ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Applications des mathématiques:

Le planimètre

Mathématiques Appliquées et Génie Industriel

Résumé Le planimètre est un instrument qui mesure la surface à l'intérieur d'une courbe plane fermée en se basant sur le principe du théorème de Green.

Domaines du génie Tous.

Notions mathématiques Les intégrales curvilignes, le rotationnel, le théorème de Green.

Cours pertinents Calcul II.

Auteur(es) N.Khattabi.

Sommaire

1 Introduction

Figure 1: Un planimètre

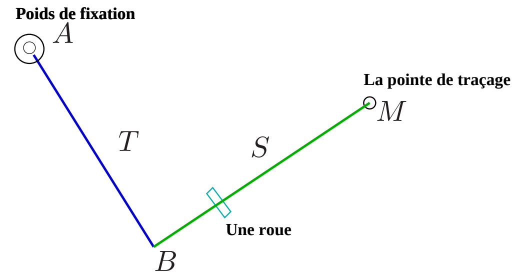


Figure 2: Un schéma du planimètre

L'intégration mécanique exacte est possible depuis l'invention du planimètre polaire par Jakob Amsler (1823-1912) en 1854. Le planimètre est un instrument mécanique qui permet de mesurer l'aire délimitées par des courbes planes. Cet instrument repose sur le principe du théorème de Green.

2 Fonctionnement

Un planimètre polaire est formé de deux barres T et S liées par une articulation B (figure 2) avec une roue attachée à la barre S pouvant tourner autour de l'axe BM. L'extrémité A est fixe et l'extrémité M est mobile.

Si on fait parcourir à la pointe M une courbe fermée qui ne se croise pas elle-même, le nombre de tours que fait la roue est proportionnel à l'aire du domaine délimité par la courbe parcourue.

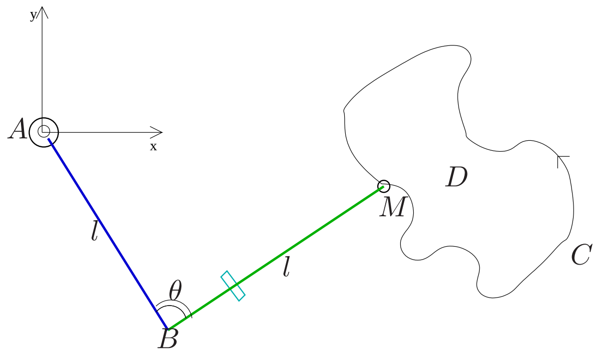
Quand la barre S est en mouvement de translation et se dirige de façon longitudinale, la roue ne tourne pas. Alors que quand elle prend une autre direction, le nombre de tours que fait la roue est proportionnel à la composante de translation qui est perpendiculaire à BM. Pour ce qui est de la barre T, elle agit comme un compas : l'extrémité A est fixe et l'extrémité B fait un mouvement circulaire.

3 Principe mathématique

Nous allons montrer maintenant comment le planimètre permet de calculer l'aire d'une région plane D délimitée par une courbe C. La première étape sera de montrer que le nombre de tour que fait la roue est égale à une intégrale curviligne de la courbe C. Deuxièment, nous montrerons que l'aire de la région D est égale l'intégrale du rotationnel d'une certain champs de vecteur sur D. Le théorème de green jouera un rôle fondamental car c'est grâce à lui que l'intégrale curviligne sur C de la première partie sera égale à l'intégrale double de la partie. Ces trois parties ensembles établiront donc l'égalité entre le nombre de tours fait par la roue et l'aire D.

3.1 La distance roulée par la roue égale une intégrale curviligne sur C

Considérons l'extrémité fixe du planimètre comme l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes dans le plan (O, x, y).

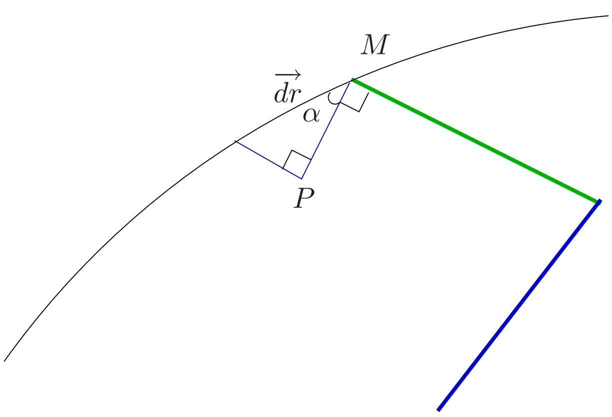


Si l'angle θ entre les bras est $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ alors le point $M = (x, y)$ détermine uniquement le point $B = (a, b)$. On peut donc écrire $a = a(x, y)$ et $b = b(x, y)$. Pour des fins de simplification, on prend la longueur l de chacun des bras égale à 1.

On définit $\overrightarrow{F}(x, y)$ comme étant le champ de vecteurs unitaires qui associe à chaque point M le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{BM}$ tel que $(\overrightarrow{F}(x, y), \overrightarrow{BC})$ est direct.Puisque le vecteur unitaire $\overrightarrow{BM} = (x - a(x, y), y - b(x, y))$, alors le champ $\overrightarrow{F}(x, y)$ a comme composantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F(x,y)} &= P(x,y)\ \overrightarrow{i} + Q(x,y)\ \overrightarrow{j} \\ &= (-(y - b(x,y)), (x - a(x,y))). \end{aligned}$$

Considérons maintenant ce qui se produit lorsque le traceur du planimètre parcourt une petite distance $\overrightarrow{dr}$ le long de la courbe C.



Puisque le roue ne tourne que dans la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{BM}$, si $\overrightarrow{dr}$ est petit, on peut approximer la distance roulée par la roue par la composante $\overrightarrow{MP}$ dans la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{BM}$, i.e $\|\overrightarrow{dr}\|\cos(\alpha)$.

Or, par définition de $\overrightarrow{F}$ (perpendiculaire à BC et unitaire), cette quantité est exactement égale à

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} &= \|\overrightarrow{F}\|\,\|\overrightarrow{dr}\|\cos(\alpha)\\ &= \|\overrightarrow{dr}\|\cos(\alpha)\end{aligned}$$

On voit donc que le long de la courbe C, la distance parcourue par la roue est égale à l'intégrale

$$\oint_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$$

3.2 Calcul de l'aire de D

Dans cette section nous démontrer que $\iint\limits_D \text{rot}(\overrightarrow{F})dx\,dy$ calcule l'aire de D. Pour ce faire nous allons montrer que $\text{rot}(\overrightarrow{F}) = 1$.

<u>Démonstration</u>

On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} &= \Big(1-\frac{\partial a}{\partial x}\Big)+\Big(1-\frac{\partial a}{\partial x}\Big)\\ &= \Big(2-\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial x}\Big)\end{aligned}$$

Puisque les deux bras ont la même longueur r, on peut écrire :

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=1.\\ (x-a)^2+(y-b)^2&=1.\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à x, on trouve :

$$\begin{cases} a\,\frac{\partial a}{\partial x}+b\,\frac{\partial b}{\partial x} & =0\\ (x-a)\left(1-\frac{\partial a}{\partial x}\right)-(y-b)\,\frac{\partial b}{\partial x} & =0\end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a\,\frac{\partial a}{\partial x}+b\,\frac{\partial b}{\partial x} & =0\\ (x-a)\,\frac{\partial a}{\partial x}-(y-b)\,\frac{\partial b}{\partial x} & =x-a\end{cases}$$

En considérant ces équations comme un système d'équations linéaires ayant comme inconnues $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial x}$, on obtient :

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{b(x-a)}{ay-bx}$$

et :

$$\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{a(y-b)}{bx-ay}$$

Ceci nous permet de déduire que :

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 1$$

Par conséquent :

$$\iint_D \text{rot}(\overrightarrow{F})dx\,dy = \iint_D dx\,dy = \text{l'aire de D.}$$

3.3 Interprétation des résultats

En appliquant le théorème de Green

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_D \text{rot}(\overrightarrow{F})dx\,dy$$

on peut déduire que la distance roulée par la roue est égale à l'aire de D.

Remarque :

1. La distance roulée peut être mesurée en comptant le nombre de tours faits par la roue.
2. Les bras peuvent être de longueurs différentes et celles-ci peuvent être différentes de 1.
3. En pratique, la roue peut être n'importe où sur BM.

4 Conclusion

Dans cet exemple, on a présenté un instrument qui mesure la surface d'un domaine délimité par une courbe plane fermée en se basant sur le principe du théorème de Green. On a commencé par décrire l'outil et expliquer son fonctionnement pour finir avec une démonstration montrant comment le planimètre utilise le théorème de Green pour calculer les surfaces.

Références

[1] Le planimètre. [En ligne] http ://wims.auto.u-psud.fr/wims/wims.cgi ?lang=fr&cmd=intro&module=U2/analysis/docplanimeter.fr. Page consultée le 19 juillet 2006.

[2] Planimeter. [En ligne] http ://whistleralley.com/planimeter/planimeter.htm. Page consultée le19 juillet 2006.

[3] Figure1. [En ligne] http ://whistleralley.com/planimeter/planimeter.htm. Page consultée le19 juillet 2006.

[4] Les instrument du calcul savant. [En ligne] http ://www.rehseis.cnrs.fr/calculsavant/Exposition/synopsisplanimet.html. Page consultée le 20 juillet 2006