



PHS1102 – CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

EXAMEN FINAL – AUTOMNE 2018

DATE : MARDI 18 DÉCEMBRE 2018 HEURE : 9H30 À 12H00

PAGES : 7

QUESTIONS : 5

NOTE : Aucune documentation permise

Calculatrice non programmable permise

QUESTION 1 : Compréhension, SVP répondre *dans le cahier d'examen* (4 points)

1.1 ➤ (1 pt) Les quatre équations de Maxwell constituent la base de l'électromagnétisme :

$$\text{I} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\text{II} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{III} \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

$$\text{IV} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$$

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer dans le cahier d'examen le numéro de l'équation de Maxwell qui est la plus appropriée :

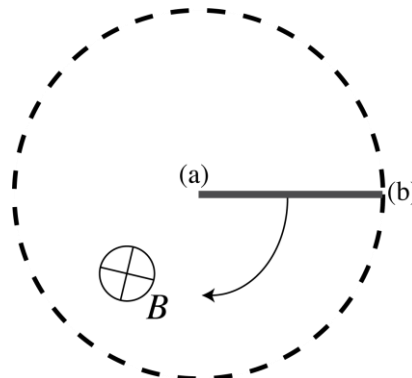
- A) Cette équation de Maxwell représente la loi de Faraday.
- B) Il n'existe pas de charge magnétique.
- C) Un courant de déplacement peut générer un champ magnétique.
- D) Cette équation de Maxwell représente la loi de Gauss.

1.2 ➤ (1 pt) Choisissez la ou les affirmations qui sont vraies parmi les suivantes :

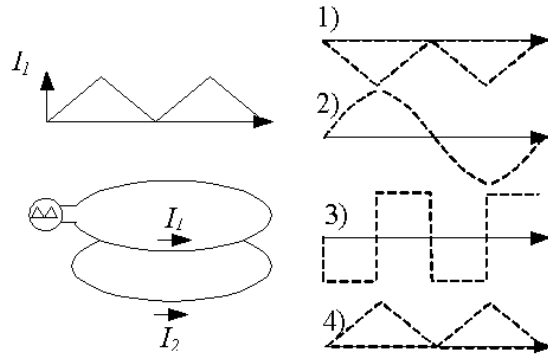
- A) Les matériaux paramagnétiques sont attirés par un aimant permanent, tandis que les matériaux diamagnétiques sont repoussés par un aimant permanent.
- B) Lorsqu'une particule chargée est en mouvement dans un champ magnétique uniforme qui est perpendiculaire à sa trajectoire, la grandeur de sa vitesse augmente.
- C) Le vecteur de Poynting d'une onde plane est orienté dans la direction de propagation de l'onde et exprime la puissance transportée par l'onde. Ses unités sont le watt (W).
- D) En présence d'un champ magnétique qui varie dans le temps, des boucles de courant peuvent apparaître dans un objet métallique : ce sont les courants de Foucault.

1.3 ➤ (1 pt) Une tige conductrice tourne avec une vitesse angulaire constante en sens horaire autour d'une de ses extrémités dans un champ magnétique uniforme, perpendiculaire au plan de rotation. Le potentiel au centre de la tige (point (a)) par rapport à l'extrémité en mouvement de la tige (point (b)) est :

- A) Positif
- B) Alternatif
- C) Nul
- D) Négatif



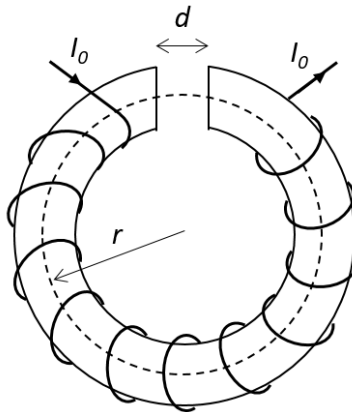
1.4 ➤ (1 pt) Un courant $I_1(t)$ circule dans une boucle conductrice circulaire (schéma à la gauche de la figure ci-contre). Choisir, parmi les quatre courbes présentées dans le schéma de droite, celle qui représente le courant $I_2(t)$ circulant dans une seconde boucle qui est identique à la première et placée juste au-dessous de celle-ci (la polarité des courants est indiquée par les flèches et les courbes sont tracées en pointillé).



QUESTION 2 : Électroaimant (4,5 points)

On utilise un électroaimant afin de générer un fort champ magnétique dans son entrefer. L'électroaimant est formé d'une bobine de $N = 5\,000$ tours enroulés autour d'un noyau ferromagnétique ($\mu_r = 200$) toroïdal de rayon moyen $r = 30$ cm et de section carrée de côté $a = 1$ cm. Un courant I_0 circule dans la bobine et l'entrefer a une longueur $d = 1$ cm.

Puisque $a \ll r$, on suppose que le champ magnétique est uniforme sur la section de l'électroaimant et que sa valeur est celle au rayon moyen.



Pour chaque sous-question, déterminer l'expression algébrique en fonction des paramètres de l'énoncé, puis évaluer la valeur numérique de la quantité demandée.

2.1 ➤ (2,5 pts) Quel courant I_0 doit parcourir la bobine afin d'obtenir une densité de flux magnétique de 2 T au milieu de l'entrefer ?

2.2 ➤ (1,25 pt) Quelle est l'énergie emmagasinée dans l'électroaimant ?

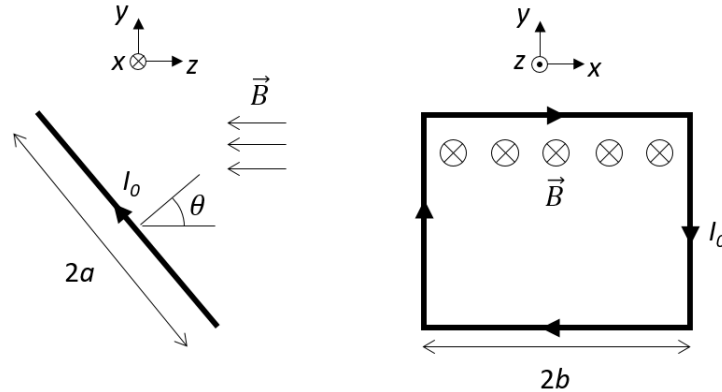
2.3 ➤ (0,75 pt) Quelle est l'inductance de l'électroaimant ?

QUESTION 3 : Boucle conductrice dans un champ magnétique non uniforme (3,5 points)

Soit une boucle de fil conducteur de forme rectangulaire parcourue par un courant I_0 . La boucle est placée dans un champ magnétique ayant une densité de flux

$$\vec{B}(x) = -\frac{B_0}{4b}(x + 3b)\hat{z}, \quad (B_0 > 0)$$

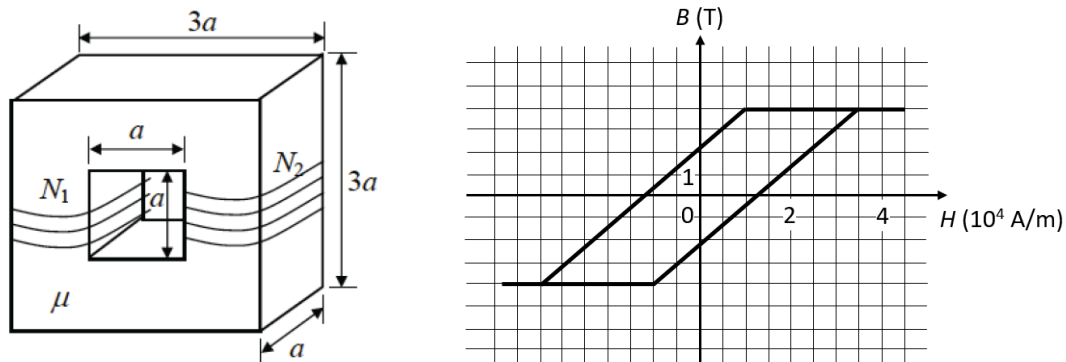
qui dépend de la position horizontale x . Le centre de la boucle est situé à l'origine (0,0,0).



- 3.1 ➤ (2 pts) Déterminer la force (vecteur) ressentie par chaque segment de fil de la boucle et la force totale (vecteur) ressentie par la boucle.
- 3.2 ➤ (0,75 pt) Déterminer le couple (vecteur) ressenti par la boucle.
- 3.2 ➤ (0,75 pt) Décrire le mouvement de la boucle dû à l'influence du champ magnétique. Comparer ce mouvement à celui d'une boucle dans un champ magnétique uniforme.

QUESTION 4 : Transformateur (3 points)

Le transformateur ($\mu_r = 150$) de la figure de gauche ($a = 16$ cm) est alimenté par une tension alternative V_1 de 2400 V à 60 Hz aux bornes du circuit primaire (bobine comportant $N_1 = 33$ tours de fil). Le transformateur a pour but de produire une tension V_2 aux bornes du circuit secondaire qui comporte $N_2 = 330$ tours de fil. Les pertes de flux sont supposées négligeables et on suppose que le flux se répartit uniformément sur toute la section du transformateur.



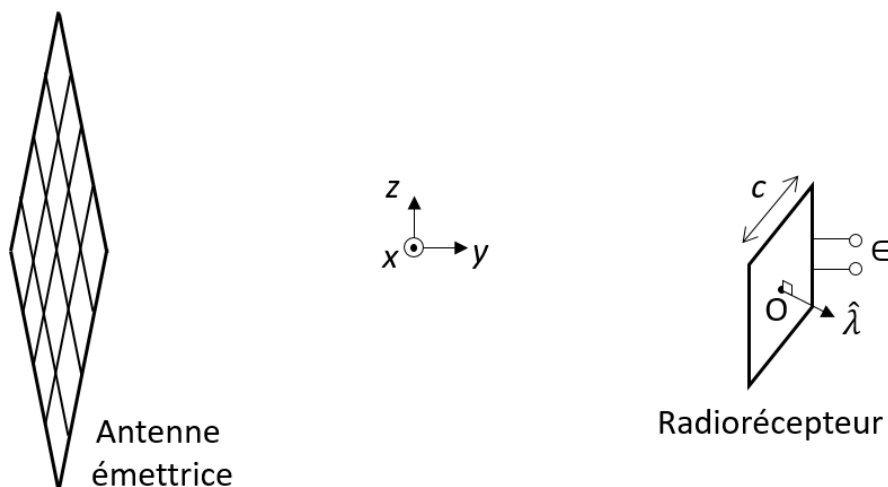
- 4.1 ➤ (1,5 pt) Quelle est l'amplitude de la tension V_2 produite par le transformateur aux bornes du circuit secondaire ?
- 4.2 ➤ (1,5 pt) La courbe d'hystérésis du matériau de l'armature du transformateur est illustrée sur la figure de droite. Déterminer la perte de puissance par hystérésis.

QUESTION 5 : Radiorécepteur AM (5 points)

L'antenne d'une station de radio AM émet de l'information grâce à des ondes électromagnétiques. Loin de l'antenne, le champ électrique de l'onde (en V/m) est décrit par :

$$\vec{E} = 10\hat{z} \sin(4,50 \times 10^6 t + a[3x - 4y]),$$

où x et y sont en mètres et où a est une constante à déterminer. Un radiorécepteur ayant la forme d'une boucle carrée de côté $c = 30$ cm ayant $N = 50$ tours de fil est utilisé pour recevoir le signal de l'antenne et le transformer en force électromotrice à ses bornes. Le centre de la boucle est situé au point $O(0,0,0)$. L'orientation du radiorécepteur est fixe (il est immobile) et elle est décrite par le vecteur normal $\hat{\lambda} = \lambda_x \hat{x} + \lambda_y \hat{y} + \lambda_z \hat{z}$ qui est perpendiculaire à la surface de la boucle (voir figure).



- 5.1 ➤ (1 pt)** Calculer les valeurs numériques de la direction de propagation \hat{n} , de la constante de phase β et de la longueur d'onde λ de l'onde émise par l'antenne.
- 5.2 ➤ (0,5 pt)** Quelle est la polarisation de cette onde ?
- 5.3 ➤ (1,5 pt)** Déterminer l'expression du champ magnétique \vec{H} de l'onde et donner ses unités.
- 5.4 ➤ (0,5 pt)** Comment doit-on orienter la boucle du radiorécepteur pour obtenir un signal maximum? Répondre en donnant la valeur du vecteur unitaire $\hat{\lambda}$.
- 5.5 ➤ (1,5 pt)** Pour le vecteur $\hat{\lambda}$ déterminé à la question 5.4, calculer l'amplitude de la force électromotrice ϵ mesurée aux bornes du radiorécepteur. Posez l'hypothèse que les valeurs du champ électrique et du champ magnétique sont uniformes sur toute la surface de la boucle et sont égales aux valeurs au centre de la boucle.
- Bonus ➤ (0,5 pt)** Expliquer pourquoi l'hypothèse posée à la question 5.5 est valide. Appuyer votre raisonnement par les calculs appropriés.

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

$$d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$d\vec{s} = dy dz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$$

$$dV = dx dy dz$$

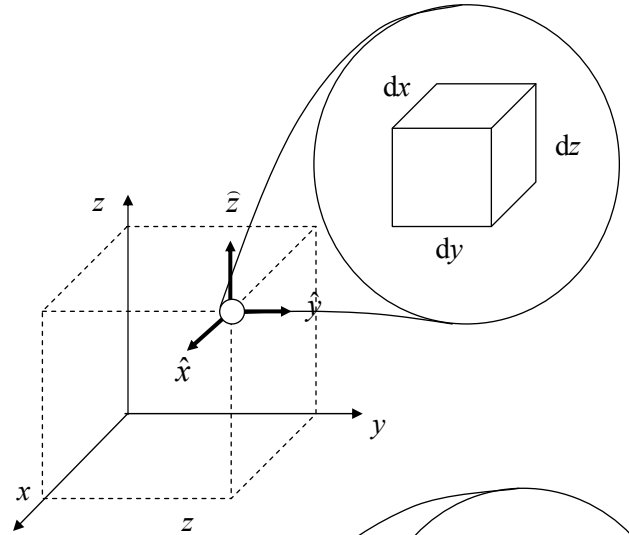
$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \nabla^2 H_x \hat{x} + \nabla^2 H_y \hat{y} + \nabla^2 H_z \hat{z}$$



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$$d\vec{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + d\rho dz \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$$

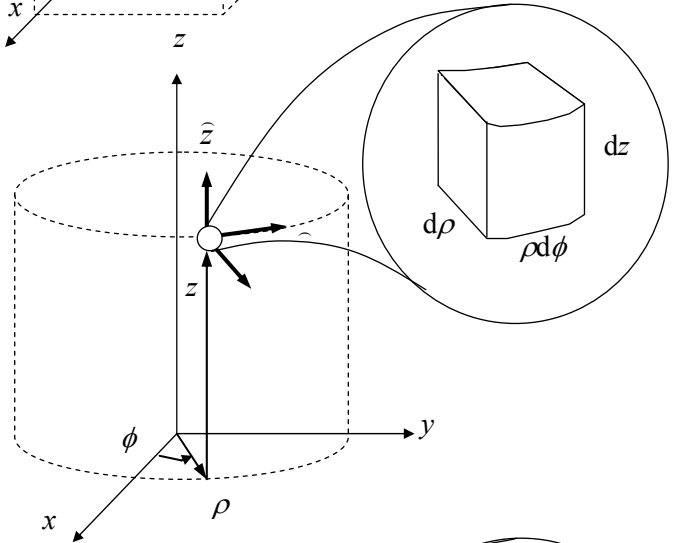
$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$$

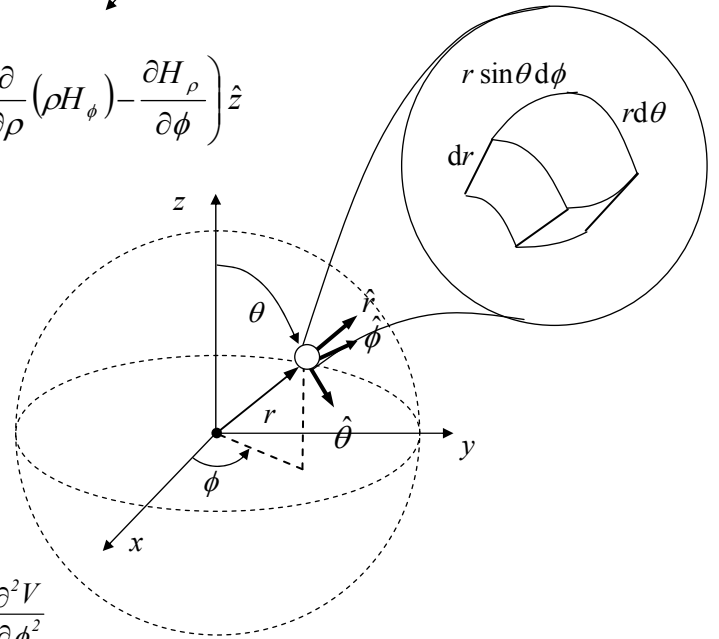
$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (H_\phi \sin \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$



LES ÉQUATIONS DE BASE

Loi de Coulomb : $\vec{F} = \frac{q Q \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 |r|^2}$

Champ électrique: $\vec{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta q}$

Principe de superposition :
 $\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$

Flux électrique : $\Psi = Q$

Le flux débute/fini sur des charges libres

Densité de flux, vide: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

Loi de Gauss: $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

Potentiel entre a et b : $V_{ab} = \frac{W_{ab}}{Q} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$

V charge ponctuelle : $V = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$

Champ conservatif : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le gradient : $\vec{E} = -\nabla V$

Énergie du champ: $U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv$

Force, travail virtuel : $\vec{F} = -(\partial W_E / \partial x) \hat{x}$

Polarisation P : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Permittivité :
 $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$

Capacité : $C = \frac{Q}{V}$ $C = \frac{2W_E}{V^2}$

Densité de courant J : $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

Conductivité σ : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Résistance : $R = \frac{V}{I}$

Puissance dissipée : $P_d = VI = \int_V \sigma E^2 dv$

Champ électrostatique dans conducteur :
 $\rho_v = 0$ $E_i = 0$ $V = \text{cste}$

Interface diélectrique/conducteur :
 $E_{IT} = 0$ $D_{IN} = \rho_S$

Interface diélectrique/diélectrique :

$E_{1T} = E_{2T}$ $D_{1N} - D_{2N} = \rho_S$

Théorie des images : $\oplus \mid \ominus$

Règles graphiques pour les diélectriques:

- ① dessiner des carrés curvilignes
- ② ligne équipotentielle \perp ligne de flux
- ③ ligne de flux débute/fini sur conducteur
- ④ surface conductrice est équipotentielle

Capacité : $C = \frac{N_P \epsilon d}{N_S}$

Règles supplémentaires pour les conducteurs :

- ⑤ ligne de courant ne peut croiser un isolant
- ⑥ ligne équipotentielle \perp ligne de flux

Résistance : $R = \frac{N_S}{N_P \sigma d}$

1^{ère} équation de Maxwell : $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$

Continuité du courant : $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Équation de Poisson : $\nabla^2 V = \frac{-\rho_v}{\epsilon}$


Équation de Laplace : $\nabla^2 V = 0$


Condition de Dirichlet : V connu sur S


Condition de Neumann : $\partial V / \partial n$ connu sur S


Solutions générales unidimensionnelles :

$V(x) = Ax + B$

 $V(\phi) = A\phi + B$

 $V(\rho) = A \ln \rho + B$

 $V(r) = (A/r) + B$

 $V(\theta) = A \ln(\tan(\theta/2)) + B$

Différences finies dans le milieu :

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Différences finies sur surface isolante:


$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4}$$

Permittivité du vide : $8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

Énergie cinétique : $U = (m v^2) / 2$

Force centrifuge : $F = (m v^2) / r$

Loi de Biot-Savart : $\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Règle de la main droite génération : 

Loi d'Ampère : $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$


4^{ème} Maxwell stat. : $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

Flux dans une surface : $\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Champ solénoïdal : $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Densité de flux, vide : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Équation de Lorentz : $\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}$

Règle de la main droite force: 

Force sur un courant : $\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$

Moment magnétique dipolaire: $\vec{m} = N I \vec{A}$

Couple sur dipôle : $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$

Génération de f.e.m.: $\epsilon = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

Énergie dipôle magn.: $u = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

Magnétisation : $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

Perméabilité : $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Susceptibilité : $\vec{M} = \chi \vec{H}$

Énergie magnétique: $U = \int_v \frac{\mu H^2 dv}{2}$

Énergie électrique: $U = \frac{1}{2} \int_v \epsilon E^2 dv$

Densité d'énergie dissipée par hystérésis:

$$u_0 = \oint H dB$$

Conditions aux frontières :

$$B_{1N} = B_{2N} \quad H_{1T} = H_{2T}$$

Potentiel magnétique $\vec{H} = -\nabla V_m$

Réductance : $\mathcal{R} = V_m / \Phi$

Réductance d'un barreau : $\mathcal{R} = l / \mu S$

Loi de Faraday : $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

Inductance mutuelle : $M_{12} = \Phi_{12} N_2 / I_1$

Auto-inductance : $L = N\Phi / I = 2U / I^2$

Voltage d'une inductance : $V = L dI / dt$

3^{ème} équ. Maxwell : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Courants de déplacement : $\vec{J}_D = \partial \vec{D} / \partial t$

Loi d'Ampère généralisée :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t) \cdot d\vec{s}$$

Les quatre équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

L'équation d'onde dans le vide:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \vec{H} / \partial t^2$$

Onde plane uniforme selon x:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = f(x \pm vt) \hat{y}$$

Vitesse dans un diélectrique :

$$v = 1 / \sqrt{\mu \epsilon}$$

Onde plane, uniforme, harmonique,

de polarisation linéaire et direction \hat{n} :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \beta(\hat{n} \cdot \vec{r}) + \theta)$$

Orthogonalité des champs :

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} (\hat{n} \times \vec{E}) \quad \text{et} \quad \vec{E} = Z (\vec{H} \times \hat{n})$$

Fréquence angulaire : $\omega = 2\pi f$

Constante de phase : $\beta = 2\pi / \lambda$

Vitesse : $v = \omega / \beta$

Longueur d'onde : $\lambda = v / f$

Impédance du milieu : $Z = \sqrt{\mu / \epsilon}$

Vecteur de Poynting : $\vec{\phi} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\phi_{\text{moy. onde polar. lin.}} < \phi_0 > = \frac{E_0^2}{2Z} = \frac{ZH_0^2}{2}$$

Puissance sur une surface: $P = \int_S \vec{\phi} \cdot d\vec{s}$

Dans le vide :

Permittivité : $8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

Perméabilité : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Impédance intrinsèque : $Z_0 = 377 \Omega$

Vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$