PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 2	2 heures	2.8.2, 2.8.3, 2.8.4, 2.8.6

De Albert Einstein« La théorie c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne, la pratique c'est quand tout fonctionne mais que l'on ne sait pas pourquoi»

2.8.2 Générateur électrostatique

Un condensateur plan est formé de deux plaques conductrices de surface S, séparées dans l'air par une distance d_1. Une charge Q se répartit uniformément sur chaque plaque parce que $d_1 <<$ côtés.

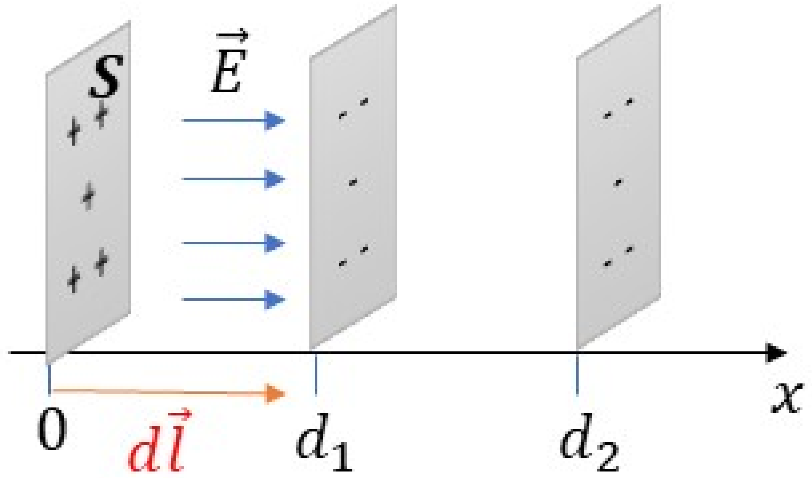
Les plaques sont ensuite mécaniquement éloignées l'une de l'autre jusqu'à une distance d_2 ($d_2 <<$ côtés).

a) Quelle est la différence de potentiel entre les plaques avant et après le déplacement ?

b) Quel est le travail requis pour éloigner les deux plaques ?

Les solutions sont rédigées Akila Hidouche et les énoncés sont du Manuel

2.8.2 Générateur électrostatique



a) La différence de potentiel entre les plaques:

$$V_{0d} = V(0) - V(d) = -\int_d^0 \vec{E}.d\vec{l} = -\int_d^0 \vec{E}.dx\,\hat{x}$$

Connaissant le champ électrique à l'intérieur du condensateur plan (voir notes du cours pour la démonstration):

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{Q}{S\,\varepsilon_0}\hat{x}$$

ρ_s est la densité de charge surfacique

$$dq = \rho_s dS \rightarrow \int dq = \int \rho_s dS \rightarrow Q = \rho_s S$$

Nous remplaçons dans V_{0d}

$$V_{0d} = -\int_d^0 \frac{Q}{S\,\varepsilon_0}\hat{x}.dx\,\hat{x} = -\int_d^0 \frac{Q}{S\,\varepsilon_0}dx = \frac{Q\,d}{S\,\varepsilon_0}$$

Avant déplacement:

$$V_{0d_1} = \frac{Qd_1}{S\,\varepsilon_0}$$

Après déplacement:

$$V_{0d_2} = \frac{Qd_2}{S\,\varepsilon_0}$$

b) Le travail requis pour éloigner les deux plaques:

$$W_{ext} = \Delta K + \Delta U$$

$$= variation\ d'énergie\ cinétique + variation\ d'énergie\ potentielle$$

$\Delta K = 0$ (vitesse constance) $\longrightarrow W_{ext} = \Delta U = U_2 - U_1$

$$U = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2\,dV \qquad (intégrale\ sur\ le\ volume)$$

$$\Delta U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{d_2}\left(\frac{Q}{S\,\varepsilon_0}\right)^2 dx \iint dy\,dz - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{d_1}\left(\frac{Q}{S\,\varepsilon_0}\right)^2 dx \iint dy\,dz$$

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2\,S\,\varepsilon_0}(d_2 - d_1)$$

Akila H.

Séance 2	2 heures	2.8.2, 2.8.3, 2.8.4, 2.8.6

2.8.3 Ligne de transport d'énergie

Une ligne de transport d'énergie est constituée de deux câbles cylindriques de longueur $l = 10$ km, de rayon $a = 1$ cm et dont les axes dont séparés d'une distance $d = 2$ m. Une différence de potentiel de 69 kV est appliquée entre les deux câbles. Quelle est la charge Q portée par chaque câble ? On considère que les charges se répartissent uniformément à la surface des câbles et que le potentiel est uniforme sur chaque câble.

2.8.3 Ligne de transport d'énergie

Pour un câble (cylindre):

Voir le Td du chapitre 1 pour le calcul du champ électrique à l'extérieur d'un cylindre:

$$\vec{E}_\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \rho\, l}\,\hat{\rho}$$

Pour deux câbles, le champ se calcul en utilisant le principe de superposition:

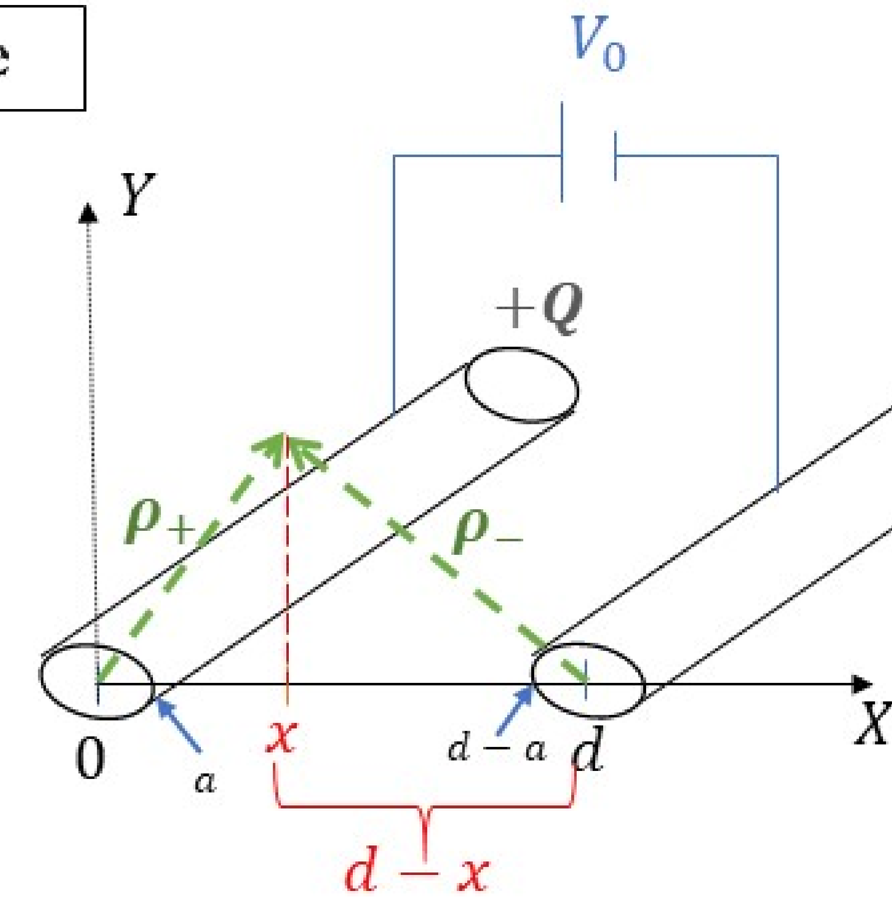
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \rho_+ l}\,\hat{\rho}_+ + \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 \rho_- l}\hat{\rho}_-$$

avec : $\rho_+ = x \quad ; \quad \hat{\rho}_+ = \hat{x} \qquad et$

$$\rho_- = d - x \,; \quad \hat{\rho}_- = -\hat{x}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 x\, l}\hat{x} + \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 (d-x) l}(-\hat{x})$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right]\hat{x}$$



$$V_{a(d-a)} = V_a - V_{(d-a)} = V_0 = -\int_{d-a}^{a} \vec{E}.d\vec{x}$$

$$V_0 = -\int_{d-a}^{a} \vec{E}.d\vec{x} = -\int_{d-a}^{a} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right]\hat{x}.\hat{x}\, dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_{d-a}^{a}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right] dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_{d-a}^{a}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right]dx$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left\{ln\,x\Big|_{d-a}^{a} - ln(d-x)\Big|_{d-a}^{a}\right\}$$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\big(ln(a) - ln(d-a) - ln(d-a) - ln(a)\big) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\;[2ln(a) - 2ln(d-a)]$$

$$V_0 = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l}ln\left(\frac{a}{d-a}\right) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l}ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad Q = \frac{\pi\varepsilon_0 l\;\;V_0}{ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} = 3,62\;mC$$

Akila H.

PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 2	2 heures	2.8.2, 2.8.3, 2.8.4, 2.8.6

2.8.4 Tube diode

Un tube diode est constitué d'un tube à vide qui contient une longue cathode métallique et cylindrique de rayon a qui est entourée d'une anode métallique cylindrique de rayon b. La cathode est chauffée de façon à émettre des électrons avec une densité $\rho_v(\rho) = -k/\rho$ entre la cathode et l'anode. La cathode est mise à la masse ($V = 0$) tandis que l'anode est laissée flottante.

a) Quelle est l'expression du champ électrique entre l'anode et la cathode ?

b) Si $a = 1$ mm, $b = 10$ mm, $k = 10^{-6}$ C/m^2, quel est le potentiel de l'anode ?

2.8.4 Tube diode

a) Trouvons le champ électrique dans la région $a < \rho < b$: symétrie cylindrique; surface de Gauss de rayon ρ:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S} = Q_{in} \quad avec \qquad Q_{in} = \int \rho_V dV$$

En coordonnées cylindriques: $dV = \rho d\rho\, d\phi\, dz$

$$Q_{in} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^\rho -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{\rho}}\, \rho d\rho\, d\phi\, dz = 2\pi k l\, (\rho - a)$$

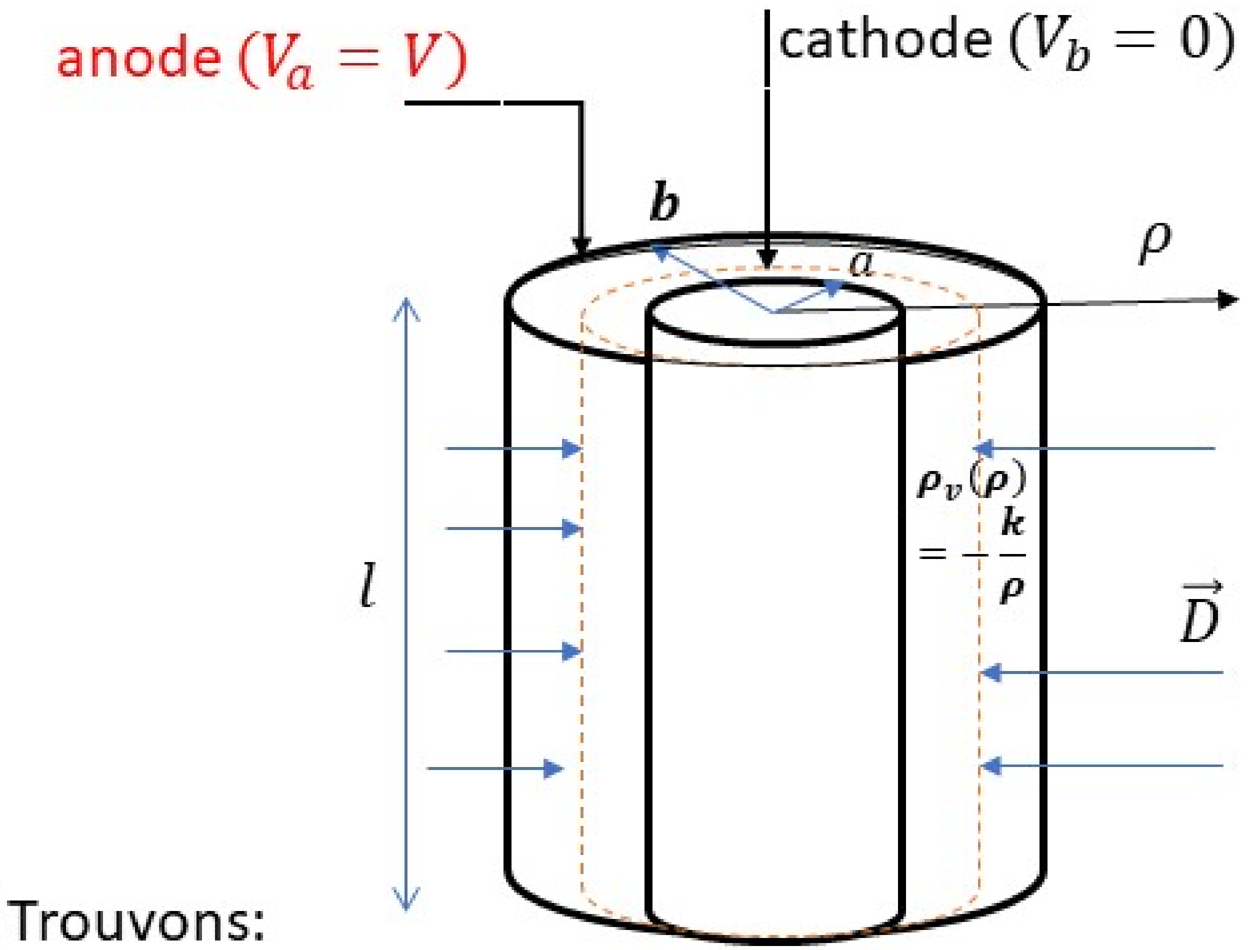
Or

$$\oint \vec{D}.d\vec{S} = D \int dS = D\, 2\pi\rho\, l$$

Voir Td 1 pour le détail du calcul de D pour un cylindre

$$\Longrightarrow D\, 2\pi\rho l = 2\pi k l\, (\rho - a)$$

$$\Longrightarrow D = k\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = -\frac{k}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\hat{\rho}$$



b) Trouvons:

$$V_{ab} = V_a - V_b = V - 0 = -\int_b^a \vec{E}.d\vec{l} \qquad avec \quad d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho}$$

$$V = -\int_b^a E(\rho)\, d\rho = -\int_b^a \frac{k}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) d\rho$$

$$V = -\frac{k}{\varepsilon_0}\left[\int_b^a d\rho - a\int_b^a \frac{d\rho}{\rho}\right] = -\frac{k}{\varepsilon_0}\left[(a-b) - a\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right]$$

$$V = \frac{k}{\varepsilon_0}\left[a\ln\left(\frac{a}{b}\right) - (a-b)\right] = 756{,}43\ \text{V}$$

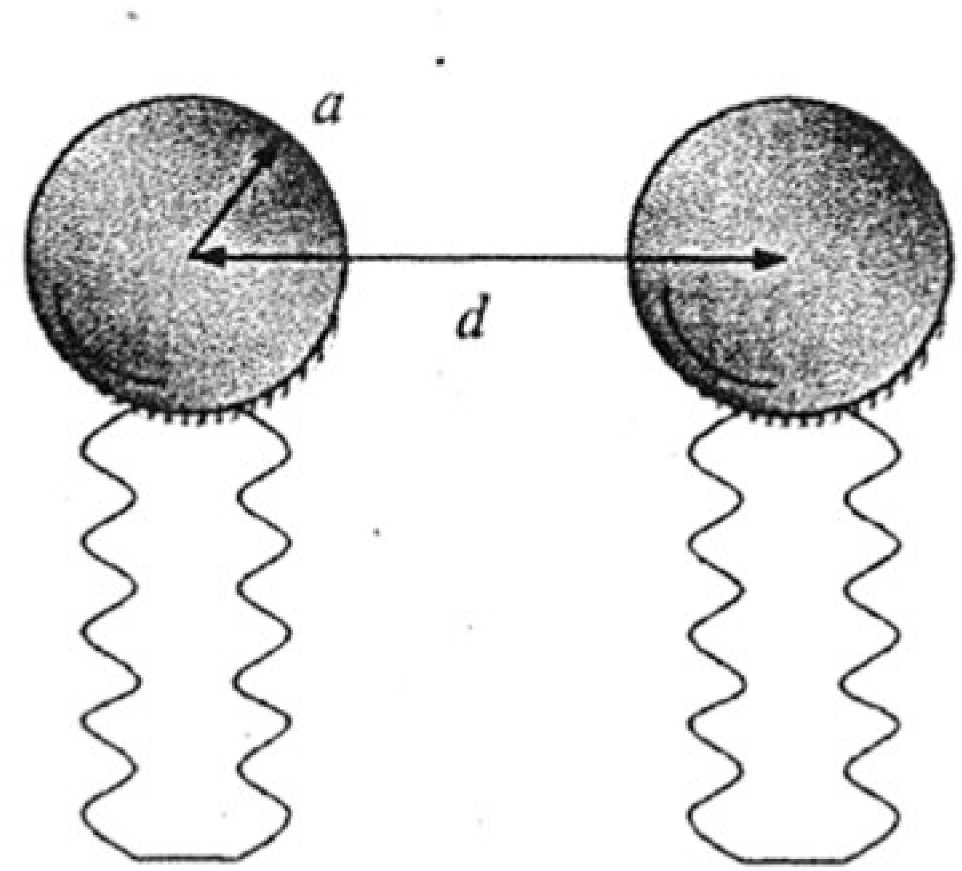
Akila H.

PHS1102 – Champs électromagnétiques

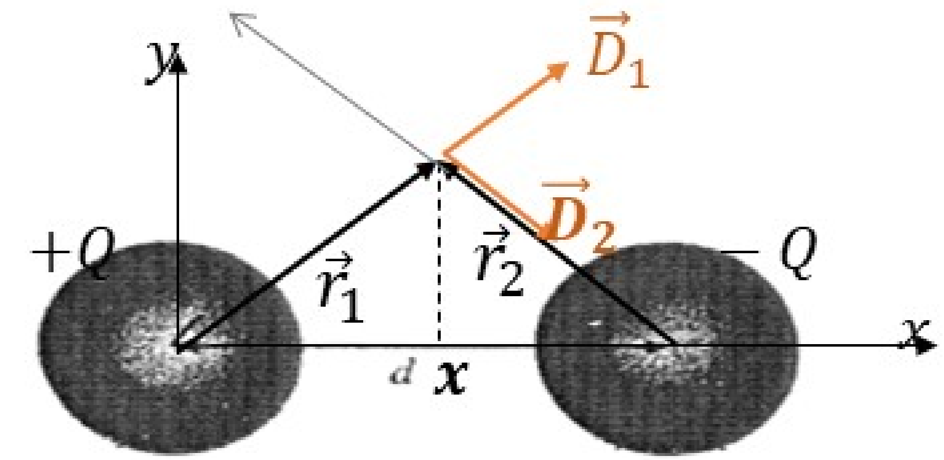
Séance 2	2 heures	2.8.2, 2.8.3, 2.8.4, 2.8.6

2.8.6 Condensateur à haute tension

Un condensateur à haute tension est formé de deux sphères métalliques de rayon *a*, dont les centres sont espacés d'une distance *d*, et qui sont situées dans l'air. Quelles sont les charges portées par les sphères lorsqu'une différence de potentiel V_0 est appliquée entre les deux sphères? (parce que $a<<d$, les charges se répartissent uniformément à la surface des sphères qui sont isolées du sol par des supports en céramique).



2.8.6 Condensateur à haute tension



- 2 sphères; symétrie sphérique; théorème de Gauss;
- Principe de superposition;

Pour une sphère:

$$\phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = Q_{in} \longrightarrow \phi = \oint \vec{D}.d\vec{S} = D \oint dS = D\ 4\pi r^2 \Longrightarrow D = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2} \Longrightarrow \vec{D} = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2}\ \hat{r}$$

Pour la sphère de gauche: $\vec{D}_1 = \frac{Q}{4\pi r_1^2}\ \hat{r}_1$

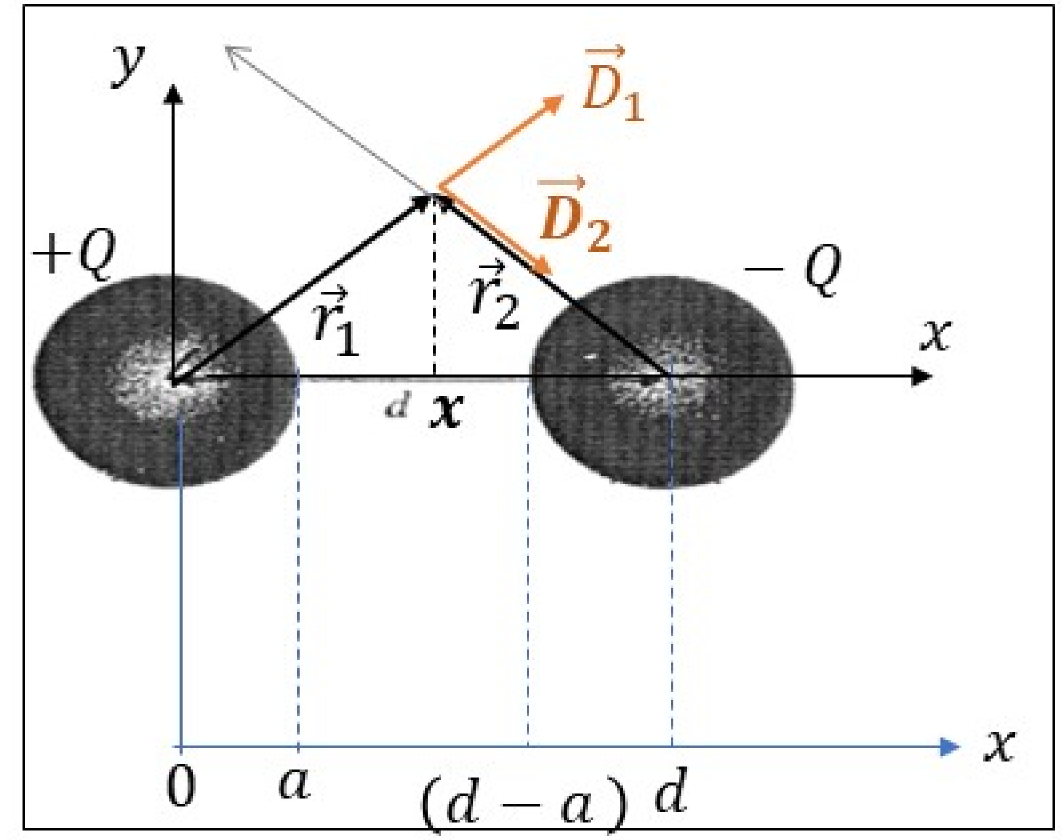
Pour la sphère de droite: $\vec{D}_2 = \frac{-Q}{4\pi r_2^2} \hat{r}_2$

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}\ \hat{r}_1 + \frac{-Q}{4\pi r^2} \hat{r}_2$$

$$\vec{D} = \vec{D}_{1x} + \vec{D}_{2x} = \frac{Q}{4\pi x^2} \hat{x} + \frac{-Q}{4\pi (d-x)^2} (-\hat{x}) = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right] \Longrightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right] \hat{x}}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right] \hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right]\hat{x} \qquad et \quad V_{a(d-a)} = V_a - V_{d-a} = V_0 = -\int_{d-a}^{a} \vec{E}.d\vec{l}$$



Ici aussi:

$$\vec{E} // d\vec{l} // d\vec{x} \qquad et \qquad d\vec{l} = dx\,\hat{x} \;\Rightarrow\; \vec{E}.\,dx\,\hat{x} = E\,dx$$

$$V_0 = -\int_{d-a}^{a} E\,dx = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{d-a}^{a}\frac{dx}{x^2} + \int_{d-a}^{a}\frac{dx}{(d-x)^2}\right]$$

Sachant que:

$$\int_{d-a}^{a}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{d-a}^{a} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} = \frac{2a-d}{a(d-a)}$$

$$\int_{d-a}^{a}\frac{dx}{(d-x)^2} = +\frac{1}{(d-x)}\Bigg|_{d-a}^{a} = \frac{1}{d-a} - \frac{1}{d-d+a} = \frac{2a-d}{a(d-a)}$$

Donc:

$$V_0 = -\frac{2\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2a-d}{a(d-a)}\right] = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2a-d}{a(d-a)}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\left[\frac{d-2a}{a(d-a)}\right]}}$$

Akila H.