ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

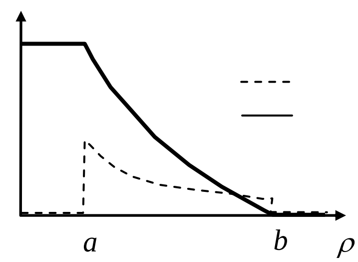
PHS1102 CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE – HIVER 2013

DATE :	Lundi 11 mars 2013	HEURE :	18H30-20H30
PAGES :	6	QUESTIONS :	5
NOTE :	Aucune documentation permise. Calculatrice non-programmable permise.		

Question 1: Concepts, SVP répondez dans le cahier d'examen (*4 points*)

1.1➤ (**1 Pt**) Un câble coaxial est formé d'un conducteur central cylindrique de rayon a, entouré d'un conducteur extérieur de rayon b qui est mis à la terre. Ces conducteurs sont séparés par un milieu diélectrique ayant la permittivité du vide. La figure ci-contre montre schématiquement (en fonction de la coordonnée cylindrique ρ) la variation de :

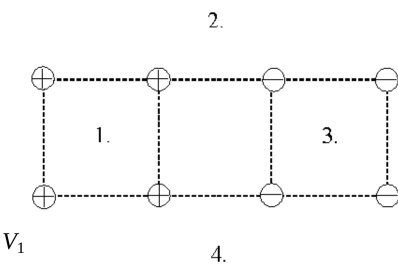


(a) : (----) la densité de flux électrique (D) et (____) le champ électrique (E)
(b) : (----) le potentiel électrique (V) et (____) le champ électrique (E)
(c) : (----) champ électrique (E) et (____) le potentiel électrique (V)
(d) : (----) la densité de flux électrique (D) et (____) permittivité relative (ε_r)

Choisir la bonne réponse parmi les quatre options.

Solution : **1.1➤** (1 Pt)

(c) : (----) champ électrique (E) et (____) le potentiel électrique (V)

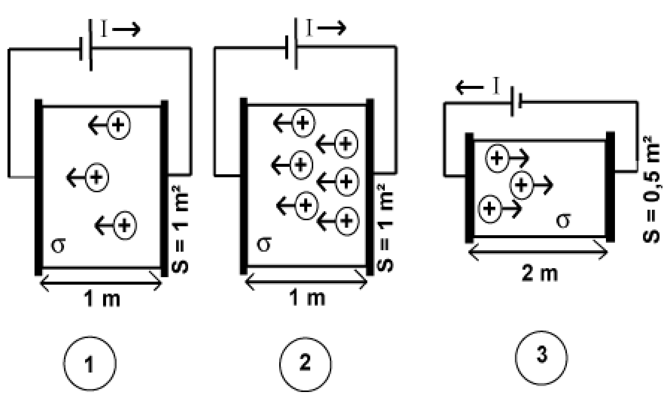


1.2➤ (**1Pt**) Quatre charges positives et quatre charges négatives de mêmes valeurs sont séparées de leur plus proche voisine par des distances égales. Lorsque l'on considère les potentiels estimés aux quatre points illustrés sur la figure, appariez les énoncés suivants:

1)	différence de potentiel minimum:	☐	a) $V_2 - V_4$	d) V_1
2)	différence de potentiel nulle :	☐	b) $V_3 - V_1$	e) V_2
3)	potentiel positif :	☐	c) $V_1 - V_3$	f) V_3

1.2➤ Solution : 1.2 1↔b; 2↔a; 3↔d (**1Pt**)

1.3➤ (**1 Pt**) Un courant I circule dans les trois circuits suivants. La concentration de porteurs de charges est proportionnelle au nombre de charges positives illustrées et leur mobilité est la même dans les trois milieux. Placer les circuits dans l'ordre croissant de résistance.



a) 3 < 1 < 2

b) 2 < 1 < 3

c) 3 < 2 < 1

d) 1 = 2 = 3

1.3➤ Solution : $\text{Res}\,2 < \text{Res}\,1 < \text{Res}\,3 \quad \Rightarrow$ (b) (1Pts)

1.4➢ (1Pt) Si l'expression de la densité de flux $\vec{D}$, s'écrit :

$$\vec{D}(\rho,\varphi,z)=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0V_0}{h}\left[\frac{\left(\frac{z}{h}\right)\ell n\left[1+\left(\frac{\rho}{h}\right)^2\right]}{\left(\frac{\rho}{h}\right)\left[1+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]^2}\hat{\rho}+\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\rho}{h}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]}\hat{z}\right]$$

$(\varepsilon_r=3{,}9,\ V_0=12V,\ h=1\ cm)$

(i) **(0,6 Pt)** Montrer que la densité volumique de charges libres est nulle, et

(ii) **(0,4 Pt)** Écrire et évaluer l'expression du vecteur de polarisation, à l'origine du système de coordonnées. (SVP ne pas oublier d'écrire les unités dans le cahier d'examen)

1.4➢

Solution : (i)

$$\nabla\cdot\vec{D}(\rho,\varphi,z)=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0V_0}{h}\left[\frac{\partial}{\rho\partial\rho}\left\{\cancel{\rho}\frac{\left(\frac{z}{h}\right)\ell n\left[1+\left(\frac{\rho}{h}\right)^2\right]}{\left(\frac{\cancel{\rho}}{h}\right)\left[1+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]^2}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\rho}{h}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]}\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0V_0}{h}\left[\frac{\frac{2\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}h^2}\left(\frac{z}{\cancel{h}}\right)}{\left(\frac{\left[1+\left(\frac{\rho}{h}\right)^2\right]}{\cancel{h}}\right)\left[1+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]^2}-\frac{\frac{2z}{h^2}}{\left[1+\left(\frac{\rho}{h}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]^2}\right]=0=\rho_{libre}$$

(0,6)

(ii) Écrire et évaluer l'expression du vecteur de polarisation, à l'origine du système de coordonnées.
(SVP ne pas oublier d'écrire les unités)

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\Rightarrow\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\vec{D}\left(\vec{r}=0\right)$$

$$\vec{P}=\left(\varepsilon_r-1\right)\frac{\varepsilon_0V_0}{h}\hat{z}=2{,}9\frac{8{,}85\times10^{-12}F\cdot m^{-1}12V}{1\times10^{-2}m}=3{,}08\times10^{-10}\frac{C}{m^2}$$

(0,4)

Question 2: Pistolet à impulsion électrique *(4 points)*

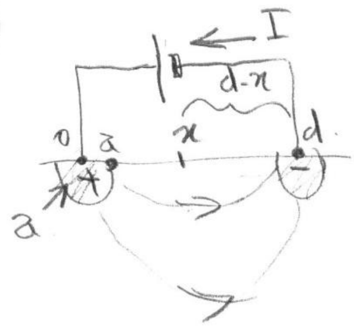
Les pistolets à impulsion électrique sont parfois utilisés pour immobiliser des personnes. On les connaît sous la marque de commerce TASER par exemple. Le pistolet projette des électrodes vers la cible et envoie des courtes impulsions de courant typiquement de 2 ampères afin de bloquer temporairement le système nerveux.

On modélise le pistolet comme une source de courant i en contact avec la surface de la peau par le biais de deux électrodes hémisphériques de rayon $a = 0,5$ mm, séparées d'une distance $d = 10$ cm. On pose la conductivité du corps à $\sigma = 0,2$ Sm^{-1}. On suppose également le corps comme un volume semi-infini, c'est-à-dire beaucoup plus grand que l'espacement entre les électrodes.

- Calculez la différence de potentiel nécessaire pour faire passer le courant de 2 A dans le corps.

SOLUTION :

2.



Pour 1 seule électrode

$$\bar{J} = \frac{I}{S}\hat{r} = \frac{I}{2\pi r^2}\hat{r} \quad (0,5) \rightarrow \bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} \quad (0,25)$$

Pour 2 électrodes

$$\bar{E} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right)\hat{x} \quad (1)$$

limites (0.25)

$$V = -\int_{d-a}^{a} \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right)dx = \frac{I}{2\pi\sigma}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right]_{d-a}^{a}$$

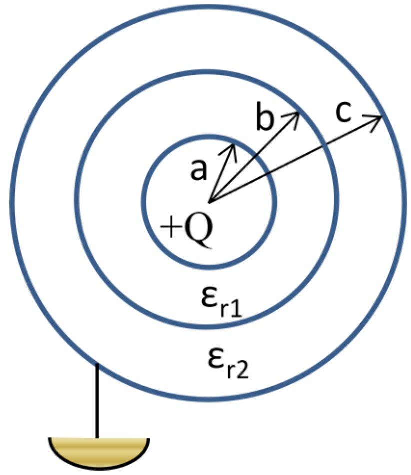
$$V = \frac{I}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a}\right) \overset{(1)}{\simeq} \frac{I}{\pi\sigma a} \qquad R = \frac{V}{I} \simeq \frac{1}{\pi\sigma a}$$

(parce que $a \ll d$)

$$R = \frac{1}{\pi \times 0.2 \times 5\times10^{-4}} = 3,183\ \Omega \qquad V = 3183 \times 2 = \boxed{6366\ V}$$

Calcul numérique: (1)

Question 3: Condensateur sphérique structuré (*5 Points*)



Un condensateur sphérique structuré est formé des sections suivantes (voir la figure) :

a) Une sphère creuse métallique centrale de rayon a = 2 cm portant une charge de Q = + 1 μC;

b) Une coquille externe métallique mise à la masse, de rayon c = 6 cm.

c) Une région formée de deux sphères diélectriques concentriques à l'intérieur du condensateur: la première, entre les rayons a = 2 cm et b = 4 cm possède une permittivité relative ε_{r1} = 2, la deuxième, entre les rayons b = 4 cm et c = 6 cm possède une permittivité relative ε_{r2} = 4.

3.1➤ **(2 Pt)** Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de la distance r du centre à l'intérieur et à l'extérieur du condensateur.

3.2➤ **(1 Pt)** Tracer schématiquement la dépendance du module du champ électrique E en fonction de la distance r du centre, à l'intérieur et à l'extérieur du condensateur. Expliquer le comportement de E au voisinage de l'interface entre les deux diélectriques ε_{r1} et ε_{r2}. **3.3➤** **(1 Pt)** Déterminer l'expression et la valeur du potentiel sur la sphère interne.

Question 3 :

3.1 Gauss : $\oint_{(S)} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$ Sphère : $D \cdot 4\pi r^2 = Q$, $\vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{r}$

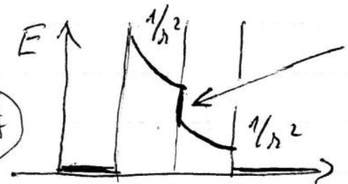
$E = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$ (0,5 pt)

$r < a$: $E = 0$ puisque $Q = 0$ à l'intérieur (0,25 pt)

$a < r < b$: $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$ (0,5 pt) $b < r < c$: $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$ (0,5 pt)

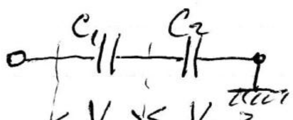
(0,25 pt) $r > c$: $E = 0$,

3.2 (0,5 pt)



charges surfaciques induites (0,5 pt) $\rho_{Si} = |\vec{P}|$, où $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}$

3.3



$V = V_1 + V_2$ $V = -\int_{\ell} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ 0,25

$V_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ (0,25 pt)

(0,25 pt) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)\right]$

$V_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)$ (0,25 pt)

(0,25 pt) $\boxed{V = 1{,}31 \times 10^5\ \text{V}}$

3.4➤ **(1 Pt)** Déterminer l'expression et la valeur de la capacité de ce condensateur.

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right]}=\frac{1\mu C}{1,31\times10^{5}V}=7,62\times10^{-12}F=7,62\ pF$$

. **3.3➤** **(1 Pt)** Déterminer l'expression et la valeur du potentiel sur la sphère interne.

Solution alternative:

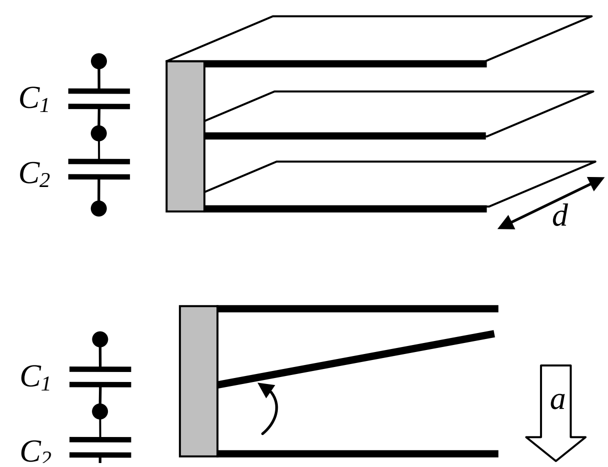
$$V_{ab}=-\int_b^a\vec{E}.\vec{dl}\Rightarrow V(r=a)-V(r=c)=-\int_{r=c}^{r=a}\vec{E}.\vec{dl}=\int_{r=a}^{r=c}\vec{E}.\vec{dl}=\int_{r=a}^{r=c}E_r dr$$

$$V(r=c)=0\Rightarrow V(r=a)=V=\int_{r=a}^{r=c}E_r dr=\int_{r=a}^{r=b}E_r dr+\int_{r=b}^{r=c}E_r dr$$

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right\}=1,31\times10^{5}V$$

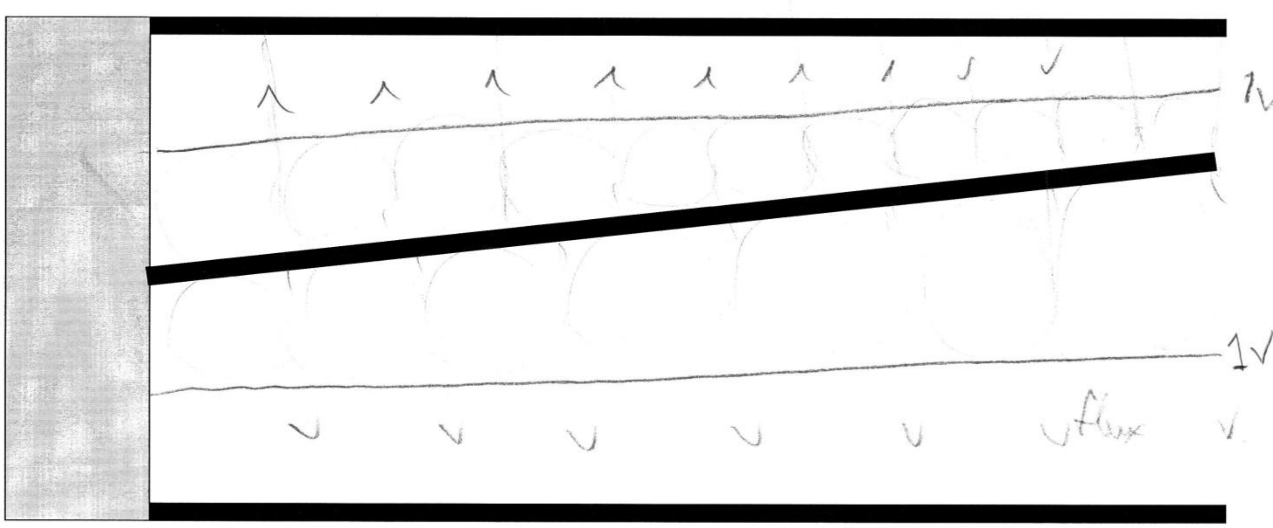
Question 4 : Accéléromètre (Graphique) *(3 points)*

Les manettes de la console de jeu *Wii* contiennent des systèmes microélectromécaniques (MEMS) qui permettent de mesurer les accélérations. L'accéléromètre illustré à droite est constitué de 3 lames conductrices de profondeur d = 500 µm. Les lames supérieures et inférieures sont rigides et fixées au boîtier de l'accéléromètre alors que la lame centrale peut plier comme une lame de ressort. En l'absence d'accélération, la lame centrale reprend sa position d'équilibre qui est à égale distance des lames supérieures et inférieures et les capacités C_1 et C_2 entre la lame centrale et les deux autres sont égales (figure du haut). Par contre, lorsque la lame centrale est soumise à une accélération, la force d'inertie va recourber la lame et les capacités C_1 et C_2 ne sont plus égales (figure du bas). La déflexion de la lame étant proportionnelle à l'accélération, la mesure des deux capacités est alors utilisée pour calculer l'accélération.



4.1➤ **(2 Pt)** En utilisant la figure de la page suivante (*à remettre*), faire une esquisse du champ électrique dans l'accéléromètre soumis à une accélération lorsque les lames supérieures et inférieures sont à un potentiel nul et que la lame centrale est à un potentiel de 2V. *Bien identifier les lignes équipotentielles et les lignes de flux*. **4.2➤** **(1 Pt)** Calculer les valeurs numériques des capacités C_1 et C_2 , à partir de votre esquisse. L'espace séparant les lames est le vide.

$C_1 = \frac{11}{2} \times 8.85\times10^{-12} \times 5\times10^{-4} \simeq \underline{2.43\times10^{-14}F}$



$C_2 = 7 \times 8.85\times10^{-12} \times 5\times10^{-4} \simeq 1.54\times10^{-14}F$

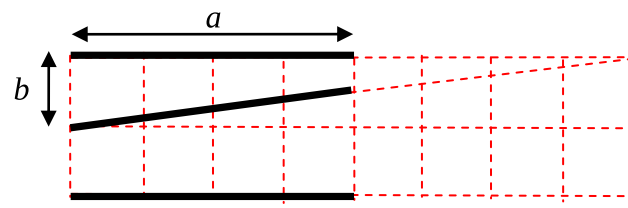
À REMETTRE

NOM :..

Matricule : ....

Question 5 : Accéléromètre (Laplace) *(4 points)*

L'accéléromètre de la question précédente possède trois lames de même longueur a = 400 µm qui sont espacées d'une largeur b = 100 µm (en l'absence d'accélération). En présence d'accélération, la lame centrale se recourbe vers le haut, selon le schéma illustré ci-dessous où les carrés tracés en pointillé ont des côtés de 100µm.



5.1➤ **(2,5 Pt)** Calculer la distribution de potentiel entre la lame supérieure et la lame centrale lorsque la lame supérieure est à un potentiel nul et que la lame centrale est à un potentiel de 2V. Vous pouvez redéfinir le système de coordonnées et faire des approximations pour évaluer les distances séparant les lames des axes de votre système de coordonnées.

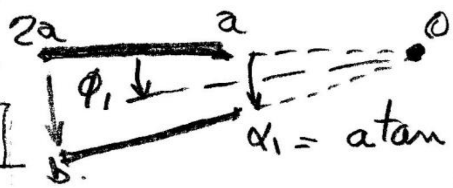
5.1 Pour C_1 $\quad V = A\phi + B$ (0.5 Pt)

à $\phi_1 = 0$, $V = 0$ $\quad 0 = A0 + B \Rightarrow \boxed{B = 0}$

à $\phi_1 = 0.124$, $V = 2$ $\quad 2 = A \times 0.124$

$A = \dfrac{2}{0.124} \Rightarrow \boxed{A = 16.1}$ (0.5 Pt)

$\boxed{V_1 = 16.1\,\phi_1}$ (0.5 Pt)



$\alpha_1 = \operatorname{atan} \dfrac{b}{2a}$

$\alpha_1 = \operatorname{atan} \dfrac{100}{800} = 0.124$ rad.

(1 Pt)

5.2➤ **(1,5 Pt)** À l'aide de la distribution de potentiel, calculer la valeur numérique de la capacité C_1. L'espace séparant les lames est le vide.

5.2 $\rho_s = D_N = -\varepsilon_0 \nabla V_1 = -\dfrac{\varepsilon_0}{\rho_1}\dfrac{\partial V_1}{\partial \phi_1} = \dfrac{-\varepsilon_0 A}{\rho_1}$ (0.5 Pt)

↳ plaque supérieure

(0.25 Pt)

$Q_1 = \displaystyle\int_{z=0}^{d} \int_{\rho_1=a}^{2a} -\frac{\varepsilon_0 A}{\rho_1}\, d\rho\, dz = -\varepsilon_0 A d \left[\ln \rho\right]_a^{2a} = -\varepsilon_0 A d \ln 2$

(0.25 limites)

$C_1 = \dfrac{Q_1}{2V} = \dfrac{\varepsilon_0 \times 16.1 \times 5 \times 10^{-4} \ln 2}{2} = \boxed{2.46 \times 10^{-14}\ \text{F}}$ (0.5 Pt)