– PHS1102 –
Champs électromagnétiques

Chapitre 12 – Ondes planes harmoniques

Onde plane harmonique (OPH) et ses propriétés (β, ω, λ, T, v, f et $\hat{n}$)

Impédance et orthogonalité des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$

Polarisation

Vecteur de Poynting

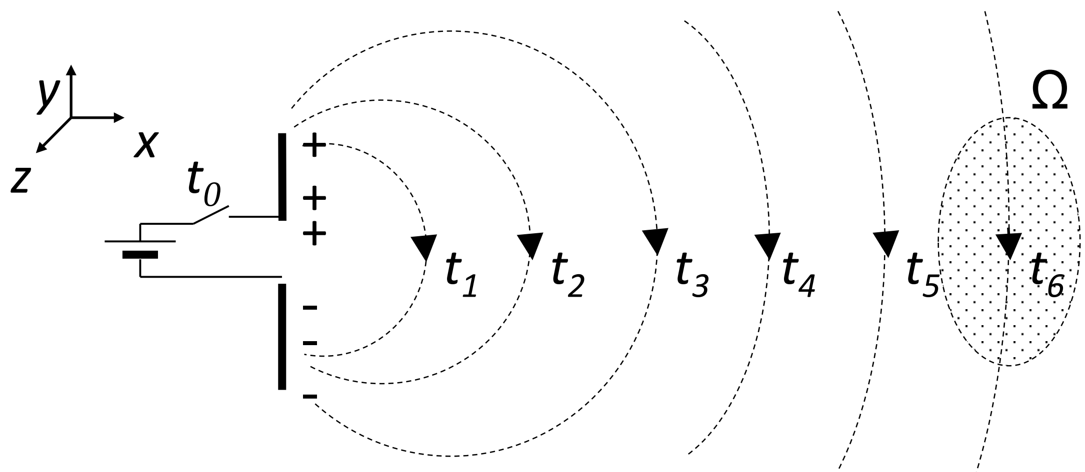
Objectifs de la semaine

Onde plane harmonique (OPH)	• **Calculer** la **période**, la **fréquence**, la **longueur d'onde**, la **vitesse de propagation**, la **constante de phase**, la **fréquence angulaire** et la **direction de propagation** d'une OPH. • **Calculer la f.é.m. induite par une OPH** dans une petite boucle de courant.
Impédance et orthogonalité des champs	• **Calculer l'impédance** d'un milieu. • **Calculer $\vec{\boldsymbol{E}}$ à partir de $\vec{\boldsymbol{H}}$ et vice versa** pour une OPH.
Polarisation	• **Expliquer** ce qu'est **la polarisation** d'une onde OPH (linéaire et circulaire). • **Déterminer la polarisation** d'une OPH à partir de son expression.
Vecteur de Poynting	• **Calculer la puissance transportée** par une OPH à travers une surface donnée.

Rappel – Onde plane

Plus on est loin d'une antenne, plus l'approximation de l'onde plane est valide.

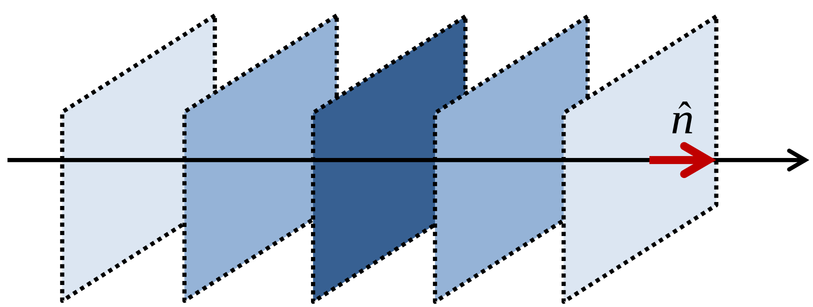
$$\vec{E}(x,y,z,t) \approx E_y(x,t)\hat{y} = E_0 f(x - vt)\hat{y}$$



L'onde plane est solution à l'équation d'onde dans un diélectrique (ε, μ) où $\rho_v = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$.

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$



$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

Équation générale d'une onde plane

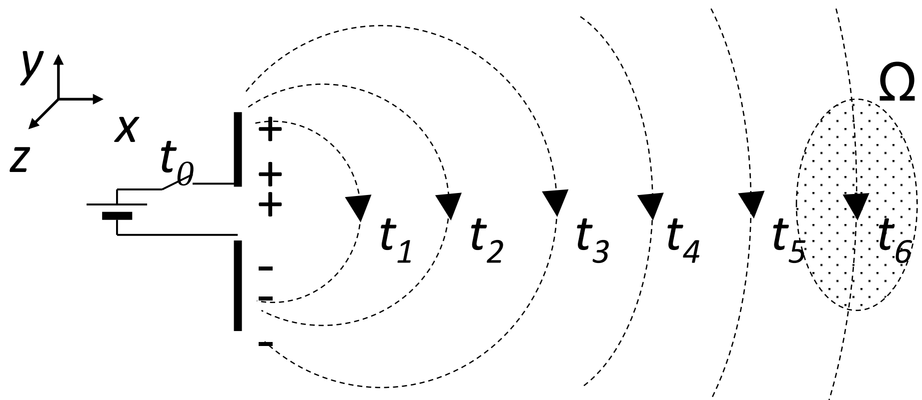
$$f(\hat{n} \cdot \vec{r} - vt + \theta)$$

Vitesse v dans la direction $\hat{n}$.

Onde plane harmonique (OPH)

L'onde plane harmonique est une forme particulière d'onde plane où f est sinusoïdale (harmonique). On associe à une OPH une fréquence et une longueur d'onde spécifiques.

On commence par écrire la forme d'une OPH pour l'exemple de la page précédente avec $\theta = 0$ par simplicité.



Onde plane générale

$$\vec{E} = E_0 f\left(x - vt + \theta\right)\hat{y}$$

Onde plane harmonique

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(-\beta\left[x - vt\right]\right)\hat{y}$$

β : constante de phase en [rad/m] pour que l'argument du cosinus soit un angle.

Constante de phase β et fréquence angulaire ω

Par convention, on distribue β dans le cosinus : le terme qui multiplie le temps est ω.

ω : fréquence angulaire en [rad/s] pour que l'argument du cosinus soit un angle.

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \beta x\right)\hat{y}}$$

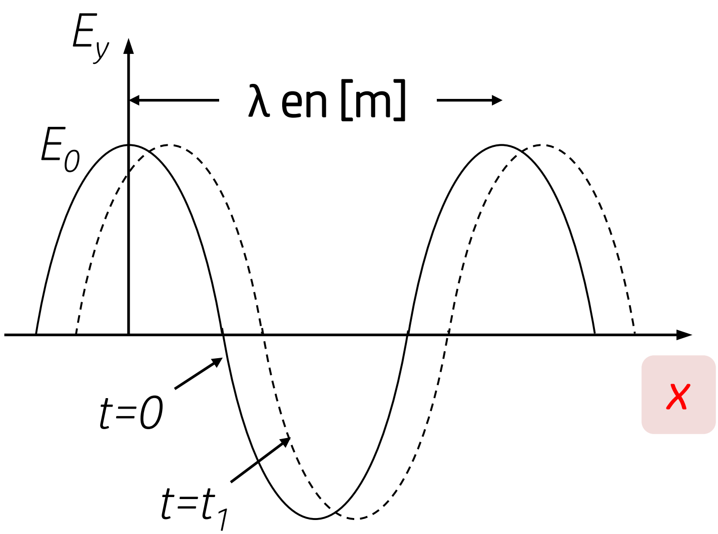
$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

Propriétés de l'onde plane harmonique

Comment calculer la période et la longueur d'onde à partir de l'équation de l'OPH ?

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}}$$

À un instant donné (t = cste), on prend une « photo » de l'onde (sa forme dans l'espace).

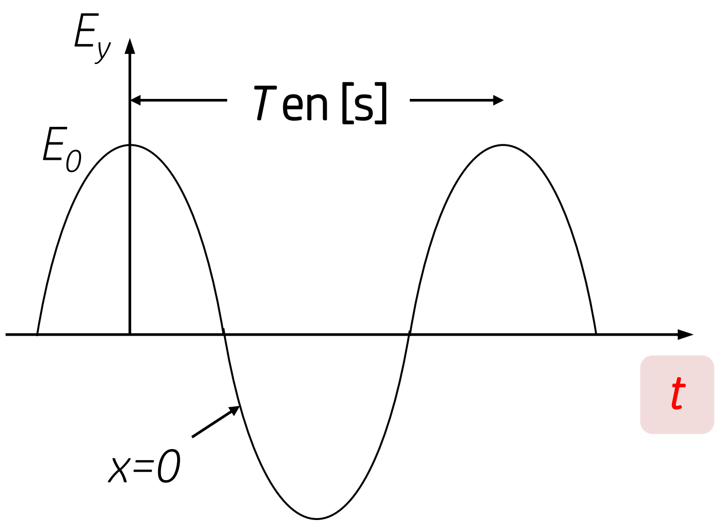


Après une longueur d'onde λ, l'onde a fait un cycle (2π rad)

$$\beta\lambda = 2\pi$$

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

On suit la valeur de l'onde dans le temps en un point de l'espace (x = cste).



Après une période T, l'onde a fait un cycle (2π rad).

$$\omega T = 2\pi$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Propriétés de l'onde plane harmonique

Espace ← OPH → Temps

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}}$$

Constante de phase et longueur d'onde

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Fréquence angulaire et période

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Vitesse de propagation

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

Avec les expressions de β et ω, peut exprimer la vitesse en fonction de λ et T.

Variables et unités

Constante de phase β [rad/m]

Longueur d'onde λ [m]

Fréquence angulaire ω [rad/s]

Période T [s]

Vitesse v [m/s]

Fréquence f [Hz = s^{-1}]

RAPPEL

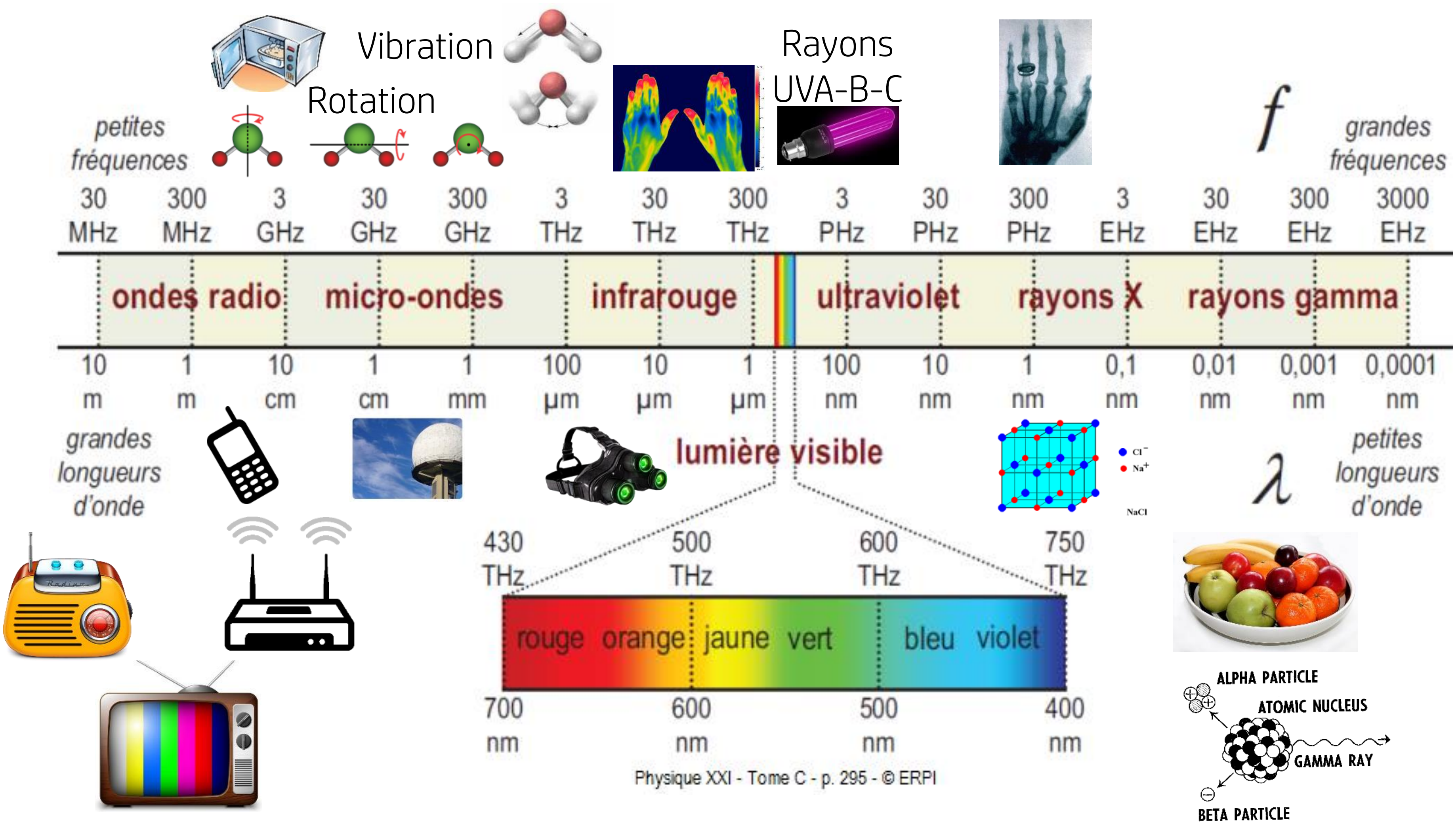
Expressions générales pour calculer la fréquence f de l'onde.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

Spectre électromagnétique

Le spectre est décomposé en 7 régions aux frontières plus ou moins bien définies.



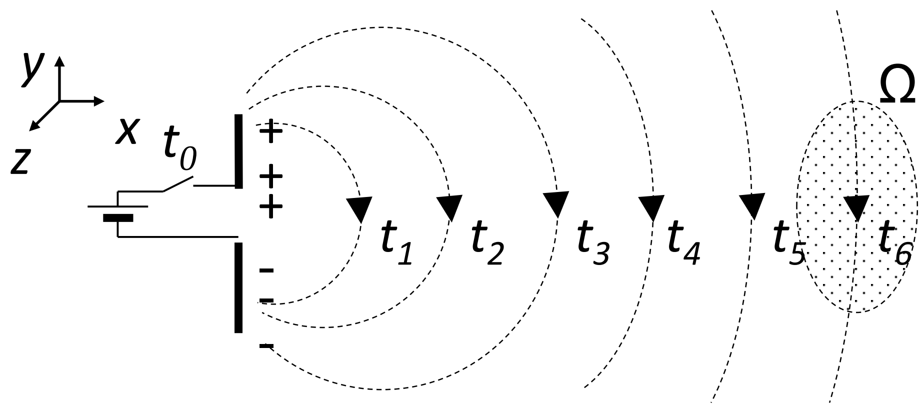
Physique XXI - Tome C - p. 295 - © ERPI

Spectre électromagnétique

λ (m)	f (Hz)	Nomenclature	Applications
10^{-12}	3×10^{20}	rayons γ	médecine, irradiation des aliments
10^{-11}	3×10^{19}	rayons X	médecine, radiocristallographie
10^{-10}	3×10^{18}	ultraviolet	photogravure
10^{-9}	3×10^{17}	ultraviolet	
10^{-8}	3×10^{16}	visible	caméra, astronomie
10^{-7}	3×10^{15}	visible	
10^{-6}	3×10^{14}	infrarouge	thermographie, chauffage
10^{-5}	3×10^{13}	infrarouge	
10^{-4}	3×10^{12}	micro-onde	télécommunications
10^{-3}	3×10^{11}	EHF, Extremely High Frequency (30-300 GHz)	radar
10^{-2}	3×10^{10}	SHF, Super High Frequency (3-30 GHz)	radar, télécom. satellite
10^{-1}	3×10^{9}	UHF, Ultra High Frequency (300-3000 MHz)	radar, TV, téléphone cellulaire
1	3×10^{8}	VHF, Very High Frequency (30-300 MHz)	TV, radio FM, contrôle aérien
10	3×10^{7}	HF, High Frequency (3-30 MHz)	radio ondes courtes, radio CB
10^{2}	3×10^{6}	MF, Medium Frequency (300-3000 kHz)	radio AM, radio maritime
10^{3}	3×10^{5}	LF, Low Frequency (30-300 kHz)	navigation, radio-phare
10^{4}	3×10^{4}	VLF, Very Low Frequency (3-30 kHz)	télécommunication sous-marine
10^{5}	3×10^{3}	ULF, Ultra Low Frequency (300-3000 Hz)	audio
10^{6}	3×10^{2}	SLF, Super Low Frequency (30-300 Hz)	transport d'énergie électrique
10^{7}	3×10^{1}	ELF, Extremely Low Frequency (3-30 Hz)	télécommunication sous-marine

Calcul de $\vec{H}$ à partir de $\vec{E}$ pour une OPH

On utilise la 3[e] équation de Maxwell (avec $\vec{J} = \vec{0}$) pour calculer $\vec{H}$ à partir de $\vec{E}$.



$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}}$$

3[e] équation de Maxwell

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

Rotationnel de $\vec{E}$

Le calcul est simplifié, car $\vec{E}$ a une seule composante E_y et que celle-ci ne dépend que de x.

$$\nabla \times \vec{E} = -\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z} = \frac{\partial}{\partial x} E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{z} = -E_0 \beta \sin(\omega t - \beta x)\hat{z}$$

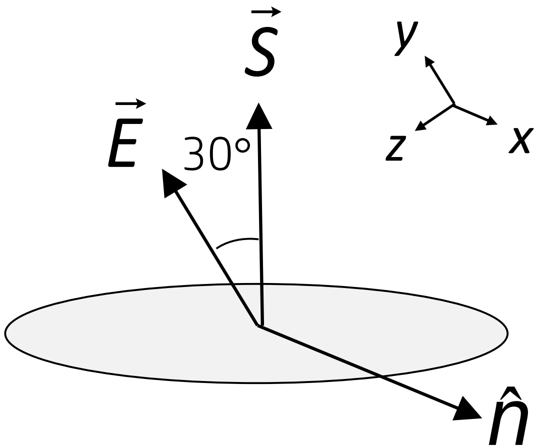
Champ magnétique $\vec{H}$

On intègre la 3[e] équation de Maxwell.

Aurait-on pu prédire l'orientation de $\vec{H}$?

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu}\int \nabla \times \vec{E} dt = -\frac{1}{\mu}\int \left[-E_0 \beta \sin(\omega t - \beta x)\hat{z}\right] dt \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{E_0 \beta}{\mu \omega}\cos(\omega t - \beta x)\hat{z}}$$

Exemple 12.1 – F.É.M. dans une antenne de réception en boucle



Direction de propagation de l'OPH

Une antenne de réception située dans le vide est formée d'une boucle d'un tour de fil et de surface S = 1 m². Quelle est l'amplitude de la f.é.m. induite dans la boucle par une onde plane harmonique ayant une fréquence de 3 MHz et dont le champ électrique, d'amplitude 0,1 V/m, fait un angle de 30° avec la normale à la surface de la boucle ?

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}$$

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{z}$$

$$H_0 = \frac{E_0 \beta}{\mu_0 \omega}$$

Stratégie de résolution

Calculer la f.é.m. à partir de la 3e équation de Maxwell.

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

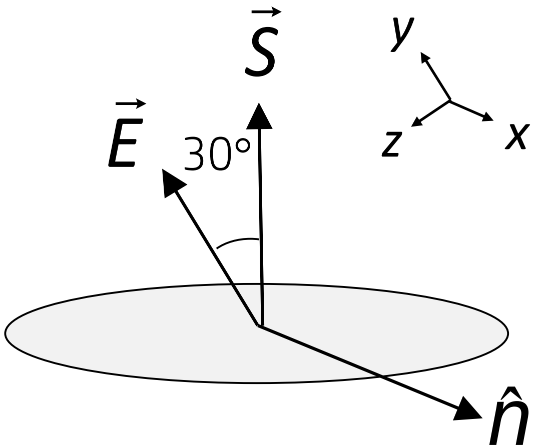
Calcul du flux magnétique à travers S

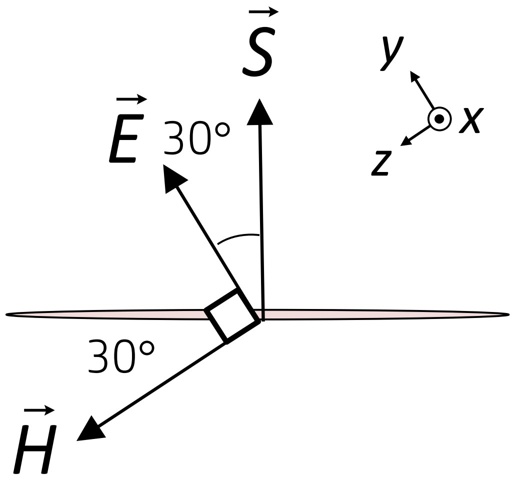
Hypothèse : B est uniforme sur S puisque λ >> 1 m.

En effet, $v = c$ dans le vide et la longueur d'onde vaut :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8 \text{ m/s}}{3\times10^6 \text{ Hz}} = 100 \text{ m}$$

Exemple 12.1 – F.É.M. dans une antenne de réception en boucle





$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}$$

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{z}$$

$$H_0 = \frac{E_0 \beta}{\mu_0 \omega}$$

Calcul du flux magnétique à travers S (suite)

$$\Phi \approx \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{S} = -\mu_0 HS \sin 30° = -\frac{\mu_0 H_0 S}{2} \cos(\omega t - \beta x)$$

Calcul de l'amplitude de la f.é.m.

$$\in = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 H_0 S \omega}{2} \sin(\omega t - \beta x) = \frac{E_0 S \beta}{2} \sin(\omega t - \beta x)$$

L'amplitude $\in_0$ est la valeur maximale (en absolu) de $\in$.

$$\boxed{\in_0 = \frac{E_0 S \beta}{2} = \frac{0{,}1 \cdot 1^2}{2} \frac{2\pi}{100} = 3{,}14 \text{ mV}}$$

Impédance d'un milieu

L'impédance est le ratio entre les amplitudes des champs électrique et magnétique.

Nous avons vu que pour une OPH qui se propage selon $\hat{x}$ dans le vide (ε_0, μ_0) ou dans un diélectrique (ε, μ), les amplitudes E_0 et H_0 ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}$$
$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{z}$$

3^e et 4^e équations de Maxwell

$$H_0 = \frac{E_0 \beta}{\mu \omega}$$

En isolant le ratio E_0/H_0, on trouve l'impédance Z associée au milieu de propagation :

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu\omega}{\beta} = \mu v = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Impédance d'un milieu

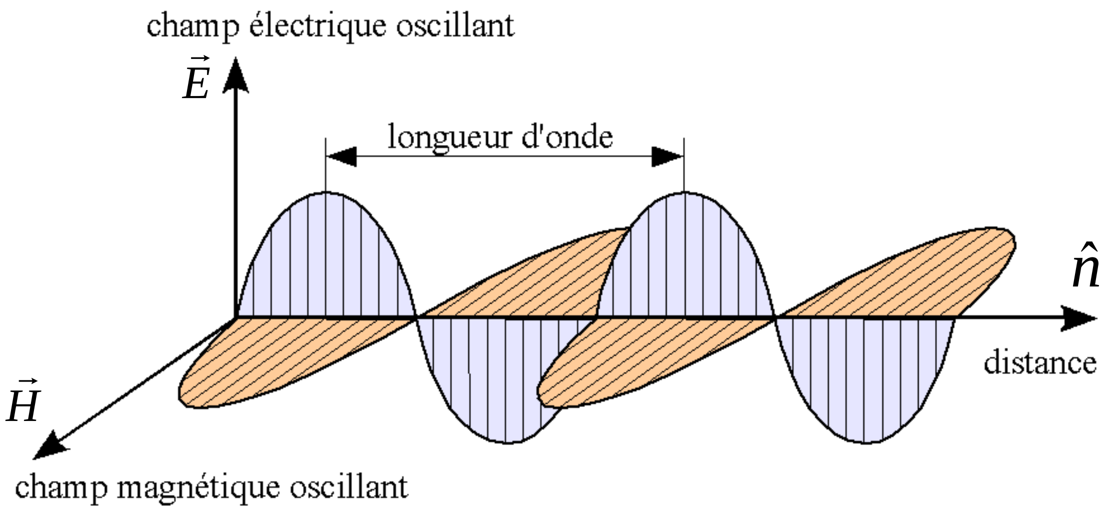
$$\boxed{Z = \frac{\left\|\vec{E}_0\right\|}{\left\|\vec{H}_0\right\|} = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

en ohm [Ω]

Impédance du vide : $\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\ \Omega}$

Orthogonalité des champs

Le trièdre $\vec{E}$, $\vec{H}$ et $\hat{n}$ (ou une permutation cyclique) respecte la règle de la main droite.



$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}$$

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{z}$$

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Les relations suivantes décrivent l'orthogonalité des champs d'une OPH et permettent de calculer $\vec{E}$, $\vec{H}$ ou $\hat{n}$ directement si l'on connaît l'impédance du milieu.

Orthogonalité des champs

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{E} \perp \hat{n} \\ \vec{H} \perp \hat{n} \\ \vec{E} \perp \vec{H} \end{array}}$$

Relations entre $\vec{E}$, $\vec{H}$ et $\hat{n}$

$$\boxed{\vec{E} = Z\left(\vec{H} \times \hat{n}\right)} \qquad \boxed{\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n} \times \vec{E}\right)}$$

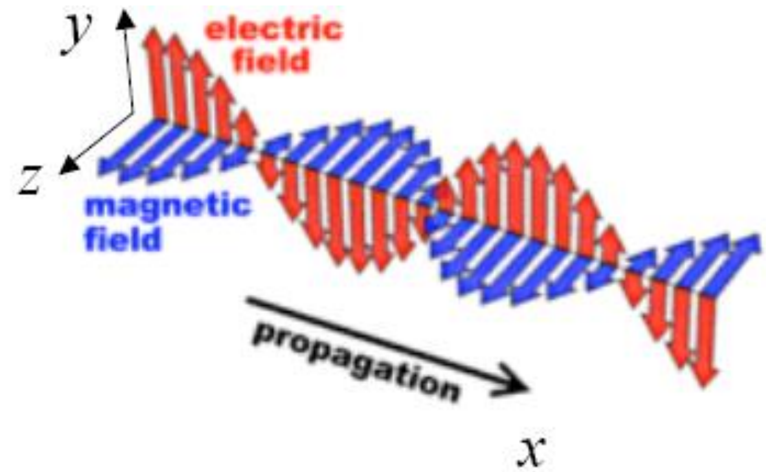
OPH de direction quelconque

Les relations entre $\vec{E}$, $\vec{H}$ et $\hat{n}$ demeurent les mêmes.

OPH se propageant selon $\hat{x}$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}$$

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{z}$$



Orthogonalité des champs

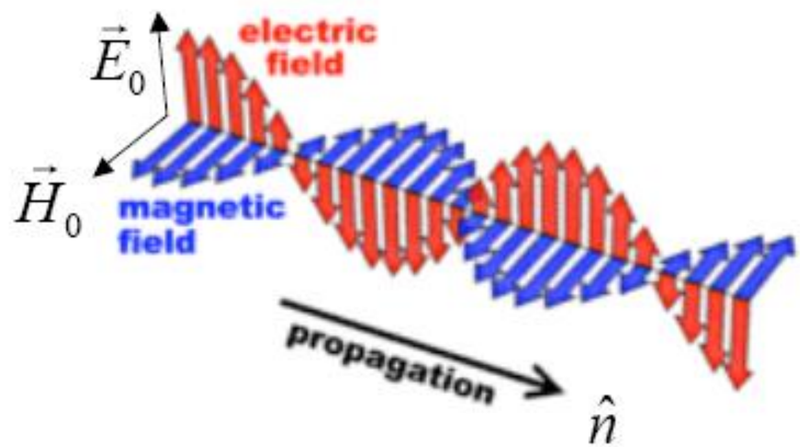
$$\vec{E} = Z\left(\vec{H} \times \hat{n}\right) \qquad \vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n} \times \vec{E}\right)$$

$$\vec{E} \perp \hat{n} \qquad \vec{H} \perp \hat{n} \qquad \vec{E} \perp \vec{H}$$

OPH se propageant selon $\hat{n}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right) + \theta\right) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right) + \theta\right) \end{aligned}}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$



Exemple 12.2 – OPH de direction quelconque

Une OPH se propage dans un milieu dont l'impédance vaut 300 Ω. Cette onde est décrite par l'équation :

$$\vec{E} = 450(\hat{y}+\hat{z})\cos\left(x+2y-2z-6\times10^8 t\right)$$

a) Calculer la direction de propagation de l'onde.

On procède par identification avec l'expression générale d'une OPH. Pour ce faire, on utilise le fait que le cosinus est une fonction paire ($\cos(-x) = \cos(x)$) pour inverser le signe de l'argument du cosinus.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\vec{r}) + \theta\right)$$

$$\vec{E} = 450(\hat{y}+\hat{z})\cos\left(6\times10^8 t - (x+2y-2z) + 0\right)$$

On étudie les termes en rouge pour trouver $\hat{n}$.

$$\beta(\hat{n}\cdot\vec{r}) = x+2y-2z$$

$$(\beta\hat{n})\cdot\vec{r} = (\hat{x}+2\hat{y}-2\hat{z})\cdot(x\hat{x}+y\hat{y}-z\hat{z})$$

$$\beta\hat{n} = \hat{x}+2\hat{y}-2\hat{z}$$

$$\hat{n} = \frac{\beta\hat{n}}{\|\beta\hat{n}\|} = \frac{\hat{x}+2\hat{y}-2\hat{z}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

$$\boxed{\hat{n} = \frac{1}{3}\hat{x}+\frac{2}{3}\hat{y}-\frac{2}{3}\hat{z}}$$

Exemple 12.2 – OPH de direction quelconque

$$\vec{E} = 450(\hat{y}+\hat{z})\cos\left(x+2y-2z-6\times10^{8}t\right)$$

$$Z = 300\ \Omega$$

$$\hat{n} = \frac{1}{3}\hat{x}+\frac{2}{3}\hat{y}-\frac{2}{3}\hat{z}$$

$$\beta\hat{n} = \hat{x}+2\hat{y}-2\hat{z}$$

b) Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde.

On utilise l'orthogonalité des champs.

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n}\times\vec{E}\right) = \frac{1}{300}\left(\frac{1}{3}\hat{x}+\frac{2}{3}\hat{y}-\frac{2}{3}\hat{z}\right)\times\left(450[\hat{y}+\hat{z}]\cos[x+2y-2z-6\times10^{8}t]\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \left(2\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\right)\cos\left(x+2y-2z-6\times10^{8}t\right)}$$

c) Calculer la vitesse de propagation de l'onde.

On obtient $\omega = 6\times10^{8}$ rad/s de l'équation de l'onde.
Il faut donc calculer β pour trouver la vitesse.

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\beta = \left\|\beta\hat{n}\right\| = \left\|\hat{x}+2\hat{y}-2\hat{z}\right\| = 3\ \text{rad/m} \Rightarrow \boxed{v = \frac{6\times10^{8}}{3} = 2\times10^{8}\ \text{m/s}}$$

Polarisation d'une onde électromagnétique

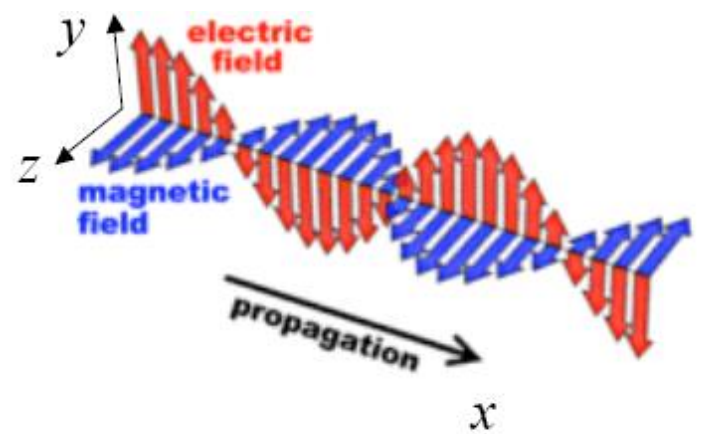
La polarisation d'une onde est la direction de son champ électrique $\vec{E}$.

Quelle est la polarisation des deux OPH suivantes ?

OPH se propageant selon $\hat{x}$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x)\hat{y}$$

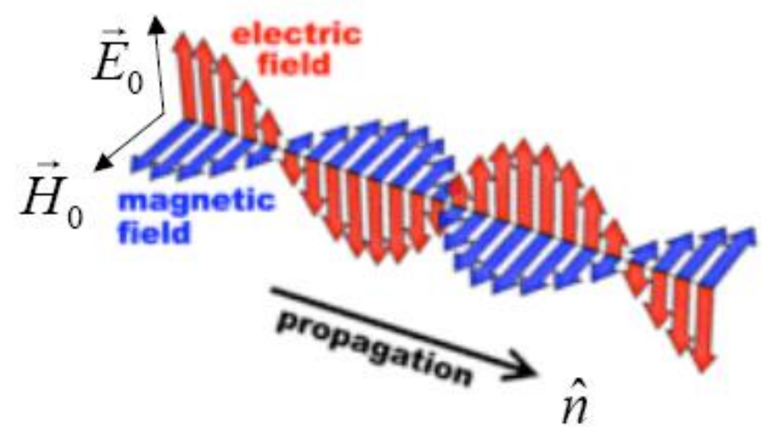
La polarisation est orientée selon $\hat{y}$.



OPH se propageant selon $\hat{n}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\vec{r}) + \theta)$$

La polarisation est dans la direction de $\vec{E}_0$.



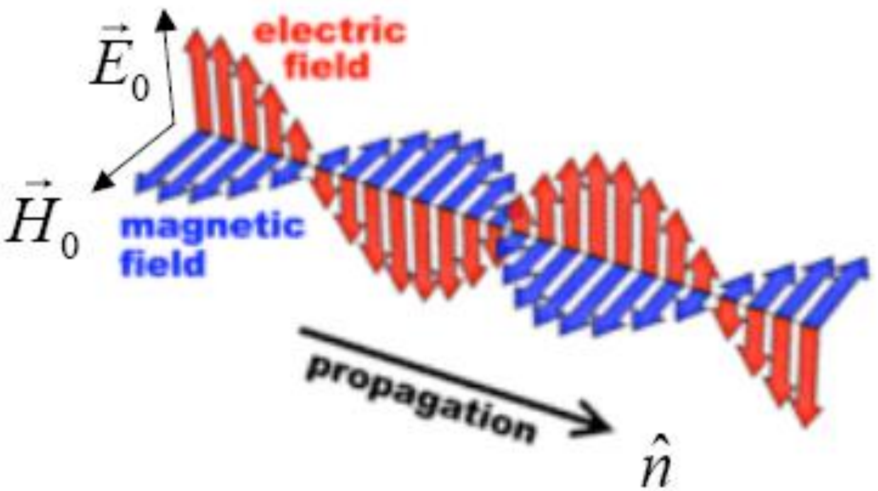
Est-ce que la polarisation (direction de $\vec{E}$) de ces ondes varie dans le temps ?

Polarisation linéaire

Une onde est polarisée linéairement lorsque
la direction de son champ électrique $\vec{E}$ ne varie pas dans le temps.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \beta(\hat{n} \cdot \vec{r}) + \theta)$$

Une seule OPH est polarisée linéairement, car $\vec{E}_0$ reste toujours dans la même direction au fur et à mesure que l'onde se propage.

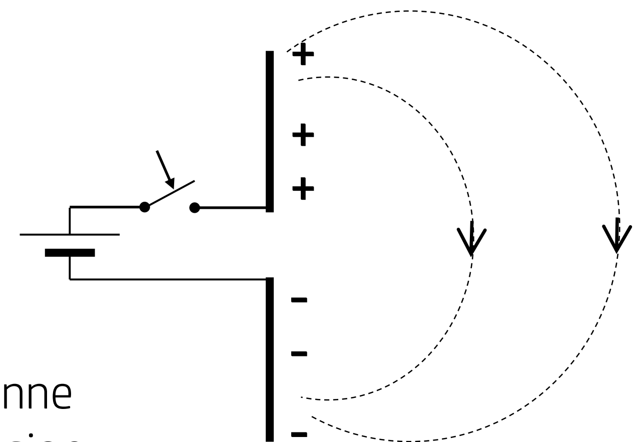


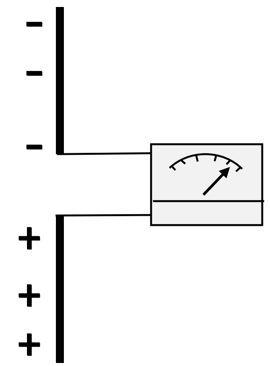
Pourquoi la polarisation est-elle importante ?

Pour pouvoir recevoir un signal, il faut que la polarisation de l'antenne de réception soit la même que celle de l'antenne d'émission.

Émission et détection

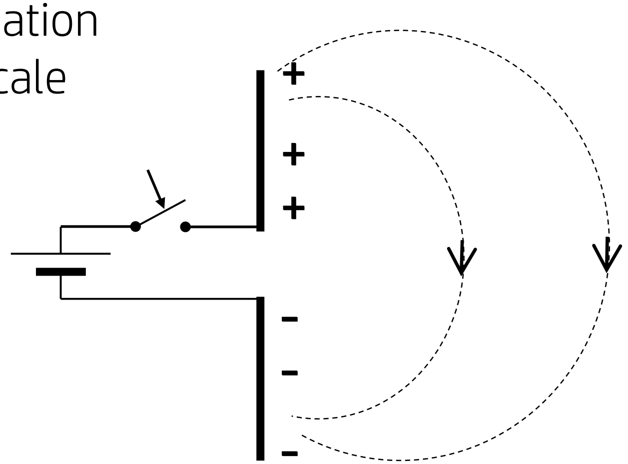
Pour pouvoir recevoir un signal, il faut que la polarisation de l'antenne de réception soit la même que celle de l'antenne d'émission.

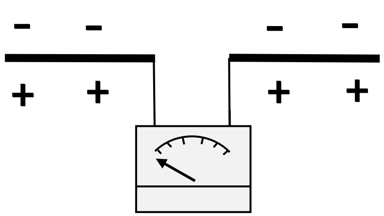




Antenne de réception 1 : polarisation verticale = signal capté

Antenne d'émission : polarisation verticale





Antenne de réception 2 : polarisation horizontale = aucun signal capté

Polarisation linéaire - Applications

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right) + \theta\right)$$

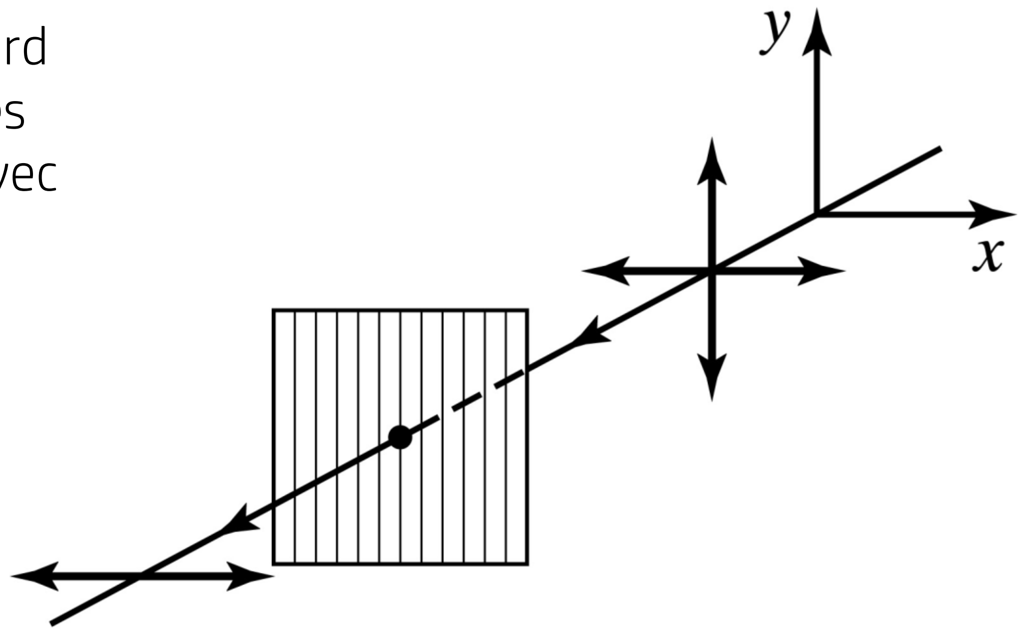
Polarisation linéaire **verticale** : radio AM

Polarisation linéaire **horizontale** : télévision

Matériaux dichroïques - Polariseurs

On considère l'expérience standard consistant en l'interaction d'ondes micro-ondes (λ = 1 mm – 1 m) avec un réseau de fils métalliques.

La séparation entre les fils est beaucoup plus petite que la longueur d'onde.



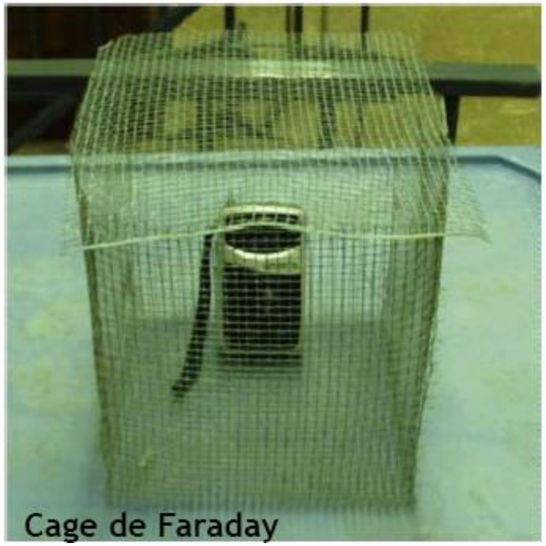
https://www.youtube.com/watch?v=LKAFomXpBVg

Résultat de l'expérience :

- Les ondes ayant une polarisation parallèle à la grille sont réfléchies.
- Les ondes de polarisation perpendiculaire à la grille sont transmises avec peu d'atténuation.

Blindage électrostatique – Cage de Faraday

Une **onde électromagnétique** (ondes radio, micro-ondes, lumière visible, etc.) est composée d'un **champ électrique** qui oscille à une **fréquence** f propre à la source émettrice.



Si l'on met une radio dans une cage de Faraday (grillage métallique), qu'arrivera-t-il ?

La cage aura un effet de blindage électrostatique et bloquera une partie des ondes radio, ce qui diminuera l'intensité du signal reçu.

https://www.youtube.com/watch?v=q1KfShVqGBw

La lumière est aussi une onde ÉM : pourquoi voit-on la radio à travers la cage ?

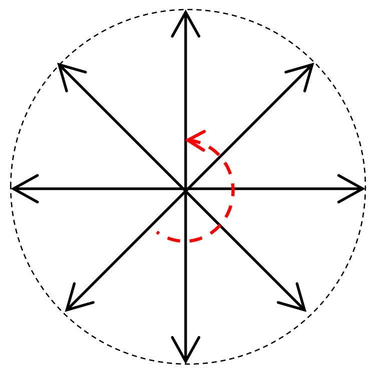
La grille de la cage de Faraday agit comme un filtre passe-haut : les ondes de fréquence élevée (longueur d'onde petite par rapport au maillage) traversent la cage tandis que les ondes de fréquence faible sont bloquées par la cage.

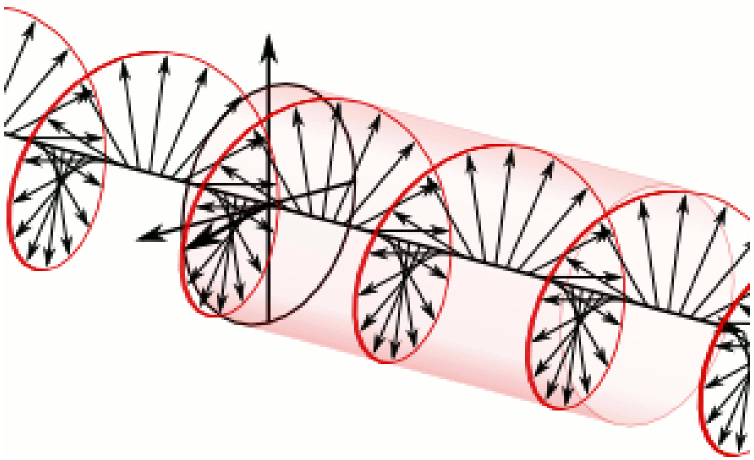
$$\lambda_{\text{radio}} = \frac{c}{f_{\text{radio}}} \approx \frac{3\times10^{8}\,\text{m/s}}{100\times10^{6}\ \text{Hz}} = 3\,\text{m} \qquad \lambda_{\text{visible}} \approx 500\ \text{nm} = 5\times10^{-7}\ \text{m}$$

Polarisation circulaire

La direction du champ électrique d'une onde polarisée circulaire varie dans le temps : elle décrit un cercle en tournant à vitesse angulaire constante.

Comment obtenir une onde polarisée circulairement sachant qu'une seule OPH est toujours polarisée linéairement ?





Une onde polarisée circulairement est la superposition de deux OPH :

- De mêmes fréquence, vitesse de propagation et amplitude ;
- De même direction de propagation ;
- De polarisations linéaires orthogonales ;
- Déphasées de $\pi/2$ radians l'une par rapport à l'autre.

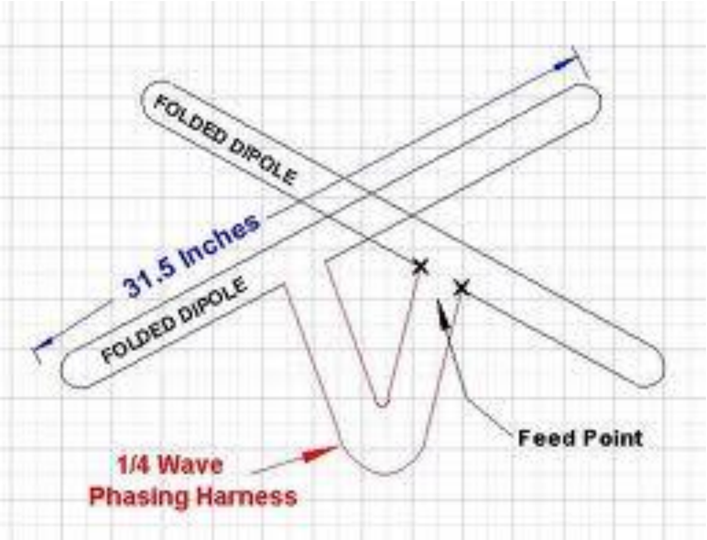
RAPPEL

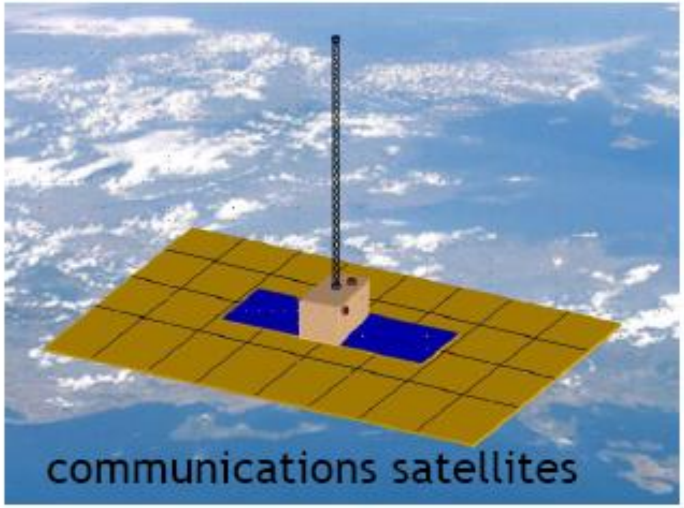
$$\cos\left(\phi - \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\phi$$

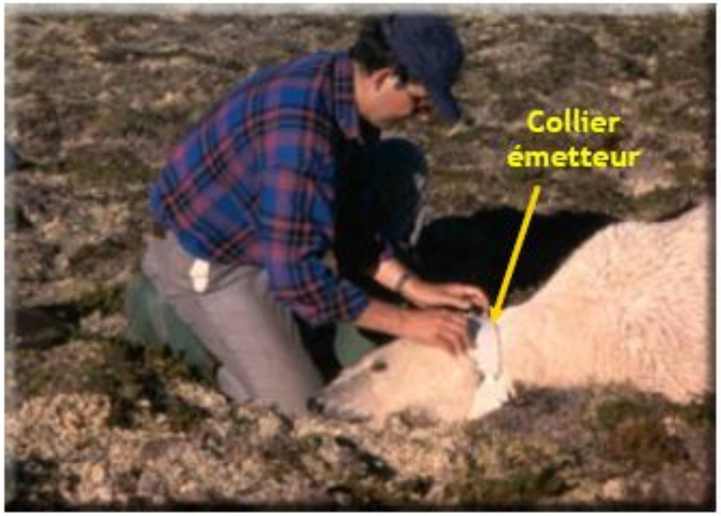
Exemple : $\vec{E} = E_0\left[\underbrace{\cos(\omega t - \beta x)\hat{y}}_{1^{re}\text{ OPH}} + \underbrace{\sin(\omega t - \beta x)\hat{z}}_{2^{e}\text{ OPH}}\right]$

Polarisation circulaire – Applications

Radio FM







émetteurs difficiles à orienter

Exemple 12.3 – Polarisation

Dans un milieu diélectrique non conducteur ($\varepsilon_r = 3$ et $\mu_r = 4$), le champ électrique d'une onde est donné par :

$$\vec{E} = 10\hat{x}\sin\left(10^7 t - \beta z\right) + 10\hat{y}\cos\left(10^7 t - \beta z\right)$$

a) Quel est le type de polarisation de cette onde ?

On déduit de la présence du sinus et du cosinus que l'onde n'est pas polarisée linéairement. Il faut alors démontrer que toutes les conditions pour avoir une polarisation circulaire sont remplies. Avons-nous deux OPH de :

- Mêmes fréquence, vitesse de propagation et amplitude ? OUI

  $\omega = 10^7 \text{ rad/s}$ $\quad v = \omega/\beta$ $\quad E_0 = 10 \text{ V/m}$
- Même direction de propagation ? OUI

  $\hat{n} = \hat{z}$
- Polarisations linéaires orthogonales ? OUI

  La 1re est polarisée selon $\hat{x}$ et la 2e, selon $\hat{y}$.
- Déphasage de $\pi/2$ radians l'une par rapport à l'autre ? OUI

  Le sinus et le cosinus sont déphasés de $\pi/2$ radians.

L'onde est polarisée circulairement.

Exemple 12.3 – Polarisation circulaire

Dans un milieu diélectrique non conducteur ($\varepsilon_r = 3$ et $\mu_r = 4$), le champ électrique d'une onde est donné par :

$$\vec{E} = 10\hat{x}\sin\left(10^7 t - \beta z\right) + 10\hat{y}\cos\left(10^7 t - \beta z\right)$$

$$\omega = 10^7 \text{ rad/s}$$

$$\hat{n} = \hat{z}$$

b) Quelle est la valeur de la constante de phase ?

On calcule la vitesse de propagation avec ε et μ, puis on utilise ω pour calculer β.

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}} \Rightarrow \boxed{\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0} = 0{,}116 \text{ rad/s}}$$

c) Quel est le champ magnétique de l'onde ?

On calcule l'impédance et on utilise l'orthogonalité des champs.

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}} = 435\,\Omega$$

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n}\times\vec{E}\right) = \frac{1}{435}\left(\hat{z}\right)\times\left(10\hat{x}\sin\left[10^7 t - 0{,}116z\right] + 10\hat{y}\cos\left[10^7 t - 0{,}116z\right]\right)$$

$$\boxed{\vec{H} = 0{,}0230\left(\hat{y}\sin\left[10^7 t - 0{,}116z\right] - \hat{x}\cos\left[10^7 t - 0{,}116z\right]\right)}$$

Transport de puissance par une onde EM

Une onde transporte de l'énergie contenue dans les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$. On associe donc à l'onde une certaine puissance transportée.

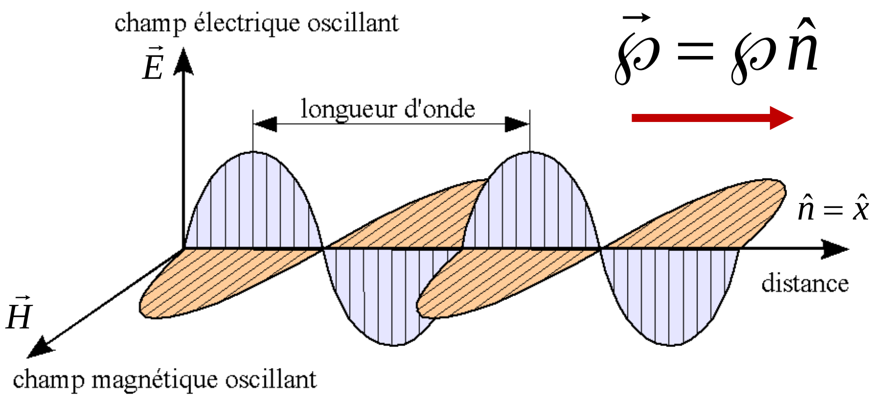
Vecteur de Poynting

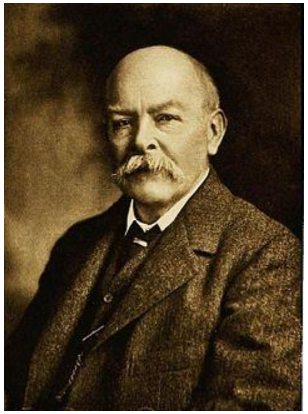
La densité de puissance (intensité) transportée par une onde en un point de l'espace est donnée par le produit vectoriel des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

Vecteur de Poynting (densité de puissance)

$$\boxed{\vec{\wp} = \vec{E} \times \vec{H}}$$

en [W/m²]





John Poynting (1852-1914)

Pour une OPH, $\vec{\wp}$ pointe dans la direction de propagation !

Puissance qui traverse une surface S

$$\boxed{P = \int_S \vec{\wp} \cdot d\vec{S}}$$

en [W]

Pour obtenir P, il faut intégrer la composante du vecteur de Poynting normale à S (produit scalaire) sur la surface S.

Puissance transportée par une OPH
(polarisation linéaire)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right) + \theta\right)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right) + \theta\right)$$

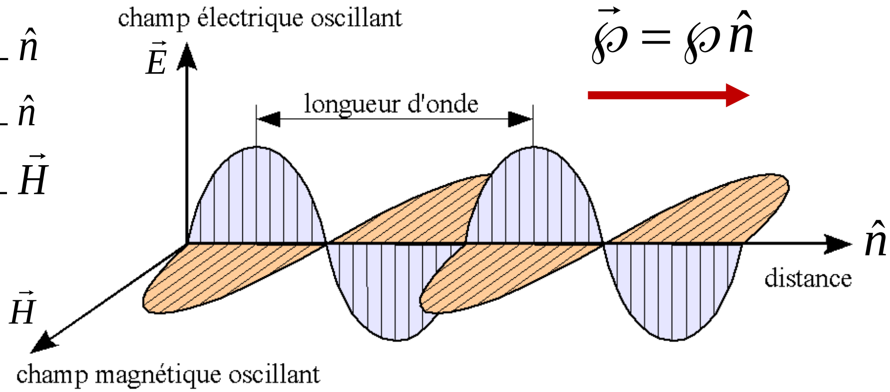
$$\boxed{\vec{\wp} = \vec{E}\times\vec{H}}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n}\times\vec{E}\right)$$

$\vec{E}\perp\hat{n}$

$\vec{H}\perp\hat{n}$

$\vec{E}\perp\vec{H}$



Le vecteur de Poynting de l'OPH est :

$$\vec{\wp} = \vec{E}\times\vec{H} = \left(\vec{E}_0\times\vec{H}_0\right)\cos^2\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta\right) = \frac{1}{Z}\left(\vec{E}_0\times\left[\hat{n}\times\vec{E}_0\right]\right)\cos^2\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta\right)$$

Identité vectorielle : $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

$$\vec{\wp} = \frac{1}{Z}\left[\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0\right)\hat{n} - \cancel{\left(\vec{E}_0\cdot\hat{n}\right)}\vec{E}_0\right]\cos^2\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta\right)$$

$$\boxed{\vec{\wp} = \frac{E_0^2}{Z}\hat{n}\cos^2\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta\right) = ZH_0^2\hat{n}\cos^2\left(\omega t - \beta\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\theta\right)}$$

$\vec{E}$ est perpendiculaire à $\hat{n}$!

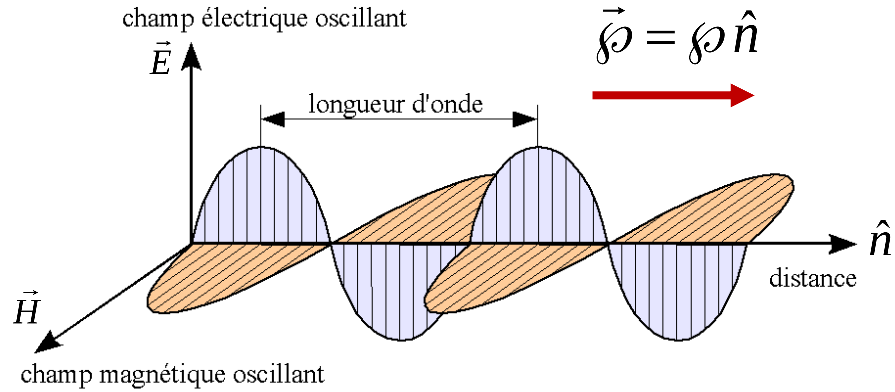
Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même donne sa norme au carré : $\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0 = E_0^2$.

Puissance transportée par une OPH
(polarisation linéaire)

Vecteur de Poynting d'une OPH

$$\boxed{\vec{\wp} = \frac{E_0^2}{Z}\hat{n}\cos^2\left(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\vec{r}) + \theta\right)}$$

$\vec{\wp}$ pointe toujours dans la direction de propagation ($\hat{n}$), mais son amplitude varie dans le temps.



Vecteur de Poynting moyen

On prend la moyenne temporelle (sur une période de l'OPH) du vecteur de Poynting.

$$\langle\vec{\wp}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{\wp}\,dt = \frac{E_0^2}{Z}\hat{n}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \beta(\hat{n}\cdot\vec{r}) + \theta\right)dt$$

L'intégrale du carré d'un cosinus sur sa période vaut ½.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2}$$

Vecteur de Poynting moyen d'une OPH

$$\boxed{\langle\vec{\wp}\rangle = \frac{E_0^2}{2Z}\hat{n} = \frac{ZH_0^2}{2}\hat{n}}$$

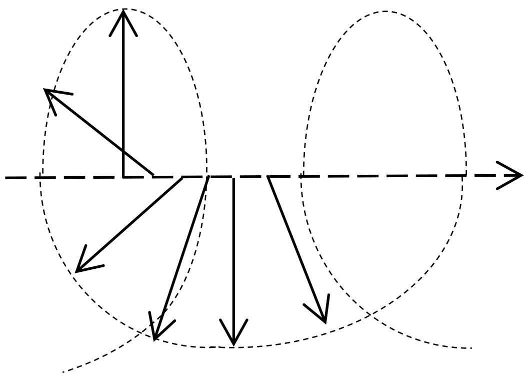
Puissance transportée par une onde polarisée circulairement

On considère une onde qui se propage selon $\hat{n} = \vec{x}$ pour simplifier les calculs.

$$\vec{E} = E_0\left[\cos(\omega t - \beta x)\hat{y} + \sin(\omega t - \beta x)\hat{z}\right]$$

$$\vec{H} = \frac{E_0}{Z}\left[\cos(\omega t - \beta x)\hat{z} - \sin(\omega t - \beta x)\hat{y}\right]$$

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n} \times \vec{E}\right)$$



Calcul du vecteur de Poynting

$$\vec{\wp} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E_0^2}{Z}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \cos(\cdot) & \sin(\cdot) \\ 0 & -\sin(\cdot) & \cos(\cdot) \end{vmatrix} = \frac{E_0^2}{Z}\underbrace{\left[\cos^2(\cdot) + \sin^2(\cdot)\right]}_{=1}\hat{x} = \frac{E_0^2}{Z}\hat{x}$$

Le vecteur de Poynting est constant et, dans le cas général, pointe selon $\hat{n}$ pour une onde polarisée circulairement.

$$\boxed{\vec{\wp} = \frac{E_0^2}{Z}\hat{n}}$$

Exemple 12.4 – Puissance d'un faisceau laser

Dans l'air, un faisceau laser polarisé linéairement a une puissance moyenne de 1 W et un rayon de 1 mm (section circulaire). Calculer les intensités maximales des champs électrique et magnétique.

$$\langle P \rangle = 1\,\text{W} \qquad r = 1\,\text{mm} \qquad Z_0 = 377\,\Omega \qquad E_0, H_0 = ?$$

Vecteur de Poynting moyen

$$\langle \wp \rangle = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{\langle P \rangle}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi (0{,}001)^2} = 318\,\text{kW/m}^2$$

Intensités maximales des champs

$$\langle \wp \rangle = \frac{E_0^2}{2Z_0} \Rightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{2Z_0 \langle \wp \rangle} = 15{,}5\,\text{kV/m}}$$

$$\langle \wp \rangle = \frac{Z_0 H_0^2}{2} \Rightarrow \boxed{H_0 = \sqrt{\frac{2\langle \wp \rangle}{Z_0}} = 41{,}1\,\text{kA/m}}$$