ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

PHS1102 CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Examen final – Hiver 2013

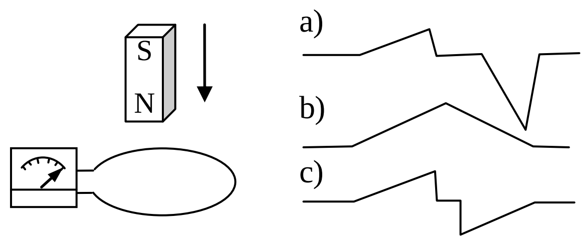
DATE : jeudi 25 avril 2013 **HEURE :** 13h30-16h00

NOTES : Calculatrice non-programmable permise — Aucune documentation permise
Cet examen comporte 5 questions et 6 pages

QUESTION 1: Questions à choix multiples (choisir l'énoncé le plus approprié) (3.5 *points*)

s.v.p. *transcrire les réponses* ***dans votre cahier d'examen***

1.1➢(1 Pt) Une boucle horizontale de fil électrique est reliée à un voltmètre. Vous laissez tomber un long barreau aimanté vertical qui chute vers le bas sous l'influence de la gravité au travers de la boucle. Identifiez la courbe de potentiel en fonction du temps (a, b ou c) observée sur le voltmètre.



1.2➢(0,75 Pt) Les lignes de flux magnétique :

a) sont interrompues à la frontière entre deux régions ayant des perméabilités différentes.;
b) débutent et/ou se terminent sur des charges magnétiques;
c) sont toujours orientées dans la même direction que la densité de courant;
d) se referment toujours sur elles-mêmes ou se terminent à l'infini.

Les quatre équations de Maxwell constituent la base de l'électromagnétisme. Pour chacun des trois énoncés suivants (1.3, 1.4 et 1.5), indiquez le numéro de l'équation de Maxwell (I, II, III ou IV) qui est la plus appropriée :

I	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$
II	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
III	$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$
IV	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$

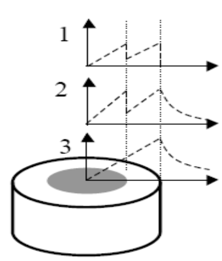
1.3➢ (0,25 Pt) Le champ électrostatique est conservatif : …

1.4➢ (0,25 Pt) Il n'existe pas de charges magnétiques : …

1.5➢ (0,25 Pt) Le champ magnétique est solénoïdal : …

1.6➢ (1 Pt) La figure illustre un long câble métallique constitué d'un noyau cylindrique central (gris) recouvert d'une couche uniforme d'un autre métal de même conductivité (blanc). Un courant circule vers le haut. Sachant que la perméabilité du noyau est plus grande que celle du revêtement, identifier l'énoncé qui décrit le mieux les courbes illustrant chacune un champ vectoriel en fonction du rayon ρ.

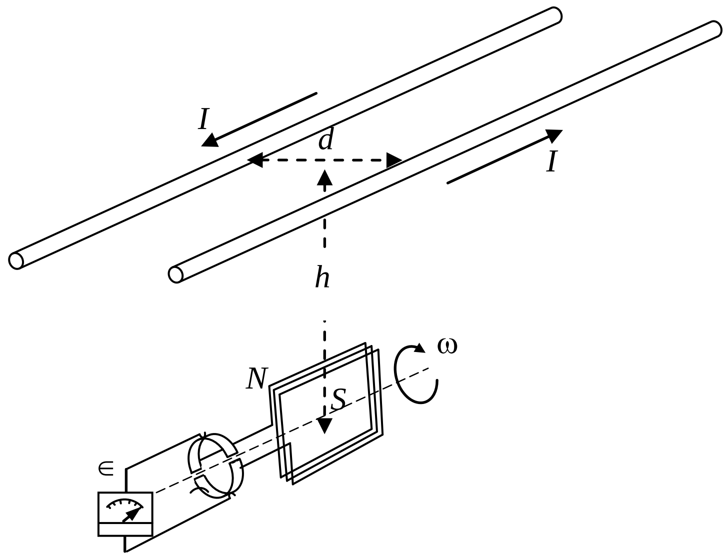
A) aimantation M = courbe 1; densité de flux magnétique B = courbe 2
B) intensité du champ magnétique H = courbe 1; densité de courant J = courbe 2
C) aimantation M = courbe 2; densité de flux magnétique B = courbe 3
D) intensité du champ H = courbe 3; densité de flux magnétique B = courbe 1



Dans les questions suivantes, indiquez toujours <u>les unités</u> des valeurs numériques demandées, sinon, vous perdrez tous les points associés à cette réponse

QUESTION 2 : Mesure du courant (4 *points*)

Une ligne de transport d'énergie est constituée de deux conducteurs rectilignes, parallèles, dont les axes sont séparés par une distance *d*. Les conducteurs sont situés dans un plan parallèle au sol à une hauteur *h* au-dessus du sol et transportent des courants continus *I* dans des directions opposées. On dispose au-dessus du sol une petite bobine comportant *N* tours de fil conducteur entourés autour d'une surface *S* que l'on fait tourner à une vitesse angulaire ω autour d'un axe horizontal. La bobine est située dans le plan de symétrie, juste entre les deux conducteurs. Les extrémités de la bobine sont reliées à deux moitiés d'anneaux métalliques sur lesquels deux balais métalliques font contact. On mesure la force électromotrice $\in$ entre ces deux balais.



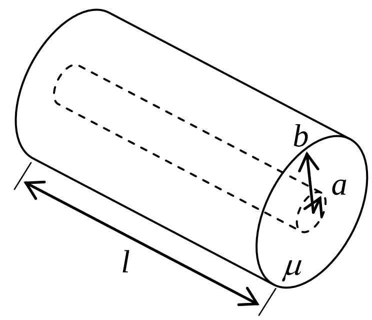
a) **(1,5 Pt)** Déterminer l'expression de la densité de flux magnétique $\vec{B}$ produite par la ligne de transport au centre de la petite bobine (indiquer la direction)

b) **(1, 25 Pt)** Déterminer l'expression de la valeur maximum de la force électromotrice $\in$ entre les balais et de la force électromotrice efficace mesurée. On peut considérer que le champ est uniforme dans la surface de la bobine

c) **(1,25 Pt)**Pour d = 3 m, h = 10 m, S = 10 cm^2, N = 1000 tours, ω = 360 rad/s, nous mesurons une valeur efficace (rms) de la force électromotrice $\in$ = 100 μV. Calculer la valeur du courant *I* circulant dans la ligne.

QUESTION 3 : Câble coaxial (3 *points*)

Un câble coaxial de longueur *l* est constitué d'un conducteur central cylindrique ayant une paroi mince, de rayon *a*, séparé par un matériau isolant de perméabilité μ d'une gaine conductrice de rayon *b*.

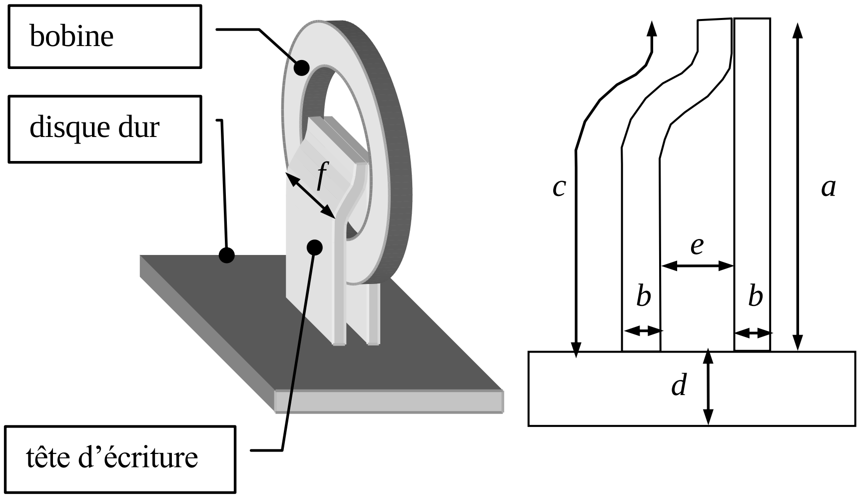


a) **(2 Pt)** Quelle est l'expression de l'inductance *L* de ce câble ?

b) **(1 Pt)** Calculer la valeur numérique de *L* pour a = 1 mm, b = 2,6 mm, l = 10 m et $\mu = 12{,}56 \times 10^{-5}$ H/m.

QUESTION 4 : Tête d'écriture pour mini-disque dur (4 *points*)

L'armature d'une tête d'écriture pour un mini disque dur est formée de deux feuillets métalliques de largeur f =1 mm, d'épaisseur b =0,1 mm, de perméabilité relative μ_r= 500, de longueurs a = 2 mm et c=2,3 mm, et d'écartement e = 0,2 mm. Dans notre problème, cette tête est située juste au-dessus du disque dur qui a une épaisseur d=0,2 mm et une perméabilité relative μ_r= 200 (en réalité, il y a une mince couche d'air qui les sépare pour éviter l'usure des pièces et que l'on ignore ici). Cette armature est entourée d'une bobine comportant N =6 tours.



a) (**2** Pt) Tracer le circuit magnétique équivalent de cette tête d'écriture/lecture et calculer les réluctances de chaque partie du circuit.

b) (**1** Pt) Quelle est la valeur numérique de la réluctance totale $\Re_T$ du circuit?

c) (**1**Pt) Quelle est la valeur numérique de l'inductance L de l'ensemble bobine-armature ?

QUESTION 5 : Onde électromagnétique (5,5 *points*)

Le champ électrique d'une onde électromagnétique se déplaçant dans un milieu diélectrique de perméabilité relative $\mu_r = 1$ et de permittivité relative $\varepsilon_r =$ 4 est décrit en unités SI par:

$$\vec{E} = (3\hat{x} - 4\hat{y})\sin(\omega t - 4x - 3y) + (5\hat{z})\cos(\omega t - 4x - 3y)$$

a) (**1,25** Pt) Calculer les valeurs numériques de la direction de propagation $\hat{n}$, de la constante de phase β, de la longueur d'onde λ et de la fréquence angulaire ω.

b) (**1** Pt) Démontrer mathématiquement que cette onde est polarisée circulairement.

c) (**1,5** Pt) Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{H}$?

d) (**1** Pt) Quelle est l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\wp}$?

e) (**0,75** Pt) Quelle est la puissance moyenne P qui traverse une surface S dont le centre est situé à l'origine, de forme carrée avec un côté de 10 cm, et dans le plan $x0z$ (la normale est orientée selon y) ?

Symbole	description	unités SI
$\vec{B}$	densité de flux magnétique	tesla (T)
C	capacité	farad (F)
$\vec{D}$	densité de flux électrique	coulomb/m^2
$\vec{E}$	intensité du champ électrique	volt/mètre (V/m)
$\vec{F}$	force	newton (N)
f	fréquence	hertz (Hz)
$\in$	force électromotrice	volt (V)
$\vec{H}$	intensité du champ magnétique	ampère/mètre (A/m)
I, i	courant	ampère (A)
$\vec{J}$	densité de courant	ampère/mètre^2 (A/m^2)
L	inductance	henry (H)
$\vec{M}$	aimantation	ampère/mètre (A/m)
$\vec{m}$	moment dipolaire magnétique	ampère-mètre^2 (a-m^2)
M_{12}	inductance mutuelle	henry (H)
$\vec{P}$	polarisation électrique	coulomb/mètre^2 (C/m^2)
$\vec{p}$	moment dipolaire électrique	coulomb-mètre (C-m)
P	puissance instantanée	watt (W)
$\langle P \rangle$	puissance moyenne	watt (W)
$\vec{\wp}$	vecteur de Poynting instantané	watt/mètre^2 (W/m^2)
$\langle \vec{\wp} \rangle$	vecteur de Poynting moyen	watt/mètre^2 (W/m^2)
Q	charge électrique	coulomb (C)
R	résistance	ohm (Ω)
$\Re$	réluctance	henry^{-1} (H^{-1})
$\hat{r}$	vecteur unitaire radial (sphérique)	
T	période	seconde (s)
V	potentiel électrique	volt (V)
V_m	potentiel magnétique scalaire	ampère-tour (A-t)
$\vec{v}$	vitesse	mètre/seconde (m/s)
W	travail	joule (J)
U	énergie	joule (J)
u_m	densité d'énergie magnétique	joule/mètre^3 (J/m^3)
Z	impédance intrinsèque	ohm (Ω)
Z_0	impédance intrinsèque du vide	ohm (Ω)
β	constante de phase	radian/mètre (rad/m)
χ_e	susceptibilité électrique	
χ_m	susceptibilité magnétique	
ε	permittivité	farad/mètre (F/m)
ε_r	permittivité relative	
ε_0	permittivité du vide	farad/mètre (F/m)
Φ_e, Φ	flux électrique	coulomb (C)
Φ_m, Φ	flux magnétique	weber (Wb)
λ	longueur d'onde	mètre (m)
μ	perméabilité	henry/mètre (H/m)
μ_r	perméabilité relative	
μ_0	perméabilité du vide	henry/mètre (H/m)
ρ_v	densité de charge volumique	coulomb/mètre^3 (C/m^3)
ρ_s	densité de charge surfacique	coulomb/mètre^2 (C/m^2)
ρ_l	densité de charge linéique	coulomb/mètre (C/m)
σ	conductivité électrique	siemens/mètre (Ω^{-1}-m^{-1})
τ	couple	newton-mètre (N-m)
ω	fréquence angulaire	radian/seconde (rad/s)

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = dy\,dz\,\hat{x} + dx\,dz\,\hat{y} + dx\,dy\,\hat{z}$$

$$dV = dx\,dy\,dz$$

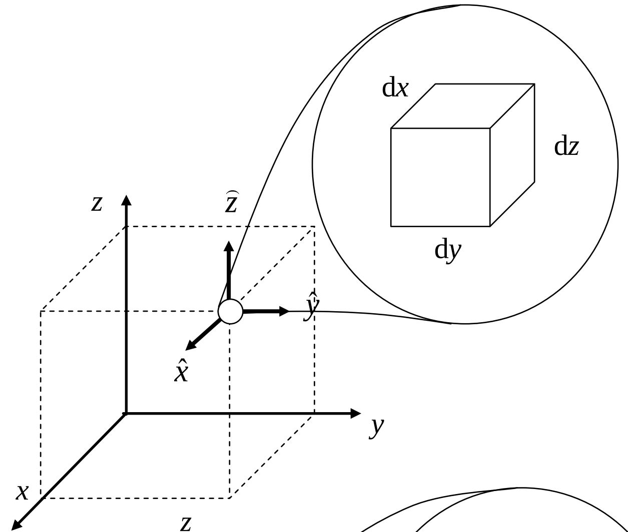
$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2\vec{H} = \nabla^2 H_x\hat{x} + \nabla^2 H_y\hat{y} + \nabla^2 H_z\hat{z}$$



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$$d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho\,d\phi\,dz\,\hat{\rho} + d\rho\,dz\,\hat{\phi} + \rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{z}$$

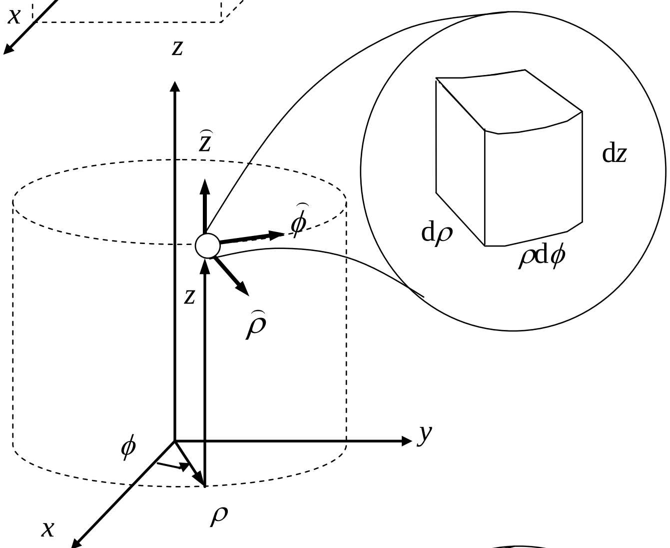
$$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial\rho}\,\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right) - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{z}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{r} + r\sin\theta\,dr\,d\phi\,\hat{\theta} + r\,dr\,d\theta\,\hat{\phi}$$

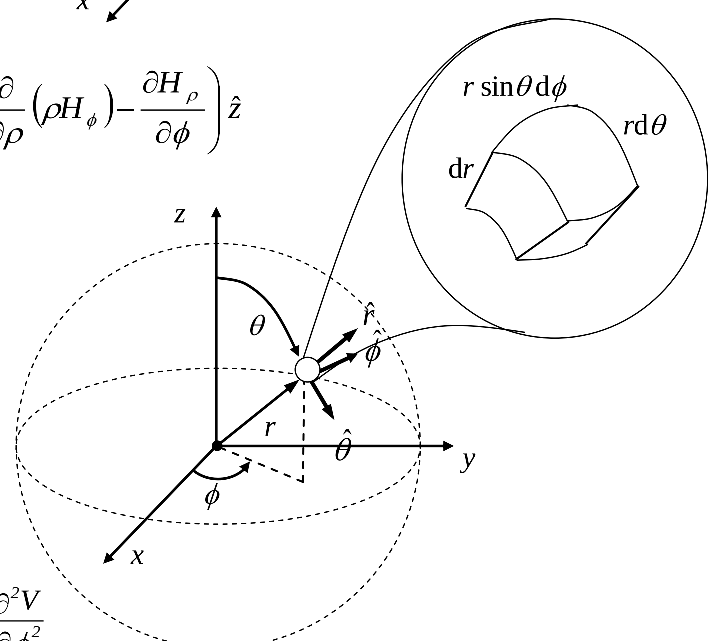
$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\,\hat{\phi}$$

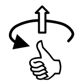
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta\right) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$



Loi de Biot-Savart : $\vec{H} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\, d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$

Règle de la main droite génération :



Loi d'Ampère : $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$

$4^{\text{ième}}$ Maxwell stat. : $\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

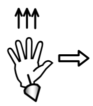
Flux dans une surface : $\Phi = \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Champ solénoïdal : $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Densité de flux, vide : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Équation de Lorentz : $\vec{F} = Q\, \vec{v} \times \vec{B}$

Règle de la main droite force:



Force sur un courant : $\vec{F} = \int_L I\, \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

Moment magnétique dipolaire: $\vec{m} = N I \vec{A}$

Couple sur dipôle : $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$

Génération de f.e.m.: $\in = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

Énergie dipôle magn.: $u = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

Aimantation : $\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$

Perméabilité : $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Susceptibilité magné $\vec{M} = \chi \vec{H}$

Énergie magnétique: $U = \displaystyle\int_v \dfrac{\mu H^2 \mathrm{d}v}{2}$

Densité d'énergie dissipée par hystérésis:

$$u_0 = \oint H\, dB$$

Conditions aux frontières :

$B_{1N} = B_{2N}$ $\quad H_{1T} = H_{2T}$

Potentiel magnétique $\vec{H} = -\nabla V_m$

Réluctance : $\Re = V_m / \Phi$

Réluctance d'un barreau : $\Re = l / \mu S$

Loi de Faraday : $\in = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

Inductance mutuelle : $M_{12} = \Phi_{12} N_2 / I_1$

Auto-inductance : $L = N\Phi / I = 2U / I^2$

Voltage inductance : $V = L\, \mathrm{d}I / \mathrm{d}t$

$3^{\text{ième}}$équa. Maxwell : $\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Courants de déplacement : $\vec{J}_D = \partial \vec{D} / \partial t$

Loi d'Ampère généralisée :

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Les quatre équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

L'équation d'onde dans le vide:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0\, \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon_0\, \partial^2 \vec{H} / \partial t^2$$

Onde plane uniforme selon *x*:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = f(x \pm vt)\hat{y}$$

Vitesse dans un diélectrique : $v = 1 / \sqrt{\mu \varepsilon}$

Onde plane, uniforme, harmonique,
de polarisation linéaire et direction $\hat{n}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \beta\left(\hat{n} \cdot \vec{r}\right) + \theta\right)$$

Orthogonalité des champs :

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n} \times \vec{E}\right) \quad \text{et} \quad \vec{E} = Z\left(\vec{H} \times \hat{n}\right)$$

Polarisation circulaire : $E_{\sin} = E_{\cos} \quad E_{\sin} \perp E_{\cos}$

Fréquence angulaire : $\omega = 2\pi f$

Constante de phase : $\beta = 2\pi / \lambda$

Vitesse : $v = \omega / \beta$

Longueur d'onde : $\lambda = v / f$

Impédance du milieu : $Z = \sqrt{\mu / \varepsilon}$

Vecteur de Poynting : $\vec{\wp} = \vec{E} \times \vec{H}$

$\wp$ moy. onde polar. linéaire $< \wp_0 > = \dfrac{E_0^2}{2Z} = \dfrac{Z H_0^2}{2}$

Puissance sur une surface: $P = \displaystyle\int_S \vec{\wp} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Dans le vide :

Permittivité : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m

Perméabilité : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

Impédance intrinsèque : $Z_0 = 377\ \Omega$

Vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8$ m/s