– PHS1102 – Champs électromagnétiques

Chapitre 3 – Matériaux diélectriques

Polarisation

Permittivité et permittivité relative

Capacité d'un condensateur

Claquage

Structure du cours

Concepts clés

Matériau diélectrique
Polarisation
Permittivité
Permittivité relative
Susceptibilité

Capacité d'un condensateur

Rigidité diélectrique Claquage

Objectifs (compétences à développer)

- Expliquer le phénomène de polarisation dans un diélectrique.
- Calculer la polarisation et la densité de charges à la surface d'un diélectrique.
- Calculer le champ électrique dans un diélectrique.
- Calculer la capacité d'un condensateur seul ou d'un arrangement de condensateurs en série et en parallèle.
- Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur.

• Expliquer le phénomène de claquage.

Rappel – Matériaux diélectriques

Le **champ électrique** \vec{E} est un **champ vectoriel** associé à la force ressentie par une particule chargée (phénomène mesurable) due une distribution de charge environnante.

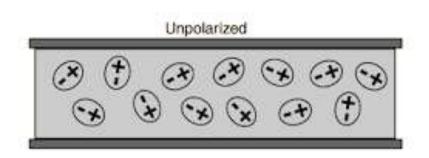
Le **flux électrique** est un concept plus abstrait, mais très puissant, car il permet de **calculer le champ électrique dans les matériaux diélectriques**.

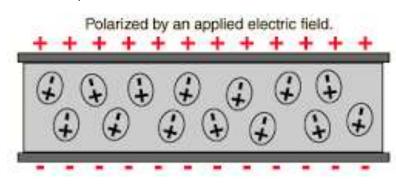
Matériaux conducteurs

Les matériaux conducteurs contiennent des **charges libres** qui peuvent se déplacer librement dans tout le matériau sous l'effet d'un champ électrique.

Matériaux diélectriques (isolants)

Les matériaux diélectriques contiennent des **charges liées** qui ne peuvent pas se déplacer librement. L'application d'un champ externe a pour effet de **polariser** le diélectrique en déformant le nuage électronique autour des atomes et/ou en réorientant les molécules dans la direction du champ.



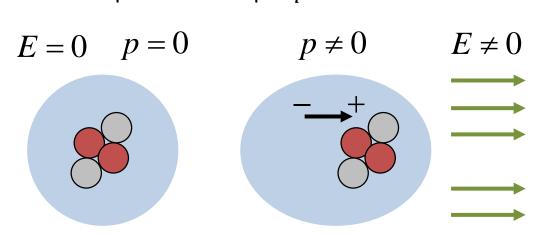


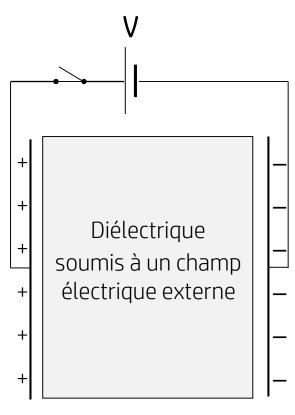
Types de polarisation

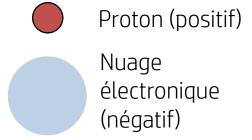
Puisqu'un diélectrique ne contient pas de charge libre, il ne peut pas y avoir de courant électrique continu lorsqu'un champ électrique est appliqué.

Par contre, les **charges liées** réagissent au champ électrique, ce qui a pour effet de **polariser le matériau**.

1. Polarisation électronique (tous les diélectriques)
Chaque atome possède un noyau positif autour duquel gravitent des électrons négatifs. Le champ électrique externe déforme le nuage électronique, ce qui crée un moment dipolaire électrique (\vec{p}).

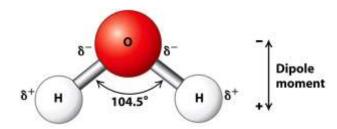




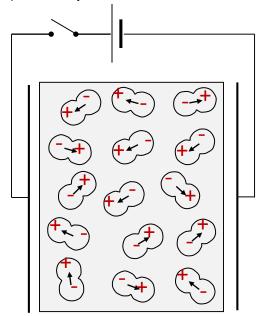


Types de polarisation

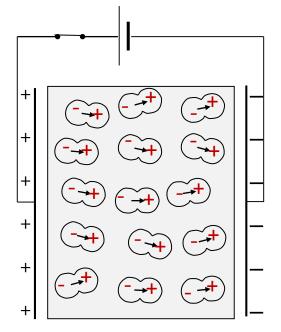
2. Polarisation d'orientation (diélectriques polaires) Les molécules qui composent les diélectriques polaires possèdent un moment dipolaire permanent (ex. : l'eau).



E=0: les molécules sont orientées aléatoirement sous l'effet de l'agitation thermique : la **polarisation totale est nulle**.

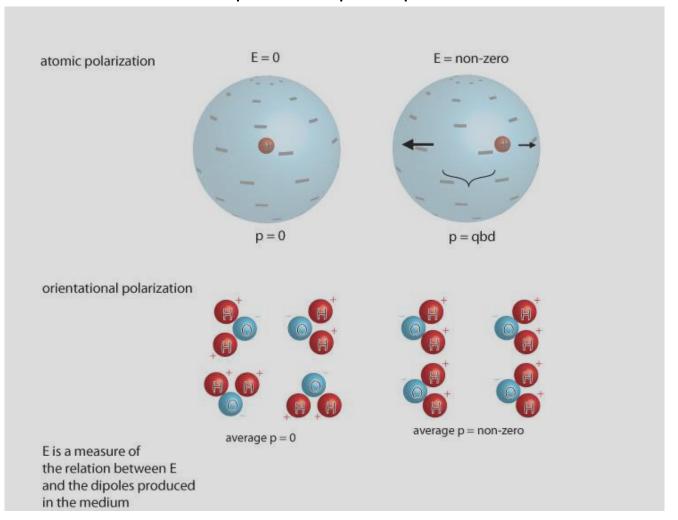


 $E \neq 0$: les molécules s'orientent en direction du champ, ce qui crée une polarisation totale non nulle.



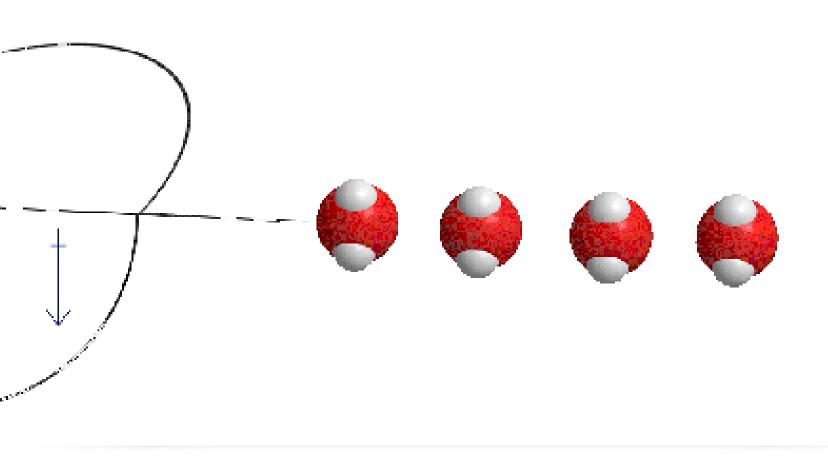
Types de polarisation

Polarisation électronique (atomique) et polarisation d'orientation



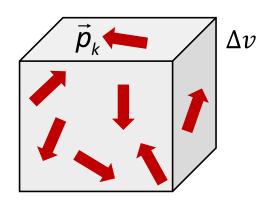
La polarisation électronique existe dans tous les diélectriques.

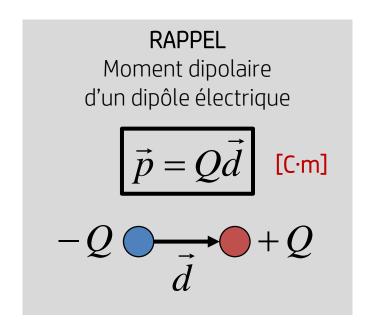
La polarisation d'orientation s'ajoute à la polarisation électronique pour les diélectriques polaires. Un champ électrique alternatif (qui varie dans le temps) force les molécules polaires à se réorienter constamment, ce qui a pour effet d'augmenter leur température (chauffage micro-ondes).



Vecteur polarisation

Chaque molécule d'un diélectrique possède son propre moment dipolaire élémentaire \vec{p}_k (qui peut être nul si les molécules ne sont pas polaires).





Le vecteur polarisation \vec{P} est la somme vectorielle des moments dipolaires élémentaires par unité de volume élémentaire Δv .

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{k} \vec{p}_{k}$$
 [C/m²]

Quelle autre quantité déjà vue possède les mêmes unités ?

Vecteur polarisation et charge induite sur une surface

Lorsqu'un diélectrique est polarisé dû à un champ électrique externe, ses surfaces deviennent localement chargées (charges liées).

Exemple du condensateur plan

Près des surfaces du diélectrique, une charge liée $\pm Q_{\mathrm{ind}}$ s'est accumulée due à la polarisation.

Surface gauche : $\rho_{s,\text{gauche}} = -\rho_{s,\text{ind}} = -Q_{\text{ind}}/S$.

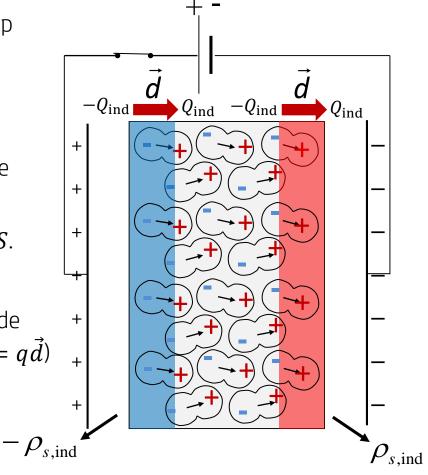
Surface droite : $\rho_{s, \text{droite}} = \rho_{s, \text{ind}} = Q_{\text{ind}}/S$.

Densité de charge induite dans la couche mince de largeur d (contenant N dipôles élémentaires $\vec{p}=q\vec{d}$) près de la surface du diélectrique :

$$\left| \rho_{s,\text{ind}} \right| = \frac{Q_{\text{ind}}}{S} = \frac{Nq}{S} = \frac{N}{Sd} qd = \frac{N}{\Delta v} p$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta v} \sum_{k} \vec{p}_{k} \right| = \left| \vec{P} \right|$$

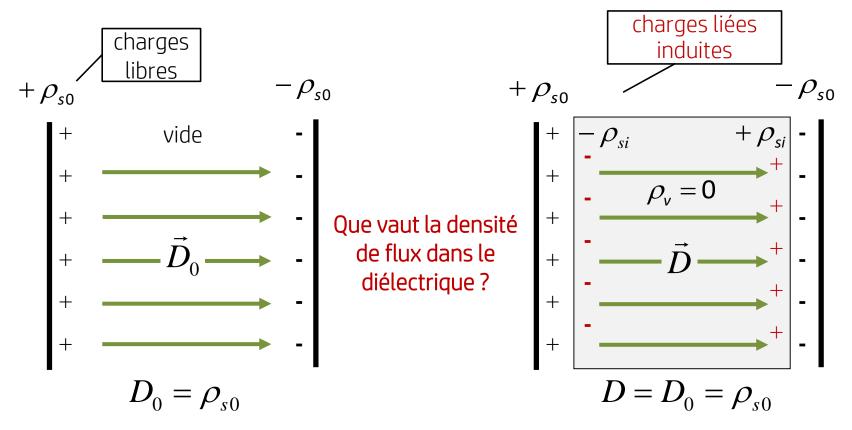
La densité surfacique de charge induite est égale à la polarisation.



Densité de flux et champ dans les diélectriques

Rappels

Sources du champ électrique \vec{E} : charges libres et charges liées. Sources de la densité de flux électrique \vec{D} : charges libres seulement.

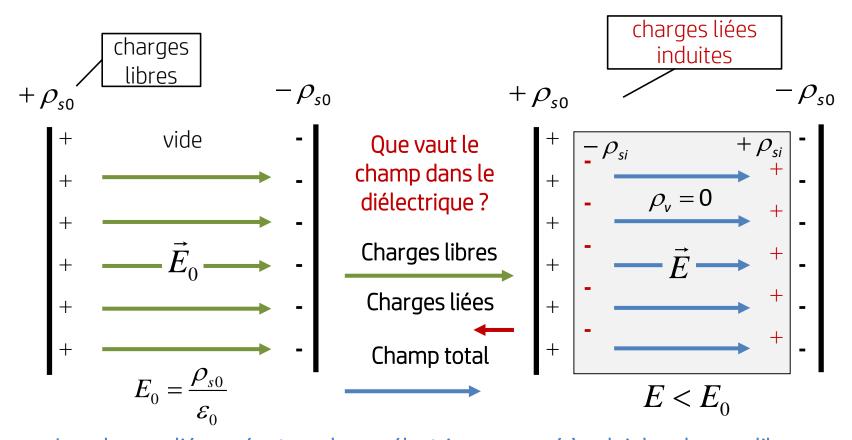


La densité de flux reste la même puisque la densité de charges libres sur les armatures du condensateur reste la même.

Densité de flux et champ dans les diélectriques

Rappels

Sources du champ électrique \vec{E} : charges libres et charges liées. Sources de la densité de flux électrique \vec{D} : charges libres seulement.

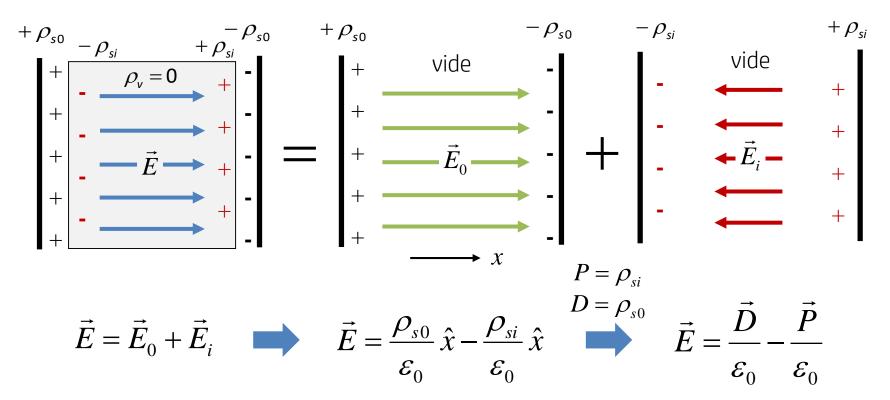


Les charges liées créent un champ électrique opposé à celui des charges libres. Le champ électrique dans le diélectrique est donc plus faible.

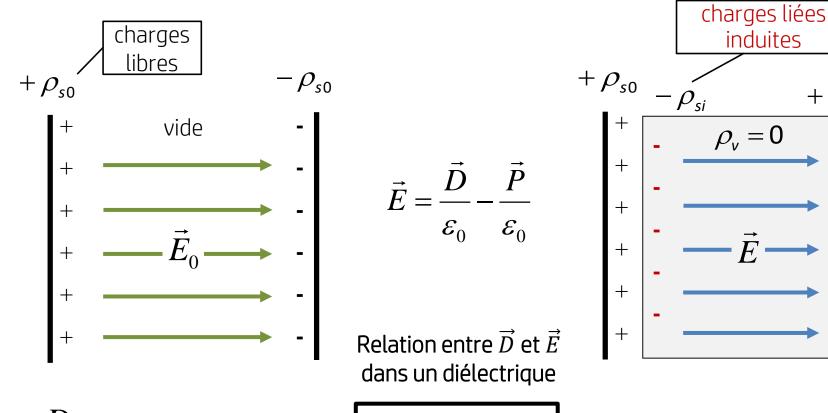
Densité de flux et champ dans les diélectriques

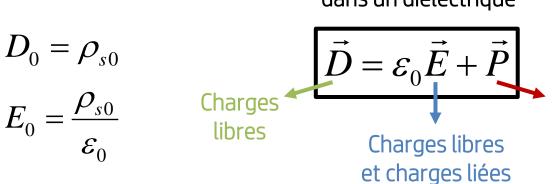
Que vaut le champ électrique dans un diélectrique?

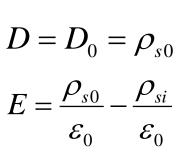
Puisque le volume du diélectrique est neutre ($\rho_v = 0$, seules ses surfaces possèdent une charge induite), le champ du condensateur avec diélectrique peut être vu comme la superposition des champs de deux condensateurs plans dans le vide : l'un avec les charges libres ρ_{S0} et l'autre avec les charges induites ρ_{Si} .



Résumé – Densité de flux et champ dans les diélectriques



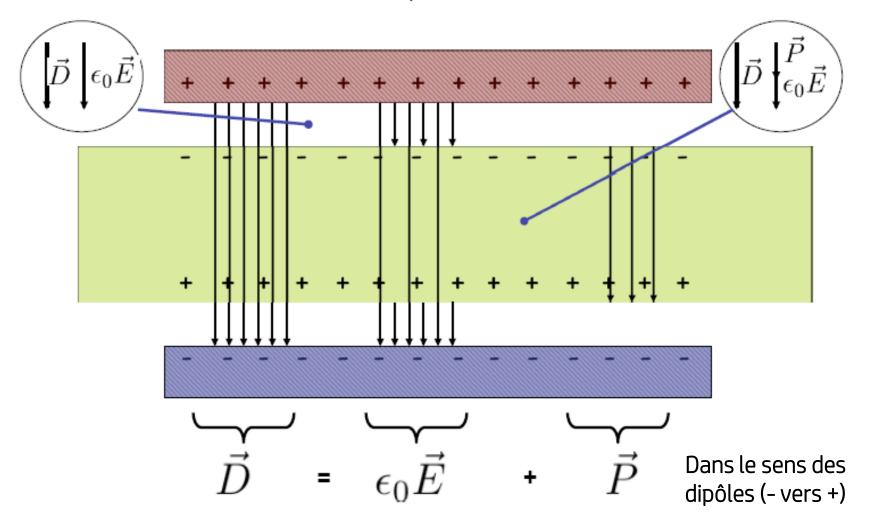




Charges

liées

Les champs \overrightarrow{D} , \overrightarrow{E} et \overrightarrow{P}



Existe-t-il une relation simple entre \vec{P} et \vec{E} ?

Permittivité d'un diélectrique

En général, la relation entre \vec{P} et \vec{E} est complexe. Par contre, si l'on pose un certain nombre d'hypothèses sur le diélectrique, on peut obtenir une relation simple.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Le diélectrique est uniforme.

La polarisation est uniforme dans tout le matériau.

Le diélectrique est isotrope.

La polarisation est toujours parallèle au champ électrique et sa magnitude de dépend pas de l'orientation du champ par rapport au matériau.

Le diélectrique est linéaire.

La polarisation est proportionnelle au champ électrique.

Sous ces hypothèses, on peut décrire la capacité d'un diélectrique à se polariser sous l'effet d'un champ à l'aide d'un seul nombre adimensionnel : la susceptibilité électrique χ_e .

Polarisation et susceptibilité électrique

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$



$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$
$$= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

Permittivité d'un diélectrique

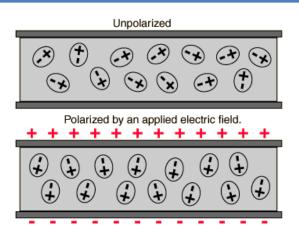
$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

Permittivité relative (ε_r)

Nombre adimensionnel relié à la susceptibilité électrique.

Permittivité (ε)

Produit de la permittivité relative et de la permittivité du vide. La permittivité est en F/m.



$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

Permittivité et indice de réfraction

L'indice de réfraction n d'un milieu est relié à la vitesse de propagation de la lumière (onde électromagnétique) dans le milieu.

En interagissant avec le milieu via son champ électrique, la lumière polarise les molécules et atomes. En général, plus le milieu se polarise facilement, plus l'indice de réfraction est élevé.

$$v = \frac{c}{n}$$

$$n=\sqrt{\mathcal{E}_r}$$
(matériau non

magnétique)

Permittivité relative – Table de valeurs

Matériau	Permittivité relative	
Vide	1,0	
Air	1,00054	
Papier	3,5	
Mica	5,4	
Porcelaine	6,5	
Verre	4,5	
Téflon	2,1	
Huile	4,5	

Remarques

- 1. Dans ce cours, on utilisera $\varepsilon_r=1$ pour l'air (sauf indication contraire) ;
- 2. La grande majorité des diélectriques trouvés dans la nature ont une permittivité relative $\varepsilon_r > 1$. Il est toutefois possible de fabriquer des métamatériaux tels que $0 < \varepsilon_r < 1$ ou même $\varepsilon_r < 0$, ce qui leur confère des propriétés intéressantes.

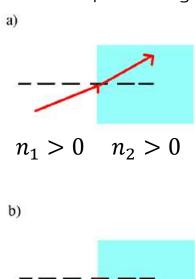
Métamatériau à indice de réfraction négatif

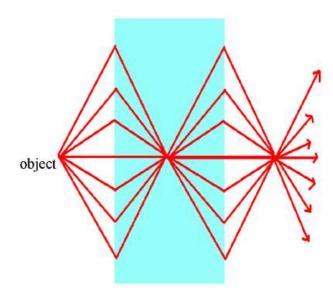
Métamatériau d'indice négatif

Lorsque la lumière passe d'un matériau d'indice positif à un matériau d'indice négatif, la lumière est réfractée en restant du même côté que la lumière incidente.

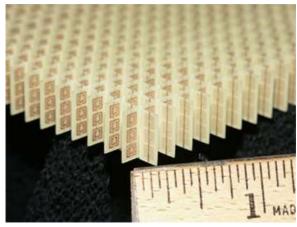
Cela permet d'utiliser le métamatériau comme une superlentille surpassant la limite de la diffraction afin d'imager des structures plus fines que la longueur d'onde de la lumière utilisée. Limite de la diffraction

$$\Delta x_{\rm min} \approx \lambda$$





Exemple de métamatériau d'indice négatif (structure périodique)



Matériaux diélectriques – Les électrets

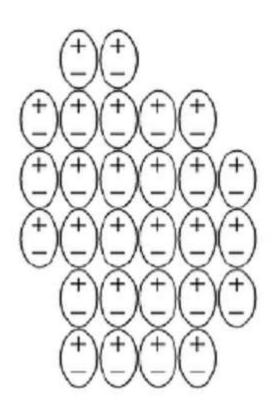
Un électret est un matériau qui peut garder une polarisation permanente après un traitement spécifique.

Des exemples de traitements possibles sont :

- Illumination et application d'un champ électrique ;
- Chauffage et application d'un champ électrique.

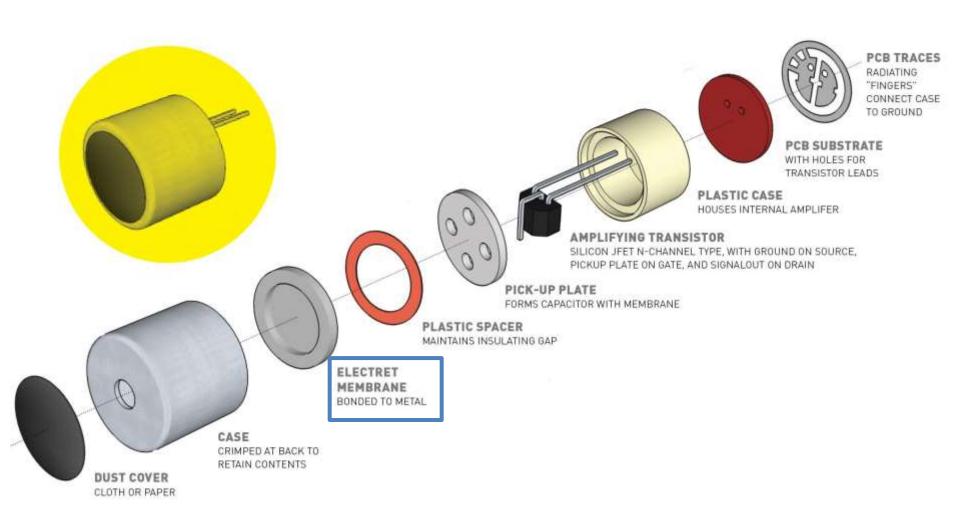
Une fois traité, l'électret produit son propre champ électrique, comme un aimant permanent produit son propre champ magnétique.

Les électrets sont utilisés notamment dans certains microphones dont le circuit électronique de détection requiert une **source de tension**. Au lieu d'utiliser une source externe (batterie), l'électret est un moyen abordable et pratique de fournir cette tension.



Le terme « électret » vient d'un combinaison des termes « electricity » et « magnet ».

Microphone électrostatique à électret



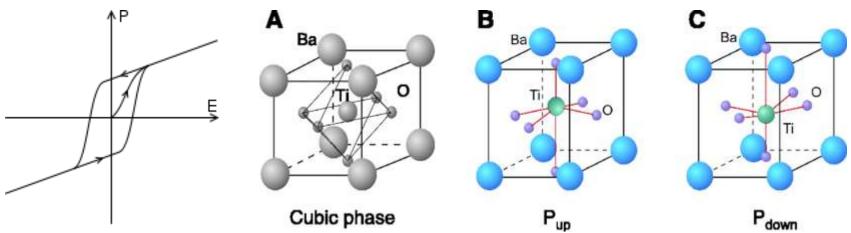
Matériaux diélectriques – Les ferroélectriques

Un ferroélectrique est un matériau qui possède une polarisation spontanée.

Propriétés des ferroélectriques :

- La polarisation spontanée existe seulement en dessous d'une température spécifique qui dépend du matériau (température de Curie). Au-dessus de la température de Curie, un ferroélectrique se comporte comme un diélectrique ordinaire;
- Ils ne sont pas associés au fer. Leur nom vient plutôt de leur comportement qui est analogue à celui des matériaux ferromagnétiques.

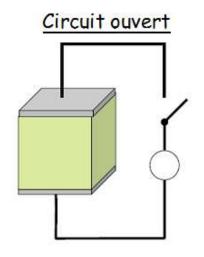
États possibles de polarisation du titanate de baryum (Ba TiO_3)

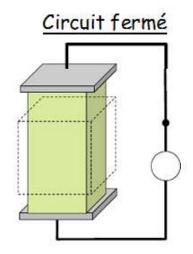


On peut utiliser les ferroélectriques comme éléments de mémoire.

Matériaux diélectriques – Les piézoélectriques

Un piézoélectrique est un matériau qui produit un champ électrique lorsqu'il est déformé, et qui se déforme sous l'effet d'un champ électrique.



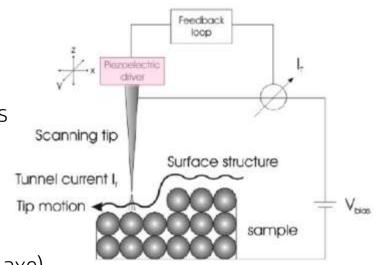


En appliquant une tension sur le piézoélectrique (en jaune), ce dernier se déforme.

Application – Microscope à force atomique (AFM)

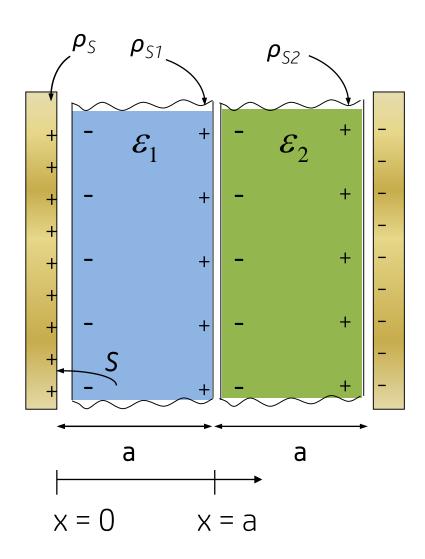
La pointe du microscope détecte de faibles variations de courant (effet tunnel) en fonction de la hauteur de la surface de l'échantillon. La pointe est sensible à la présence d'un seul plan atomique!

La pointe balaie la surface grâce à trois piézoélectriques contrôlant son mouvement (un par axe).



Exemple 3.2 – Condensateur plan à deux diélectriques

Quel est le champ partout dans le condensateur plan?



La densité de flux entre les armatures n'est pas affectée par la présence des diélectriques.

$$\vec{D} = \rho_{\rm S} \hat{x}$$

On en déduit le champ dans chaque région.

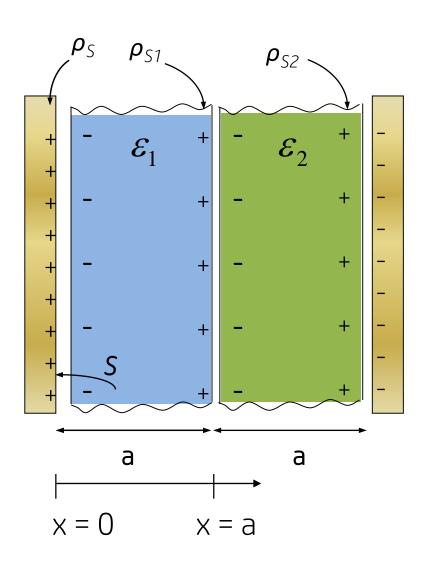
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_S}{\varepsilon_1} \hat{x} & 0 < x < a \\ \frac{\rho_S}{\varepsilon_2} \hat{x} & a < x < 2a \end{cases}$$

Le champ est-il continu à l'interface entre les diélectriques ?

Exemple 3.2 – Condensateur plan à deux diélectriques

Quelles sont les densités de charges induites à la surface de chaque diélectrique?



La densité de charges induites est égale (en module) à la polarisation.

$$\rho_{si} = P$$

On exprime la polarisation en fonction de \vec{D} .

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \varepsilon \vec{E} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \vec{D}$$

$$\vec{D} = \rho_s \vec{x}$$

$$\rho_{s1} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) \rho_s \qquad \rho_{s2} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right) \rho_s$$

La densité de charges induites est toujours inférieure à la densité de charges libres!

En résumé...

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ électrique externe \vec{E}_0 , il devient <u>polarisé</u>. Nous avons vu deux mécanismes de polarisation : <u>atomique</u> et <u>d'orientation</u>. Le champ <u>polarisation</u> \vec{P} décrit le <u>moment</u> <u>dipolaire</u> par unité de volume (en <u>C/m²</u>). Un diélectrique polarisé possède une densité de charge induite :

- volumique $\frac{\rho_v = 0}{\rho_v}$ dans son intérieur ;
- surfacique $\rho_{s,ind} = \pm |\vec{P}|$ sur ses surfaces perpendiculaires à \vec{P} .

Un diélectrique polarisé produit un champ \vec{E}_{ind} qui <u>s'oppose</u> au champ externe \vec{E}_0 . Ce phénomène est décrit par la relation :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Si le diélectrique est <u>uniforme</u>, <u>isotrope</u> et <u>linéaire</u>, alors la polarisation est proportionnelle au champ :

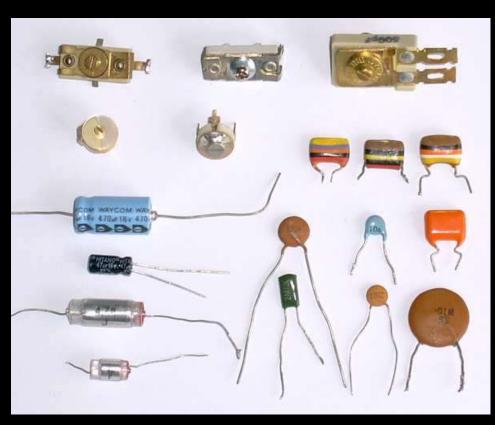
$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Sous ces hypothèses, la densité de flux électrique est proportionnelle au champ électrique : la constante de proportionnalité est appelée <u>permittivité</u>.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Les condensateurs

Les condensateurs sont des composants essentiels des circuits électriques et électroniques.



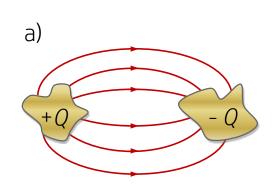


À quoi peut servir un condensateur?

Qu'est-ce qu'un condensateur?

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs chargés et isolés.

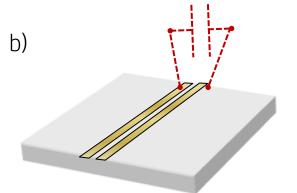
Il existe une multitude de configurations qui agissent comme des condensateurs.



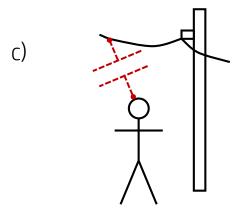
Deux conducteurs isolés constituent un condensateur.



Symbole d'un condensateur dans un schéma de circuit.



Deux rubans sur un circuit imprimé sont un condensateur.



Un homme et une ligne de transmission sont un condensateur.

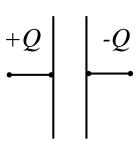
Lors de la conception de circuits, il faut tenir compte des capacités parasites afin de s'assurer qu'elles n'interfèrent pas avec le fonctionnement du circuit.

Capacité d'un condensateur

La capacité d'un condensateur mesure sa capacité à emmagasiner des charges électriques.

La capacité dépend :

- De la géométrie des armatures du condensateur ;
- De la séparation entre les armatures ;
- Du matériau diélectrique entre les armatures.



La capacité est définie comme la quantité de charge accumulée par unité de différence de potentiel entre les armatures.

Q: magnitude de la charge sur les armatures [C]

V : différence de potentiel entre les armatures [V]

$$C = \frac{Q}{V}$$
 En farad [1 F = 1 C/V]

En général la capacité augmente lorsque :

- La **surface** des armatures portant les charges **augmente** ;
- La **permittivité** du diélectrique **augmente** ;
- La distance de séparation entre les armatures diminue.



Exemple 3.4 – Capacité d'un condensateur plan

Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan en fonction de ses paramètres.

Par le théorème de Gauss, la densité de flux entre les armatures vaut :

 $\vec{D} = \rho_S \hat{x} = \frac{Q}{S} \hat{x}$

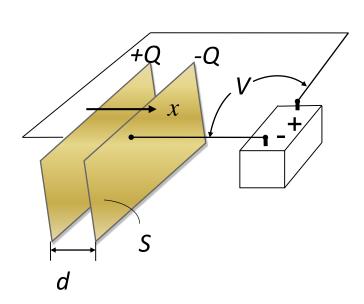
On en déduit le champ électrique entre les armatures :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon S} \,\hat{x}$$

On peut alors calculer la différence de potentiel entre les armatures :

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{x=d}^{x=0} E dx = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$





Capacité d'un condensateur plan

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

Que faut-il faire pour augmenter la capacité du condensateur?

Énergie emmagasinée dans un condensateur

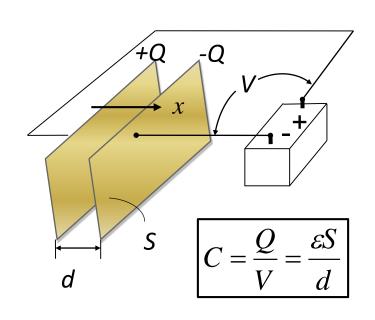
On a démontré à l'exemple 2.3 de la semaine 2 que l'énergie emmagasinée est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon E^{2} dv = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{Q}{\varepsilon S} \right)^{2} S d = \frac{Q^{2} d}{2 \varepsilon S}$$

On peut réécrire l'énergie en utilisant la capacité et la différence de potentiel du condensateur.

$$U = \frac{1}{2}Q^{2} \frac{d}{\varepsilon S} = \frac{1}{2}(CV)^{2} \frac{1}{C} = \frac{1}{2}CV^{2}$$

L'expression obtenue pour l'énergie est tout à fait générale. On peut l'appliquer à n'importe quel condensateur, peu importe sa géométrie. Il suffit de connaître sa capacité et sa différence de potentiel.



Énergie emmagasinée dans un condensateur (général)



$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

Exemple 3.5 – Capacité d'un câble coaxial

Déterminer l'expression de la capacité par unité de longueur d'un câble coaxial.

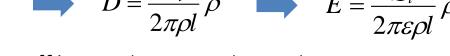
On suppose que le câble est assez long pour négliger les effets de bord.

1. Théorème de Gauss (cylindre de rayon $a < \rho < b$ et de longueur $l \ll L$)

$$Q_l = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D2\pi\rho \vec{k}$$

$$Q_{l} = \oint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D2\pi\rho l$$

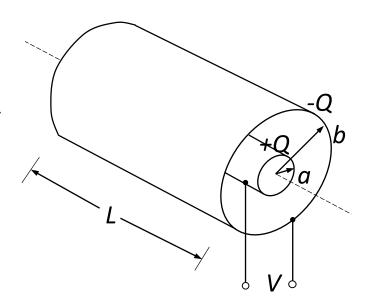
$$\vec{D} = \frac{Q_{l}}{2\pi\rho l} \hat{\rho} \qquad \vec{E} = \frac{Q_{l}}{2\pi\epsilon\rho l} \hat{\rho}$$



2. Différence de potentiel entre les armatures :

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q_l}{2\pi \varepsilon l} \int_{\rho=b}^{\rho=a} \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{Q_l}{2\pi \varepsilon l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

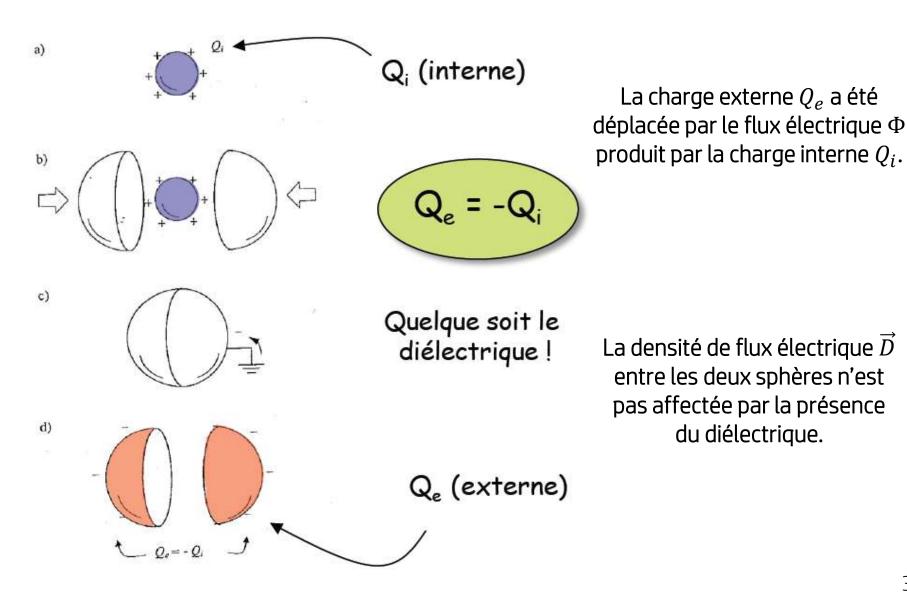
3. Capacité par unité de longueur :
$$C_l = \frac{C}{l} = \frac{1}{l} \frac{Q_l}{V} = \frac{Q_l}{\frac{Q_l}{2\pi \varepsilon l} \ln \left(\frac{b}{a}\right) l}$$



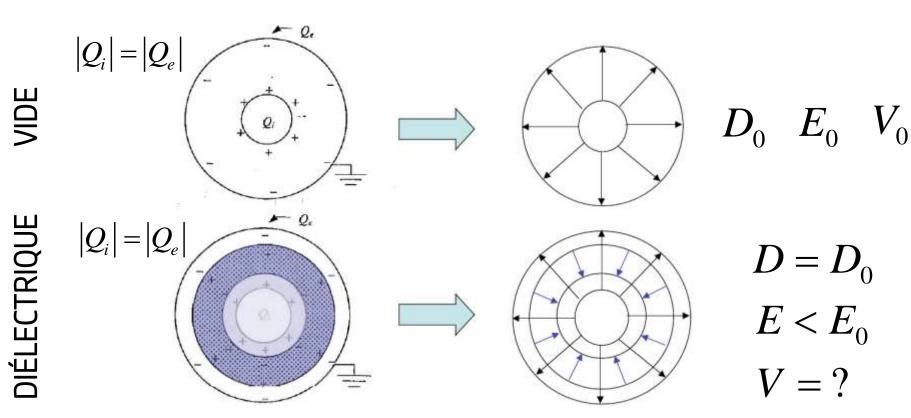
Capacité par unité de longueur [F/m]

$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\!\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Rappel – Expérience de Cavendish



Retour sur l'expérience de Cavendish



Qu'arrive-t-il à la différence de potentiel entre les sphères conductrices quand on ajoute le diélectrique?

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \qquad V = \frac{Q}{C}$$

Q est la même. $V = \frac{\mathcal{U}}{C}$ C augmente en ajoutant le diélectrique ($\varepsilon_r > 1$).



Diélectrique $|\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0|$

 $-Q_2$

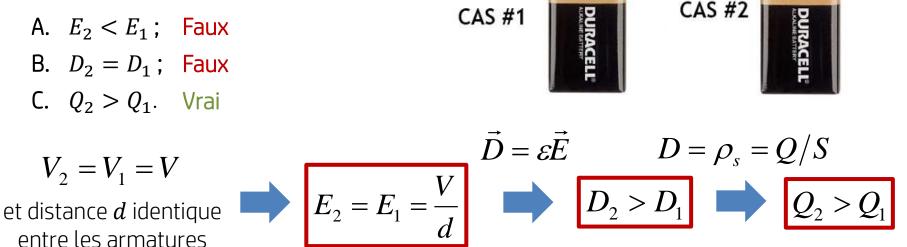
Quiz!

Vide ε_0

Deux condensateurs plans de géométries identiques sont maintenus à une différence de potentiel constante V grâce à une batterie. Le milieu entre les armatures est le vide pour le 1^{er} condensateur, et un diélectrique ($\varepsilon_r > 1$) pour le 2^e condensateur.

En considérant le milieu entre les armatures du condensateur, laquelle des affirmations suivantes est vraie?

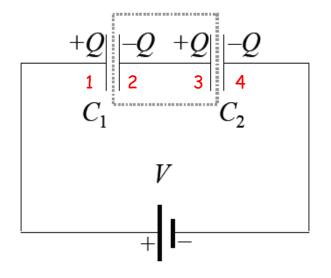
- A. $E_2 < E_1$; Faux
- B. $D_2 = D_1$; Faux
- C. $Q_2 > Q_1$. Vrai



Qu'en est-il de l'énergie?

Capacité équivalente de condensateurs en série et en parallèle

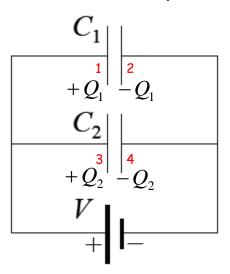
Condensateurs en série



Rappel – Capacité

$$C = \frac{Q}{V}$$

Condensateurs en parallèle



Q est la même sur chaque condensateur.

V se répartit entre les condensateurs.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \qquad \qquad \frac{Q}{V} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} \qquad Q = Q_1 + Q_2 = C_1V + C_2V = \left(C_1 + C_2\right)V$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i} \frac{1}{C_{i}}$$

Q se répartit sur tous les condensateurs.

V est la même pour tous les condensateurs.

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V$$

$$C = \sum_{i} C_{i}$$

Claquage dans les diélectriques

Lorsque l'intensité du champ électrique devient très grande (typiquement de l'ordre de quelques MV/m), les forces électrostatiques qui s'exercent sur les charges liées transforment ces charges liées en charges libres et le diélectrique devient un matériau conducteur.



Claquage dans un bloc de Plexiglas. Le matériau change de propriétés et d'apparence où le courant a circulé.

Claquage dans l'air









Rigidité diélectrique et claquage

Explication du phénomène de claquage

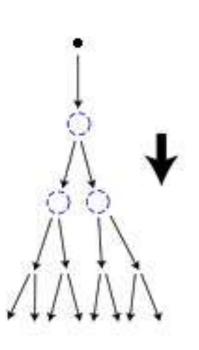
Le mécanisme repose sur un effet avalanche :

- 1. Le champ électrique élevé accélère les ions déjà présents dans le milieu et/ou ionise partiellement le milieu et accélère les ions ainsi produits ;
- 2. Les ions entrent en collision avec les atomes neutres ;
- 3. Ces collisions génèrent de nouveaux ions ;
- 4. Ces ions sont accélérés par le champ électrique et le cycle recommence.

Rigidité diélectrique

Champ électrique maximum pouvant être appliqué sur un matériau avant de déclencher le phénomène de claquage.

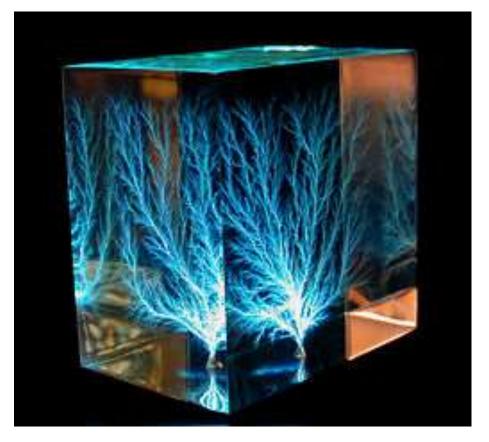
Rigidité diélectrique de l'air : environ 3 MV/m



Rigidité diélectrique – Table de valeurs

Matériau	Permittivité relative	Rigidité diélectrique (V/m) × 10 ⁶
Vide	1,0	∞
Air	1,00054	3
Papier	3,5	14
Mica	5,4	160
Porcelaine	6,5	4
Verre	4,5	13
Téflon	2,1	60
Huile	4,5	12

Claquage dans un solide



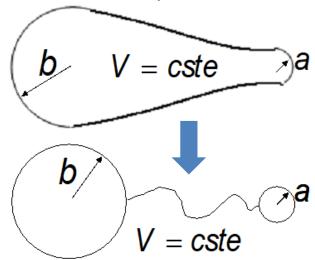


Effet de pointe et claquage

Effet de pointe

Le champ électrique est plus intense près des pointes d'un conducteur. Le claquage est donc plus susceptible de survenir autour de ces régions.

Conducteur à un potentiel constant



Approximation par deux sphères conductrices reliées par un fil

Le champ électrique à la surface de la sphère est d'autant plus élevé que le rayon de la sphère est petit! Potentiel et champ électrique d'une sphère conductrice

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{V}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad E_a \approx \frac{b}{a} E_b$$

