	PHS1102 – CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES
	EXAMEN FINAL – HIVER 2019
	DATE : VENDREDI 3 MAI 2019 HEURE : 13H30 À 16H00
	PAGES : 7 QUESTIONS : 5
	NOTE : Aucune documentation permise Calculatrice non programmable permise

QUESTION 1 : Compréhension, SVP répondre *dans le cahier d'examen* **(4 points)**

1.1 ➤ (1 pt) Les quatre équations de Maxwell constituent la base de l'électromagnétisme :

I $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$ II $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

III $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ IV $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t$

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer dans le cahier d'examen le numéro de l'équation de Maxwell qui est la plus appropriée :

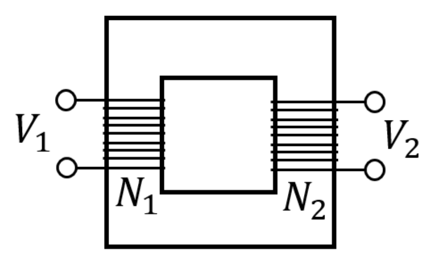
A) Une variation de flux électrique produit un champ magnétique.
B) Cette équation de Maxwell représente la loi de Faraday.
C) Cette équation de Maxwell représente la loi de Gauss.
D) Le champ magnétique est solénoïdal.

1.2 ➤ (1 pt) Choisissez la ou les affirmations qui sont vraies parmi les suivantes :

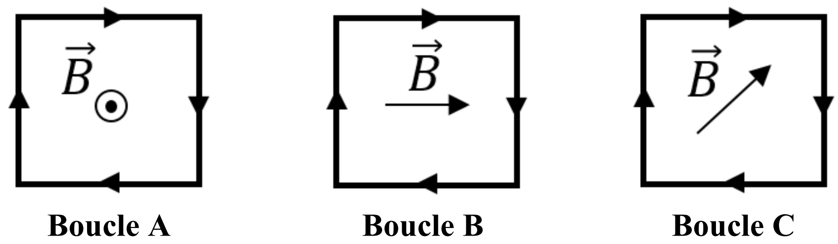
A) Le diamagnétisme est présent dans tous les matériaux.
B) La susceptibilité magnétique des matériaux paramagnétiques est généralement positive et inférieure à 1.
C) Au-dessus de sa température de Curie, un matériau ferromagnétique devient diamagnétique.
D) Les aimants permanents sont fabriqués à partir de matériaux ferromagnétiques doux, car ceux-ci sont difficiles à désaimanter.

1.3 ➤ (1 pt) Le transformateur idéal suivant est composé d'un primaire (N_1 = 240 tours) et d'un secondaire (N_2 tours) reliés par un noyau ferromagnétique (μ_r = 10000). Une tension alternative de 120 V est appliquée aux bornes du primaire. Quel doit être le nombre de tours du secondaire si la tension aux bornes de celui-ci doit être de 5 V ? On néglige toute perte de flux magnétique.

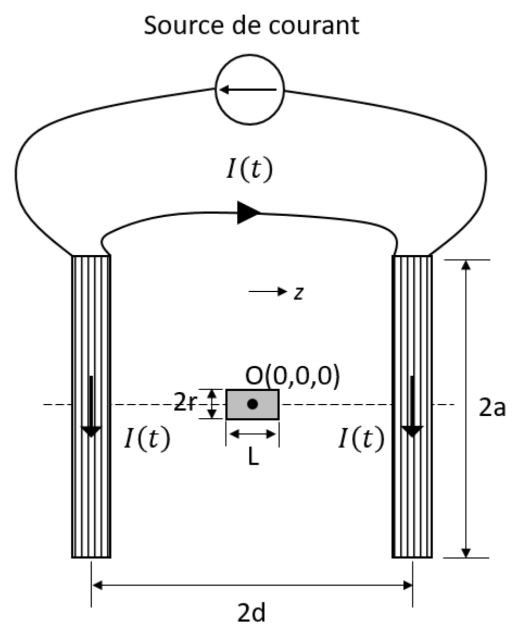
A) N_2 = 10
B) N_2 = 49
C) N_2 = 1176
D) N_2 = 5760



1.4 ➤ (1 pt) Voici trois situations où une boucle de courant initialement immobile est soumise à un champ magnétique uniforme. Quelles boucles subissent un couple non nul ?



QUESTION 2 : Bobines de Helmholtz (5 points)



Considérez deux bobines de Helmholtz identiques de rayon a ayant chacune N tours de fil. Les bobines sont connectées en série et sont alimentées par une source de courant :

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t).$$

Les bobines sont entourées d'air ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$). On néglige ici l'épaisseur des bobines selon la direction z.

On étudie la situation où les bobines sont séparées d'une distance égale à leur rayon ($2d = a$), ce qui permet de générer un champ magnétique approximativement uniforme autour du point O(0,0,0), situé sur l'axe des bobines et à égale distance d'elles.

On place un échantillon conducteur de forme cylindrique (rayon $r \ll a$ et longueur $L \ll 2d$) centré au point O, comme indiqué sur la figure. La conductivité de l'échantillon vaut σ.

2.1 ➤ (2 pts) En utilisant la loi de Biot-Savart et le principe de superposition, démontrez que le champ magnétique $\vec{H}(t)$ produit par les deux bobines de Helmholtz au point O est :

$$\vec{H}(t) = \frac{8NI_0}{5\sqrt{5}a}\sin(\omega t)\,\hat{z}$$

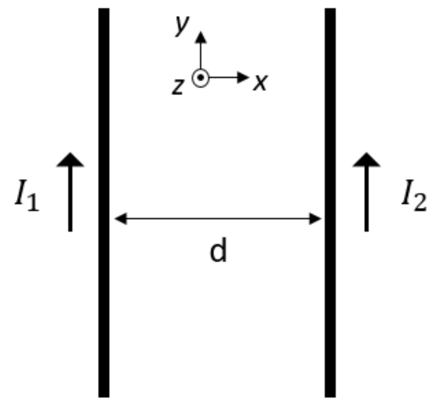
2.2 ➤ (0,75 pt) Calculez le flux magnétique qui traverse une surface en forme de disque de rayon $\rho < r$, centré en O(0,0,0) et dont le vecteur normal est $\hat{n} = \hat{z}$. Considérez le champ magnétique comme uniforme partout dans la région occupée par le cylindre.

2.3 ➤ (1 pt) Déterminez le champ électrique $\vec{E}(t)$ à l'intérieur du cylindre dû à la variation temporelle du champ magnétique.

2.4 ➤ (1,25 pt) Calculez la puissance moyenne dissipée par courants de Foucault à l'intérieur du cylindre si a = 10 cm, N = 100, I_0 = 2 A, $\omega = 10^3$ rad/s, r = 1 cm, L = 2 cm et $\sigma = 4\times10^7$ S/m.

QUESTION 3 : Force entre deux fils parcourus par un courant (3 points)

Deux fils parallèles parcourus par des courants distincts I_1 et I_2 sont séparés par une distance d. On considère que le diamètre des fils est négligeable par rapport d. Également, on suppose que les fils sont infinis (leur longueur est très grande par rapport à d) et qu'ils sont séparés par de l'air.



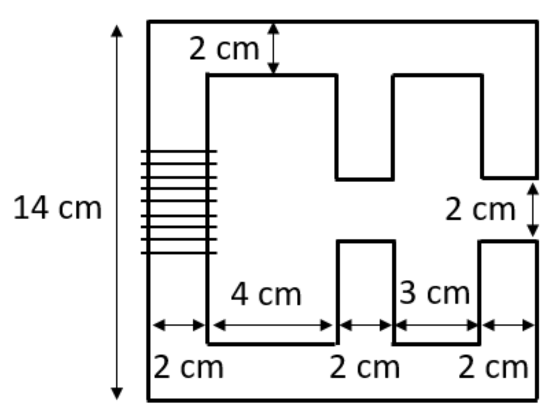
3.1 ➤ (1 pt) Déterminez (démontrez) l'expression du champ magnétique $\vec{H}$ produit par un fil parcouru par un courant I.

3.2 ➤ (1,5 pt) Déterminez l'expression de la force par unité de longueur ressentie par le fil de droite.

3.3 ➤ (0,5 pt) Quelle est la condition pour que les fils s'attirent ? Quelle est la condition pour que les fils se repoussent ?

QUESTION 4 : Champ magnétique dans un entrefer double (3 points)

Une bobine de 2000 tours de fil parcourue par un courant alternatif de 0,5 A est enroulée autour de la branche de gauche du noyau ferromagnétique (μ_r = 1000) illustré sur la figure. Au centre de la branche du milieu et au centre de la branche de droite, il y a un entrefer de 2 cm de hauteur. La section du noyau est rectangulaire. L'épaisseur du noyau est uniforme et vaut 5 cm.



4.1 ➤ (1,5 pt) Déterminez la réluctance équivalente du circuit magnétique équivalent au dispositif.

4.2 ➤ (1,5 pt) Déterminez le module de la densité de flux magnétique dans chacun des deux entrefers. Commentez sur la différence de valeur entre les deux entrefers.

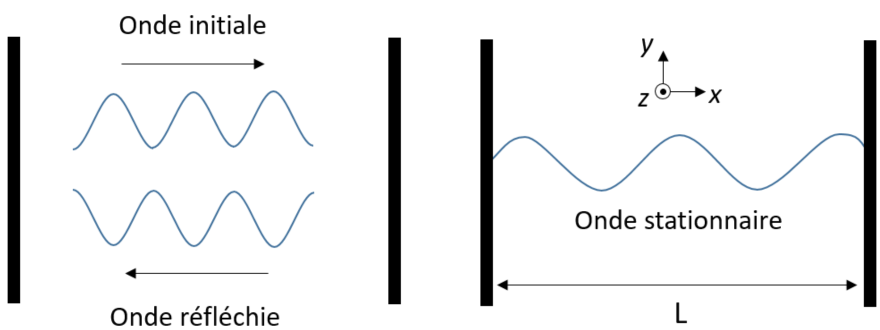
QUESTION 5 : Cavité micro-ondes (5 points)

Une cavité micro-ondes est formée par deux plans conducteurs parallèles (en traits noirs épais sur la figure) séparés par une distance L. Lorsqu'une onde plane de la forme

$$\vec{E}(x,t) = 10(\hat{y}+\hat{z})\cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{L}\right) \ \text{[V/m]}$$

est émise et se propage entre ces deux plans, elle est réfléchie sur les surfaces conductrices (le champ électrique de l'onde doit être nul en tout temps sur celles-ci), ce qui produit une onde stationnaire (voir l'exemple sur la figure ci-dessous).

Exemple de génération d'une onde stationnaire dans une cavité



On suppose que le milieu de propagation de l'onde est le vide.

5.1 ➤ (1 pt) Sachant que la fréquence de l'onde est égale à 2,45 GHz (la fréquence utilisée dans un four micro-ondes domestique), déterminez l'amplitude et la longueur d'onde de l'onde plane $\vec{E}(x,t)$, ainsi que la distance L entre les surfaces de la cavité.

5.2 ➤ (0,5 pt) Déterminez la polarisation de l'onde plane.

5.3 ➤ (1 pt) Déterminez l'expression du champ magnétique $\vec{H}(x,t)$ de l'onde plane et donner ses unités.

5.4 ➤ (1,5 pt) Démontrez que l'onde plane respecte l'équation d'onde.

5.5 ➤ (1 pt) Calculez le vecteur de Poynting de l'onde, puis calculez la puissance moyenne par unité de surface transmise par l'onde.

Bonus ➤ (1 pt) Démontrez que la superposition de deux ondes planes $\vec{E}(x,t)$ identiques, mais qui se propagent en sens contraire l'une de l'autre et qui sont déphasées de 180°, produit une onde stationnaire $\vec{E}_{\text{stat}}(x,t)$ de la forme :

$$\vec{E}_{\text{stat}}(x,t) = 20(\hat{y}+\hat{z})\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin(\omega t) \ \text{[V/m]}.$$

Les identités suivantes pourraient vous être utiles :

$$\cos(A-B) + \cos(A+B) = 2\cos A\cos B,$$
$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A\sin B.$$

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = dy\,dz\,\hat{x} + dx\,dz\,\hat{y} + dx\,dy\,\hat{z}$$

$$dV = dx\,dy\,dz$$

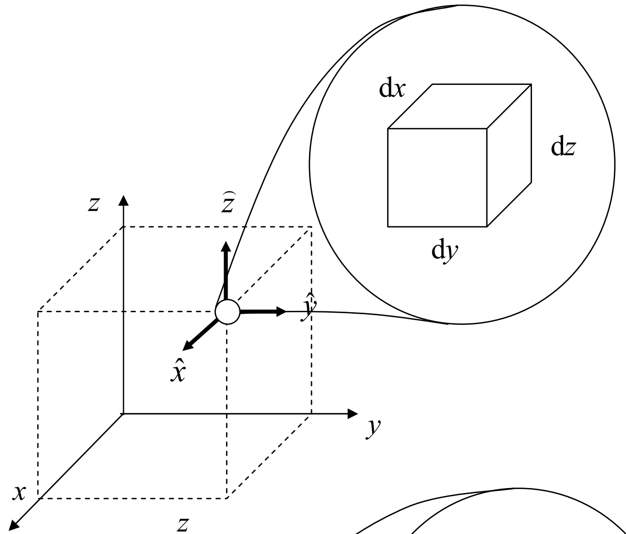
$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \nabla^2 H_x \hat{x} + \nabla^2 H_y \hat{y} + \nabla^2 H_z \hat{z}$$



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$$d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{s} = \rho\,d\phi\,dz\,\hat{\rho} + d\rho\,dz\,\hat{\phi} + \rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{z}$$

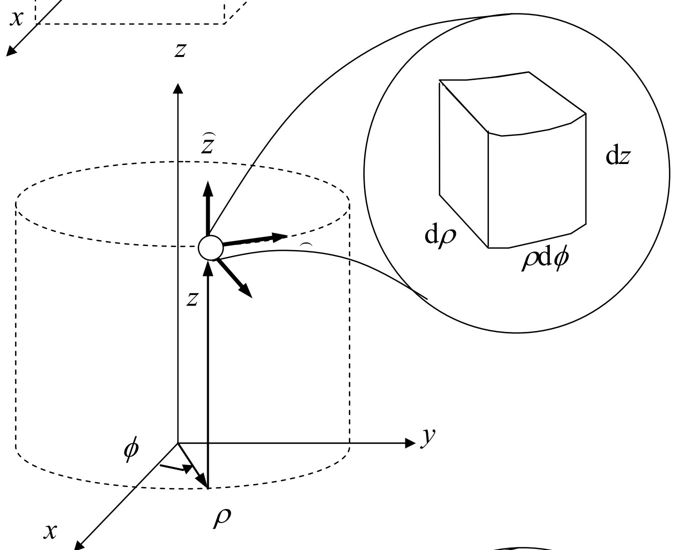
$$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\phi) - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{r} + r\sin\theta\,dr\,d\phi\,\hat{\theta} + r\,dr\,d\theta\,\hat{\phi}$$

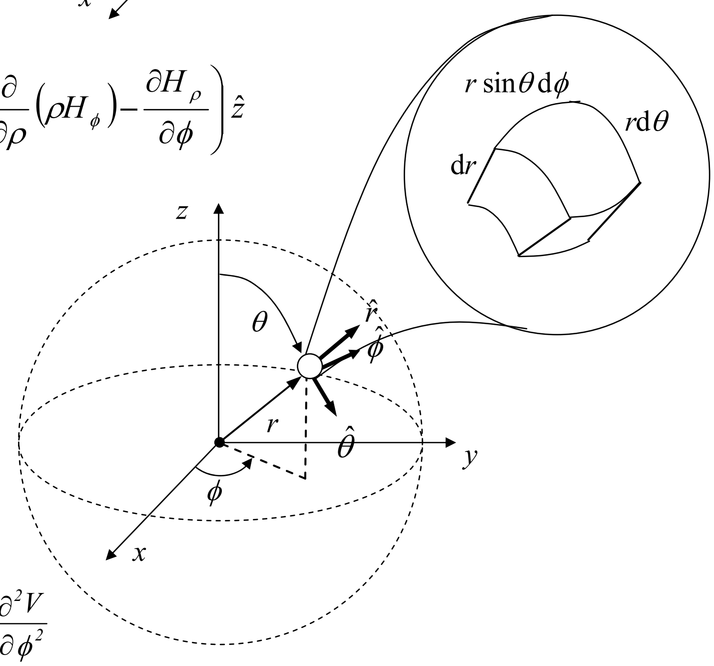
$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(D_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(H_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta\right) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right)\hat{\phi}$$



LES ÉQUATIONS DE BASE

Loi de Coulomb : $\vec{F} = \dfrac{q\,Q\,\hat{r}}{4\pi\,\varepsilon_o\,|r|^2}$

Champ électrique: $\vec{E} = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \dfrac{\vec{F}}{\Delta q}$

Principe de superposition :

$$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$$

Flux électrique : $\Psi = Q$

Le flux débute/finit sur des charges libres

Densité de flux, vide: $\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathrm{E}}$

Loi de Gauss: $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q$

Potentiel entre *a* et *b*: $V_{ab} = \dfrac{W_{ab}}{Q} = -\int_b^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

V charge ponctuelle : $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

Champ conservatif : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le gradient : $\vec{E} = -\nabla V$

Énergie du champ: $U = \dfrac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 dv$

Force, travail virtuel : $\vec{F} = -(\partial W_E / \partial x)\hat{x}$

Polarisation *P*: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Permittivité :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

Capacité : $C = \dfrac{Q}{V}$ $\quad C = \dfrac{2 W_E}{V^2}$

Densité de courant *J*: $I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Conductivité σ: $\vec{\mathrm{J}} = \sigma \vec{\mathrm{E}}$

Résistance : $R = \dfrac{V}{I}$

Puissance dissipée : $P_d = VI = \int_{\mathrm{v}} \sigma E^2 \,\mathrm{d}v$

Champ électrostatique dans conducteur :

$\rho_v = 0$ $\quad E_i = 0$ $\quad V = \text{cste}$

Interface diélectrique/conducteur :

$E_{1T} = 0$ $\quad D_{1N} = \rho_S$

Interface diélectrique/diélectrique :

$E_{1T} = E_{2T}$ $\quad D_{1N} - D_{2N} = \rho_S$

Théorie des images : ⊕ | Θ

Règles graphiques pour les diélectriques:

① dessiner des carrés curvilignes

② ligne équipotentielle ⊥ ligne de flux

③ ligne de flux débute/finit sur conducteur

④ surface conductrice est équipotentielle

Capacité : $C = \dfrac{N_P\ \varepsilon d}{N_S}$

Règles supplémentaires pour les conducteurs :

⑤ ligne de courant ne peut croiser un isolant

⑥ ligne équipotentielle ⊥ ligne de flux

Résistance : $R = \dfrac{N_S}{N_P \sigma d}$

1ère équation de Maxwell : $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V$

Continuité du courant : $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Équation de Poisson : $\nabla^2 V = \dfrac{-\rho_V}{\varepsilon}$

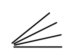
Équation de Laplace : $\nabla^2 V = 0$

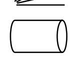
Condition de Dirichlet : *V* connu sur *S*

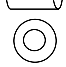
Condition de Neumann : $\partial V/\partial n$ connu sur *S*

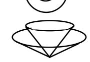
Solutions générales unidimensionnelles :

$V(x) = Ax + B$

 $V(\phi) = A\phi + B$

 $V(\rho) = A \ln \rho + B$

 $V(r) = (A / r) + B$

 $V(\theta) = A \ln\big(\tan(\theta / 2)\big) + B$

Différences finies dans le milieu :

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Différences finies sur surface isolante:

$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4}$$

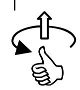
Permittivité du vide : $8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m

Énergie cinétique : $U = \left(m\,v^2\right)/2$

Force centrifuge : $F = \left(m\,v^2\right)/r$

Loi de Biot-Savart : $\vec{H} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\,d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$

Règle de la main droite génération :



Loi d'Ampère : $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$

4ième Maxwell stat. : $\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

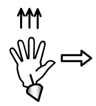
Flux dans une surface : $\Phi = \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Champ solénoïdal : $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Densité de flux, vide : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Équation de Lorentz : $\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$

Règle de la main droite force:



Force sur un courant : $\vec{F} = \int_L I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

Moment magnétique dipolaire: $\vec{m} = N I \vec{A}$

Couple sur dipôle : $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$

Génération de f.e.m.: $\in = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

Énergie dipôle magn.: $u = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

Magnétisation : $\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$

Perméabilité : $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Susceptibilité : $\vec{M} = \chi \vec{H}$

Énergie magnétique: $U = \displaystyle\int_v \dfrac{\mu H^2 \mathrm{d}v}{2}$

Énergie électrique: $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \varepsilon E^2 dv$

Densité d'énergie dissipée par hystérésis:

$$u_0 = \oint H\,dB$$

Conditions aux frontières :

$B_{1N} = B_{2N}$ $\qquad H_{1T} = H_{2T}$

Potentiel magnétique $\vec{H} = -\nabla V_m$

Réluctance : $\Re = V_m/\Phi$

Réluctance d'un barreau : $\Re = l/\mu S$

Loi de Faraday : $\in = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

Inductance mutuelle : $M_{12} = \Phi_{12}\,N_2 / I_1$

Auto-inductance : $L = N\Phi/I = 2U/I^2$

Voltage d'une inductance : $V = L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$

3ièmeéqua. Maxwell : $\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Courants de déplacement : $\vec{J}_D = \partial\vec{D}/\partial t$

Loi d'Ampère généralisée :

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Les quatre équations de Maxwell :

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V$ $\qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ $\qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

L'équation d'onde dans le vide:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0\, \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon_0\, \partial^2 \vec{H} / \partial t^2$$

Onde plane uniforme selon x:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = f(x \pm vt)\,\hat{y}$$

Vitesse dans un diélectrique :

$$v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Onde plane, uniforme, harmonique,
de polarisation linéaire et direction $\hat{n}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \beta\left(\hat{n} \cdot \vec{r}\right) + \theta\right)$$

Orthogonalité des champs :

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{n} \times \vec{E}\right) \quad \text{et} \quad \vec{E} = Z\left(\vec{H} \times \hat{n}\right)$$

Fréquence angulaire : $\omega = 2\pi f$

Constante de phase : $\beta = 2\pi / \lambda$

Vitesse : $v = \omega / \beta$

Longueur d'onde : $\lambda = v / f$

Impédance du milieu : $Z = \sqrt{\mu / \varepsilon}$

Vecteur de Poynting : $\vec{\wp} = \vec{E} \times \vec{H}$

$\wp$ moy. onde polar. lin. $< \wp_0 > = \dfrac{E_0^2}{2Z} = \dfrac{Z H_0^2}{2}$

Puissance sur une surface: $P = \displaystyle\int_S \vec{\wp} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Dans le vide :

Permittivité : $8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m

Perméabilité : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

Impédance intrinsèque : $Z_0 = 377\ \Omega$

Vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8$ m