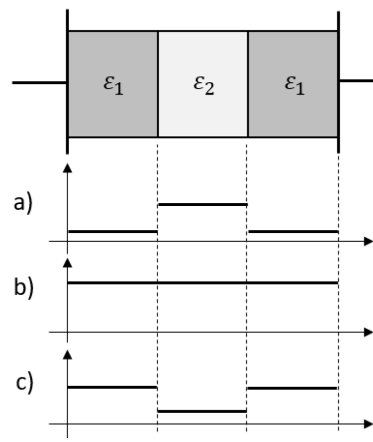
POLYTECHNIQUE MONTRÉAL LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE	**PHS1102 – CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES** **CONTRÔLE PÉRIODIQUE – AUTOMNE 2018** DATE : MERCREDI 24 OCTOBRE 2018 HEURE : 18H30-20H20 PAGES : 5 QUESTIONS : 4 NOTE : Aucune documentation permise Calculatrice non programmable permise

QUESTION 1 : Concepts et réponses courtes, SVP répondre *dans le cahier d'examen* **(4 points)**

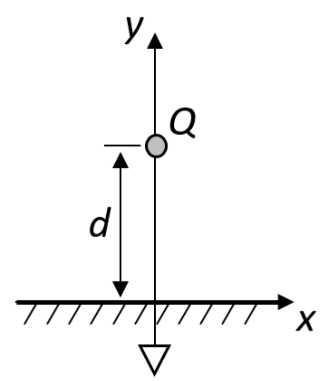
1.1 ➤ (1 pt) Entre les armatures d'un condensateur plan, on place trois couches diélectriques de même largeur. Les couches de gauche et de droite sont de permittivité ε_1 tandis que la couche du centre est de permittivité $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.



Identifiez quelle courbe (parmi a, b et c sur la figure) représente chacune des variables suivantes :

1) D ; 2) E ; 3) P .

1.2 ➤ (1 pt) Une charge ponctuelle $Q < 0$ est placée à une distance d au-dessus d'un plan conducteur horizontal ($y = 0$) et infini (dimensions très grandes par rapport à d). Le plan est mis à la masse et le milieu entourant la charge est le vide. Quelle est l'expression du champ électrique $\vec{E}$ ressenti par la charge Q dû à la présence du plan conducteur ?



A) $\vec{E} = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$ B) $\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$

C) $\vec{E} = +\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\hat{y}$ D) $\vec{E} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\hat{y}$

E) $\vec{E} = +\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$ F) $\vec{E} = -\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$

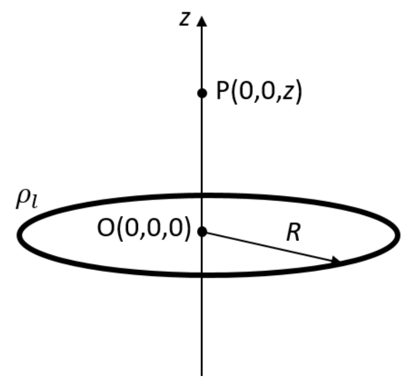
1.3 ➤ (1 pt) Vrai ou faux. Considérez une région de l'espace où la densité volumique de charge est nulle. L'expression $V(r, \theta, \phi) = 5r\cos\theta$ peut décrire le potentiel dans cette région. Justifiez votre réponse.

1.4 ➤ (1 pt) Identifiez les affirmations qui sont vraies parmi les suivantes.

A) En général, la conductivité des métaux augmente avec la température ;
B) La capacité équivalente de deux condensateurs, chacun de capacité C, connectés en série est égale à $C/2$;
C) À l'équilibre électrostatique, le champ électrique est nul partout à l'intérieur d'un conducteur ;
D) Plus l'aire de la section transversale d'un barreau conducteur est petite, plus la résistance du barreau est grande.

QUESTION 2 : Champ électrique produit par un anneau chargé (4 points)

On considère un anneau chargé de rayon R, de densité linéique de charge uniforme ρ_l, qui est entouré d'air ($\varepsilon_r = 1$).



2.1 ➢ Déterminez la charge totale de l'anneau. **(0,5 pt)**

2.2 ➢ Démontrez que l'expression du champ électrique pour un point P(0,0,z) situé sur l'axe de l'anneau, à une distance z de son centre situé à l'origine O(0,0,0), est donné par : **(2,5 pts)**

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho_l R z}{2\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

2.3 ➢ Que devient l'expression du champ électrique lorsque $z \gg R$? Comparez avec l'expression du champ électrique produit par une charge ponctuelle qui serait située à l'origine O(0,0,0) et discutez. **(1 pt)**

L'intégrale suivante pourrait être utile :

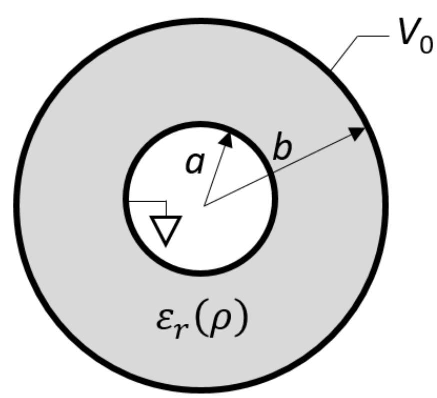
$$\int_0^{2\pi} \hat{\rho}\, d\phi = 0.$$

QUESTION 3 : Câble coaxial non homogène (5 points)

Un câble coaxial est formé de deux armatures cylindriques conductrices : une surface interne de rayon $\rho = a$ et une surface externe de rayon $\rho = b$. L'armature externe est maintenue à un potentiel $V_0 > 0$ par rapport à l'armature interne qui est mis à la masse. L'espace entre les surfaces est occupé par un matériau diélectrique non homogène dont la permittivité relative est donnée par :

$$\varepsilon_r(\rho) = \varepsilon_{r0} \left(\frac{\rho}{A}\right)^2,$$

où A = 6 cm et $\varepsilon_{r0} = 1{,}5$.



3.1 ➢ Dans quelle direction est orienté le champ électrique à l'intérieur du câble coaxial ? Justifiez. **(0,5 pt)**

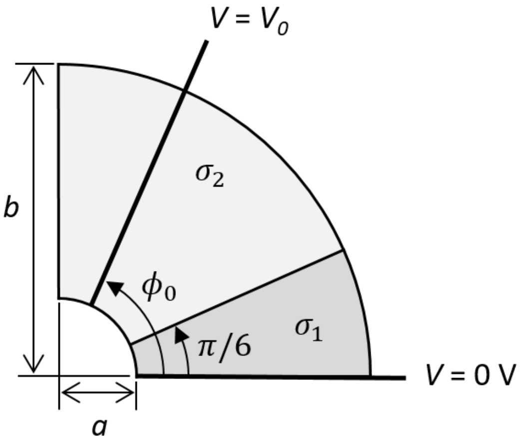
3.2 ➢ Déterminez l'expression vectorielle du champ électrique partout à l'intérieur du câble coaxial en fonction de la charge Q (en valeur absolue) accumulée sur les armatures. **(1,5 pt)**

3.3 ➢ Déterminez l'expression de la capacité par unité de longueur du câble coaxial. **(2 pts)**

3.4 ➢ À partir de V_0 = 10 kV, on observe du claquage dans le diélectrique à l'endroit où le champ électrique est maximal. Calculez la valeur de la rigidité diélectrique du matériau, sachant que a = 0,5 cm et b = 3 cm. **(1 pt)**

QUESTION 4 : Potentiomètre (7 points)

Un potentiomètre est un composant électronique dont on peut faire varier la résistance (résistance variable) en déplaçant l'une des deux électrodes servant de contacts électriques. Le potentiomètre ci-contre est composé d'un barreau en forme d'arc de cercle de rayon interne a, de rayon externe b et d'épaisseur constante d.



Le barreau est composé de deux sections. La première section ($0 \leq \phi \leq \pi/6$) a une conductivité σ_1 tandis que la deuxième section ($\pi/6 < \phi \leq \pi/2$) a une conductivité σ_2.

Une première électrode maintenue à 0 V est située à $\varphi = 0$ tandis qu'une deuxième électrode mobile, maintenue à un potentiel V_0, peut se déplacer sur la deuxième section du barreau pour faire varier la résistance. On considère donc que cette électrode est située à un angle $\phi = \phi_0$, où $\pi/6 < \phi_0 \leq \pi/2$.

4.1 ➤ (1,5 pt) En utilisant la méthode de l'équation de Laplace, donnez l'expression du potentiel partout dans le potentiomètre (dans chacune des deux sections). De plus, donnez les expressions de toutes les conditions frontières du problème.

N.B. Ne pas déterminer les expressions pour les constantes A et B dans les expressions du potentiel. Utilisez ces constantes pour répondre aux sous-questions **4.1** à **4.3**.

4.2 ➤ (1,5 pt) Déterminez l'expression du champ électrique partout dans le potentiomètre.

4.3 ➤ (0,75 pt) Déterminez l'expression de la densité de courant partout dans le potentiomètre.

4.4 ➤ (1 pt) Puisque le courant total qui circule dans les deux sections du potentiomètre est le même, la composante normale de la densité de courant à l'interface entre les deux sections doit être continue.

À l'aide de cette condition et des conditions identifiées à la sous-question **4.1**, déterminez les expressions des constantes A et B de l'expression du potentiel <u>dans la première section du potentiomètre seulement</u>. Exprimez votre réponse en fonction de la géométrie du problème et des conductivités des matériaux.

4.5 ➤ (1,5 pt) Déterminez l'expression de la résistance du potentiomètre en fonction de ϕ_0.

4.6 ➤ (0,75 pt) Calculez la valeur de la puissance dissipée par le potentiomètre pour le cas particulier $a = 1$ cm, $b = 4$ cm, $d = 0{,}5$ cm, $\sigma_1 = 1{,}5$ µS/m, $\sigma_2 = 5$ µS/m, $V_0 = 5$ V et $\phi_0 = \pi/2$.

LES ÉQUATIONS DE BASE

Loi de Coulomb : $\vec{F} = \dfrac{q\,Q\,\hat{r}}{4\pi\,\varepsilon_o\,|r|^2}$

Champ électrique: $\vec{E} = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \dfrac{\vec{F}}{\Delta q}$

Principe de superposition :

$$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$$

Flux électrique : $\Psi = Q$

Le flux débute/finit sur des charges libres

Densité de flux, vide: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

Loi de Gauss: $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

Potentiel entre *a* et *b*: $V_{ab} = \dfrac{W_{ab}}{Q} = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$

V charge ponctuelle : $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

Champ conservatif : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le gradient : $\vec{E} = -\nabla V$

Énergie du champ: $U = \dfrac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 dv$

Force, travail virtuel : $\vec{F} = -(\partial W_E / \partial x)\hat{x}$

Polarisation *P*: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Permittivité :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

Capacité : $C = \dfrac{Q}{V}$ $\quad C = \dfrac{2W_E}{V^2}$

Densité de courant *J*: $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

Conductivité σ: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Résistance : $R = \dfrac{V}{I}$

Puissance dissipée : $P_d = VI = \int_v \sigma E^2 dv$

Champ électrostatique dans conducteur :

$\rho_V = 0$ $\qquad E_i = 0$ $\qquad V = \text{cste}$

Interface diélectrique/conducteur :

$E_{1T} = 0$ $\qquad D_{1N} = \rho_S$

Interface diélectrique/diélectrique :

$E_{1T} = E_{2T}$ $\qquad D_{1N} - D_{2N} = \rho_S$

Théorie des images : ⊕ | Θ

Règles graphiques pour les diélectriques:

① dessiner des carrés curvilignes

② ligne équipotentielle ⊥ ligne de flux

③ ligne de flux débute/finit sur conducteur

④ surface conductrice est équipotentielle

Capacité : $C = \dfrac{N_P\ \varepsilon\, d}{N_S}$

Règles supplémentaires pour les conducteurs :

⑤ ligne de courant ne peut croiser un isolant

⑥ ligne équipotentielle ⊥ ligne de flux

Résistance : $R = \dfrac{N_S}{N_P\, \sigma\, d}$

1[ère] équation de Maxwell : $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V$

Continuité du courant : $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Équation de Poisson : $\nabla^2 V = \dfrac{-\rho_V}{\varepsilon}$

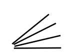
Équation de Laplace : $\nabla^2 V = 0$

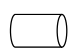
Condition de Dirichlet : *V* connu sur *S*

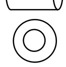
Condition de Neumann : $\partial V / \partial n$ connu sur *S*

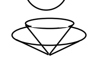
Solutions générales unidimensionnelles :

$V(x) = Ax + B$


$V(\phi) = A\phi + B$


$V(\rho) = A \ln \rho + B$


$V(r) = (A / r) + B$


$V(\theta) = A \ln(\tan(\theta / 2)) + B$

Différences finies dans le milieu :

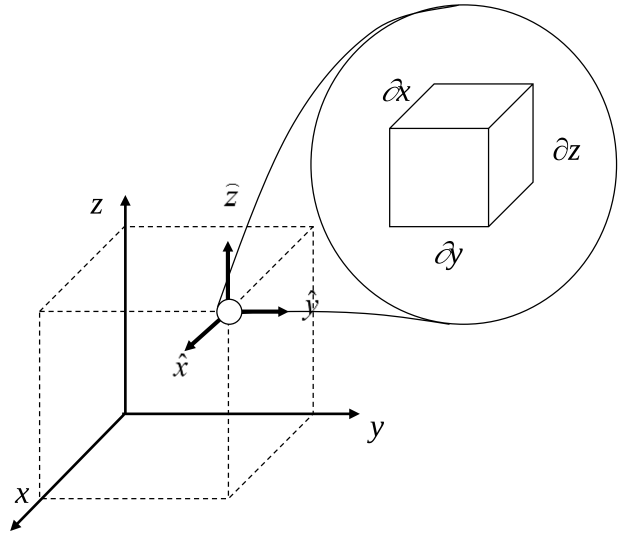
$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Différences finies sur surface isolante:

$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4}$$

Permittivité du vide : $8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m

COORDONNÉES CARTÉSIENNES



$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = dy\,dz\,\hat{x} + dx\,dz\,\hat{y} + dx\,dy\,\hat{z}$$

$$dV = dx\,dy\,dz$$

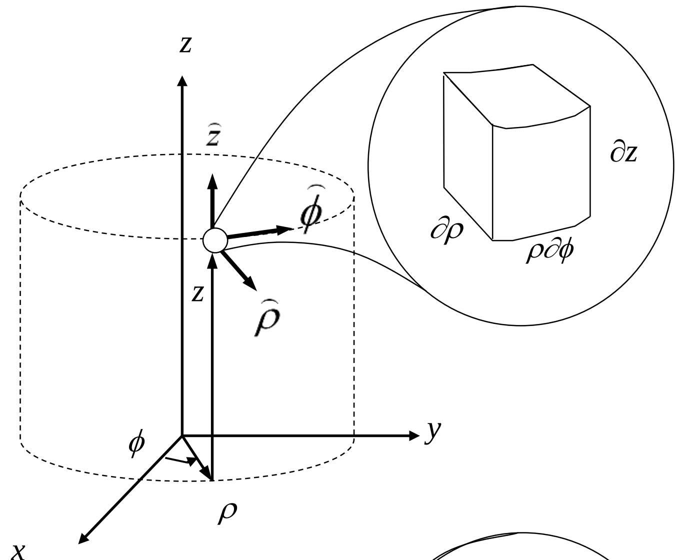
$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

COORDONNÉES CYLINDRIQUES



$$d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho\,d\phi\,dz\,\hat{\rho} + d\rho\,dz\,\hat{\phi} + \rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{z}$$

$$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

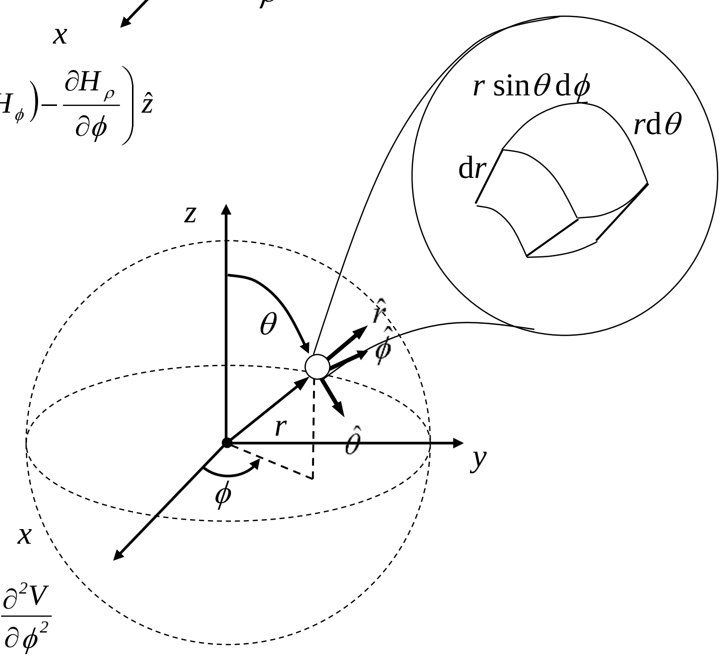
$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial\rho}\,\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right) - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{z}$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES



$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{r} + r\sin\theta\,dr\,d\phi\,\hat{\theta} + r\,dr\,d\theta\,\hat{\phi}$$

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta\right) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$

PHS1102 Champs électromagnétiques

Corrigé du contrôle périodique Automne 2018

Question 1 : Concepts et réponses courtes (4 points)

1.1 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Deux erreurs : **(0,5 point)** ; Trois erreurs : **(0 point)**.

   1) Courbe b).
   2) Courbe c).
   3) Courbe a).

1.2 (1 pt) La bonne réponse est F ($Q < 0$ et le champ est vers le haut). **(1 point)**

1.3 (1 pt) Vrai, car le potentiel respecte l'équation de Laplace. **(1 point)**

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(5r^2\cos\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-5r\sin^2\theta\right) + 0 \\
&= \frac{10r\cos(\phi)}{r^2} - \frac{10r\sin\theta\cos\theta}{r^2\sin\theta} \\
&= \frac{10\cos(\phi)}{r} - \frac{10\cos(\phi)}{r} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

1.4 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,75 point)** ; Deux erreurs : **(0,50 point)** ; Trois erreurs : **(0,25 point)** ; Quatre erreurs : **(0 point)**.

   Les affirmations vraies sont B, C et D.

Question 2 : Champ électrique produit par un anneau chargé (4 points)

2.1 (0,5 pt) Déterminez la charge totale de l'anneau.

Puisque la densité linéique de charge de l'anneau est constante, la charge totale de l'anneau est simplement le produit de la densité de charge et de la circonférence de l'anneau :

$$Q = \rho_l \oint_C dl = \rho_l \cdot 2\pi R = 2\pi \rho_l R. \qquad \textbf{(0,5 point)}$$

2.2 (2,5 pts) Déterminez l'expression du champ électrique pour un point $(0, 0, z)$ situé sur l'axe de l'anneau, à une distance z de son centre.

On utilise la loi de Coulomb et le principe de superposition pour additionner le champ de chaque élément infinitésimal de charge $dq = \rho_l dl'$:

$$\vec{E}(z) = \oint_C \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0} \oint_C \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dl'. \qquad \textbf{(0,5 point)}$$

La symétrie du problème nous incite à travailler en coordonnées cylindriques. Aussi, la symétrie nous indique que le champ électrique sur l'axe de l'anneau est dirigé parallèlement à l'axe $\hat{z}$ et dépend seulement de la position z :

$$\vec{E}(z) = E_z(z)\hat{z}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Le vecteur $\vec{r}$ est le vecteur position du point auquel on veut calculer le champ :

$$\vec{r} = z\hat{z}, \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

tandis que le vecteur $\vec{r}'$ est le vecteur position d'un élément de charge dq:

$$\vec{r}' = R\hat{\rho}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Nous avons donc :

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - R\hat{\rho} \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

et

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{z^2 + R^2}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

L'élément de longueur dl' est une arc infinitésimal de l'anneau de rayon R et d'angle $d\phi$:

$$dl' = R d\phi. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Le champ électrique s'écrit donc :

$$\vec{E}(z) = E_z(z)\hat{z} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\oint_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - R\hat{\rho}}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} R d\phi.$$

Nous avons déjà remarqué que le champ était seulement en z : l'intégrale du terme en $\hat{\rho}$ est donc nulle (l'orientation de $\hat{\rho}$ dépend implicitement de ϕ). L'intégrale du terme en $\hat{z}$ ne fait pas intervenir ϕ et on a donc :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) = E_z(z)\hat{z} &= \frac{\rho_l R z\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}\oint_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi\rho_l R z\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\rho_l R z\hat{z}}{2\varepsilon_0\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}. \qquad \textbf{(0,5 point)}\end{aligned}$$

Solution alternative : De manière plus intuitive, parce que chaque élément de charge de l'anneau est situé à la même distance du point P, il produit le même champ (en module) au point P. On peut donc utiliser la formule pour la norme du champ produit par une charge ponctuelle égale à la charge totale de l'anneau, puis projeter le vecteur sur l'axe z :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\hat{z} \\ &= \frac{2\pi\rho_l R}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2 + R^2\right)}\frac{z}{z^2 + R^2}\hat{z} \\ &= \frac{\rho_l R z\hat{z}}{2\varepsilon_0\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}\hat{z}.\end{aligned}$$

Si l'étudiant justifie bien son raisonnement, cette solution est aussi acceptée.

2.3 (1 pt) Que devient l'expression du champ électrique lorsque $z \gg R$? Comparez avec l'expression du champ électrique produit par une charge ponctuelle et discutez du résultat.

Quand $z \gg R$, le terme R^2 au dénominateur de $\vec{E}$ devient négligeable et donc :

$$\vec{E}(z) \approx \frac{\rho_l R z\hat{z}}{2\varepsilon_0\left(z^2\right)^{3/2}} = \frac{\rho_l R z\hat{z}}{2\varepsilon_0 z^3} = \frac{\rho_l R\hat{z}}{2\varepsilon_0 z^2}. \qquad \textbf{(0,5 point)}$$

Le champ électrique produit au point $(0, 0, z)$ par une charge ponctuelle située à l'origine est :

$$\vec{E}(z) = \frac{Q\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 z^2}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Le champ produit très loin de l'anneau décroît en z^2, tout comme celui d'une charge ponctuelle. En comparant les expressions, la charge de cette charge ponctuelle est tout simplement la charge totale de l'anneau :

$$\frac{Q\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 z^2} = \frac{\rho_l R\hat{z}}{2\varepsilon_0 z^2} \Longrightarrow Q = 2\pi\rho_l R. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Question 3 : Câble coaxial non homogène (5 points)

3.1 (0,5 pt) Dans quelle direction est orienté le champ électrique à l'intérieur du câble coaxial? Justifiez. (0,5 pt)

La symétrie cylindrique permet d'affirmer que la densité de flux électrique (et donc le champ électrique) possède une composante radiale uniquement et dépend seulement du rayon ρ :

$$\vec{D}(\rho) = D_\rho(\rho)\hat{\rho},$$
$$\vec{E}(\rho) = E_\rho(\rho)\hat{\rho}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Puisque le potentiel est plus élevé sur l'armature externe, alors le champ électrique est dirigé radialement de l'armature extérieure vers l'armature intérieure. **(0,25 point)**

3.2 (1,5 pt) Déterminez l'expression vectorielle du champ électrique partout à l'intérieur du câble coaxial en fonction de la charge Q (en valeur absolue) accumulée sur les armatures.

On peut appliquer le théorème de Gauss avec un cylindre de rayon r ($a \leq \rho \leq b$) et de longueur L. Puisque le potentiel est plus faible sur l'armature interne, alors la charge accumulée sur celle-ci est négative :

$$-Q = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_\rho(\rho) \cdot 2\pi\rho L, \qquad \textbf{(0,75 point)}$$

La densité de flux est donc :

$$\vec{D}(\rho) = -\frac{Q}{2\pi\rho L}\hat{\rho}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Sachant que le champ électrique est proportionnel à la densité de flux :

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\vec{D}(\rho)}{\varepsilon_r(\rho)\varepsilon_0}, \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

le champ électrique vaut enfin :

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{QA^2}{2\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0\rho^3 L}\hat{\rho}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

3.3 (2 pts) Déterminez l'expression de la capacité par unité de longueur du câble coaxial.

En intégrant le champ électrique du conducteur interne vers le conducteur externe, on trouve la différence de potentiel entre les conducteurs.

La différence de potentiel s'écrit :

$$V_0 = -\int \vec{E}(\rho)\cdot d\vec{l} = -\int_a^b E_\rho(\rho)\hat{\rho}\cdot d\rho\hat{\rho} = -\int_a^b E_\rho(\rho)d\rho \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

$$= \frac{QA^2}{2\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho^3}$$

$$= \frac{QA^2}{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right). \qquad \textbf{(0,75 point)}$$

La capacité pour une longueur L de câble vaut donc :

$$C = \frac{Q}{V_0} \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 L}{QA^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^{-1}. \qquad \textbf{(0,50 point)}$$

La capacité par unité de longueur du câble vaut enfin :

$$C_l = \frac{C}{L} = \frac{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0}{QA^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^{-1}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

3.3 (1 pt) À partir de V_0 = 10 kV, on observe du claquage dans le diélectrique à l'endroit où le champ électrique est maximal. Calculez la valeur de la rigidité diélectrique du matériau en sachant que $a = 1$ cm et $b = 3$ cm.

Le champ électrique est maximal en $\rho = a$, près de l'armature interne du câble :

$$E_{\text{max}} = E(a) = \frac{QA^2}{2\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 a^3 L}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

La densité de charge accumulée sur les armatures est reliée à la différence de potentiel par le résultat trouvé en b) :

$$V_0 = \frac{QA^2}{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) \Longrightarrow \frac{Q}{L} = \frac{4\pi\varepsilon_{r0}\varepsilon_0 V_0}{A^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^{-1} \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Le champ électrique maximal vaut alors :

$$E_{\text{max}} = \frac{2V_0}{a^3}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^{-1} = \frac{2b^2}{a\left(b^2-a^2\right)}V_0. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

La rigidité diélectrique E_c est la valeur du champ maximal lorsque le claquage survient. Avec les valeurs données, on obtient :

$$E_c = E_{\text{max}} = \frac{2\cdot 0{,}03^2}{0{,}005\left(0{,}03^2-0{,}005^2\right)}\cdot 10000 = 4{,}11\,\mathrm{MV\,m^{-1}}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Question 4 : Potentiomètre (7 points)

4.1 (1,5 pt) En utilisant la méthode de l'équation de Laplace, donnez l'expression du potentiel partout dans le potentiomètre (dans chacune des deux sections du potentiomètre). De plus, donnez les expressions de toutes les conditions frontières du problème.

La symétrie du problème impose que le potentiel varie selon ϕ (coordonnées cylindriques). La solution à l'équation de Laplace dans chacun des matériaux est donc de la forme :

$$V(\phi) = A\phi + B \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Il faut appliquer la solution dans chacune des deux sections du potentiomètre :

$$\begin{aligned} V(\phi) &= A_1\phi + B_1 \quad \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi/6 \qquad \textbf{(0,25 point)} \\ V(\phi) &= A_2\phi + B_2 \quad \text{si } \pi/6 \leq \phi \leq \pi/2 \qquad \textbf{(0,25 point)} \end{aligned}$$

Les conditions frontières permettent de déduire les constantes A_1, B_1, A_2 et B_2. D'abord, le potentiel est nul sur l'électrode fixe :

$$V(0) = A_1 \cdot 0 + B_1 = 0. \qquad \textbf{(0,25 point)} \tag{1}$$

Ensuite, Le potentiel sur l'électrode mobile vaut V_0 :

$$V(\phi_0) = A_2\phi_0 + B_2 = V_0 \qquad \textbf{(0,25 point)} \tag{2}$$

À l'interface entre les deux sections, le potentiel doit être continu :

$$V_1(\pi/6) = V_2(\pi/6) \Longrightarrow A_1 \cdot \pi/6 = A_2 \cdot \pi/6 + B_2 \qquad \textbf{(0,25 point)} \tag{3}$$

4.2 (1,5 pt) Déterminez l'expression du champ électrique partout dans le potentiomètre.

Le champ électrique s'obtient à partir du potentiel en appliquant l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = -\nabla V(\phi) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}V(\phi)\hat{\phi} \qquad \textbf{(0,50 point)}$$

où les composantes selon $\hat{\rho}$ et z du gradient sont nulles puisque V dépend de ϕ seulement.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\rho) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(A_1\phi + B_1\right)\hat{\phi} = -\frac{A_1}{\rho}\hat{\phi} \quad \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi/6 \qquad \textbf{(0,50 point)} \\ \vec{E}(\rho) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(A_2\phi + B_2\right)\hat{\phi} = -\frac{A_2}{\rho}\hat{\phi} \quad \text{si } \pi/6 \leq \phi \leq \pi/2. \qquad \textbf{(0,50 point)} \end{aligned}$$

4.3 (0,75 pt) Déterminez l'expression de la densité de courant partout dans le potentiomètre.

La densité de courant est proportionnelle au champ électrique :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad \textbf{(0,25 point)}$$

On a donc :

$$\vec{J}(\phi) = -\frac{\sigma_1 A_1}{\rho}\hat{\phi} \quad \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi/6 \qquad \textbf{(0,25 point)}$$
$$\vec{J}(\phi) = -\frac{\sigma_2 A_2}{\rho}\hat{\phi} \quad \text{si } \pi/6 \leq \phi \leq \pi/2. \quad \textbf{(0,25 point)}$$

4.4 (1 pt) Puisque le courant total qui circule dans les deux sections du potentiomètre est le même, la composante normale de la densité de courant à l'interface entre les deux sections doit être continue.

À l'aide de cette condition et des conditions identifiées à la sous-question 4.1, déterminez les expressions des constantes A et B de l'expression du potentiel dans la première section du potentiomètre seulement. Exprimez votre réponse en fonction de la géométrie du problème et des conductivités des matériaux.

La composante normale de la densité de courant devant être continue à l'interface entre les deux sections, on trouve que :

$$\vec{J}(\phi/6) = \sigma_1 \frac{A_1}{\rho}\hat{\phi} = -\sigma_2 \frac{A_2}{\rho}\hat{\phi} \Longrightarrow A_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} A_1. \quad \textbf{(0,25 point)} \tag{4}$$

On peut donc calculer les valeurs des constantes A_1 et B_1 pour obtenir l'expression du potentiel dans la première section du potentiomètre à l'aide des équations (1), (2), (3) et (4).

On sait déjà que $B_1 = 0$ de l'équation (1). **(0,25 point)**

De l'équation (2), on trouve

$$B_2 = V_0 - A_2 \phi_0,$$

que l'on peut introduire, avec l'équation (4), dans l'équation (3) :

$$A_1 \cdot \pi/6 = A_2 \cdot \pi/6 + B_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} A_1 \cdot \pi/6 + V_0 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} A_1 \phi_0. \quad \textbf{(0,25 point)}$$

On en déduit la valeur de A_1 :

$$A_1 = \frac{V_0}{\frac{\pi}{6} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\phi_0 - \frac{\pi}{6}\right)}. \quad \textbf{(0,25 point)}$$

4.5 (1,5 pt) Déterminez l'expression de la résistance du potentiomètre en fonction de ϕ_0.

La résistance dépend du potentiel V_0 et du courant I qui circule dans le potentiomètre :

$$R = \frac{V_0}{I} \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

Le courant qui circule dans le potentiomètre est donné par :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

où

$$d\vec{S} = d\rho dz \hat{\phi} \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

est l'élément de surface traversé par le courant (perpendiculaire à $\vec{J}$, voir Annexe 4).

On calcule le courant total en prenant la surface dans la première section (on aura pu prendre la surface dans la deuxième section aussi, puisque le courant total est partout le même). On obtient :

$$I = \int_0^d \int_a^b -\sigma_1 \frac{A_1}{\rho} \hat{\phi} \cdot d\rho dz \hat{\phi} = -\sigma_1 d A_1 \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = -\sigma_1 d A_1 \ln\left(\frac{b}{a}\right), \qquad \textbf{(0,50 point)}$$

où le signe négatif indique que le courant circule en sens opposé à l'axe $\hat{\phi}$.

En utilisant l'expression obtenue pour A_1, on obtient :

$$I = -\frac{\sigma_1 d V_0}{\frac{\pi}{6} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\phi_0 - \frac{\pi}{6}\right)} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

En utilisant le module de la valeur du courant, la résistance est donc donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma_1 d \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\phi_0 - \frac{\pi}{6}\right)\right]. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

4.6 (0,75 pt) Calculez la valeur de la puissance dissipée par le potentiomètre pour le cas particulier $a = 1$ cm, $b = 4$ cm, $d = 0{,}5$ cm, $\sigma_1 = 1{,}5\,\mu\mathrm{S/m}$, $\sigma_2 = 5{,}0\,\mu\mathrm{S/m}$, $V_0 = 5$ V et $\phi_0 = \pi/2$.

La puissance dissipée est donnée par :

$$P = V_0|I| = RI^2 = \frac{V_0^2}{R} \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

$$= \frac{\sigma_1 d V_0^2}{\frac{\pi}{6} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\phi_0 - \frac{\pi}{6}\right)} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad \textbf{(0,25 point)}$$

La valeur obtenue pour le cas mentionné est :

$$P = 310\,\mathrm{nW}. \qquad \textbf{(0,25 point)}$$