PHS1102 Champs électromagnétiques

Corrigé du contrôle périodique Hiver 2019

Question 1 : Concepts et réponses courtes (4 points)

1.1 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,50 point)** ; Deux erreurs : **(0,25 point)**. Trois erreurs : **(0 point)**.

Courbe A) P.

Courbe B) V.

Courbe C) D.

1.2 (1 pt) La bonne réponse est G : $2{,}05\,\mathrm{mN}$. Il fallait poser deux charges images $+Q$ à $(1,-1)$ et à $(-1,1)$ et une charge image $-Q$ à $(-1,-1)$.

1.3 (1 pt) La réponse est B.

1.4 (1 pt) Aucune erreur : **(1 point)** ; Une erreur : **(0,50 point)** ; Deux erreurs : **(0,25 point)**. Trois erreurs : **(0 point)**. .

Les affirmations vraies sont A et C.

Question 2 : Charge atmosphérique (5 points)

2.1 (3 pts) Champ électrique.

La symétrie sphérique du problème nous indique que la densité de flux et le champ électrique seront radiaux :

$$\vec{D} = D_r \hat{r}$$
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{D_r}{\varepsilon}\hat{r}$$

On peut appliquer le théorème de Gauss avec une sphère de rayon r pour trouver le champ dans chaque région.

Cas 1 : $r < a$: La charge dans la surface de Gauss est nulle.

$$0 = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D_r$$
$$D_r = 0$$
$$\vec{E} = \vec{0}.$$

Cas 2 : $a \leq r \leq b$: La charge dans la surface de Gauss vaut :

$$Q = \int_v \rho_v dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^r \frac{A}{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$
$$Q = 4\pi A \int_a^r r dr$$
$$Q = 2\pi A \left(r^2 - a^2\right).$$

Le champ vaut donc :

$$Q = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$
$$2\pi A \left(r^2 - a^2\right) = 4\pi r^2 D_r$$
$$D_r = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$
$$\vec{E} = \frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\hat{r}.$$

Cas 3 : $r \geq b$: En se basant sur les résultats précédents, la charge dans la surface de Gauss est la charge dans toute la région chargée. Elle vaut :

$$Q = 2\pi A \left(b^2 - a^2\right).$$

Le champ vaut donc :

$$\begin{aligned}
Q &= \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \\
2\pi A \left(b^2 - a^2\right) &= 4\pi r^2 D_r \\
D_r &= \frac{A}{2} \frac{b^2 - a^2}{r^2} \\
\vec{E} &= \frac{A}{2\varepsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r^2} \hat{r}.
\end{aligned}$$

2.2 (1 pt) Densité de charge induite sur la surface extérieure.

La densité de charge induite est donnée (en module) par la norme du vecteur polarisation qu'il faut évaluer dans la région diélectrique, à la surface $r = b$:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \\
|\rho_{s,i}| = P &= \left| \frac{A}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) - \varepsilon_0 \frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \right| \\
|\rho_{s,i}| &= \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right).
\end{aligned}$$

2.3 (1 pt) Travail effectué pour amener les charges libres.

Le travail est l'énergie potentielle électrique emmagasinée dans le champ $\vec{E}$.

$$\begin{aligned}
W = U &= \int_v \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2} \left(\frac{A}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{r^2 - a^2}{r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_b^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{A}{2\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi.
\end{aligned}$$

Question 3 : Condensateur en coin (5,5 points)

3.1 (2 pts) Distribution de potentiel.

La symétrie cylindrique permet d'affirmer que le potentiel ne dépend que de l'angle ϕ mesuré positivement en sens antihoraire ($\phi = 0$ sur l'armature du bas). La solution correspondante à l'équation de Laplace est alors :

$$V = V(\phi) = A\phi + B,$$

dans chaque région du condensateur.

Région 1 : $0 \leq \phi \leq \alpha$: Le potentiel s'écrit

$$V = A_1\phi + B_1,$$

avec les conditions frontières

$$V(0) = 0 \Longrightarrow B_1 = 0$$
$$V(\alpha) = V_0 \Longrightarrow A_1 = \frac{V_0}{\alpha}.$$

Le potentiel vaut donc :

$$V = \frac{V_0}{\alpha}\phi.$$

Région 2 : $\alpha \leq \phi \leq 2\alpha$: Le potentiel s'écrit

$$V = A_2\phi + B_2,$$

avec les conditions frontières

$$V(2\alpha) = 0 \Longrightarrow 2A_2\alpha + B_2 = 0$$
$$V(\alpha) = V_0 \Longrightarrow A_2\alpha + B_2 = V_0.$$

En résolvant, pour A_1 et pour B_1, on trouve :

$$V = -\frac{V_0}{\alpha}\phi + 2V_0,$$

3.2 (2,5 pts) Capacité du condensateur.

Puisque le condensateur est en fait formé de deux condensateurs en parallèle, on peut calculer la capacité entre les deux plaques du bas, puis multiplier par deux (par symétrie, la capacité entre les deux plaques du haut sera la même).

La capacité C_1 du condensateur du bas est donnée par :

$$C_1 = \frac{|Q_1|}{V_0},$$

où la charge $|Q_1|$ est la charge libre totale (en module) accumulée sur la plaque du bas.

On trouve cette charge en utilisant la condition à l'interface diélectrique/conducteur à $\phi = 0$ (plaque du bas) :

$$\begin{aligned} D_{1N} &= \rho_s, \\ D_{1,\phi} &= \rho_s, \\ \varepsilon_r \varepsilon_0 E_{1,\phi} &= \rho_s. \end{aligned}$$

Le champ électrique se calcule en prenant le gradient du potentiel :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla V &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} \\ &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{V_0}{\alpha}\phi\right)\hat{\phi} \\ &= -\frac{V_0}{\alpha\rho}\hat{\phi} \end{aligned}$$

La densité surfacique de charge sur l'électrode du bas est donc :

$$\rho_s = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha\rho},$$

ce qui implique que la charge totale sur celle-ci est :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_S \rho_s dS \\ &= -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha}\int_0^c \int_a^{a+c} \frac{1}{\rho} d\rho dz \\ &= -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{\alpha} c \ln\left(1 + \frac{c}{a}\right), \end{aligned}$$

La capacité totale vaut donc :

$$\begin{aligned} &C = 2C_1 = 2\frac{|Q_1|}{V_0} = \frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0}{\alpha} c \ln\left(1 + \frac{c}{a}\right) \\ &C = 4{,}90\,\mathrm{pF}. \end{aligned}$$

3.3 (1 pt) Valeur maximale du potentiel pour ne pas endommager le condensateur.

Le champ électrique maximal survient à $\rho = a$ et vaut :

$$\vec{E}_{max} = -\frac{V_0}{\alpha a}\hat{\phi}.$$

Le potentiel doit faire en sorte que ce champ ne dépasse pas la rigidité diélectrique du matériau :

$$\begin{aligned} E_{max} &\leq E_c \\ \frac{V_0}{\alpha a} &\leq E_c \\ V_0 &\leq \alpha a E_c = 3{,}49\,\mathrm{kV} \end{aligned}$$

Question 4 : Barreau de conductivité non uniforme (5,5 points)

4.1 (3 pts) Résistance du barreau.

Le champ à l'intérieur du barreau est produit par les électrodes. Celles-ci ayant la forme de plans infinis parallèles, on sait par symétrie que la densité de flux et que le champ électrique sont orientés horizontalement (selon $\hat{z}$) et qu'ils seront uniformes (leur valeur ne dépend pas de la position entre les électrodes). On a donc :

$$\vec{E} = E\hat{x} = \frac{V_0}{L}\hat{z}.$$

Pour calculer la résistance, il faut relier le champ électrique au courant total qui traverse le barreau. Dans un conducteur, la densité de courant est reliée au champ électrique :

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma_0 V_0}{aL}\rho\hat{z}.$$

Pour trouver le courant, il s'agit d'intégrer la densité de courant sur la section du cylindre (disque de rayon a) :

$$\begin{aligned} I &= \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma_0 V_0}{aL}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho\hat{z}\cdot\rho d\rho d\phi\hat{z} \\ I &= \frac{\sigma_0 V_0}{aL}\cdot 2\pi\frac{a^3}{3} \\ I &= \frac{2\pi a^2\sigma_0 V_0}{3L}. \end{aligned}$$

La résistance vaut enfin :

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{3L}{2\pi a^2\sigma_0}.$$

4.2 (1 pt) Densité surfacique de charges libres sur une électrode.

Le théorème de Gauss appliqué une électrode (avec une boîte à pilules de section A) nous donne :

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S,gauche} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S,droite} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} \\ Q &= 2D_1 A \\ \vec{D}_1 &= \frac{Q}{2A}\hat{z}. \end{aligned}$$

En superposant la densité de flux des deux électrodes, on obtient :

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{Q}{2A}\hat{z} + \frac{Q}{2A}\hat{z} = \frac{Q}{A}\hat{z}.$$

Le champ électrique vaut alors :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{z}.$$

On peut le relier à la différence de potentiel comme suit :

$$\begin{aligned} V_0 &= -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_L^0 \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{z} \cdot dx\hat{z} \\ V_0 &= \frac{QL}{\varepsilon_0 A}, \end{aligned}$$

La densité surfacique de charge vaut alors :

$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{L}.$$

4.3 (1,5 pt) Différence de potentiel maximale pour éviter d'endommager le barreau. Puissance dissipée.

La densité de puissance dans le barreau est donnée par :

$$p(\rho) = \sigma E^2 = \frac{\sigma_0 \rho}{a}\left(\frac{V_0}{L}\right)^2 = \frac{\sigma_0 V_0^2}{aL^2}\rho.$$

La densité de puissance est maximale à la surface extérieure du barreau, à $\rho = a$. On doit donc avoir :

$$p(\rho = a) = \frac{\sigma_0 V_0^2}{L^2} \leq p_{max}$$
$$V_0 \leq \sqrt{\frac{L^2}{\sigma_0} p_{max}} = 2{,}89\,\mathrm{V}.$$

La puissance totale dissipée par le barreau est alors :

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{2\pi a^2 \sigma_0 V_0^2}{3L} = 419\,\mathrm{kW}.$$

BONUS (0,5 pt) Effet de la température sur la puissance dissipée.

Si la température augmente, la conductivité du barreau diminuera (sa résistivité augmentera), sa résistance augmentera et, puisque la tension demeure constante, la puissance dissipée diminuera aussi ($P = V_0^2/R$).