# – PHS1102 – Champs électromagnétiques

# Chapitre 10 – Champs quasistatiques

Loi de Faraday (induction électromagnétique)

Inductance (auto-inductance) et inductance mutuelle

3º équation de Maxwell

Densité de courant de déplacement

Théorème d'Ampère généralisé (4e équation de Maxwell)

## Objectifs de la semaine

Loi de Faraday

• Calculer la force électromotrice due à une variation du flux magnétique.

Inductance et inductance mutuelle

- Calculer l'inductance mutuelle entre les enroulements d'un transformateur.
- Calculer l'inductance à partir du flux magnétique et du courant, et l'utiliser pour calculer l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique.

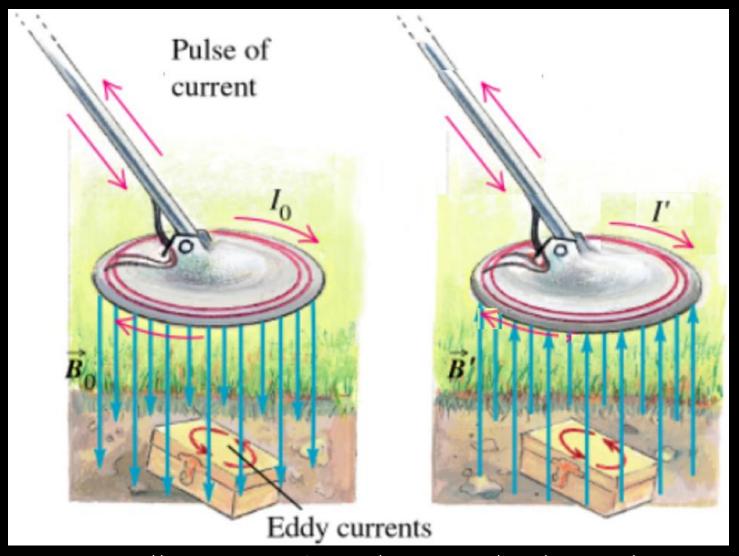
3<sup>e</sup> équation de Maxwell

• Appliquer la 3<sup>e</sup> équation de Maxwell pour **calculer les courants de Foucault** dans un matériau.

Densité de courant de déplacement et 4<sup>e</sup> équation de Maxwell

- Définir et calculer la densité de courant de déplacement.
- **Déterminer le champ magnétique** en présence d'un courant de déplacement.

# Détecteur de métal



http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/detector/

#### Hypothèse des champs quasistatiques

Les 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> équations de Maxwell décrivent comment les champs électriques et magnétiques s'influencent entre eux.

3º équation de Maxwell

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Une variation de flux magnétique  $\Phi_m$  peut produire un champ électrique.

4e équation de Maxwell

$$\oint_{C} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Une variation de flux électrique  $\Phi_e$  peut produire un champ magnétique.

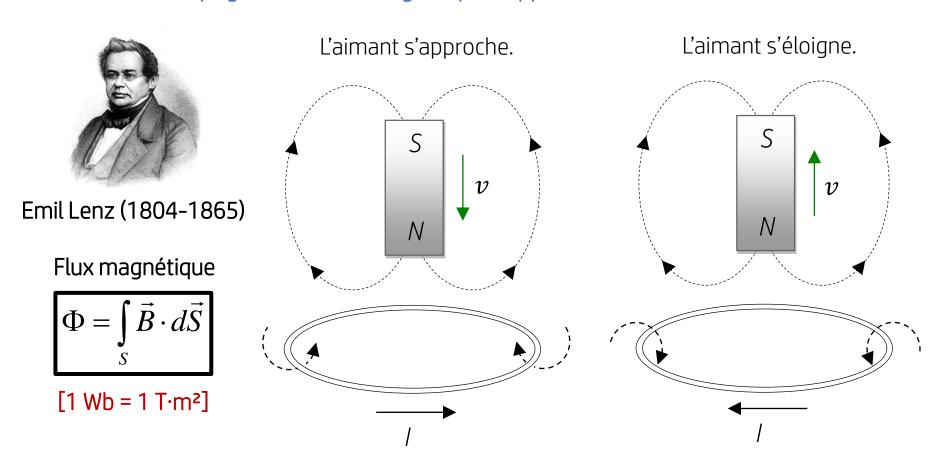
#### Hypothèse des champs quasistatiques

On néglige les interactions en chaîne entre ces deux types d'induction. Par exemple, on considère qu'une variation de  $\Phi_m$  influence  $\vec{E}$ , mais on néglige son influence sur  $\Phi_e$ ,  $\vec{H}$ , etc. Cette hypothèse est valable lorsque les dimensions du système sont petites par rapport à la longueur d'onde des champs.

$$\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow \vec{E}(t) \Rightarrow \frac{d\Phi_e}{dt} \Rightarrow \vec{H}(t) \Rightarrow \frac{d\Phi_m}{dt}$$

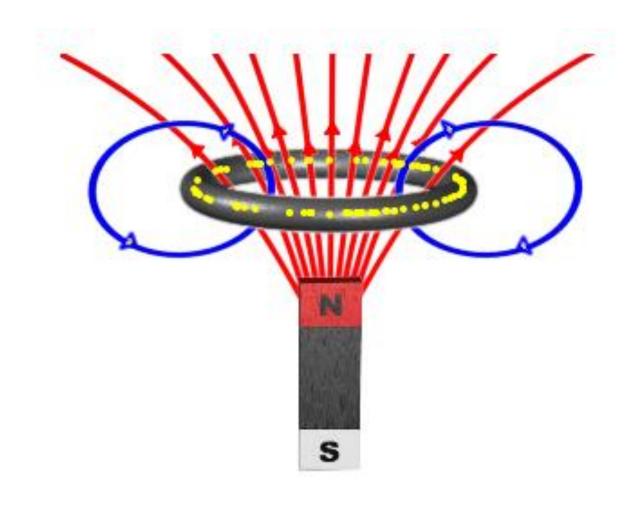
#### Loi de Lenz

Une fluctuation du flux magnétique qui traverse une boucle de courant induit un courant qui génère un flux magnétique s'opposant à la fluctuation initiale.



Le courant induit / produit un champ magnétique qui s'OPPOSE au CHANGEMENT de flux dans la boucle.

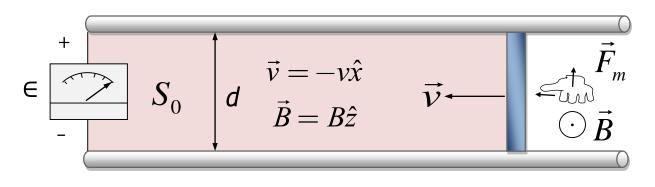
#### Loi de Lenz



Moodle Section 15 – Chap 10 : Loi de Lenz http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/lenzlaw/index.html

## Retour sur une expérience du chapitre 8...

# Comment le flux magnétique varie-t-il dans cette expérience ?





RAPPEL – F.é.m. générée par le mouvement de la tige conductrice (en bleu)

$$\in = vBd$$

Au temps initial, la surface du circuit est  $S_0$  (en rouge).

À un temps t, la nouvelle surface est  $S(t) = S_0 - dvt$ .

Variation du flux magnétique et f.é.m.

$$\Phi(t) = \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS(t) = B(S_0 - dvt)$$



$$\frac{d\Phi}{dt} = -vBd = -\epsilon$$

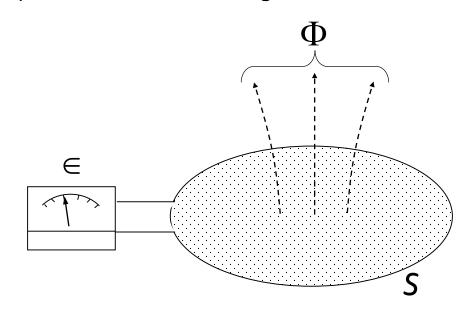
## Loi de Faraday

Une variation de flux magnétique à travers une surface génère une f.é.m.

Loi de Faraday

$$\in = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



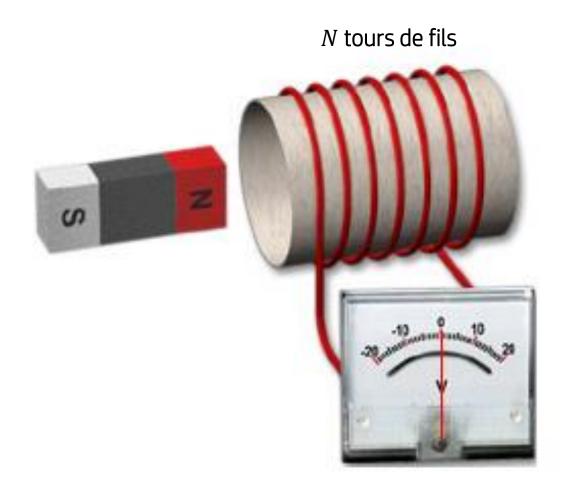
On peut faire varier le flux magnétique de deux façons :

Générateur

On fait varier la surface S dans le temps en maintenant  $\overrightarrow{B}$  constant.

Transformateur
On fait varier la densité de flux
magnétique  $\vec{B}$  dans le temps en
maintenant S constante.

## Loi de Faraday



#### Boucles de courant multiples

Le flux magnétique total  $\Phi$  traverse les N boucles est N fois le flux  $\Phi_{1 \text{ boucle}}$  traversant une seule boucle de surface S. La f.é.m. produite est donc N fois celle qu'une seule boucle produirait. Il faut en tenir compte dans la loi de Faraday :

$$\in = -\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d\Phi_{1\text{boucle}}}{dt}$$

Moodle Section 15 – Chap 10 : Loi de Faraday (aimant) http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/faraday2/index.html

## Exemple 10.1 – Interférence sur un circuit imprimé

Quelle est la f.é.m. induite dans le circuit AB due au courant I(t) circulant dans le fil ?

#### Information connue

Courant dans le fil  $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ 

Géométrie (dimensions du circuit AB et distance au fil)

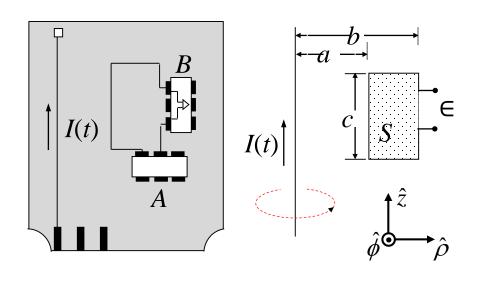
#### Information recherchée

F.é.m. aux bornes du circuit  $\in = -\frac{d\Psi}{dt}$ 

#### Stratégie de résolution

1. Calculer le champ  $\vec{B}(t)$  produit par le fil

Symétrie :  $\vec{H}(t)$  est orienté selon  $\hat{\phi}$  et sa valeur est constante à une distance  $\rho$  du fil. On peut donc utiliser le théorème d'Ampère.



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi \rho H = I(t)$$

$$\vec{H} = \frac{I(t)}{2\pi\rho}\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

## Exemple 10.1 – Interférence sur un circuit imprimé

Quelle est la f.é.m. induite dans le circuit AB due au courant I(t) circulant dans le fil ?

#### Stratégie de résolution

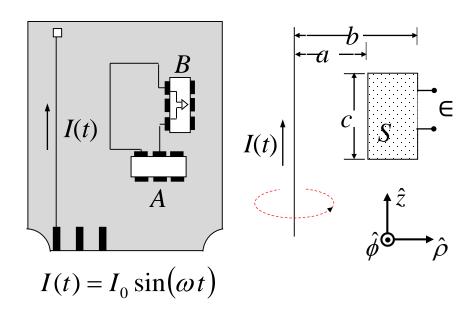
2. Calculer le flux magnétique traversant le circuit AB.

$$\Phi = \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{z=0}^{c} \int_{\rho=a}^{b} \left( \frac{\mu_{0} I(t) \hat{\phi}}{2\pi \rho} \right) \cdot \left( d\rho \, dz \, \hat{\phi} \right)$$

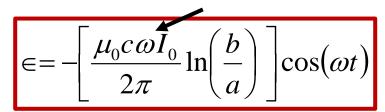
$$\Phi = \frac{\mu_0 c}{2\pi} I(t) \ln \left(\frac{b}{a}\right)$$

3. Calculer la f.é.m. aux bornes du circuit AB.

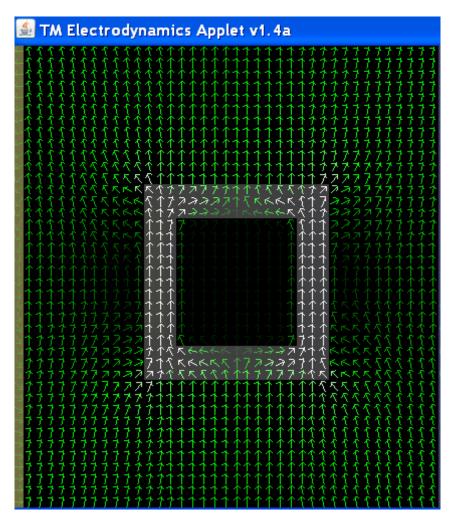
$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 c}{2\pi} I_0 \sin(\omega t) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right) \qquad \epsilon = -\left[ \frac{\mu_0 c \omega I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$



L'amplitude de la f.é.m. augmente avec la fréquence!

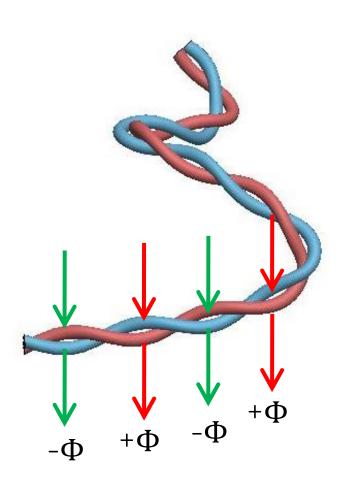


## Blindage magnétique



Moodle Section 15 – Chap 11 : Champs dynamiques 2D (*magnetic shielding 4*) http://www.falstad.com/emwave2/

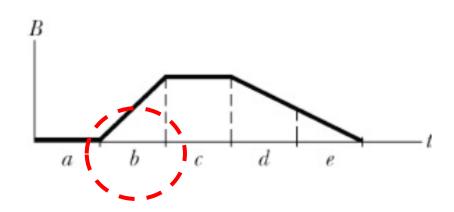
# Protection contre l'interférence Paire de fils torsadés



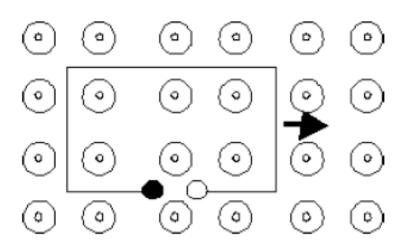
$$\epsilon = \sum -\frac{d\Phi}{dt} \approx 0$$

## Quiz!

1. Dans quelle période la f.é.m. induite est-elle la plus grande ?



2. La f.é.m. induite aux bornes de la boucle lorsqu'elle est déplacée dans un champ magnétique uniforme est :

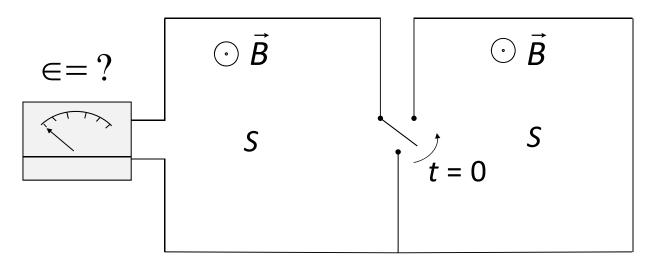


- a. alternative
- b. positive à droite et négative à gauche
- c. négative à droite et positive à gauche
- d. nulle

#### Quiz!

Quelle est la f.é.m. induite aux bornes du circuit lorsque l'interrupteur est déplacé pour agrandir la boucle du circuit ?

#### Générateur (surface change, $\vec{B}$ est constant)



Il n'y a pas de f.é.m. induite en déplaçant l'interrupteur ( $\in = 0$ ).

Pour avoir une f.é.m., il faut que le changement de surface de la boucle soit causé par le mouvement d'un conducteur (de charges), ce qui n'est pas le cas ici.

Si on pouvait générer une f.é.m. en actionnant simplement un interrupteur, la conservation de l'énergie ne serait pas respectée!

#### Inductance mutuelle

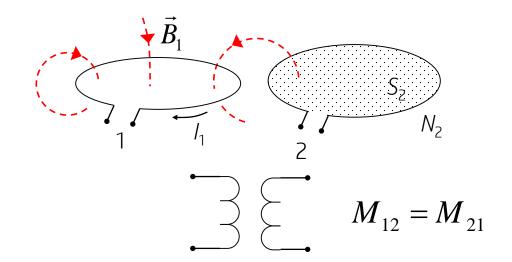
L'inductance mutuelle permet de relier le courant circulant dans un circuit primaire (1) à la f.é.m. induite dans un circuit secondaire (2).

Courant  $I_1$ 

Densité de flux  $\vec{B}_1$ 

Flux  $\Phi_{12}$  associé à  $\overrightarrow{B}_1$  qui traverse  $S_2$ 

F.é.m. aux bornes de  $S_2$ 



Inductance mutuelle

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

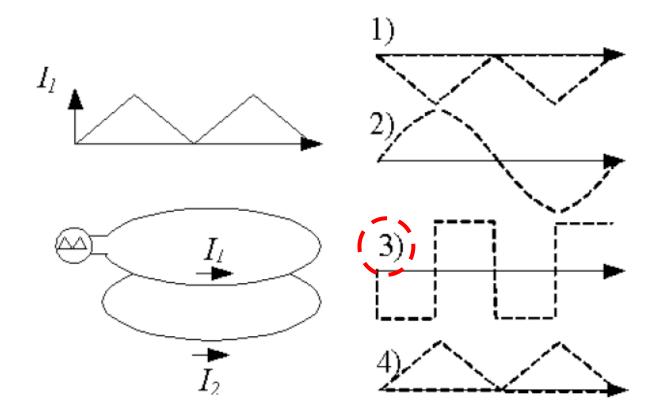
[1 henry = 1 H = 1 V·s/A]

#### Cette définition permet d'écrire :

# Quiz!

Un courant  $I_1(t)$  circule dans une boucle conductrice circulaire.

Quel graphique représente le courant  $I_2(t)$  circulant dans une seconde boucle identique à la première et placée juste au-dessous de celle-ci ? Le sens positif (polarité) des courants est indiqué par les flèches.



# Exemple 10.4 – Transformateur

Quelle est l'inductance mutuelle entre le primaire et le secondaire du transformateur ?

Quelle est la f.é.m. induite aux bornes du secondaire lorsqu'un courant  $I_1 \sin(\omega t)$  circule dans le primaire ?

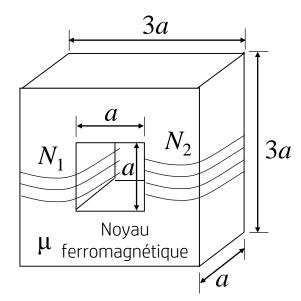
#### Hypothèse

Il n'y a pas de fuite de flux magnétique. Tout le flux produit par le primaire traverse le secondaire.

#### Stratégie de résolution

3. Inductance mutuelle

- 1. Réluctance du transformateur Longueur moyenne  $L=4\times 2a=8a$ , section  $S=a^2$ .
- 2. Flux magnétique commun aux deux circuits
  - $M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu a N_1 N_2}{8}$



$$\Re = \frac{L}{\mu S} = \frac{8a}{\mu a^2} = \frac{8}{\mu a}$$

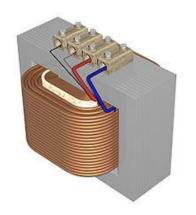
$$\Phi_{12} = \Phi_1 = \frac{V_{m1}}{\Re} = \frac{N_1 I_1}{\Re} = \frac{\mu a N_1 I_1}{8}$$

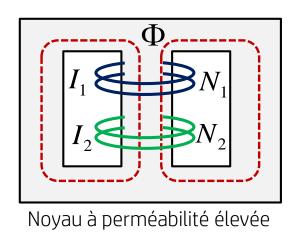
4. F.é.m. induite au secondaire

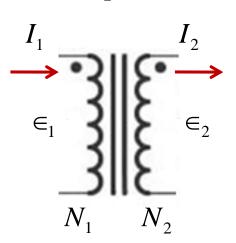
$$\epsilon_2 = -M_{12} \frac{dI_1}{dt} = \frac{\mu a N_1 N_2}{8} I_1 \omega \cos(\omega t)$$

#### Transformateur idéal

Dans un transformateur idéal, tout le flux magnétique produit le primaire comportant  $N_1$  tours est intercepté par le secondaire comportant  $N_2$  tours.







Selon la loi de Faraday, la f.é.m. (tension) induite au secondaire est :

$$\epsilon_2 = -N_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Comme la même quantité de flux traverse le primaire, on a :

$$\in_1 = -N_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

En prenant le rapport de ces deux équations, on obtient :

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

#### Inductance (auto-inductance)

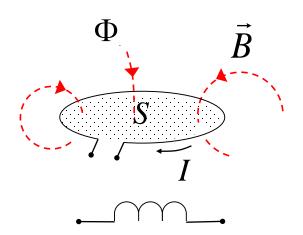
Le flux magnétique produit par le courant circulant dans un circuit induit une f.é.m. aux bornes de ce même circuit. Cette f.é.m. s'oppose au courant déjà existant.

Courant I

Densité de flux  $\vec{B}$ 

Flux  $\Phi$  associé à  $\overrightarrow{B}$  qui traverse S

F.é.m. aux bornes de S



Inductance

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

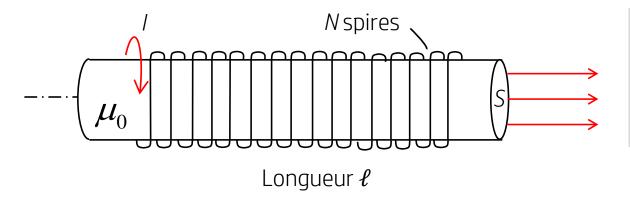
[1 henry = 1 H = 1 V·s/A]

#### Cette définition permet d'écrire :

## Exemple – Inductance d'un solénoïde

Quelle est l'inductance d'un solénoïde de section S et de longueur  $\ell$  ayant N spires  $(n=N/\ell)$  spires par mètre) dans lesquelles circule un courant I?

On suppose que le solénoïde est long par rapport aux dimensions de sa section.



RAPPEL Densité de flux d'un solénoïde  $B_z=\mu_0rac{NI}{\ell}=\mu_0nI$ 

Flux traversant le solénoïde

$$\Phi = \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_z S$$

$$\Phi = \mu_0 nIS$$

Inductance du solénoïde

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_0 NnS = \mu_0 n^2 \ell S$$

Plus le solénoïde est long, plus l'inductance est élevée.

#### Inductance et énergie

L'inductance permet de calculer l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique.

Inductance

F.é.m. aux bornes de l'inductance

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

$$\in = -L \frac{dI}{dt}$$

L'énergie U emmagasinée dans le champ magnétique est l'intégrale de la puissance par rapport au temps. En appliquant l'équation de la puissance  $P = VI = \in I$ , on prend la valeur absolue de la f.é.m., tout comme on prendrait la valeur absolue de la différence de potentiel.

$$U = \int Pdt = \int \in Idt = \int \left(L\frac{dI}{dt}\right)Idt = \int LIdI = \frac{1}{2}LI^{2}$$

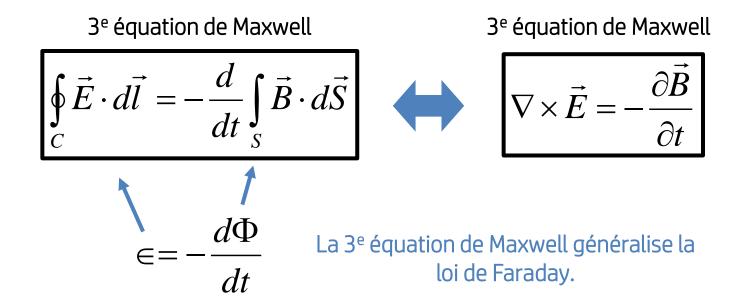


Énergie emmagasinée par une inductance  $U = \frac{1}{2}LI^2$ 

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

#### 3<sup>e</sup> équation de Maxwell

Une variation du flux magnétique génère un champ électrique non conservatif.



#### Remarques sur la nature du champ $\vec{E}$ non conservatif induit

- Une distribution de charges électriques crée un champ  $ec{E}$  conservatif ;
- Lorsque la densité de flux magnétique varie, un champ  $\vec{E}$  non conservatif apparaît, même en l'absence de charges électriques (dans le vide, par exemple). Ce champ est associé à une f.é.m. La f.é.m. existe indépendamment de la présence de charges.

# Exemple 10.6 – Capacité parasite d'un solénoïde

Un courant alternatif circulant dans un solénoïde produit un flux magnétique qui varie dans le temps, ce qui engendre un champ électrique dans le solénoïde.

#### RAPPEL

Densité de flux d'un solénoïde

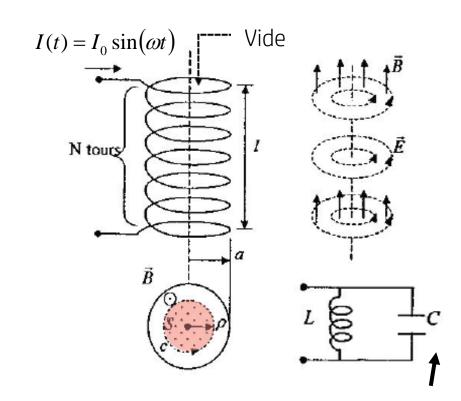
$$B_z = \mu_0 \frac{NI}{\ell} = \mu_0 nI$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$2\pi\rho E = -\frac{d}{dt} \left( \mu_0 nI(t) \cdot \pi \rho^2 \right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} \rho \cos(\omega t) \hat{\phi}$$

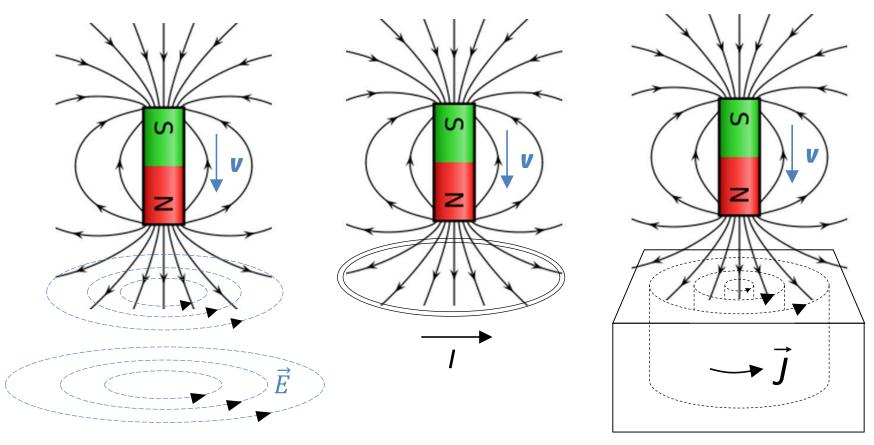
Ce champ existe dans le vide.



Ce champ électrique emmagasine de l'énergie : on le modélise comme une capacité parasite en parallèle avec l'inductance du solénoïde.

#### Courants de Foucault

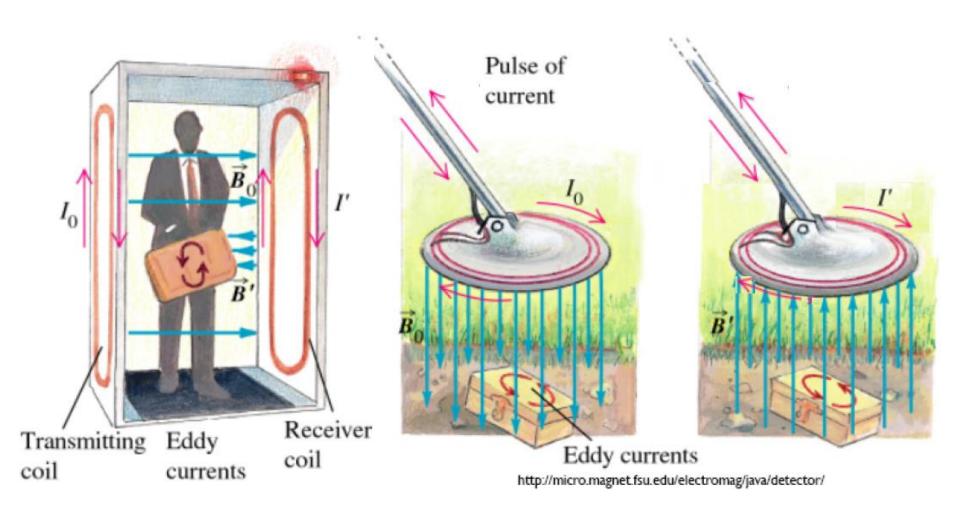
Le champ électrique non conservatif prédit par la 3<sup>e</sup> équation de Maxwell existe indépendamment de la matière qui se trouve dans l'espace qu'il occupe.



Le déplacement de l'aimant crée une variation de flux magnétique et donc un champ  $\vec{E}$  non conservatif.

Les courants de Foucault forment des boucles dans le conducteur.

#### Courants de Foucault – Détection de métaux



## Courants de Foucault – Chauffage par induction



# Exemple 10.7 – Résistance parasite d'un solénoïde

Si un conducteur est placé dans le solénoïde, les courants de Foucault circulant dans le conducteur créent des pertes ohmiques que l'on modélise comme une résistance parasite.

#### **RAPPEL**

Champ électrique non conservatif à l'intérieur du solénoïde

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 N I_0 \omega}{2\ell} \rho \cos(\omega t) \hat{\phi}$$

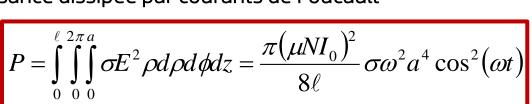
En présence d'un matériau magnétique à l'intérieur du solénoïde, il faut remplacer  $\mu_0$  par  $\mu$ .

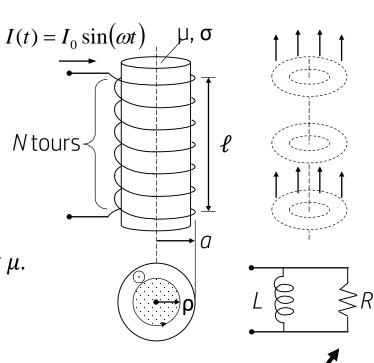
$$\vec{E} = -\frac{\mu \pi N I_0 \omega}{2 \ell} \rho \cos(\omega t) \hat{\phi}$$

RAPPEL – Chapitre 4 Pertes ohmiques

$$P = \int_{V} \sigma E^2 dV$$

Puissance dissipée par courants de Foucault





## Puissance dissipée par courants de Foucault

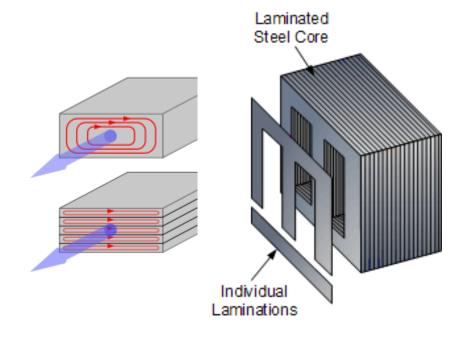
Comment réduire les pertes par courant de Foucault ?

$$P = \frac{\pi (\mu N I_0)^2}{8\ell} \sigma \omega^2 a^4 \cos^2(\omega t)$$

Diminuer la conductivité σ : noyaux de ferrite (RF)

Diminuer les dimensions (a) des boucles de courant : noyau de transformateur laminé

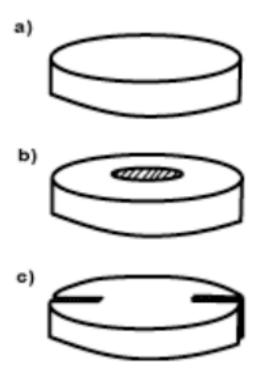




#### Quiz!

Trois conducteurs de même conductivité sont placés dans un champ magnétique vertical, uniforme, qui varie en fonction du temps. La puissance dissipée par courants de Foucault à l'intérieur de chaque pièce dépend de sa géométrie.

Classez les pièces en ordre croissant de puissance dissipée par courants de Foucault.



Réponse C < B < A

# Récapitulatif des équations de Maxwell jusqu'à présent

L'étude de la loi de Faraday a permis de généraliser la 3<sup>e</sup> équation de Maxwell aux champs qui varient dans le temps.

l Théorème de Gauss

II Champ magnétique solénoïdal

III Équation de Maxwell-Faraday Une variation de flux magnétique produit un champ électrique.

IV Théorème d'Ampère

$$\oint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\oint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

James Clerk Maxwell observe un paradoxe : par symétrie, une variation de flux électrique ne devrait-elle pas produire un champ magnétique ?

## Le postulat de Maxwell : le courant de déplacement

James. C. Maxwell suppose que le théorème d'Ampère est incomplet : il ajoute un terme qui tient compte de la variation de flux électrique.

Théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Théorème d'Ampère généralisé / d'Ampère-Maxwell (4<sup>e</sup> équation de Maxwell)

$$\left| \oint_{C} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_{S} \left( \vec{J}_{c} + \vec{J}_{d} \right) \cdot d\vec{S} \right|$$

 $\vec{J_c}$  : densité de courant de conduction

 $\vec{J}_d$ : densité de courant de déplacement

Densité de courant de déplacement

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

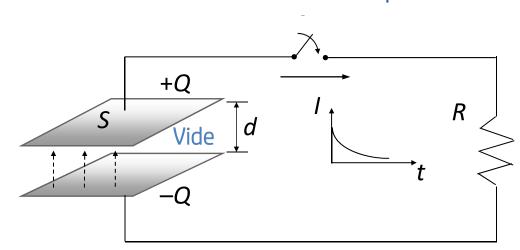
Le postulat de Maxwell a été confirmé expérimentalement par Heinrich Hertz (chapitre 11).

#### Densité de courant de déplacement

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$E = \frac{V}{d}$$



Le condensateur est initialement chargé, puis on le relie à une résistance : qu'arrive-t-il ? Le condensateur se décharge et un courant (de conduction) circule à travers la résistance.

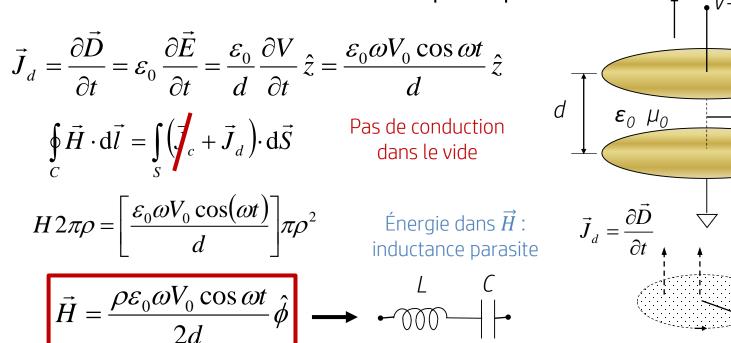
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{\mathrm{d}(Ed)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 S\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{J}_d = \frac{I}{S}\hat{n} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

La variation de  $\overrightarrow{D}$  à l'intérieur du condensateur est associée au déplacement des charges libres sur les armatures. Un courant de déplacement circule à l'intérieur du condensateur, même si les armatures sont séparées par du vide !

Comment prouver son existence ? S'il existe,  $\vec{J}_d$  devrait produire son propre champ magnétique...

# Exemple 10.8 – Inductance parasite d'un condensateur

Quel est le champ magnétique produit par le courant de déplacement circulant entre les armatures du condensateur séparées par du vide ?



Quelle est la f.é.m. induite aux bornes d'une petite boucle de surface S à une distance a du centre du condensateur?

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\mu_{0} S \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon_{0} \mu_{0} \omega^{2} SaV_{0} \sin(\omega t)}{2d}$$

Hypothèse :  $\vec{H}$  est à peu près constant sur la petite surface S.

 $\vec{H} = H\hat{\phi}$ 

# Équations de Maxwell

Voici enfin les quatre équations de Maxwell tout à fait générales!

I Théorème de Gauss

$$\oint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

II Champ magnétique solénoïdal

$$\oint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

III Équation de Maxwell-Faraday Une variation de flux magnétique produit un champ électrique.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

IV Théorème d'Ampère généralisé Une variation de flux électrique produit un champ magnétique.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Quelle est la solution aux équations de Maxwell dans le vide ? Chapitre 11!