Cahier-réponses
Contrôle périodique

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

PHS1102

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Réservé
Q1 : /4
Q2 : /5
Q3 : /7
Q4 : /4
Total : /20

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
PHS1102 Champs électromagnétiques	**Tous**	**Automne 2020**

Coordonnateur	*Courriel*
Francis Torres	**francis.torres@polymtl.ca**

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Lundi	**26 octobre 2020**	**2h00 pour faire l'examen + 30 minutes pour la remise sur Moodle**	**18h30 à 21h00**

Directives particulières

- Toute documentation est permise (examen à livre ouvert). Des aide-mémoire et une table d'intégrales sont disponibles à la fin de ce cahier.
- Justifiez les étapes de vos solutions, sauf indication contraire. Toute réponse finale doit être accompagnée des unités appropriées.
- Si vous pensez qu'il y a une erreur dans ce questionnaire, vous pouvez écrire au coordonnateur à l'adresse courriel ci-dessus.
- Les réponses que vous remettrez doivent être le fruit de votre travail.

Important

Cet examen contient **4** questions sur un total de **16** pages **(excluant cette page)**.

La pondération de cet examen est de **25 %.**

Rédigez vos réponses lisiblement, à la main, soit en utilisant un outil électronique (écran tactile, tablette) pour répondre directement sur ce cahier-réponses, soit en répondant sur ce cahier-réponses imprimé ou sur des feuilles de papier vierge et en numérisant/photographiant vos réponses ensuite.

Remettez vos réponses sous forme d'un **seul fichier PDF lisible, de taille inférieure à 20 Mo, dans le dépôt Moodle « CP – Énoncé et remise » avant 21h00**. Vous devez nommer ce fichier en respectant le format suivant :

Matricule_NomPrénom.pdf

Tout fichier qui ne sera pas rédigé à la main ne sera pas corrigé.

Un nom de fichier non conforme au format décrit entraînera une pénalité.

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1 – Questions conceptuelles et à réponses courtes

Pour ces questions, vous n'êtes pas tenu de détailler vos démarches, sauf lorsque l'énoncé de la question le demande explicitement.

1.1 ➢ (1 pt) Un cylindre creux diélectrique de longueur *L*, de rayon interne *a* et de rayon externe *b*, possède une densité de charge volumique qui varie avec la distance au centre du câble de la façon suivante :

$$\rho_v(\rho) = k\rho^2, \qquad a < \rho < b$$

où *k* est une constante.

Déterminez l'expression de la charge totale de ce cylindre.

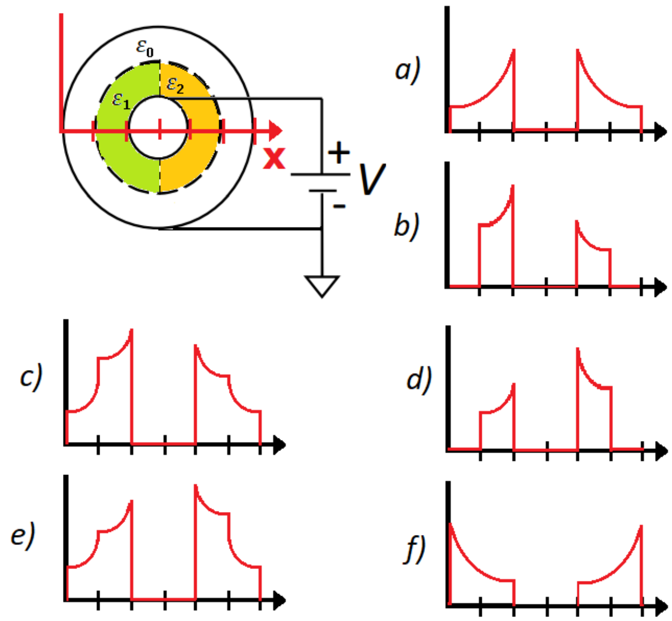
Détaillez vos calculs. Une réponse sans justification ne recevra aucun point.

A)	$\frac{4\pi kL}{5}(b-a)^5$	F)	$\frac{4\pi kL}{5}(b^5-a^5)$
B)	$\frac{\pi kL}{2}(b-a)^4$	G)	$\frac{\pi kL}{2}(b^4-a^4)$
C)	$\frac{4\pi kL}{3}(b-a)^3$	H)	$\frac{4\pi kL}{3}(b^3-a^3)$
D)	$\frac{2\pi kL}{3}(b-a)^3$	I)	$\frac{2\pi kL}{3}(b^3-a^3)$
E)	$\pi kL(b-a)^2$	J)	$\pi kL(b^2-a^2)$

1.2 ➤ (1 pt) La figure ci-contre montre un câble coaxial composé de vide (en blanc) et de deux diélectriques différents (diélectrique 1 à gauche, en vert, et diélectrique 2 à droite, en jaune), tel que $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

L'axe horizontal des graphiques a) à f) correspond à l'axe *x* du câble coaxial.

Identifiez le graphique qui représente la polarisation *P* à l'intérieur du câble.



Votre réponse : ___________

1.3 ➤ (1 pt) Soit un condensateur coaxial est formé de différents diélectriques placés en couches cylindriques concentriques. Chaque diélectrique possède une faible conductivité σ_i. Le condensateur est maintenu à une différence de potentiel *V*.

Classer dans l'ordre les 5 étapes qui permettent de calculer la puissance de fuite dissipée dans ce condensateur.

Étape 1 : _____

Étape 2 : _____

Étape 3 : _____

Étape 4 : _____

Étape 5 : _____

Étape 6 : *M*

A) Calcul de la densité de courant *J*
B) Calcul de la capacité *C*
C) Calcul de la densité de flux *D*
D) Choix d'une surface de Gauss fermée
E) Choix d'une surface de Gauss ouverte
F) Calcul du champ E_i dans chaque région à partir de *D*
G) Calcul de la charge à l'intérieur de la surface de Gauss
H) Calcul potentiel *V* en dérivant E_i dans chaque région
I) Calcul de la résistance *R*
J) Calcul des densités de charge induites aux interfaces
K) Calcul du champ E_i dans chaque région à partir de *J*
L) Calcul du potentiel *V* par intégration des champs E_i
M) Calcul de la puissance de fuite dissipée

1.4 ➢ **(1 pt)** Un condensateur sphérique contient deux coquilles concentriques remplies de deux diélectriques (identifiés 1 et 2) qui ne sont pas totalement isolants.

Identifiez la paire d'équations qui explique le mieux ce qui se passe à l'interface entre les deux diélectriques lorsqu'on applique une tension aux bornes du condensateur et que le condensateur est complètement chargé.

Justifiez votre choix de manière concise. Une réponse sans justification ne recevra aucun point.

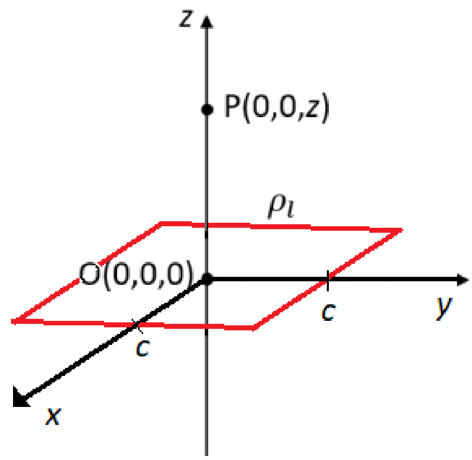
A)	$D_1 = D_2$	et	$\overrightarrow{J_1} \neq \overrightarrow{J_2}$
B)	$D_1 = D_2$	et	$\overrightarrow{J_1} = \overrightarrow{J_2}$
C)	$D_1 \neq D_2$	et	$J_1 \neq J_2$
D)	$D_1 \neq D_2$	et	$J_1 = J_2$

Questions 2 à 4 – Questions à développement

Pour ces questions, vous devez toujours justifier vos réponses et détailler vos calculs. Une réponse sans justification ne recevra aucun point.

Question 2 – Boucle carrée uniformément chargée (5 points)

Condisérez une boucle carrée, de côté $2c$, uniformément chargée avec une densité linéique de charge ρ_l.



2.1 ➢ (0,5 pt) Déterminez l'expression du champ électrique au centre de la boucle.

2.2 ➢ (3 pts) Montrez que l'expression du champ électrique au point P sur l'axe de la boucle est :

$$\vec{E}(z) = \frac{2\rho_l c z}{\pi\varepsilon_0 (c^2 + z^2)^2 \sqrt{2c^2 + z^2}}\hat{z}$$

N.B. Au besoin, utilisez la table d'intégrales à la fin de ce cahier.

2.3 ➢ (1 pt) Déterminez l'expression du champ électrique sur l'axe, très loin de la boucle ($z \gg c$).

2.4 ➢ (0,5 pt) Comparez le résultat obtenu en 2.3 avec la loi de Coulomb pour une charge ponctuelle. Est-ce que les deux résultats sont cohérents ? Discutez.

Question 3 – Condensateur coaxial électrolytique (7 points)

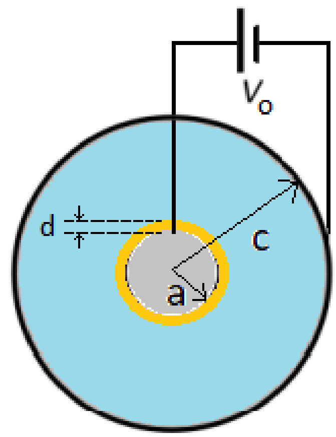
Considérez le condensateur électrolytique coaxial de longueur L illustré sur la figure ci-dessous. Il est composé :

- d'une armature interne cylindrique de rayon a en aluminium ;
- d'une armature externe cylindrique conductrice de rayon c ;
- d'une solution électrolytique à base d'eau qui occupe l'espace entre les armatures.

Ainsi, l'anode du condensateur est formée par l'armature interne tandis que la cathode est formée par l'armature externe et l'électrolyte (on suppose que l'électrolyte est un conducteur parfait).

L'application d'une différence de potentiel entre les armatures cause une réaction d'oxydo-réduction dans la solution électrolytique qui résulte en la formation d'une couche mince isolante d'alumine (ou oxyde d'aluminium Al_2O_3) sur l'anode. Cette couche d'oxydation possède une épaisseur d et agit comme un diélectrique imparfait de permittivité relative ε_r et de faible conductivité σ_0.

En raison de la nature de cette couche, la polarité de ce condensateur est très importante. Inverser le potentiel appliqué peut causer la destruction de cette couche, et une explosion du condensateur électrolytique.



3.1 ➤ (3 pts) Déterminez l'expression de la capacité C du condensateur en fonction de l'épaisseur d la couche d'alumine.

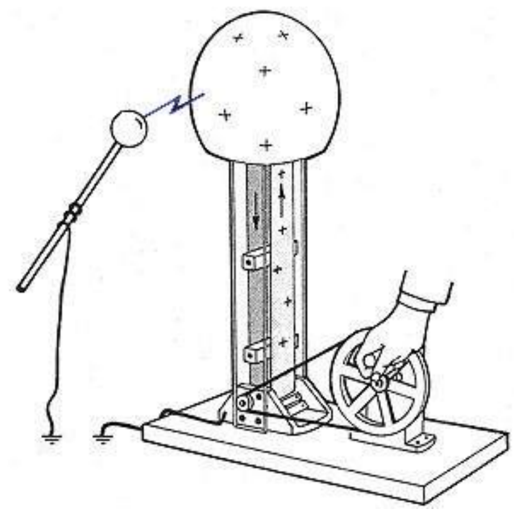
3.2 ➤ (3 pts) Déterminez l'expression de la résistance de fuite en fonction de d.

3.3 ➤ (1 pt) Calculez les valeurs numériques de la capacité et de la résistance de fuite avec les valeurs numériques suivantes :

L = 5 cm, a = 0,5 mm, c = 5 mm, d = 15 nm, ε_r= 9 et $\sigma_0 = 10^{-12}$ S/m.

Question 4 – Générateur électrostatique (4 points)

Un générateur de Van de Graaff accumule des charges positives sur une coquille métallique de rayon *R*. En régime stationnaire, la coquille est à un potentiel V_0.



Considérez que le sol est très loin (à une distance infinie de la coquille) et que la rigidité diélectrique de l'air vaut 3 MV/m.

En pratique, on peut générer des décharges électriques entre la coquille et une petite sphère conductrice fixée au bout d'une tige. Cependant, puisque la présence de la petite sphère complexifie significativement l'analyse de la situation, <u>on étudie ici le générateur uniquement</u> (sans la tige et la petite sphère conductrice).

4.1 ➢ (1,5 pt) À l'aide de l'équation de Laplace, déterminez l'expression du potentiel dans l'air autour de la coquille du générateur.

4.2 ➢ (1 pt) Déterminez l'expression du champ électrique autour de la coquille.

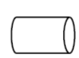
En considérant une coquille de rayon $R = 30$ cm maintenue à un potentiel $V_0 = 100$ kV :

4.3 ➢ (1 pt) Le générateur produit-il des arcs électriques dans l'air en l'absence de la tige et de la petite sphère ? Justifiez par les calculs appropriés.

4.4 ➢ (0,5 pt) Quelle est la tension maximale que l'on peut appliquer au générateur sans créer d'arcs électriques en l'absence de la tige et de la petite sphère ?

PHS1102 – Champs électromagnétiques
Aide-mémoire (chapitres 1 à 6)

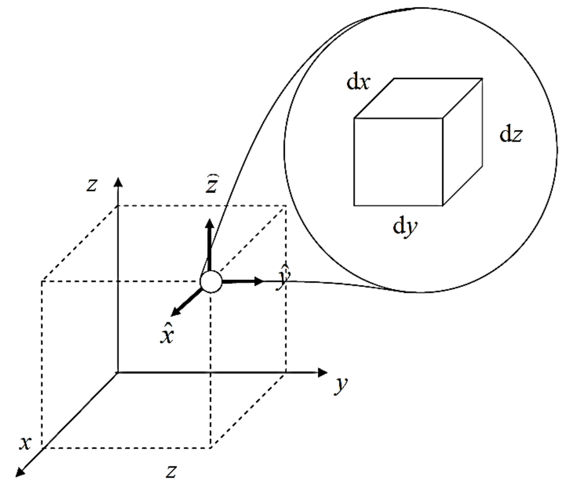
Loi de Coulomb :	$\vec{F} = \frac{qQ\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qQ\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
Champ électrique :	$\vec{F} = q\vec{E}$
Principe de superposition :	$\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$
Flux électrique : Le flux débute et se termine sur des charges libres.	$\Phi_e = Q$
Loi de Gauss : (1re équation de Maxwell)	$Q = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$
Différence de potentiel de b par rapport à a :	$V_{ba} = \frac{W_{ba}}{Q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$
Potentiel charge ponctuelle :	$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$
Champ conservatif :	$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$
Gradient de V :	$\vec{E} = -\nabla V$
Polarisation :	$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
Densité de flux électrique :	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
Permittivité :	$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = (1 + \chi_e)\varepsilon_0$
Capacité :	$C = Q/V$
Énergie dans le champ électrique :	$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2}CV^2$
Densité de courant :	$I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$
Conductivité :	$\vec{J} = \sigma\vec{E}$
Résistance :	$R = V/I$
Puissance dissipée :	$P = VI = \int_V \sigma E^2 \mathrm{d}v$

À l'intérieur d'un conducteur électrostatique :	$\rho_v = 0$ $\vec{E} = \vec{0}$ $V = \text{constant}$
Conditions frontières aux interfaces :	$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$ $E_{1T} = E_{2T}$
Théorie des images :	⊕ | ⊖
Capacité (cartographie des champs) :	$C = \frac{N_p}{N_s}\varepsilon d$
Résistance (cartographie des champs) :	$R = \frac{N_s}{N_p}\frac{1}{\sigma d}$
1re équation de Maxwell :	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$
Continuité du courant :	$\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$ $\nabla \cdot \vec{J} = 0$
Équation de Poisson :	$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$
Équation de Laplace :	$\nabla^2 V = 0$
Solutions 1D à l'équation de Laplace :	$V(x) = Ax + B$  $V(\phi) = A\phi + B$  $V(\rho) = A \ln \rho + B$  $V(r) = (A/r) + B$  $V(\theta) = A \ln(\tan(\theta/2)) + B$
Permittivité du vide :	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m
Impédance du vide :	$Z_0 \approx 377\ \Omega$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c \approx 3 \times 10^8$ m/s

PHS1102 – Champs électromagnétiques
Systèmes de coordonnées

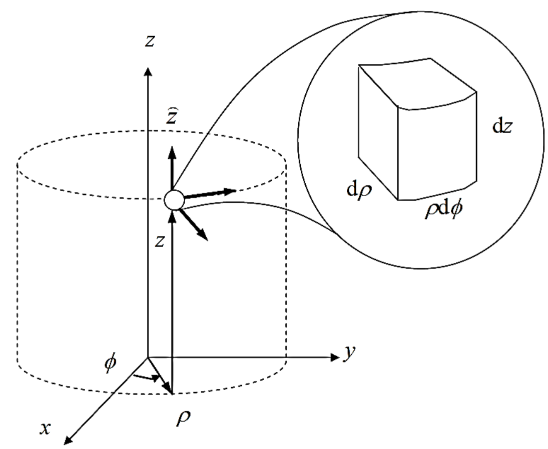
Coordonnées cartésiennes

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\hat{x} + \mathrm{d}y\hat{y} + \mathrm{d}z\hat{z}$$
$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\hat{x} + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{y} + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{z}$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$
$$\nabla^2 \vec{H} = \nabla^2 H_x\hat{x} + \nabla^2 H_y\hat{y} + \nabla^2 H_z\hat{z}$$



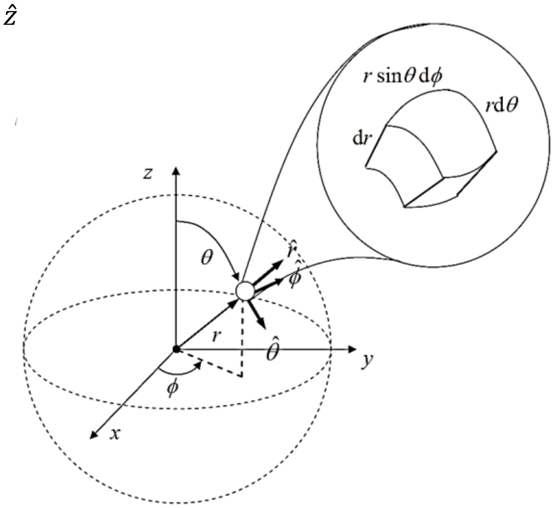
Coordonnées cylindriques

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\rho\hat{\rho} + \rho\mathrm{d}\phi\hat{\phi} + \mathrm{d}z\hat{z}$$
$$\mathrm{d}\vec{s} = \rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\hat{\rho} + \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\hat{\phi} + \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\hat{z}$$
$$\mathrm{d}v = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$



Coordonnées sphériques

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\hat{r} + r\mathrm{d}\theta\hat{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\hat{\phi}$$
$$\mathrm{d}\vec{s} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\hat{r} + r\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\hat{\theta} + r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\hat{\phi}$$
$$\mathrm{d}v = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(D_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(H_\phi\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right)\hat{\phi}$$



PHS1102 – Champs électromagnétiques
Table d'intégrales

Voici quelques intégrales que vous pouvez utiliser sans démonstration. Ici, a est un paramètre constant et C est la constante d'intégration.

1. $$\int \frac{1}{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
2. $$\int \frac{1}{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left(\left|\frac{u-a}{u+a}\right|\right) + C$$
3. $$\int \frac{1}{\sqrt{u^2\pm a^2}}\,du = \ln\left(\left|\sqrt{u^2\pm a^2}+u\right|\right) + C$$
4. $$\int \frac{1}{(u^2\pm a^2)^{3/2}}\,du = \pm\frac{u}{a^2\sqrt{u^2\pm a^2}} + C$$
5. $$\int \frac{u}{u^2\pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\ln(u^2\pm a^2) + C$$
6. $$\int \frac{u}{\sqrt{u^2\pm a^2}}\,du = \sqrt{u^2\pm a^2} + C$$
7. $$\int \frac{u}{(u^2\pm a^2)^{3/2}}\,du = -\frac{1}{\sqrt{u^2\pm a^2}} + C$$
8. $$\int \frac{u^2}{u^2+a^2}\,du = u - a\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$
9. $$\int \frac{u^2}{u^2-a^2}\,du = u - \frac{1}{2}a\ln\left(\left|\frac{u+a}{u-a}\right|\right) + C$$
10. $$\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2\pm a^2}}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2\pm a^2} \pm \frac{1}{4}a^2\ln\left(\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}-u}{\sqrt{u^2+a^2}+u}\right|\right) + C$$
11. $$\int \frac{u^2}{(u^2+a^2)^{3/2}}\,du = -\frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}} + \ln\left|\sqrt{u^2+a^2}+u\right| + C$$