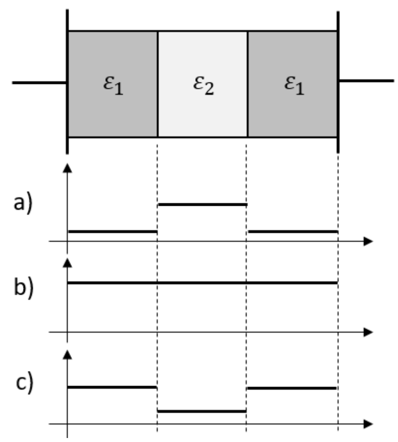
POLYTECHNIQUE MONTRÉAL LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE	**PHS1102 – CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES** **CONTRÔLE PÉRIODIQUE – AUTOMNE 2018** DATE : MERCREDI 24 OCTOBRE 2018 HEURE : 18H30-20H20 PAGES : 5 QUESTIONS : 4 NOTE : Aucune documentation permise Calculatrice non programmable permise

QUESTION 1 : Concepts et réponses courtes, SVP répondre *dans le cahier d'examen* **(4 points)**

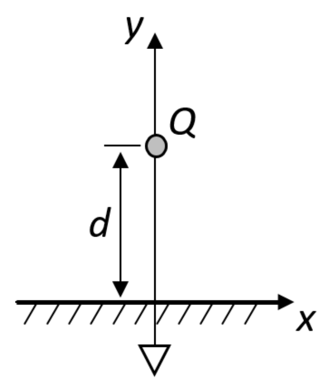
1.1 ➤ (1 pt) Entre les armatures d'un condensateur plan, on place trois couches diélectriques de même largeur. Les couches de gauche et de droite sont de permittivité ε_1 tandis que la couche du centre est de permittivité $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.



Identifiez quelle courbe (parmi a, b et c sur la figure) représente chacune des variables suivantes :

1) D ; 2) E ; 3) P .

1.2 ➤ (1 pt) Une charge ponctuelle $Q < 0$ est placée à une distance d au-dessus d'un plan conducteur horizontal ($y = 0$) et infini (dimensions très grandes par rapport à d). Le plan est mis à la masse et le milieu entourant la charge est le vide. Quelle est l'expression du champ électrique $\vec{E}$ ressenti par la charge Q dû à la présence du plan conducteur ?



A) $\vec{E} = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$ B) $\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$

C) $\vec{E} = +\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\hat{y}$ D) $\vec{E} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\hat{y}$

E) $\vec{E} = +\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$ F) $\vec{E} = -\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$

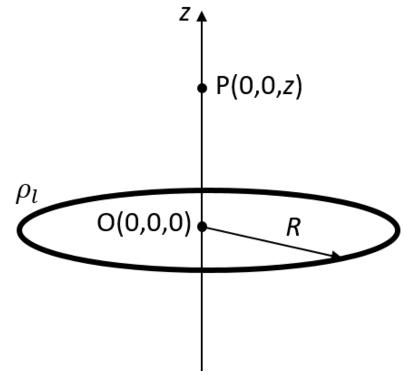
1.3 ➤ (1 pt) Vrai ou faux. Considérez une région de l'espace où la densité volumique de charge est nulle. L'expression $V(r, \theta, \phi) = 5r\cos\theta$ peut décrire le potentiel dans cette région. Justifiez votre réponse.

1.4 ➤ (1 pt) Identifiez les affirmations qui sont vraies parmi les suivantes.

A) En général, la conductivité des métaux augmente avec la température ;
B) La capacité équivalente de deux condensateurs, chacun de capacité C, connectés en série est égale à $C/2$;
C) À l'équilibre électrostatique, le champ électrique est nul partout à l'intérieur d'un conducteur ;
D) Plus l'aire de la section transversale d'un barreau conducteur est petite, plus la résistance du barreau est grande.

QUESTION 2 : Champ électrique produit par un anneau chargé (4 points)

On considère un anneau chargé de rayon R, de densité linéique de charge uniforme ρ_l, qui est entouré d'air ($\varepsilon_r = 1$).



2.1 ➢ Déterminez la charge totale de l'anneau. **(0,5 pt)**

2.2 ➢ Démontrez que l'expression du champ électrique pour un point P(0,0,z) situé sur l'axe de l'anneau, à une distance z de son centre situé à l'origine O(0,0,0), est donné par : **(2,5 pts)**

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho_l R z}{2\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

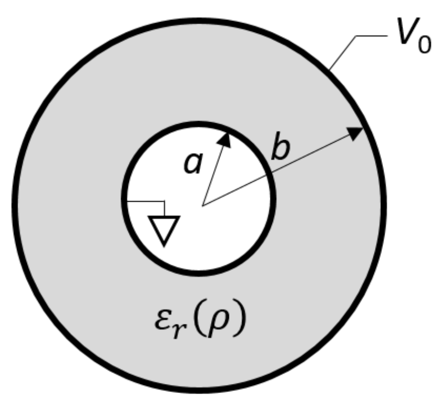
2.3 ➢ Que devient l'expression du champ électrique lorsque $z \gg R$? Comparez avec l'expression du champ électrique produit par une charge ponctuelle qui serait située à l'origine O(0,0,0) et discutez. **(1 pt)**

L'intégrale suivante pourrait être utile :

$$\int_0^{2\pi} \hat{\rho}\, d\phi = 0.$$

QUESTION 3 : Câble coaxial non homogène (5 points)

Un câble coaxial est formé de deux armatures cylindriques conductrices : une surface interne de rayon $\rho = a$ et une surface externe de rayon $\rho = b$. L'armature externe est maintenue à un potentiel $V_0 > 0$ par rapport à l'armature interne qui est mis à la masse. L'espace entre les surfaces est occupé par un matériau diélectrique non homogène dont la permittivité relative est donnée par :



$$\varepsilon_r(\rho) = \varepsilon_{r0} \left(\frac{\rho}{A}\right)^2,$$

où A = 6 cm et $\varepsilon_{r0} = 1{,}5$.

3.1 ➢ Dans quelle direction est orienté le champ électrique à l'intérieur du câble coaxial ? Justifiez. **(0,5 pt)**

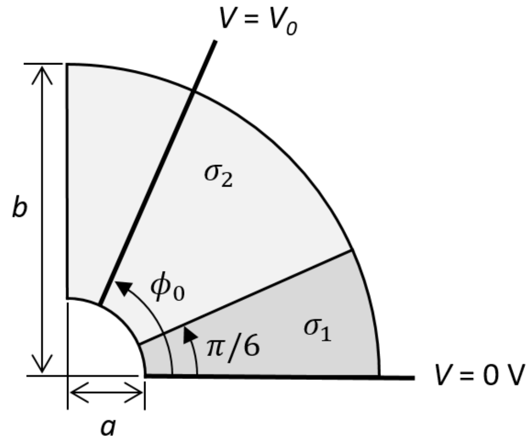
3.2 ➢ Déterminez l'expression vectorielle du champ électrique partout à l'intérieur du câble coaxial en fonction de la charge Q (en valeur absolue) accumulée sur les armatures. **(1,5 pt)**

3.3 ➢ Déterminez l'expression de la capacité par unité de longueur du câble coaxial. **(2 pts)**

3.4 ➢ À partir de V_0 = 10 kV, on observe du claquage dans le diélectrique à l'endroit où le champ électrique est maximal. Calculez la valeur de la rigidité diélectrique du matériau, sachant que a = 0,5 cm et b = 3 cm. **(1 pt)**

QUESTION 4 : Potentiomètre (7 points)

Un potentiomètre est un composant électronique dont on peut faire varier la résistance (résistance variable) en déplaçant l'une des deux électrodes servant de contacts électriques. Le potentiomètre ci-contre est composé d'un barreau en forme d'arc de cercle de rayon interne a, de rayon externe b et d'épaisseur constante d.



Le barreau est composé de deux sections. La première section ($0 \leq \phi \leq \pi/6$) a une conductivité σ_1 tandis que la deuxième section ($\pi/6 < \phi \leq \pi/2$) a une conductivité σ_2.

Une première électrode maintenue à 0 V est située à $\varphi = 0$ tandis qu'une deuxième électrode mobile, maintenue à un potentiel V_0, peut se déplacer sur la deuxième section du barreau pour faire varier la résistance. On considère donc que cette électrode est située à un angle $\phi = \phi_0$, où $\pi/6 < \phi_0 \leq \pi/2$.

4.1 ➢ (1,5 pt) En utilisant la méthode de l'équation de Laplace, donnez l'expression du potentiel partout dans le potentiomètre (dans chacune des deux sections). De plus, donnez les expressions de toutes les conditions frontières du problème.

N.B. Ne pas déterminer les expressions pour les constantes A et B dans les expressions du potentiel. Utilisez ces constantes pour répondre aux sous-questions **4.1** à **4.3**.

4.2 ➢ (1,5 pt) Déterminez l'expression du champ électrique partout dans le potentiomètre.

4.3 ➢ (0,75 pt) Déterminez l'expression de la densité de courant partout dans le potentiomètre.

4.4 ➢ (1 pt) Puisque le courant total qui circule dans les deux sections du potentiomètre est le même, la composante normale de la densité de courant à l'interface entre les deux sections doit être continue.

À l'aide de cette condition et des conditions identifiées à la sous-question **4.1**, déterminez les expressions des constantes A et B de l'expression du potentiel dans la première section du potentiomètre seulement. Exprimez votre réponse en fonction de la géométrie du problème et des conductivités des matériaux.

4.5 ➢ (1,5 pt) Déterminez l'expression de la résistance du potentiomètre en fonction de ϕ_0.

4.6 ➢ (0,75 pt) Calculez la valeur de la puissance dissipée par le potentiomètre pour le cas particulier $a = 1$ cm, $b = 4$ cm, $d = 0{,}5$ cm, $\sigma_1 = 1{,}5$ µS/m, $\sigma_2 = 5$ µS/m, $V_0 = 5$ V et $\phi_0 = \pi/2$.

LES ÉQUATIONS DE BASE

Loi de Coulomb : $\vec{F} = \dfrac{q\,Q\;\hat{r}}{4\pi\,\varepsilon_o\;|r|^2}$

Champ électrique: $\vec{E} = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \dfrac{\vec{F}}{\Delta q}$

Principe de superposition :

$$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$$

Flux électrique : $\Psi = Q$

Le flux débute/finit sur des charges libres

Densité de flux, vide: $\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathrm{E}}$

Loi de Gauss: $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q$

Potentiel entre *a* et *b*: $V_{ab} = \dfrac{W_{ab}}{Q} = -\int_b^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

V charge ponctuelle : $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

Champ conservatif : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le gradient : $\vec{E} = -\nabla V$

Énergie du champ: $U = \dfrac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 dv$

Force, travail virtuel : $\vec{F} = -(\partial W_E / \partial x)\hat{x}$

Polarisation *P*: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Permittivité :

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)\vec{E}$$

Capacité : $C = \dfrac{Q}{V}$ $\quad C = \dfrac{2W_E}{V^2}$

Densité de courant *J*: $I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Conductivité σ: $\vec{\mathrm{J}} = \sigma\,\vec{\mathrm{E}}$

Résistance : $R = \dfrac{V}{I}$

Puissance dissipée : $P_d = VI = \int_v \sigma\, E^2\, \mathrm{d}v$

Champ électrostatique dans conducteur :

$\rho_V = 0$ $\quad E_i = 0$ $\quad V = \text{cste}$

Interface diélectrique/conducteur :

$E_{1T} = 0$ $\quad D_{1N} = \rho_S$

Interface diélectrique/diélectrique :

$E_{1T} = E_{2T}$ $\quad D_{1N} - D_{2N} = \rho_S$

Théorie des images : $\oplus \mid \Theta$

Règles graphiques pour les diélectriques:

① dessiner des carrés curvilignes

② ligne équipotentielle ⊥ ligne de flux

③ ligne de flux débute/finit sur conducteur

④ surface conductrice est équipotentielle

Capacité : $C = \dfrac{N_P\;\varepsilon\, d}{N_S}$

Règles supplémentaires pour les conducteurs :

⑤ ligne de courant ne peut croiser un isolant

⑥ ligne équipotentielle ⊥ ligne de flux

Résistance : $R = \dfrac{N_S}{N_P\,\sigma\, d}$

1ère équation de Maxwell : $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V$

Continuité du courant : $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Équation de Poisson : $\nabla^2 V = \dfrac{-\rho_V}{\varepsilon}$

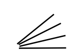
Équation de Laplace : $\nabla^2 V = 0$

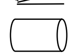
Condition de Dirichlet : *V* connu sur *S*

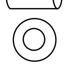
Condition de Neumann : $\partial V/\partial n$ connu sur *S*

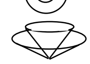
Solutions générales unidimensionnelles :

$V(x) = Ax + B$

 $V(\phi) = A\phi + B$

 $V(\rho) = A\ln\rho + B$

 $V(r) = (A/r) + B$

 $V(\theta) = A\ln\big(\tan(\theta/2)\big) + B$

Différences finies dans le milieu :

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Différences finies sur surface isolante:

$$V_0 = \frac{2V_1 + V_2 + V_3}{4}$$

Permittivité du vide : $8{,}85\times10^{-12}$ F/m

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$

$d\vec{s} = dy\,dz\,\hat{x} + dx\,dz\,\hat{y} + dx\,dy\,\hat{z}$

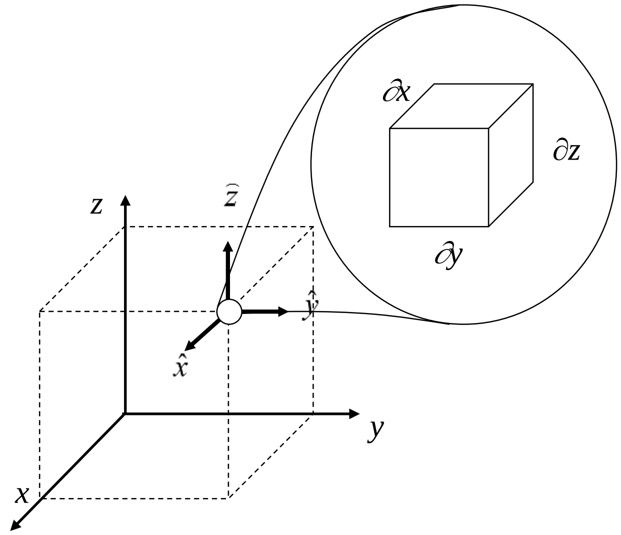
$dV = dx\,dy\,dz$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

$d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$

$d\vec{s} = \rho\,d\phi\,dz\,\hat{\rho} + d\rho\,dz\,\hat{\phi} + \rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{z}$

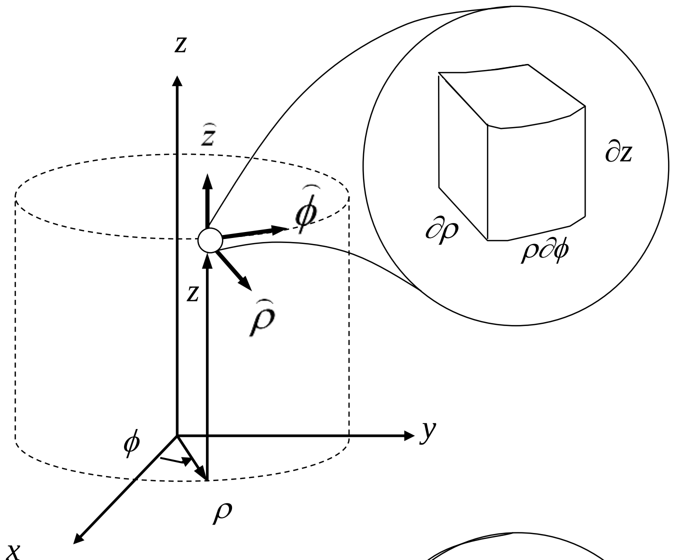
$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right) - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{z}$$



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$

$d\vec{s} = r^2\sin\theta\,d\theta d\phi\,\hat{r} + r\sin\theta\,dr\,d\phi\,\hat{\theta} + r\,dr d\theta\,\hat{\phi}$

$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta\right) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$