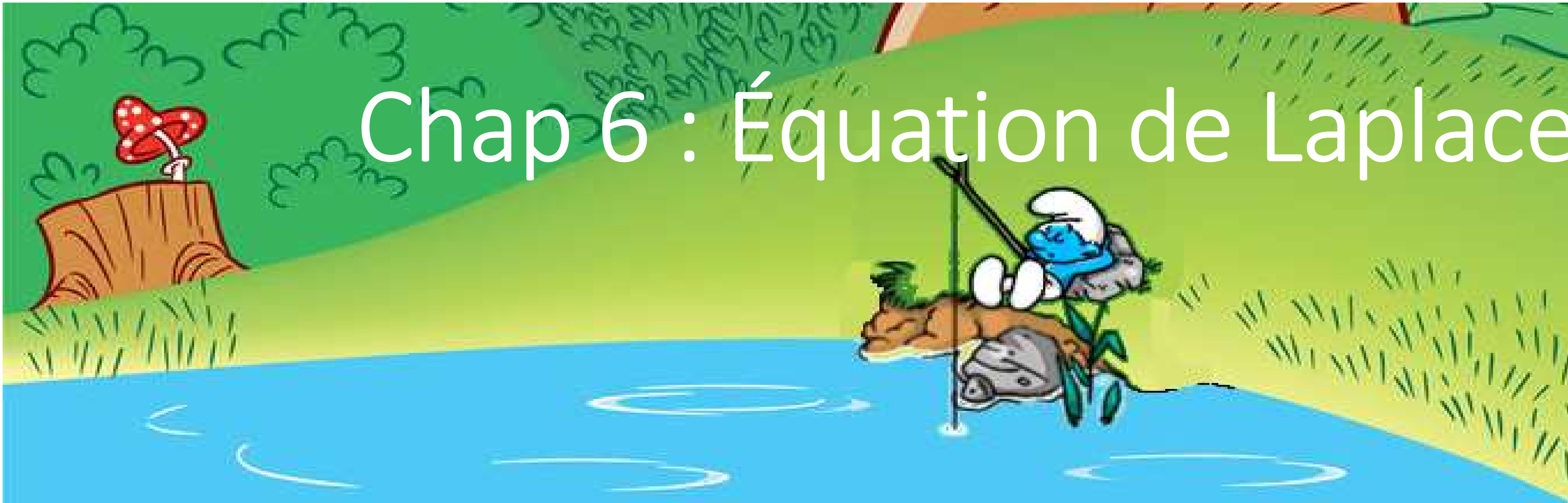
Chap 6 : Équation de Laplace



La Divergence
Équation Laplace
Conditions frontières
Méthode Numérique (DEVOIR)

Définition de la divergence

Si $\vec{F}(x,y,z)$ est un champ vectoriel, $\nabla \cdot \vec{F}$ **est un champ scalaire** :

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left[F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} \right]$$

- Coordonnées cartésiennes :

$$\nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

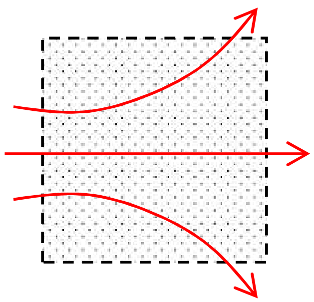
- Coordonnées cylindriques :

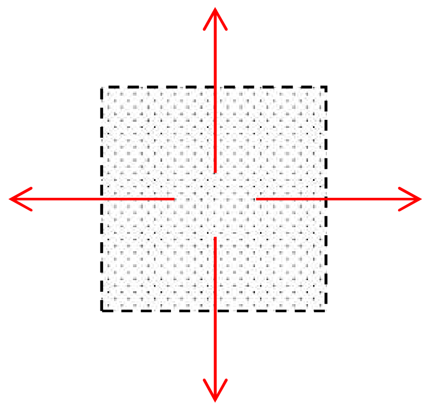
$$\nabla \cdot \vec{F}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

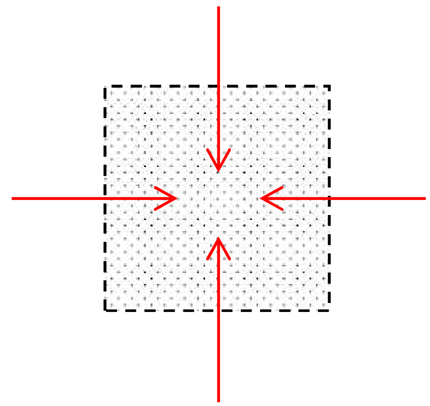
- Coordonnées sphériques :

$$\nabla \cdot \vec{F}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

Divergence





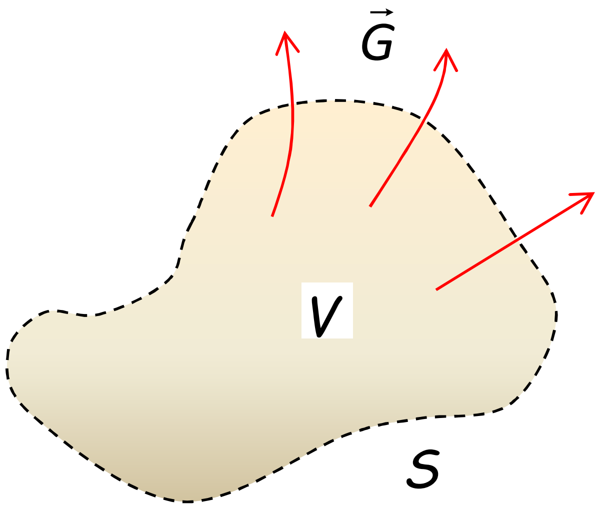


$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{D} > 0 \qquad \nabla \cdot \vec{D} < 0$$

Théorème de la divergence

S'applique à n'importe quel champ vectoriel *G*.

Transformer intégrale sur une surface fermée *S*
en intégrale dans volume *V* borné, par *S* :



$$\boxed{\oint_S \vec{G} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{G}\, \mathrm{d}v}$$

Équations de Poisson et Laplace dans un diélectrique

Maxwell #1: $\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$

Permittivité ε: $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$

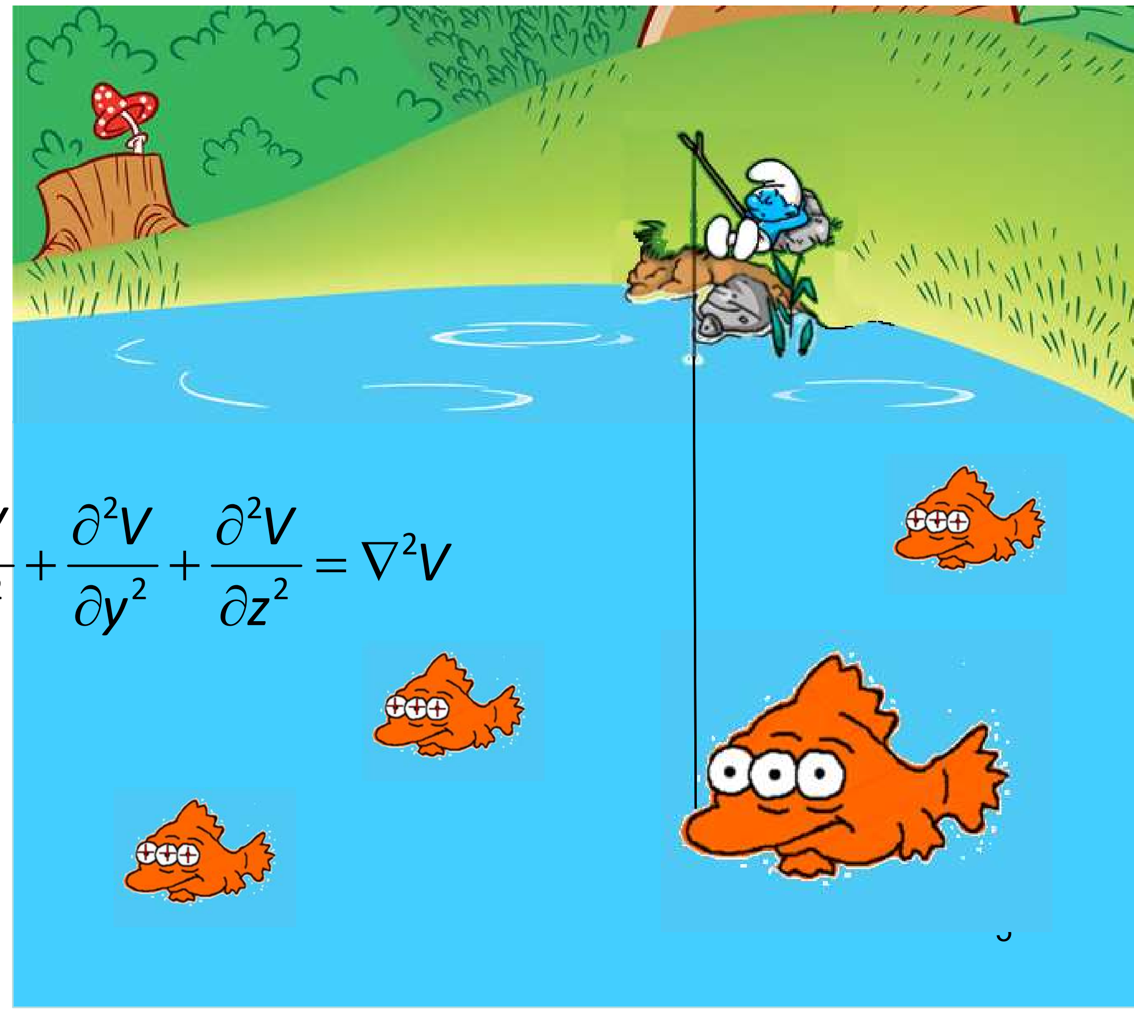
Gradient: $\nabla \cdot (-\nabla V) = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$

Opérateur laplacien:

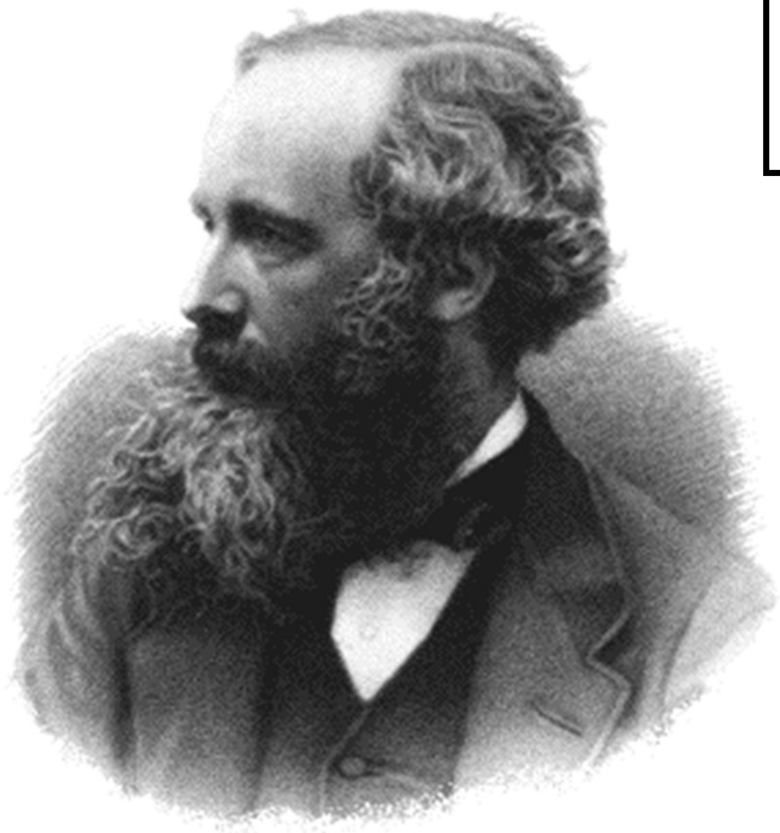
$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V$$

Équation de Poisson: $\boxed{\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}}$

Équation de Laplace: $\boxed{\nabla^2 V = 0}$



Méthode Laplace analytique

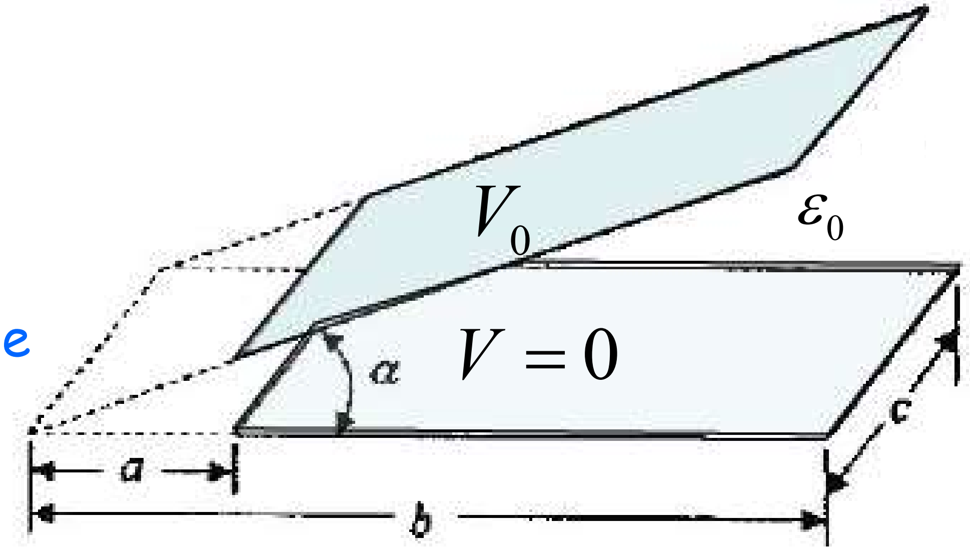


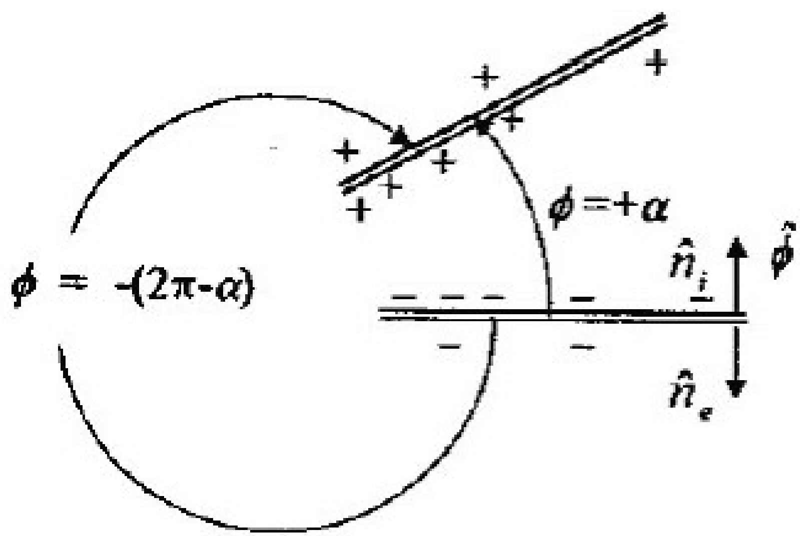
$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

Solution générale
$V(x) = Ax + B$
$V(\varphi) = A\varphi + B$
$V(\rho) = A\ln(\rho) + B$
$V(r) = \dfrac{A}{r} + B$
$V(\theta) = A\ln\left[\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] + B$

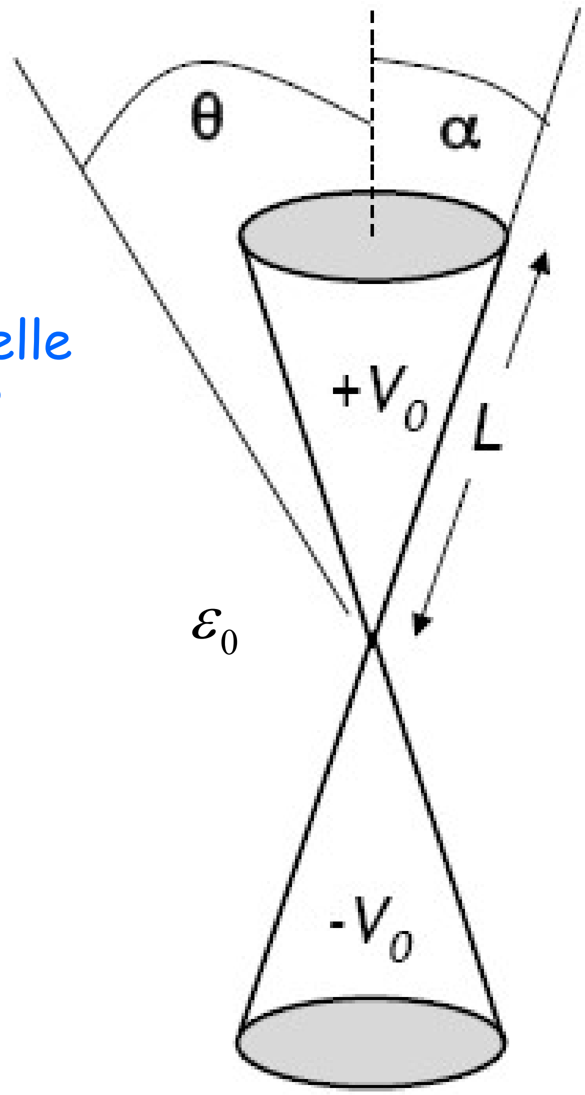
Condensateur en coin : exemple

V varie selon quelle coordonnée ?





Antenne double cône : exemple



V varie selon quelle coordonnée ?

Problèmes de conditions aux frontières

Résolution: trouver $V(r)$ qui satisfait à :

1. L'équation de Laplace
2. Les conditions aux frontières

Théorème de la solution unique dit que :

« Si une fonction de V satisfait à l'équation de Laplace ainsi qu'à toutes les conditions aux frontières, c'est la seule solution possible »

Types de conditions aux frontières

1. Conditions de Dirichlet

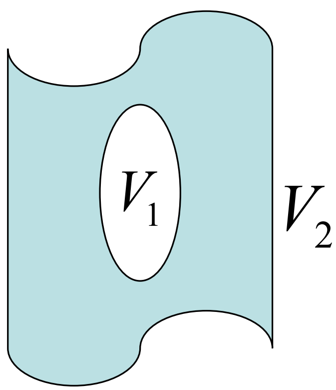
V(r) connue sur toute la surface entourant le domaine.

2. Conditions de Neumann

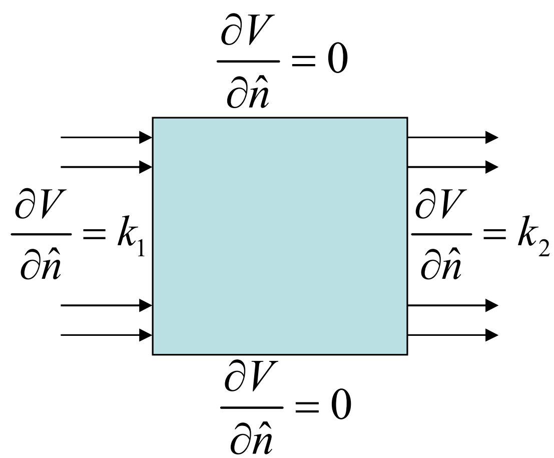
distribution de dérivée normale de V connue sur surface entourant le domaine.

3. Conditions mixtes

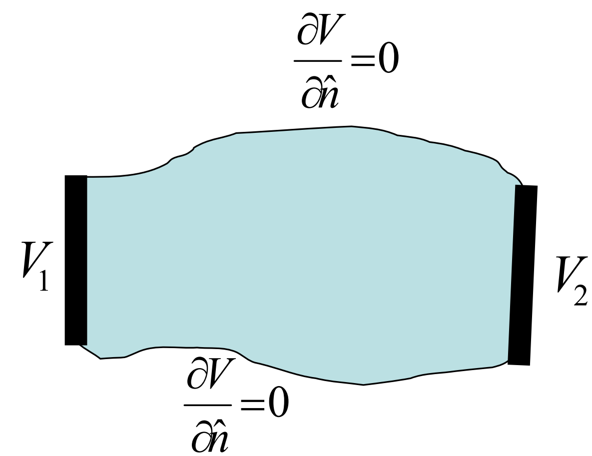
V(r) connue sur partie de surface entourant le domaine, distribution de dérivée normale de V connue sur reste de surface.



Dirichlet

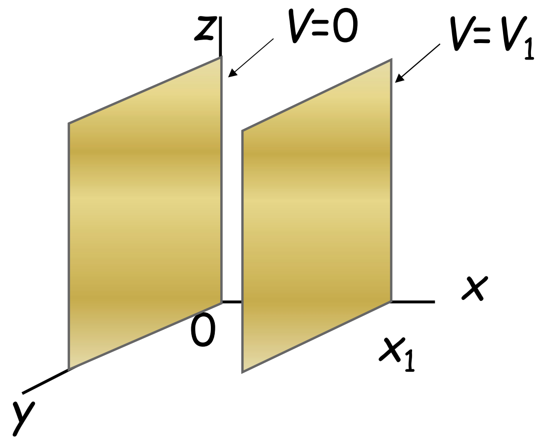


Neumann



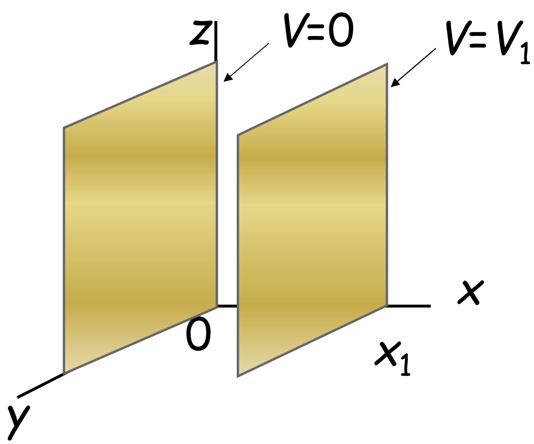
Mixtes

Intégration de l’équation de Laplace 1D



Intégration de l'équation de Laplace 1D

$$\nabla^2 V = 0$$

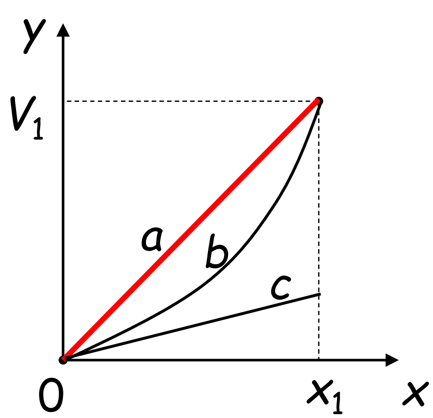


par symétrie: $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

Ceci implique constante: $\dfrac{\partial V}{\partial x} = A$

Intégration: $V = \int \partial V = \int A\,\partial x = Ax + B$



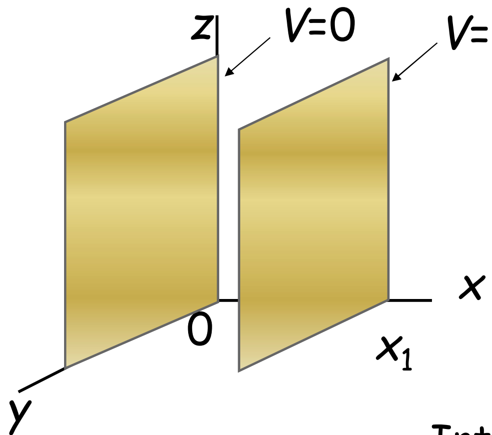
Conditions frontières: $V = A\,0 + B = 0$ $\quad B = 0$

$V = Ax_1 = V_1$ $\quad A = V_1/x_1$

solution particulière: $\boxed{V = \left(\dfrac{V_1}{x_1}\right)x}$

Capacité du Condensateur plan

$$V = \left(\frac{V_1}{x_1}\right)x$$



Champ électrique : $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}\hat{x} = -\frac{V_1}{x_1}\hat{x}$

Densité de flux électrique : $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = -\frac{\varepsilon_0 V_1}{x_1}\hat{x}$

Interface conducteur-diélectrique (règle 5) :

$$D_{N,1} = \rho_S$$

$$\rho_S = \frac{\varepsilon_0 V_1}{x_1}$$

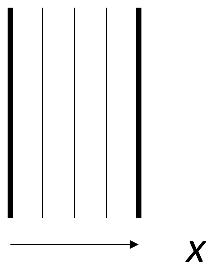
$$\boxed{V_1 = \frac{\rho_S x_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q x_1}{\varepsilon_0 S}}$$

On obtient même résultat qu'avec loi de Coulomb ou thm de Gauss.

Capacité : $\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1} = \frac{\varepsilon_0 S}{x_1}}$

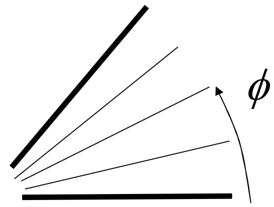
Les cinq équations générales (1D)

Cartésien

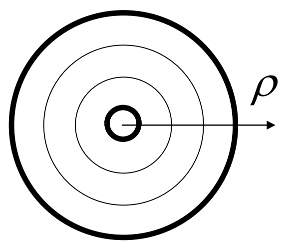


$$V(x) = Ax + B$$

Cylindrique

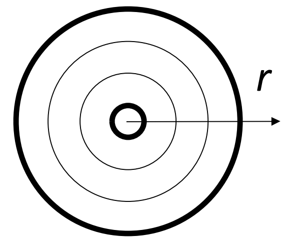


$$V(\phi) = A\phi + B$$

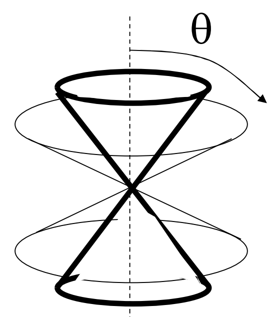


$$V(\rho) = A\ln\rho + B$$

Sphérique



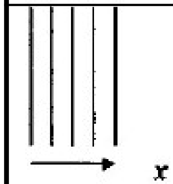
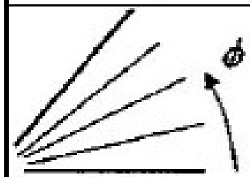
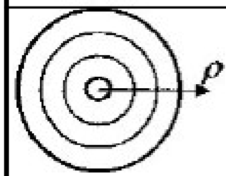
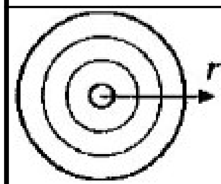
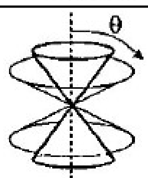
$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$



$$V(\theta) = A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + B$$

NOTE:
angles exprimés en radian et non en degré

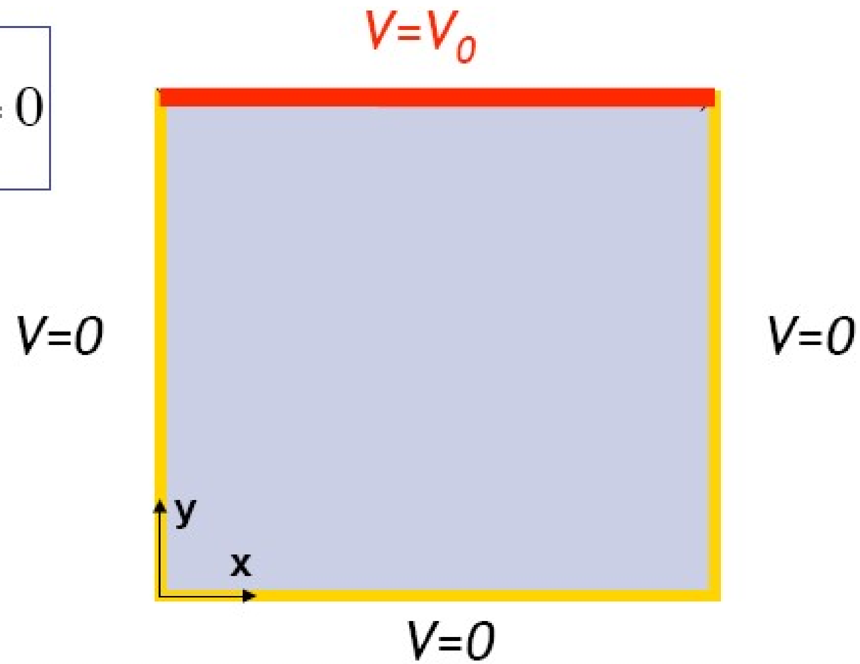
Solutions générales de l'équation de Laplace 1D

Variables	Équation de Laplace	Solution générale
 $x\ y\ z$	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$	$V(x) = Ax + B$
 φ	$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$	$V(\varphi) = A\varphi + B$
 ρ	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0$	$V(\rho) = A\ln(\rho) + B$
 r	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$	$V(r) = \frac{A}{r} + B$
 θ	$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0$	$V(\theta) = A\ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + B$

Diélectrique à section rectangulaire : exemple

Quelle est V(r) dans le diélectrique ?

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$



Équation de Laplace en 2D :
V dépend à la fois de x et de y

(aucune solution simple)

Méthodes numériques

Trouver solution qui satisfait l'équation de Laplace et conditions aux frontières

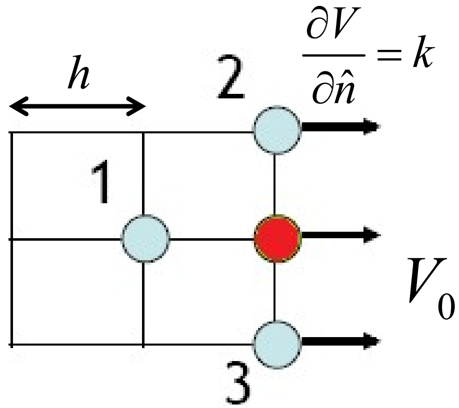
Calculer numériquement V sur les nœuds (points de calcul : petits éléments de volume ou de surface) dont l'ensemble constitue le système à l'étude.

Organigramme

V[*i*, *j*]	valeurs de potentiel dans un tableau
Vnouveau	potentiel nouvellement calculé par la moyenne des 4 voisins
Seuil	seuil de tolérance d'écart entre deux itérations
Nitera	nombre d'itérations
MaxItera	valeur maximale d'itérations
Convergence	variable logique indiquant si le système converge

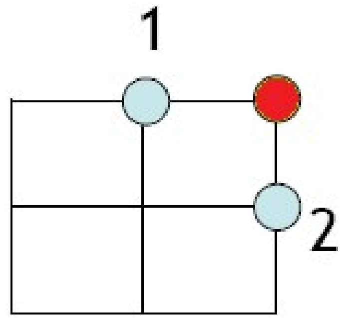
```
Initialiser le tableau V (à zéro et aux frontières)
Nitera ← 0
Répéter :
  Incrémenter Nitera
  Convergence ← vrai

  Pour chaque point inconnu (i, j), répéter:
      Vnouveau ← moyenne des 4 voisins
      Si | Vnouveau – V[i, j] | > Seuil
          Alors Convergence ← faux
      V[i, j] ← Vnouveau
Jusqu'à ce que Convergence soit vrai ou que Nitera > MaxItera
```

Règles aux interfaces conducteur/diélectrique

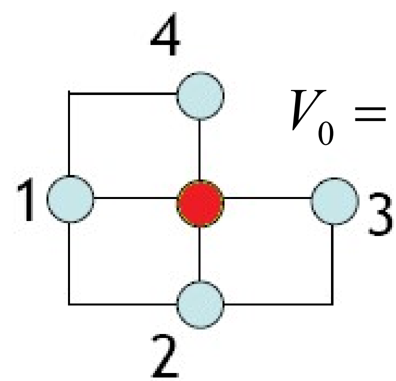


$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4} + \frac{hk}{2}$$

généralement,
$k = 0$

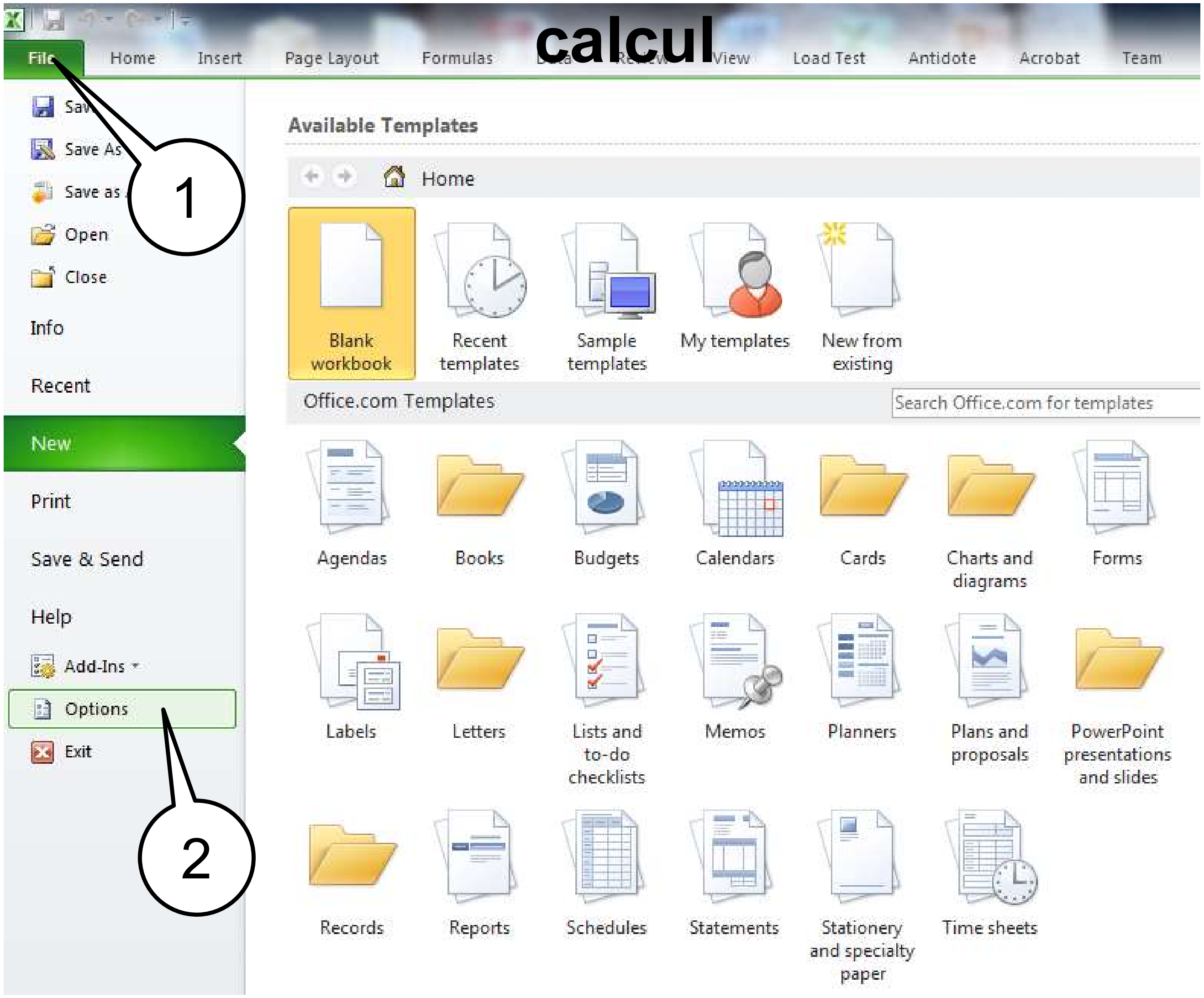


$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

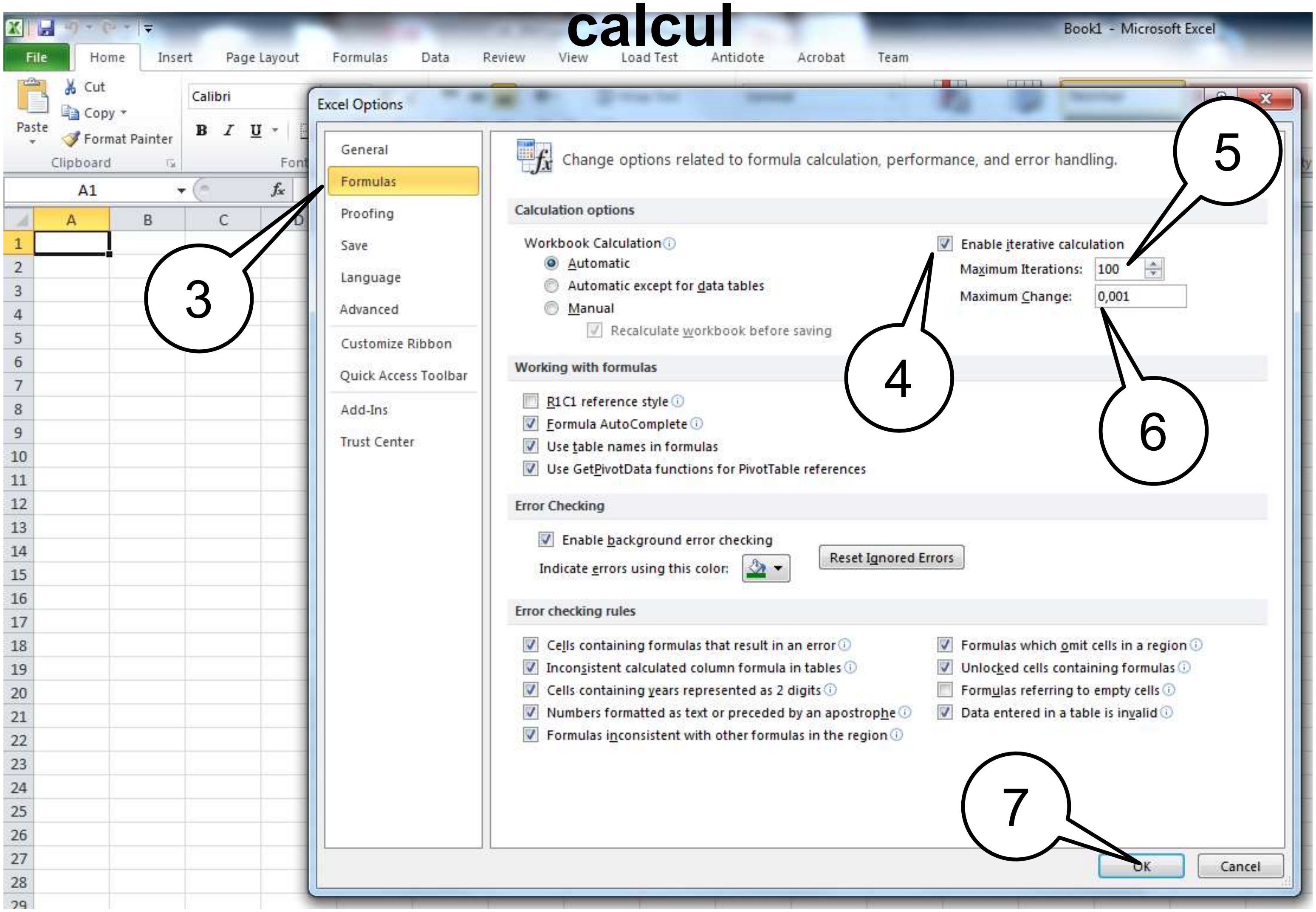


$$V_0 = \frac{2V_1 + 2V_2 + V_3 + V_4}{6}$$

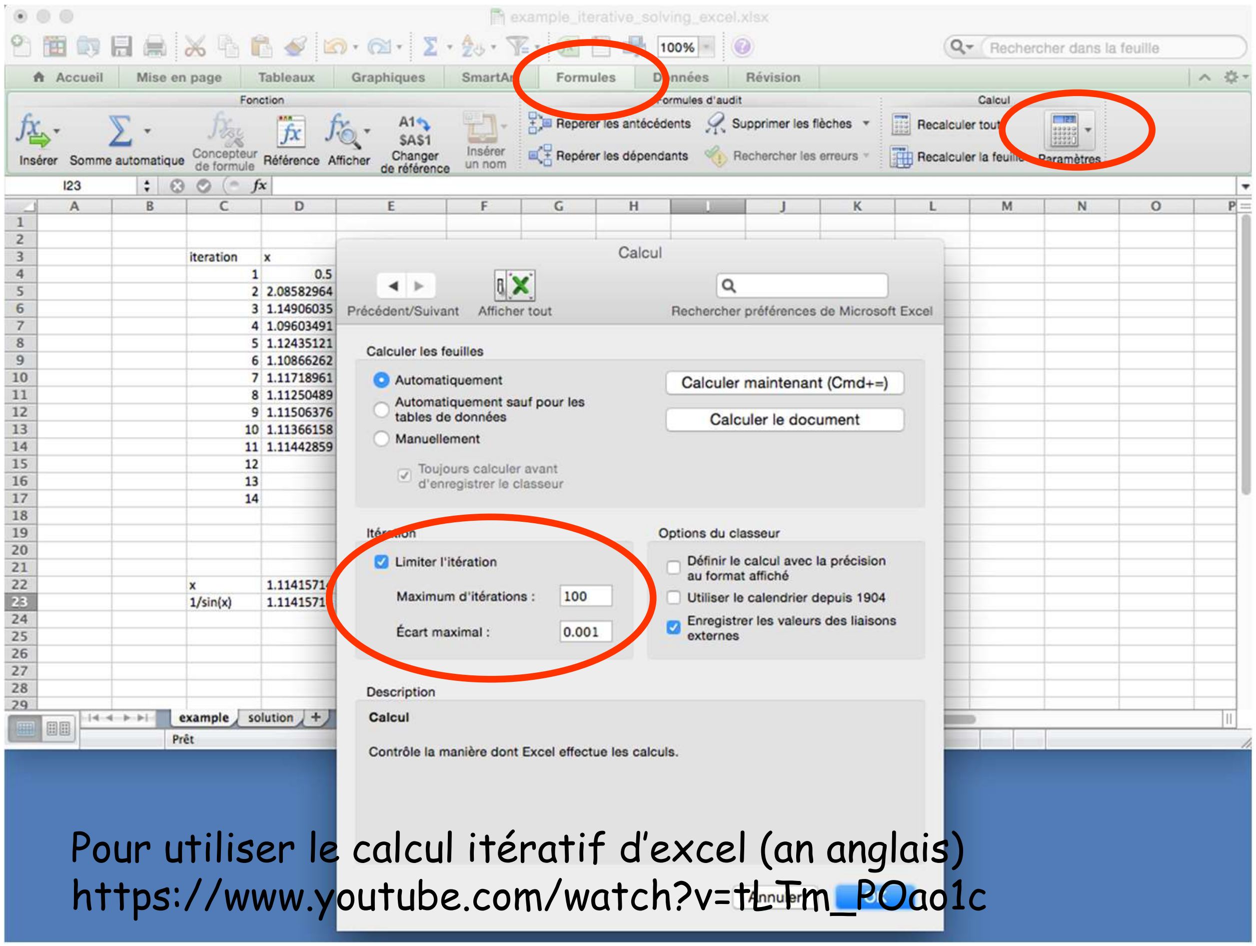
Excel 2011: réglage des paramètres de calcul



Excel 2011: réglage des paramètres de calcul

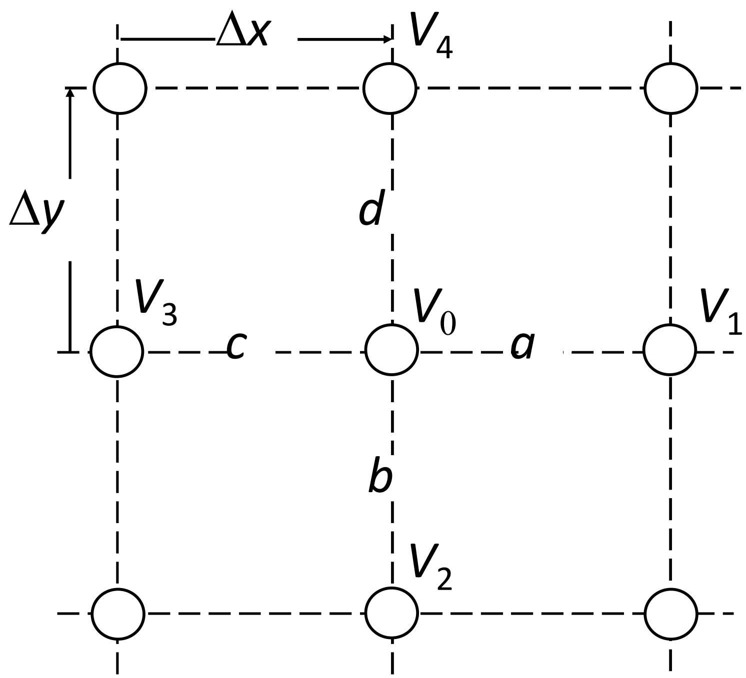


Excel 2013



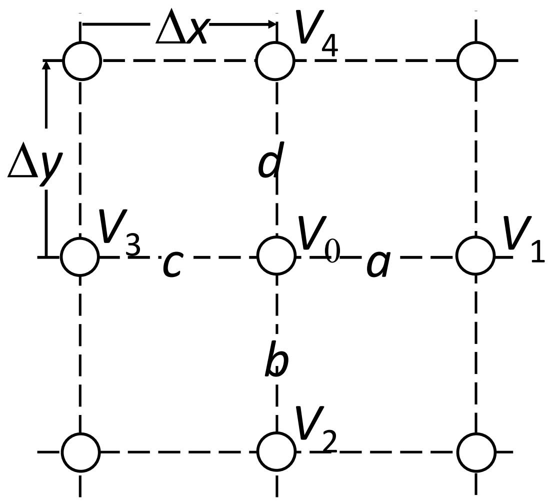
Pour utiliser le calcul itératif d'excel (an anglais)
https://www.youtube.com/watch?v=tLTm_POao1c

Laplacien numérique



Éléments carrés: $h = \Delta x = \Delta y$

Laplacien numérique



$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \approx \frac{V_1 - V_0}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \approx \frac{V_0 - V_3}{\Delta x}$$

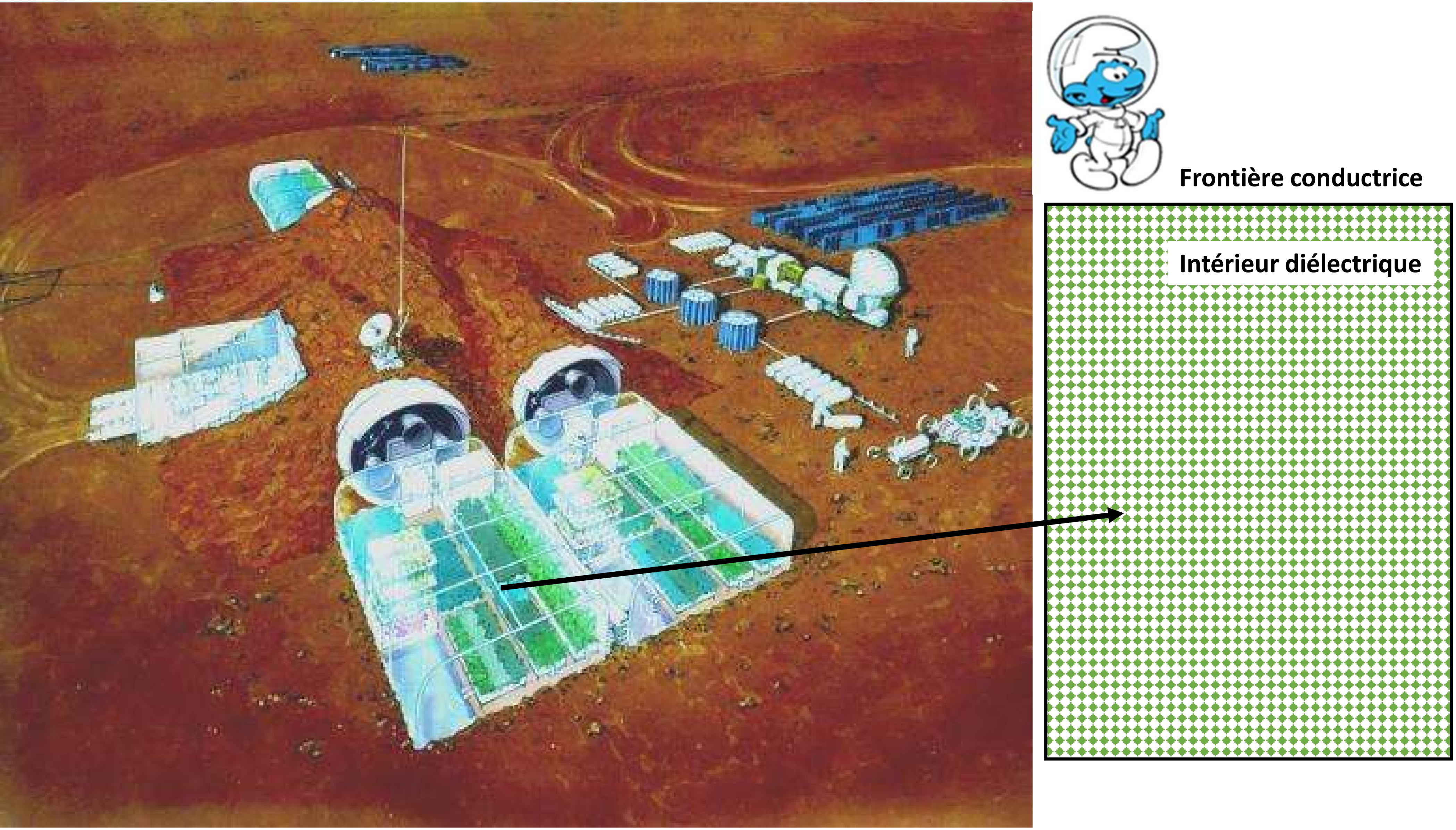
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \approx \frac{\left(\frac{V_1 - V_0}{\Delta x}\right) - \left(\frac{V_0 - V_3}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\left(-2V_0 + V_1 + V_3\right)}{\Delta x^2}$$

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \approx \frac{\left(-4V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)}{h^2} = 0$$

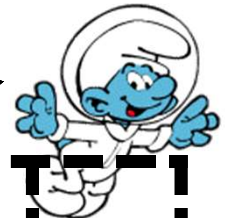
$$\boxed{V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}}$$

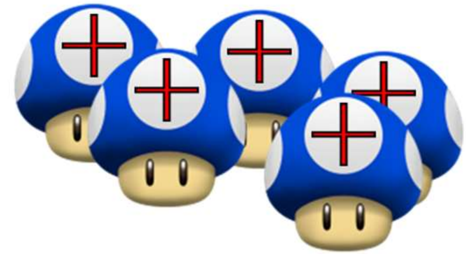
Éléments carrés: $h = \Delta x = \Delta y$

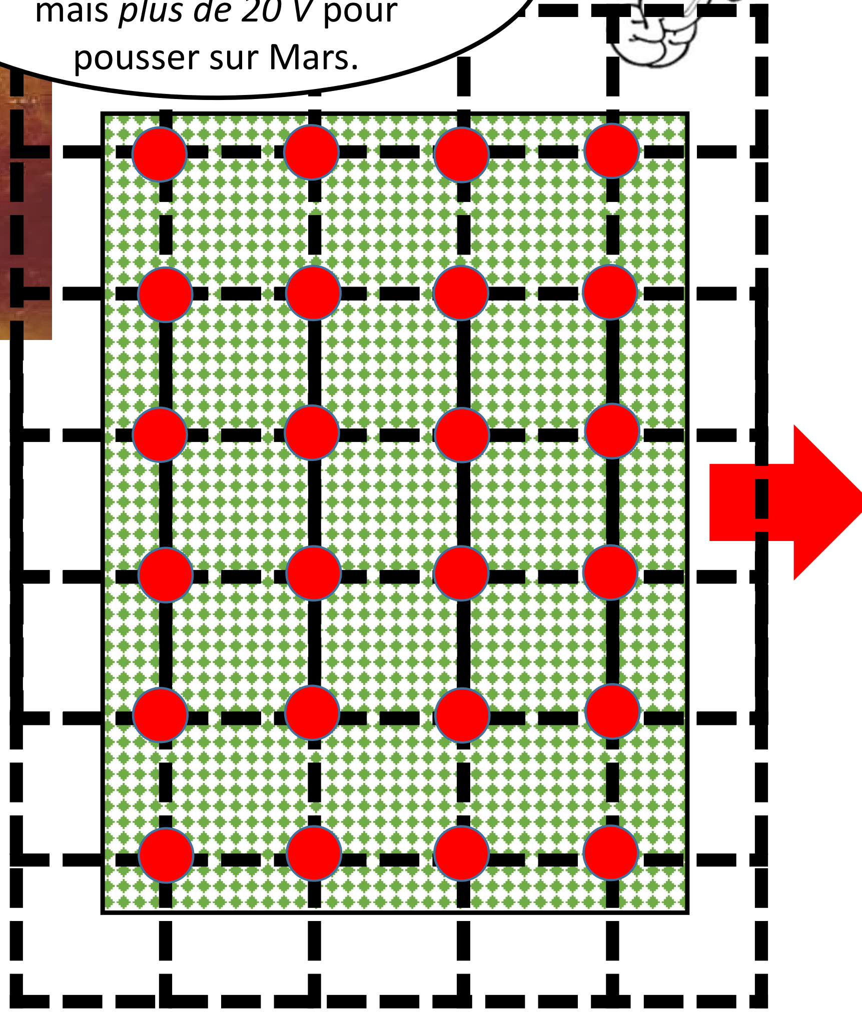
Valide dans un diélectrique ou un conducteur

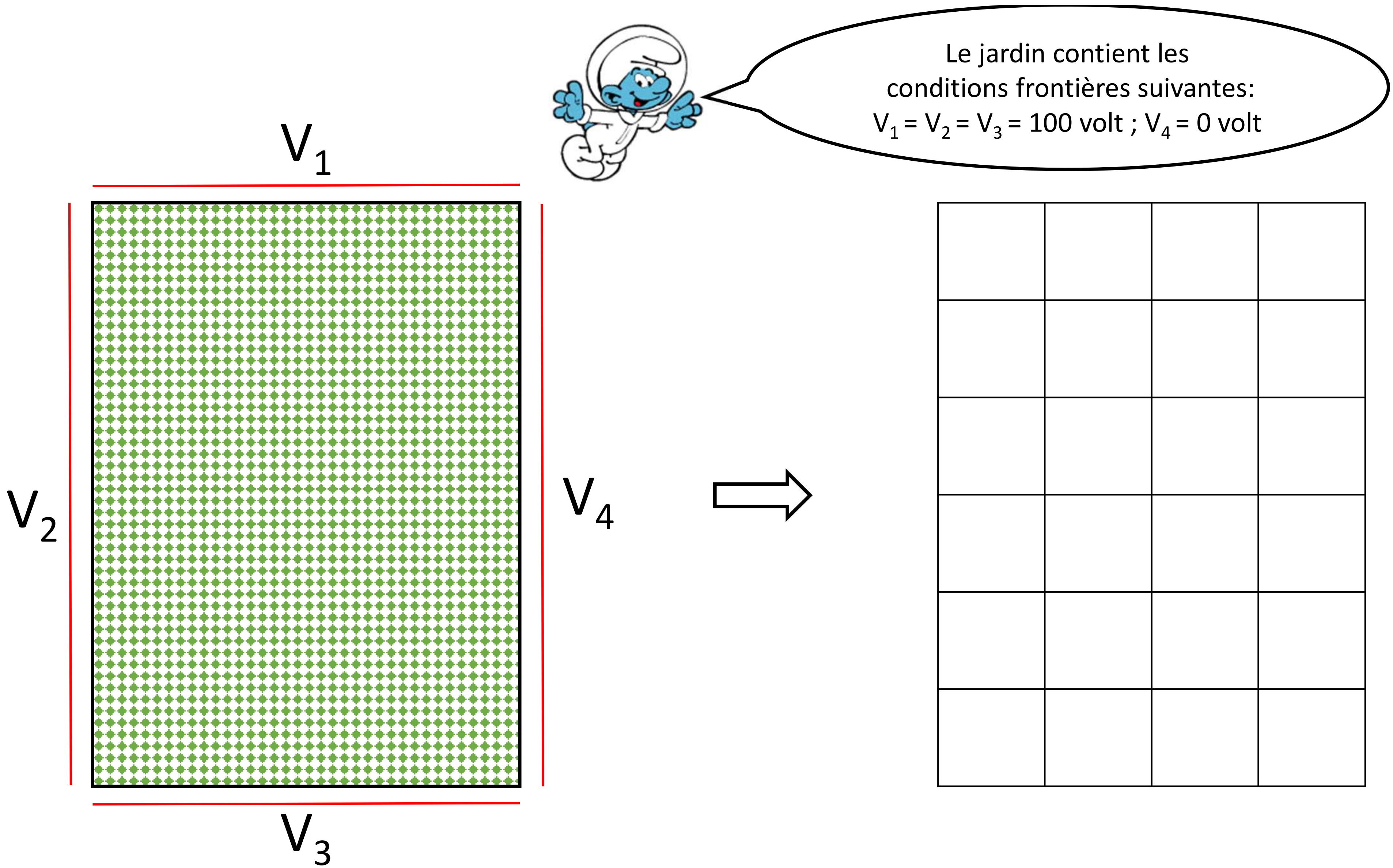

Frontière conductrice
Intérieur diélectrique

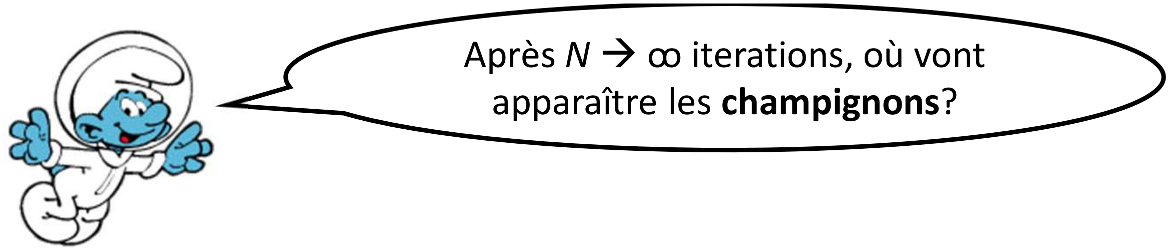
Les **champignons électrostatiques** ont besoin de *moins de 50 V* mais *plus de 20 V* pour pousser sur Mars.

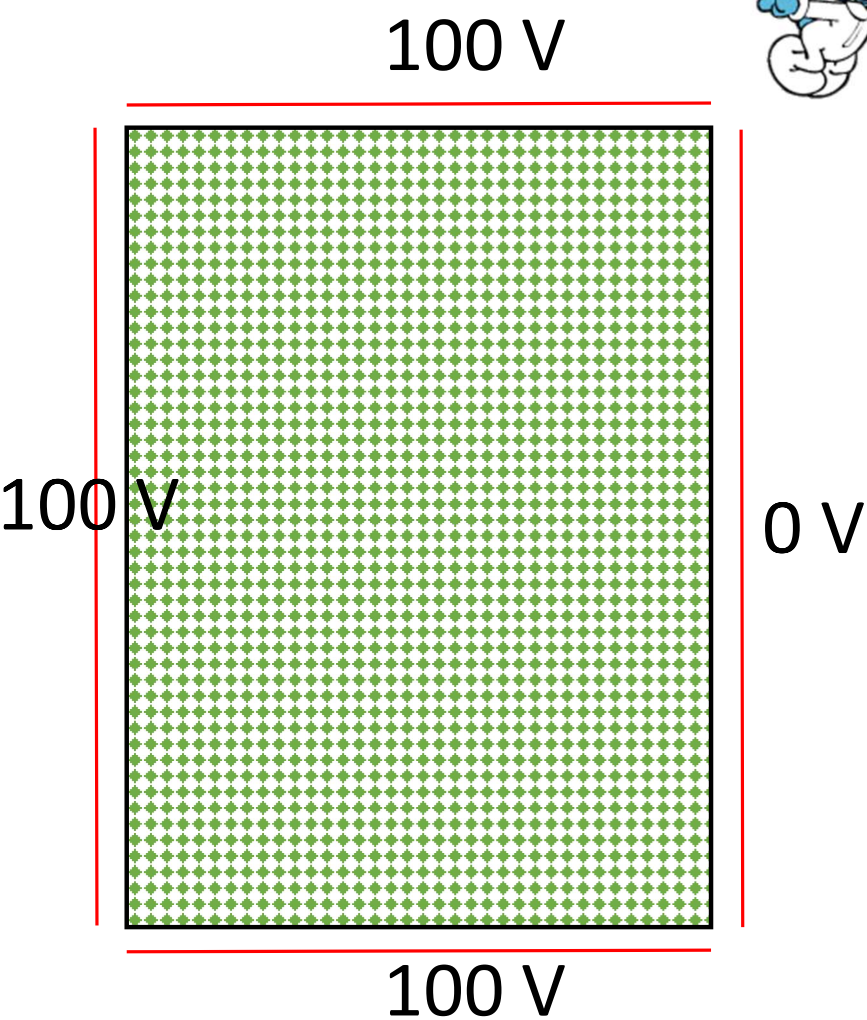







Le jardin contient les
conditions frontières suivantes:
$V_1 = V_2 = V_3 = 100$ volt ; $V_4 = 0$ volt
V_1
V_2
V_3
V_4





100 V	**100 V**	**100 V**	**100 V**
100 V	**(a)**	**(b)**	**0 V**
100 V	**(c)**	**(d)**	**0 V**
100 V	**(e)**	**(f)**	**0 V**
100 V	**(g)**	**(h)**	**0 V**
100 V	**100 V**	**100 V**	**100 V**