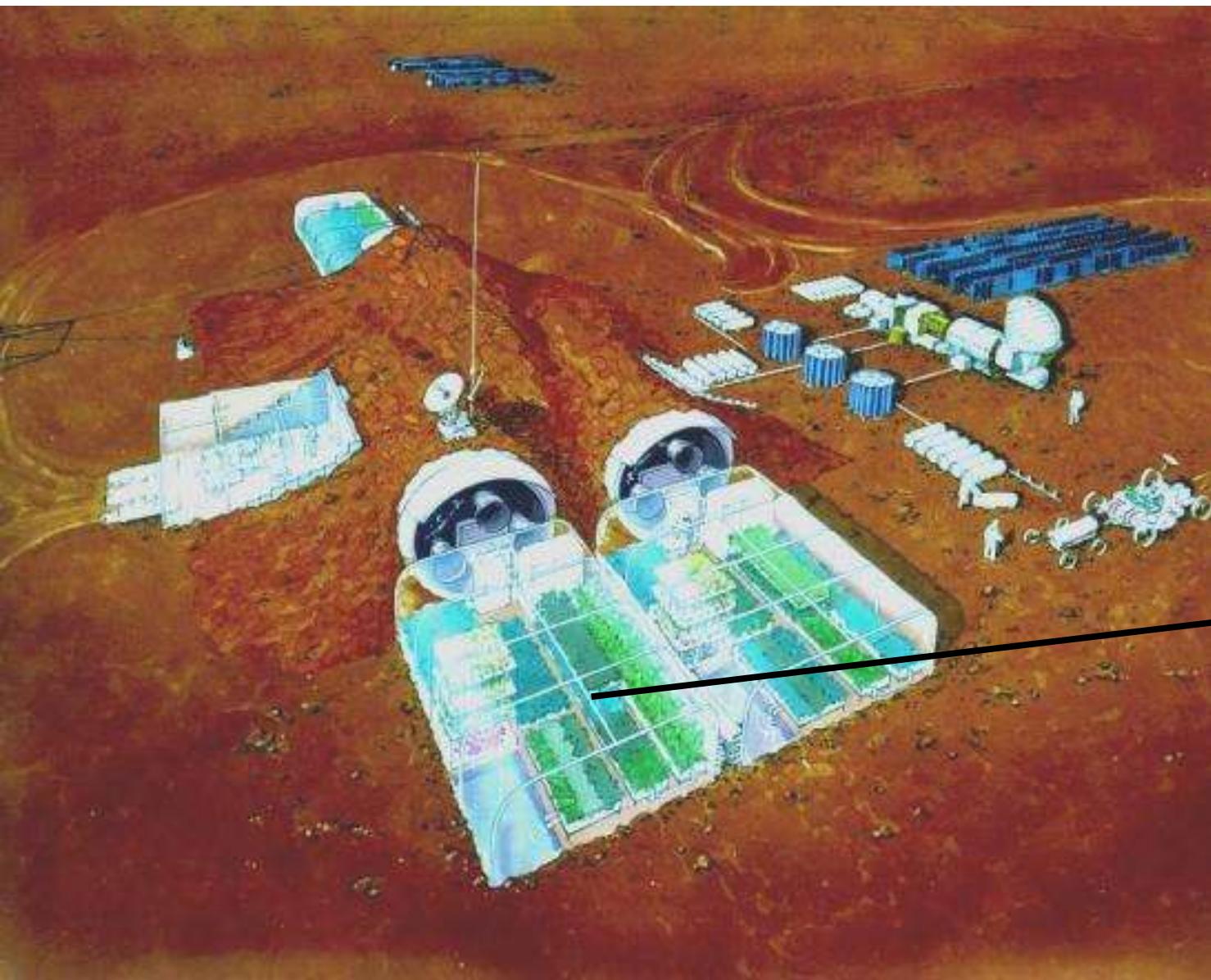
$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 \approx \frac{\left(\frac{V_1 - V_0}{\Delta x} \right) - \left(\frac{V_0 - V_3}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = \frac{(-2V_0 + V_1 + V_3)}{\Delta x^2}$$

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \approx \frac{(-4V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{h^2} = 0$$

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

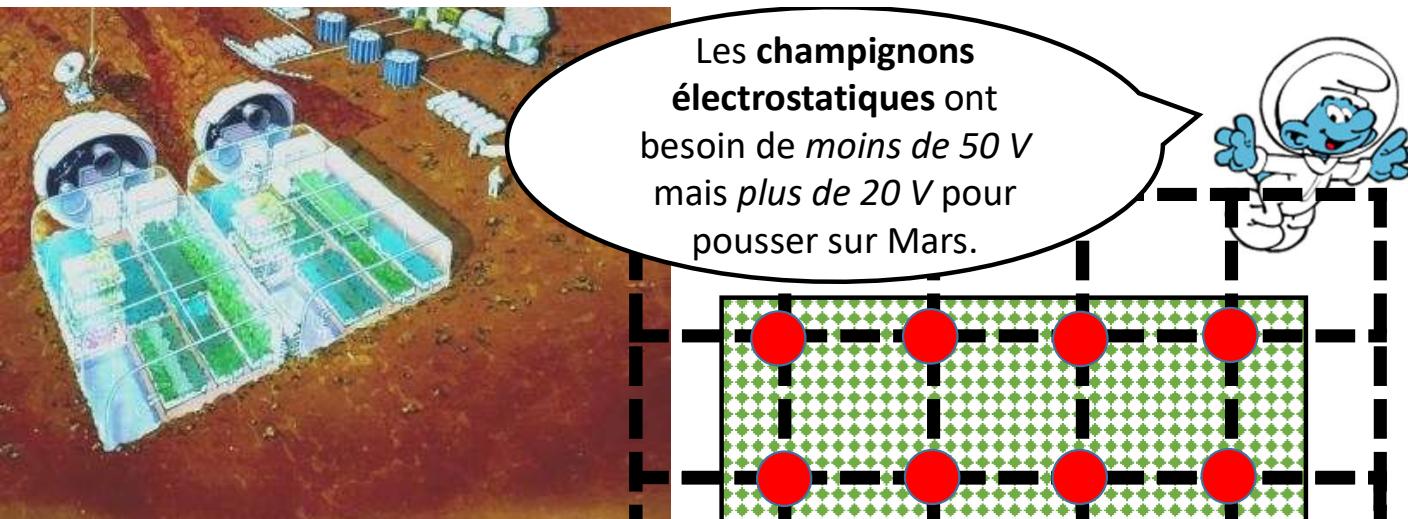
Éléments carrés: $h = \Delta x = \Delta y$

Valide dans un diélectrique ou un conducteur

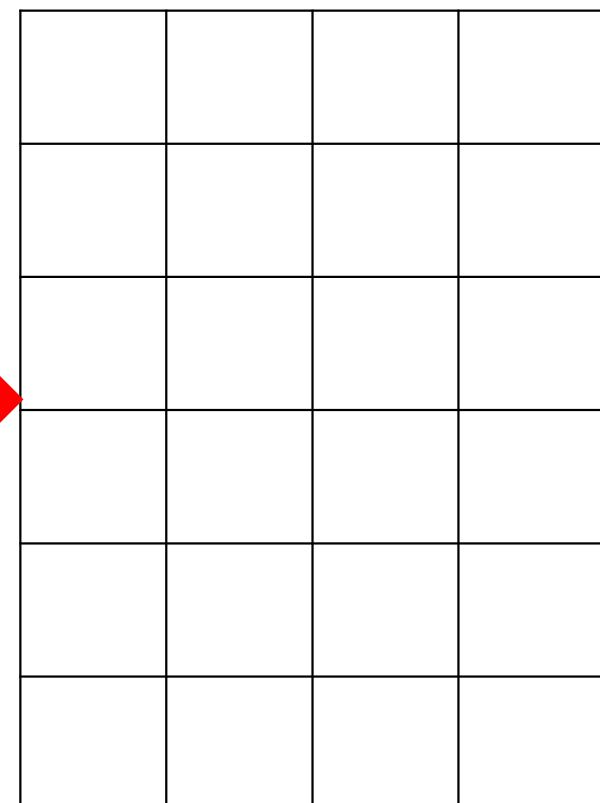
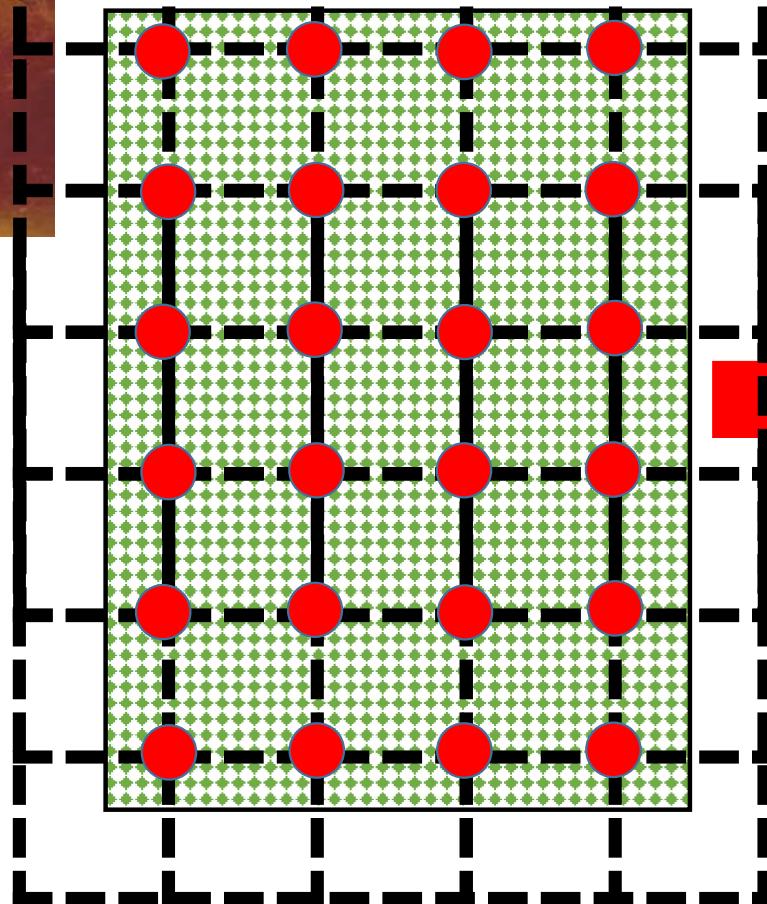
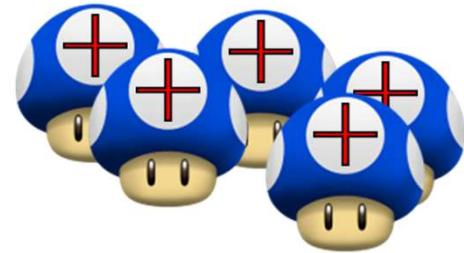
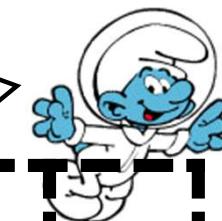


Frontière conductrice

Intérieur diélectrique

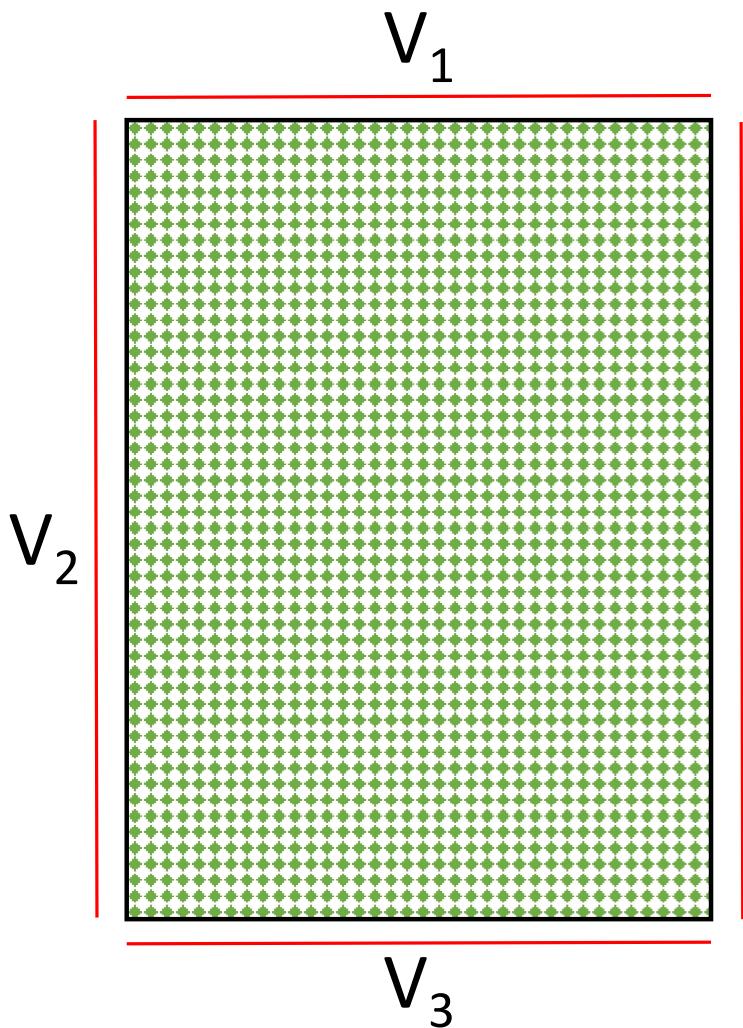


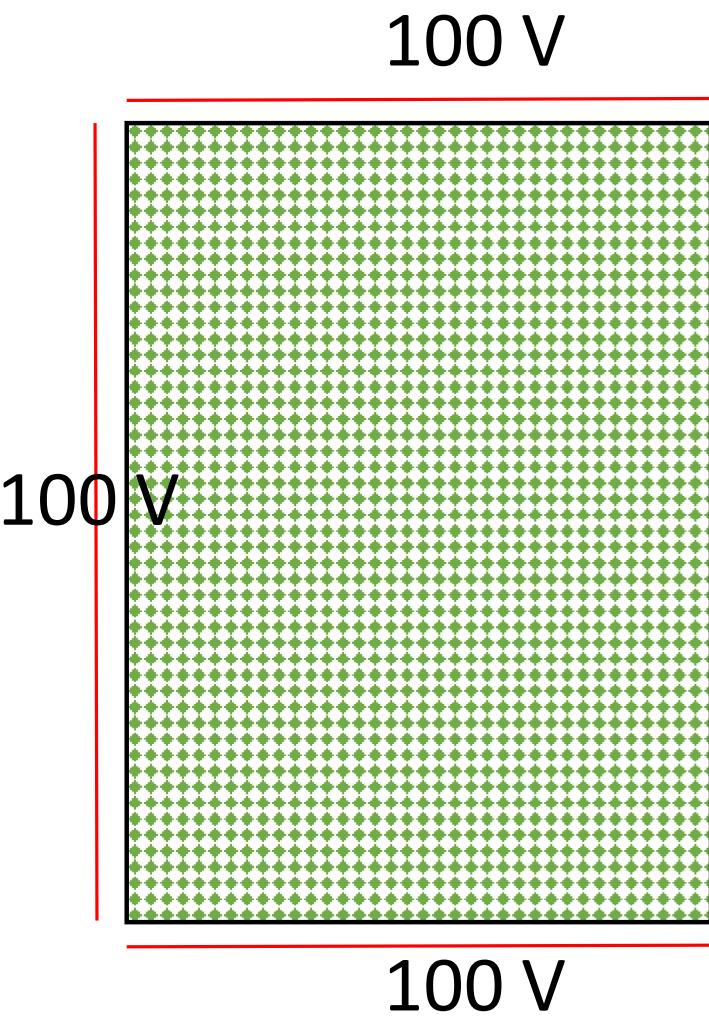
Les champignons électrostatiques ont besoin de moins de 50 V mais plus de 20 V pour pousser sur Mars.





Le jardin contient les conditions frontières suivantes:
 $V_1 = V_2 = V_3 = 100$ volt ; $V_4 = 0$ volt





Après $N \rightarrow \infty$ iterations, où vont apparaître les **champignons**?

100 V	100 V	100 V	100 V
100 V	(a)	(b)	0 V
100 V	(c)	(d)	0 V
100 V	(e)	(f)	0 V
100 V	(g)	(h)	0 V
100 V	100 V	100 V	100 V

PHS1102 – Champs électromagnétiques

Aide-mémoire (systèmes de coordonnées)

Coordonnées cartésiennes

$$d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

$$d\vec{s} = dydz\hat{x} + dxdy\hat{y} + dxdz\hat{z}$$

$$dv = dx dy dz$$

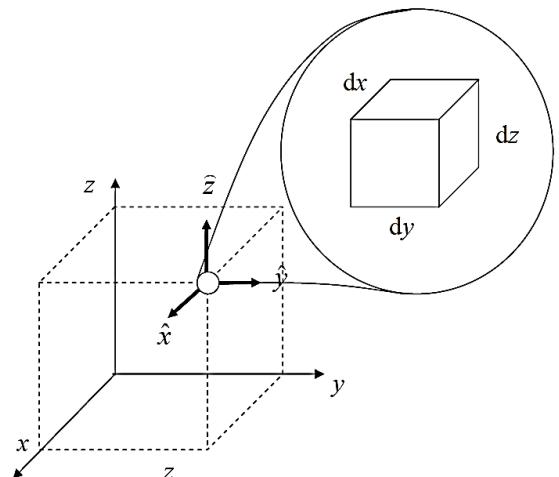
$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \nabla^2 H_x \hat{x} + \nabla^2 H_y \hat{y} + \nabla^2 H_z \hat{z}$$



Coordonnées cylindriques

$$d\vec{l} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + \rho dz \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$$

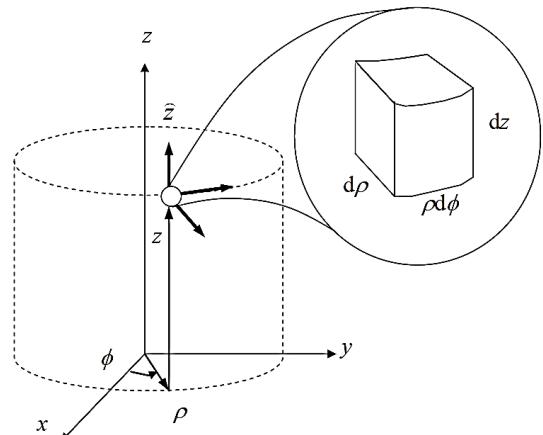
$$dv = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$



Coordonnées sphériques

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin \theta d\phi\hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$$

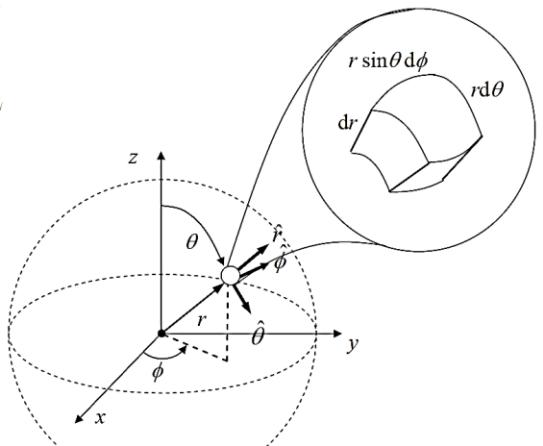
$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(D_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$



PHS1102 – Champs électromagnétiques
Aide-mémoire (chapitres 1 à 6)

Loi de Coulomb :	$\vec{F} = \frac{qQ\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qQ\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	À l'intérieur d'un conducteur electrostatique :	$\rho_v = 0$ $\vec{E} = \vec{0}$ $V = \text{constant}$
Champ électrique :	$\vec{F} = q\vec{E}$	Conditions frontières aux interfaces :	$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$ $E_{1T} = E_{2T}$
Principe de superposition :	$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$	Théorie des images :	\oplus \ominus
Flux électrique :	$\Phi_e = Q$ Le flux débute et se termine sur des charges libres.	Capacité (cartographie des champs) :	$C = \frac{N_p}{N_s} \epsilon d$
Loi de Gauss : (1 ^{re} équation de Maxwell)	$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$	Résistance (cartographie des champs) :	$R = \frac{N_s}{N_p} \frac{1}{\sigma d}$
Différence de potentiel de b par rapport à a :	$V_{ba} = \frac{W_{ba}}{Q} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$	1 ^{re} équation de Maxwell :	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$
Potentiel charge ponctuelle :	$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$	Continuité du courant :	$\nabla \cdot \vec{J} = 0$
Champ conservatif :	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	Équation de Poisson :	$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$
Gradient de V :	$\vec{E} = -\nabla V$	Équation de Laplace :	$\nabla^2 V = 0$
Polarisation :	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	Solutions 1D à l'équation de Laplace :	
Densité de flux électrique :	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$		$V(x) = Ax + B$
Permittivité :	$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0$		 $V(\phi) = A\phi + B$
Capacité :	$C = Q/V$		 $V(\rho) = A \ln \rho + B$
Énergie dans le champ électrique :	$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} CV^2$		 $V(r) = (A/r) + B$
Densité de courant :	$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$		 $V(\theta) = A \ln(\tan(\theta/2)) + B$
Conductivité :	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ Impédance du vide : $Z_0 \approx 377 \Omega$	
Résistance :	$R = V/I$		
Résistance d'un barreau :	$R = L/\sigma S$		
Puissance dissipée :	$P = VI = \int_V \sigma E^2 dv$		Vitesse de la lumière dans le vide : $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

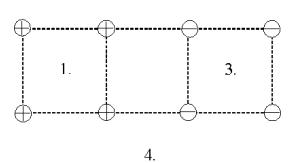
PHS1102 – Champs électromagnétiques

Aide-mémoire (chapitres 7 à 12)

Énergie cinétique :	$K = mv^2/2$	Réductance :	$\mathcal{R} = V_m/\Phi_m$
Force centripète :	$F_c = mv^2/r$	Réductance d'un barreau :	$\mathcal{R} = l/\mu S$
Loi de Biot-Savart :	$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3}$	Loi de Faraday :	$\epsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$
Règle de la main droite (champ magnétique) :		Inductance mutuelle :	$M_{12} = N_2 \Phi_{12}/I_1$
		Inductance :	$L = N\Phi/I$
Théorème d'Ampère :	$I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$	Tension d'une inductance :	$V = -L \frac{dI}{dt}$
Flux magnétique :	$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$	3 ^e équation de Maxwell :	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$
2 ^e équation de Maxwell :	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	Courant de déplacement :	$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Force magnétique :	$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$		
Règle de la main droite (force) :		4 ^e équation de Maxwell :	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$
Force sur un courant :	$\vec{F} = \int_L Id\vec{l} \times \vec{B}$	Équations de Maxwell :	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$
Moment magnétique dipolaire :	$\vec{m} = NIS$	Équation d'onde :	$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$, $\nabla^2 \vec{H} = \mu \epsilon \partial^2 \vec{H} / \partial t^2$
Couple sur un dipôle :	$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$		
Force électromotrice :	$\epsilon = \int_L \vec{v} \times \vec{B}$	OPH uniforme, de polarisa. linéaire et de direction \hat{n} :	$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \beta(\hat{n} \cdot \vec{r}) + \theta)$
Aimantation :	$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$	Fréquence angulaire :	$\omega = 2\pi f$
Densité de flux magnétique :	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	Constante de phase :	$\beta = 2\pi/\lambda$
Perméabilité :	$\mu = \mu_r \mu_0 = (1 + \chi_m) \mu_0$	Vitesse de propagation :	$v = \lambda f = \omega/\beta = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$
Énergie dans le champ magnétique :	$U = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dv = \frac{1}{2} LI^2$	Orthogonalité des champs :	$\vec{H} = (\hat{n} \times \vec{E})/Z$, $\vec{E} = Z(\vec{H} \times \hat{n})$
Densité d'énergie dissipée par hystérésis :	$u_0 = \oint H dB = \mu_0 \oint H dM$	Vecteur de Poynting :	$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$
Conditions frontières aux interfaces :	$B_{1N} = B_{2N}$ $H_{1T} = H_{2T}$	Vecteur de Poynting moyen OPH :	$\langle \vec{P} \rangle_{\text{lin.}} = E_0^2 \hat{n} / 2Z = ZH_0^2 \hat{n} / 2$ $\langle \vec{P} \rangle_{\text{circ.}} = E_0^2 \hat{n} / Z = ZH_0^2 \hat{n}$
Potentiel magnétique :	$\vec{H} = -\nabla V_m$	Puissance sur une surface :	$P = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$

Question 1: Corrigé (5.5 points)

1.1► Quatre charges positives et quatre charges négatives de même valeur sont séparées de leur plus proche voisine par des distances égales. Lorsque l'on considère les potentiels estimés aux quatre points (1 à 4) appartenant au même plan et illustrés sur la figure, appariez les énoncés suivants:



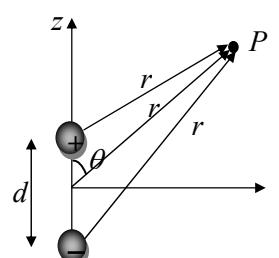
(1) Différence de potentiel maximum	(f) (0.25Pts)	(a) V_3
(2) Différence de potentiel minimum	(d) (0.25Pts)	(b) V_1
(3) Différence de potentiel nulle	(e) (0.25Pts)	(c) V_2
(4) Potentiel positif	(b) (0.25Pts)	(d) $\Delta V = V_3 - V_1$
(5) Potentiel négatif	(a) (0.25Pts)	(e) $\Delta V' = V_2 - V_4$
(6) Potentiel nul	(c) (0.25Pts)	(f) $\Delta V'' = V_1 - V_3$

1.2► La figure montre un condensateur plan chargé et isolé électriquement sur lequel on applique une force qui produit un déplacement de la plaque de gauche d'une distance infinitésimale δx vers la droite (la plaque de droite est fixe). Le changement d'énergie potentielle électrostatique $\delta U = U(2) - U(1)$

(a) $-\frac{Q^2 \delta x}{2\epsilon_0 S}$; (1Pts) L'énergie stockée diminue car la capacité monte (b) $\frac{Q^2 \delta x}{2\epsilon_0 S}$; (c) 0

1.3► La figure illustre un dipôle formé de deux charges identiques Q , mais de polarités opposée, séparées d'une distance d . Le point d'observation P est situé à une distance $r >> d$. La distribution de potentiel est donnée par l'expression :

(a) $V(P) = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (1Pts) (b) $V(P) = \frac{Qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (ne peut pas être sinus, analyser 0 ou 90 degrés) (c) $V(P) = \frac{2Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r}$ (La différence ne peut pas aller comme $1/r$)



1.4► Déterminer la valeur de la constante A pour que l'expression :

$$V(x, y, z) = V_a \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{a}\right) \left(1 + \frac{z}{a}\right) - A \frac{x^2}{a^2}; \quad V_a = 5 \text{ V}, a = 1 \text{ cm}$$

puisse décrire le potentiel électrostatique en absence de charges, dans la région $a < x, y, z \leq 2a$

Il faut prendre $\nabla^2 V = -\frac{2A}{a^2} = 0$ (absence de charges) $\Rightarrow A=0$ (0.5Pts)

1.5 Le conducteur central d'un câble coaxial est isolé à l'aide de deux diélectriques avec pertes: une première couche d'isolant d'épaisseur uniforme est entourée d'une deuxième couche ayant une conductivité électrique deux fois plus faible que celle de la première couche. Le conducteur central possède un potentiel positif tandis que la gaine est mise à la terre. Identifier les trois courbes illustrées en fonction de la distance ρ au centre du cylindre conducteur. (La réponse au cahier doit se lire : la courbe (x) correspond au choix (n); pour $x = a, b, c$, avec $n = 1, 2, 3, 4$)

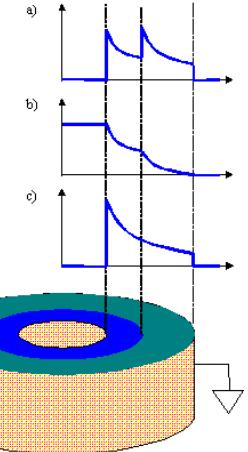
Choix 1: densité de courant $\vec{J} \cdot \hat{\rho}$ Choix 2: intensité du champ électrique $\vec{E} \cdot \hat{\rho}$

Choix 3: potentiel électrique V Choix 4 : polarisation $\vec{P} \cdot \hat{\rho}$

La courbe (a) correspond au choix : (2) (0.5Pts)

La courbe (b) correspond au choix : (3) (0.5Pts)

La courbe (c) correspond au choix : (1) (0.5Pts)



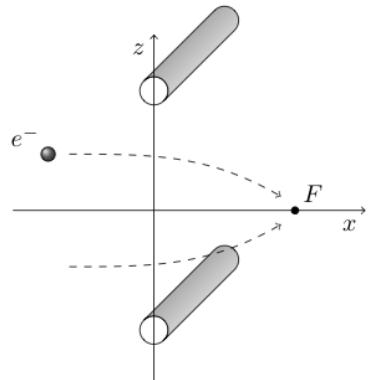
La densité de courant reste la même de par et d'autre de l'interface entre les deux diélectriques avec pertes à cause de la continuité du courant (courbe c). À cette interface, l'intensité du champ électrique E double en passant dans le deuxième couche parce que $E=J/\text{conductivité}$ (courbe a), ce qui fait que la pente du potentiel devient plus abrupte (courbe b). La courbe a) pourrait être la polarisation, sauf que nous n'avons pas assez d'information sur les permittivités pour se prononcer.

Question 2: Lentille électronique (4 points)

2.1 Calculez le vecteur champ électrique $\vec{E}(z)$ en tous points sur une ligne droite allant d'un fil à l'autre, c'est-à-dire pour $-(d-a) < z < (d-a)$.

2.2 Quel doit être le signe de la densité linéique de charge \square_l sur les fils pour qu'ils repoussent les électrons vers un point focal F ?

2.3 Calculez l'expression du potentiel électrique V_{a0} de chaque fil par rapport au point $z = 0$. Nous posons comme référence $V(z = 0) = 0$.



$$\mathbf{2.1} \quad \oint_{\text{cyl}(\rho)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\ell \rho_\ell}{\epsilon_0} \Rightarrow E_\rho \ell 2\pi\rho = \frac{\ell \rho_\ell}{\epsilon_0} \Rightarrow E_\rho = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (1\text{Pts})$$

$$\text{Par superposition: } E_z = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{z+d} - \frac{1}{d-z} \right) = \frac{\rho_\ell z}{\pi\epsilon_0 (d^2 - z^2)} \text{ pour } -(d-a) < z < (d-a) \quad (1\text{Pts})$$

2.2 Il faut repousser les électrons, donc la densité de charge est négative (0.5Pts)

2.3

$$dV = -E_z dz \Rightarrow V(z) - V(0) = - \int_0^z \frac{\rho_\ell z dz}{\pi\epsilon_0 (d^2 - z^2)} = - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{u=z^2} \frac{du}{d^2 - u} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d^2 - z^2}{d^2} \right)$$

$$V(z) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d^2 - z^2}{d^2} \right) \Rightarrow V_{a0} = V(z = d - a) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d^2 - (d-a)^2}{d^2} \right) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2ad - a^2}{d^2} \right)$$

$$V(z = -(d-a)) = V(z = d - a) = V_{a0}$$

(1.5Pts)

QUESTION #3 (5.5 points)

Des valeurs possibles dans ce problème sont $V = 4$ Volts, $d = 5 \mu\text{m}$, $r = 2 \mu\text{m}$, $W = 10 \mu\text{m}$, $L = 16 \mu\text{m}$, $\sigma = 0,75$, $\Omega^l \text{m}^{-l}$.

Questions: En l'absence de globule rouge:

3.1 ➤ Déterminer la densité de courant J , la résistance R_0 , le courant total I , et la puissance totale dissipée dans le milieu aqueux entre les électrodes . (2 points)

Lorsqu'un globule rouge passe entre les deux électrodes:

3.2 ➤ Esquisser le plus précisément les lignes de champ et les lignes équipotentielles sur la figure à la page 5 (qui est à l'échelle SURTOUT, bien identifier quelles sont les lignes de potentiel (avec les valeurs de potentiel correspondantes) et quelles sont les lignes de courant sur votre dessin.). (1 point)

3.3 ➤ En faisant la cartographie du champ, estimer la variation de résistance dans le système. Augmentera-t-elle? (2 points)

3.3 ➤ D'après ces calculs, quelle est la variation de courant (DC) que l'on peut espérer mesurer sur un ampèremètre? Augmentera-t-il quand un globule passe entre les plaques? (0.5 points)

Q3 – Réponses :

3.1 ➤

$$J = \frac{\sigma V_0}{d} = 600 \text{ mA / mm}^2 \quad \text{vers le bas}$$

$$R_0 = \frac{d}{\sigma L W} = 41,7 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{V}{R_0} = J L W \approx 100 \mu\text{A} \quad \text{vers le bas}$$

$$P = \frac{V_0^2}{R_0} = 0,38 \text{ mW}$$

3.2 ➤ Voir Figure

3.3 ➤

$$\Delta R_{approx} \approx R_f - R_0 \approx 48 - 42 \approx 6 \text{ k}\Omega$$

La résistance augmente quand le globule passe

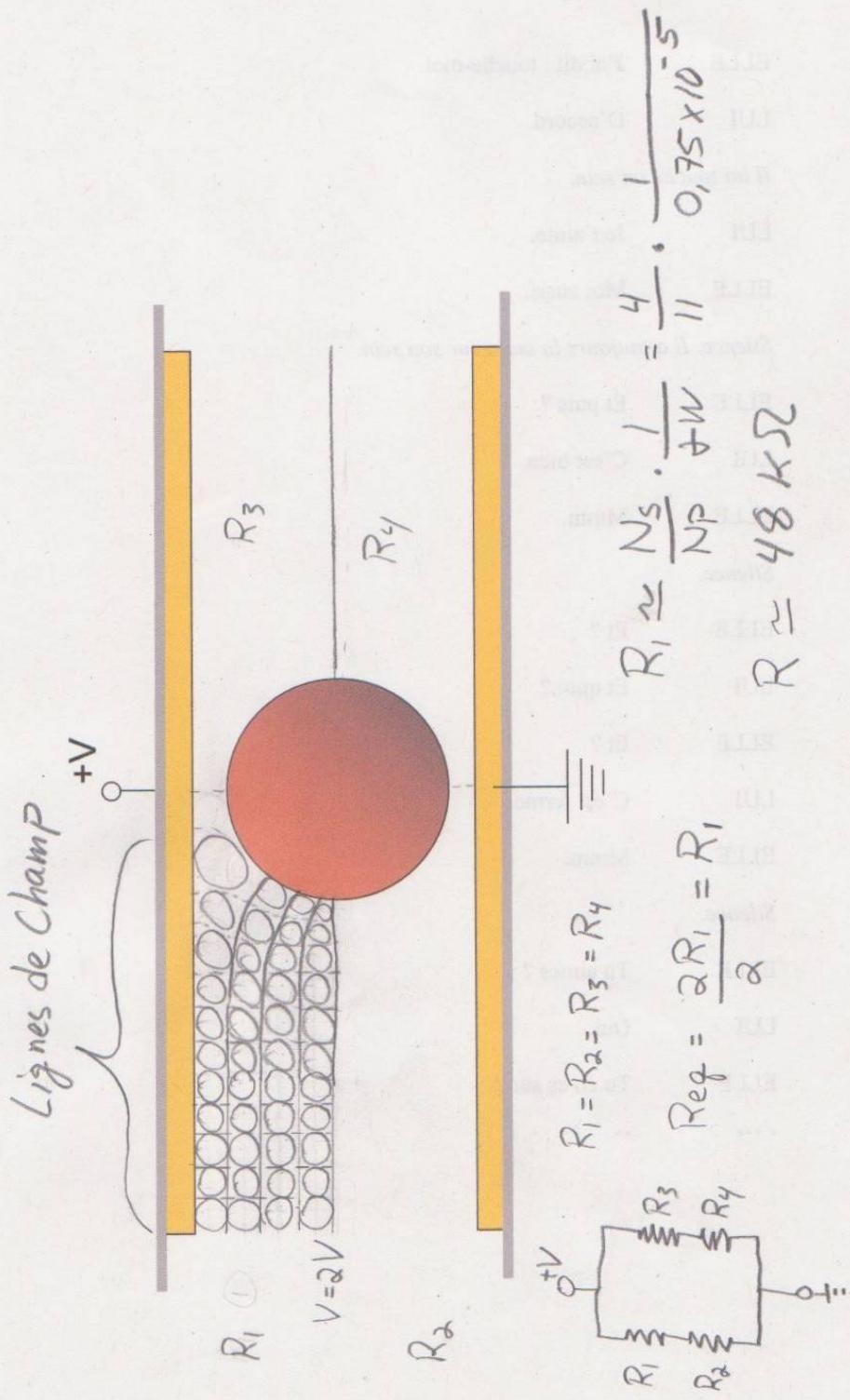
Une résistance de $R_f = \frac{2}{5} \frac{1}{\sigma W} = 53 \text{ k}\Omega$, faite avec 2 carrés en série et 5 en parallèle est également une bonne approximation.

3.3 ➤

$$\Delta I \approx V \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_0} \right) \approx -V \frac{\Delta R}{R_0 R_f} \approx -4 \frac{6 \text{ k}}{42 \text{ k} \cdot 48 \text{ k}} \approx -11 \mu\text{A}$$

Le courant diminue quand le globule passe

Q3: Figure pour la cartographie

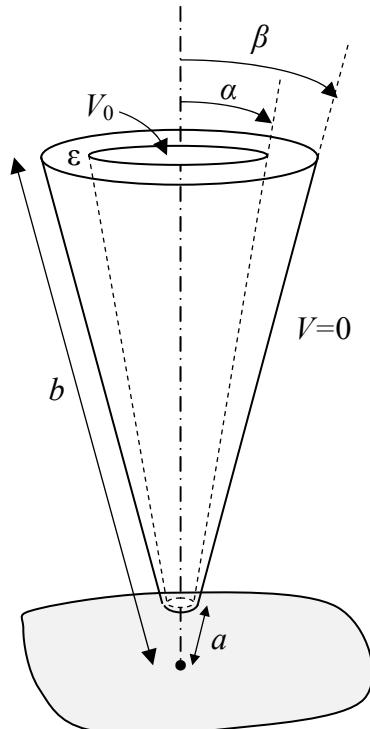


Question 4 : Capacité d'une microélectrode (5points)

Pour mesurer le courant qui traverse une petite partie de la membrane des cellules nerveuses, on utilise une microélectrode qui est fabriquée en chauffant, puis en étirant un tube de verre de façon à lui donner la forme d'un cône effilé dont l'extrémité est tronquée. La microélectrode illustrée ci-contre, possède un angle interne $\alpha = 10^\circ$, un angle externe $\beta = 15^\circ$, une longueur $b = 2$ cm, une distance $a = 2 \mu\text{m}$ entre le sommet du cône et le début de l'électrode. La permittivité relative du verre est $\epsilon_r = 4$. L'extérieur de l'électrode baigne dans une solution physiologique électriquement conductrice qui a un potentiel nul uniforme $V = 0$, tandis que l'intérieur de l'électrode est rempli d'une solution électriquement conductrice qui a un potentiel uniforme $V_0 = 1 \text{ V}$.

4.1► Donner l'équation qui décrit la distribution de potentiel à l'intérieur de la partie en verre de la microélectrode. Donner les valeurs numériques des constantes de cette équation.

4.2► Calculer la valeur numérique de la capacité C entre l'intérieur et l'extérieur de la microélectrode.



Corrigé:

La symétrie conique du problème a été étudiée (et la formule de la distribution du potentiel, solution de l'équation de Laplace, est donnée à la page 6 du formulaire)

$$V(\theta) = A \ln(\tan(\theta/2)) + B \quad (0.5Pt)$$

Solution qui dépende seulement de l'angle (en coordonnées sphériques).

Pour déterminer les constantes, il va falloir imposer les conditions de frontière, soit :

$$V(\theta = \beta) = A \ln\left(\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) + B = 0 \Rightarrow B = -A \ln\left(\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \quad (0.5Pt)$$

$$V(\theta = \alpha) = A \ln\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - A \ln\left(\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) = V_0 \quad (0.5Pt) \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right)} = \frac{1V}{\ln\left(\frac{0.08749}{0.13165}\right)} = -2.447V \quad (0.5Pt)$$

$$B = -4.96V \quad (0.5Pt)$$

Pour le calcul de la capacité il va falloir donner la charge correspondante à la distribution de potentiel. Ceci peut se faire par la définition (voir formule dans le questionnaire, pour la densité de charge dans l'interface diélectrique (verre)/ conducteur (solution). Noter que le vecteur normal est sortant du conducteur, et donc le vecteur unitaire pour la surface à l'angle $\beta(\alpha)$ est $-\hat{\theta}(+\hat{\theta})$

Les densités de charge sur la microélectrode sont (pour la variable r entre ($a \leq r \leq b$)):

$$\sigma_\beta = D_N = \vec{D} \cdot (-\hat{\theta}) = \epsilon_{Verre} \vec{E} \cdot (-\hat{\theta}) = -\epsilon_{Verre} \nabla V \cdot (-\hat{\theta}) = \frac{\epsilon_{Verre}}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{\theta=\beta} = \frac{\epsilon_{Verre}}{r} \frac{\frac{1}{2} A}{\tan \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$\sigma_\beta = \frac{\epsilon_{Verre}}{r} \frac{\frac{1}{2} A}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\epsilon_{Verre}}{r} \frac{A}{\sin \beta} < 0 \quad (0.5 Pts)$$

$$\sigma_\alpha = D_N = \vec{D} \cdot (\hat{\theta}) = \epsilon_{Verre} \vec{E} \cdot (\hat{\theta}) = -\epsilon_{Verre} \nabla V \cdot (\hat{\theta}) = -\frac{\epsilon_{Verre}}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha} = -\frac{\epsilon_{Verre}}{r} \frac{A}{\sin \alpha} > 0$$

Pour le calcul de la charge dans chaque interface il faut trouver l'élément de surface (voir l'expression dans la page 7 du questionnaire) et intégrer. Dans l'expression :

$$d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$$

Le seul terme que l'on doit retenir est le deuxième.

Alors,

$$\sigma_\beta dS = \frac{\epsilon_{Verre}}{r} \frac{A}{\sin \beta} r \sin \beta dr d\phi \quad (0.5 Pt) \Rightarrow Q_\beta = \epsilon_{Verre} A 2\pi (b-a) = -Q_\alpha = -Q < 0 \quad (0.5 Pt)$$

$$Q = 8\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 2.447 \times 1.9998 \times 10^{-2} C = 1,09 \times 10^{-11} C \quad (0.5 Pt)$$

$$C = \frac{Q_\alpha}{\Delta V} = \frac{Q}{V_0} = 10,09 \times 10^{-12} F \quad (0.5 Pt)$$

PHS1102 CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE – HIVER 2013

DATE : Lundi 11 mars 2013

HEURE : 18H30-20H30

PAGES : 6

QUESTIONS : 5

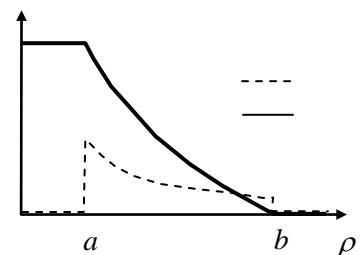
NOTE : Aucune documentation permise.

Calculatrice non-programmable permise.

Question 1: Concepts, SVP répondez dans le cahier d'examen (4 points)

1.1» (1 Pt) Un câble coaxial est formé d'un conducteur central cylindrique de rayon a , entouré d'un conducteur extérieur de rayon b qui est mis à la terre. Ces conducteurs sont séparés par un milieu diélectrique ayant la permittivité du vide. La figure ci-contre montre schématiquement (en fonction de la coordonnée cylindrique ρ) la variation de :

- (a) : (---) la densité de flux électrique (D) et (_____) le champ électrique (E)
- (b) : (---) le potentiel électrique (V) et (_____) le champ électrique (E)
- (c) : (---) champ électrique (E) et (_____) le potentiel électrique (V)
- (d) : (---) la densité de flux électrique (D) et (_____) permittivité relative (ϵ_r)



Choisir la bonne réponse parmi les quatre options.

Solution : 1.1» (1 Pt)

(c) : (---) champ électrique (E) et (_____) le potentiel électrique (V)

1.2» (1Pt) Quatre charges positives et quatre charges négatives de mêmes valeurs sont séparées de leur plus proche voisine par des distances égales. Lorsque l'on considère les potentiels estimés aux quatre points illustrés sur la figure, appariez les énoncés suivants:

1) différence de potentiel minimum:

a) $V_2 - V_4$

d) V_1

2) différence de potentiel nulle :

b) $V_3 - V_1$

e) V_2

3) potentiel positif :

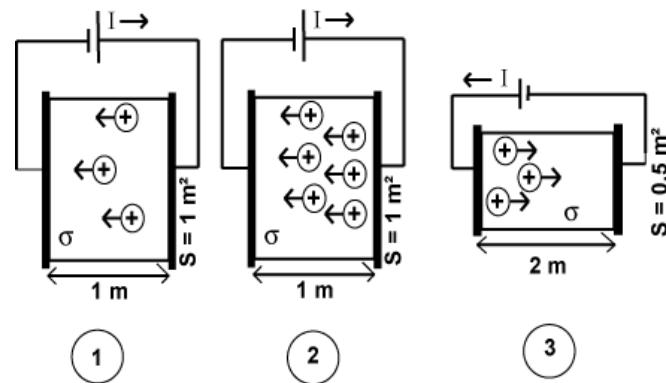
c) $V_1 - V_3$

f) V_3

1.2» Solution : 1.2 1↔b; 2↔a; 3↔d (1Pt)

1.3» (1 Pt) Un courant I circule dans les trois circuits suivants. La concentration de porteurs de charges est proportionnelle au nombre de charges positives illustrées et leur mobilité est la même dans les trois milieux. Placer les circuits dans l'ordre croissant de résistance.

a) $3 < 1 < 2$



b) $2 < 1 < 3$

c) $3 < 2 < 1$

d) $1 = 2 = 3$

1.3» Solution : Res 2 < Res 1 < Res 3 ⇒ (b) (1Pts)

1.4► (1Pt) Si l'expression de la densité de flux \vec{D} , s'écrit :

$$\vec{D}(\rho, \varphi, z) = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{h} \left[\frac{\left(\frac{z}{h} \right) \ln \left[1 + \left(\frac{\rho}{h} \right)^2 \right]}{\left(\frac{\rho}{h} \right) \left[1 + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]^2} \hat{\rho} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{h} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]} \hat{z} \right]$$

$$(\varepsilon_r = 3,9, V_0 = 12V, h = 1 \text{ cm})$$

- (i) **(0,6 Pt)** Montrer que la densité volumique de charges libres est nulle, et
- (ii) **(0,4 Pt)** Écrire et évaluer l'expression du vecteur de polarisation, à l'origine du système de coordonnées.
(SVP ne pas oublier d'écrire les unités dans le cahier d'examen)

1.4►

Solution : (i)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D}(\rho, \varphi, z) &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{h} \left[\frac{\partial}{\rho \partial \rho} \left\{ \cancel{\rho} \left(\frac{z}{h} \right) \ln \left[1 + \left(\frac{\rho}{h} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{h} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]} \right] = \\ &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{h} \left[\frac{\frac{2 \cancel{\rho}}{\cancel{\rho} h^2} \left(\frac{z}{h} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{h} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]^2} - \frac{\frac{2z}{h^2}}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{h} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]^2} \right] = 0 = \rho_{libre} \end{aligned} \quad (0,6)$$

- (ii) Écrire et évaluer l'expression du vecteur de polarisation, à l'origine du système de coordonnées.
(SVP ne pas oublier d'écrire les unités)

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \vec{D} (\vec{r} = 0) \\ \vec{P} &= (\varepsilon_r - 1) \frac{\varepsilon_0 V_0}{h} \hat{z} = 2,9 \frac{8,85 \times 10^{-12} F \cdot m^{-1} 12V}{1 \times 10^{-2} m} = 3,08 \times 10^{-10} \frac{C}{m^2} \end{aligned} \quad (0,4)$$

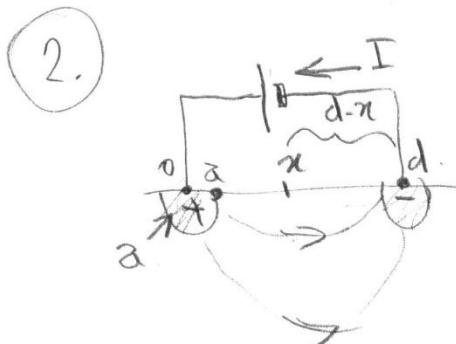
Question 2: Pistolet à impulsion électrique (4 points)

Les pistolets à impulsion électrique sont parfois utilisés pour immobiliser des personnes. On les connaît sous la marque de commerce TASER par exemple. Le pistolet projette des électrodes vers la cible et envoie des courtes impulsions de courant typiquement de 2 ampères afin de bloquer temporairement le système nerveux.

On modélise le pistolet comme une source de courant I en contact avec la surface de la peau par le biais de deux électrodes hémisphériques de rayon $a = 0,5 \text{ mm}$, séparées d'une distance $d = 10 \text{ cm}$. On pose la conductivité du corps à $\sigma = 0,2 \text{ Sm}^{-1}$. On suppose également le corps comme un volume semi-infini, c'est-à-dire beaucoup plus grand que l'espacement entre les électrodes.

- Calculez la différence de potentiel nécessaire pour faire passer le courant de 2 A dans le corps.

SOLUTION :



Pour 1 seule électrode

$$\bar{J} = \frac{I}{S} \hat{F} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{F} \xrightarrow{(25)} \bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} \xrightarrow{(0,2)} \bar{E} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

Pour 2 électrodes.

$$\bar{E} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(d-a)^2} \right) \hat{a} \quad (1)$$

$$V = - \int_{d-a}^a \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right) dx \xrightarrow{\text{limite } (0,2)} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \right]_{d-a}^a$$

$$V = \frac{I}{\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right) \xrightarrow{(1)} \frac{I}{\pi\sigma a} \quad R = \frac{V}{I} \approx \frac{1}{\pi\sigma a} \quad (\text{puisque } a \ll d)$$

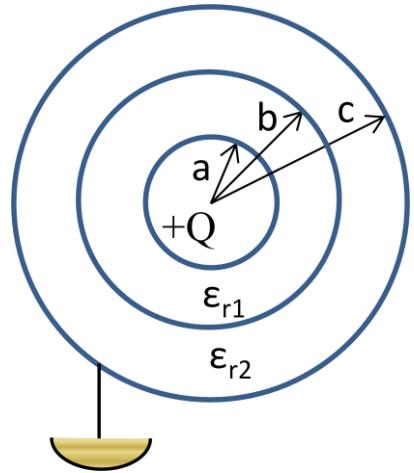
$$R = \frac{1}{\pi \times 0.2 \times 3.14 \times 10^{-4}} = 3,183 \Omega \quad V = 3183 \times 2 = \boxed{6366 \text{ V}}$$

Calcul numérique: (1)

Question 3: Condensateur sphérique structuré (5 Points)

Un condensateur sphérique structuré est formé des sections suivantes (voir la figure) :

- Une sphère creuse métallique centrale de rayon $a = 2 \text{ cm}$ portant une charge de $Q = +1 \mu\text{C}$;
- Une coquille externe métallique mise à la masse, de rayon $c = 6 \text{ cm}$.
- Une région formée de deux sphères diélectriques concentriques à l'intérieur du condensateur: la première, entre les rayons $a = 2 \text{ cm}$ et $b = 4 \text{ cm}$ possède une permittivité relative $\epsilon_{r1} = 2$, la deuxième, entre les rayons $b = 4 \text{ cm}$ et $c = 6 \text{ cm}$ possède une permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$.



3.1 (2 Pt) Déterminer l'expression du champ électrique \vec{E} en fonction de la distance r du centre à l'intérieur et à l'extérieur du condensateur.

3.2 (1 Pt) Tracer schématiquement la dépendance du module du champ électrique E en fonction de la distance r du centre, à l'intérieur et à l'extérieur du condensateur. Expliquer le comportement de E au voisinage de l'interface entre les deux diélectriques ϵ_{r1} et ϵ_{r2} . **3.3** (1 Pt) Déterminer l'expression et la valeur du potentiel sur la sphère interne.

Question 3:

$$3.1 \quad g_{\text{coul}} : \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad \text{Sphere : } D \cdot 4\pi r^2 = Q, \quad \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \quad (0,5 \text{ f})$$

$$r < a : \quad E = 0 \quad \text{puisque } Q = 0 \text{ à l'intérieur} \quad (0,25 \text{ f})$$

$$a < r < b : \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r1} \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad b < r < c : \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r2} \epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$(0,25 \text{ f}) \quad r > c : \quad E = 0, \quad (0,5 \text{ f}) \quad (0,5 \text{ f})$$



$$\text{charges surfaciques induites} \quad \text{Si} \quad |\vec{P}|, \quad \text{où} \quad \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

$$3.3 \quad C_1 \parallel C_2 \quad V = V_1 + V_2 \quad V = - \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (0,25)$$

$$(0,25 \text{ f}) \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \right]$$

$$(0,25 \text{ f}) \quad V = 1,31 \times 10^5 \text{ V}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r1} \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (0,25 \text{ f})$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r2} \epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (0,25 \text{ f})$$

3.4► (1 Pt) Déterminer l'expression et la valeur de la capacité de ce condensateur.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left[\frac{1}{\epsilon_{r1}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\epsilon_{r2}}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \right]} = \frac{1\mu C}{1,31 \times 10^5 V} = 7,62 \times 10^{-12} F = 7,62 pF$$

. 3.3► (1 Pt) Déterminer l'expression et la valeur du potentiel sur la sphère interne.

Solution alternative:

$$V_{ab} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V(r=a) - V(r=c) = - \int_{r=c}^{r=a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r=a}^{r=c} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r=a}^{r=c} E_r dr$$

$$V(r=c) = 0 \Rightarrow V(r=a) = V = \int_{r=a}^{r=c} E_r dr = \int_{r=a}^{r=b} E_r dr + \int_{r=b}^{r=c} E_r dr$$

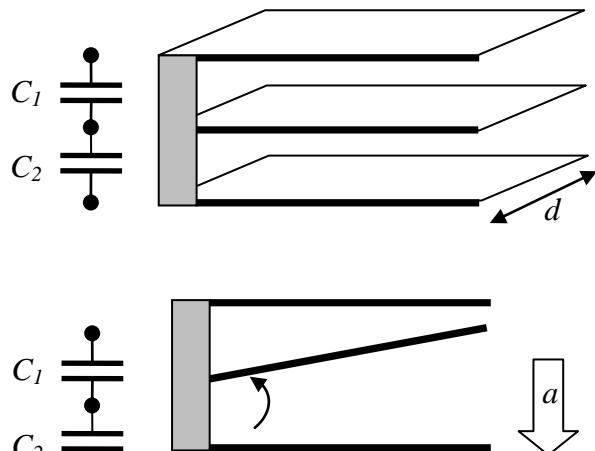
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \right\} = 1,31 \times 10^5 V$$

Question 4 : Accéléromètre (Graphique) (3 points)

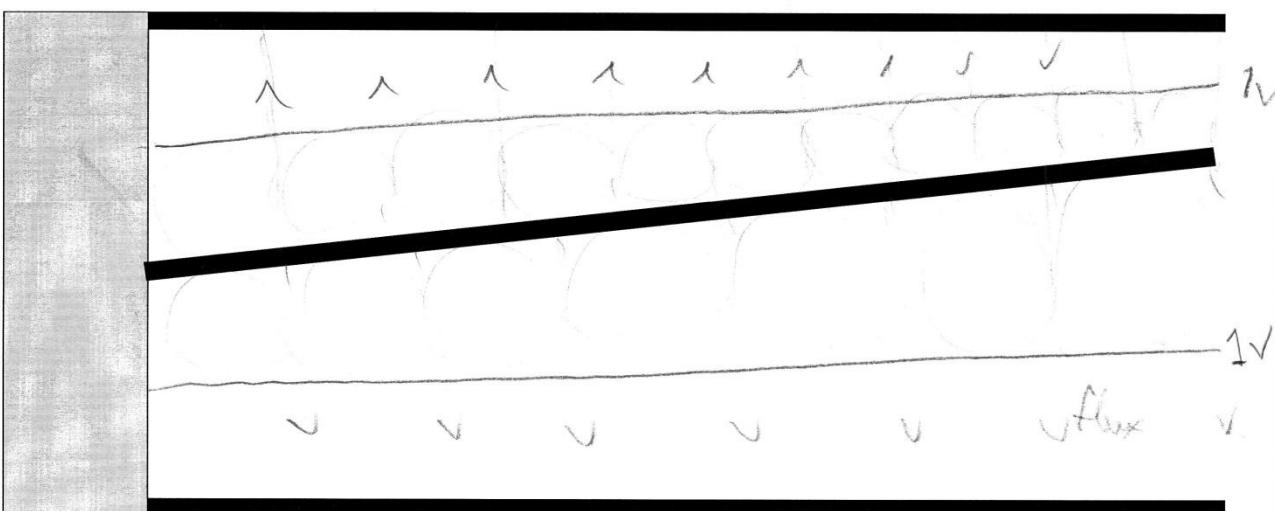
Les manettes de la console de jeu *Wii* contiennent des systèmes microélectromécaniques (MEMS) qui permettent de mesurer les accélérations. L'accéléromètre illustré à droite est constitué de 3 lames conductrices de profondeur $d = 500 \mu m$. Les lames supérieures et inférieures sont rigides et fixées au boîtier de l'accéléromètre alors que la lame centrale peut plier comme une lame de ressort. En l'absence d'accélération, la lame centrale reprend sa position d'équilibre qui est à égale distance des lames supérieures et inférieures et les capacités C_1 et C_2 entre la lame centrale et les deux autres sont égales (figure du haut). Par contre, lorsque la lame centrale est soumise à une accélération, la force d'inertie va recourber la lame et les capacités C_1 et C_2 ne sont plus égales (figure du bas). La déflexion de la lame étant proportionnelle à l'accélération, la mesure des deux capacités est alors utilisée pour calculer l'accélération.

4.1► (2 Pt) En utilisant la figure de la page suivante (*à remettre*), faire une esquisse du champ électrique dans l'accéléromètre soumis à une accélération lorsque les lames supérieures et inférieures sont à un potentiel nul et que la lame centrale est à un potentiel de 2V. Bien identifier les lignes équipotentielles et les lignes de flux. 4.2► (1 Pt)

Calculer les valeurs numériques des capacités C_1 et C_2 , à partir de votre esquisse. L'espace séparant les lames est le vide.



$$C_1 = \frac{11}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^{-4} \approx 2.43 \times 10^{-14} F$$



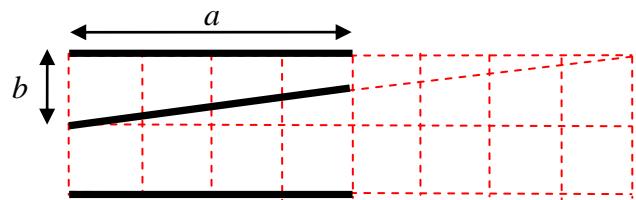
À REMETTRE

NOM :
Matricule :

$$C_2 = ? \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^{-4} \approx 1.54 \times 10^{-14} F$$

Question 5 : Accéléromètre (Laplace) (4 points)

L'accéléromètre de la question précédente possède trois lames de même longueur $a = 400 \mu\text{m}$ qui sont espacées d'une largeur $b = 100 \mu\text{m}$ (en l'absence d'accélération). En présence d'accélération, la lame centrale se recourbe vers le haut, selon le schéma illustré ci-dessous où les carrés tracés en pointillé ont des côtés de $100 \mu\text{m}$.



5.1 (2,5 Pt) Calculer la distribution de potentiel entre la lame supérieure et la lame centrale lorsque la lame supérieure est à un potentiel nul et que la lame centrale est à un potentiel de $2V$. Vous pouvez redéfinir le système de coordonnées et faire des approximations pour évaluer les distances séparant les lames des axes de votre système de coordonnées.

5.1 Pour C_1 $V = A\phi + B$ (0.5 Pt)

à $\phi_1 = 0$, $V = 0$ $0 = A0 + B \Rightarrow B = 0$

à $\phi_1 = 0.124$, $V = 2$ $2 = A \cdot 0.124$

$A = \frac{2}{0.124} \Rightarrow A = 16.1$ (0.5 Pt)

$V_1 = 16.1 \phi_1$ (0.5 Pt)

$\alpha_1 = \arctan \frac{b}{2a}$

$d_1 = \arctan \frac{100}{800} = 0.124 \text{ rad.}$

1 Pt

5.2 (1,5 Pt) À l'aide de la distribution de potentiel, calculer la valeur numérique de la capacité C_1 . L'espace séparant les lames est le vide.

5.2 $P_s = D_N = -\epsilon_0 \nabla V_1 = -\frac{\epsilon_0}{P_1} \frac{\partial V_1}{\partial \phi_1} = -\frac{\epsilon_0 A}{P_1}$ (0.5 Pt)

plaque supérieure

$Q_1 = \int_{z=0}^{2a} \int_{p_i=a}^{2a} -\frac{\epsilon_0 A}{P_1} dp dz = -\epsilon_0 A d \left[\ln p \right]_a^{2a} = -\epsilon_0 A d \ln 2$ (0.25 Pt)

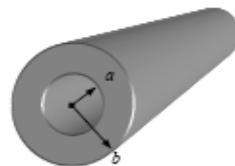
$C_1 = \frac{Q_1}{2V} = \frac{\epsilon_0 \times 16.1 \times 5 \times 10^{-4} \ln 2}{2} = 2.46 \times 10^{-14} \text{ F}$ (0.5 Pt)

QUESTION 1: Compréhension, SVP répondre dans le cahier d'examen (4,5 points)

1.1» (0,5Pt) Un long tuyau métallique de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , reçoit, au temps t_0 , une charge $+Q$ sur sa surface intérieure ($\rho = a$). À l'équilibre, comment cette charge se distribuera-t-elle? (cocher la bonne réponse et répondre dans le cahier d'examen):

A) Uniformément sur la surface intérieure ($\rho = a$)

B) Uniformément sur la surface extérieure ($\rho = b$)

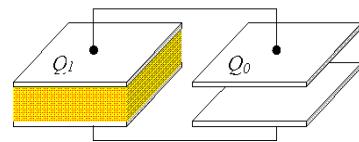
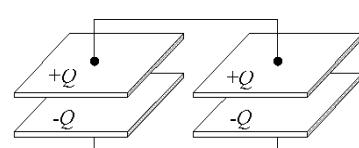


C) Uniformément dans tout le volume ($a < \rho < b$)

D) Les données sont insuffisantes pour répondre

1.2» (1Pt) Deux condensateurs plans identiques dont les plaques sont séparées par le vide, sont reliés en parallèle et portent chacun la même charge $+Q$. On introduit, dans un des condensateurs, un diélectrique de permittivité relative égale à 4. Quelles sont les charges portées par les condensateurs avec et sans diélectrique, Q_1 et Q_0 , respectivement? Justifier.

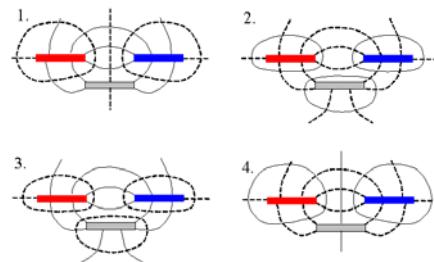
- (a) $Q_1 = Q_0 = Q$
- (b) $Q_1 > Q_0$
- (c) $Q_1 < Q_0$
- (d) $Q_1 = 4Q, Q_0 = Q$



1.3» (1Pt) Un coupleur est constitué de trois rubans conducteurs parallèles dont une section est illustrée ci-contre. Le ruban de gauche est à un potentiel $+V$, le ruban de droite est à un potentiel $-V$ et le ruban du dessous est à un potentiel nul. Sur les esquisses, les lignes pointillées représentent des lignes de flux et les lignes en trait plein des lignes équipotentielles. Laquelle des quatre esquisses suivantes est-elle juste?

SVP écrire le chiffre de votre choix dans le cahier d'examen

(4)



1.4» (1Pt) Considérons une sphère conductrice creuse. Donner la valeur de la

densité de flux \vec{D} :

- a) à l'intérieur de la sphère située dans un champ électrique externe ; $\vec{D} = 0$
- b) à l'extérieur de la sphère mise à la terre et contenant une charge $+Q$; $\vec{D} = 0$

1.5» (1Pt) LABO Au laboratoire, vous mesurez la chute de tension ΔV à travers une résistance $R = (76 \pm 2,28)$ Ohms. Selon la lecture du voltmètre, on détermine $\Delta V = (28 \pm 0,14)$ V. Quelle est la valeur en Watts de la puissance dissipée dans la résistance, avec son incertitude ? Choisir la bonne réponse et l'indiquer dans votre cahier d'examen

- (a) $10,32 \pm 0,33$; (b) $10,32 \pm 0,41$; (c) $21,28 \pm 2,28$; (d) Aucune de ces réponses.

Question 2 : Condensateur sphérique (5 Points)

Considérer un condensateur sphérique dont les rayons a et b des armatures métalliques sont montrées dans la figure. Le vide sépare l'armature de rayon a , qui est reliée à une source de tension V_0 , d'une coquille diélectrique gélantineuse de rayon intérieur c et de constante diélectrique relative $\epsilon_r > 1$. Le diélectrique reste collé à la surface métallique (d'épaisseur négligeable) de l'armature de rayon b et qui est mise à la terre.

2.1 ➤ (2,5 Pt) Déterminer l'expression de la capacité $C(c)$ du condensateur.

Solution :

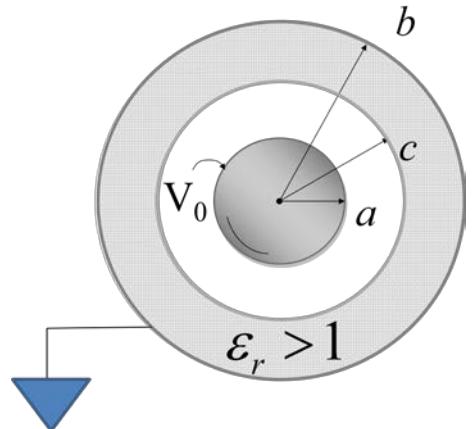
$$\oint_{r>a} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow D_r 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (\text{0.5Pts})$$

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon(r)r^2} \quad (\text{1Pt})$$

$$\int_{V(b)}^{V(a)} dV = V(a) - V(b) = V_0 = - \int_{r=b}^{r=a} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{r=b}^{r=a} E_r dr = - \int_{r=b}^{r=a} \frac{Q}{\epsilon(r) 4\pi r^2} dr = \int_{r=a}^{r=b} \frac{Q}{\epsilon(r) 4\pi r^2} dr \quad (\text{0.5Pts})$$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{r=a}^{r=c} \frac{dr}{r^2} + \int_{r=c}^{r=b} \frac{1}{\epsilon_r} \frac{dr}{r^2} \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{1}{r} \right)_a^c + \left(-\frac{1}{\epsilon_r r} \right)_c^b \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right) \quad (\text{0.5Pts})$$

$$C(c) = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right)} \quad (\text{0.5Pts})$$



Note au correcteur : il faudra donner des points équivalents si l'étudiant démontre la formule de la capacité

$$\text{d'une sphère avec diélectrique, } C = \frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

et réalise que la capacité du problème peut se considérer comme la capacité équivalente de deux capacités en

$$\text{série: } \frac{1}{C(c)} = \frac{1}{C_{ac}} + \frac{1}{C_{cb}} = \left[\frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)} \right]^{-1} + \left[\frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)} \right]^{-1} = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)}{4\pi\epsilon_0}$$

Imaginez-vous que l'on a trouvé une façon d'injecter ou d'extraire du diélectrique en gardant toujours la forme d'une coquille sphérique, ce qui rend la valeur de c variable.

2.2 ➤ (0,5Pt) Calculer le rapport des capacités $C(c=a)/C(c=b)$, où $C(c=a)$ représente la capacité quand le condensateur est rempli du diélectrique (rayon $c=a$), et $C(c=b)$ est la capacité du condensateur sous vide (rayon $c=b$).

Solution :

$$\frac{C(c=a)}{C(c=b)} = \frac{\frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right)}}{\frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}} = \epsilon_r > 1 \quad (\text{0.5 Pts})$$

2.3 ➤ (2Pt) Laquelle des deux valeurs (a ou b) devrait prendre le rayon c pour que l'énergie électrique stockée dans le condensateur soit maximum, si la charge Q dans le condensateur reste constante. Exprimer l'énergie maximum en Joules si $b = 2a = 2$ cm, $\epsilon_r = 2$ et $Q = 1 \mu\text{C}$

Solution :

$$W_{\max}(c=b) = \frac{Q^2}{2[C(c)]_{\min}} = \frac{Q^2}{2C(b)} = \frac{Q^2}{\frac{2 \times 4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}} = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)Q^2}{8\pi\epsilon_0} \quad (\text{1 Pts})$$

$$W_{\max}(c=b) = \frac{0.5\text{cm}^{-1}10^{-12}\text{C}^2}{8\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \text{Fm}^{-1}} = 0.225\text{J} \quad (\text{1 Pts})$$

QUESTION 3: Puissance électrique dissipée par un câble coaxial (3,5 points)

Le câble coaxial est couramment utilisé pour transmettre des signaux analogiques (télévision) ou numériques (ethernet). La figure montre schématiquement un câble constitué d'un conducteur central cylindrique de rayon a qui est isolé d'une gaine conductrice de rayon b par un diélectrique (téflon) à une conductivité σ de 10^{16} S/m .

3.1 ➤ (2Pt) Déterminer l'expression de la puissance électrique dissipée par mètre de câble.

$$E_\rho l 2\pi\rho = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{L} l \quad (0,25 \text{ Pt}) \Rightarrow E_\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L \rho} \quad (0,25 \text{ Pt}) \Rightarrow \int_a^b E_\rho d\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a} = \Delta V$$

$$E_\rho = \frac{\Delta V}{\left(\ln \frac{b}{a}\right) \rho} \quad (0,5 \text{ Pt})$$

$$P = \int_{VolTef} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \sigma \int_{VolTef} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \sigma \frac{(\Delta V)^2}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \int_{VolTef} \frac{dV}{\rho^2} = \sigma \frac{(\Delta V)^2}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} L 2\pi \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi\sigma \frac{(\Delta V)^2}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)} L$$

$$\frac{P}{L} = 2\pi\sigma \frac{(\Delta V)^2}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)} \quad (1 \text{ Pt})$$

3.2 ➤ (0,5Pt) Déterminer l'expression de la résistance par mètre de câble.

$$\Rightarrow \frac{P}{L} = \frac{(\Delta V)^2}{R_{lm}} \Rightarrow R_{lm} = \frac{\left(\ln \frac{b}{a} \right)}{2\pi\sigma}$$

résultat en unités de Ohm -mètre

3.3» (1Pt) Évaluer la puissance dissipée en W/m à une tension de 220 V si les dimensions sont $b = 6,15$ mm, $a = 2$ mm.

$$\Rightarrow \frac{P}{L} = \frac{(\Delta V)^2}{R_{lm}} \Rightarrow R_{lm} = \frac{\left(\ln \frac{b}{a} \right)}{2\pi\sigma} = \frac{1,123}{2\pi} 10^{16} \Omega \cdot m = 1,79 \times 10^{15} \Omega \cdot m$$

(0,75Pt)

$$\frac{P}{L} = \frac{48400V^2}{1,79 \times 10^{15} \Omega \cdot m} = 2,71 \times 10^{-11} \frac{W}{m}$$

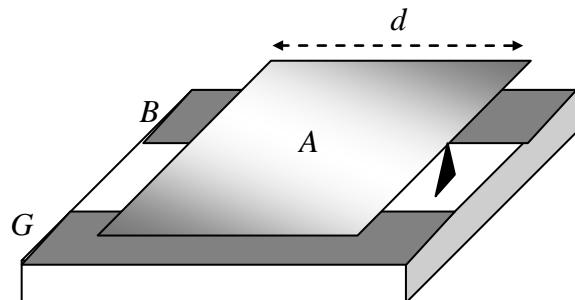
(0,25Pt)

QUESTION 4: Systèmes microélectromécaniques : miroir basculant (3 points)

La photographie ci-dessous illustre un miroir basculant construit à l'aide des techniques des systèmes microélectromécaniques (MEMS). Ces miroirs de très faible dimension sont utilisés dans les commutateurs en télécommunication ou dans des projecteurs d'images numériques. La figure de droite est une représentation simplifiée du miroir que nous utiliserons dans ce problème (notre miroir est rectangulaire plutôt que circulaire) : le miroir métallique A, qui peut pivoter autour d'un axe central, est mis à la masse; pour faire basculer le miroir à l'aide des forces électrostatiques, on applique un potentiel sur un des deux rubans métalliques B ou G déposés sur la surface d'un substrat diélectrique (le potentiel sur l'autre ruban est nul). Pour ce problème, nous considérerons que : le ruban B possède un potentiel de +2 V; le ruban G, un potentiel de 0 V; et le miroir A, un potentiel de 0 V; la longueur du miroir est $d = 100 \mu\text{m}$; le miroir est opéré sous vide; la distribution du potentiel ne dépend pas de la profondeur (la distribution du potentiel sur des sections différentes, perpendiculaires à d reste identique).

4.1» (1,5 Pts) En utilisant la figure de la page suivante (*à remettre*) qui représente une section du dispositif, faire une esquisse du champ électrique sous le miroir A: bien identifier les lignes équipotentielles et les lignes de flux.

4.2» (1,5 Pts) Calculer la valeur numérique de la capacité C entre le ruban B et le miroir à partir de votre esquisse (le circuit devra charger cette capacité pour faire basculer le miroir).



A REMETTRE

A REMETTRE

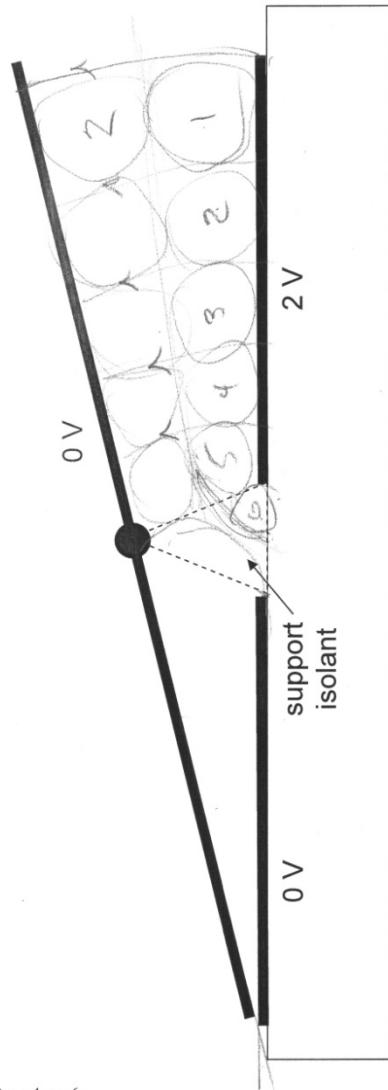
A REMETTRE

NOM :

PRÉNOM :

MATRICULE :

$$C = \frac{5}{2} \epsilon_0 A = 3 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-6} = 2.21 \times 10^{-15} \text{ F}$$



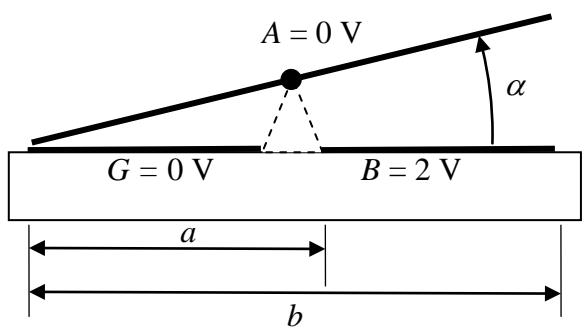
Page 4 sur 6

QUESTION 5: Systèmes microélectromécaniques : miroir basculant (4,5 points)

La figure ci-contre, illustre une section du miroir basculant du problème précédent, avec comme dimensions : $a = 55 \mu\text{m}$; $b = 100 \mu\text{m}$; $d = 100 \mu\text{m}$; $\alpha = 15^\circ$. En utilisant l'équation de Laplace (1D), calculez :

5.1 ➤ (1,5 Pts) La distribution du potentiel dans l'espace entre le miroir A et le ruban B ($a < \rho < b$ et $0 < \phi < 15^\circ$).

5.2 ➤ (3 Pts) La valeur numérique de la capacité C entre le miroir A et le ruban B .



$$V(\varphi) = A\varphi + B \Rightarrow V(\varphi = \alpha) = 0V \Rightarrow A\alpha = -B$$

$$V(\varphi = 0) = B = V_0 \Rightarrow A = -\frac{V_0}{\alpha} =$$
(1.5Pts)

$$V(\varphi) = -\frac{V_0}{\alpha}\varphi + V_0 = V_0\left(1 - \frac{\varphi}{\alpha}\right)$$

$$V(\varphi) = -\frac{V_0}{\alpha}\varphi + V_0$$

$$D_\varphi = \epsilon_0 E_\varphi = -\frac{\epsilon_0}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha \rho} = \rho_s \quad (1Pt) \Rightarrow$$

$$Q = \int_{z=0}^{z=d} dz \int_a^b \rho_s d\rho = d \int_a^b D_\varphi d\rho = \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha} d \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1Pt)$$
(2,50Pts)

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_0}{\alpha} d \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-6} \ln\left(\frac{100}{55}\right)}{(15\pi/180)} = 2.02 \times 10^{-15} F \quad (0,5Pt)$$

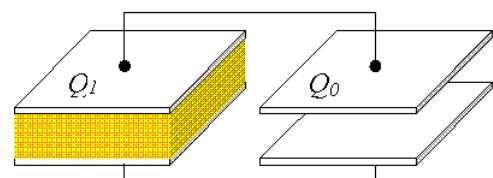
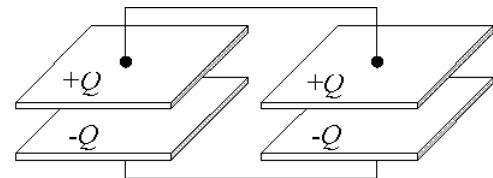
QUESTION 1 : Compréhension, SVP répondre *dans le cahier d'examen* (3 points)

1.1 ➤ (1 Pt) Une région sphérique contient des charges électriques dont la densité varie d'une manière linéaire avec le rayon selon l'équation $\rho(r) = kr$, où k est une constante et r représente la distance radiale à partir du centre de la région sphérique. Laquelle des quatre expressions suivantes indique la quantité de charge contenue dans une sphère de rayon R centrée à l'origine.

- A) $4\pi kR^3/3$
- B) πkR^4
- C) $2\pi kR^3$
- D) πkR^2

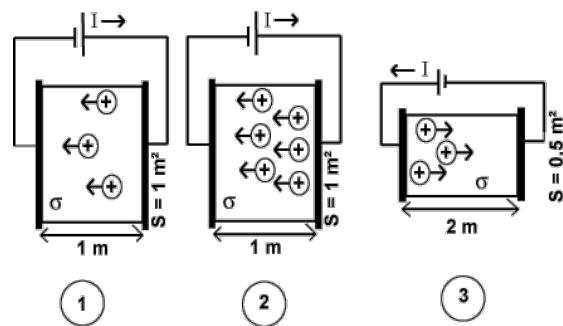
1.2 ➤ (1 Pt) Deux condensateurs plans identiques dont les plaques sont séparées par le vide, sont reliés en parallèle et portent chacun la même charge $+Q$. On introduit dans un des condensateurs un diélectrique de permittivité relative égale à 4. Quelles sont les charges portées par les condensateurs avec (Q_1) et sans diélectrique (Q_0) ?

- A) $Q_1 = Q_0 = Q$
- B) $Q_1 < Q_0$
- C) $Q_1 = 4Q, Q_0 = Q$
- D) $Q_1 > Q_0$



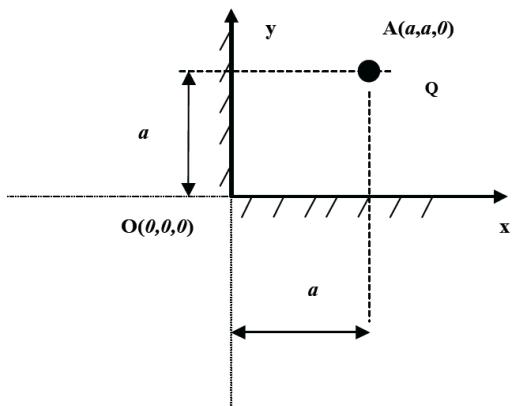
1.3 ➤ (1 Pt) Un courant I circule dans les trois circuits suivants. La concentration des porteurs de charges est proportionnelle au nombre de charges positives illustrées et leur mobilité est la même dans les trois milieux. Placer les circuits dans l'ordre croissant de résistance.

- A) $3 < 1 < 2$
- B) $2 < 1 < 3$
- C) $3 < 2 < 1$
- D) Les trois circuits ont la même résistance.



QUESTION 2 : Charges images (3 points)

Deux plans infinis conducteurs forment un coin à 90° l'un par rapport à l'autre (la ligne d'intersection des plans passe par l'origine et se dirige dans la direction z). Le plan horizontal débute à $x = 0$ et a une extension infinie dans les directions z et $x > 0$. Le plan vertical débute à $y = 0$ et a une extension infinie dans les directions z et $y > 0$. Une charge Q est située au point $A(a, a, 0)$ et les deux plans sont mis à la terre.



2.1 ➤ (1,5 Pt) Trouver les charges images et leurs positions. Justifier votre réponse.

2.2 ➤ (1,5 Pt) Quelle est l'amplitude et la direction de la force qui s'exerce sur la charge Q au point A ?

Solution

2.1 (1,5 pt) Trouver les charges images et leurs positions. Justifier votre réponse.

Ici, il faudra 3 charges: la première se retrouvera à $(-a, a, 0)$, la seconde à $(a, -a, 0)$ et la troisième à $(-a, -a, 0)$. La justification est la suivante:

1. Une charge $Q_1 = -Q$ est requise au point $r_1 = (-a, a, 0)$ pour que le potentiel sur un plan infini localisé à $x = 0$ dû à la charge au point $(a, a, 0)$ soit nul.
2. La seconde charge $Q_2 = -Q$ sera au point $r_2 = (a, -a, 0)$ pour que le potentiel sur un plan infini localisé à $y = 0$ dû à la charge au point $(a, a, 0)$ soit nul.
3. La troisième charge $Q_3 = Q$ est requise au point $r_3 = (-a, -a, 0)$ pour contrecarrer l'effet des charges images Q_1 et Q_2 sur les plans $y = 0$ et $x = 0$ respectivement.

2.2 (1,5 pt) Quelles sont l'amplitude et la direction de la force qui s'exerce sur la charge Q au point A ?

Ici, il faut tenir compte des forces exercées par chacune des charges images sur la charge réelle. On aura donc pour $Q_1 = -Q$ (distance $2a$ entre les charges)

$$\vec{F}_1 = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} \hat{x}$$

On aura pour $Q_2 = -Q$ (distance $2a$ entre les charges)

$$\vec{F}_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} \hat{y}$$

Finalement pour $Q_3 = Q$ le résultat est (distance $2\sqrt{2}a$ entre les charges)

$$\vec{F}_3 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 2(2a)^2} \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

La force totale est donc

$$\vec{F}_t = -\frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 a^2} \left(2(\hat{x} + \hat{y}) - \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{Q^2(2\sqrt{2} - 1)}{32\pi a^2} \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

L'intensité de la force est donc

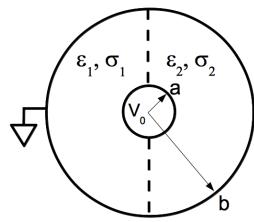
$$|\vec{F}_t| = \frac{Q^2(2\sqrt{2} - 1)}{32\pi a^2}$$

la direction est

$$\frac{\vec{F}_t}{|\vec{F}_t|} = -\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

QUESTION 3 : Condensateur sphérique (4 Points)

Le condensateur sphérique illustré ci-contre est composé de deux diélectriques ayant la forme d'une demi-sphère (#1 et #2) et des permittivités ϵ_1 et ϵ_2 respectivement. Un potentiel V_0 est appliqué sur le conducteur central de rayon a et le conducteur externe de rayon b est mis à la terre.



3.1 > (1,5 Pt) À l'aide du théorème de Gauss, trouver l'expression de la capacité du condensateur. Noter que les densités de charges sont différentes sur les deux moitiés de la sphère centrale.

3.2 > (1,5 Pt) Supposons que le diélectrique #1 est remplacé par de l'air ($\sigma_1 = 0$) et que le diélectrique #2 possède une conductivité non nulle ($\sigma_2 \neq 0$). Trouver l'expression qui décrit la résistance de fuite du condensateur.

3.3 > (1 Pt) Quelle est la puissance dissipée par le courant de fuite si la conductivité du diélectrique #2 est $\sigma_2 = 10^{-6} \Omega^{-1} m^{-1}$, $a = 1 \text{ mm}$, $b = 10 \text{ mm}$ et qu'un courant de fuite de $1 \mu\text{A}$ circule dans le condensateur.

Solution

3.1 (1,5 Pt) À l'aide du théorème de Gauss, trouver l'expression de la capacité du condensateur.

Pour trouver la capacité du condensateur, déterminons tout d'abord l'expression de la charge avec le théorème de Gauss pour chaque hémisphère, ce qui donne

$$\int_0^\pi \int_0^\pi D_1 r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \varepsilon_1 E = Q_1 \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi D_2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \varepsilon_2 E = Q_2 \quad (2)$$

On aura donc

$$E = \frac{Q_1}{2\pi r^2 \varepsilon_1} = \frac{Q_2}{2\pi r^2 \varepsilon_2}$$

Le potentiel entre le conducteur interne et externe est donné par

$$V = - \int_b^a Ed\rho = - \frac{Q_1}{2\pi \varepsilon_1} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{2\pi \varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (3)$$

$$= \frac{Q_2}{2\pi \varepsilon_2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (4)$$

d'où

$$Q_1 = \frac{2\pi \varepsilon_1 V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

$$Q_2 = \frac{2\pi \varepsilon_2 V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

La capacité est donc égale à

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \quad (5)$$

3.2 (1,5 Pt) Supposons que le diélectrique #1 est remplacé par de l'air ($\varepsilon_1 = 0$) et que le diélectrique #2 possède une conductivité non nulle ($\sigma_2 \neq 0$). Trouver l'expression qui décrit la résistance de fuite du condensateur.

Le courant de fuite est relié à la densité de courant J dans le conducteur par

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi J r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 J \quad (6)$$

car seulement une des deux demi-sphères est conductrice. Le champ électrique est aussi relié à J par

$$E(r) = \frac{J(r)}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \quad (7)$$

Le potentiel est donc

$$V = - \int_b^a E d\rho = - \frac{I}{2\pi\sigma} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (8)$$

La résistance de fuite est alors

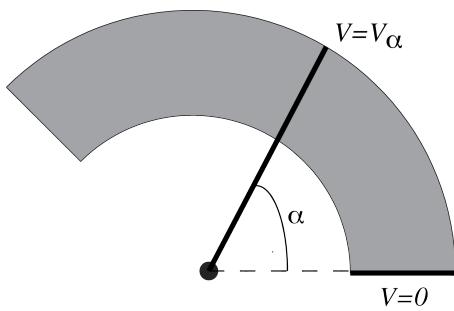
$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (9)$$

3.3 (1 Pt) Quelle est la puissance dissipée par le courant de fuite si la conductivité du diélectrique #2 est $\sigma_2 = 10^{-6} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $a = 1 \text{ mm}$, $b = 10 \text{ mm}$ et qu'un courant de fuite de $I = 1 \mu\text{A}$ circule dans le condensateur.

La résistance est $143 \text{ M}\Omega$. La puissance dissipée est égale à $I^2 R = 0.143 \text{ mW}$.

QUESTION 4 : Potentiomètre (3 points)

La figure ci-contre illustre un potentiomètre qui est formé d'un mince disque de conductivité σ , de rayon intérieur a , de rayon extérieur b et d'épaisseur c . Le coté horizontal du disque est mis à la terre. Une tige métallique peut être tournée autour d'un axe central tout en maintenant un contact avec la surface du disque. Cette tige fait un angle α avec l'horizontal et elle se trouve à un potentiel V_α . La résistance du potentiomètre est mesurée entre la tige et le conducteur horizontal à la terre.



4.1 ➤ (2.5 Pts) Quelle est la relation entre la résistance et l'angle α .

4.2 ➤ (0,5 Pt) Déterminer la résistance du potentiomètre si $a=2$ cm, $b=3$ cm, $c=2$ mm $\sigma=1$ S/m et que l'angle de la tige est $\alpha = \pi/3$.

Solution

4.1 (2,5 Pts) Quelle est la relation entre la résistance et l'angle α .

La solution de l'équation pour le potentiel dans le potentiomètre est donnée par $V(\phi) = A\phi + B$. En utilisant les conditions aux frontières ($V_0 = 0$ et $V(\alpha) = V_\alpha$) on obtient $B = 0$, $A = V_\alpha/\alpha$ et donc

$$V(\phi) = V_\alpha \frac{\phi}{\alpha}$$

Pour déterminer la résistance, il nous faut aussi connaître I le courant dans le potentiomètre, or

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ici, nous considérons une surface dans la direction $\hat{\phi}$ et donc

$$I = \sigma \int_0^c \int_a^b E_\phi(\rho) d\rho dz$$

Maintenant, évaluons $E_\phi(\rho, \phi)$ en utilisant

$$E_\phi(\rho) = -\frac{\partial V}{\rho \partial \phi} = -\frac{V_\alpha}{\rho \alpha}$$

et donc

$$I = -\sigma c \frac{V_\alpha}{\alpha} \ln(b/a)$$

Finalement

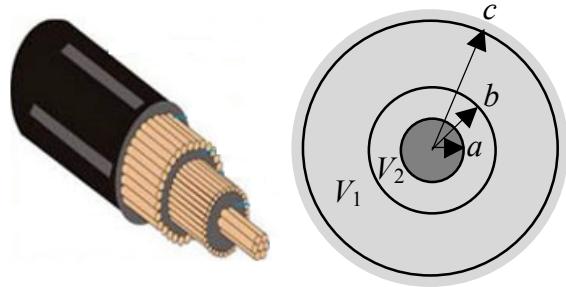
$$R = \frac{V_\alpha}{|I|} = \frac{\alpha}{\sigma c \ln(b/a)}$$

4.2 (0,5 Pt) Déterminer la résistance du potentiomètre si $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ mm, $\sigma = 1$ S/m et que l'angle de la tige est $\alpha = \pi/3$.

En utilisant ces données, la valeur obtenue $R = 1291$ Ohms.

QUESTION 5 : Câble contre le vol d'énergie (7 points)

Dans certaines régions du monde, le vol d'électricité peut représenter jusqu'à 80% de la puissance distribuée. Des pinces crocodiles ou même des clous sont utilisés sur les câbles ordinaires pour voler de l'électricité. Les câbles concentriques, tel qu'illustré ci-contre, mettent en échec les voleurs en créant un court-circuit en cas de perçage. Ce type de câble est formé d'un conducteur central plein, de rayon externe a , entouré d'une première gaine conductrice mince de rayon b et d'une seconde gaine conductrice mince de rayon c . Un diélectrique de permittivité ϵ sépare les conducteurs et recouvre le câble de longueur L . Le conducteur central à un potentiel de 120 V, le conducteur intermédiaire à un potentiel de -120 V, et le conducteur externe à un potentiel nul.



5.1 ➤ (2 Pts) Appliquer l'équation de Laplace pour développer les équations qui décrivent la distribution de potentiel $V_1(\rho)$ entre $\rho = b$ et $\rho = c$, ainsi que $V_2(\rho)$ entre $\rho = a$ et $\rho = b$ pour les conditions aux frontières V_a , V_b et V_c correspondant aux potentiels aux rayons a , b et c respectivement.

5.2 ➤ (2 Pts) En utilisant les résultats précédents, donner une expression pour les capacités C_1 (entre les conducteurs b et c) et C_2 (entre les conducteurs a et b) respectivement.

5.3 ➤ (2 Pts) En utilisant le dessin fourni à la page 4 qui représente une section du câble, tracer une esquisse du champ électrique dans les 2 diélectriques entre les 3 conducteurs. Surtout, bien distinguer les lignes équipotentielles et les lignes de flux électrique.

5.4 ➤ (1 Pt) À partir de ce dessin, estimer les valeurs numériques des capacités C_1 et C_2 .

Solution

5.1 (2 Pts) Appliquer l'équation de Laplace pour développer les équations qui décrivent la distribution de potentiel $V_1(\rho)$ entre $\rho = b$ et $\rho = c$, ainsi que $V_2(\rho)$ entre $\rho = a$ et $\rho = b$ pour les conditions aux frontières V_a , V_b et V_c qui correspondent aux potentiels aux rayons a , b et c respectivement.

La solution de l'équation de Laplace en géométrie cylindrique infinie est

$$V(\rho) = A \ln(\rho) + B$$

Pour la région $b \leq \rho \leq c$, on connaît déjà V_b et V_c et donc en supposant que $V_1(\rho) = A_1 \ln(\rho) + B_1$,

$$\begin{aligned} V_1(b) &= V_b = A_1 \ln(b) + B_1 \\ V_1(c) &= V_c = A_1 \ln(c) + B_1 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{V_c - V_b}{\ln(c/b)} \\ B_1 &= V_c - \frac{(V_c - V_b) \ln(c)}{\ln(c/b)} \end{aligned}$$

De la même façon on aura $V_2(\rho) = A_2 \ln(\rho) + B_2$ avec

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{V_b - V_a}{\ln(b/a)} \\ B_2 &= V_b - \frac{(V_b - V_a) \ln(b)}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

5.2 (2 Pts) En utilisant les résultats précédents, donner une expression pour les capacités C_1 (entre les conducteurs b et c) et C_2 (entre les conducteurs a et b) respectivement.

Les capacités C_1 et C_2 sont données par

$$C_i = \frac{Q_i}{\Delta V_i}$$

avec $\Delta V_1 = V_c - V_b$ et $\Delta V_2 = V_b - V_a$. Il nous reste à déterminer les charges. Or

$$Q_i(\rho) = \int_S \vec{D}_i \cdot d\vec{s} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \varepsilon E_{i,\rho} \rho d\phi dz = 2\pi L \varepsilon \rho E_{i,\rho}$$

et sachant que

$$E_{i,\rho} = -\frac{\partial V_i(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{A_i}{\rho}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\pi L \varepsilon A_1}{\Delta V_1} = \frac{2\pi L \varepsilon}{\ln(c/b)} \\ C_2 &= \frac{2\pi L \varepsilon A_2}{\Delta V_2} = \frac{2\pi L \varepsilon}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

5.3 (2 Pts) En utilisant le dessin fourni à la page 4 qui représente une section du câble, tracer une esquisse du champ électrique dans les 2 diélectriques entre les 3 conducteurs. Surtout, bien distinguer les lignes équipotentielles et les lignes de flux électrique;

Le résultat est présenté à la figure 1. Les lignes de champs sont radiales et les équipotentielles sont des cercles.

5.4 (1 Pt) À partir de ce dessin, estimer les valeurs numériques des capacités C_1 et C_2 .

Pour chacun des demi-cylindres on a $n_p = 5$ condensateur en parallèle et $n_s = 1$ en série.
La capacité de ce fil est donc

$$C_1 = C_2 = \frac{n_p}{n_s} \varepsilon L = 5 \mu\text{F}$$

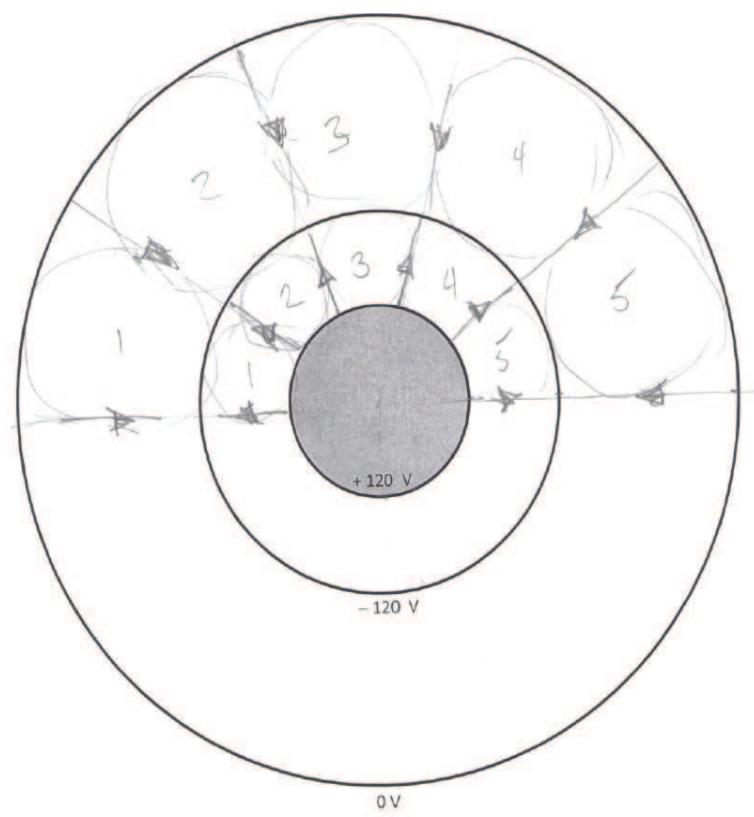


Figure 1: Esquisse du champ électrique dans les 2 diélectriques entre les 3 conducteurs

PHS1102 Champs électromagnétiques

Corrigé du contrôle périodique Automne 2018

Question 1 : Concepts et réponses courtes (4 points)

1.1 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Deux erreurs : **(0,5 point)** ; Trois erreurs : **(0 point)**.

- 1) Courbe b).
- 2) Courbe c).
- 3) Courbe a).

1.2 (1 pt) La bonne réponse est F ($Q < 0$ et le champ est vers le haut). **(1 point)**

1.3 (1 pt) Vrai, car le potentiel respecte l'équation de Laplace. **(1 point)**

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (5r^2 \cos \theta) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (-5r \sin^2 \theta) + 0 \\ &= \frac{10r \cos(\phi)}{r^2} - \frac{10r \sin \theta \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \\ &= \frac{10 \cos(\phi)}{r} - \frac{10 \cos(\phi)}{r} \\ &= 0\end{aligned}$$

1.4 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,75 point)** ; Deux erreurs : **(0,50 point)** ; Trois erreurs : **(0,25 point)** ; Quatre erreurs : **(0 point)**.

Les affirmations vraies sont B, C et D.

Question 2 : Champ électrique produit par un anneau chargé (4 points)

2.1 (0,5 pt) Déterminez la charge totale de l'anneau.

Puisque la densité linéique de charge de l'anneau est constante, la charge totale de l'anneau est simplement le produit de la densité de charge et de la circonférence de l'anneau :

$$Q = \rho_l \oint_C dl = \rho_l \cdot 2\pi R = 2\pi\rho_l R. \quad (\mathbf{0,5 \ point})$$

2.2 (2,5 pts) Déterminez l'expression du champ électrique pour un point $(0, 0, z)$ situé sur l'axe de l'anneau, à une distance z de son centre.

On utilise la loi de Coulomb et le principe de superposition pour additionner le champ de chaque élément infinitésimal de charge $dq = \rho_l dl'$:

$$\vec{E}(z) = \oint_C \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0} \oint_C \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dl'. \quad (\mathbf{0,5 \ point})$$

La symétrie du problème nous incite à travailler en coordonnées cylindriques. Aussi, la symétrie nous indique que le champ électrique sur l'axe de l'anneau est dirigé parallèlement à l'axe \hat{z} et dépend seulement de la position z :

$$\vec{E}(z) = E_z(z)\hat{z}. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

Le vecteur \vec{r} est le vecteur position du point auquel on veut calculer le champ :

$$\vec{r} = z\hat{z}, \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

tandis que le vecteur \vec{r}' est le vecteur position d'un élément de charge dq :

$$\vec{r}' = R\hat{\rho}. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

Nous avons donc :

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - R\hat{\rho} \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

et

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{z^2 + R^2}. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

L'élément de longueur dl' est une arc infinitésimal de l'anneau de rayon R et d'angle $d\phi$:

$$dl' = Rd\phi. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

Le champ électrique s'écrit donc :

$$\vec{E}(z) = E_z(z)\hat{z} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0} \oint_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - R\hat{\rho}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} Rd\phi.$$

Nous avons déjà remarqué que le champ était seulement en z : l'intégrale du terme en $\hat{\rho}$ est donc nulle (l'orientation de $\hat{\rho}$ dépend implicitement de ϕ). L'intégrale du terme en \hat{z} ne fait pas intervenir ϕ et on a donc :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= E_z(z)\hat{z} = \frac{\rho_l R z \hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \oint_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi\rho_l R z \hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\rho_l R z \hat{z}}{2\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\mathbf{0,5 point})$$

Solution alternative : De manière plus intuitive, parce que chaque élément de charge de l'anneau est situé à la même distance du point P, il produit le même champ (en module) au point P. On peut donc utiliser la formule pour la norme du champ produit par une charge ponctuelle égale à la charge totale de l'anneau, puis projeter le vecteur sur l'axe z :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta \hat{z} \\ &= \frac{2\pi\rho_l R}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)} \frac{z}{z^2 + R^2} \hat{z} \\ &= \frac{\rho_l R z \hat{z}}{2\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}. \end{aligned}$$

Si l'étudiant justifie bien son raisonnement, cette solution est aussi acceptée.

- 2.3 (1 pt) Que devient l'expression du champ électrique lorsque $z \gg R$? Comparez avec l'expression du champ électrique produit par une charge ponctuelle et discutez du résultat.

Quand $z \gg R$, le terme R^2 au dénominateur de \vec{E} devient négligeable et donc :

$$\vec{E}(z) \approx \frac{\rho_l R z \hat{z}}{2\varepsilon_0 (z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_l R z \hat{z}}{2\varepsilon_0 z^3} = \frac{\rho_l R \hat{z}}{2\varepsilon_0 z^2}. \quad (\mathbf{0,5 point})$$

Le champ électrique produit au point $(0, 0, z)$ par une charge ponctuelle située à l'origine est :

$$\vec{E}(z) = \frac{Q \hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 z^2}. \quad (\mathbf{0,25 point})$$

Le champ produit très loin de l'anneau décroît en z^2 , tout comme celui d'une charge ponctuelle. En comparant les expressions, la charge de cette charge ponctuelle est tout simplement la charge totale de l'anneau :

$$\frac{Q \hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 z^2} = \frac{\rho_l R \hat{z}}{2\varepsilon_0 z^2} \implies Q = 2\pi\rho_l R. \quad (\mathbf{0,25 point})$$

Question 3 : Câble coaxial non homogène (5 points)

- 3.1 (0,5 pt) Dans quelle direction est orienté le champ électrique à l'intérieur du câble coaxial? Justifiez. (0,5 pt)

La symétrie cylindrique permet d'affirmer que la densité de flux électrique (et donc le champ électrique) possède une composante radiale uniquement et dépend seulement du rayon ρ :

$$\vec{D}(\rho) = D_\rho(\rho)\hat{\rho}, \\ \vec{E}(\rho) = E_\rho(\rho)\hat{\rho}. \quad \text{(0,25 point)}$$

Puisque le potentiel est plus élevé sur l'armature externe, alors le champ électrique est dirigé radialement de l'armature extérieure vers l'armature intérieure. (0,25 point)

- 3.2 (1,5 pt) Déterminez l'expression vectorielle du champ électrique partout à l'intérieur du câble coaxial en fonction de la charge Q (en valeur absolue) accumulée sur les armatures.

On peut appliquer le théorème de Gauss avec un cylindre de rayon r ($a \leq \rho \leq b$) et de longueur L . Puisque le potentiel est plus faible sur l'armature interne, alors la charge accumulée sur celle-ci est négative :

$$-Q = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_\rho(\rho) \cdot 2\pi\rho L, \quad \text{(0,75 point)}$$

La densité de flux est donc :

$$\vec{D}(\rho) = -\frac{Q}{2\pi\rho L}\hat{\rho}. \quad \text{(0,25 point)}$$

Sachant que le champ électrique est proportionnel à la densité de flux :

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\vec{D}(\rho)}{\varepsilon_r(\rho)\varepsilon_0}, \quad \text{(0,25 point)}$$

le champ électrique vaut enfin :

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{QA^2}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0\rho^3L}\hat{\rho}. \quad \text{(0,25 point)}$$

- 3.3 (2 pts) Déterminez l'expression de la capacité par unité de longueur du câble coaxial.

En intégrant le champ électrique du conducteur interne vers le conducteur externe, on trouve la différence de potentiel entre les conducteurs.

La différence de potentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} V_0 &= - \int \vec{E}(\rho) \cdot d\vec{l} = - \int_a^b E_\rho(\rho) \hat{\rho} \cdot d\rho \hat{\rho} = - \int_a^b E_\rho(\rho) d\rho \quad (\mathbf{0,25 \ point}) \\ &= \frac{QA^2}{2\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 L} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho^3} \\ &= \frac{QA^2}{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 L} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right). \quad (\mathbf{0,75 \ point}) \end{aligned}$$

La capacité pour une longueur L de câble vaut donc :

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V_0} \quad (\mathbf{0,25 \ point}) \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 L}{A^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)^{-1}. \quad (\mathbf{0,50 \ point}) \end{aligned}$$

La capacité par unité de longueur du câble vaut enfin :

$$C_l = \frac{C}{L} = \frac{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0}{A^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)^{-1}. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

- 3.3 (1 pt) À partir de $V_0 = 10 \text{ kV}$, on observe du claquage dans le diélectrique à l'endroit où le champ électrique est maximal. Calculez la valeur de la rigidité diélectrique du matériau en sachant que $a = 1 \text{ cm}$ et $b = 3 \text{ cm}$.

Le champ électrique est maximal en $\rho = a$, près de l'armature interne du câble :

$$E_{\max} = E(a) = \frac{QA^2}{2\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 a^3 L}. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

La densité de charge accumulée sur les armatures est reliée à la différence de potentiel par le résultat trouvé en b) :

$$V_0 = \frac{QA^2}{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 L} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \implies \frac{Q}{L} = \frac{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 V_0}{A^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)^{-1} \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

Le champ électrique maximal vaut alors :

$$E_{\max} = \frac{2V_0}{a^3} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)^{-1} = \frac{2b^2}{a(b^2 - a^2)} V_0. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

La rigidité diélectrique E_c est la valeur du champ maximal lorsque le claquage survient. Avec les valeurs données, on obtient :

$$E_c = E_{\max} = \frac{2 \cdot 0,03^2}{0,005 (0,03^2 - 0,005^2)} \cdot 10000 = 4,11 \text{ MV m}^{-1}. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

Question 4 : Potentiomètre (7 points)

- 4.1 (1,5 pt) En utilisant la méthode de l'équation de Laplace, donnez l'expression du potentiel partout dans le potentiomètre (dans chacune des deux sections du potentiomètre). De plus, donnez les expressions de toutes les conditions frontières du problème.

La symétrie du problème impose que le potentiel varie selon ϕ (coordonnées cylindriques). La solution à l'équation de Laplace dans chacun des matériaux est donc de la forme :

$$V(\phi) = A\phi + B \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

Il faut appliquer la solution dans chacune des deux sections du potentiomètre :

$$V(\phi) = A_1\phi + B_1 \quad \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi/6 \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

$$V(\phi) = A_2\phi + B_2 \quad \text{si } \pi/6 \leq \phi \leq \pi/2 \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

Les conditions frontières permettent de déduire les constantes A_1 , B_1 , A_2 et B_2 . D'abord, le potentiel est nul sur l'électrode fixe :

$$V(0) = A_1 \cdot 0 + B_1 = 0. \quad (\mathbf{0,25 \ point}) \quad (1)$$

Ensuite, Le potentiel sur l'électrode mobile vaut V_0 :

$$V(\phi_0) = A_2\phi_0 + B_2 = V_0 \quad (\mathbf{0,25 \ point}) \quad (2)$$

À l'interface entre les deux sections, le potentiel doit être continu :

$$V_1(\pi/6) = V_2(\pi/6) \implies A_1 \cdot \pi/6 = A_2 \cdot \pi/6 + B_2 \quad (\mathbf{0,25 \ point}) \quad (3)$$

- 4.2 (1,5 pt) Déterminez l'expression du champ électrique partout dans le potentiomètre.

Le champ électrique s'obtient à partir du potentiel en appliquant l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = -\nabla V(\phi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} V(\phi) \hat{\phi} \quad (\mathbf{0,50 \ point})$$

où les composantes selon $\hat{\rho}$ et \hat{z} du gradient sont nulles puisque V dépend de ϕ seulement.

On obtient donc :

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_1\phi + B_1) \hat{\phi} = -\frac{A_1}{\rho} \hat{\phi} \quad \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi/6 \quad (\mathbf{0,50 \ point})$$

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_2\phi + B_2) \hat{\phi} = -\frac{A_2}{\rho} \hat{\phi} \quad \text{si } \pi/6 \leq \phi \leq \pi/2. \quad (\mathbf{0,50 \ point})$$

4.3 (0,75 pt) Déterminez l'expression de la densité de courant partout dans le potentiomètre.

La densité de courant est proportionnelle au champ électrique :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{J}(\phi) &= -\frac{\sigma_1 A_1}{\rho} \hat{\phi} && \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi/6 && (\mathbf{0,25 \ point}) \\ \vec{J}(\phi) &= -\frac{\sigma_2 A_2}{\rho} \hat{\phi} && \text{si } \pi/6 \leq \phi \leq \pi/2. && (\mathbf{0,25 \ point})\end{aligned}$$

4.4 (1 pt) Puisque le courant total qui circule dans les deux sections du potentiomètre est le même, la composante normale de la densité de courant à l'interface entre les deux sections doit être continue.

À l'aide de cette condition et des conditions identifiées à la sous-question 4.1, déterminez les expressions des constantes A et B de l'expression du potentiel dans la première section du potentiomètre seulement. Exprimez votre réponse en fonction de la géométrie du problème et des conductivités des matériaux.

La composante normale de la densité de courant devant être continue à l'interface entre les deux sections, on trouve que :

$$\vec{J}(\phi/6) = \sigma_1 \frac{A_1}{\rho} \hat{\phi} = -\sigma_2 \frac{A_2}{\rho} \hat{\phi} \implies A_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} A_1. \quad (\mathbf{0,25 \ point}) \quad (4)$$

On peut donc calculer les valeurs des constantes A_1 et B_1 pour obtenir l'expression du potentiel dans la première section du potentiomètre à l'aide des équations (1), (2), (3) et (4).

On sait déjà que $B_1 = 0$ de l'équation (1). **(0,25 point)**

De l'équation (2), on trouve

$$B_2 = V_0 - A_2 \phi_0,$$

que l'on peut introduire, avec l'équation (4), dans l'équation (3) :

$$A_1 \cdot \pi/6 = A_2 \cdot \pi/6 + B_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} A_1 \cdot \pi/6 + V_0 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} A_1 \phi_0. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

On en déduit la valeur de A_1 :

$$A_1 = \frac{V_0}{\frac{\pi}{6} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\phi_0 - \frac{\pi}{6} \right)}. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

4.5 (1,5 pt) Déterminez l'expression de la résistance du potentiomètre en fonction de ϕ_0 .

La résistance dépend du potentiel V_0 et du courant I qui circule dans le potentiomètre :

$$R = \frac{V_0}{I} \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

Le courant qui circule dans le potentiomètre est donné par :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

où

$$d\vec{S} = d\rho dz \hat{\phi} \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

est l'élément de surface traversé par le courant (perpendiculaire à \vec{J} , voir Annexe 4).

On calcule le courant total en prenant la surface dans la première section (on aura pu prendre la surface dans la deuxième section aussi, puisque le courant total est partout le même). On obtient :

$$I = \int_0^d \int_a^b -\sigma_1 \frac{A_1}{\rho} \hat{\phi} \cdot d\rho dz \hat{\phi} = -\sigma_1 dA_1 \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = -\sigma_1 dA_1 \ln \left(\frac{b}{a} \right), \quad (\mathbf{0,50 \ point})$$

où le signe négatif indique que le courant circule en sens opposé à l'axe $\hat{\phi}$.

En utilisant l'expression obtenue pour A_1 , on obtient :

$$I = -\frac{\sigma_1 dV_0}{\frac{\pi}{6} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\phi_0 - \frac{\pi}{6} \right)} \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

En utilisant le module de la valeur du courant, la résistance est donc donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma_1 d \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\phi_0 - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

4.6 (0,75 pt) Calculez la valeur de la puissance dissipée par le potentiomètre pour le cas particulier $a = 1$ cm, $b = 4$ cm, $d = 0,5$ cm, $\sigma_1 = 1,5 \mu\text{S}/\text{m}$, $\sigma_2 = 5,0 \mu\text{S}/\text{m}$, $V_0 = 5$ V et $\phi_0 = \pi/2$.

La puissance dissipée est donnée par :

$$P = V_0 |I| = RI^2 = \frac{V_0^2}{R} \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

$$= \frac{\sigma_1 dV_0^2}{\frac{\pi}{6} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\phi_0 - \frac{\pi}{6} \right)} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

La valeur obtenue pour le cas mentionné est :

$$P = 310 \text{ nW.} \quad (\mathbf{0,25 \ point})$$

PHS1102 Champs électromagnétiques

Corrigé du contrôle périodique Hiver 2019

Question 1 : Concepts et réponses courtes (4 points)

1.1 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,50 point)** ; Deux erreurs : **(0,25 point)**.
Trois erreurs : **(0 point)**.

Courbe A) P .

Courbe B) V .

Courbe C) D .

1.2 (1 pt) La bonne réponse est G : 2,05 mN. Il fallait poser deux charges images $+Q$ à $(1, -1)$ et à $(-1, 1)$ et une charge image $-Q$ à $(-1, -1)$.

1.3 (1 pt) La réponse est B.

1.4 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,50 point)** ; Deux erreurs : **(0,25 point)**.
Trois erreurs : **(0 point)**.

Les affirmations vraies sont A et C.

Question 2 : Charge atmosphérique (5 points)

2.1 (3 pts) Champ électrique.

La symétrie sphérique du problème nous indique que la densité de flux et le champ électrique seront radiaux :

$$\vec{D} = D_r \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{D_r}{\varepsilon} \hat{r}$$

On peut appliquer le théorème de Gauss avec une sphère de rayon r pour trouver le champ dans chaque région.

Cas 1 : $r < a$: La charge dans la surface de Gauss est nulle.

$$0 = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D_r$$

$$D_r = 0$$

$$\vec{E} = \vec{0}.$$

Cas 2 : $a \leq r \leq b$: La charge dans la surface de Gauss vaut :

$$Q = \int_v \rho_v dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^r \frac{A}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = 4\pi A \int_a^r r dr$$

$$Q = 2\pi A (r^2 - a^2).$$

Le champ vaut donc :

$$Q = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$2\pi A (r^2 - a^2) = 4\pi r^2 D_r$$

$$D_r = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \hat{r}.$$

Cas 3 : $r \geq b$: En se basant sur les résultats précédents, la charge dans la surface de Gauss est la charge dans toute la région chargée. Elle vaut :

$$Q = 2\pi A (b^2 - a^2).$$

Le champ vaut donc :

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \\ 2\pi A (b^2 - a^2) &= 4\pi r^2 D_r \\ D_r &= \frac{A}{2} \frac{b^2 - a^2}{r^2} \\ \vec{E} &= \frac{A}{2\varepsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r^2} \hat{r}. \end{aligned}$$

2.2 (1 pt) Densité de charge induite sur la surface extérieure.

La densité de charge induite est donnée (en module) par la norme du vecteur polarisation qu'il faut évaluer dans la région diélectrique, à la surface $r = b$:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \\ |\rho_{s,i}| = P &= \left| \frac{A}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) - \varepsilon_0 \frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right| \\ |\rho_{s,i}| &= \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \end{aligned}$$

2.3 (1 pt) Travail effectué pour amener les charges libres.

Le travail est l'énergie potentielle électrique emmagasinée dans le champ \vec{E} .

$$\begin{aligned} W = U &= \int_v \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2} \left(\frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \right)^2 \left(\frac{r^2 - a^2}{r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_b^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{A}{2\varepsilon_0} \right)^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Question 3 : Condensateur en coin (5,5 points)

3.1 (2 pts) Distribution de potentiel.

La symétrie cylindrique permet d'affirmer que le potentiel ne dépend que de l'angle ϕ mesuré positivement en sens antihoraire ($\phi = 0$ sur l'armature du bas). La solution correspondante à l'équation de Laplace est alors :

$$V = V(\phi) = A\phi + B,$$

dans chaque région du condensateur.

Région 1 : $0 \leq \phi \leq \alpha$: Le potentiel s'écrit

$$V = A_1\phi + B_1,$$

avec les conditions frontières

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \implies B_1 = 0 \\ V(\alpha) &= V_0 \implies A_1 = \frac{V_0}{\alpha}. \end{aligned}$$

Le potentiel vaut donc :

$$V = \frac{V_0}{\alpha}\phi.$$

Région 2 : $\alpha \leq \phi \leq 2\alpha$: Le potentiel s'écrit

$$V = A_2\phi + B_2,$$

avec les conditions frontières

$$\begin{aligned} V(2\alpha) &= 0 \implies 2A_2\alpha + B_2 = 0 \\ V(\alpha) &= V_0 \implies A_2\alpha + B_2 = V_0. \end{aligned}$$

En résolvant, pour A_1 et pour B_1 , on trouve :

$$V = -\frac{V_0}{\alpha}\phi + 2V_0,$$

3.2 (2,5 pts) Capacité du condensateur.

Puisque le condensateur est en fait formé de deux condensateurs en parallèle, on peut calculer la capacité entre les deux plaques du bas, puis multiplier par deux (par symétrie, la capacité entre les deux plaques du haut sera la même).

La capacité C_1 du condensateur du bas est donnée par :

$$C_1 = \frac{|Q_1|}{V_0},$$

où la charge $|Q_1|$ est la charge libre totale (en module) accumulée sur la plaque du bas.

On trouve cette charge en utilisant la condition à l'interface diélectrique/conducteur à $\phi = 0$ (plaqué du bas) :

$$\begin{aligned} D_{1N} &= \rho_s, \\ D_{1,\phi} &= \rho_s, \\ \varepsilon_r \varepsilon_0 E_{1,\phi} &= \rho_s. \end{aligned}$$

Le champ électrique se calcule en prenant le gradient du potentiel :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{V_0}{\alpha} \phi \right) \hat{\phi} \\ &= -\frac{V_0}{\alpha \rho} \hat{\phi} \end{aligned}$$

La densité surfacique de charge sur l'électrode du bas est donc :

$$\rho_s = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha \rho},$$

ce qui implique que la charge totale sur celle-ci est :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_S \rho_s dS \\ &= -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha} \int_0^c \int_a^{a+c} \frac{1}{\rho} d\rho dz \\ &= -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha} c \ln \left(1 + \frac{c}{a} \right), \end{aligned}$$

La capacité totale vaut donc :

$$\begin{aligned} C &= 2C_1 = 2 \frac{|Q_1|}{V_0} = \frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0}{\alpha} c \ln \left(1 + \frac{c}{a} \right) \\ C &= 4,90 \text{ pF}. \end{aligned}$$

3.3 (1 pt) Valeur maximale du potentiel pour ne pas endommager le condensateur.

Le champ électrique maximal survient à $\rho = a$ et vaut :

$$\vec{E}_{max} = -\frac{V_0}{\alpha a} \hat{\phi}.$$

Le potentiel doit faire en sorte que ce champ ne dépasse pas la rigidité diélectrique du matériau :

$$\begin{aligned} E_{max} &\leq E_c \\ \frac{V_0}{\alpha a} &\leq E_c \\ V_0 &\leq \alpha a E_c = 3,49 \text{ kV} \end{aligned}$$

Question 4 : Barreau de conductivité non uniforme (5,5 points)

4.1 (3 pts) Résistance du barreau.

Le champ à l'intérieur du barreau est produit par les électrodes. Celles-ci ayant la forme de plans infinis parallèles, on sait par symétrie que la densité de flux et que le champ électrique sont orientés horizontalement (selon \hat{z}) et qu'ils seront uniformes (leur valeur ne dépend pas de la position entre les électrodes). On a donc :

$$\vec{E} = E \hat{x} = \frac{V_0}{L} \hat{z}.$$

Pour calculer la résistance, il faut relier le champ électrique au courant total qui traverse le barreau. Dans un conducteur, la densité de courant est reliée au champ électrique :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma_0 V_0}{a L} \rho \hat{z}.$$

Pour trouver le courant, il s'agit d'intégrer la densité de courant sur la section du cylindre (disque de rayon a) :

$$\begin{aligned} I &= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma_0 V_0}{a L} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \hat{z} \cdot \rho d\rho d\phi \hat{z} \\ I &= \frac{\sigma_0 V_0}{a L} \cdot 2\pi \frac{a^3}{3} \\ I &= \frac{2\pi a^2 \sigma_0 V_0}{3 L}. \end{aligned}$$

La résistance vaut enfin :

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{3L}{2\pi a^2 \sigma_0}.$$

4.2 (1 pt) Densité surfacique de charges libres sur une électrode.

Le théorème de Gauss appliqué une électrode (avec une boîte à pilules de section A) nous donne :

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S,\text{gauche}} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S,\text{droite}} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} \\ Q &= 2D_1 A \\ \vec{D}_1 &= \frac{Q}{2A} \hat{z}. \end{aligned}$$

En superposant la densité de flux des deux électrodes, on obtient :

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{Q}{2A} \hat{z} + \frac{Q}{2A} \hat{z} = \frac{Q}{A} \hat{z}.$$

Le champ électrique vaut alors :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \hat{z}.$$

On peut le relier à la différence de potentiel comme suit :

$$\begin{aligned} V_0 &= - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_L^0 \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \hat{z} \cdot dx \hat{z} \\ V_0 &= \frac{QL}{\varepsilon_0 A}, \end{aligned}$$

La densité surfacique de charge vaut alors :

$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{L}.$$

4.3 (1,5 pt) Différence de potentiel maximale pour éviter d'endommager le barreau. Puissance dissipée.

La densité de puissance dans le barreau est donnée par :

$$p(\rho) = \sigma E^2 = \frac{\sigma_0 \rho}{a} \left(\frac{V_0}{L} \right)^2 = \frac{\sigma_0 V_0^2}{a L^2} \rho.$$

La densité de puissance est maximale à la surface extérieure du barreau, à $\rho = a$. On doit donc avoir :

$$p(\rho = a) = \frac{\sigma_0 V_0^2}{L^2} \leq p_{max}$$

$$V_0 \leq \sqrt{\frac{L^2}{\sigma_0} p_{max}} = 2,89 \text{ V.}$$

La puissance totale dissipée par le barreau est alors :

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{2\pi a^2 \sigma_0 V_0^2}{3L} = 419 \text{ kW.}$$

BONUS (0,5 pt) Effet de la température sur la puissance dissipée.

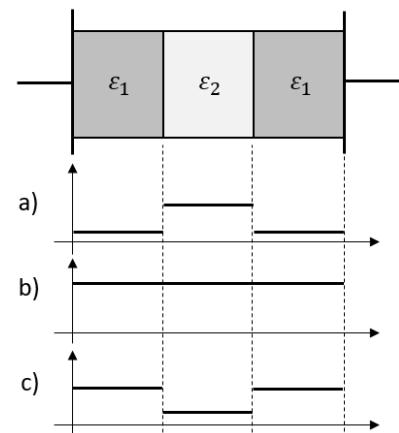
Si la température augmente, la conductivité du barreau diminuera (sa résistivité augmentera), sa résistance augmentera et, puisque la tension demeure constante, la puissance dissipée diminuera aussi ($P = V_0^2/R$).

QUESTION 1 : Concepts et réponses courtes, SVP répondre dans le cahier d'examen (4 points)

1.1 ➤ (1 pt) Entre les armatures d'un condensateur plan, on place trois couches diélectriques de même largeur. Les couches de gauche et de droite sont de permittivité ϵ_1 tandis que la couche du centre est de permittivité $\epsilon_2 > \epsilon_1$.

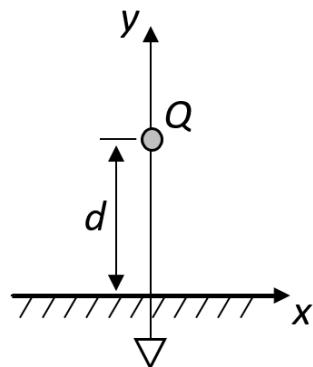
Identifiez quelle courbe (parmi a, b et c sur la figure) représente chacune des variables suivantes :

- 1) D ; 2) E ; 3) P .



1.2 ➤ (1 pt) Une charge ponctuelle $Q < 0$ est placée à une distance d au-dessus d'un plan conducteur horizontal ($y = 0$) et infini (dimensions très grandes par rapport à d). Le plan est mis à la masse et le milieu entourant la charge est le vide. Quelle est l'expression du champ électrique \vec{E} ressenti par la charge Q dû à la présence du plan conducteur ?

- | | |
|---|---|
| A) $\vec{E} = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{y}$ | B) $\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{y}$ |
| C) $\vec{E} = +\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \hat{y}$ | D) $\vec{E} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \hat{y}$ |
| E) $\vec{E} = +\frac{Q}{16\pi\epsilon_0 d^2} \hat{y}$ | F) $\vec{E} = -\frac{Q}{16\pi\epsilon_0 d^2} \hat{y}$ |



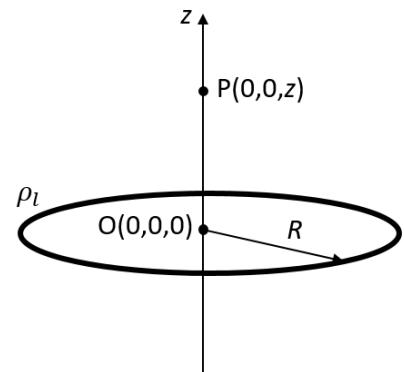
1.3 ➤ (1 pt) Vrai ou faux. Considérez une région de l'espace où la densité volumique de charge est nulle. L'expression $V(r, \theta, \phi) = 5r \cos \theta$ peut décrire le potentiel dans cette région. Justifiez votre réponse.

1.4 ➤ (1 pt) Identifiez les affirmations qui sont vraies parmi les suivantes.

- A) En général, la conductivité des métaux augmente avec la température ;
- B) La capacité équivalente de deux condensateurs, chacun de capacité C , connectés en série est égale à $C/2$;
- C) À l'équilibre électrostatique, le champ électrique est nul partout à l'intérieur d'un conducteur ;
- D) Plus l'aire de la section transversale d'un barreau conducteur est petite, plus la résistance du barreau est grande.

QUESTION 2 : Champ électrique produit par un anneau chargé (4 points)

On considère un anneau chargé de rayon R , de densité linéique de charge uniforme ρ_l , qui est entouré d'air ($\epsilon_r = 1$).



2.1 ► Déterminez la charge totale de l'anneau. (0,5 pt)

2.2 ► Démontrez que l'expression du champ électrique pour un point $P(0,0,z)$ situé sur l'axe de l'anneau, à une distance z de son centre situé à l'origine $O(0,0,0)$, est donné par : (2,5 pts)

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho_l R z}{2\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

2.3 ► Que devient l'expression du champ électrique lorsque $z \gg R$? Comparez avec l'expression du champ électrique produit par une charge ponctuelle qui serait située à l'origine $O(0,0,0)$ et discutez. (1 pt)

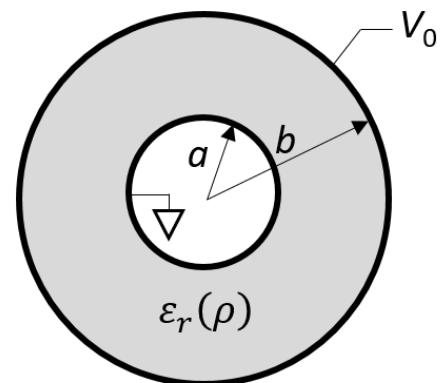
L'intégrale suivante pourrait être utile :

$$\int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi = 0.$$

QUESTION 3 : Câble coaxial non homogène (5 points)

Un câble coaxial est formé de deux armatures cylindriques conductrices : une surface interne de rayon $\rho = a$ et une surface externe de rayon $\rho = b$. L'armature externe est maintenue à un potentiel $V_0 > 0$ par rapport à l'armature interne qui est mis à la masse. L'espace entre les surfaces est occupé par un matériau diélectrique non homogène dont la permittivité relative est donnée par :

$$\epsilon_r(\rho) = \epsilon_{r0} \left(\frac{\rho}{A}\right)^2,$$



où $A = 6 \text{ cm}$ et $\epsilon_{r0} = 1,5$.

3.1 ► Dans quelle direction est orienté le champ électrique à l'intérieur du câble coaxial ? Justifiez. (0,5 pt)

3.2 ► Déterminez l'expression vectorielle du champ électrique partout à l'intérieur du câble coaxial en fonction de la charge Q (en valeur absolue) accumulée sur les armatures. (1,5 pt)

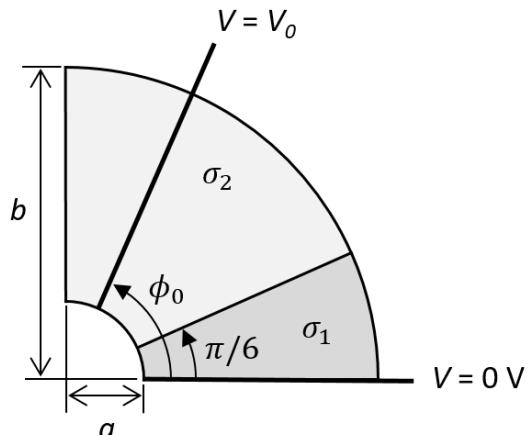
3.3 ► Déterminez l'expression de la capacité par unité de longueur du câble coaxial. (2 pts)

3.4 ► À partir de $V_0 = 10 \text{ kV}$, on observe du claquage dans le diélectrique à l'endroit où le champ électrique est maximal. Calculez la valeur de la rigidité diélectrique du matériau, sachant que $a = 0,5 \text{ cm}$ et $b = 3 \text{ cm}$. (1 pt)

QUESTION 4 : Potentiomètre (7 points)

Un potentiomètre est un composant électronique dont on peut faire varier la résistance (résistance variable) en déplaçant l'une des deux électrodes servant de contacts électriques. Le potentiomètre ci-contre est composé d'un barreau en forme d'arc de cercle de rayon interne a , de rayon externe b et d'épaisseur constante d .

Le barreau est composé de deux sections. La première section ($0 \leq \phi \leq \pi/6$) a une conductivité σ_1 tandis que la deuxième section ($\pi/6 < \phi \leq \pi/2$) a une conductivité σ_2 .



Une première électrode maintenue à 0 V est située à $\phi = 0$ tandis qu'une deuxième électrode mobile, maintenue à un potentiel V_0 , peut se déplacer sur la deuxième section du barreau pour faire varier la résistance. On considère donc que cette électrode est située à un angle $\phi = \phi_0$, où $\pi/6 < \phi_0 \leq \pi/2$.

- 4.1 ➤ (1,5 pt)** En utilisant la méthode de l'équation de Laplace, donnez l'expression du potentiel partout dans le potentiomètre (dans chacune des deux sections). De plus, donnez les expressions de toutes les conditions frontières du problème.

N.B. Ne pas déterminer les expressions pour les constantes A et B dans les expressions du potentiel. Utilisez ces constantes pour répondre aux sous-questions 4.1 à 4.3.

- 4.2 ➤ (1,5 pt)** Déterminez l'expression du champ électrique partout dans le potentiomètre.

- 4.3 ➤ (0,75 pt)** Déterminez l'expression de la densité de courant partout dans le potentiomètre.

- 4.4 ➤ (1 pt)** Puisque le courant total qui circule dans les deux sections du potentiomètre est le même, la composante normale de la densité de courant à l'interface entre les deux sections doit être continue.

À l'aide de cette condition et des conditions identifiées à la sous-question 4.1, déterminez les expressions des constantes A et B de l'expression du potentiel dans la première section du potentiomètre seulement. Exprimez votre réponse en fonction de la géométrie du problème et des conductivités des matériaux.

- 4.5 ➤ (1,5 pt)** Déterminez l'expression de la résistance du potentiomètre en fonction de ϕ_0 .

- 4.6 ➤ (0,75 pt)** Calculez la valeur de la puissance dissipée par le potentiomètre pour le cas particulier $a = 1 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $d = 0,5 \text{ cm}$, $\sigma_1 = 1,5 \mu\text{S/m}$, $\sigma_2 = 5 \mu\text{S/m}$, $V_0 = 5 \text{ V}$ et $\phi_0 = \pi/2$.

LES ÉQUATIONS DE BASE

Loi de Coulomb : $\vec{F} = \frac{q Q \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 / r^2}$

Champ électrique: $\vec{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta q}$

Principe de superposition :

$$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$$

Flux électrique : $\Psi = Q$

Le flux débute/finit sur des charges libres

Densité de flux, vide: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

Loi de Gauss: $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

Potentiel entre a et b : $V_{ab} = \frac{W_{ab}}{Q} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$

V charge ponctuelle : $V = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$

Champ conservatif : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le gradient : $\vec{E} = -\nabla V$

Énergie du champ: $U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv$

Force, travail virtuel : $\vec{F} = -(\partial W_E / \partial x) \hat{x}$

Polarisation P : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Permittivité :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

Capacité : $C = \frac{Q}{V} \quad C = \frac{2W_E}{V^2}$

Densité de courant J : $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

Conductivité σ : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Résistance : $R = \frac{V}{I}$

Puissance dissipée : $P_d = VI = \int_V \sigma E^2 dv$

Champ électrostatique dans conducteur :

$$\rho_v = 0 \quad E_i = 0 \quad V = \text{cste}$$

Interface diélectrique/conducteur :

$$E_{IT} = 0 \quad D_{IN} = \rho_S$$

Interface diélectrique/diélectrique :

$$E_{1T} = E_{2T} \quad D_{1N} - D_{2N} = \rho_S$$

Théorie des images : $\oplus \mid \Theta$

Règles graphiques pour les diélectriques:

- ① dessiner des carrés curvilignes
- ② ligne equipotentielle \perp ligne de flux
- ③ ligne de flux débute/finit sur conducteur
- ④ surface conductrice est equipotentielle

Capacité : $C = \frac{N_P \epsilon d}{N_S}$

Règles supplémentaires pour les conducteurs :

- ⑤ ligne de courant ne peut croiser un isolant
- ⑥ ligne equipotentielle \perp ligne de flux

Résistance : $R = \frac{N_S}{N_P \sigma d}$

1^{ère} équation de Maxwell : $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$

Continuité du courant : $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Équation de Poisson : $\nabla^2 V = -\rho_v / \epsilon$

Équation de Laplace : $\nabla^2 V = 0$

Condition de Dirichlet : V connu sur S

Condition de Neumann : $\partial V / \partial n$ connu sur S

Solutions générales unidimensionnelles :

 $V(x) = Ax + B$

 $V(\phi) = A\phi + B$

 $V(\rho) = A \ln \rho + B$

 $V(r) = (A/r) + B$

 $V(\theta) = A \ln(\tan(\theta/2)) + B$

Différences finies dans le milieu :

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Différences finies sur surface isolante:

$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4}$$

Permittivité du vide : $8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

$$d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$d\vec{s} = dy dz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$$

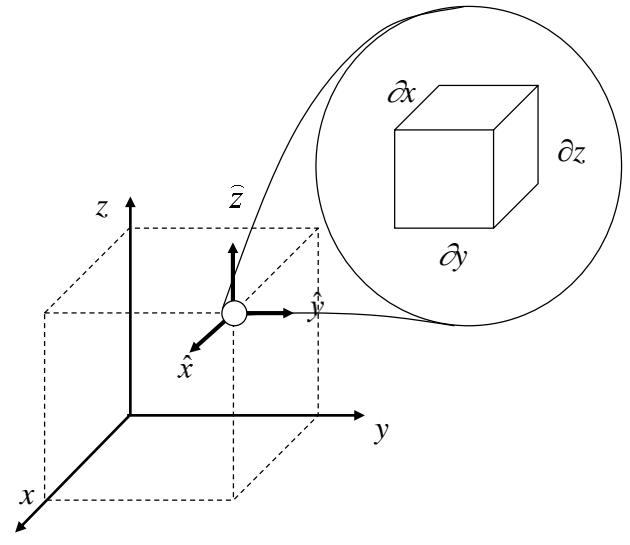
$$dV = dx dy dz$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$$d\vec{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + d\rho dz \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$$

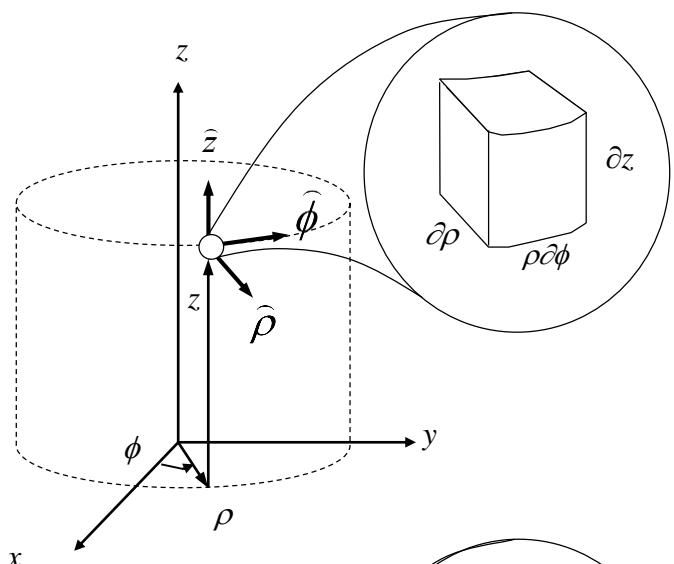
$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$$

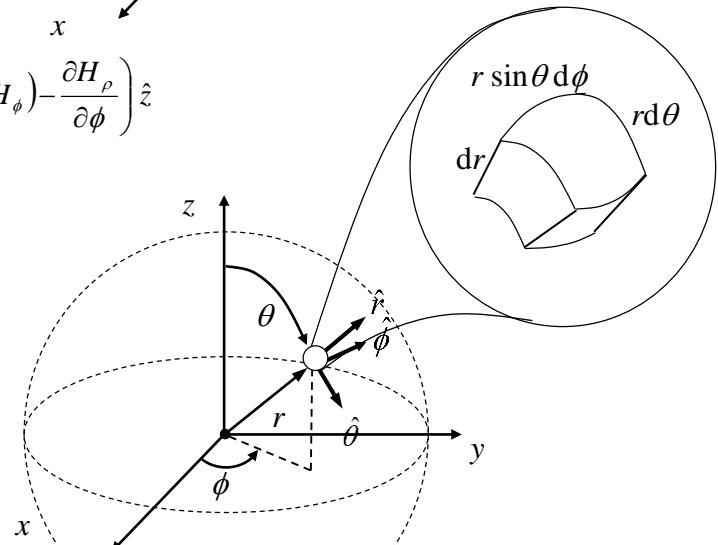
$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_\theta \sin \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

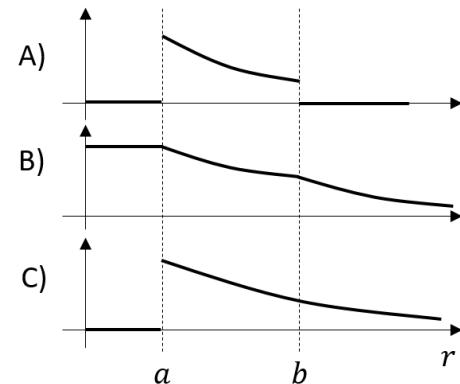
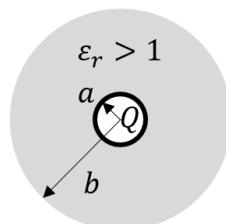
$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H_\phi \sin \theta \right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r H_\phi \right) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r H_\theta \right) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$



QUESTION 1 : Concepts et réponses courtes, SVP répondre dans le cahier d'examen (4 points)

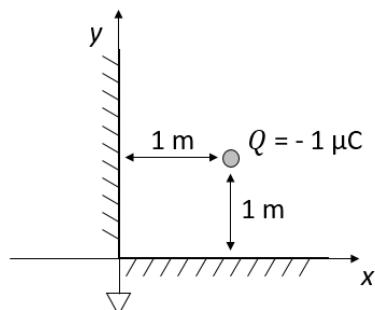
- 1.1 ➤ (1 pt)** Une coquille métallique creuse chargée ($Q > 0$) de rayon a est entourée d'une couche sphérique de rayon b composée d'un matériau diélectrique (en gris). Le tout est entouré du vide.

Pour chacune des courbes A, B et C sur la figure, associer la variable qu'elle décrit (D, E, P ou V).



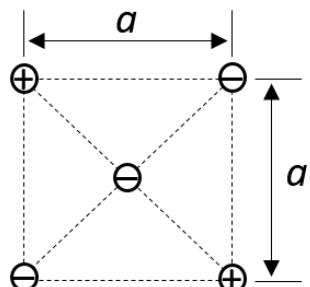
- 1.2 ➤ (1 pt)** Une charge ponctuelle de $-1 \mu\text{C}$ est placée à égale distance de deux plans conducteurs semi-infinis mis à la masse et perpendiculaires l'un à l'autre (voir figure). Quel est le module de la force ressentie par la charge due à la présence des plans conducteurs ?

- A) 12,7 mN
- B) 5,42 mN
- C) 4,49 mN
- D) 4,30 mN
- E) 3,18 mN
- F) 2,91 mN
- G) 2,05 mN
- H) 0,931 mN



- 1.3 ➤ (1 pt)** Deux charges positives et deux charges négatives sont disposées aux coins d'un carré de côté a . De plus, une charge négative se trouve au centre de ce carré. Les cinq charges ont la même valeur Q (en valeur absolue). On s'intéresse ici au travail *minimal* W qu'il faut effectuer sur la charge négative au centre du carré pour la retirer et la déplacer infiniment loin des quatre autres charges. Choisissez l'énoncé qui est vrai :

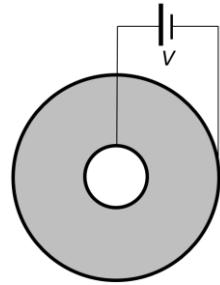
- A) Ce travail minimal est strictement positif ($W > 0$) ;
- B) Ce travail minimal est nul ($W = 0$) ;
- C) Ce travail minimal est strictement négatif ($W < 0$) ;
- D) Il n'y a pas assez d'information pour déduire la valeur du travail minimal à effectuer.



- 1.4 ➤ (1 pt)** Les deux armatures intérieure et extérieure d'un câble coaxial sont séparées par du vide, et connectées à une pile (source de tension).

Identifiez la ou les affirmations qui sont vraies parmi les suivantes. Si l'on remplace le vide entre les armatures par un diélectrique ($\epsilon > \epsilon_0$), alors :

- A) La capacité du câble coaxial augmentera ;
- B) La différence de tension entre les armatures diminuera ;
- C) La quantité de charge (en valeur absolue) sur chacune des armatures augmentera.



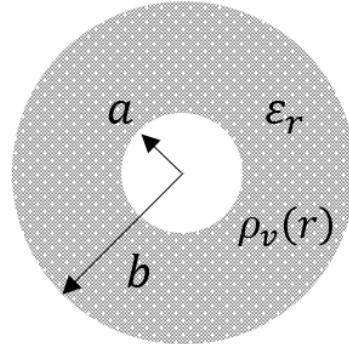
QUESTION 2 : Charge atmosphérique (5 points)

On considère une région atmosphérique en forme de coquille épaisse sphérique, de rayons intérieur a et extérieur b . Cette région est composée d'un gaz diélectrique ($\epsilon_r > 1$), auquel s'ajoutent des charges libres qui ont été déplacées là à cause des courants atmosphériques.

Plus spécifiquement, la densité volumique de charge à l'intérieur de cette région est :

$$\rho_v = \frac{A}{r}, \quad a \leq r \leq b$$

où A est une constante.



Pour ce problème, le milieu à l'extérieur de la région considérée ($r < a$ et $r > b$) peut être considéré comme du vide.

- 2.1 ➤ Déterminez l'expression du champ électrique (vecteur) : (3 pts)**

- i. dans la région $r < a$;
- ii. dans la région $a \leq r \leq b$;
- iii. dans la région $r > b$.

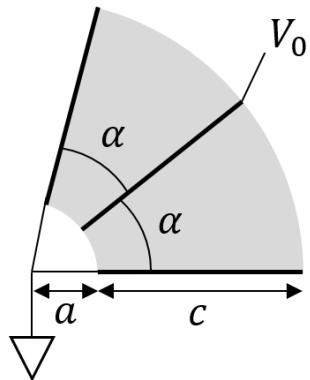
- 2.2 ➤ Déterminez la densité surfacique de charge induite (en module) sur la surface extérieure $r = b$ de la région atmosphérique chargée. (1 pt)**

- 2.3 ➤ Écrivez l'expression du travail qui a dû être effectué par les courants atmosphériques pour amener les charges libres dans leur position actuelle, à partir de l'infini. Écrivez l'expression la plus précise possible sans la résoudre (ne pas évaluer de dérivées ou d'intégrales). (1 pt)**

QUESTION 3 : Condensateur en coin (5,5 points)

Un condensateur en coin est formé de trois armatures carrées de côté $c = 4 \text{ cm}$, disposées comme indiqué sur la figure. Le diélectrique entre les armatures ($\epsilon_r = 3$) a une rigidité diélectrique égale à 500 kV/m . Les deux armatures externes sont mises à la masse tandis que l'armature centrale est maintenue à un potentiel V_0 . On donne $a = 1 \text{ cm}$ et $\alpha = 40^\circ$.

Pour ce problème, on considère que l'angle α est petit, de sorte que le champ à l'extérieur du condensateur peut être considéré comme négligeable.



- 3.1 ➤ Déterminez l'expression de la distribution de potentiel partout entre les armatures du condensateur en fonction de V_0 . (2 pts)
- 3.2 ➤ Déterminez la valeur de la capacité du condensateur. (2,5 pts)
- 3.3 ➤ Quelle est la valeur maximale du potentiel V_0 qui peut être appliquée au condensateur sans l'endommager ? (1 pt)

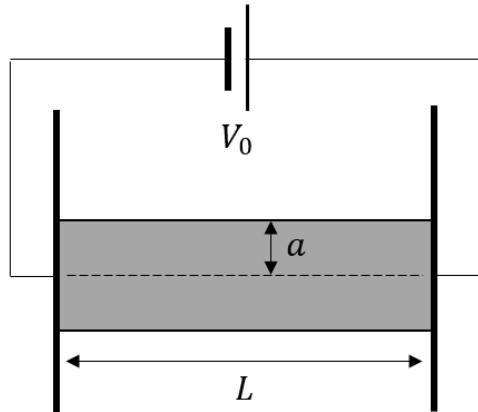
QUESTION 4 : Barreau de conductivité non uniforme (5,5 points)

Un barreau cylindrique métallique de longueur L et de rayon a possède une conductivité non uniforme :

$$\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{\rho}{a}, \quad 0 \leq \rho \leq a,$$

où σ_0 est une constante. Deux électrodes planes sont placées aux extrémités du barreau. Ces électrodes sont soumises à une différence de potentiel V_0 et produisent donc un champ électrique dans l'espace entre elles, où se trouve le barreau. Le barreau a une permittivité similaire à celle du vide.

Le matériau conducteur qui constitue le barreau peut être endommagé localement si la densité volumique de puissance dépasse une valeur maximale p_{\max} en un point.



- 4.1 ➤ (3 pts) Déterminez l'expression de la résistance du barreau.

Indice : calculez d'abord le champ électrique dans le barreau produit par les électrodes.

- 4.2 ➤ (1 pt) Déterminez l'expression de la densité surfacique de charge libre sur une électrode (en valeur absolue).

Répondez à la question suivante en utilisant les valeurs $L = 50 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ cm}$, $\sigma_0 = 30 \text{ MS/m}$ et $p_{\max} = 10^9 \text{ W/m}^3$.

- 4.3 ➤ (1,5 pt) Quelle est la différence de potentiel maximale qui peut être appliquée au barreau pour ne pas l'endommager ? Calculez la puissance totale dissipée par le barreau pour cette différence de potentiel.

- BONUS ➤ (0,5 pt)** La puissance dissipée par le barreau ne pourra pas être totalement évacuée vers son environnement, de sorte que le barreau s'échauffera. Discutez de l'effet de l'augmentation de la température du barreau sur la puissance dissipée.

LES ÉQUATIONS DE BASE

Loi de Coulomb : $\vec{F} = \frac{q Q \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 / r^2}$

Champ électrique: $\vec{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta q}$

Principe de superposition :

$$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$$

Flux électrique : $\Psi = Q$

Le flux débute/finit sur des charges libres

Densité de flux, vide: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

Loi de Gauss: $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

Potentiel entre a et b : $V_{ab} = \frac{W_{ab}}{Q} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$

V charge ponctuelle : $V = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$

Champ conservatif : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le gradient : $\vec{E} = -\nabla V$

Énergie du champ: $U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv$

Force, travail virtuel : $\vec{F} = -(\partial W_E / \partial x) \hat{x}$

Polarisation P : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Permittivité :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

Capacité : $C = \frac{Q}{V}$ $C = \frac{2W_E}{V^2}$ $C = \frac{2U}{V^2}$

Densité de courant J : $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

Conductivité σ : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Résistance : $R = \frac{V}{I}$

Puissance dissipée : $P_d = VI = \int_V \sigma E^2 dv$

Champ électrostatique dans conducteur :

$$\rho_v = 0 \quad E_i = 0 \quad V = \text{cste}$$

Interface diélectrique/conducteur :

$$E_{IT} = 0 \quad D_{IN} = \rho_S$$

Interface diélectrique/diélectrique :

$$E_{1T} = E_{2T} \quad D_{1N} - D_{2N} = \rho_S$$

Théorie des images : $\oplus \mid \Theta$

Règles graphiques pour les diélectriques:

- ① dessiner des carrés curvilignes
- ② ligne equipotentielle \perp ligne de flux
- ③ ligne de flux débute/finit sur conducteur
- ④ surface conductrice est equipotentielle

Capacité : $C = \frac{N_P \epsilon d}{N_S}$

Règles supplémentaires pour les conducteurs :

- ⑤ ligne de courant ne peut croiser un isolant
- ⑥ ligne equipotentielle \perp ligne de flux

Résistance : $R = \frac{N_S}{N_P \sigma d}$

1^{ère} équation de Maxwell : $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$

Continuité du courant : $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Équation de Poisson : $\nabla^2 V = \frac{-\rho_v}{\epsilon}$

Équation de Laplace : $\nabla^2 V = 0$

Condition de Dirichlet : V connu sur S

Condition de Neumann : $\partial V / \partial n$ connu sur S

Solutions générales unidimensionnelles :

 $V(x) = Ax + B$

 $V(\phi) = A\phi + B$

 $V(\rho) = A \ln \rho + B$

 $V(r) = (A/r) + B$

 $V(\theta) = A \ln(\tan(\theta/2)) + B$

Différences finies dans le milieu :

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Différences finies sur surface isolante :

$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4}$$

Permittivité du vide : $8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

$$d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$d\vec{s} = dy dz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$$

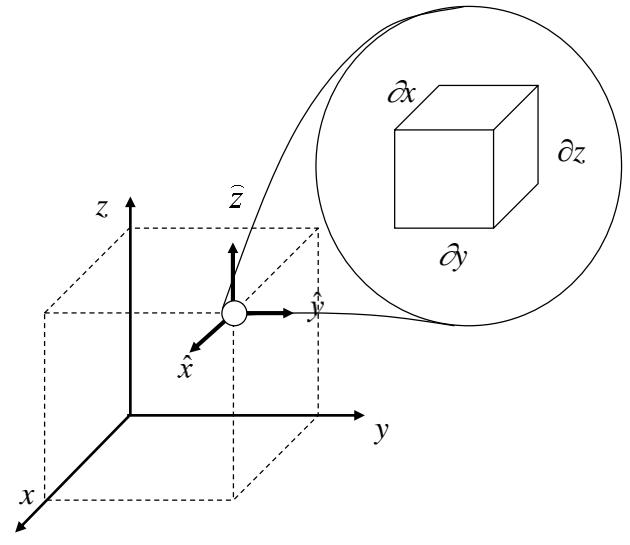
$$dV = dx dy dz$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$$d\vec{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + d\rho dz \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$$

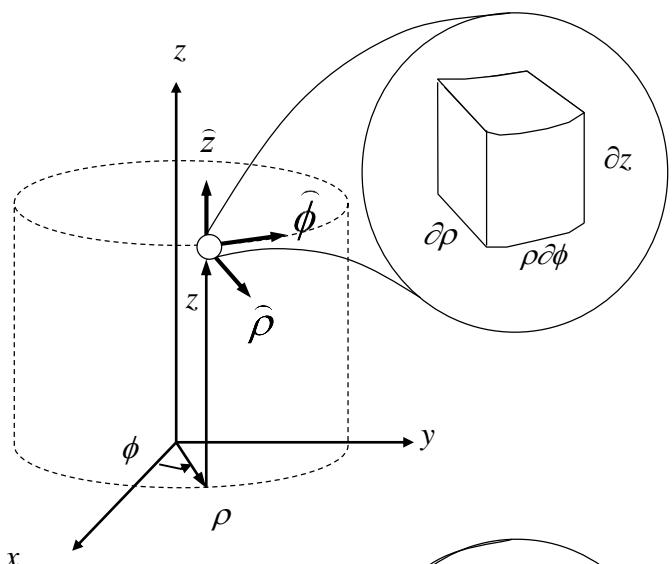
$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_\theta \sin \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H_\phi \sin \theta \right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r H_\phi \right) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r H_\theta \right) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

