POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

PHS1102 – CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - HIVER 2015

DATE : LUNDI 9 MARS 2015 HEURE : 18H30-20H20

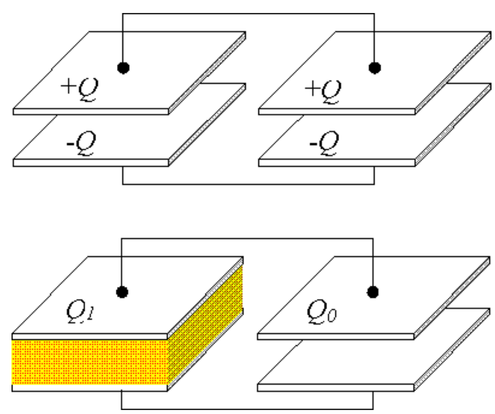
PAGES : 6 QUESTIONS : 5
NOTE : Aucune documentation permise
Calculatrice non-programmable permise

QUESTION 1 : Compréhension, SVP répondre *dans le cahier d'examen* *(3 points)*

1.1 ➤ (1 Pt) Une région sphérique contient des charges électriques dont la densité varie d'une manière linéaire avec le rayon selon l'équation $\rho(r) = kr$, où k est une constante et r représente la distance radiale à partir du centre de la région sphérique. Laquelle des quatre expressions suivantes indique la quantité de charge contenue dans une sphère de rayon R centrée à l'origine.

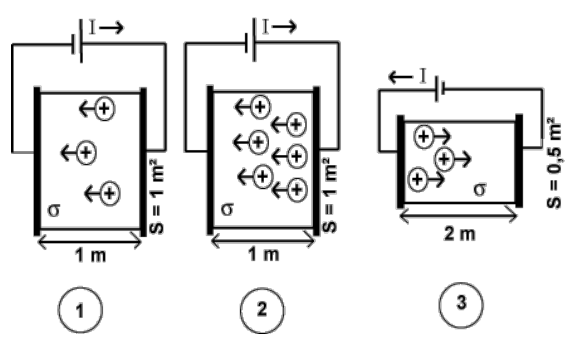
A) $4\pi k R^3/3$
B) $\pi k R^4$
C) $2\pi k R^3$
D) $\pi k R^2$

1.2 ➤ (1 Pt) Deux condensateurs plans identiques dont les plaques sont séparées par le vide, sont reliés en parallèle et portent chacun la même charge $+Q$. On introduit dans un des condensateurs un diélectrique de permittivité relative égale à 4. Quelles sont les charges portées par les condensateurs avec (Q_1) et sans diélectrique (Q_0) ?



A) $Q_1 = Q_0 = Q$
B) $Q_1 < Q_0$
C) $Q_1 = 4Q$, $Q_0 = Q$
D) $Q_1 > Q_0$

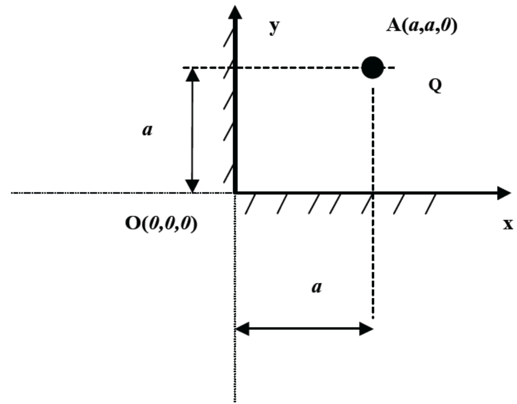
1.3 ➤ (1 Pt) Un courant I circule dans les trois circuits suivants. La concentration des porteurs de charges est proportionnelle au nombre de charges positives illustrées et leur mobilité est la même dans les trois milieux. Placer les circuits dans l'ordre croissant de résistance.



A) $3 < 1 < 2$
B) $2 < 1 < 3$
C) $3 < 2 < 1$
D) Les trois circuits ont la même résistance.

QUESTION 2 : **Charges images** *(3 points)*

Deux plans infinis conducteurs forment un coin à 90° l'un par rapport à l'autre (la ligne d'intersection des plans passe par l'origine et se dirige dans la direction z). Le plan horizontal débute à $x = 0$ et a une extension infinie dans les directions z et $x > 0$. Le plan vertical débute à $y = 0$ et a une extension infinie dans les directions z et $y > 0$. Une charge Q est située au point $A(a, a, 0)$ et les deux plans sont mis à la terre.



2.1 ➤ **(1,5 Pt)** Trouver les charges images et leurs positions. Justifier votre réponse.

2.2 ➤ **(1,5 Pt)** Quelle est l'amplitude et la direction de la force qui s'exerce sur la charge Q au point A?

Solution

2.1 (1,5 pt) Trouver les charges images et leurs positions. Justifier votre réponse.

Ici, il faudra 3 charges: la première se retrouvera à $(-a, a, 0)$, la seconde à $(a, -a, 0)$ et la troisième à $(-a, -a, 0)$. La justification est la suivante:

1. Une charge $Q_1 = -Q$ est requise au point $r_1 = (-a, a, 0)$ pour que le potentiel sur un plan infini localisé à $x = 0$ dû à la charge au point $(a, a, 0)$ soit nul.
2. La seconde charge $Q_2 = -Q$ sera au point $r_2 = (a, -a, 0)$ pour que le potentiel sur un plan infini localisé à $y = 0$ dû à la charge au point $(a, a, 0)$ soit nul.
3. La troisième charge $Q_3 = Q$ est requise au point $r_3 = (-a, -a, 0)$ pour contrecarrer l'effet des charges images Q_1 et Q_2 sur les plans $y = 0$ et $x = 0$ respectivement.

2.2 (1,5 pt) Quelles sont l'amplitude et la direction de la force qui s'exerce sur la charge Q au point A?

Ici, il faut tenir compte des forces exercées par chacune des charges images sur la charge réelle. On aura donc pour $Q_1 = -Q$ (distance $2a$ entre les charges)

$$\vec{F}_1 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\hat{x}$$

On aura pour $Q_2 = -Q$ (distance $2a$ entre les charges)

$$\vec{F}_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\hat{y}$$

Finalement pour $Q_3 = Q$ le résultat est (distance $2\sqrt{2}a$ entre les charges)

$$\vec{F}_3 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 2(2a)^2}\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

La force totale est donc

$$\vec{F}_t = -\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\left(2(\hat{x}+\hat{y}) - \frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{Q^2(2\sqrt{2}-1)}{32\pi a^2}\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

L'intensité de la force est donc

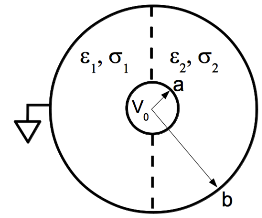
$$|\vec{F}_t| = \frac{Q^2(2\sqrt{2}-1)}{32\pi a^2}$$

la direction est

$$\frac{\vec{F}_t}{|\vec{F}_t|} = -\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

QUESTION 3 : Condensateur sphérique *(4 Points)*

Le condensateur sphérique illustré ci-contre est composé de deux diélectriques ayant la forme d'une demi-sphère (#1 et #2) et des permittivités ε_1 et ε_2 respectivement. Un potentiel V_0 est appliqué sur le conducteur central de rayon a et le conducteur externe de rayon b est mis à la terre.



3.1 ➤ (1,5 Pt) À l'aide du théorème de Gauss, trouver l'expression de la capacité du condensateur. Noter que les densités de charges sont différentes sur les deux moitiés de la sphère centrale.

3.2 ➤ (1,5 Pt) Supposons que le diélectrique #1 est remplacé par de l'air ($\sigma_1 = 0$) et que le diélectrique #2 possède une conductivité non nulle ($\sigma_2 \neq 0$). Trouver l'expression qui décrit la résistance de fuite du condensateur.

3.3 ➤ (1 Pt) Quelle est la puissance dissipée par le courant de fuite si la conductivité du diélectrique #2 est $\sigma_2 = 10^{-6}\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, $a = 1$ mm, $b = 10$ mm et qu'un courant de fuite de $1\ \mu$A circule dans le condensateur.

Solution

3.1 (1,5 Pt) À l'aide du théorème de Gauss, trouver l'expression de la capacité du condensateur.

Pour trouver la capacité du condensateur, déterminons tout d'abord l'expression de la charge avec le théorème de Gauss pour chaque hémisphère, ce qui donne

$$\int_0^\pi \int_0^\pi D_1 r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \varepsilon_1 E = Q_1 \tag{1}$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi D_2 r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \varepsilon_2 E = Q_2 \tag{2}$$

On aura donc

$$E = \frac{Q_1}{2\pi r^2 \varepsilon_1} = \frac{Q_2}{2\pi r^2 \varepsilon_2}$$

Le potentiel entre le conducteur interne et externe est donné par

$$V = -\int_b^a E d\rho = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_1}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{3}$$

$$= \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{4}$$

d'où

$$Q_1 = \frac{2\pi\varepsilon_1 V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$Q_2 = \frac{2\pi\varepsilon_2 V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

La capacité est donc égale à

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{2\pi\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \tag{5}$$

3.2 (1,5 Pt) Supposons que le diélectrique #1 est remplacé par de l'air ($\varepsilon_1 = 0$) et que le diélectrique #2 possède une conductivité non nulle ($\sigma_2 \neq 0$). Trouver l'expression qui décrit la résistance de fuite du condensateur.

Le courant de fuite est relié à la densité de courant J dans le conducteur par

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi J r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 J \tag{6}$$

car seulement une des deux demi-sphères est conductrice. Le champ électrique est aussi relié à J par

$$E(r) = \frac{J(r)}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \tag{7}$$

Le potentiel est donc

$$V = -\int_b^a E d\rho = -\frac{I}{2\pi\sigma}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{8}$$

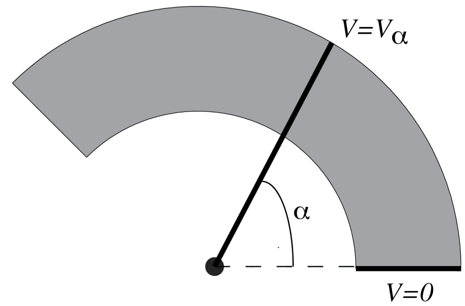
La résistance de fuite est alors

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{9}$$

3.3 (1 Pt) Quelle est la puissance dissipée par le courant de fuite si la conductivité du diélectrique #2 est $\sigma_2 = 10^{-6}\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $a = 1$ mm, $b = 10$ mm et qu'un courant de fuite de $I = 1\ \mu$A circule dans le condensateur.

La résistance est 143 MΩ. La puissance dissipée est égale à $I^2R = 0.143$ mW.

QUESTION 4 : **Potentiomètre** *(3 points)*



La figure ci-contre illustre un potentiomètre qui est formé d'un mince disque de conductivité σ, de rayon intérieur a, de rayon extérieur b et d'épaisseur c. Le coté horizontal du disque est mis à la terre. Une tige métallique peut être tournée autour d'un axe central tout en maintenant un contact avec la surface du disque. Cette tige fait un angle α avec l'horizontal et elle se trouve à un potentiel V_α. La résistance du potentiomètre est mesurée entre la tige et le conducteur horizontal à la terre.

4.1 ➤ (2.5 Pts) Quelle est la relation entre la résistance et l'angle α.

4.2 ➤ (0,5 Pt) Déterminer la résistance du potentiomètre si a=2 cm, b=3 cm, c=2 mm σ=1 S/m et que l'angle de la tige est $\alpha = \pi/3$.

Solution

4.1 (2,5 Pts) Quelle est la relation entre la résistance et l'angle α.

La solution de l'équation pour le potentiel dans le potentiomètre est donnée par $V(\phi) = A\phi + B$. En utilisant les conditions aux frontières ($V_0 = 0$ et $V(\alpha) = V_\alpha$) on obtient $B = 0$, $A = V_\alpha/\alpha$ et donc

$$V(\phi) = V_\alpha \frac{\phi}{\alpha}$$

Pour déterminer la résistance, il nous faut aussi connaître I le courant dans le potentiomètre, or

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ici, nous considèrerons une surface dans la direction $\hat{\phi}$ et donc

$$I = \sigma \int_0^c \int_a^b E_\phi(\rho) d\rho dz$$

Maintenant, évaluons $E_\phi(\rho,\phi)$ en utilisant

$$E_\phi(\rho) = -\frac{\partial V}{\rho \partial \phi} = -\frac{V_\alpha}{\rho \alpha}$$

et donc

$$I = -\sigma c \frac{V_\alpha}{\alpha} \ln(b/a)$$

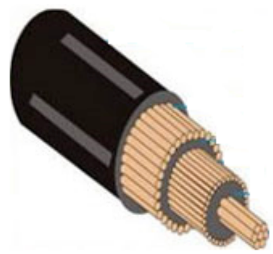
Finalement

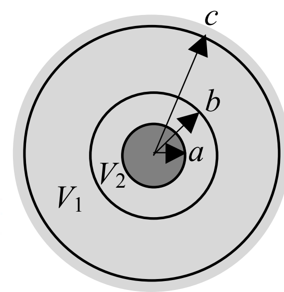
$$R = \frac{V_\alpha}{|I|} = \frac{\alpha}{\sigma c \ln(b/a)}$$

4.2 (0,5 Pt) Déterminer la résistance du potentiomètre si $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ mm $\sigma = 1$ S/m et que l'angle de la tige est $\alpha = \pi/3$.

En utilisant ces données, la valeur obtenue $R = 1291$ Ohms.

QUESTION 5 : Câble contre le vol d'énergie *(7 points)*





Dans certaines régions du monde, le vol d'électricité peut représenter jusqu'à 80% de la puissance distribuée. Des pinces crocodiles ou même des clous sont utilisés sur les câbles ordinaires pour voler de l'électricité. Les câbles concentriques, tel qu'illustré ci-contre, mettent en échec les voleurs en créant un court-circuit en cas de perçage. Ce type de câble est formé d'un conducteur central plein, de rayon externe a, entouré d'une première gaine conductrice mince de rayon b et d'une seconde gaine conductrice mince de rayon c. Un diélectrique de permittivité ε sépare les conducteurs et recouvre le câble de longueur L. Le conducteur central à un potentiel de 120 V, le conducteur intermédiaire à un potentiel de -120 V, et le conducteur externe à un potentiel nul.

5.1 ➢ (2 Pts) Appliquer l'équation de Laplace pour développer les équations qui décrivent la distribution de potentiel $V_1(\rho)$ entre $\rho = b$ et $\rho = c$, ainsi que $V_2(\rho)$ entre $\rho = a$ et $\rho = b$ pour les conditions aux frontières V_a, V_b et V_c correspondant aux potentiels aux rayons a, b et c respectivement.

5.2 ➢ (2 Pts) En utilisant les résultats précédents, donner une expression pour les capacités C_1 (entre les conducteurs b et c) et C_2 (entre les conducteurs a et b) respectivement.

5.3 ➢ (2 Pts) En utilisant le dessin fourni à la page 4 qui représente une section du câble, tracer une esquisse du champ électrique dans les 2 diélectriques entre les 3 conducteurs. Surtout, bien distinguer les lignes équipotentielles et les lignes de flux électrique.

5.4 ➢ (1 Pt) À partir de ce dessin, estimer les valeurs numériques des capacités C_1 et C_2.

Solution

5.1 (2 Pts) Appliquer l'équation de Laplace pour développer les équations qui décrivent la distribution de potentiel $V_1(\rho)$ entre $\rho = b$ et $\rho = c$, ainsi que $V_2(\rho)$ entre $\rho = a$ et $\rho = b$ pour les conditions aux frontières V_a, V_b et V_c qui correspondent aux potentiels aux rayons a, b et c respectivement.

La solution de l'équation de Laplace en géométrie cylindrique infinie est

$$V(\rho) = A\ln(\rho) + B$$

Pour la région $b \leq \rho \leq c$, on connaît déjà V_b et V_c et donc en supposant que $V_1(\rho) = A_1\ln(\rho) + B_1$,

$$\begin{aligned} V_1(b) = V_b = A_1\ln(b) + B_1 \\ V_1(c) = V_c = A_1\ln(c) + B_1 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{V_c - V_b}{\ln(c/b)} \\ B_1 &= V_c - \frac{(V_c - V_b)\ln(c)}{\ln(c/b)} \end{aligned}$$

De la même façon on aura $V_2(\rho) = A_2\ln(\rho) + B_2$ avec

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{V_b - V_a}{\ln(b/a)} \\ B_2 &= V_b - \frac{(V_b - V_a)\ln(b)}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

5.2 (2 Pts) En utilisant les résultats précédents, donner une expression pour les capacités C_1 (entre les conducteurs b et c) et C_2 (entre les conducteurs a et b) respectivement.

Les capacités C_1 et C_2 sont données par

$$C_i = \frac{Q_i}{\Delta V_i}$$

avec $\Delta V_1 = V_c - V_b$ et $\Delta V_2 = V_b - V_a$. Il nous reste à déterminer les charges. Or

$$Q_i(\rho) = \int_S \vec{D}_i \cdot d\vec{s} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \varepsilon E_{i,\rho} \rho d\phi dz = 2\pi L\varepsilon\rho E_{i,\rho}$$

et sachant que

$$E_{i,\rho} = -\frac{\partial V_i(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{A_i}{\rho}$$

on obtient finalement

$$C_1 = \frac{2\pi L\varepsilon A_1}{\Delta V_1} = \frac{2\pi L\varepsilon}{\ln(c/b)}$$
$$C_2 = \frac{2\pi L\varepsilon A_2}{\Delta V_2} = \frac{2\pi L\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

5.3 (2 Pts) En utilisant le dessin fourni à la page 4 qui représente une section du câble, tracer une esquisse du champ électrique dans les 2 diélectriques entre les 3 conducteurs. Surtout, bien distinguer les lignes équipotentielles et les lignes de flux électrique;

Le résultat est présenté à la figure 1. Le lignes de champs sont radiales et les équipotentielles sont des cercles.

5.4 (1 Pt) À partir de ce dessin, estimer les valeurs numériques des capacités C_1 et C_2.

Pour chacun des demi-cylindres on a $n_p = 5$ condensateur en parallèle et $n_s = 1$ en série. La capacité de ce fil est donc

$$C_1 = C_2 = \frac{n_p}{n_s}\varepsilon L = 5\ \mu\mathrm{F}$$

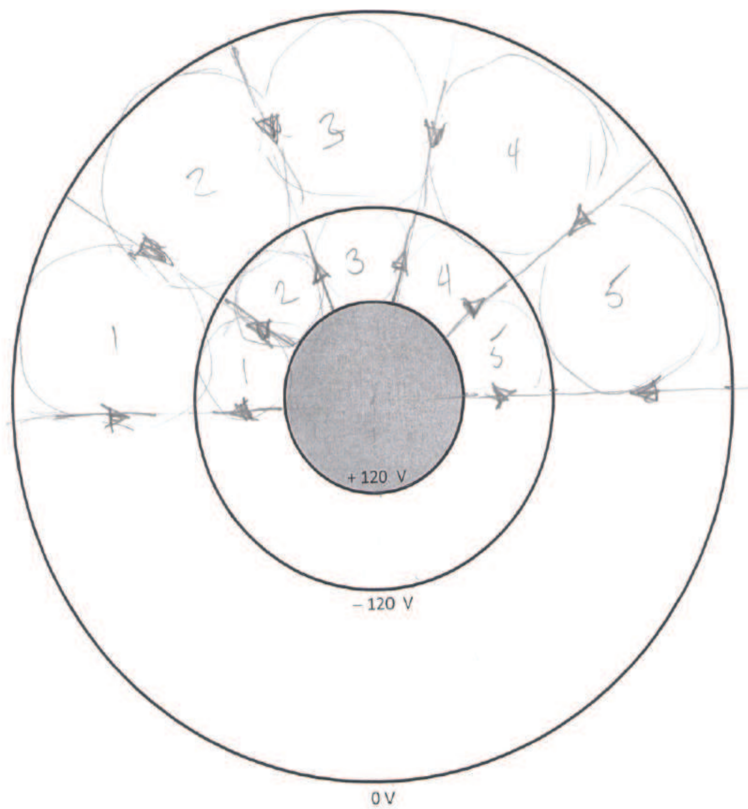


Figure 1: Esquisse du champ électrique dans les 2 diélectriques entre les 3 conducteurs