



POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

PHS1102
CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Laboratoire I : Mesure de la permittivité

Alexandre Dorais (1846642)
Gabriel-Andrew Pollo-Guilbert (1837776)

Remis à
Raouafi HAYKEL

10 février 2017

Table des matières

Table des matières	I
Table des figures	II
Liste des tableaux	II
1 Méthodologie expérimentale	1
1.1 Méthode directe	1
1.2 Méthode comparative	2
1.3 Mesure de la capacité de l'air	3
2 Présentation des résultats	3
3 Discussion	4
3.1 Perte de courant dans le voltmètre	4
3.2 Propagation des incertitudes	5
3.3 Domaines de validité	5
3.4 Identification des diélectriques	5
3.5 Causes d'erreurs	6
4 Conclusion	6
Références	7
Annexe	8
A Tables	8
B Calcul d'une capacité avec la méthode directe	8
C Calcul d'une capacité avec la méthode comparative	8
D Calcul d'une permittivité relative	9
E Calcul de l'air du condensateur à distance variable	9
F Calcul de la capacité théorique du condensateur à l'aire	9

Table des figures

1	Condensateur à écartement variable	1
2	Circuit de la méthode directe	2
3	Circuit de la méthode comparative	2

Liste des tableaux

1	Capacités calculés	3
2	Dimensions du condensateur à distance variable	3
3	Permittivités relatives calculées	4
A	Prises de mesures brutes	8

Les condensateurs sont utilisés fréquemment en électronique afin d’accomplir plusieurs tâches. Ils peuvent stabiliser des tensions variables, filtrer certaines fréquences d’un signal, et ont bien d’autres applications. La capacité d’un condensateur permet de prédire son comportement dans toutes ces situations. Il est donc nécessaire de savoir calculer et mesurer cette capacité. Cette dernière dépend des dimensions du condensateur et de la permittivité diélectrique du matériau entre les armatures. Dans ce laboratoire, nous chercherons donc à déterminer la capacité de condensateurs contenant différents matériaux diélectriques, avec une méthode directe et une méthode comparative, pour ensuite identifier les matériaux diélectriques utilisés en calculant leur permittivité.

1 Méthodologie expérimentale

Il est possible de mesurer la capacité d’un condensateur avec un circuit à courant continu. Ces méthodes impliquent souvent le besoin de mesurer le temps de charge du condensateur, ce qui ajoute des contraintes de temps considérables. Par conséquent, il est souvent préférable de déterminer la capacité du condensateur en courant alternatif. Dans ce laboratoire, on utilise deux de ces méthodes, soit la méthode directe et la méthode comparative.

Dans les deux cas, un générateur de fréquence, soit un FG2A, génère une tension maximale de 10 V à une fréquence de 800 Hz. Un condensateur à écartement variable est utilisé afin de pouvoir échanger le diélectrique à l’intérieur.

Celui-ci est formé de deux plaques circulaires séparées par le diélectrique d’intérêt comme le montre la figure 1. Le diélectrique étant mince, on le mesure à priori à l’aide d’une pince micrométrique. Ensuite, on sépare le condensateur pour insérer le diélectrique en s’assurant de bien évacuer l’air avec une bonne pression.

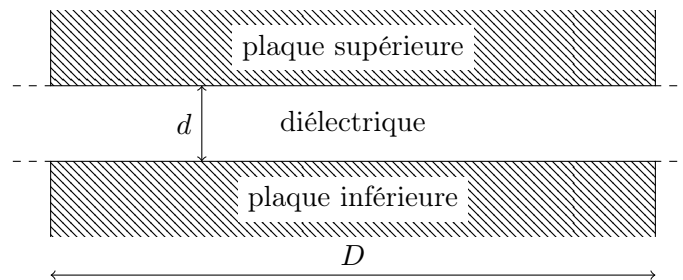


FIGURE 1 – Condensateur à écartement variable de diamètre D séparé par une distance d

1.1 Méthode directe

La méthode directe est très similaire à la mesure d’une résistance. Elle consiste à calculer la capacité à l’aide du courant efficace et de la tension efficace aux bornes du condensateur. Par conséquent, on branche un voltmètre en parallèle et un ampèremètre en série, comme le montre le schéma du circuit à la figure 2.

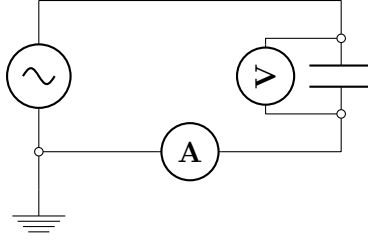


FIGURE 2 – Branchement du circuit pour la mesure directe d’une capacité

Une fois le circuit en marche, on mesure la tension efficace à l’aide du voltmètre, dans notre cas un multimètre DM-351, et le courant efficace à l’aide de l’ampèremètre, soit un DM-8034. La capacité C est alors donnée par

$$C = \frac{I}{\omega V}, \quad (1)$$

où $\omega = 2\pi f$ est l’impédance qui dépend de la fréquence f , I et V la tension et le voltage respectivement maximal ou efficace.

1.2 Méthode comparative

La méthode comparative consiste à utiliser un circuit avec une résistance et un condensateur en série. On mesure premièrement le courant dans le circuit lorsque le condensateur est court-circuité pour ensuite mesurer le courant lorsque le condensateur est inclut. La figure 3 montre le schéma du circuit, la double flèche montre le court-circuit du condensateur.

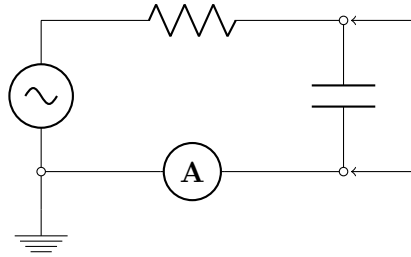


FIGURE 3 – Branchement du circuit pour la mesure comparative d’une capacité

Une fois le circuit en marche, les deux courants sont mesurés avec le même ampèremètre que la section précédente. Avec la valeur de la résistance R et de l’impédance $\omega = 2\pi f$, la capacité peut être calculée avec

$$C = \frac{1}{R\omega\sqrt{(I_0/I)^2 - 1}}, \quad (2)$$

où I_0 est le courant court-circuité et I le courant avec le condensateur.

1.3 Mesure de la capacité de l'air

Puisqu'il peut s'avérer difficile de mesurer l'épaisseur de l'air entre les deux plaques, trois petits supports de plastique furent placés entre les celles-ci afin d'offrir un support solide. Par conséquent, la distance des plaques est l'épaisseur de ces supports.

2 Présentation des résultats

Les mesures recueillies sont dans la table A en annexe. La table 1 montre les capacités calculées à l'aide des équations (1) et (2) pour les méthodes directe et comparative respectivement.

TABLE 1 – Capacités calculées

Diélectrique	Méthode Directe		Méthode Comparative	
	Capacité (nF)	Écart Relatif (%)	Capacité (nF)	Écart Relatif (%)
A	3,6 ± 0,1	3	3,3 ± 0,5	14
B	4,2 ± 0,1	3	3,7 ± 0,6	16
C	0,67 ± 0,03	5	0,63 ± 0,04	7
Air	0,46 ± 0,02	5	0,43 ± 0,03	7

La capacité C dans un condensateur plan idéal construit à partir de deux plaques parallèles d'aire A séparées par une distance d est

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}, \quad (3)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et ϵ_r la permittivité relative du diélectrique entre les plaques. Les dimensions du condensateur à distance variable sont montrées à la table 2 pour chaque diélectrique utilisé.

TABLE 2 – Dimensions du condensateur à distance variable

Diélectrique	Diamètre (mm±1)	Aire (cm²±4)	Épaisseur (mm±0.01)
A	226	401	0,10
B			0,13
C			1,59
Air			0,87

Or, la permittivité relative de l'air est approximativement $\epsilon_{\text{air}} \approx 1$ de sorte que la capacité théorique du condensateur avec l'air comme diélectrique est de $(0,408 \pm 0,008)$ nF.

En réarrangeant l'équation (3), on obtient la permittivité relative, soit

$$\epsilon_r = \frac{Cd}{\epsilon_0 A}. \quad (4)$$

La table 3 montre les permittivités relatives calculées avec l'équation (4) et les données de la table 1 et de la table 2.

TABLE 3 – Permittivités relatives calculées

Diélectrique	Méthode Directe		Méthode Comparative	
	Permittivité Relative	Écart Relatif (%)	Permittivité Relative	Écart Relatif (%)
A	1,0 ± 0,1	14	0,9 ± 0,2	25
B	1,5 ± 0,2	12	1,4 ± 0,3	25
C	3,0 ± 0,2	7	2,8 ± 0,2	8
Air	1,12 ± 0,08	7	1,1 ± 0,1	9

3 Discussion

Chacune des méthodes employées lors de ce laboratoire a ses forces et ses faiblesses, et mérite d'être utilisée dans certains cas plutôt que d'autres.

3.1 Perte de courant dans le voltmètre

D'une part, la méthode directe ne prend pas en compte les pertes de courant dans le voltmètre. En effet, le circuit à la figure 2 est conçu de sorte que la différence de potentiel aux bornes du condensateur est mesurée avec une bonne précision au profit d'une moins bonne précision sur le courant du condensateur. Ce dernier mesuré à l'ampèremètre n'est pas exactement le courant qui traverse le condensateur. Cela est dû à une perte dans le voltmètre, mis en parallèle avec la composante d'intérêt. Par contre, si la résistance interne du voltmètre est très grande par rapport à l'impédance du condensateur, cet effet est négligeable.

Toutefois, si la capacité que l'on désire mesurer est très petite, le condensateur aura une impédance élevée, donc un plus grand courant se dirigera dans le voltmètre au lieu du condensateur. Puisque la capacité est calculée avec le courant mesuré à l'ampèremètre, au lieu du courant traversant le condensateur, il en résulte qu'elle sera surévaluée. Cette hypothèse est confirmée par la mesure du condensateur à l'air. En effet, la capacité théorique de $(0,408 \pm 0,008)$ nF est inférieure à la capacité $(0,46 \pm 0,02)$ nF mesurée avec la méthode directe.

3.2 Propagation des incertitudes

D'autre part, il faut se méfier des condensateurs à grande capacité lorsque la méthode comparative est utilisée. Plus la capacité que l'on veut mesurer est grande, plus le rapport des courants I_0 et I se rapproche de 1. Par conséquent, le dénominateur de l'équation (2) tend vers 0. Étant donné qu'on se rapproche d'une division par un dénominateur nulle, les incertitudes sur les mesures de courant auront une grande influence sur celle de la capacité calculée. On observe que les rapports I_0/I des matériaux A et B sont très près de 1. Par conséquent, les écarts relatifs sont plus élevés pour ceux-ci que pour les deux autres, auxquelles les rapports I_0/I sont plus élevés.

De plus, l'équation (2) de la méthode comparative dépend de plus de variables que l'équation (1) de la méthode directe. Les incertitudes sur chacune de ces variables sont comparables, alors celle de la capacité calculée avec la méthode comparative devrait être légèrement plus élevée que celle calculée avec la méthode directe. Ces résultats sont observables au tableau 1.

3.3 Domaines de validité

À partir de ces observations, on conclut que les domaines de validité de nos deux techniques sont complémentaires. Si une capacité plus grande doit être mesurée, la méthode directe devrait être favorisée, car elle offrira une plus grande précision tout en diminuant les incertitudes par rapport à la méthode comparative.

De l'autre côté, la méthode comparative aura plus de succès si la capacité à mesurer est plus petite. L'exactitude de la valeur obtenue sera meilleure par rapport à la méthode directe qui aurait surévalué cette valeur. Il est difficile de définir précisément la frontière entre les deux domaines de validité. Par contre, on observe que des capacités de l'ordre du nanofarad sont à la limite entre les deux domaines.

En somme, les capacités mesurées dans le contexte de ce laboratoire sont au plus de l'ordre du nanofarad. Il serait donc plus approprié d'utiliser les capacités calculées par méthode comparative pour déterminer les permittivités relatives et identifier les matériaux inconnus.

3.4 Identification des diélectriques

Ce faisant, nous sommes arrivés à calculer les permittivités relatives des différents matériaux inconnus et de l'air. Ces valeurs sont affichées à la table 3, sous la colonne *permittivité relative* de la *méthode comparative*.

Toutefois, il est difficile d'identifier le matériau A avec certitude, car une permittivité aussi basse, soit $0,9 \pm 0,2$, n'apparaît dans aucune littérature. En effet, il n'existe aucun matériau ayant une permittivité inférieure à celle du vide. Le diélectrique le plus proche que nous avons trouvé pour le matériau A est de la retaille de papier qui a une permittivité d'environ 1,2, selon une compilation de VEGA Grieshaber KG[4].

Ensuite, nous croyons que le matériau B est du papier d'impression, car sa texture était similaire et sa permittivité de $1,4 \pm 0,3$ inclut une valeur théorique trouvée en ligne. Selon

le *Handbook of Physical Testing of Paper, Vol 2*[2], la permittivité du papier d'impression est d'environ 1,4.

Finalement, nous associons le matériau C à du plexiglas, dû à son apparence de plastique et sa permittivité de $2,8 \pm 0,2$ qui intersecte avec l'intervalle de permittivité des types de plexiglas, soit 2,6 à 2,8, tel que précisé dans la table I.1 du manuel de laboratoire[3].

3.5 Causes d'erreurs

Pour terminer, il demeure des causes d'erreurs communes aux deux méthodes dont nous n'avons pas encore traité, mais qui pourraient avoir influencé les valeurs que nous avons obtenues. D'abord, les échantillons, surtout les plus minces qui semblaient être du papier, n'avaient certainement pas une épaisseur constante sur toute leur surface. Puisque qu'une seule mesure de l'épaisseur fut prise à un endroit de l'échantillon, il est possible que l'épaisseur mesurée pour les échantillons A et B ne soit pas totalement représentative de l'épaisseur réelle. Cela ne devrait tout de même pas occasionner une différence considérable entre notre capacité calculée et la vraie valeur, car l'incertitude serait ajustée de probablement quelques centièmes de millimètres.

Ensuite, la totalité des calculs de capacité négligent les effets de bord, soit les lignes de champ qui se rendent d'une plaque à l'autre par les côtés du condensateur à travers de l'air. Malgré tout, leur effet est négligeable, car la surface de la plaque est vraiment plus grande que l'épaisseur du diélectrique. Donc, le condensateur peut être approximé assez fidèlement par deux plaques infinies. On néglige aussi, pour la mesure de capacité du condensateur avec de l'air, la surface couverte par les petites rondelles. Ces surfaces sont tellement petites par rapport à la surface totale qu'il est justifié de les négliger.

4 Conclusion

Pour conclure, les deux méthodes étudiées pour mesurer une capacité, soit la méthode directe et la méthode comparative, offrent leur régime de fidélité. En effet, elles furent comparées sur la mesure de la capacité d'un condensateur à distance variable avec 4 diélectriques différents entre les plaques. Il en résulte que, dans ce laboratoire, la méthode directe offre une meilleur précision et la méthode comparative une meilleur exactitude. Dans les deux cas, les écarts relatifs sur la capacité étaient considérables de sorte que les résultats sont difficilement significatifs.

Par contre, ils nous ont tout de même permis de pouvoir calculer les permittivités relatives des matériaux inconnus afin d'avoir une bonne idée de la nature des matériaux en question. La propagation des incertitudes des capacités font en sorte qu'il est difficile de d'identifier exactement les diélectriques.

Références

- [1] Eric JONES, Travis OLIPHANT, Pearu PETERSON et al. *SciPy : Open source scientific tools for Python*. (visité le 2017/02/8). 2001. URL : <http://www.scipy.org/>.
- [2] Richard E. MARK et Marcel DEKKER. « Electrical Properties : I. Theory ». In : *Handbook of Physical Testing of Paper, Volume 2*. Marcel Dekker Inc., 2001. Chap. 5.
- [3] Ludvik MARTINU, Dominique SIMON et Jiri CERNY. *Champs  lectromagn tiques - Manuel de laboratoire*. 4   d.  cole Polytechnique de Montréal. 2012.
- [4] VEGA GRIESHABER KG. *List of dielectric constants*. (visit  le 2017/02/8). URL : https://www.vega.com/home_ss/-/media/PDF-files/List_of_dielectric_constants_EN.ashx.

Annexe

A Tables

TABLE A – Prises de mesures brutes

Diélectrique	Méthode Directe		Méthode Comparative			
	I (μA)	V ($\text{V}\pm 0.1$)	I (μA)	I_0 ($\mu\text{A}\pm 1$)	R ($\text{M}\Omega\pm 2$)	f ($\text{Hz}\pm 0.2$)
A	126 \pm 2		59 \pm 1			
B	147 \pm 3	7.0	61 \pm 1	69	100	800.2
C	23,5 \pm 0,8		21,0 \pm 0,6			
Air	16,1 \pm 0,6		14,8 \pm 0,5			

B Calcul d'une capacité avec la méthode directe

Soit le diélectrique A de la table A, alors la capacité est

$$C = \frac{I}{2\pi f V} = \frac{126 \mu\text{A}}{2\pi \cdot 800,2 \text{ Hz} \cdot 7,0 \text{ V}} \approx 3,6 \text{ nF},$$

et l'incertitude est donnée par les dérivées partielles, soit

$$\begin{aligned}
 \delta C &= \left| \frac{\partial C}{\partial I} \right| \delta I + \left| \frac{\partial C}{\partial f} \right| \delta f + \left| \frac{\partial C}{\partial V} \right| \delta V \\
 &= \frac{\delta f |I|}{2\pi f^2 |V|} + \frac{\delta I}{2\pi |V| |f|} + \frac{\delta V |I|}{2\pi V^2 |f|} \\
 &= \frac{0,2 \text{ Hz} \cdot 126 \mu\text{A}}{2\pi \cdot (800,2 \text{ Hz})^2 \cdot 7,0 \text{ V}} + \frac{2 \mu\text{A}}{2\pi \cdot 7,0 \text{ V} \cdot 800,2 \text{ Hz}} + \frac{0,1 \text{ V} \cdot 126 \mu\text{A}}{2\pi \cdot (7,0 \text{ V})^2 \cdot 800,2 \text{ Hz}} \\
 &\approx 0,1 \text{ nF}.
 \end{aligned}$$

C Calcul d'une capacité avec la méthode comparative

Soit le diélectrique B de la table A, alors la capacité est

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{2\pi f R \sqrt{(I_0/I)^2 - 1}} \\
 &= \frac{1}{2\pi \cdot 800,2 \text{ Hz} \cdot 100 \text{ M}\Omega \sqrt{(69 \mu\text{A}/61 \mu\text{A})^2 - 1}} \\
 &\approx 3,7 \text{ nF},
 \end{aligned}$$

et l'incertitude est donnée par les dérivées partielles¹, soit

$$\begin{aligned}
\delta C &= \left| \frac{\partial C}{\partial I_0} \right| \delta I_0 + \left| \frac{\partial C}{\partial I} \right| \delta I + \left| \frac{\partial C}{\partial f} \right| \delta f + \left| \frac{\partial C}{\partial R} \right| \delta R \\
&= \frac{I_0^2 \delta I |I|}{2\pi I^4 \left[1 - (I_0/I)^2 \right]^{3/2} |R| |f|} + \frac{\delta I_0 |I_0|}{2\pi I^2 \left[1 - (I_0/I)^2 \right]^{\frac{3}{2}} |R| |f|} \\
&+ \frac{\delta f}{2\pi f^2 \sqrt{1 - (I_0/I)^2} |R|} + \frac{\delta R}{2\pi R^2 \sqrt{1 - (I_0/I)^2} |f|} \\
&\approx 0,6 \text{ nF}.
\end{aligned}$$

D Calcul d'une permittivité relative

Soit la valeur de la capacité d'un condensateur plan avec le matériau C de la table 1, alors la permittivité relative est

$$\epsilon_r = \frac{Cd}{\epsilon_0 A} = \frac{0,63 \text{ nF} \cdot 1,59 \text{ mm}}{\epsilon_0 \cdot 401 \text{ cm}^2} \approx 2,8,$$

où la distance d provient de la table 2, et l'incertitude est donnée par les dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\delta \epsilon_r &= \left| \frac{\partial \epsilon_r}{\partial C} \right| \delta C + \left| \frac{\partial \epsilon_r}{\partial D} \right| \delta D + \left| \frac{\partial \epsilon_r}{\partial A} \right| \delta A \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \left| \frac{d}{A} \right| \delta C + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \left| \frac{C}{A} \right| \delta d + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{|Cd|}{A^2} \delta A \\
&\approx 0,2.
\end{aligned}$$

E Calcul de l'air du condensateur à distance variable

Soit les dimensions du condensateur à la table 2, alors l'aire d'une surface du condensateur est

$$A = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (226 \text{ mm})^2}{4} = 401 \text{ cm}^2,$$

où d est le diamètre d'une surface. et l'incertitude est donnée par les dérivées partielles

$$\delta A = \left| \frac{\partial A}{\partial d} \right| \delta d = \frac{\pi |d|}{2} \delta d = \frac{\pi \cdot 226 \text{ mm}}{2} \cdot 1 \text{ mm} = 4 \text{ cm}^2.$$

F Calcul de la capacité théorique du condensateur à l'aire

Soit les dimension du condensateur à la table 2, alors la capacité du condensateur à l'air donc les plaques d'aire A sont séparées par une distance d est

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 \cdot 401 \text{ cm}^2}{0,87 \text{ mm}} = 0,408 \text{ nF},$$

1. La totalité des calculs furent exécutés symboliquement [1]. Les équations furent ensuite évaluées avec des valeurs numériques.

où on considère la permittivité de l'aire comme celle du vide ϵ_0 , et l'incertitude est donnée par les dérivées partielles

$$\begin{aligned}
 \delta C &= \left| \frac{\partial C}{\partial A} \right| \delta A + \left| \frac{\partial C}{\partial d} \right| \delta d \\
 &= \frac{\epsilon_0}{|d|} \delta A + \frac{\epsilon_0 |A|}{d^2} \delta d \\
 &= \frac{\epsilon_0}{0,87 \text{ mm}} \cdot 4 \text{ cm}^2 + \frac{\epsilon_0 \cdot 401 \text{ cm}^2}{(0,87 \text{ mm})^2} \cdot 0,01 \text{ mm} \\
 &= 0,008 \text{ nF}.
 \end{aligned}$$