PHS1102 Champs électromagnétiques

Corrigé de l'examen final de l'hiver 2015

QUESTION 1 : Compréhension (4 points)

1.1 (1 pt) Les lignes de flux magnétique (choisir une des réponses):

La réponse est C. 1 point

1.2 (1 pt) Une tige conductrice de résistance R se situe entre deux rails parallèles parfaitement conducteurs reliés à une source de tension V. Le système est plongé dans un champ magnétique uniforme B. La tige glisse sur les rails avec une vitesse v qui est maintenue constante par l'application d'une force externe. Choisir parmi les équations suivantes celle qui représente la puissance dissipée dans le système.

La réponse est B. 1 point

1.3 (1 pt) Identifier correctement les valeurs du courant lu sur l'ampèremètre lorsque le barreau est relâché.

La réponse est A. 1 point

1.4 (1 pt) Si on considère seulement l'influence des forces magnétiques et dans la configuration précise illustrée, comment se comportera la boucle du dessus si elle est libre de se déplacer?

La réponse est C. 1 point

QUESTION 2 : Ligne à délai (4 points)

Une ligne à délai est semblable à un câble coaxial sauf que le conducteur central est remplacé par un solénoïde très long (voir figure ci-contre). Ici, nous considérerons une ligne ayant une longueur l. Le solénoïde central comporte N tours de fils enroulés autour d'un manchon de rayon a. La gaine externe possède un rayon $b \ll l$. Un courant I circule dans le solénoïde de gauche à droite. Le même courant circule dans la gaine, mais dans la direction opposée. Ici, on supposera que tous les matériaux utilisés dans la fabrication de cette ligne ont une perméabilité identique à celle du vide.

2.1 (2,5 Pt) Calculer la densité de flux magnétique partout à l'intérieur de la ligne.

Ici, on peut diviser le problème en 1) la région à l'intérieur du solénoïde, 2) la région à l'extérieur du solénoïde, mais à l'intérieur de la gaine et 3) la région à l'extérieur de la gaine. Nous utiliserons le théorème d'Ampère pour déterminer l'intensité du champ magnétique dans chaque région:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J} d\vec{S}$$

à partir duquel on peut évaluer la densité du flux magnétique en utilisant

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

a) Région à l'extérieur de la gaine.

Ici, en prenant comme parcours d'intégration une boîte carrée de longueur l et de hauteur $h > 2b$ entourant la ligne on aura (voir figure 1)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1 H_{z,1} dz + \int_2 H_{x,2} dx + \int_3 H_{z,3} dz + \int_4 H_{x,4} dx = 0$$

car le courant total traversant cette région est nul. L'intensité du champ magnétique selon la direction radiale est nulle ($H_x = H_\rho = 0$). L'intensité du champ magnétique en z devient donc 0.25 point

$$l(H_{z,1} - H_{z,3}) = 0$$

et donc est uniforme sur tout l'espace. Comme le flux magnétique ne peut être infini, ceci implique que $H_z = 0$ à l'extérieur de la ligne. Le courant net en direction z à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho > b$ étant nul,

$$\vec{H}_\phi = 0$$

Donc 0.25 point

$$\vec{B}_{out} = 0$$

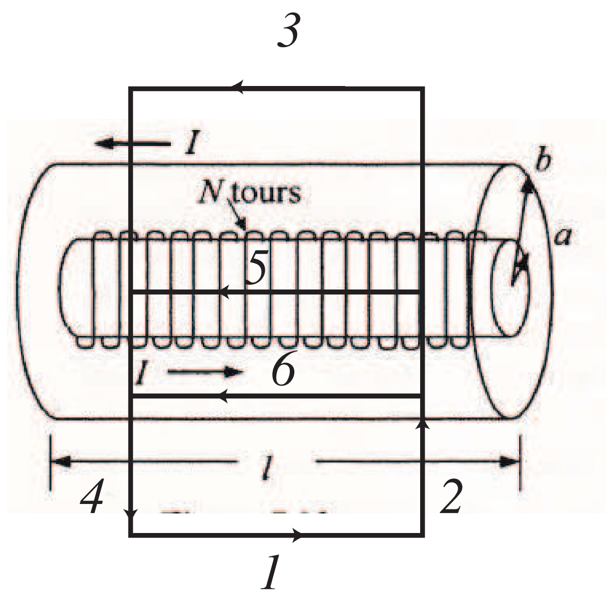

Figure 1: Lignes à délai et parcours d'intégration.

b) Région à l'intérieur du solénoïde

Ici, en prenant comme parcours d'intégration une boîte carrée de longueur l et de hauteur h passant au centre du manchon et à l'extérieur de la gaine on a encore

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1 H_{z,1} dz + \int_2 H_{x,2} dx + \int_5 H_{z,5} dz + \int_4 H_{x,4} dx = NI$$

car le courant total traversant la surface couverte par le parcours est de N fois le courant traversant chacun des fils. L'intensité du champ magnétique selon la direction radiale est toujours nulle. L'intensité du champ magnétique $H_{z,1}$ est aussi nulle car à l'extérieur de la gaine. On obtient alors 0.5 point

$$lH_{z,5} = NI$$

Le courant net en direction z à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho < a$ étant nul, 0.25 point

$$\vec{H}_\phi = 0$$

La densité de flux magnétique à l'intérieur de solénoïde devient 0.25 point

$$\vec{B}_{in} = \frac{\mu_0 NI}{l}\hat{z}$$

c) Région entre le solénoïde et la gaine

Si on choisit encore comme parcours d'intégration une boîte carrée de longueur l et de hauteur h passant entre le solénoïde et la gaine on a encore

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1 H_{z,1} dz + \int_2 H_{x,2} dx + \int_6 H_{z,6} dz + \int_4 H_{x,4} dx = 0$$

car le courant total traversant la surface couverte par le parcours est encore nul. L'intensité du champ magnétique selon la direction radiale est toujours nulle. L'intensité du champ magnétique $H_{z,1}$ est aussi nulle, car à l'extérieur de la gaine. On obtient alors 0.25 point

$$lH_{z,6} = 0$$

et la densité de flux magnétique selon z entre le solénoïde et la gaine est nulle. Pour le même problème, on peut aussi considérer un parcours d'intégration angulaire sur un rayon $a < \rho < b$. On aura alors 0.25 point

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = 2\pi\rho H_\phi = I$$

car ici le courant net en z traversant cette surface est simplement I. On obtient alors 0.5 point

$$\vec{B}_g = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\phi}$$

2.2 (1,5 Pt) Quel est le flux magnétique total à l'intérieur de la ligne?

Le flux magnétique total à l'intérieur de la ligne est donné par 0.5 point

$$\Phi = \int \vec{B}_{in} \cdot d\vec{s} + \int \vec{B}_g \cdot d\vec{s}$$

Pour la région interne, nous considérerons une surface perpendiculaire à l'axe du solénoïde et pour la région entre le solénoïde et la gaine externe nous considérerons une surface perpendiculaire à la direction $\hat{\phi}$. Donc 0.5 point

$$\Phi = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi B_{in,z} + \int_a^b d\rho \int_0^l dz B_{g,\phi}$$

et 0.5 point

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\pi a^2 \mu_0 N I}{l} + \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{\pi a^2 \mu_0 N I}{l} + \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln(b/a)\end{aligned}$$

QUESTION 3 : Pertes par hystérésis (4points)

Nous sommes en possession d'un cylindre ferromagnétique de 20 cm de hauteur et de 5 cm de diamètre. La courbe d'hystérésis du cylindre est décrite par la courbe en trait plein dans la figure ci-contre. Le cylindre est placé dans un solénoïde de 5000 T/m dans lequel circule un courant de 8 A et de fréquence $f = 120$ Hz. (Note : le cylindre a une conductivité nulle.)

3.1 (2,5 Pts) Trouver la valeur de la puissance dissipée dans le cylindre (en Watts) en supposant que l'aimantation est homogène dans tout le cylindre.

La densité d'énergie dissipée par cycle est égale à 0.25 point

$$u_0 = \oint HdB. \tag{1}$$

On peut exprimer dB comme $dB = \mu_0 (dH + dM)$. On trouve alors

$$u_0 = \mu_0 \oint HdH + \mu_0 \oint HdM. \tag{2}$$

La première intégrale du côté droit de l'équation est nulle et la deuxième entoure la surface délimitée par la courbe d'hystérésis 0.25 point. On obtient alors 1.0 point

$$u_0 = \mu_0 \times 32 \times 1 \times 10^4 \times 2.5 \times 10^5 \text{ J/m}^3 = 1 \times 10^5 \text{ J/m}^3. \tag{3}$$

La densité de puissance dissipée est égale à la densité d'énergie dissipée par cycle divisée par la période du cycle 0.5 point:

$$p = \frac{u_0}{T} \tag{4}$$

$T = 1/f$ est la période du cycle. On a alors 0.25 point

$$p = 120 \times 10^5 \text{ W/m}^3. \tag{5}$$

Finalement, sachant que le volume du cylindre est

$$\pi r^2 L = 3.14159 \times (0.025)^2 \times 0.2 \text{ m}^3 = 3.93 \times 10^{-4} \text{ m}^3,$$

on trouve la puissance dissipée P = 4.71 kW 0.25 point.

3.2 (0,5 Pt) Le cylindre est maintenant chauffé à une température de 500^{o}C. Étant donné que la température de Curie du cylindre est de 300^{o}C, celui-ci devient paramagnétique. L'aimantation résultante en fonction du champ magnétique est décrite par la courbe en traits hachurés. Quelle est maintenant la puissance dissipée dans le cylindre?

La puissance dissipée est nulle, car l'aire sous la courbe d'hystérésis d'un matériau paramagnétique est nulle.0.5 point

3.3 (1 Pt) Considérer maintenant que le cylindre ayant la courbe d'aimantation en trait plein a une conductivité non nulle. La puissance dissipée dans ce cylindre sera-t-elle identique à celle calculée en 3.1? Expliquer?

La puissance dissipée sera plus grande à cause de la présence des courants de Foucault. La puissance dissipée totale sera donnée par 0.5 point

$$P_{\text{totale}} = P_{\text{hystérésis}} + P_{\text{Foucault}}$$

où 0.5 point

$$P_{\text{Foucault}} = \int_V \sigma E^2 dV$$

Ici σ est la conductivité du cylindre de volume V et E le champ électrique à l'intérieur du cylindre.

QUESTION 4 : Relais (3 points)

Lorsqu'un courant circule dans la bobine d'un relai, le champ magnétique qui est produit dans l'armature déplace la partie mobile de cette armature, ce qui ferme des contacts électriques. Dans le relai illustré ci-contre, la bobine comporte $N = 2000$ tours et elle est enroulée autour d'un noyau cylindrique ayant un diamètre $d = 10$ mm et une hauteur $h = 20$ mm. L'armature, qui est constituée d'une plaque d'épaisseur $c = 3$ mm, possède une hauteur $a = 25$ mm (distance entre les centres des pièces inférieures et supérieures), une distance $b = 25$ mm entre l'axe du noyau et le centre de la paroi de gauche, ainsi qu'une profondeur $e = 10$ mm. La perméabilité relative du noyau et de l'armature est $\mu_r = 10^4$. En absence de courant, un ressort relève la partie mobile de l'armature, ce qui ouvre les contacts, la distance entre le bas de la partie mobile de l'armature et le haut du noyau est alors $x = 2$ mm.

4.1 (2 Pt) Quelle est la valeur numérique de la réluctance $\mathcal{R}$ du circuit magnétique lorsque le relai est en position ouverte (x=2 mm)? (Note : on néglige les fuites de flux et les effets de bord)

La réluctance du circuit est la somme des réluctances $\mathcal{R}_a$ de l'armature, $\mathcal{R}_n$ du noyau et $\mathcal{R}_e$ de l'entrefer. Pour l'entrefer on aura 0.5 point

$$\mathcal{R}_e = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{x}{4\pi \times 10^{-7}\pi(d/2)^2} = \frac{x}{\pi^2 d^2 \times 10^{-7}} = 2,026 \times 10^7 \text{ H}^{-1}$$

Pour le noyau on utilisera 0.5 point

$$\mathcal{R}_n = \frac{h}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{h}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^4 \pi(d/2)^2} = \frac{h}{\pi^2 d^2 \times 10^{-3}} = 2,026 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

et pour l'armature on obtient 0.5 point

$$\mathcal{R}_a = \frac{a + 2b + 2(c/2)}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{a + 2b + c}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^4 ce} = \frac{a + 2b + c}{4\pi ce \times 10^{-3}} = 2,069 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

La réluctance totale est donc 0.5 point

$$\mathcal{R} = 2,049 \times 10^7 \text{ H}^{-1}$$

4.2 (1 Pt) Quelle est la valeur numérique de l'inductance L de la bobine dans cette même position?

L'inductance de la bobine est donnée par la relation suivante 0.25 point

$$L = \frac{N\varphi}{I}$$

le flux φ étant donné par 0.25 point

$$\varphi = \frac{NI}{\mathcal{R}}$$

on obtient 0.5 point

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = 0,195 \text{ H.}$$

QUESTION 5 : Réseau d'antennes (5 points)

La figure ci-contre illustre une antenne qui est formée de deux boucles de fil métallique. Les surfaces des boucles sont perpendiculaires à l'axe des y et les centres situés aux points $(0, -d, 0)$ et $(0, d, 0)$ pour les boucles de gauche et de droite respectivement. Les boucles sont reliées en série de façon à ce que le signal à la sortie de l'antenne soit égal à la somme des forces électromotrices induites dans chacune des boucles. Les boucles ont un rayon a qui sera supposé très petit par rapport à la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique, ce qui ne sera pas le cas de d. L'intensité du champ électrique de l'onde électromagnétique que l'on tente de détecter est donnée par

$$\vec{E} = 10^{-3}\,(-4\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z})\cos(3 \times 10^9 t - 6x - 8y)$$

5.1 (1,5 Pt) Quelles sont les valeurs numériques de la direction de propagation $\hat{n}$, de la constante de phase β et de la longueur d'onde λ de cette onde.

Par définition 0.25 point

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \beta(\hat{n} \cdot \vec{r}) + \theta)$$
$$\vec{E}_0 = 10^{-3} \times (-4\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z})$$

En comparant les équations on voit que $\theta = 0$ et $\beta\hat{n}$ est donné par 0.25 point

$$\beta\hat{n} = (6, 8, 0)$$

Donc, la constante de phase β correspond à la longueur de $\beta\hat{n}$ et 0.25 point

$$\beta = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10 \text{ rad/m}$$

La longueur d'onde λ est 0.25 point

$$\lambda = 2\pi/\beta = \pi/5 = 0,6283 \text{ m}$$

et la direction de propagation $\hat{n}$ est 0.5 point

$$\hat{n} = \frac{1}{10}(6\hat{x} + 8\hat{y})$$

5.2 (1 Pt) Calculer l'intensité du champ magnétique $\vec{H}$.

L'intensité du champ magnétique est donnée par 0.25 point

$$\vec{H} = \frac{\hat{n} \times \vec{E}}{Z}$$

où $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} = 377\ \Omega$ 0.25 point. Sachant que $\hat{n} = (6\hat{x} + 8\hat{y})/10$ on obtient 0.5 point

$$\vec{H} = 2,65 \times 10^{-6} \times (-1,6\hat{x} + 1,2\hat{y} + 5\hat{z})\cos(3 \times 10^9 t - 6x - 8y)$$

5.3 (2 Pts) Donner une expression pour la force électromagnétique totale induite par les deux boucles.

La force électromotrice totale est donnée par 0.25 point

$$\epsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d\left(\Phi_g(t) + \Phi_d(t)\right)}{dt}$$

oô $\Phi_g(t)$ est le flux dans la boucle de gauche et $\Phi_d(t)$ celui dans la boucle de droite. On évaluera $\Phi_g(t)$ à partir du champ électrique au centre de la boucle de gauche (ici $\vec{r} = (0, -d, 0)$) en utilisant (la normale à la boucle est dans la direction $\hat{y}$): 0.5 point

$$\begin{aligned}
\Phi_g(t) &= SB_y(t, 0, -d, 0) = \pi a^2 B_y(t, 0, -d, 0) = \pi a^2 \mu_0 H_y(t, 0, -d, 0) \\
&= 4,8\pi^2 a^2 \times 2,65 \times 10^{-14} \times \cos(3 \times 10^9 t + 8d) \\
&= 1,26 \times 10^{-11} a^2 \cos(3 \times 10^9 t + 8d)
\end{aligned}$$

Pour la boucle de droite on aura 0.25 point

$$\Phi_d(t) = 1,26 \times 10^{-11} a^2 \cos(3 \times 10^9 t - 8d)$$

Donc 0.25 point

$$\begin{aligned}
\epsilon(t) &= -1,26 \times 10^{-11} a^2 \frac{d}{dt} \left(\cos(3 \times 10^9 t + 8d) + \cos(3 \times 10^9 t - 8d)\right) \\
&= 0,037 a^2 \left(\sin(3 \times 10^9 t + 8d) + \sin(3 \times 10^9 t - 8d)\right)
\end{aligned}$$

En utilisant 0.25 point

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin(A) \cos(B)$$

on obtient finalement 0.5 point

$$\epsilon(t) = 0,075 a^2 \sin(3 \times 10^9 t) \cos(8d) \text{ V}$$

5.4 (0,5 Pt) Pour quelles distances d, la force électromagnétique totale induite sera-t-elle maximisée?

La force électromagnétique totale induite sera maximale si d est choisi de façon à ce que 0.25 point

$$\cos(8d) = \pm 1$$

Ceci implique que 0.25 point

$$d = \frac{n\pi}{8}$$

pour toute valeur de n entière ($n = 0, 1, 2, \cdots$).