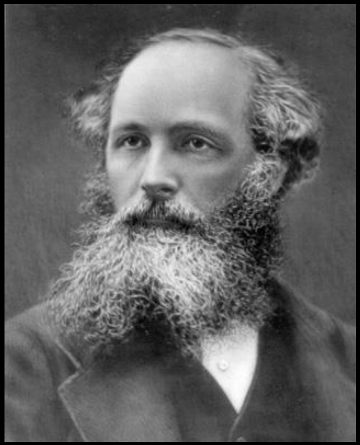
 

Équations de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879)

	Forme intégrale	Forme différentielle
I Théorème de Gauss	$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q$	$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$
II Champ magnétique solénoïdal	$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$	$\nabla\cdot\vec{B} = 0$
III Équation de Maxwell-Faraday	$\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
IV Théorème d'Ampère généralisé	$\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

– PHS1102 –
Champs électromagnétiques

Cours 1

Loi de Coulomb

Champ électrique

Principe de superposition

Flux électrique

Densité de flux électrique

Théorème de Gauss (1re équation de Maxwell)

Objectifs de la semaine

Loi de Coulomb	• Calculer la force entre des charges électriques.
Champ électrique Principe de superposition	• **Calculer le champ électrique dû à une distribution de charges (discrète et continue).** • Calculer la force ressentie par une charge test dans un champ électrique.
Flux électrique	• Décrire les propriétés du flux électrique. • Représenter les lignes de flux électrique.
Densité de flux électrique	• Calculer la densité de flux électrique dans le vide à partir du champ électrique.
Théorème de Gauss (1re équation de Maxwell)	• **Calculer le champ électrique d'une distribution de charges symétrique avec le théorème de Gauss**

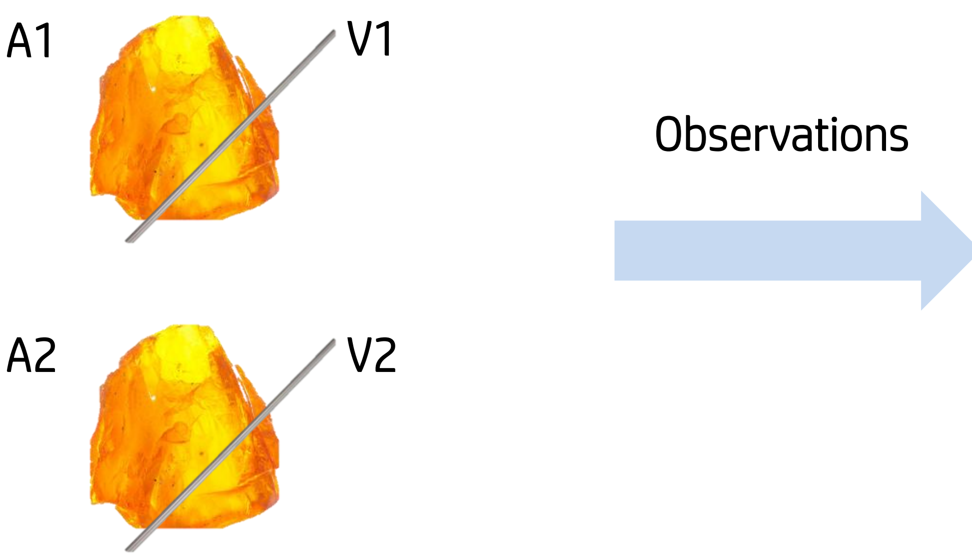
Observations expérimentales de la charge électrique

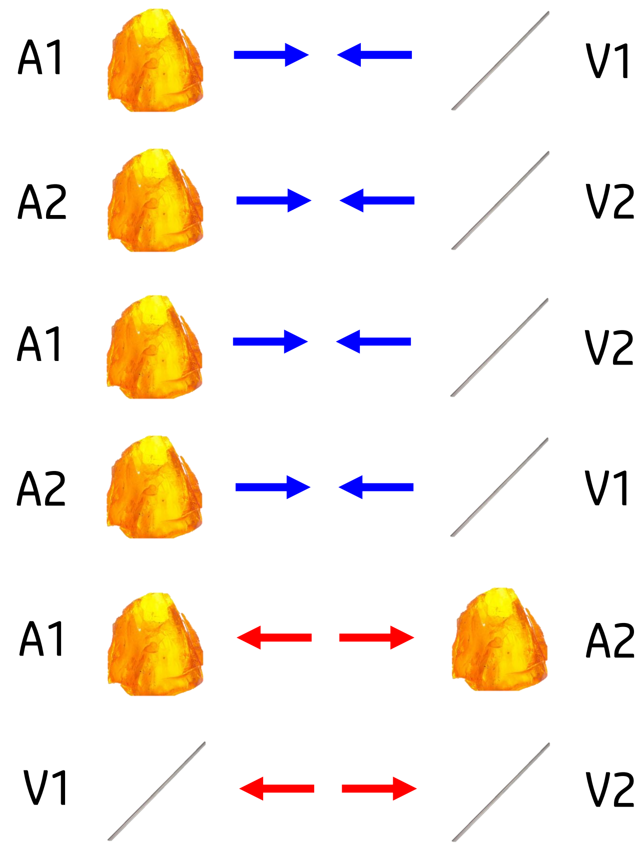
Les Grecs anciens savaient que l'on peut charger **certains objets en les frottant ensemble**.

Une fois chargé, un objet peut alors attirer certains objets légers qui n'ont pas été chargés.

Expérience

On frotte un morceau d'ambre contre un morceau de verre, puis on les sépare. On répète l'expérience une 2e fois avec un autre morceau de d'ambre et un autre morceau de verre.





Certains objets chargés s'attirent tandis que d'autres se repoussent.
Il y a donc deux types de charges : positives et négatives.

Manipuler la charge électrique

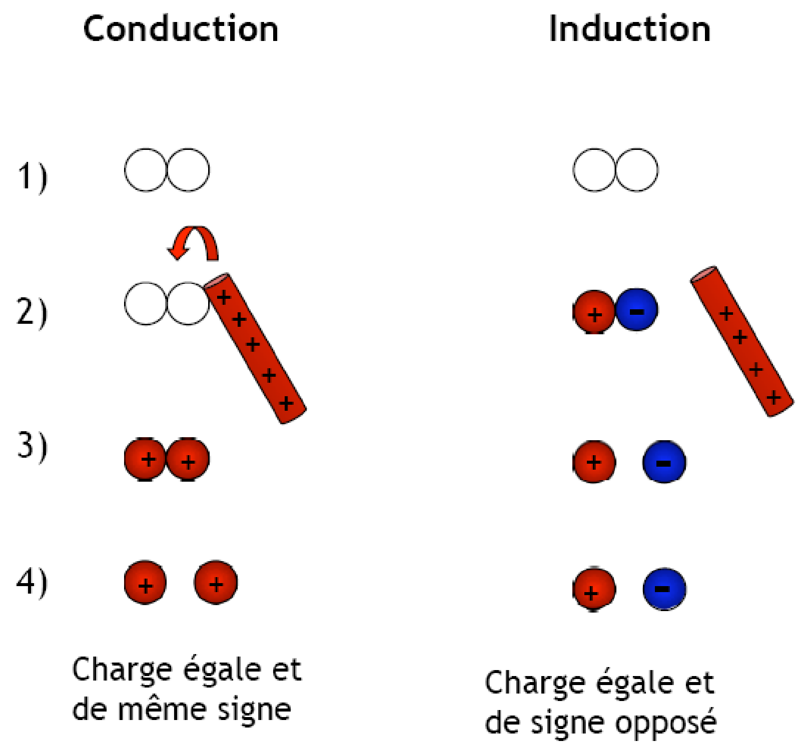
Si l'on possède déjà un objet chargé, on peut l'utiliser pour charger d'autres objets.

Conduction

On met en contact l'objet neutre avec un objet chargé. L'objet neutre acquiert une charge de même signe que celle de l'objet chargé.

Induction

En approchant un objet chargé d'un objet neutre, les charges mobiles de l'objet neutre se déplacent. Les charges de signe opposé à l'objet chargé s'approchent de celui-ci, tandis que les charges de même signe s'en éloignent.



Sphères conductrices

Quelle loi régit la force entre deux objets chargés ?
Comment mesurer cette force ?

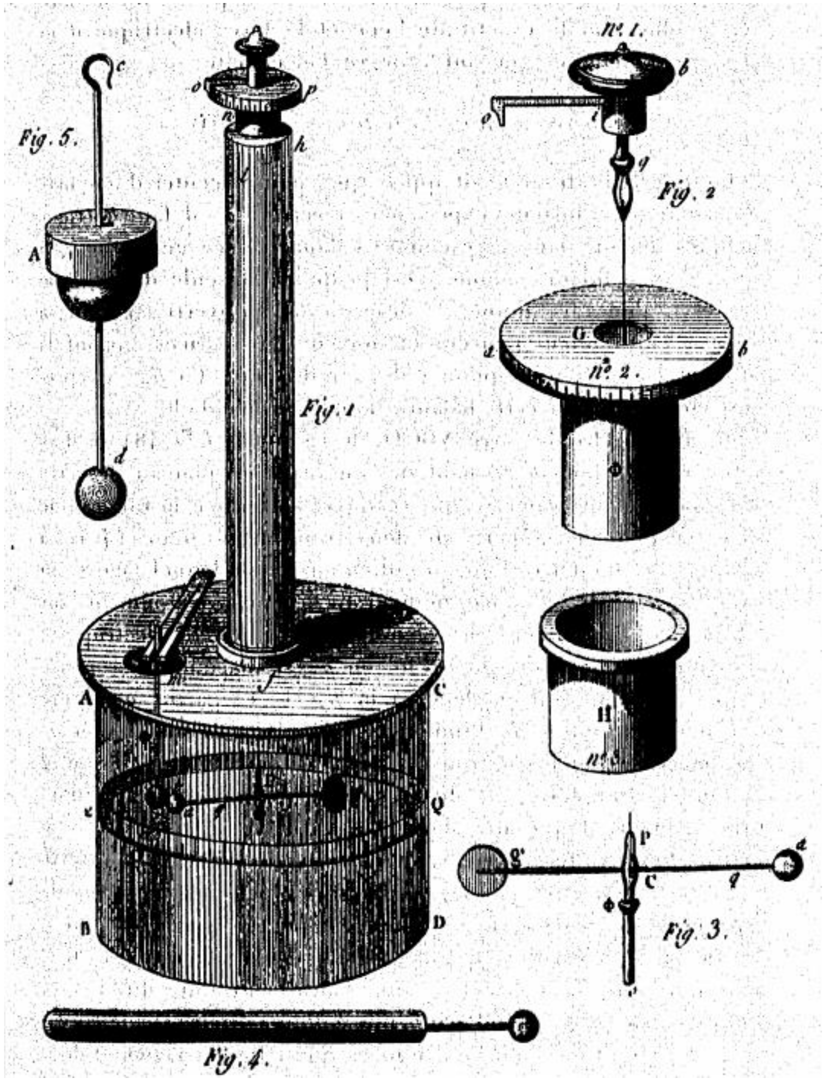
Les expériences de Coulomb

Coulomb construit une **balance de torsion** afin de mesurer la **force entre deux sphères métalliques de charges égales**.

Une sphère est maintenue en position fixe. L'autre sphère est mobile : elle se déplace sur une trajectoire circulaire autour du fil en fonction de la force que le fil exerce sur elle.

L'angle de torsion du fil étant proportionnel à la force qu'il exerce sur la sphère mobile, Coulomb peut mesurer la force entre les deux sphères.

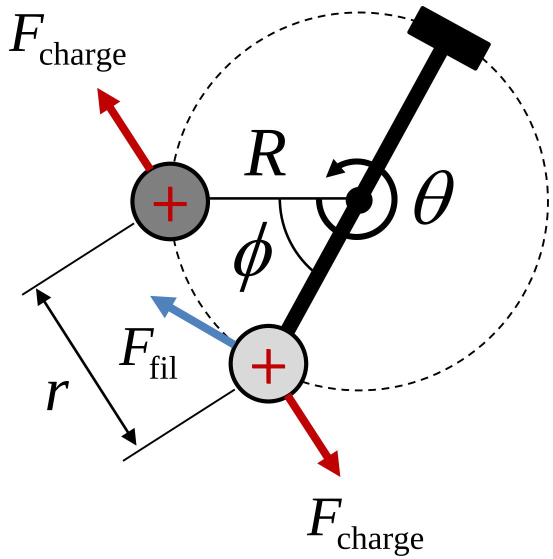
Charles-Augustin Coulomb (France, 1736-1806)



Les expériences de Coulomb

Expérience 1 (effet de la distance)
Les sphères sont chargées également et se repoussent. À l'équilibre, une distance r les sépare de sorte que la force du fil compense exactement la composante de la force électrique qui lui est parallèle. Les sphères sont immobiles.

$$r = 2R\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \qquad F_{\text{fil}} \propto \theta$$



Quand ϕ (≈ distance entre les charges) est réduit de moitié, θ (force) quadruple.

Données historiques recueillies par Coulomb

Mesure	Angle ϕ entre les charges (°)	Angle θ de torsion du fil (°)
1	36	36
2	18	144
3	8,5	576

Coulomb conclut que la force entre deux charges est **inversement proportionnelle au carré de la distance entre les charges**.

Les expériences de Coulomb

Expérience 2 (effet de la charge)

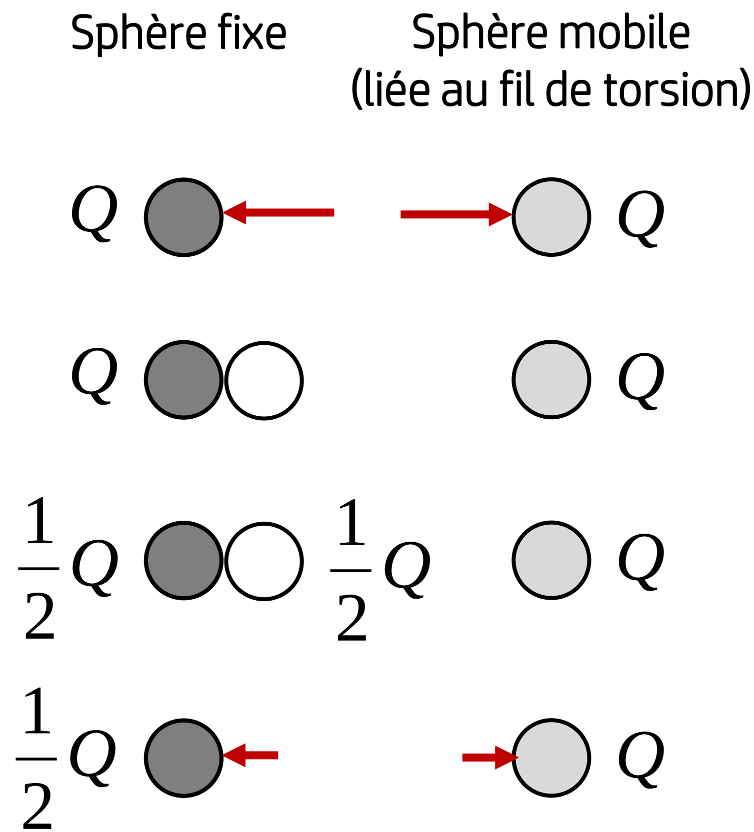
Étape 1 : Les deux sphères sont chargées avec la même charge Q. On mesure l'angle et la distance.

Étape 2 : La sphère fixe est mise en contact avec une 3^e sphère neutre identique.

Quelle est la nouvelle charge de la sphère fixe ?

La charge totale se répartit également entre les deux sphères identiques (conduction).

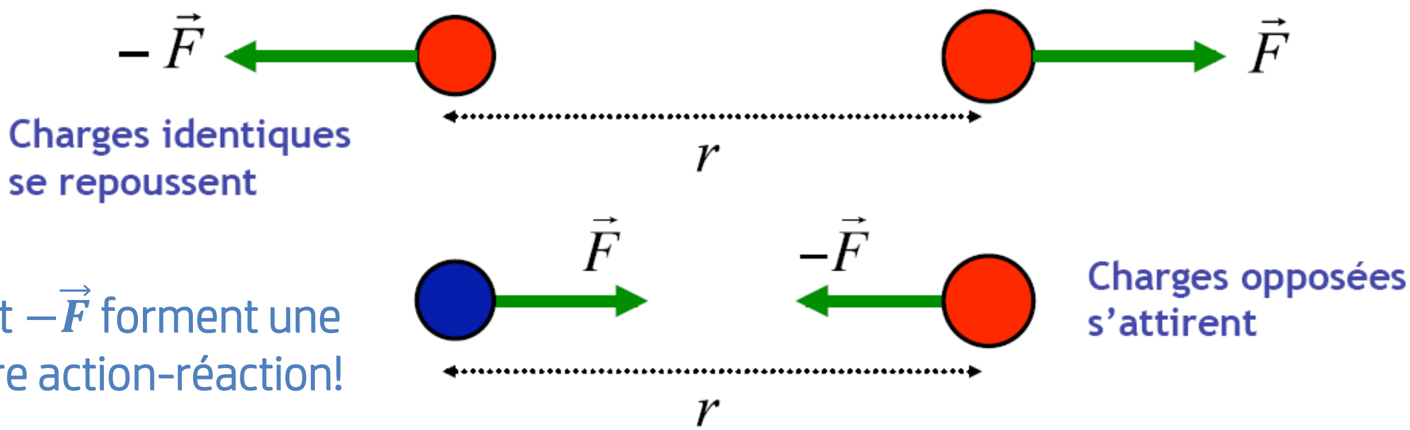
Étape 3 : On mesure à nouveau l'angle et la distance avec la charge de la sphère fixe réduite de moitié.



Les mesures de Coulomb lui permettent de conclure que la force entre deux charges est **proportionnelle au produit des charges**.

Résumé des observations expérimentales

1. Il existe deux types de charges (positives et négatives). Les charges de même signe se repoussent tandis que les charges de signe opposé s'attirent.



$\vec{\boldsymbol{F}}$ et $-\vec{\boldsymbol{F}}$ forment une paire action-réaction!

2. La force entre deux charges décroît avec le carré de la distance qui les sépare.

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

3. La force entre deux charges q et Q est proportionnelle à la magnitude de chaque charge.

$$F \propto q \qquad F \propto Q$$

Comment combiner toutes ces observations en une seule loi ?

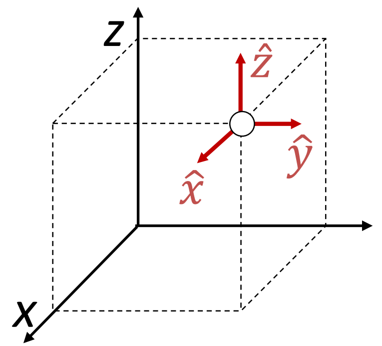
Rappels – Systèmes de coordonnées

On peut utiliser plusieurs **systèmes de coordonnées** pour décrire un même vecteur. Les vecteurs unitaires d'un système forment une **base orthonormale**.

Cartésien :

$$\vec{F}(x,y,z) = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$$

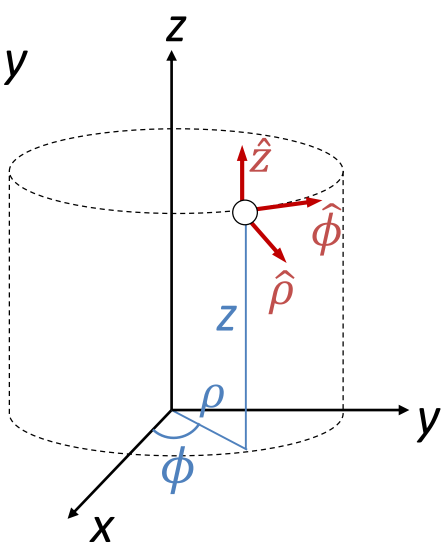
Vecteur unitaire



$\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ sont parfois notés $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

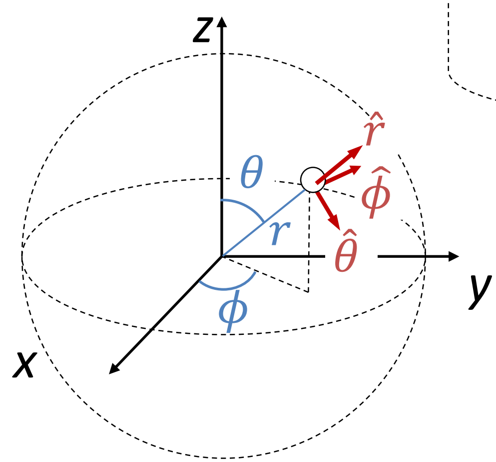
Cylindrique :

$$\vec{F}(\rho,\phi,z) = F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi} + F_z\hat{z}$$



Sphérique :

$$\vec{F}(r,\phi,\theta) = F_r\hat{r} + F_\phi\hat{\phi} + F_\theta\hat{\theta}$$



Rappels – Vecteur position

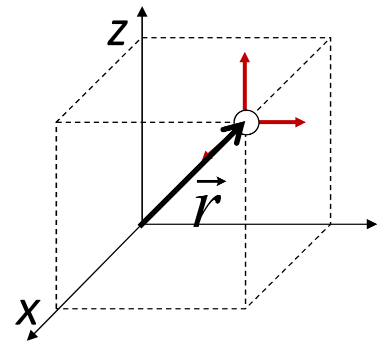
Il est utile d'exprimer un vecteur à l'aide de sa **norme** et d'un **vecteur unitaire (de norme 1)**. Ceci est particulièrement le cas pour le **vecteur position** $\vec{r}$.

Expression du vecteur position à l'aide du vecteur unitaire

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$\hat{r}$: vecteur unitaire dans la direction de $\vec{r}$
r : norme du vecteur $\vec{r}$

Attention! Les notations $r = |\vec{r}| = \|\vec{r}\|$ sont équivalentes.

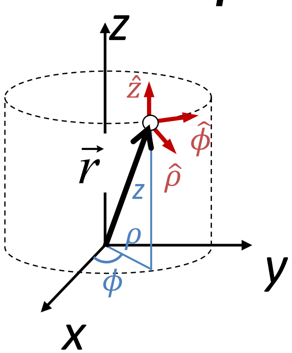


Coordonnées cartésiennes

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\hat{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

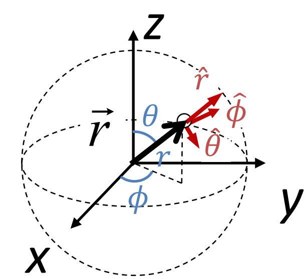


Coordonnées cylindriques

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{r} = r\hat{r}$$



Loi de Coulomb

En combinant toutes les observations expérimentales, la force produite par une charge Q sur une autre charge q s'écrit :

$$\vec{F} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$$

$\vec{F}$: force exercée par la charge Q sur la charge q [N]
q et Q : charges (en coulomb) [C]
r : distance entre les charges [m]
$\hat{r}$: vecteur unitaire orienté de Q vers q

Ici, k est une constante de proportionnalité qui dépend du système d'unités choisi. Dans le Système international d'unités (SI), cette constante est appelée **constante de Coulomb** et s'exprime en fonction de la **permittivité du vide** ε_0 :

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9{,}0\times10^{9}\,\mathrm{m/F}$$

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$$

Le farad [F] est l'unité de capacité (voir semaine 3).

1 F = 1 $C^2/(N \cdot m)$ = 1 C/V

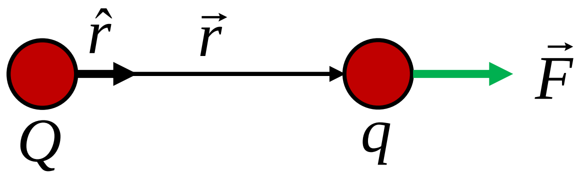
Formes équivalentes de la loi de Coulomb

Toutes les formes suivantes de la loi de Coulomb sont équivalentes en se basant sur la notation vue précédemment.

$$\vec{F} = \frac{kqQ}{r^2}\hat{r} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad \vec{r} = r\hat{r}$$

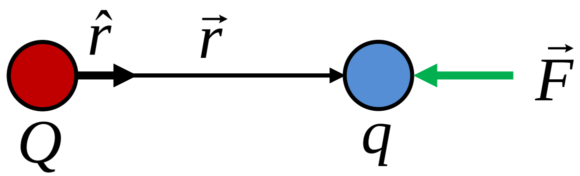
Charges de même signe

La charge q est repoussée par la charge Q si les charges sont de même signe ($qQ > 0$).



Charges de signe opposé

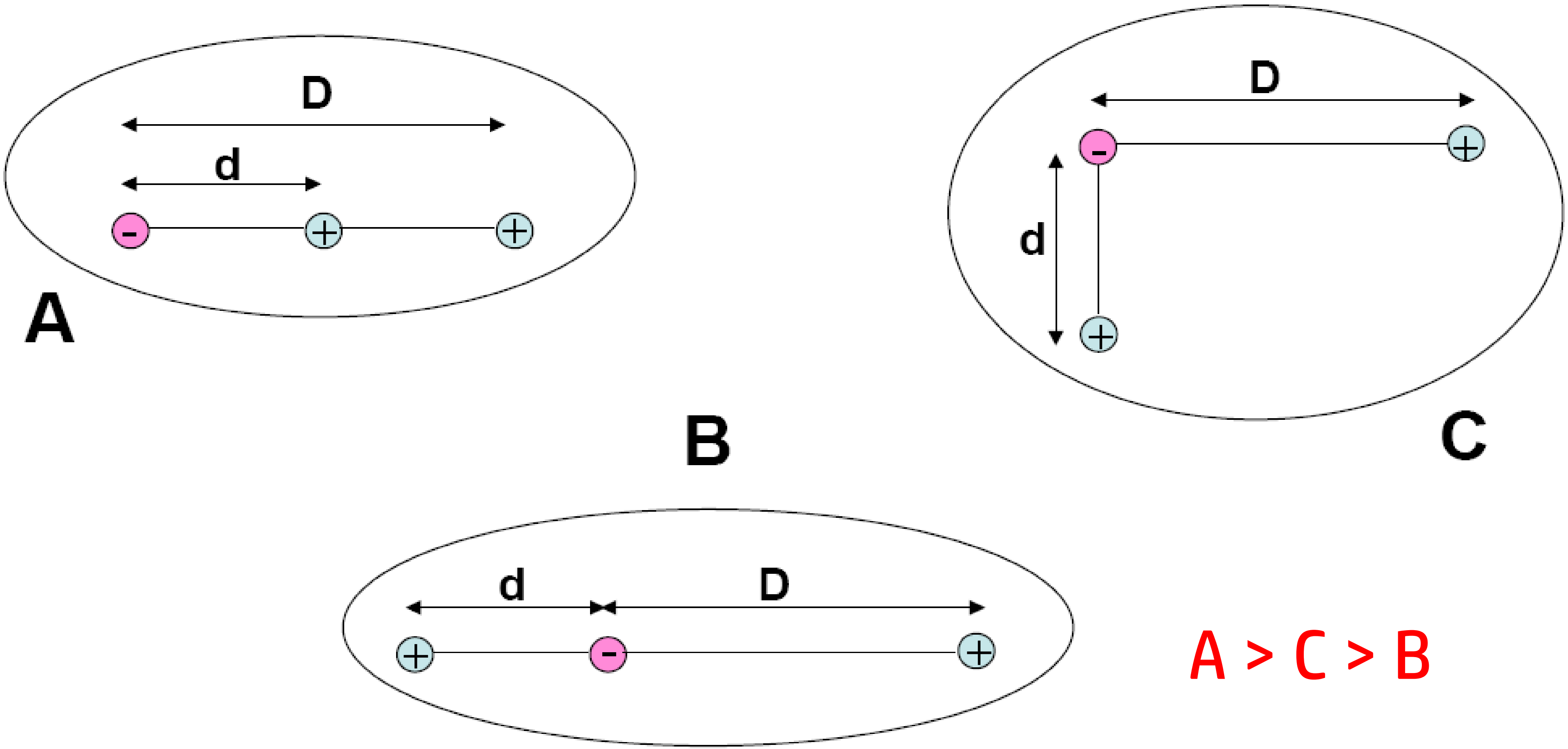
La charge q est attirée par la charge Q si les charges sont de signe opposé ($qQ < 0$).



Quiz !

On s’intéresse à la force ressentie par la charge négative (en rose) due aux deux charges positives (en bleu). Toutes les charges ont la même magnitude.

Classez les situations suivantes en fonction de la force ressentie par la charge négative.



A > C > B

Principe de superposition

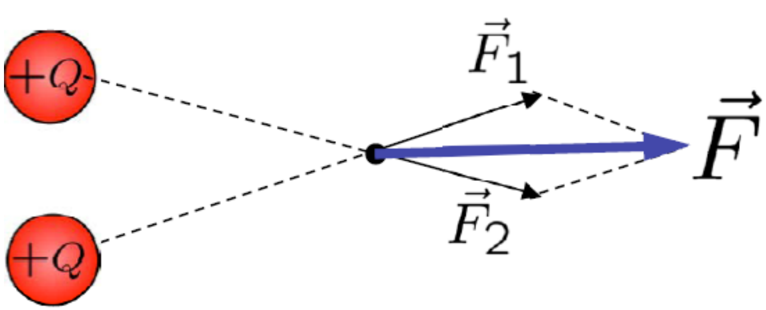
La **force totale ressentie** par une charge q due à un ensemble de charges Q_1, Q_2, ... est la **résultante des forces individuelles dues à chacune des charges**.

$$\vec{F}_{\text{totale}}(Q_1, Q_2, \ldots) = \sum_i \vec{F}(Q_i)$$

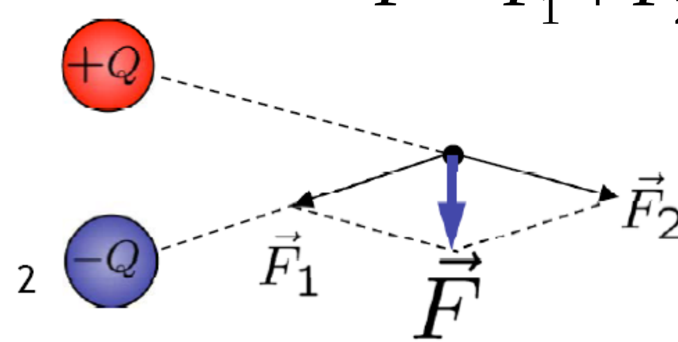
En insérant l'expression de la loi de Coulomb, on a donc :

$$\vec{F}_{\text{totale}}(Q_1, Q_2, \ldots) = \sum_i \frac{qQ_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

Exemples

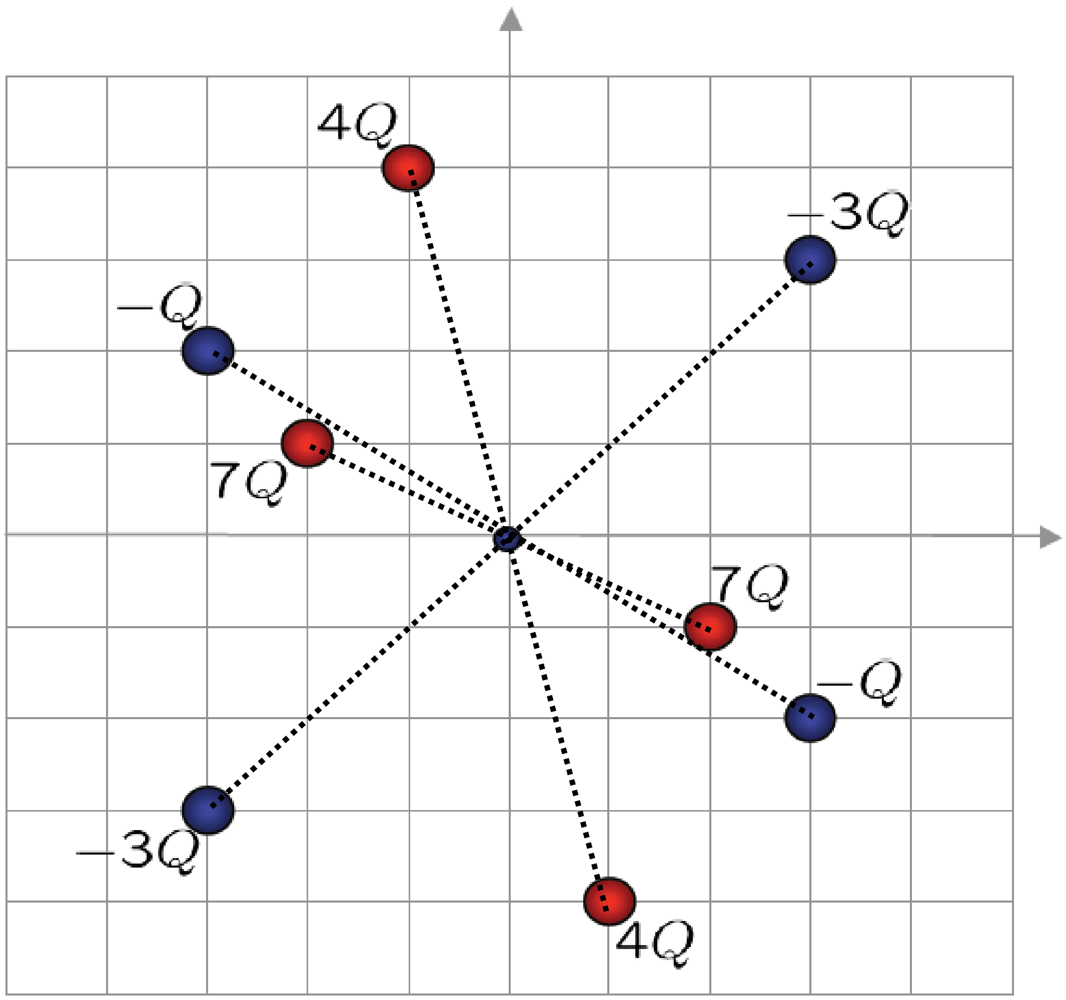


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



Quiz !

Quelle serait la force totale ressentie par une charge placée à l'origine ?



Zéro !

En effet, la distribution de charge est symétrique par rapport à l'origine : toutes les forces s'annulent !

Champ électrique

En observant l'expression pour la force totale subie par une charge test q, on constate qu'il est possible de la décomposer en deux parties :

- L'une qui dépend de la charge test q subissant la force ;
- L'autre qui dépend de la distribution des charges $Q_1, Q_2, \ldots$ exerçant une force sur q.

$$\vec{F} = q\sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

On définit alors le **champ électrique $\vec{E}$ produit par la distribution de charge** :

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

Unité : V/m

(1 V = 1 J/C = 1 N·m/C)

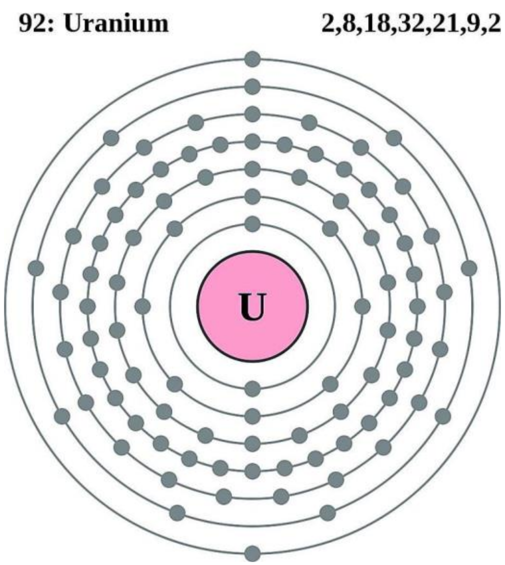
Remarque

La limite signifie que la présence de la charge test ne doit pas perturber la distribution de charge déjà présente. En effet, puisque la charge test subit une force due à la distribution, alors elle exerce aussi une force sur la distribution par action-réaction.

Ordre de grandeur du champ électrique

Exemples

surface d'un noyau d'uranium	$3\text{x}10^{21}$ V/m
claquage dans l'air	$3\text{x}10^{6}$ V/m
près d'un peigne chargé	10^{3} V/m
dans un fil de cuivre domestique	10^{-2} V/m



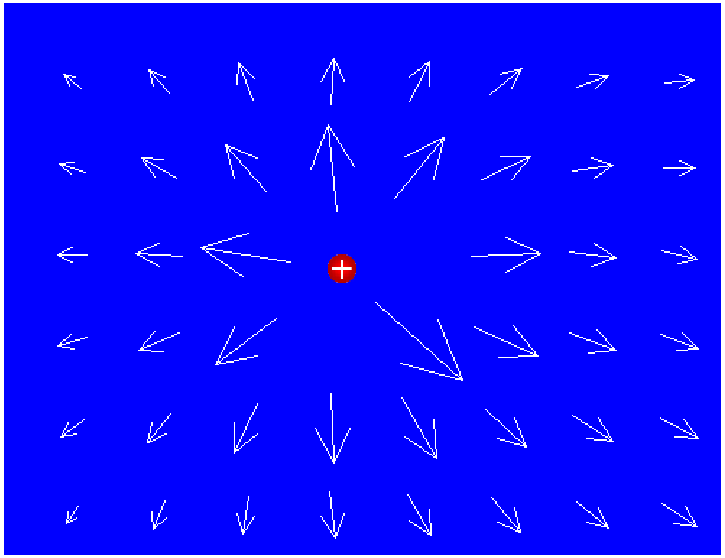
Champ électrique d'une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle Q située à l'origine produit un champ électrique

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

On représente un **champ vectoriel** en traçant le vecteur $\vec{E}$ en différents points de l'espace, comme sur la figure. La **longueur d'une flèche** représente la **norme du champ** à cet endroit.

Comment faudrait-il modifier la figure si l'on changeait le signe de la charge ?



Champ électrique produit par une charge ponctuelle positive

Description mathématique du champ électrique

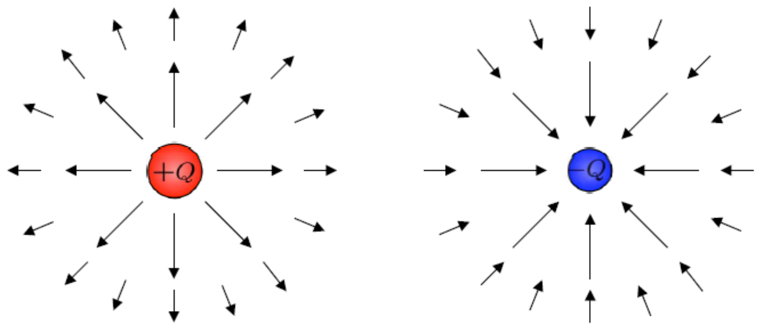
Le champ électrique est un **champ vectoriel**. Un champ vectoriel associe à chaque point de l'espace un vecteur. Ainsi, lorsqu'on écrit $\vec{E}$, il faut lire $\vec{E}(x, y, z)$ si l'on travaille en coordonnées cartésiennes, par exemple.

Représentations graphiques du champ électrique

Représentation du champ électrique

Longueur de la flèche : norme du champ

Orientation de la flèche : orientation du champ

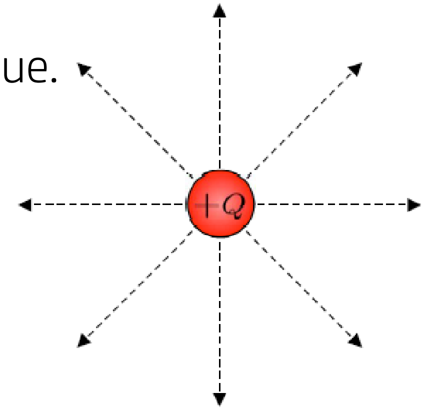


Sens du champ électrique

Le sens correspond au sens de la force que subirait une charge test positive.

Représentation par lignes de champ

En suivant une ligne de champ, on suit l'orientation du champ électrique.



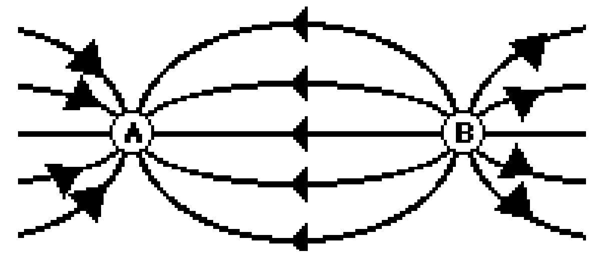
Comment estimer la norme du champ électrique à partir des lignes de champ ?

La **norme du champ électrique** en un point est **proportionnelle à la densité des lignes de champ** en ce point.

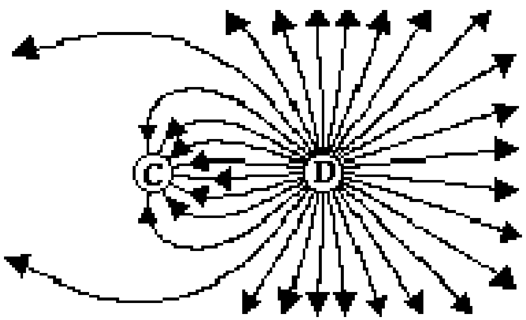
Quiz !

Identifiez le signe de chaque charge, puis classez les valeurs absolues des charges en ordre croissant.

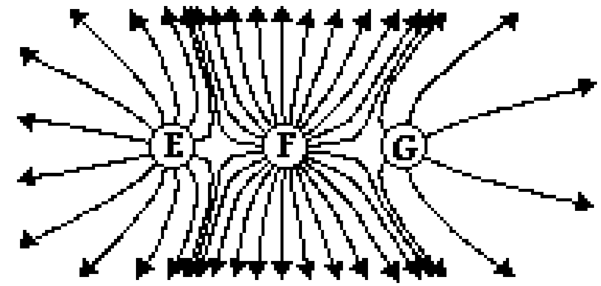
A : –
B : +
$|Q_A| = |Q_B|$



C : –
D : +
$|Q_C| < |Q_D|$



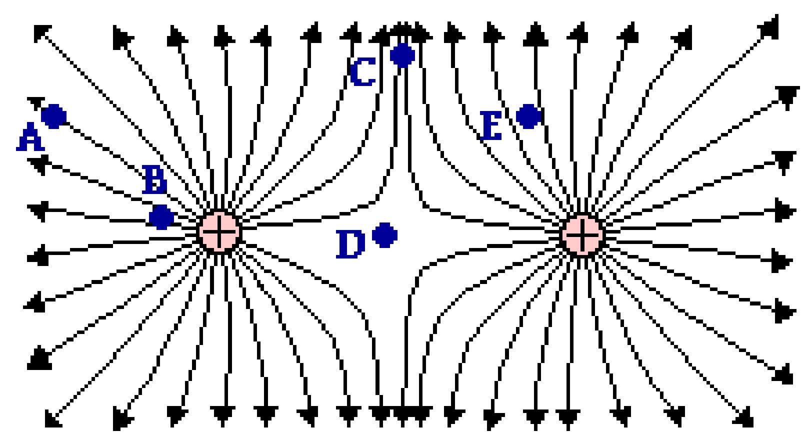
E : +
F : +
G : +



$|Q_G| < |Q_E| < |Q_F|$

Classez les points suivants en fonction de la magnitude du champ électrique.

$E_B > E_C > E_E > E_A > E_D$
(l'ordre étant discutable)

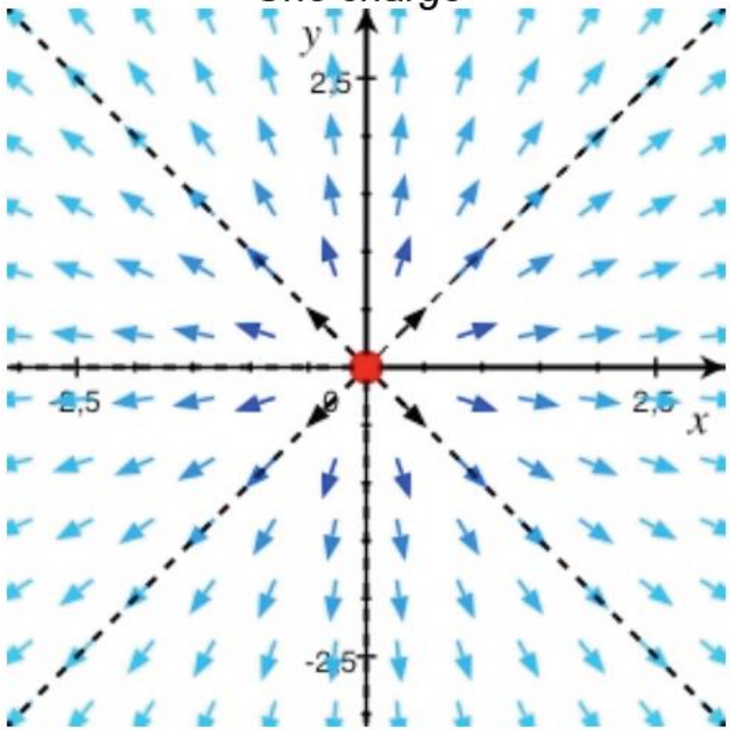


Principe de superposition appliqué au champ électrique

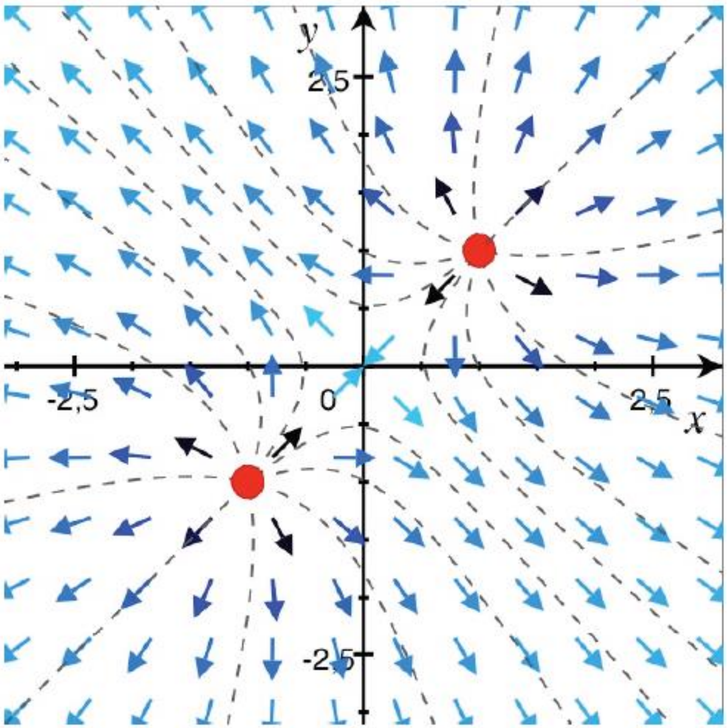
Le **champ total** dû à un ensemble de charges Q_1, Q_2, … est la **résultante des champs individuels dus à chacune des charges**.

$$\vec{E}_{\text{total}}(Q_1, Q_2, \ldots) = \sum_i \vec{E}(Q_i)$$

Une charge



Deux charges



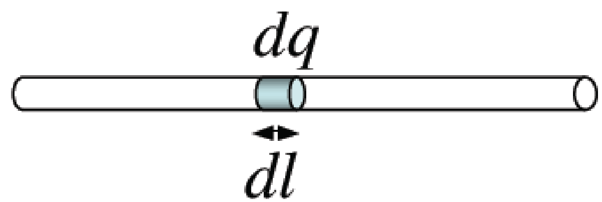
Distributions de charge continues

Une distribution de charge continue peut être vue comme une **la superposition d'une infinité de charges ponctuelles**.

Une distribution continue est alors représentée par une **densité de charge** ρ qui peut être **linéique**, **surfacique** ou **volumique** selon la situation.

Densité linéique

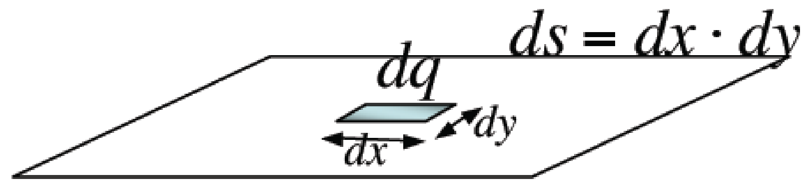
$$\rho_l = \frac{dq}{dl}$$



$$\left(\frac{C}{m}\right)$$

Densité surfacique

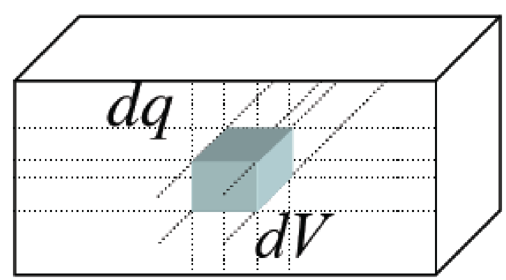
$$\rho_s = \frac{dq}{ds}$$



$$\left(\frac{C}{m^2}\right)$$

Densité volumique

$$\rho_V = \frac{dq}{dV}$$



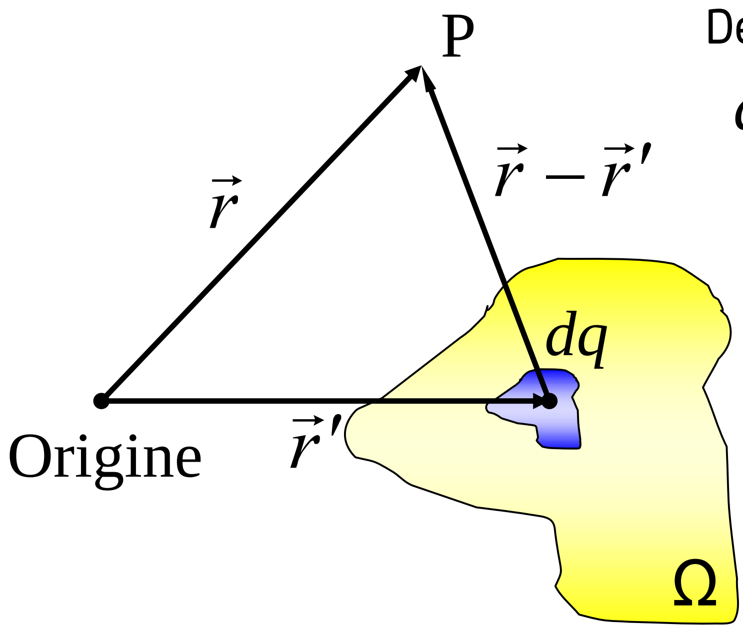
$$\left(\frac{C}{m^3}\right)$$

Distributions de charge continues

En utilisant la **loi de Coulomb** et le **principe de superposition**, on peut calculer le **champ électrique produit (et donc la force exercée)** par une distribution continue.

Il s'agit alors de **remplacer la somme par une intégrale** dans le principe de superposition.

$$\vec{E} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}dq$$



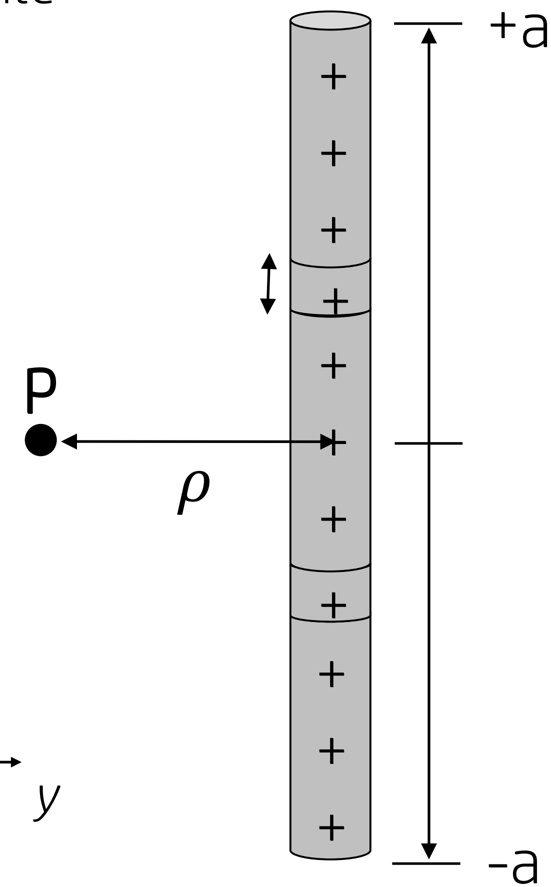
Densité linéique	Densité surfacique	Densité volumique
$dq = \rho_l dl$	$dq = \rho_S dS$	$dq = \rho_V dV$

L'intégration se fait sur la variable $\vec{r}\,'$ qui parcourt tout le domaine Ω (ligne, surface ou volume) occupée par la densité de charge.

Voir les annexes du polycopié pour les expressions de dl, dS et dV.

Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

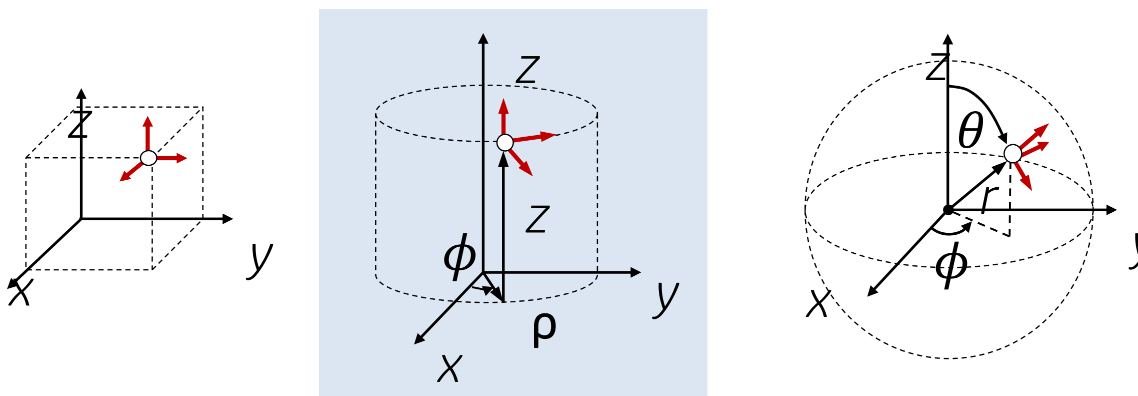
Quelle est l'intensité du champ électrique $\vec{E}$ en un point P situé à une distance ρ <u>du centre</u> d'une ligne de charges de densité uniforme ρ_l s'étendant sur une longueur finie $2a$?



On veut utiliser la formule suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dq$$

1. Quel système de coordonnées utiliser ?



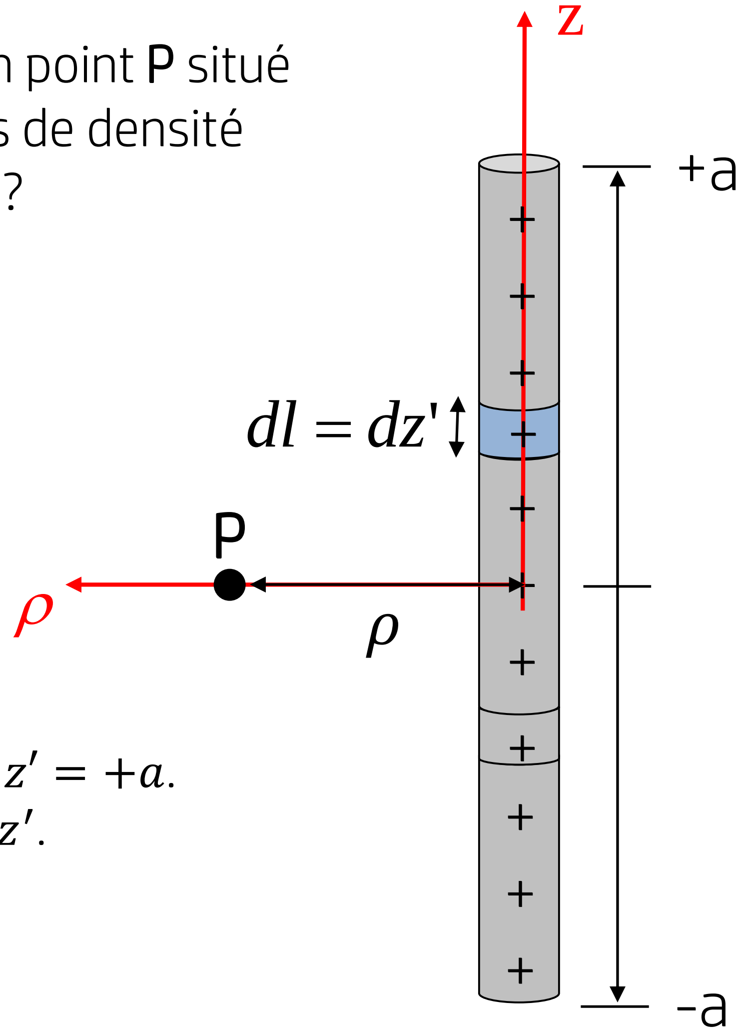
La géométrie du fil possède une symétrie cylindrique.

Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

Quelle est l'intensité du champ électrique $\vec{E}$ en un point P situé à une distance ρ <u>du centre</u> d'une ligne de charges de densité uniforme ρ_l s'étendant sur une longueur finie $2a$?

On veut utiliser la formule suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dq$$



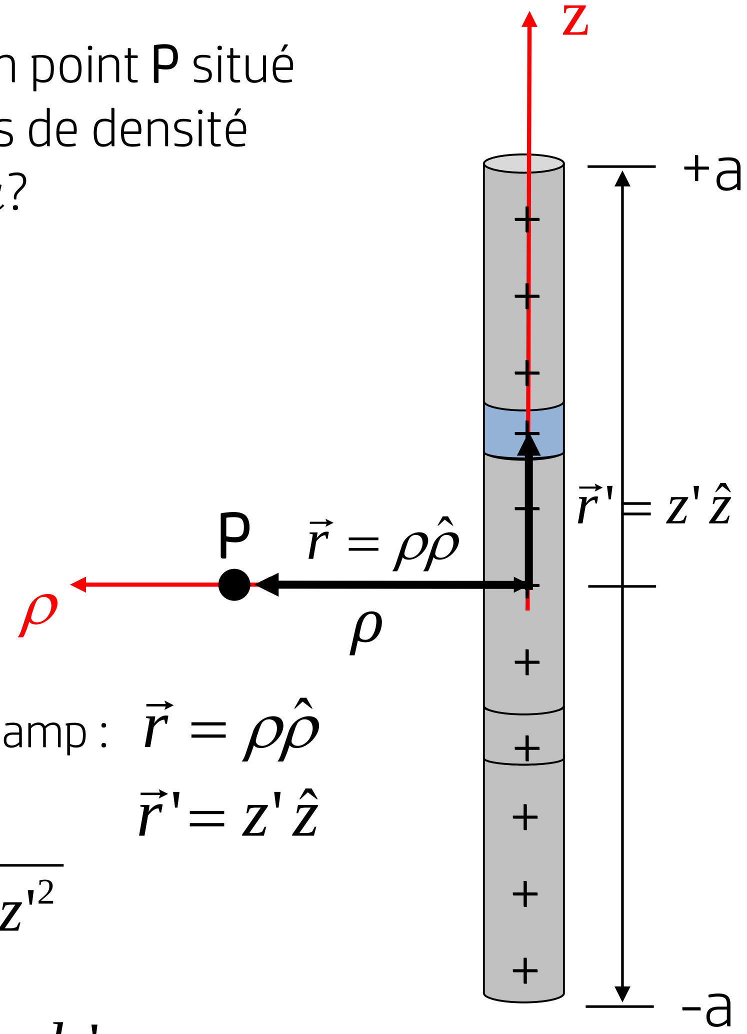
2. Quel est le domaine d'intégration ?

L'origine est au centre du fil et on intègre de $z' = -a$ à $z' = +a$.
La densité de charge est donnée par $dq = \rho_l dl = \rho_l dz'$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \rho_l dz'$$

Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

Quelle est l'intensité du champ électrique $\vec{E}$ en un point **P** situé à une distance ρ <u>du centre</u> d'une ligne de charges de densité uniforme ρ_l s'étendant sur une longueur finie $2a$?



On veut utiliser la formule suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho_l dz'$$

3. Que valent $\vec{r}$ et $\vec{r}'$?

Vecteur position d'un point **P** où l'on veut calculer le champ : $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$

Vecteur position d'un élément infinitésimal de charge : $\vec{r}' = z'\hat{z}$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}-\vec{r}'| = |\rho\hat{\rho} - z'\hat{z}| = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\rho\hat{\rho} - z'\hat{z}}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}\rho_l dz'$$

Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

Fonction paire Fonction impaire

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l \rho \hat{\rho}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{1}{\left(\rho^2 + z'^2\right)^{3/2}} dz' - \frac{\rho_l \hat{z}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{z'}{\left(\rho^2 + z'^2\right)^{3/2}} dz'$$

Puisque le domaine d'intégration est symétrique ($z = -a$ à $z = +a$), on utilise les propriétés des fonctions paires et impaires pour alléger les calculs.

1. Si l'on intègre une **fonction impaire**, i.e. $f(-x) = -f(x)$, sur un domaine symétrique $x \in [-a, a]$, on obtient toujours **zéro**.
2. Si l'on intègre une **fonction paire**, i.e. $f(-x) = f(x)$, sur un domaine symétrique $x \in [-a, a]$, on obtient **deux fois l'intégrale sur la moitié du domaine** $[0, a]$.

L'intégrale en rouge est donc nulle et il suffit de calculer l'intégrale en vert seulement sur le demi-domaine $[0, a]$!

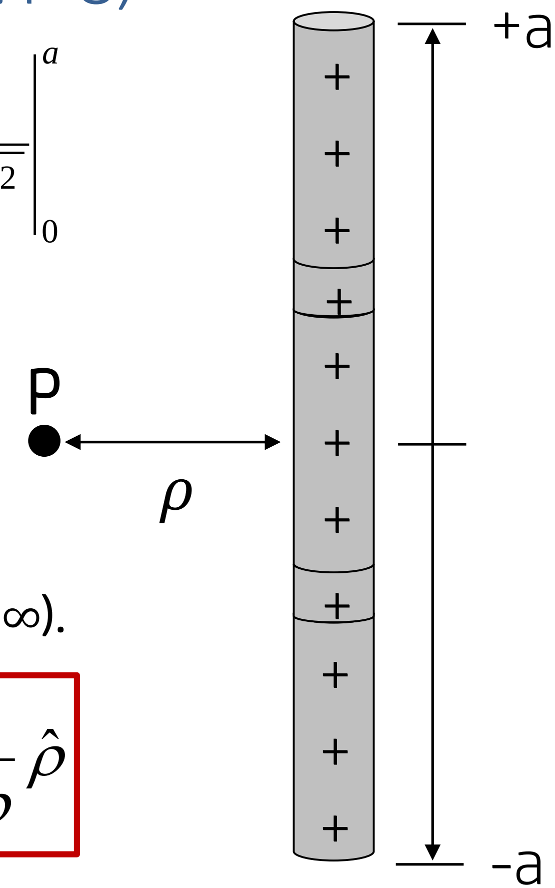
$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\frac{\rho_l \rho \hat{\rho}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{0}^{a} \frac{1}{\left(\rho^2 + z'^2\right)^{3/2}} dz'$$

Exemple 1.2 du manuel (p.1-8)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l \rho \hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0} \int_0^a \frac{1}{\left(\rho^2 + z'^2\right)^{3/2}} dz' = \frac{\rho_l \rho \hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{z'}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right|_0^a$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l a}{2\pi\varepsilon_0 \rho \sqrt{\rho^2 + a^2}} \hat{\rho}}$$

Champ électrique au point P



Cas limite 1
P est très près de la ligne ($\rho \ll a$) ou la ligne est infinie ($a \to \infty$).

On peut négliger ρ^2 sous la racine carrée : $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho}}$

Cas limite 2
P est très loin de la ligne ($\rho \gg a$)
On peut négliger a^2 sous la racine carrée : $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_l a}{2\pi\varepsilon_0 \rho^2} \hat{\rho}}$

Champ produit par une charge ponctuelle de charge $q = 2\rho_l a$!

Flux électrique

Le **champ électrique** $\vec{E}$ est un **champ vectoriel** associé à la force ressentie par une particule chargée (phénomène mesurable) due une distribution de charge environnante.

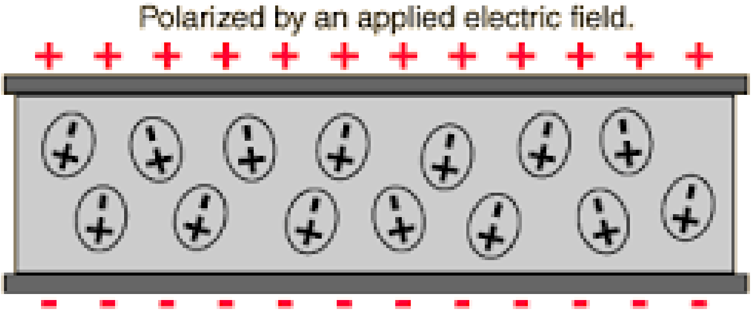
Le **flux électrique** est un concept plus abstrait, mais très puissant, car il permet de **calculer le champ électrique dans les matériaux diélectriques (chapitre 3)**.

Matériaux conducteurs

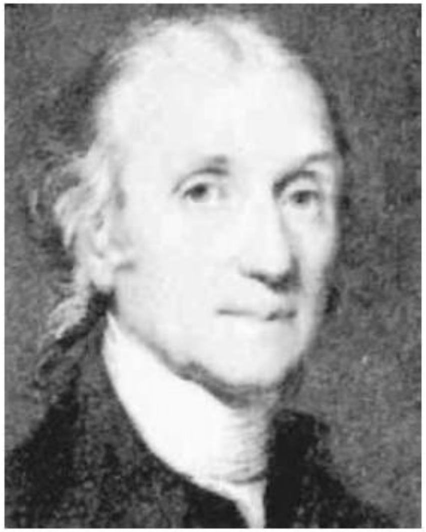
Les matériaux conducteurs contiennent des **charges libres** qui peuvent se déplacer librement dans tout le matériau sous l'effet d'un champ électrique.

Matériaux diélectriques

Les matériaux diélectriques contiennent des **charges liées** qui ne peuvent pas se déplacer librement. L'application d'un champ externe a pour effet de **polariser** le diélectrique en déformant le nuage électronique autour des atomes et/ou en réorientant les molécules dans la direction du champ.



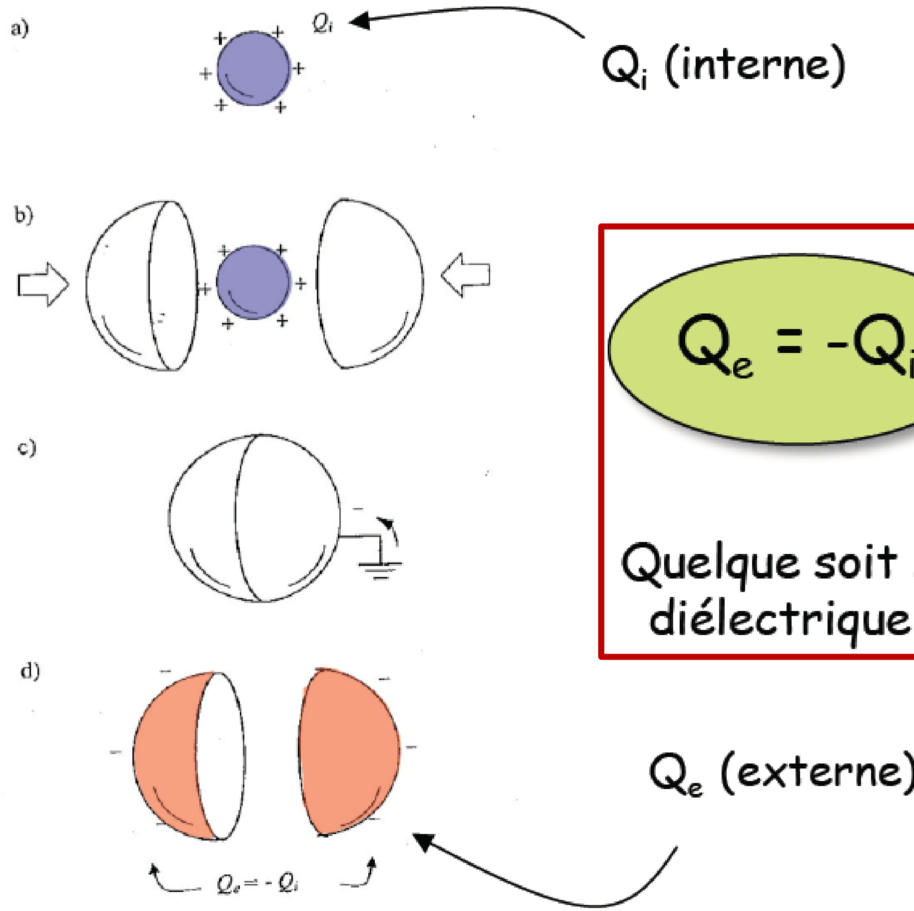
Expérience de Cavendish



Henry Cavendish
(1731-1810)

Physicien britannique

- Découvre « l'air inflammable » (H_2)
- Mesure la densité moyenne de la Terre (5,45 g/cm^3)
- Mesure l'attraction gravitationnelle (balance à torsion)



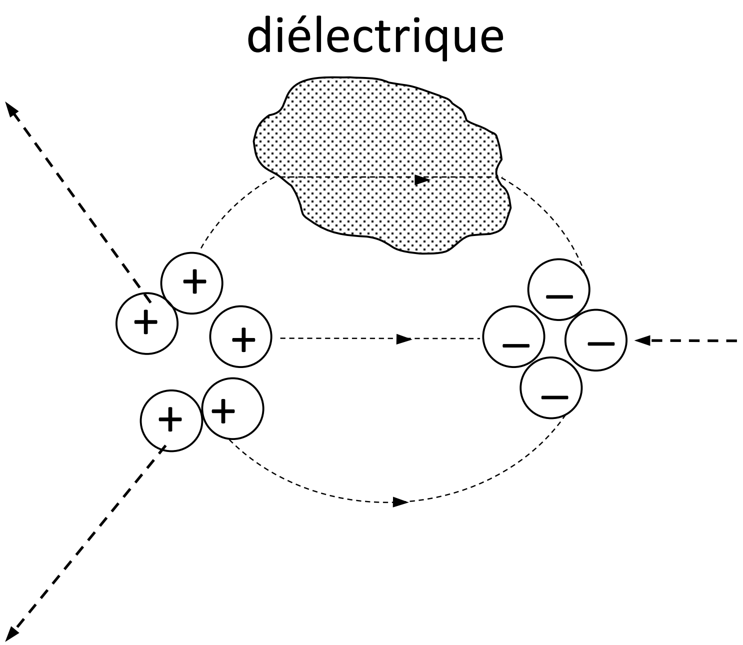
$$Q_e = -Q_i$$

Quelque soit le diélectrique !

Q_e a été déplacée par un flux électrique Φ émanant de la charge Q_i et n'est pas affectée par les charges liées du diélectrique!

Propriétés du flux électrique

Contrairement au **champ électrique** $\vec{E}$ qui a pour source **toutes les charges (libres et liées)**, le **flux électrique** a seulement pour source les **charges libres**, tel que déterminé lors de l'**expérience de Cavendish.**



Propriétés du flux électrique

1. Le flux électrique dépend seulement des charges libres (souvent sur un conducteur) ;
2. Les lignes de flux électrique débutent sur des charges libres positives (ou à l'infini) et se terminent sur charges libres négatives (ou à l'infini) ;
3. Les lignes de flux ne sont pas interrompues par les diélectriques, mais peuvent être déviées ;
4. Par définition, une unité de charge libre génère une ligne de flux électrique : $\Phi = Q$.

Plus la charge est élevée, plus le flux électrique qu'elle produit est élevé.

Densité de flux électrique

La **densité de flux électrique** est un **vecteur** qui décrit la **quantité de flux qui traverse une surface infinitésimale** donnée.

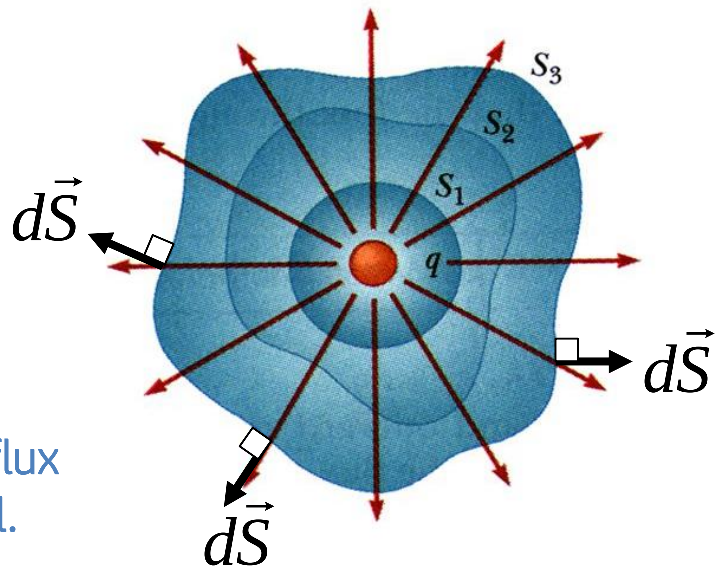
$$\vec{D} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} \hat{n}$$

$\hat{n}$: vecteur unitaire normal à l'élément de surface ΔS

Unité : C/m²

Si l'on considère une surface et que l'on intègre la densité de flux sur cette surface, on obtient le flux total qui traverse la surface.

$$\Phi = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS$$



Produit scalaire : seule la composante de la densité de flux normale à la surface contribue au flux électrique total.

Comment peut-on réécrire l'équation ci-dessus en faisant intervenir la quantité de charge libre à l'intérieur d'une surface fermée S ?

Théorème de Gauss

Une **surface fermée** intercepte tout le flux électrique émis par les charges qu'elle renferme. En combinant les définitions du flux électrique et de la densité de flux, on obtient ainsi le **théorème de Gauss** :

$$\Phi = Q$$

$$\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}$$

Carl Friedrich Gauss,
le Prince des mathématiciens
(1777-1855)

Attention : Q représente la charge libre seulement!
Le cercle sur l'intégrale signifie que la surface est fermée.
Le vecteur $d\vec{S} = dS\hat{n}$ pointe vers l'extérieur de la surface.

Remarque

Le théorème de Gauss est une **approche équivalente** à l'approche du champ électrique qui est particulièrement utile pour des **distributions de charges symétriques**.

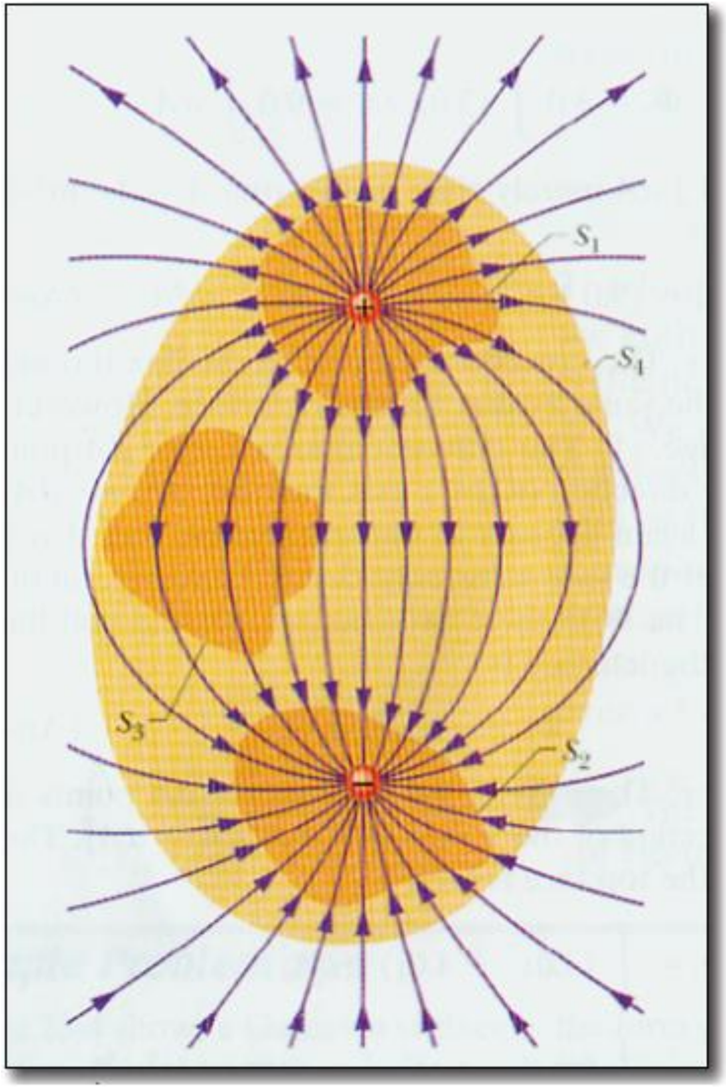
Interprétation du théorème de Gauss

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

S_1 : les lignes de flux sortent de la surface sans y revenir, ce qui crée un flux positif. La surface contient donc une charge positive.

S_2 : les lignes de flux entrent dans la surface sans en ressortir, ce qui crée un flux négatif. La surface contient donc une charge négative.

S_3 et S_4: toutes les lignes de flux électrique qui sortent de la surface finissent par y rentrer de nouveau : la charge totale contenue est donc nulle.

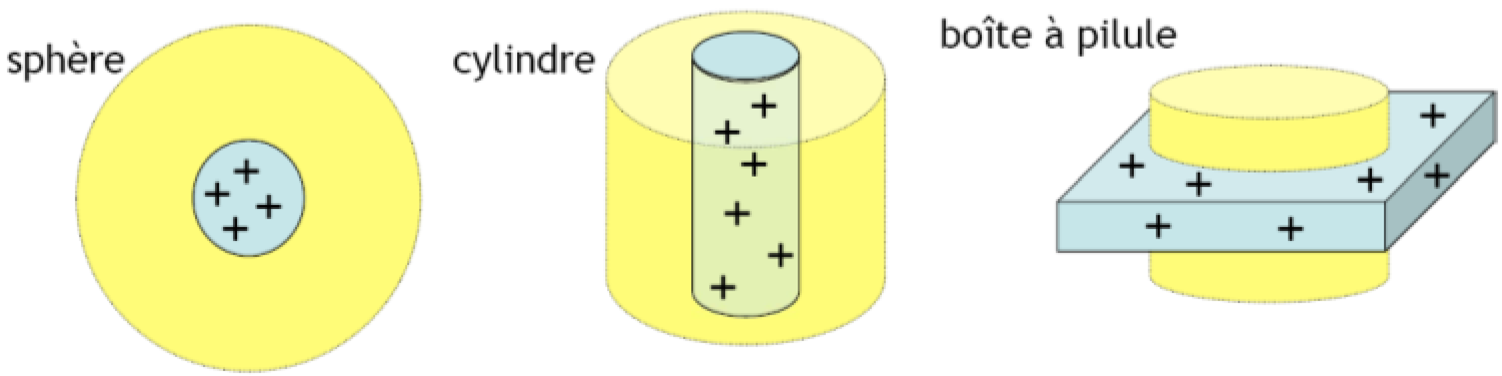


Surfaces de Gauss

Pour appliquer le théorème de Gauss, il faut **choisir la surface fermée appropriée**.

$Q =$

Il existe **trois surfaces de Gauss** possibles. Il faut choisir celle qui convient à la **symétrie du problème** que l'on veut résoudre.

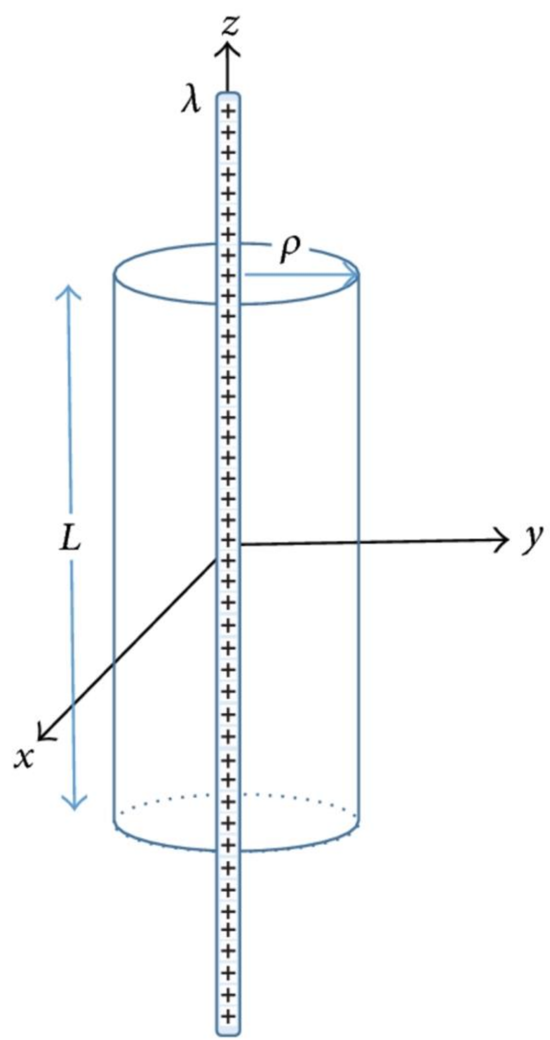


En choisissant bien la surface, **il est possible de simplifier grandement l'intégrale**. En effet, il s'agit d'avoir l'une des deux conditions suivantes sur chaque face de la surface de Gauss :

1. La **densité de flux est constante et perpendiculaire à la surface**, de sorte que $\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \pm D dS = \pm DS$;

2. La **densité de flux est parallèle à la surface**, de sorte que $\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$.

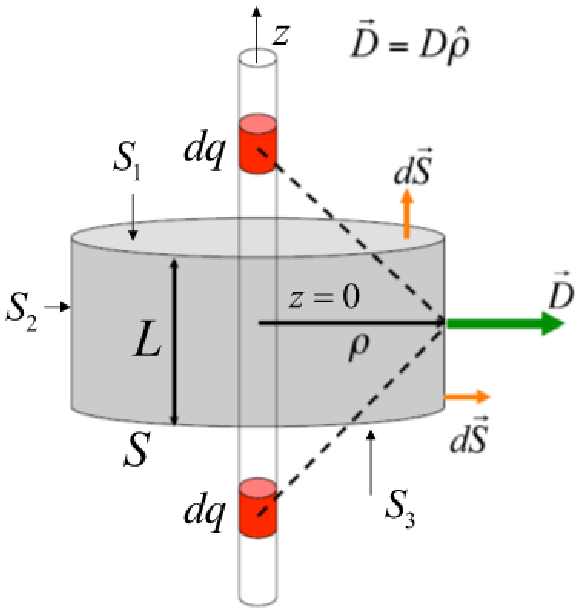
Exemple 1 – Tige infinie uniformément chargée



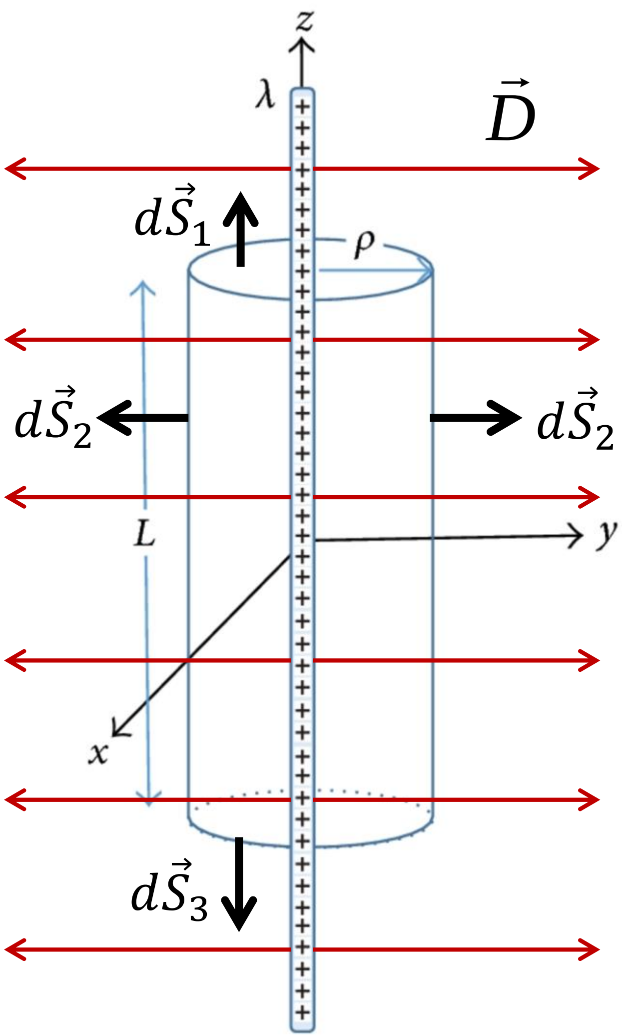
Quelle est la densité de flux électrique produite à une distance ρ de la tige infinie de densité linéique ρ_l ?

1. Le problème possède une **symétrie cylindrique**. On choisit donc une **surface de Gauss cylindrique de longueur L centrée sur le fil.**

2. La symétrie par rapport au plan $z = 0$ (plan *xy*) permet de déduire que la densité de flux est orientée radialement seulement et parallèle à au plan $z = 0$.



Exemple 1 – Tige infinie uniformément chargée



Quelle est la densité de flux électrique produite à une distance ρ de la tige infinie de densité linéique ρ_l ?

3. La surface de Gauss possède 3 faces S_1, S_2 et S_3.

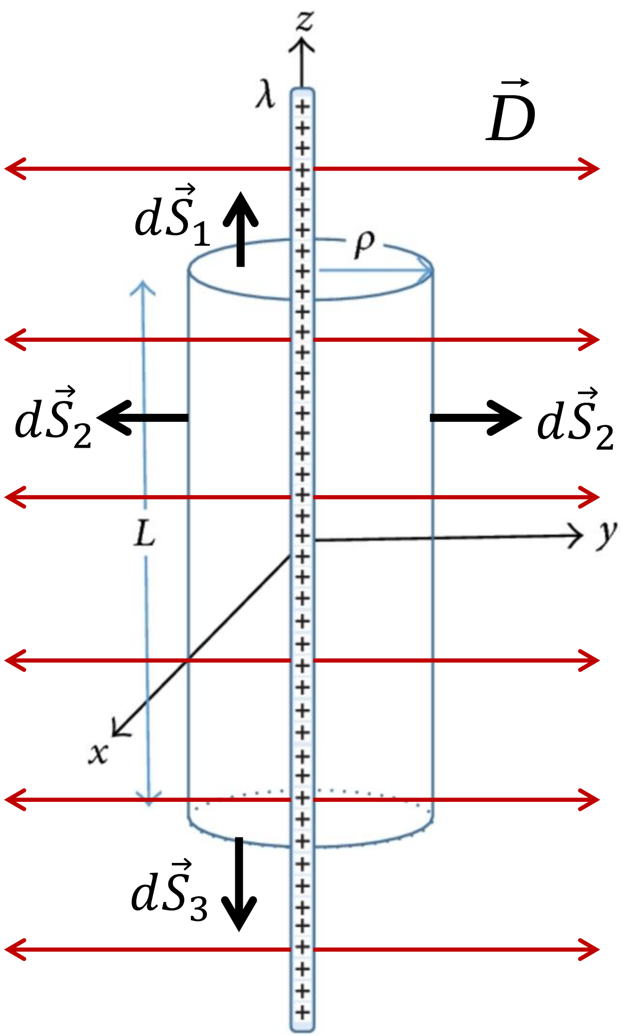
$$Q = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

Puisque $\vec{D}$ est parallèle à S_1 et S_3 ($\vec{D}$ est perpendiculaire à $d\vec{S}_1$ et à $d\vec{S}_3$), les 1re et 3e intégrales sont nulles.

Puisque $\vec{D}$ est perpendiculaire à S_2 ($\vec{D}$ est parallèle à $d\vec{S}_2$) et uniforme sur cette surface, alors :

$$Q = \int_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} = +DS = D2\pi\rho L$$

Exemple 1 – Tige infinie uniformément chargée



$$Q = D2\pi\rho L$$

4. La charge contenue dans la surface de Gauss est :

$$Q = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_l dz = \rho_l L$$

5. La densité de flux est donc : $\boxed{\vec{D} = \frac{Q}{2\pi\rho L}\hat{\rho} = \frac{\rho_l}{2\pi\rho}\hat{\rho}}$

Rappel de l'exemple 1.2

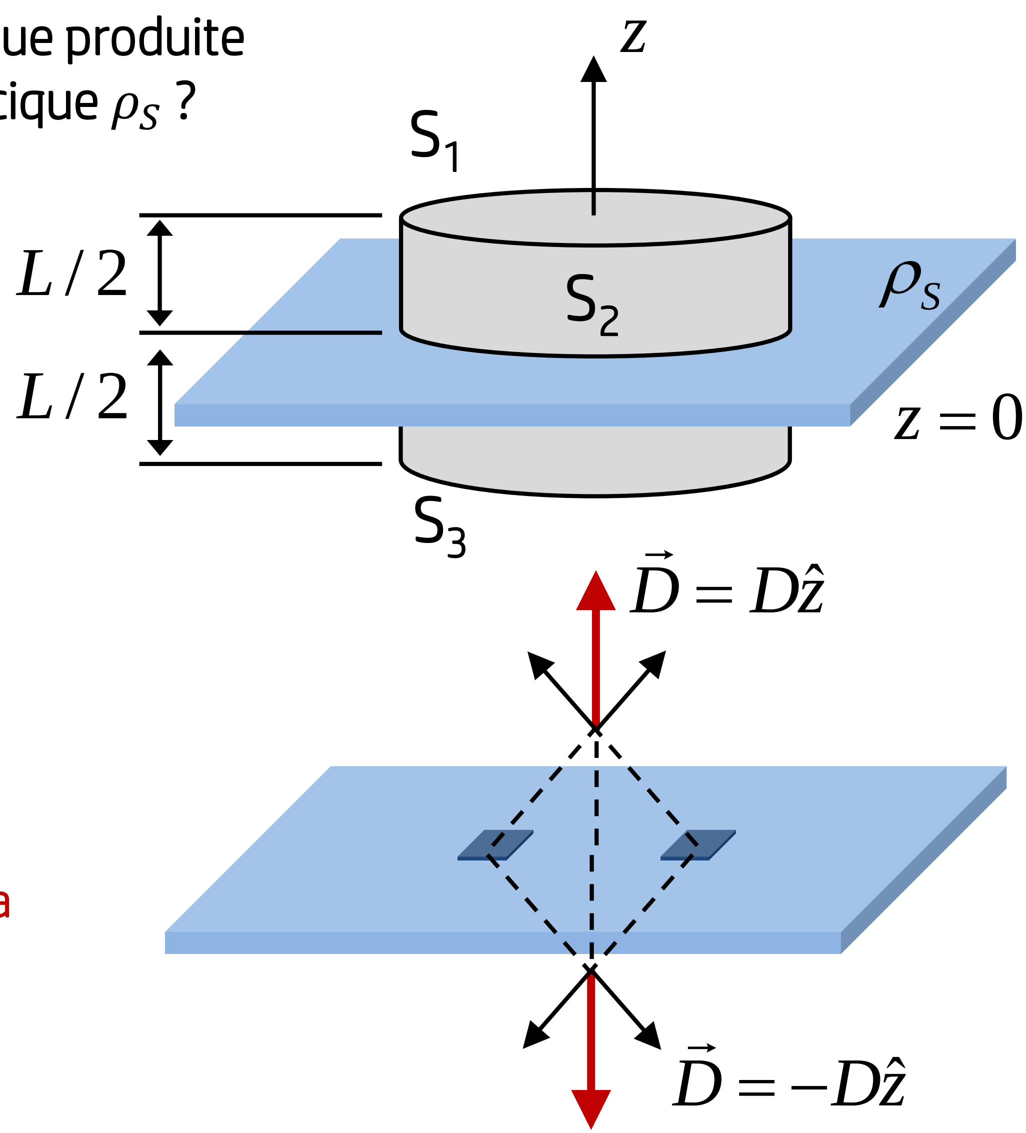
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}}$$

Relation entre la densité de flux et le champ (dans le vide)

Exemple 2 – Plan conducteur infini

Quelle est la densité de flux électrique produite par le plan infini de densité surfacique ρ_S ?



1. Le problème possède une **symétrie plan (miroir $z = 0$).** On choisit donc une **surface de Gauss de type boîte à pilule de longueur L et de section A centrée sur le plan.**

2. Puisque le plan est **infini**, la **densité de flux est orientée selon l'axe z.**

La densité de flux étant parallèle à la surface S_2 du cylindre, seul le flux traversant les surfaces S_1 et S_3 contribuera à l'intégrale.

Exemple 2 – Plan conducteur infini

3. Théorème de Gauss :

$$Q = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

$$Q = \int_{S_1} (D\hat{z})\cdot(dS\hat{z}) + 0 + \int_{S_3} (-D\hat{z})\cdot(-dS\hat{z})$$

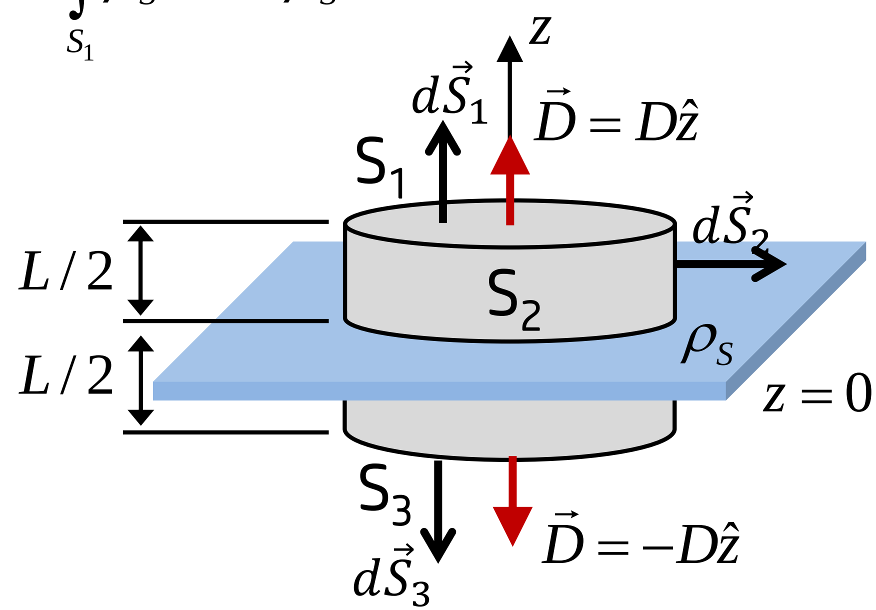
$$Q = D\int_{S_1} dS + D\int_{S_3} dS = 2DA$$

4. Charge à l'intérieur de la boîte à pilule : $Q = \int_{S_1} \rho_S dS = \rho_S A$

On a donc : $2DA = \rho_S A$

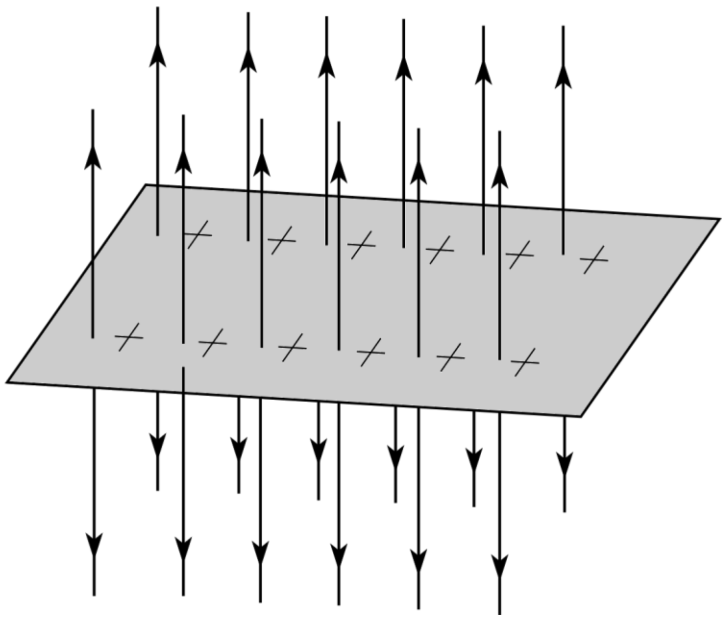
La densité de flux produite par un plan infini est constante !

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{\rho_S}{2}\hat{z} \qquad && \text{si } z > 0 \\ \vec{D} &= -\frac{\rho_S}{2}\hat{z} && \text{si } z < 0 \end{aligned}}$$



Limites de l'hypothèse du plan infini

- Un plan infini n'existe pas !
- Un observateur très proche d'un plan de dimension finie perçoit ce dernier comme ayant une dimension presque infinie : il ressent donc un flux électrique à peu près constant ;
- Un observateur éloigné perçoit le plan comme une source ponctuelle de charge $\rho_S S$, où S est la surface du plan fini. Il ressent donc un flux électrique décroissant avec [le carré de] la distance.



Densité de flux produite par un plan infini

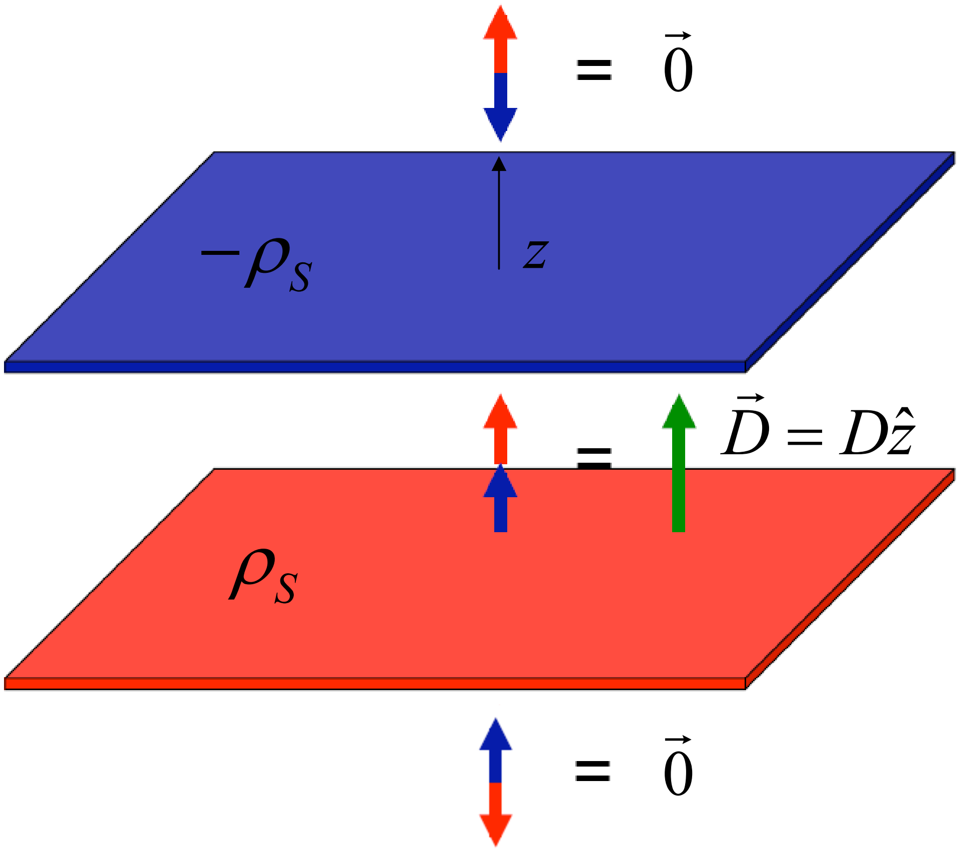
$$\vec{D} = \frac{\rho_S}{2}\hat{z} \qquad \text{si } z > 0$$

$$\vec{D} = -\frac{\rho_S}{2}\hat{z} \qquad \text{si } z < 0$$

Densité de flux dans un condensateur plan infini

Condensateur plan

Deux plaques métalliques parallèles chargées avec $\pm\rho_S$



Principe de superposition :

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{D}_+(\vec{r}) + \vec{D}_-(\vec{r})$$

Au-dessus :

$$\vec{D}_{\text{haut}}(\vec{r}) = \frac{\rho_S}{2}\hat{z} + \frac{-\rho_S}{2}\hat{z} = \vec{0}$$

Au centre :

$$\vec{D}_{\text{centre}}(\vec{r}) = \frac{\rho_S}{2}\hat{z} + \frac{\rho_S}{2}\hat{z} = \rho_S\hat{z}$$

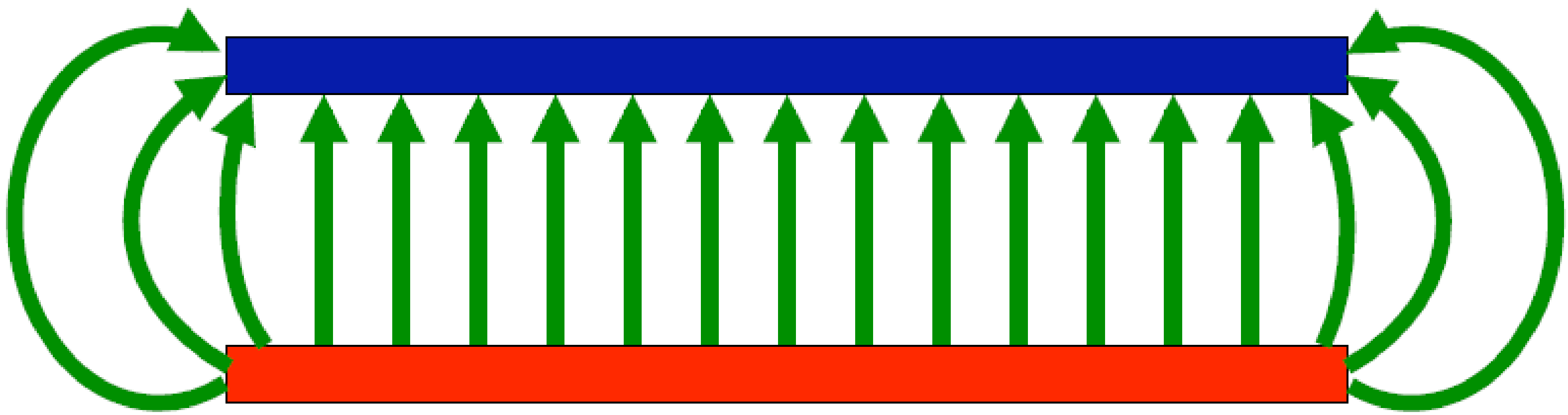
Au-dessous :

$$\vec{D}_{\text{bas}}(\vec{r}) = \frac{-\rho_S}{2}\hat{z} + \frac{\rho_S}{2}\hat{z} = \vec{0}$$

Validité de l'hypothèse du condensateur plan infini

Plaques infinies
Densité de flux électrique et champ électrique uniformes.

Plaques finies
Des effets de bords apparaissent aux extrémités des plaques.



L'approximation des plaques infinies (champ uniforme) est valide si l'on s'intéresse au **champ loin des bords** et que la **distance entre les plaques est petite par rapport à leurs dimensions.**

Dans ce cours, nous ferons plusieurs hypothèses simplificatrices afin de ne pas avoir à traiter des effets de bord qui sont en général complexes à considérer.

Résumé – Chapitre 1 – Électrostatique

1. Calculer le champ électrique produit par une distribution de charge statique.

Méthode #1 : Loi de Coulomb (distribution de charge quelconque)

Distribution discrète

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i Q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}$$

Distribution continue

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Omega \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} dq$$

$\vec{r}$: position où on calcule le champ

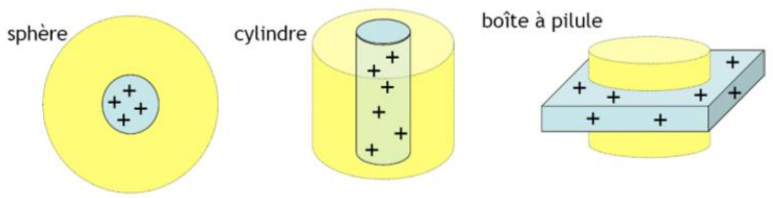
$\vec{r}_i$: position d'une charge ponctuelle

$\vec{r}\,'$: position d'un élément de charge dq

Méthode #2 : Loi de Gauss (distribution de charge symétrique)

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Q : charge <u>libre</u> à l'intérieur de la surface fermée S



Densité de flux électrique dans le vide $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

2. Calculer la force électrique subie par une charge q.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$