– PHS1102 –
Champs électromagnétiques

Chapitre 9 – Matériaux magnétiques

Aimantation

Perméabilité et susceptibilité magnétique

Dia-, para- et ferromagnétisme

Énergie emmagasinée dans le champ magnétique

Pertes par hystérésis

Conditions aux frontières

Circuits magnétiques

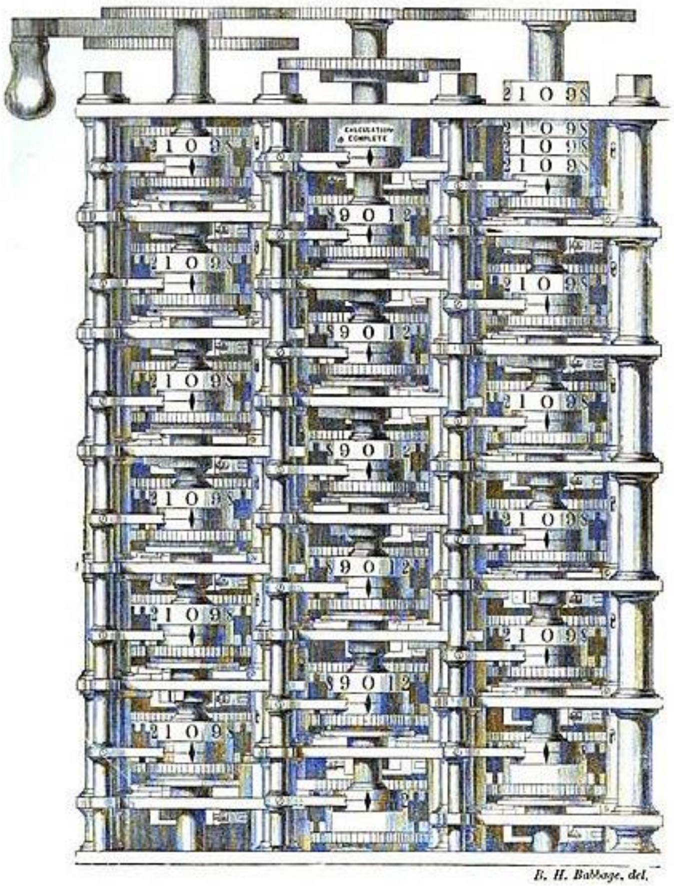
Objectifs de la semaine

Perméabilité Susceptibilité magnétique Aimantation	• Calculer $\vec{B}$ à partir de $\vec{H}$ dans un matériau magnétique linéaire. • Calculer l'aimantation $\vec{M}$ dans un matériau magnétique linéaire.
Dia-, para- et ferromagnétisme	• Décrire les propriétés principales des grandes classes de matériaux magnétiques.
Énergie emmagasinée dans le champ et pertes par hystérésis	• **Calculer l'énergie emmagasinée dans un champ magnétique.** • **Calculer les pertes par hystérésis dans un ferromagnétique à l'aide d'un graphique.**
Conditions aux frontières	• **Appliquer les conditions aux frontières entre deux matériaux magnétiques.**
Circuit magnétique	• **Appliquer la notion de circuit magnétique** (potentiel magnétique scalaire, réluctance) pour résoudre des problèmes de magnétisme.

Stockage de l'information

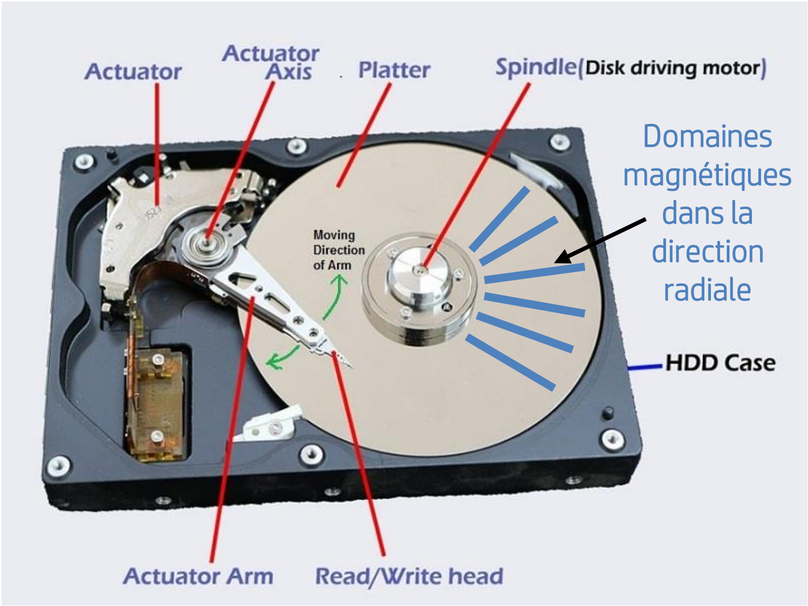
Stockage analogique
L'information est stockée sous forme continue sans être codée.

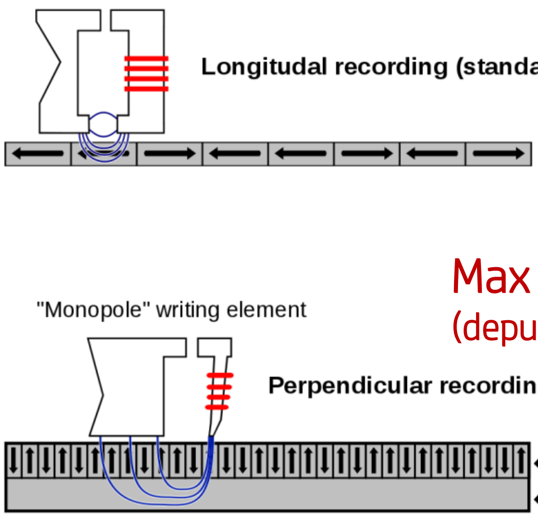
Stockage numérique
L'information est encodée (souvent par des bits qui prennent pour valeur 0 ou 1).



Mécanisme d'une machine différentielle (calculateur mécanique) de Charles Babbage (début 19e siècle).

Mémoires magnétiques





Domaines magnétiques

Les matériaux magnétiques sont composés de domaines (de l'ordre du nanomètre) dont l'aimantation (le moment dipolaire magnétique) pointe dans une direction précise.

Disque dur

Couche mince à base de cobalt déposée sur de l'aluminium ou du verre. Les domaines sont parcourus par une tête de lecture/écriture animée par un moteur électrique pouvant se déplacer à haute vitesse (rotation du disque ~7200 rpm). On mesure l'aimantation pour lire l'information et on modifie l'aimantation pour écrire.

Élément de base du magnétisme : le dipôle magnétique

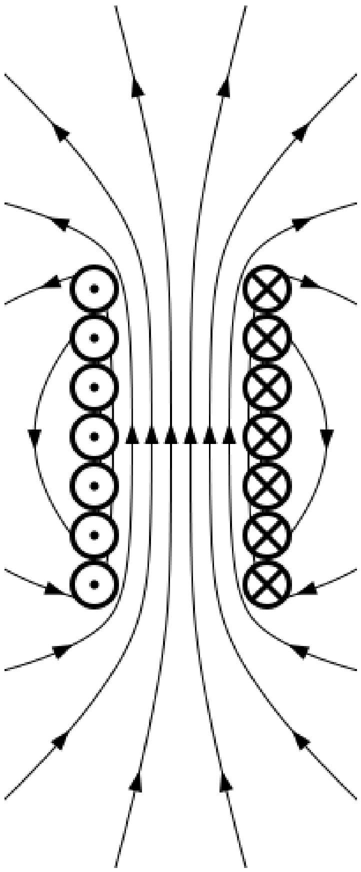
Champ produit par un solénoïde (infiniment long) [A/m]

$$\boxed{\vec{H} = nI\hat{z}}$$

n : nombre de spires par mètre

I : courant circulant dans le solénoïde

Nord

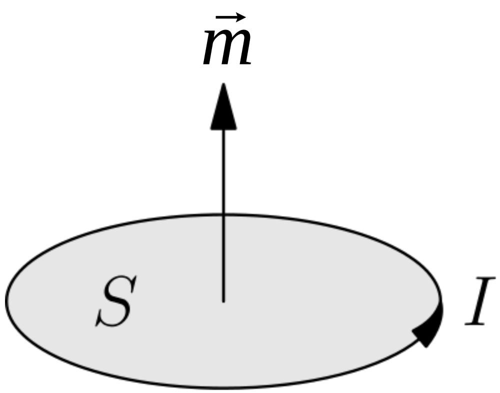


Sud

Moment dipolaire magnétique [A·m²]

$$\boxed{\vec{m} = NI\vec{S}}$$

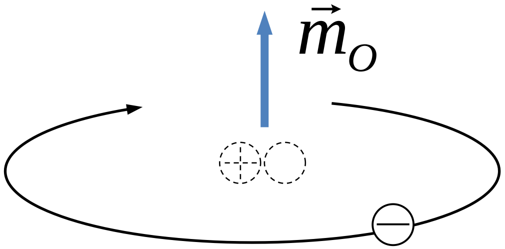
Nord



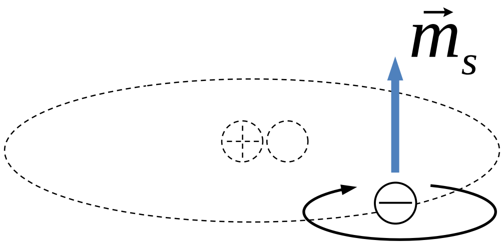
Sud

Moments magnétiques à l'échelle atomique

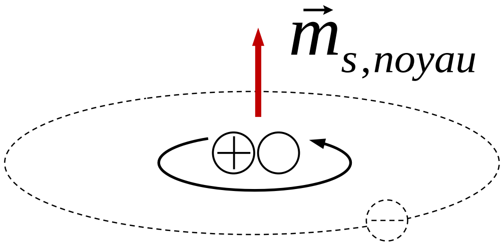
Moment orbital



Spin de l'électron



Spin nucléaire



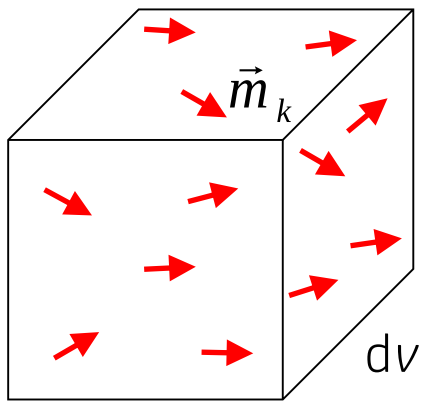
Dû au mouvement de l'électron autour du noyau

Le spin est une propriété quantique de la matière. Le spin ne possède pas d'équivalent classique : il est erroné de dire qu'il est dû à la rotation d'une particule sur elle-même.

- Ces mouvements de charge représentent des **courants microscopiques** qui génèrent des champs magnétiques.
- Le **moment nucléaire** est très faible : nous considérerons uniquement le moment orbital et de spin des électrons.
- Le moment nucléaire est cependant important pour l'imagerie par résonance magnétique.

Aimantation

La densité volumique des moments magnétiques associés aux courants microscopiques dans un matériau est appelée aimantation.



Aimantation

[A/m]

$$\boxed{\vec{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_k \vec{m}_k}$$

Quelle autre quantité possède les mêmes unités ?

- L'aimantation tient compte de **tous les dipôles magnétiques à l'intérieur du matériau**, que leur présence dépende d'un champ magnétique externe ou non. Par exemple, un aimant permanent possède une aimantation même en l'absence d'un champ magnétique externe.

- **L'aimantation est nulle** lorsque les dipôles magnétiques sont de **même magnitude et sont orientés aléatoirement**.

Aimantation

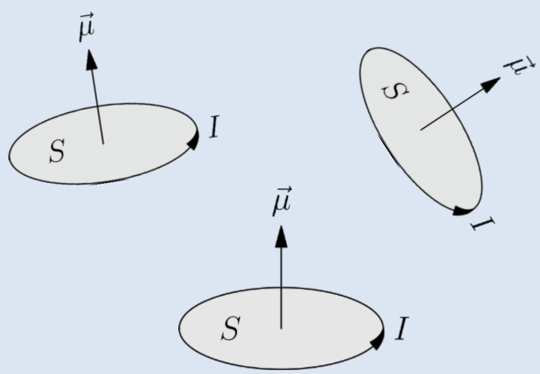
Il est possible de générer une aimantation dans un matériau en appliquant un champ magnétique externe.

RAPPEL
Couple sur un dipôle magnétique

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

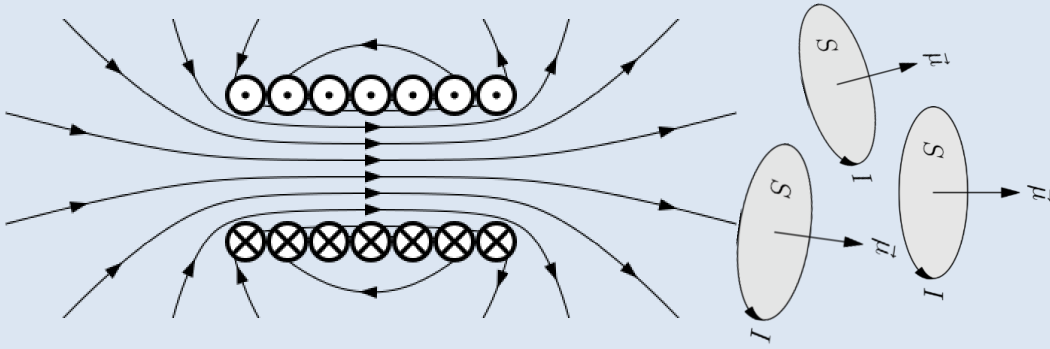
En présence d'un champ externe $\vec{B}_{ext}$, les dipôles microscopiques tendent à s'orienter dans la direction du champ, ce qui crée une aimantation $\vec{M}$ non nulle.

$$\vec{B}_{ext} = \vec{0} \qquad \vec{M} = \vec{0}$$



$$\vec{B}_{ext} \neq \vec{0} \qquad \vec{M} \neq \vec{0}$$

Champ externe produit par un solénoïde

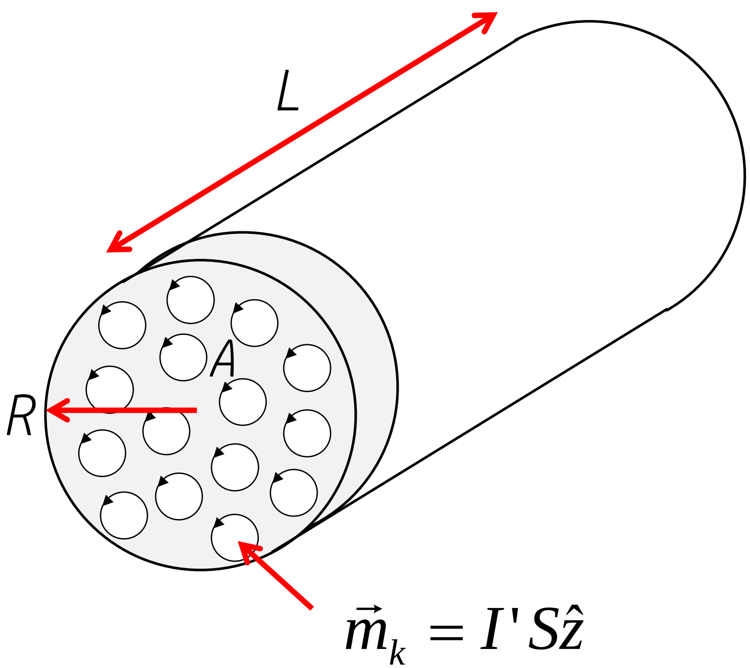


Modèle de l’aimantation dans une barre aimantée

On souhaite calculer l’aimantation dans un aimant permanent de forme cylindrique.

Section de l’aimant : $A = \pi R^2$

Longueur de l’aimant : L $(L \gg R)$



On considère un barreau de longueur L:

- Séparé en “tranches” minces contenant N' boucles de courant microscopiques de moment $\vec{m}_k = I'S\hat{z}$;
- La surface totale des boucles d’une tranche est égale à la section : $A = N'S$;
- Il y a n’ tranches par unité de longueur.

L’aimantation vaut :

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta v}\sum_k \vec{m}_k = \frac{1}{AL}\overbrace{(n'L)}^{\text{\# tranches dans le barreau}}\overbrace{(N'I'S\hat{z})}^{\text{Moment total d'une tranche}} = n'I'\hat{z}$$

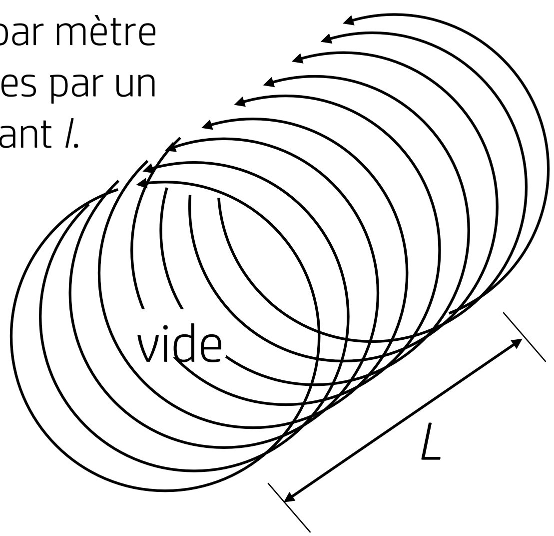
$$\boxed{\vec{M} = n'I'\hat{z} = K_\phi'\hat{z}}$$

K_ϕ' est la densité de courant surfacique (en A/m).

Modèle de l’aimantation dans une barre aimantée

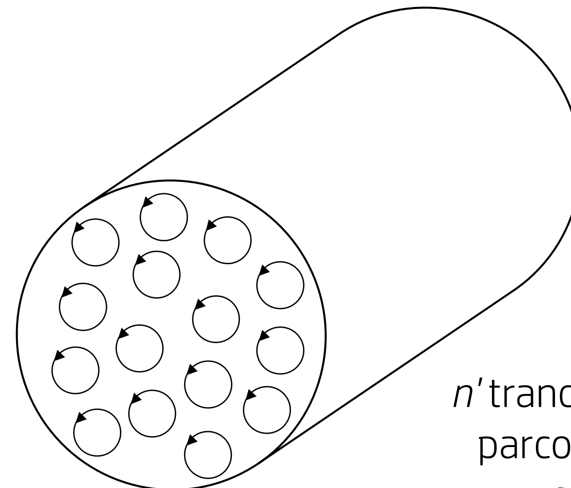
Solénoïde

n spires par mètre parcourues par un courant *I*.



$$\boxed{\vec{H} = nI\hat{z} = K_{\phi}\hat{z}}$$

Aimant cylindrique



n’ tranches par mètre parcourues par un courant *I’*.

$$\boxed{\vec{M} = n'I'\hat{z} = K_{\phi}'\hat{z}}$$

Le **solénoïde et l’aimant cylindrique sont équivalents** d’un point de vue magnétique :

- **L’aimantation est en fait le champ magnétique produit par l’aimant (le matériau)** ;
- **L’intérieur de l’aimant est vide d’un point de vue magnétique**, car $\vec{M}$ dépend de la densité surfacique de courant qui circule à la surface de l’aimant.

Rappel - Chapitre 7

Électrostatique (champs $\vec{E}$ et $\vec{D}$)

Densité de flux électrique $\vec{D}$: charges libres seulement
Champ électrique $\vec{E}$: charges libres et liées

Le champ électrique $\vec{E}$ permet de décrire la réponse électrique d'un matériau.

Dans le vide $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$ Diélectrique linéaire $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0} - \vec{P} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$

Magnétostatique (champs $\vec{H}$ et $\vec{B}$)

Champ magnétique $\vec{H}$: **courants libres** seulement (charges libres)
Densité de flux magnétique $\vec{B}$: **courants libres et liés** (charges libres et liées)

La densité de flux $\vec{B}$ permet de décrire la réponse magnétique d'un matériau (chapitre 9).

Dans le vide

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H}}$$

en tesla [1 T]

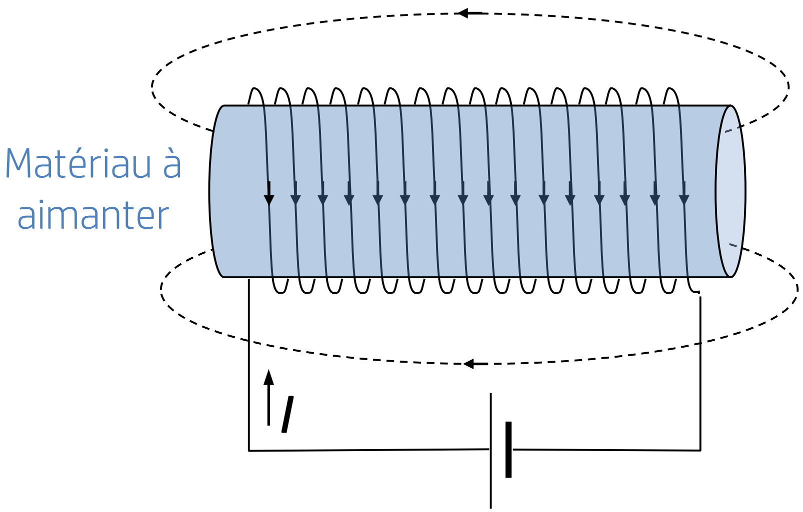
Perméabilité du vide

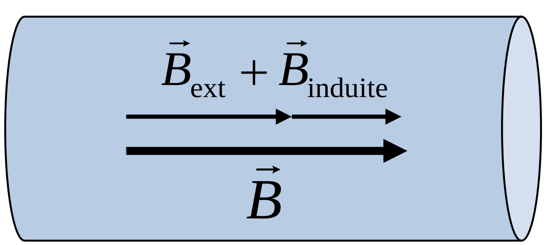
$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A\ ou\ H/m}}$$

Aimantation d'un matériau par un champ externe

On considère un matériau non naturellement aimanté que l'on soumet à un champ magnétique externe (en le plaçant à l'intérieur d'un solénoïde, par exemple).

Quelle est la densité de flux $\vec{B}$ dans le matériau ?





La densité de flux totale est la **somme** :

- De la densité $\vec{B}_{\mathbf{ext}}$ produite par le solénoïde ;
- De la densité induite $\vec{B}_{\mathbf{induite}}$ produite par l'alignement des dipôles magnétiques du matériau.

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{induite}} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Densité de flux magnétique dans un matériau

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)}$$

Équation générale toujours valide.
L'expression de $\vec{M}$ distinguera les matériaux.

Susceptibilité magnétique et perméabilité

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)}$$

Champ magnétique $\vec{H}$: **courants libres** seulement (champ externe)
Densité de flux magnétique $\vec{B}$: **courants libres et liés**

La densité de flux $\vec{B}$ décrit la réponse magnétique d'un matériau à un champ externe $\vec{H}$.

Matériaux linéaires
L'aimantation est proportionnelle au champ externe. Le facteur de proportionnalité est la **susceptibilité magnétique** (sans unité).

$$\boxed{\vec{M} = \chi\vec{H}}$$

La relation entre $\vec{B}$ et $\vec{H}$ devient alors :

Densité de flux magnétique (matériau linéaire)

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}}$$

Perméabilité relative

$$\boxed{\mu_r = 1+\chi}$$ [sans unité]

Perméabilité

$$\boxed{\mu = \mu_0\mu_r}$$ [H/m]

Champs $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ et $\vec{H}$

Électrostatique (champs $\vec{E}$ et $\vec{D}$)

Densité de flux électrique $\vec{D}$: charges libres seulement
Champ électrique $\vec{E}$: charges libres et liées

Le champ électrique $\vec{E}$ permet de décrire la réponse électrique d'un matériau.

Dans le vide $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$ Diélectrique linéaire $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0} - \vec{P} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$

Magnétostatique (champs $\vec{H}$ et $\vec{B}$)

Champ magnétique $\vec{H}$: **courants libres** seulement (charges libres)
Densité de flux magnétique $\vec{B}$: **courants libres et liés** (charges libres et liées)

La densité de flux $\vec{B}$ permet de décrire la réponse magnétique d'un matériau.

Dans le vide $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ Matériau magnétique linéaire $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Classes de matériaux magnétiques

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

Diamagnétiques	Paramagnétiques	Ferromagnétiques
susceptibilité très faible	susceptibilité très faible	susceptibilité très élevée
susceptibilité négative (repoussés par un aimant)	susceptibilité positive (attirés par un aimant)	susceptibilité positive (attirés par un aimant)
B intérieur < B extérieur	*B intérieur > B extérieur*	*B intérieur > B extérieur*

Le diamagnétisme est présent dans toutes les substances, mais il est camouflé par le paramagnétisme et le ferromagnétisme.

Contrairement aux diamagnétiques et aux paramagnétiques, les ferromagnétiques peuvent conserver leur aimantation même en l'absence de champ externe.

Table de susceptibilités magnétiques

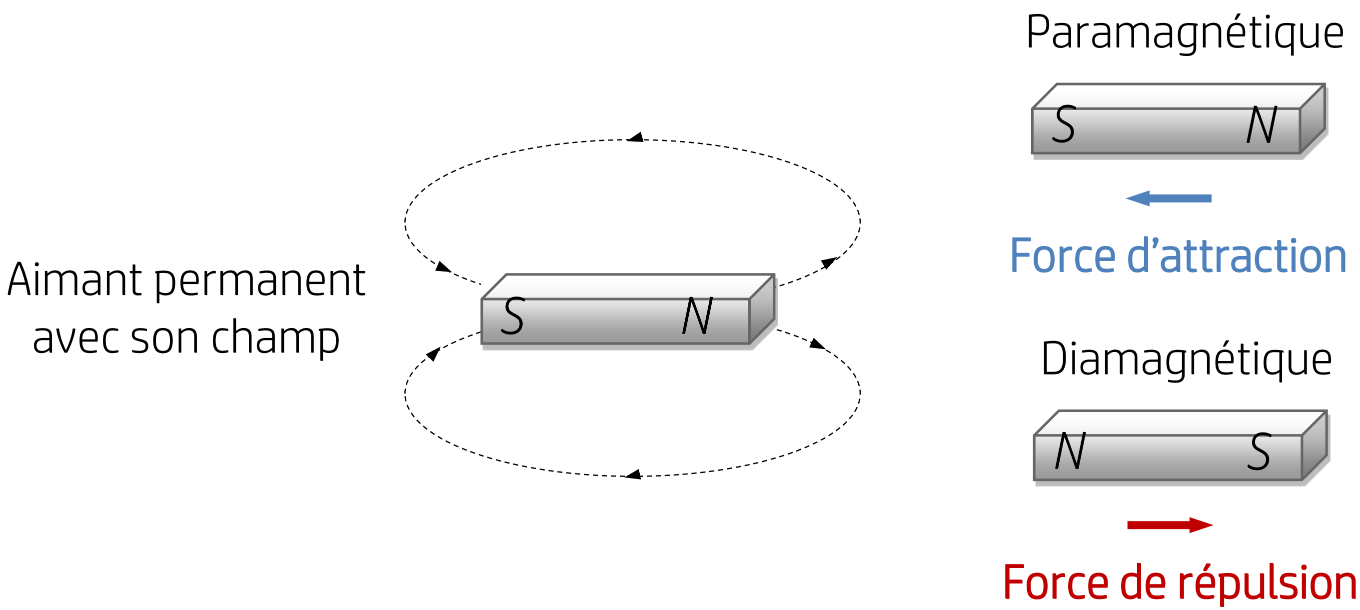
Diamagnétiques		Paramagnétiques		Ferromagnétiques	
Bismuth	$-17{,}6 \times 10^{-5}$	Air	$3{,}7 \times 10^{-6}$	Fer pur	$1{,}8 \times 10^{5}$
Or	$-3{,}4 \times 10^{-5}$	Oxygène	$1{,}8 \times 10^{-6}$	Permalloy	$1{,}0 \times 10^{5}$
Argent	$-2{,}6 \times 10^{-5}$	Aluminium	$2{,}1 \times 10^{-5}$	Supermalloy	$1{,}0 \times 10^{6}$
Cuivre	$-1{,}0 \times 10^{-5}$	Chrome	$3{,}1 \times 10^{-4}$	Fer silicié	$6{,}7 \times 10^{3}$
Eau	$-0{,}9 \times 10^{-5}$	Manganèse	$8{,}8 \times 10^{-4}$	Acier – carbone	100
Argon	$-1{,}1 \times 10^{-7}$	NiCl	$1{,}1 \times 10^{-3}$	Acier – W	75
Hydrogène	$-2{,}3 \times 10^{-9}$	Terbium	$7{,}5 \times 10^{-2}$	Acier – Co	40

Les susceptibilités des diamagnétiques et des paramagnétiques sont beaucoup plus faibles que celles des ferromagnétiques.

Classes de matériaux magnétiques

Certains matériaux sont attirés par un aimant, tandis que d'autres sont repoussés.

Paramagnétiques
Les moments magnétiques induits dans le matériau sont alignés avec le champ de l'aimant : le matériau est **attiré par l'aimant** (pôles opposés s'attirent).



Diamagnétiques
Les moments magnétiques induits dans le matériau s'opposent au champ de l'aimant : le matériau est **repoussé par l'aimant** (pôles identiques se repoussent).

Lévitation diamagnétique

Parce que les diamagnétiques sont repoussés par un champ magnétique externe, on peut les faire léviter!

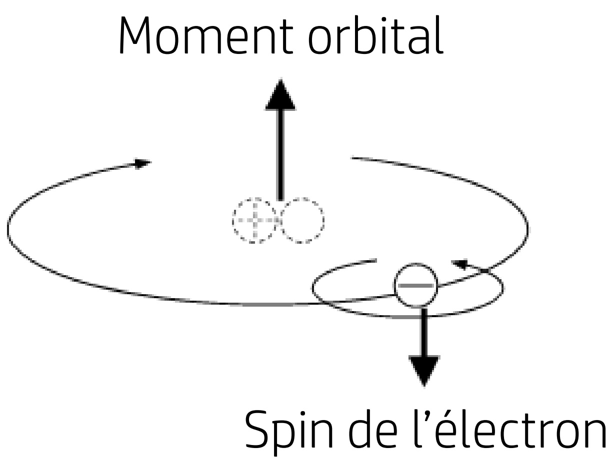
Il s'avère que l'eau est un bon diamagnétique ($\chi \approx -1 \times 10^{-5}$). Où trouve-t-on de l'eau ?

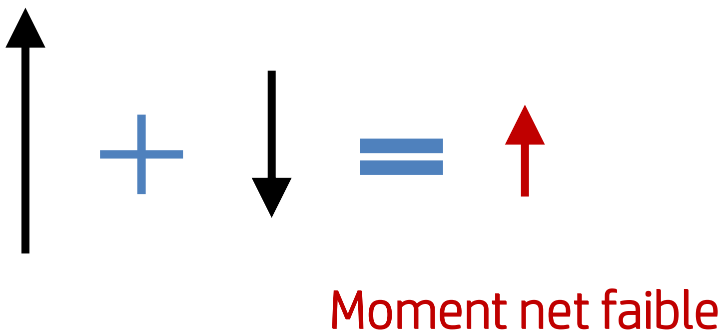
High field magnet laboratory, Université de Radboud, Pays-Bas : http://www.ru.nl/hfml/research/levitation/diamagnetic/

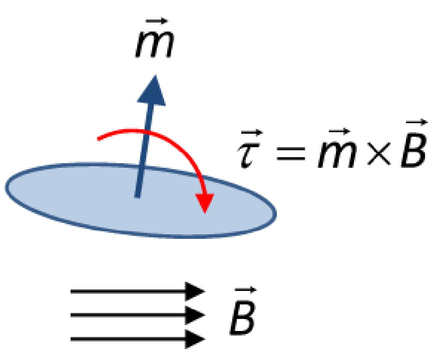
Par contre, il faut des champs très élevés (plusieurs teslas) puisque le diamagnétisme est un phénomène faible.

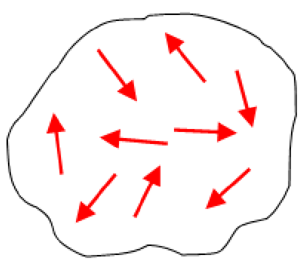
Paramagnétisme

Les atomes/molécules d'un matériau paramagnétique possèdent un moment magnétique net non nul qui s'oriente dans la direction du champ externe.



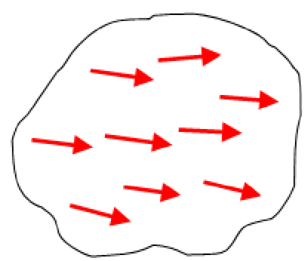






$H_{ext} = 0$

$M = 0$



$H_{ext} \rightarrow$

$M \neq 0$

Les moments s'alignent avec le champ externe, ce qui génère la force d'attraction.

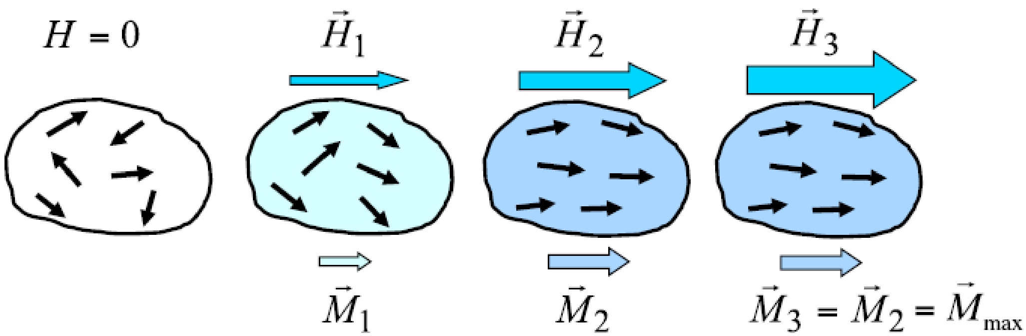
Para = $\pi\alpha\rho\alpha$ veut dire « auprès de ».

Paramagnétisme

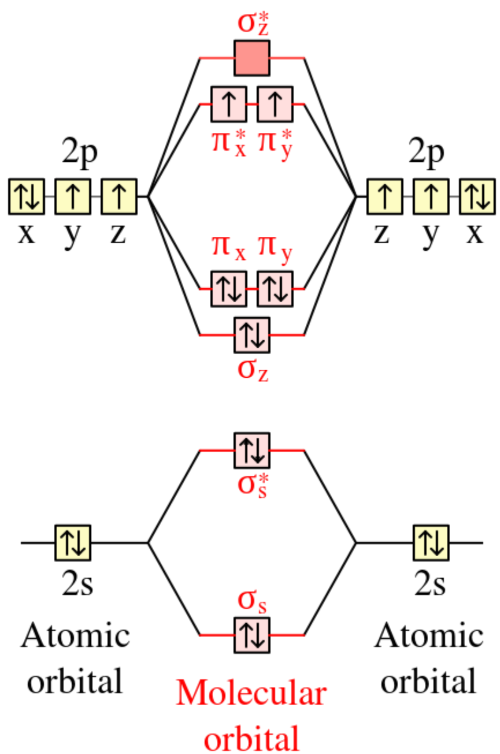
Le moment net non nul vient du fait que certains électrons ne sont pas appariés (orbitales occupées par un seul électron).

Aimantation maximale

L'aimantation maximale est atteinte lorsque tous les moments nets sont alignés avec le champ externe.



Électrons non appariés (O_2)

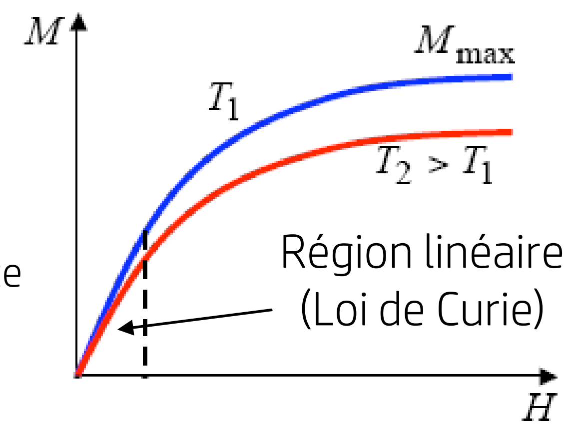


Loi de Curie

En régime linéaire, la susceptibilité diminue avec la température (l'agitation thermique nuit à l'alignement des dipôles).

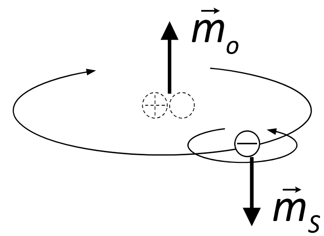
$$M = \frac{C}{T} H$$

Constante

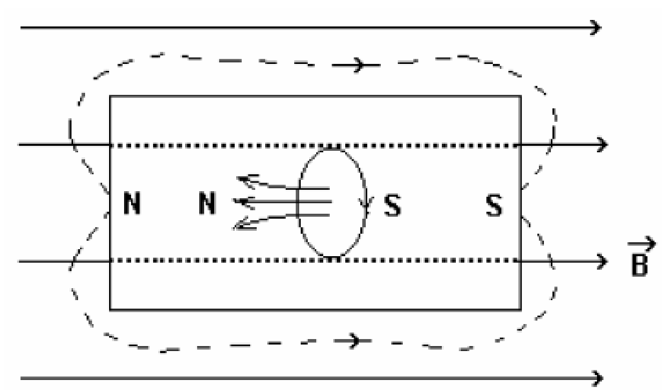


Diamagnétisme

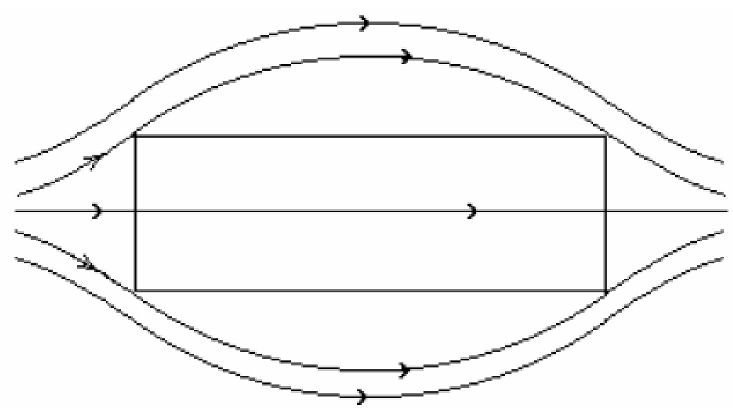
Les atomes/molécules d'un matériau diamagnétique ont un moment magnétique net nul.



- Présent pour tous les atomes, molécules, gaz, liquides et solides ;
- **Aimantation induite opposée au champ externe ($\chi < 0$), ce qui cause la répulsion** ;
- Diamagnétisme est faible par rapport au ferromagnétisme ($\chi \ll 1$).



Diamagnetic material in external magnetic field



Field lines in diamagnetic material

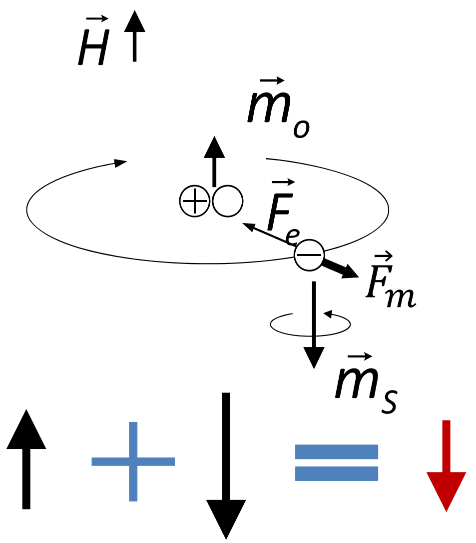
Diamagnétisme

Le diamagnétisme s'explique rigoureusement avec la mécanique quantique. Toutefois, on peut utiliser le raisonnement semi-classique suivant (inexact) pour avoir une intuition sur ce phénomène.

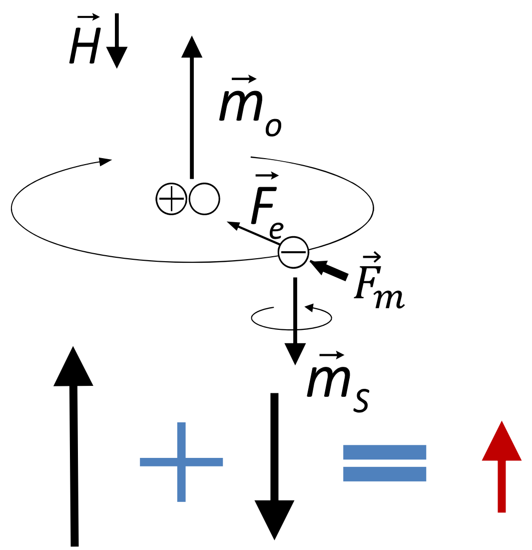
L'électron est en orbite circulaire (rayon constant) autour du noyau. Le champ magnétique externe vient exercer une force radiale sur l'électron, qui doit alors ajuster sa vitesse pour rester sur sa trajectoire circulaire sans changer de rayon. En ralentissant ou en accélérant, le moment orbital change tandis que le spin reste inchangé, ce qui crée un moment net non nul (induit).

$$\sum F_n = F_e \pm F_m = \frac{mv^2}{r}$$

$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$$



Moment net vers le bas



Moment net vers le haut

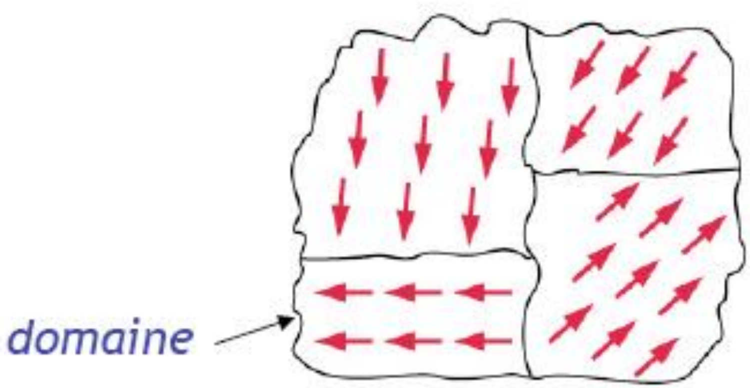
Les moments induits s'opposent au champ externe, ce qui génère la force de répulsion.

Dia = $\delta\iota\alpha$
veut dire « séparation ».

Ferromagnétisme

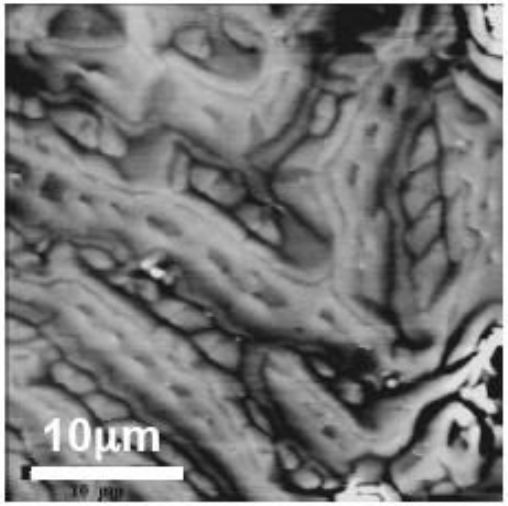
Les atomes possèdent un moment magnétique non nul et ces moments interagissent fortement entre eux en s'alignant pour former des domaines pour lesquels l'aimantation local est non nulle.

- Les atomes ont un moment magnétique non nul à cause d'électrons non appariés. Comme les paramagnétiques, les ferromagnétiques sont attirés par un aimant ;
- L'interaction entre les moments d'atomes voisins est extrêmement forte, ce qui crée des domaines magnétiques (dimensions du µm jusqu'au cm) ;
- Exemples : Fe, Co et Ni ;
- Contrairement aux dia- et aux paramagnétiques, les ferromagnétiques peuvent conserver une aimantation totale non nulle en l'absence d'un champ externe.

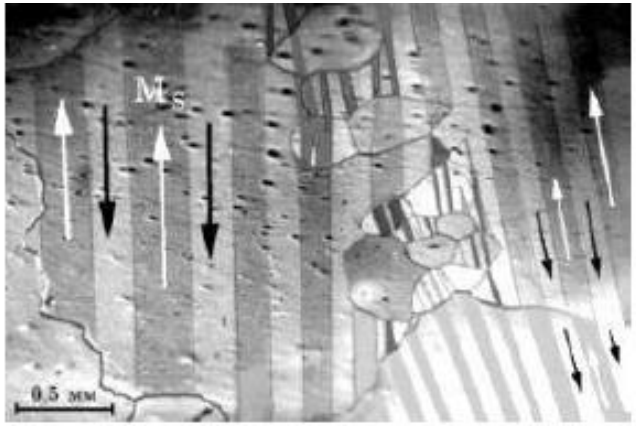


Flèches rouges : moments magnétiques atomiques

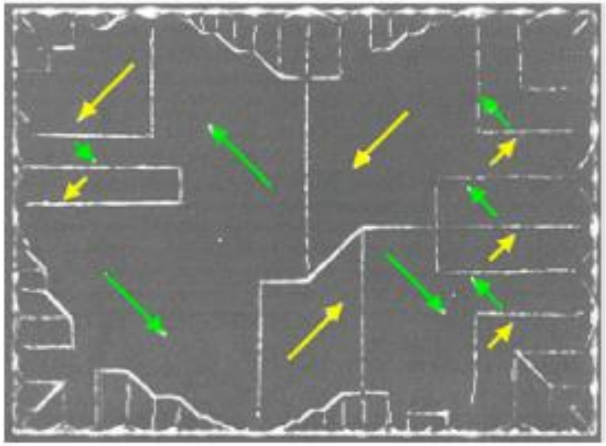
Ferromagnétisme – Domaines magnétiques



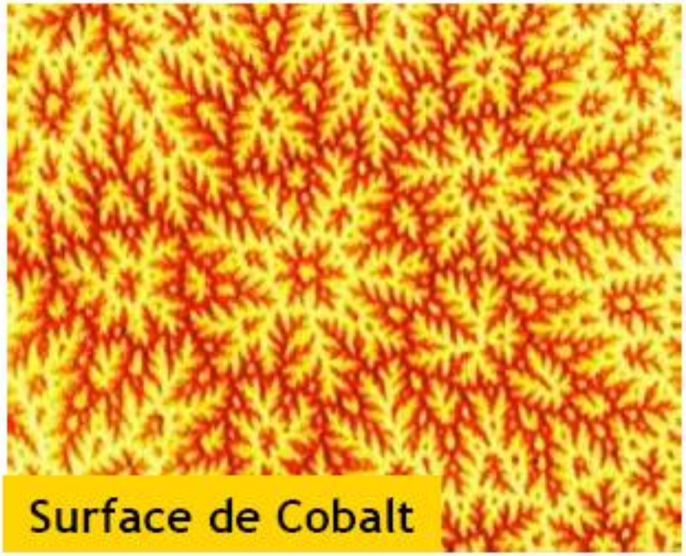
Magnétite naturelle



Fer (+3%Si)



Nickel

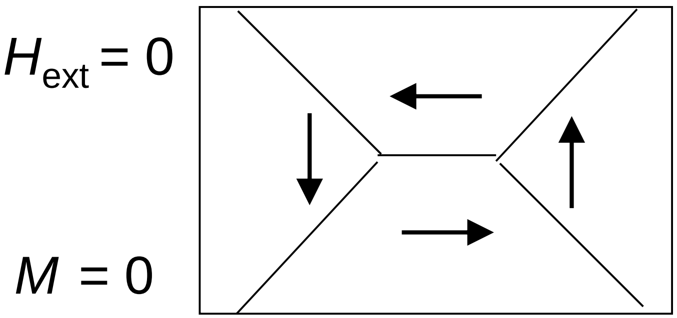


http://www.techfak.uni-kiel.de/matwis/amat/elmat_en/kap_4/illustr/i4_3_1.html

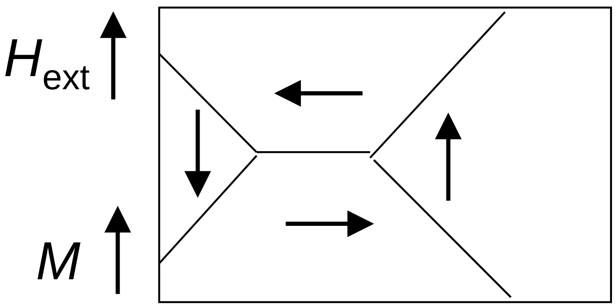
Ferromagnétisme – Saturation et rémanence

Les ferromagnétiques peuvent conserver une aimantation totale non nulle (aimantation rémanente) en l'absence d'un champ externe.

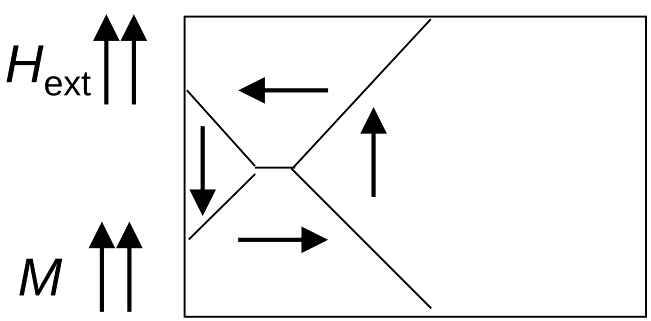
1. Instant initial : pas de champ externe, **aimantation nulle**



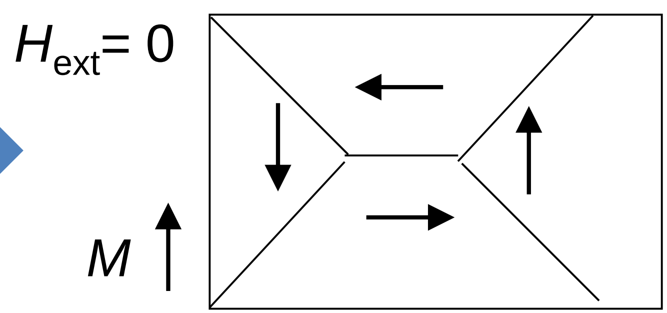
2. En présence d'un champ externe, les **domaines alignés avec le champ grossissent** au détriment des autres domaines. Une **aimantation non nulle** apparaît.



3. Saturation : l'aimantation maximale est atteinte. En augmentant le champ, l'aimantation reste constante.

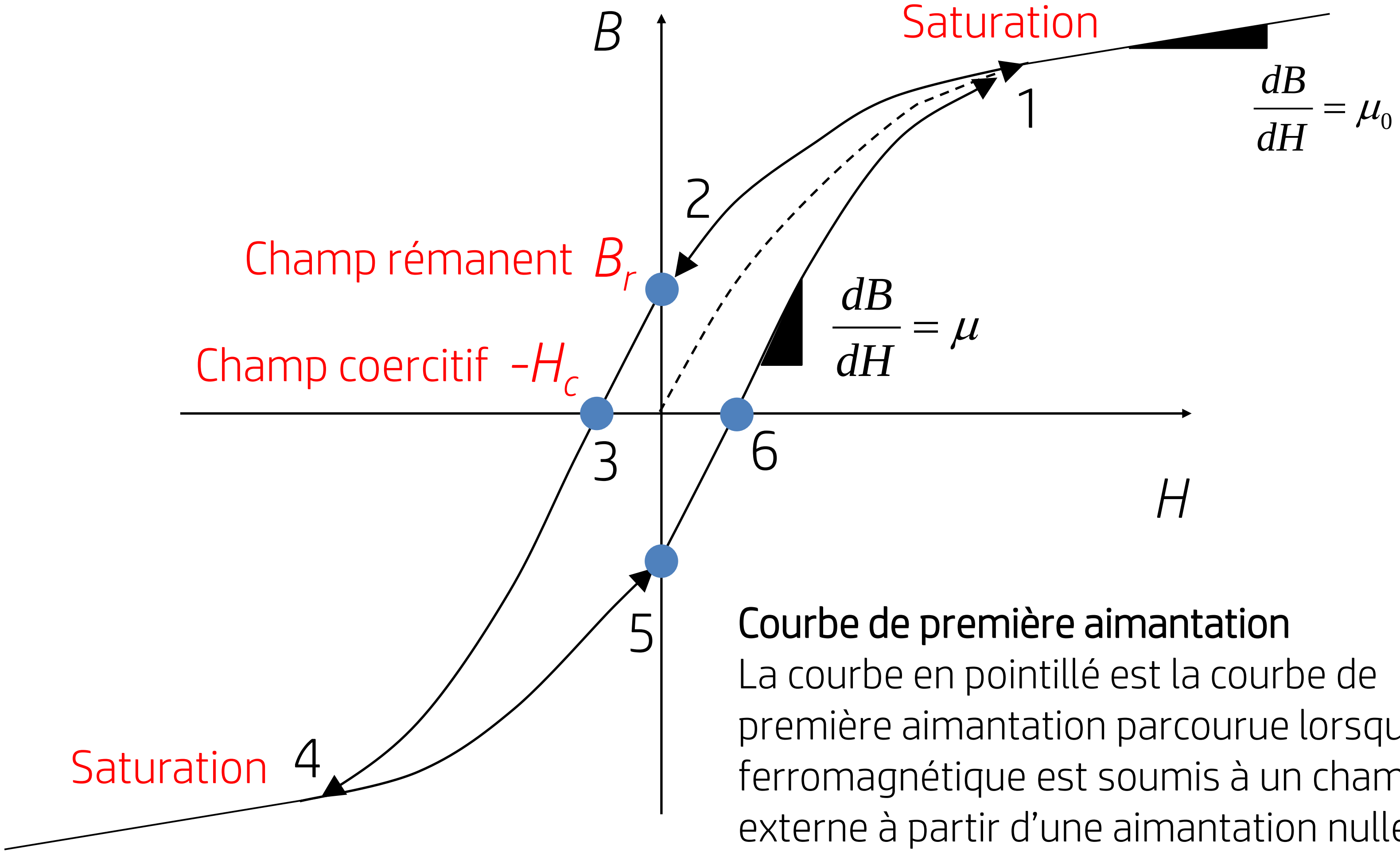


4. Rémanence : l'aimantation totale demeure non nulle en retirant le champ externe.



Ferromagnétisme – Courbe d’hystérésis

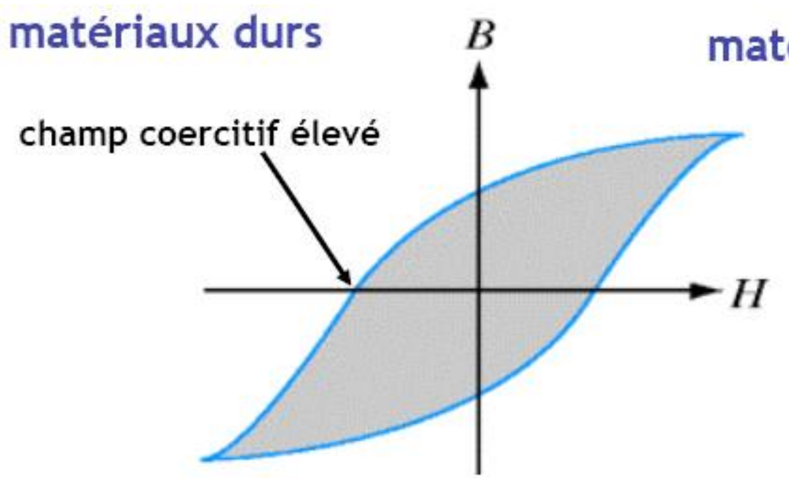
L’aimantation d’un ferromagnétique dépend de son historique (matériau non linéaire).



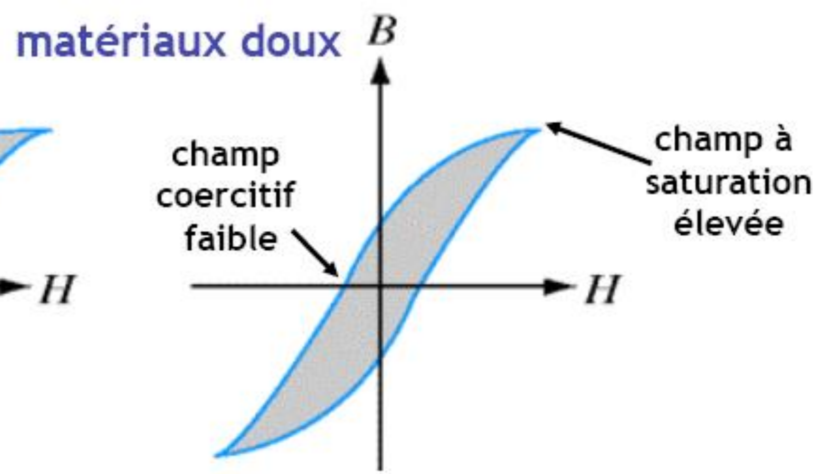
Courbe de première aimantation
La courbe en pointillé est la courbe de première aimantation parcourue lorsque le ferromagnétique est soumis à un champ externe à partir d’une aimantation nulle.

Ferromagnétisme – Matériaux durs et doux

On classe les ferromagnétiques en deux grandes catégories : durs et doux.



champ coercitif élevé:
très difficile à désaimanter
(bon pour aimants permanents)



champ coercitif faible:
très facile à désaimanter
(bon pour cœurs de transformateurs, mémoires magnétiques, etc.)

aimants NdFeB

tiges de fer « doux »

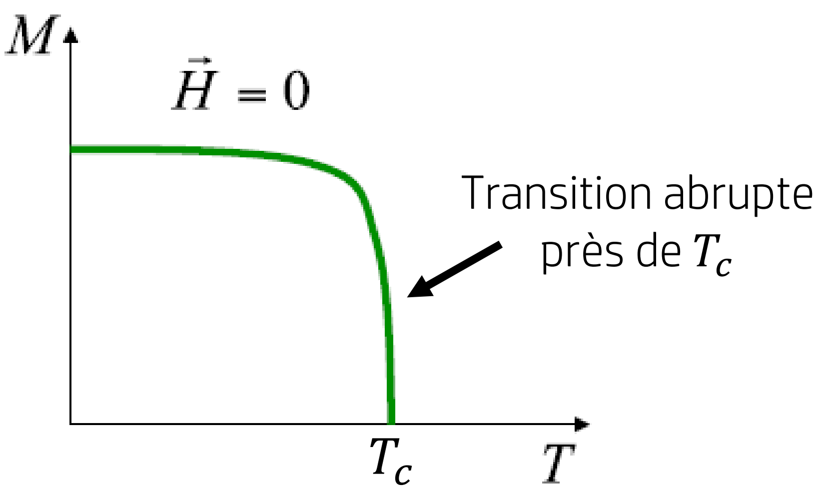
Ferromagnétisme – Température de Curie

Si la température du ferromagnétique est supérieure à sa température de Curie, il ne parvient plus à conserver une aimantation rémanente en absence de champ externe.

Lorsque la température est augmentée :

- L'agitation thermique devient de plus en plus importante, ce qui nuit à la formation de domaines magnétiques ;
- Lorsque la **température de Curie** T_c est atteinte, une **transition de phase abrupte survient : le ferromagnétique devient paramagnétique** puisque l'agitation thermique empêche toute formation de domaines magnétiques.

Aimantation à champ nul en fonction de la température



Matériau	T_c [°C]
Fe	770
Co	1120
Ni	358
Gd	20
$GdCl_3$	- 270.9

Énergie emmagasinée dans le champ magnétique

Dans un milieu linéaire, l'énergie emmagasinée est proportionnelle à la perméabilité du matériau et au carré du champ magnétique.

RAPPEL
Énergie emmagasinée dans le champ électrique

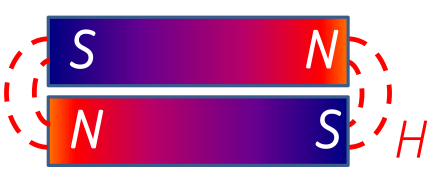
$$U = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2 dv$$

Énergie emmagasinée dans le champ magnétique

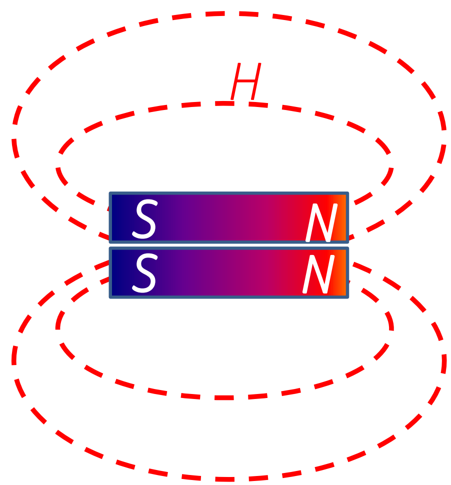
$$U = \frac{1}{2}\int_v \mu H^2 dv$$

Il faut intégrer sur tout le volume où le champ magnétique est présent.

L'énergie emmagasinée sert à aligner les dipôles magnétiques, ce qui augmente le champ magnétique produit par le matériau.



+ énergie =



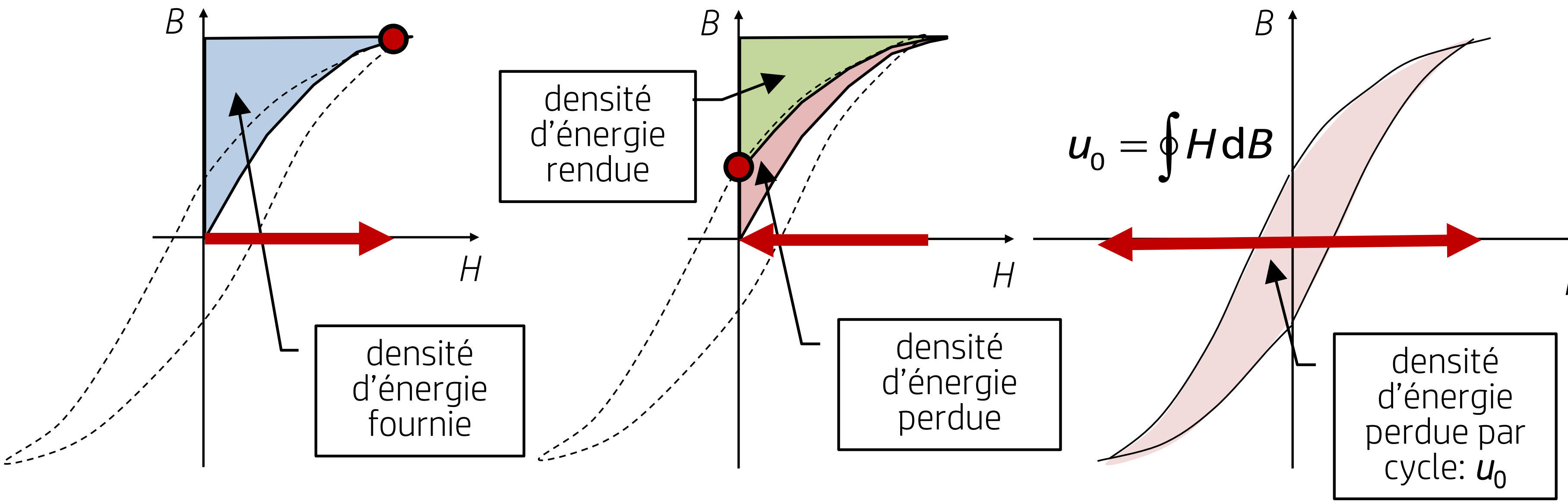
Pertes par hystérésis

Dans les ferromagnétiques, la modification des parois des domaines magnétiques à chaque cycle d'hystérésis crée des pertes d'énergie.

$$U = \int_v \frac{1}{2}\mu H^2 dv$$

Densité volumique d'énergie (milieu linéaire) : $u = \frac{1}{2}\mu H^2$ [J/m³]

Densité volumique d'énergie (milieu non linéaire) : $u = \int \mu H dH = \int H dB \quad \left(\mu = \frac{dB}{dH}\right)$



Ferromagnétisme – Valeurs typiques

densité d'énergie perdue

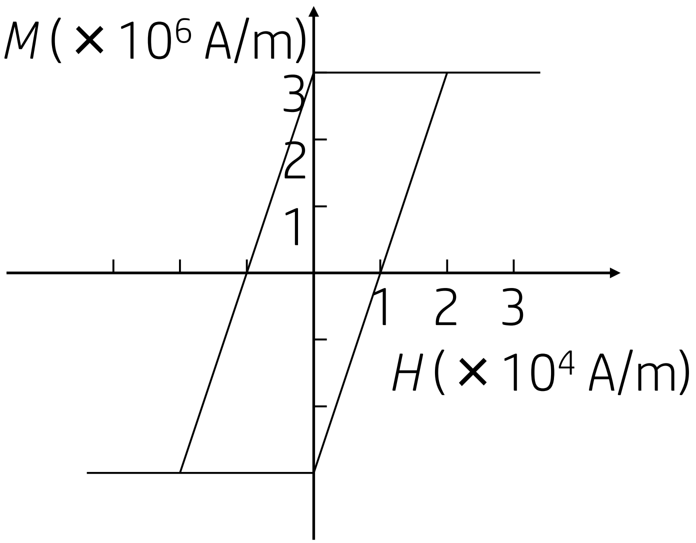
coercivité

susceptibilité

Matériaux	χ_{max}	H_c	u_0
		(A/m)	(J/m^3)
Fer pur (monocristal)	$1{,}4\times10^6$	-	-
Supermalloy (Fe + 79% Ni, 5% Mo, 0,5% Mn)	$8{,}5\times10^5$	0,16	1
Fer pur recuit	$3{,}4\times10^5$	0,24	19
Permalloy	$1{,}0\times10^5$	4	50
Fer électrolytique	$6{,}1\times10^4$	7	100
Fer silicié	$6{,}6\times10^3$	50	150
Acier	$1{,}5 - 4{,}5\times10^3$	75 – 300	$1{,}0\text{-}2{,}5\times10^3$
Acier – carbone	100	$3{,}7\times10^3$	2×10^5

Exemple 9.5 – Puissance dissipée par hystérésis

Soit un cylindre ferromagnétique placé dans un solénoïde de n =3000 tr/m dans lequel circule un courant alternatif d'amplitude I_m = 10 A et de fréquence angulaire ω = 100 rad/s.
Trouver la densité de puissance dissipée.



Puisque nous avons M en fonction de H (et non H en fonction de B), il faut faire un peu de travail supplémentaire…

$$B = \mu_0 (H + M) \quad \Rightarrow \quad u_0 = \oint H dB = \oint H \left(\mu_0 (dH + dM) \right)$$

Intégrale d'une fonction linéaire sur un cycle est nulle.

$$= \cancel{\mu_0 \oint H dH} + \mu_0 \oint H dM$$

$$= \mu_0 \times \left(2 \times 10^4 \times 6 \times 10^6 \right) \mathrm{J/m^3} = 1{,}5 \times 10^5 \ \mathrm{J/m^3}$$

Puissance dissipée
Énergie dissipée par période (durée du cycle d'hystérésis)

$$\boxed{p = \frac{u_0}{T} = u_0 f = \frac{u_0 \omega}{2\pi} = \frac{1{,}5 \times 10^5 \times 100}{2\pi} = 2{,}4 \times 10^6 \ \mathrm{W/m^3}}$$

RAPPEL – Équations de Maxwell en statique

Avec les notions vues jusqu'à présent dans le cours, on peut énoncer les quatre équations de Maxwell en statique (champs qui ne varient pas dans le temps).

I Théorème de Gauss $\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q}$ Théorème de la divergence $\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$

II Champ magnétique solénoïdal $\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$ Théorème de la divergence $\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$

III Champ électrostatique conservatif $\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$ Théorème de Stokes $\boxed{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}$

IV Théorème d'Ampère $\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$ Théorème de Stokes $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$

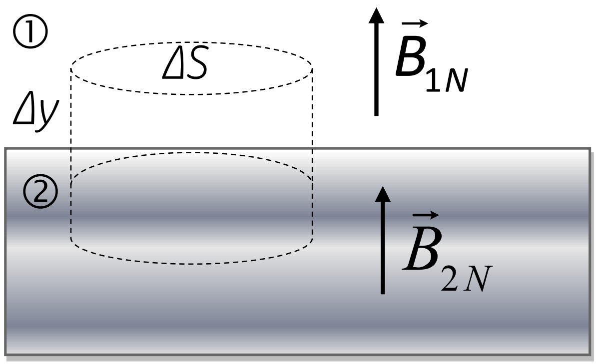
Nous verrons au chapitre 10 comment adapter ces équations pour des champs qui varient dans le temps.

Conditions aux frontières

À la frontière entre deux matériaux de perméabilité différentes, la composante normale de la densité de flux magnétique est continue.

Nature solénoïdale du champ B

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_{1N} = B_{2N}}$$



$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \Delta S\, B_{1N} + 0 - \Delta S\, B_{2N} = 0$$

Le deuxième terme de l'intégrale est nul car Δy tend vers zéro.

$$\Rightarrow \quad \Delta S\, B_{1N} = \Delta S\, B_{2N}$$

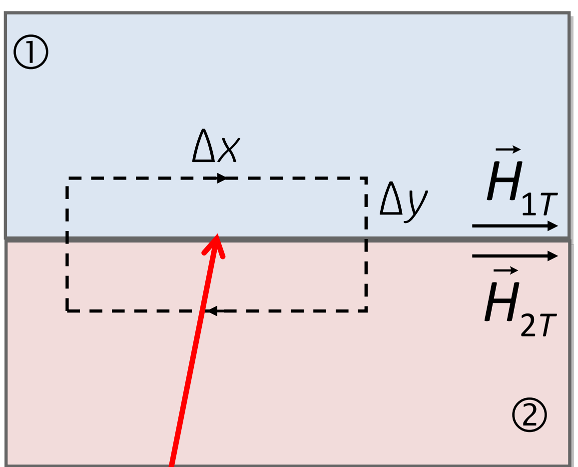
$$\Rightarrow \quad B_{1N} = B_{2N}$$

Conditions aux frontières

À la frontière entre deux milieux de perméabilités différentes, les composantes tangentielles des champs magnétiques dans les deux milieux sont égales si aucun courant surfacique ne circule à l'interface.

Théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \boxed{H_{1T} = H_{2T}}$$



Pas de courant de surface (par hypothèse)

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H_{1T}\Delta x + 0 - H_{2T}\Delta x + 0 = 0$$

Les deuxième et quatrième termes de l'intégrale sont nuls car Δy tend vers zéro, et le troisième terme est négatif car l'intégration va dans le sens opposé au champ magnétique.

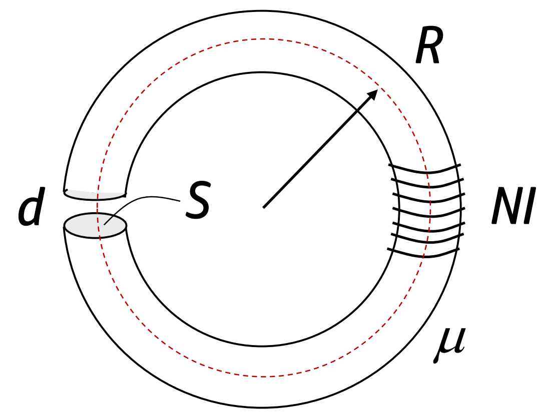
$$H_{1T}\Delta x = H_{2T}\Delta x$$

$$H_{1T} = H_{2T}$$

Exemple 9.6 – Champ magnétique dans un entrefer

χ = 99 R = 20 cm I = 1 A N = 10^4 d = 1 cm

Que vaut la densité de flux B dans l'entrefer ?



1. Théorème d'Ampère

Le champ magnétique circule dans le tore dans la direction $\hat{\phi}$. On choisit donc un contour circulaire de rayon R :

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{\text{Tore}} \vec{H}_{\text{tor}}\cdot d\vec{l} + \int_{\text{Entrefer}} \vec{H}_{\text{ent}}\cdot d\vec{l} = NI$$

$$H_{\text{tor}}(2\pi R - d) + H_{\text{ent}} d = NI$$

2. Densité de flux et champ magnétique

On calcule B dans chaque région :

$$B_{\text{tor}} = (1+\chi)\mu_0 H_{\text{tor}} \qquad B_{\text{ent}} = \mu_0 H_{\text{ent}}$$

3. Conditions frontières

La densité de flux normale à l'interface tore/entrefer est continue :

$$B_{\text{tor}} = B_{\text{ent}}$$

4. Densité de flux dans l'entrefer

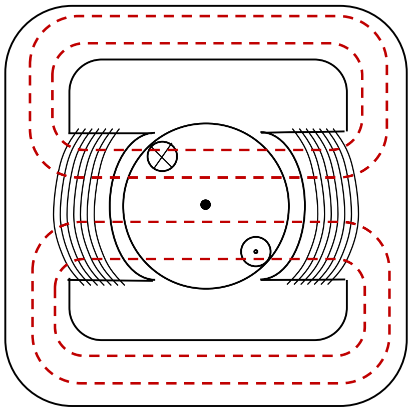
On résout le théorème d'Ampère :

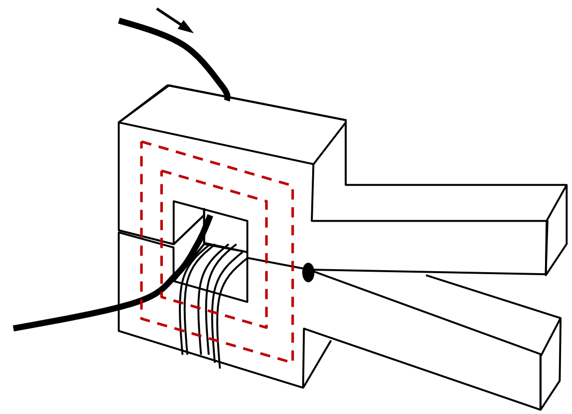
$$\boxed{B_{\text{ent}} = \mu_0 NI\left[\frac{2\pi R - d}{1+\chi} + d\right]^{-1}}$$

Circuits magnétiques

Dans plusieurs applications, on utilise des matériaux ferromagnétiques pour concentrer et diriger le flux magnétique Φ (les lignes de champ magnétique) qui parcourt un circuit fermé.

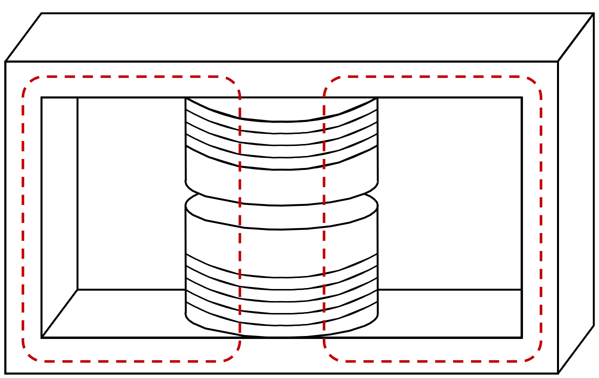
Moteur électrique

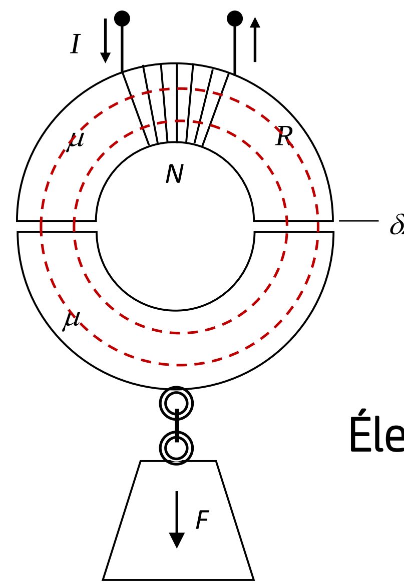




Pince ampèremétrique

Cyclotron





Électroaimant

Circuits magnétiques

Lorsque la densité de courant est nulle ($\vec{J} = \vec{0}$), on peut définir un potentiel magnétique scalaire qui respecte l'équation de Laplace. Toutes les techniques de résolution vues au chapitre 6 (cartographie, solutions analytiques et numériques) peuvent être utilisées pour calculer le potentiel magnétique et donc, le champ magnétique.

Nature solenoïdale du champ B
(2e équation de Maxwell)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Théorème d'Ampère lorsque $\vec{J} = \vec{0}$
(4e équation de Maxwell)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \vec{0}$$

Puisque le rotationnel de $\vec{H}$ est nul, on peut l'écrire comme le gradient d'une fonction potentiel :

Potentiel magnétique scalaire

$$\boxed{\vec{H} = -\nabla V_m}$$

Pour les matériaux linéaires, $\vec{B} = \mu\vec{H}$. En insérant l'expression de $\vec{H}$ en fonction de V_m dans la 2e équation de Maxwell, on trouve :

$$\Rightarrow \quad \mu\nabla \cdot \left(-\nabla V_m\right) = 0$$

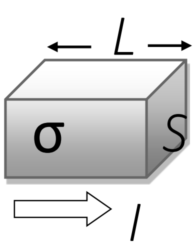
$$\Rightarrow \quad \nabla^2 V_m = 0$$

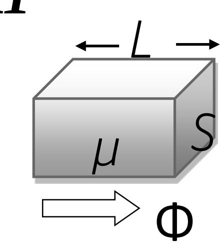
V_m respecte l'équation de Laplace !

Circuits magnétiques – Analogie avec circuits électriques

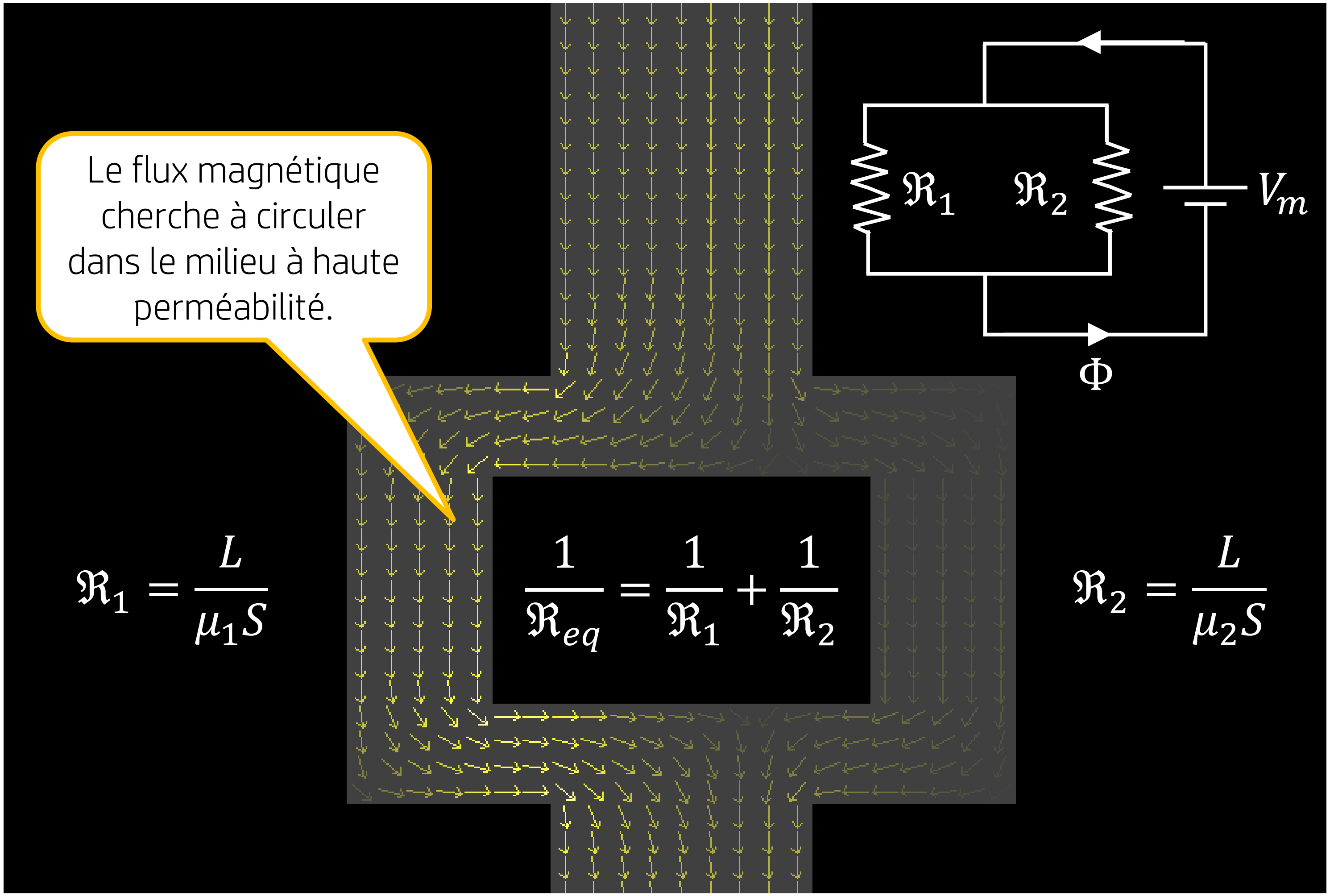
On généralise ici les notions de source de tension, de courant et de résistance pour les circuits magnétiques.

Électrique	Analogie	Magnétique	
$\vec{E} = -\nabla V$	entre E et H	$\vec{H} = -\nabla V_m$	[A/m]
$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$	entre V et V_m	$V_m = -\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$	[A·tour]
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	entre J et B, entre σ et μ	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	[1 T = 1 Wb/m²]
$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$	entre courant I et **flux magnétique Φ**	$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$	[Wb]
$V = RI$	entre résistance R et **réluctance $\Re$**	$V = RI$	[A·tour]
$V_m = \Re \Phi$	entre barreau conducteur et **barreau perméable**	$\Re = \dfrac{L}{\mu S}$	[A·tour/Wb]





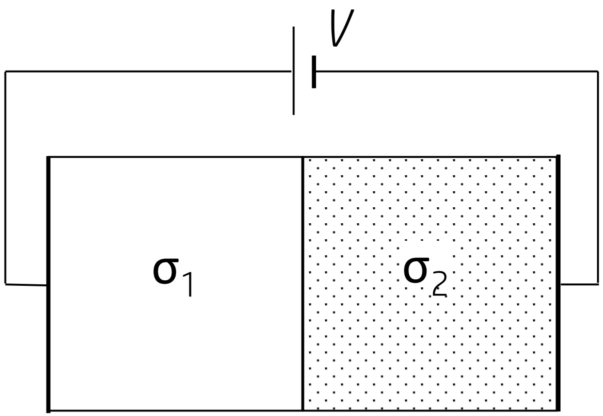
Circuits magnétiques – Analogie avec circuits électriques

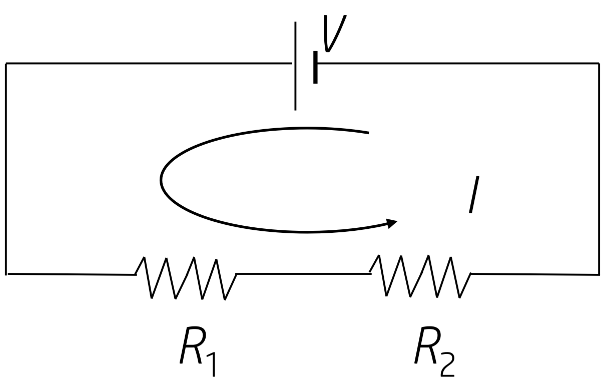


Les lois pour les résistances en série et en parallèle s'appliquent à la réluctance.

Circuits magnétiques – Analogie avec circuits électriques

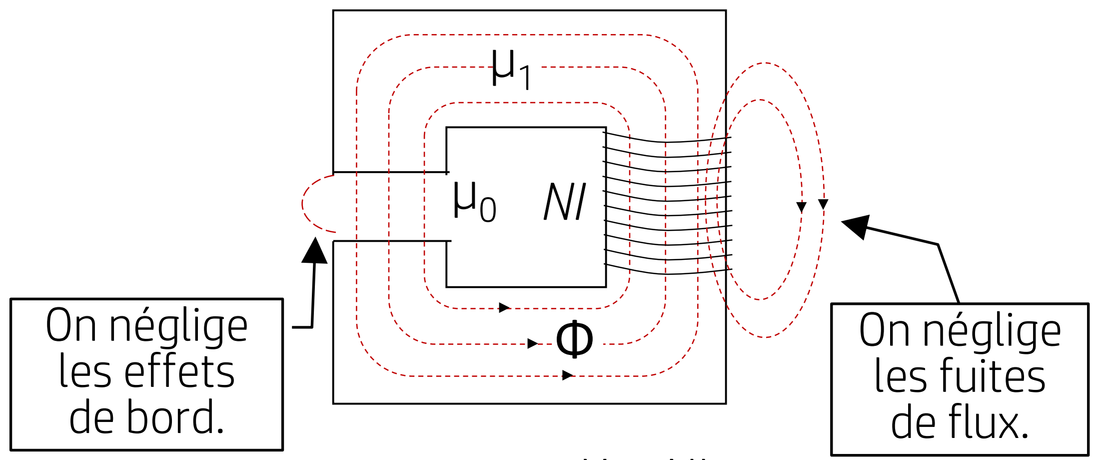
Électrique

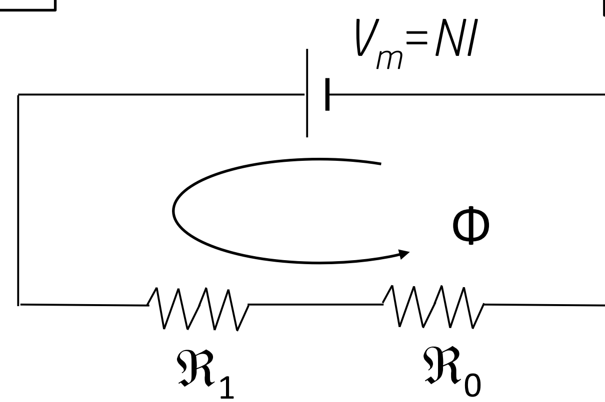




Les lois pour les résistance en série et en parallèle s’appliquent à la réluctance.

Magnétique



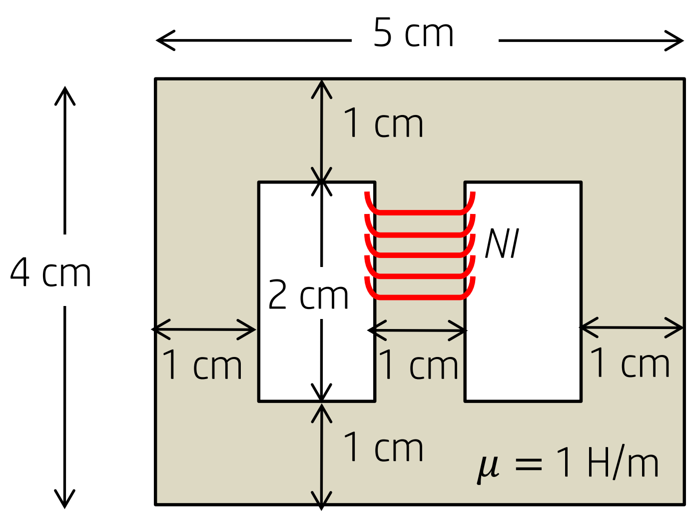


Source magnétomotrice

$$\boxed{V_m = NI}$$ [A·tour]

Exemple – Réluctance d'un transformateur

Quelle est la réluctance du transformateur ?



Parcours des lignes de flux (circuit magnétique)

En négligeant les pertes de flux (perméabilité du transformateur beaucoup plus grande que celle de l'air), le flux part de l'électroaimant central, puis se sépare pour circuler dans chacune des deux branches externes du transformateur.

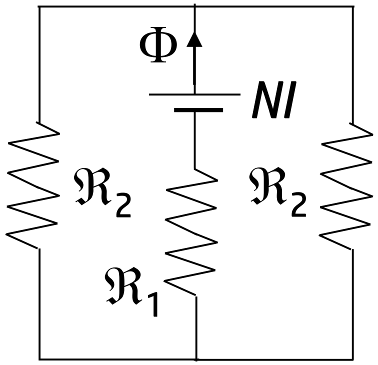
Réluctance équivalente

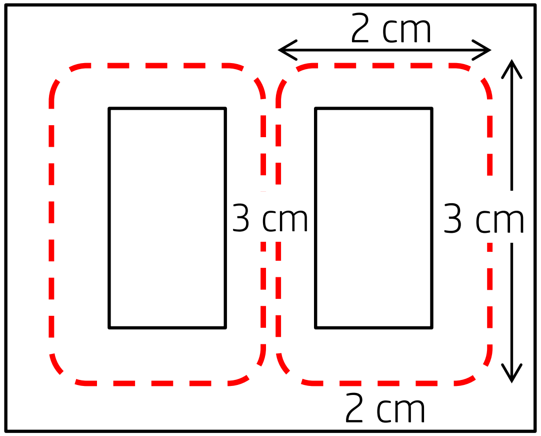
On utilise la longueur moyenne des barreaux pour calculer la réluctance.

$$\Re_1 = \frac{L_1}{\mu S} = \frac{0{,}03}{1 \times 0{,}01^2} = 300 \frac{\text{A} \cdot \text{tour}}{\text{Wb}}$$

$$\Re_2 = \frac{L_2}{\mu S} = \frac{0{,}03 + 2 \cdot 0{,}02}{1 \times 0{,}01^2} = 700 \frac{\text{A} \cdot \text{tour}}{\text{Wb}}$$

$$\boxed{\Re_{eq} = \Re_1 + \left(2 \frac{1}{\Re_2} \right)^{-1} = 650 \frac{\text{A} \cdot \text{tour}}{\text{Wb}}}$$





Circuits magnétiques – Méthode de résolution

Stratégie de résolution

1. Identifier le parcours des lignes de flux et définir le circuit magnétique correspondant ;
2. Calculer la réluctance de chaque segment de section et de perméabilité constantes en utilisant leur longueur moyenne ;

$$\Re = \frac{L}{\mu S}$$

3. Calculer la réluctance équivalente ;

Série $\Re_{eq} = \sum \Re_i$ $\quad \frac{1}{\Re_{eq}} = \sum \frac{1}{\Re_i}$ Parallèle

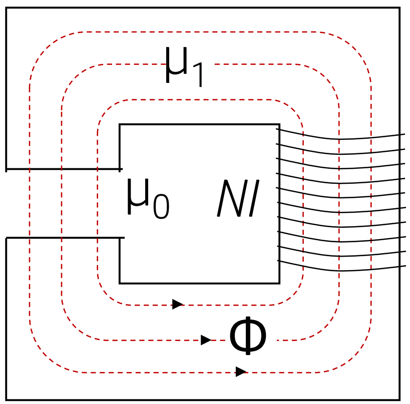
4. Appliquer l'équivalent de la loi d'Ohm ;

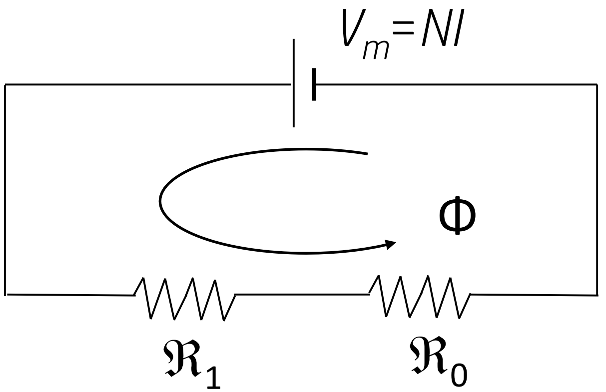
$$V_m = \Re_{eq} \Phi$$

5. Calculer la densité de flux magnétique.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Circuit magnétique



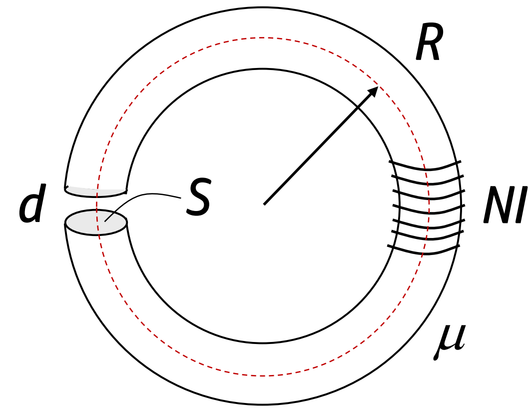


Source magnétomotrice $\boxed{V_m = NI}$ [A·tour]

Exemple 9.7 – Électroaimant

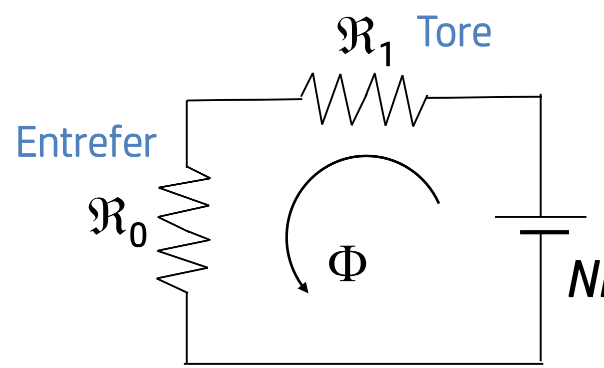
$\mu_r = 800$ $R = 95$ mm $S = 1000$ mm^2 $d = 2$ mm

Que doit valoir le produit NI pour produire 1 T ?



1. Le flux circule de façon circulaire dans le barreau et dans l'air (l'entrefer), ce qui permet de définir un circuit magnétique avec deux réluctances en série.

2. Réluctances du barreau et de l'entrefer :



$$\Re_0 = \frac{L_0}{\mu_0 S} = \frac{d}{\mu_0 S} = \frac{2\text{ mm}}{4\pi\times10^{-7}\times1000\text{ mm}^2} = 1{,}59\times10^6\ \frac{\text{A}\cdot\text{tour}}{\text{Wb}}$$

$$\Re_1 = \frac{L_1}{\mu_1 S} = \frac{2\pi R - d}{\mu_0\mu_r S} = \frac{594{,}9\text{ mm}}{4\pi\times10^{-7}\times800\times1000\text{ mm}^2} = 0{,}592\times10^6\ \frac{\text{A}\cdot\text{tour}}{\text{Wb}}$$

3. Réluctance équivalente (réluctances en série)

$$\Re_{tot} = \Re_0 + \Re_1 = 2{,}18\times10^6\ \text{A}\cdot\text{tour/Wb}$$

4. Loi d'Ohm et flux magnétique

$$V_m = NI = \Re_{eq}\Phi = \Re_{eq}BS = 2{,}18\times10^6\ \frac{\text{A}\cdot\text{tour}}{\text{Wb}}\times1\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}\times1000\text{ mm}^2$$

$$\boxed{NI = 2{,}18\text{ kA}\cdot\text{tour}}$$