PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 4	2 heures	(4.9.1, 4.9.2, 4.9.3, 4.9.4)

Des grenouilles de **Galvani** à la pile **Volta** à…

4.9.1 Retour du courant par le sol

Le sol est parfois utilisé comme parcours de retour du courant pour des lignes de transport d'énergie formées d'un seul conducteur (ce qui économise le coût d'un second fil). On dispose juste sous la surface du sol, qui a une conductivité électrique uniforme σ, deux électrodes hémisphériques de rayon a séparées d'une grande distance ($d \gg a$). Quelle est la résistance entre les deux hémisphères ? (Parce que $d \gg a$, on considère que la densité de courant est uniforme à la surface des électrodes et que le champ électrique en un point est égal à la somme des champs produits par chacune des deux électrodes).

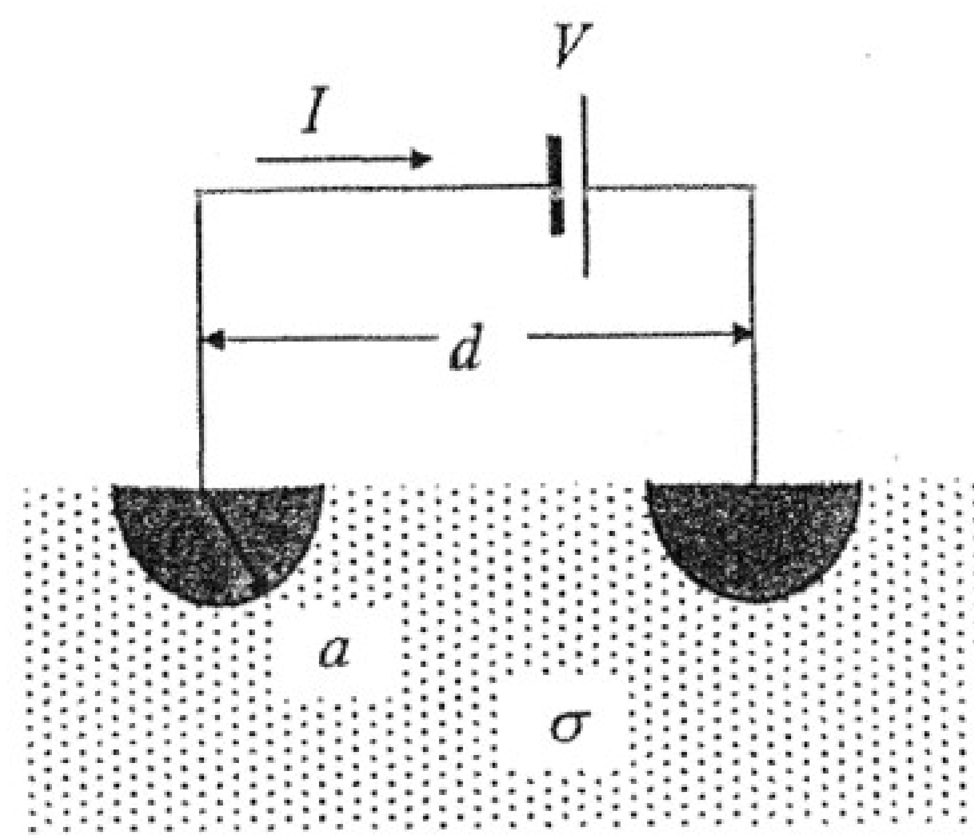
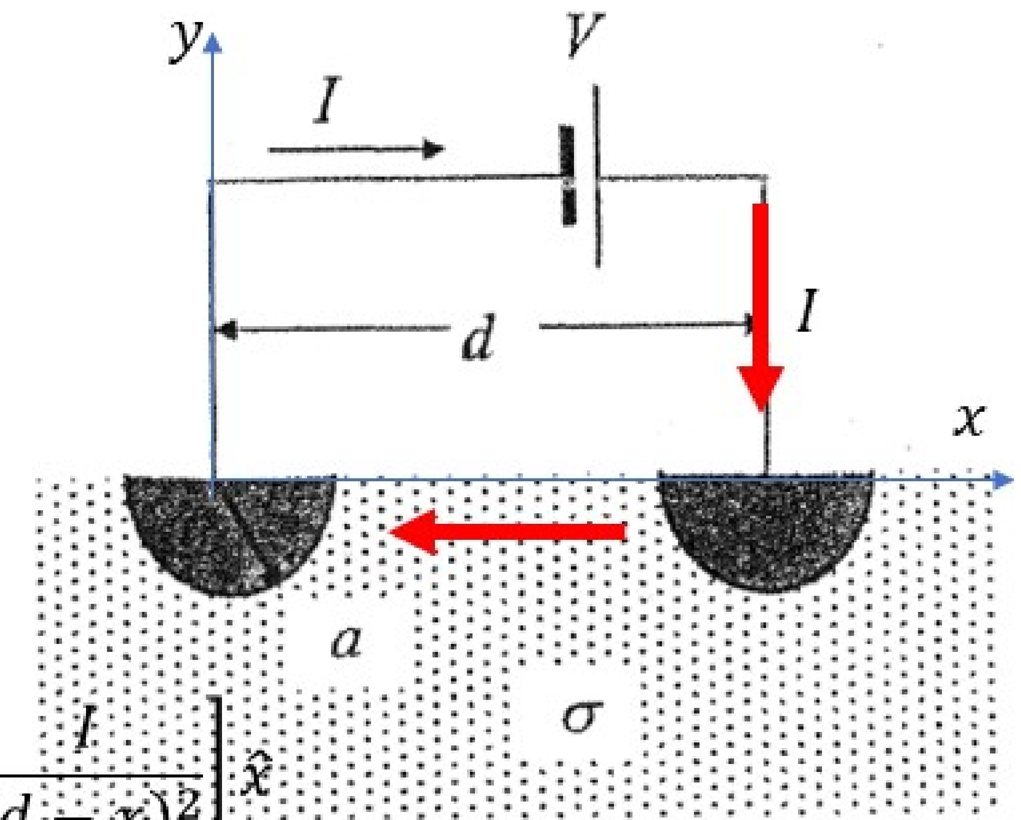


Figure 4.15 Retour par le sol.

Réponse : $R = 1/\pi\sigma a$

On cherche la résistance entre les électrodes



1) On détermine l'expression de la densité de courant $\vec{\boldsymbol{J}}$ produite par une seule électrode :
Pour chaque électrode on aura:

$$I = \int_S \vec{\boldsymbol{J}}.\boldsymbol{d}\vec{S} = 2\pi J\, r^2 \Rightarrow \mathrm{J} = \frac{I}{2\pi\, r^2}$$

On détermine l'expression de J sur le segment de droite pour $y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J}_g = -\dfrac{I}{2\pi\, x^2}\hat{x} \\ \vec{J}_g = -\dfrac{I}{2\pi\, (d-x)^2}\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \vec{J} = \vec{J}_g + \vec{J}_g \Rightarrow \vec{J} = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{I}{x^2} + \frac{I}{(d-x)^2}\right]\hat{x}$$

2) Expression du champ électrique:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = -\frac{\boldsymbol{I}}{2\pi\sigma}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right]\hat{x}$$

3) Calcul de la différence de potentiel entre les 2 électrodes:

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\boldsymbol{I}}{2\pi\sigma}\int_a^{d-a}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right]\hat{x}.dx\,\hat{x} = -\frac{\boldsymbol{I}}{2\pi\sigma}\int_a^{d-a}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right]dx = \frac{I}{\pi\sigma}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a}\right] \approx \frac{I}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)$$

$$\approx \frac{I}{\pi\sigma}\left(\frac{d-a}{ad}\right) \approx \frac{I}{\pi\sigma}\left(\frac{d}{ad}\right) \approx \frac{I}{\pi\sigma a} \qquad \text{pour } a \ll d$$

3) Résistance: $R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\pi\sigma a}$

Séance 4	2 heures	(4.9.1, 4.9.2, 4.9.3, 4.9.4)

4.9.2 Courant de fuite dans câble coaxial

L'espace entre les deux conducteurs d'une ligne de transmission coaxiale est rempli par deux diélectriques qui possèdent des conductivités très faibles, mais non-négligeables. Entre le rayon a du conducteur intérieur et le rayon b du second diélectrique, la conductivité est égale à σ_1 et entre ce rayon b et le rayon c du conducteur extérieur, la conductivité est égale à σ_2. Trouver la résistance de fuite entre les conducteurs extérieur et intérieur pour une longueur de câble de un mètre (on considère que la conductivité des deux conducteurs est très élevée).

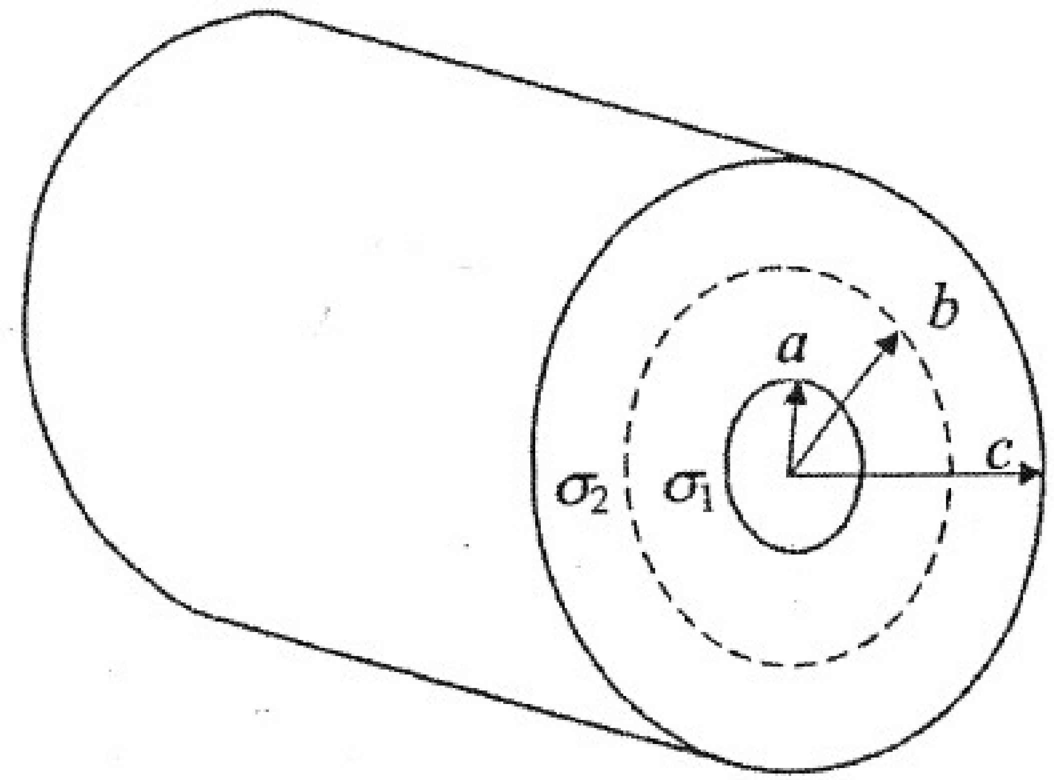
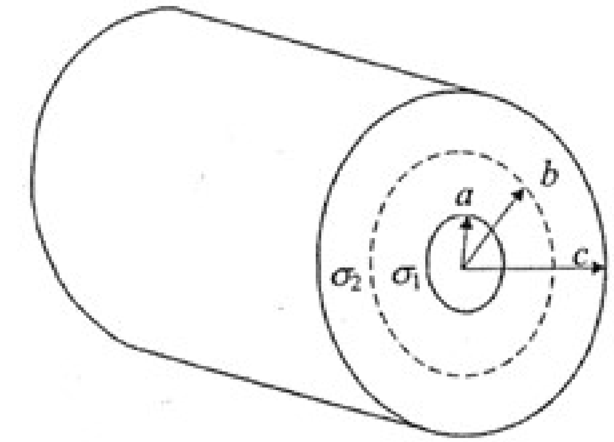


Figure 4.16 Un câble coaxial avec deux diélectriques différents.

Réponse : $R=1/(2\pi l)\,((\ln(b/a)/\sigma_1)+(\ln(c/b)/\sigma_2))$

On cherche le courant de fuite dans un câble coaxial



1) On détermine l'expression de la densité de courant $\vec{\boldsymbol{J}}$ de fuite:
On a :

$$I_f = \int_S \vec{\boldsymbol{J}}_f . \boldsymbol{d}\vec{S} = J_f\, S = J_f\, 2\pi\rho\, L \Rightarrow \vec{\boldsymbol{J}}_f = \frac{I_f}{2\pi\rho\, L}\hat{\rho}$$

2) On détermine l'expression du champ dans les deux régions puisque la conductivité est différente

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{E} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{J}}_f}{\sigma_1} = \dfrac{I_f}{2\pi\rho\sigma_1 L}\hat{\rho} & pour \quad a < \rho < b \\ \vec{E} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{J}}_f}{\sigma_2} = \dfrac{I_f}{2\pi\rho\sigma_2 L}\hat{\rho} & pour \quad b < \rho < c \end{cases}$$

3) Calcul de la différence de potentiel entre a et c:

$$V_{ac} = -\int_c^a \vec{E}.\, d\vec{l} = -\frac{I_f}{2\pi L}\left[\frac{1}{\sigma_2}\int_c^b \frac{1}{\rho}d\rho + \frac{1}{\sigma_1}\int_b^a \frac{1}{\rho}d\rho\right] = -\frac{I_f}{2\pi L}\left[\frac{ln\dfrac{b}{c}}{\sigma_2} + \frac{ln\dfrac{a}{b}}{\sigma_1}\right]$$

4) Résistance:

$$R_F = \left|\frac{V_{ac}}{I_f}\right| = -\frac{1}{2\pi L}\left[\frac{ln\dfrac{b}{c}}{\sigma_2} + \frac{ln\dfrac{a}{b}}{\sigma_1}\right] \; prendre\ la\ valeur\ absolue$$

Séance 4	2 heures	(4.9.1, 4.9.2, 4.9.3, 4.9.4)

4.9.3 Câble coaxial inhomogène

L'espace entre les deux conducteurs d'une ligne de transmission coaxiale est rempli par un diélectrique qui possède une conductivité très faible variant selon le rayon ρ. Entre le rayon a du conducteur intérieur et le rayon b du conducteur extérieur, la conductivité varie linéairement de σ_a à σ_b. Si on considère un câble ayant une longueur de un mètre dans lequel un courant de fuite I_f circule dans le diélectrique entre les deux conducteurs :

a) Quelles sont les expressions permettant de décrire la densité de courant $\vec{J}$ et le champ électrique $\vec{E}$ dans le diélectrique?
b) Quelle est la différence de potentiel V_0 entre les deux conducteurs?
c) Quelle est la résistance de fuite R_f entre les deux conducteurs?
d) Quelle est la valeur de R_f si a = 1 mm, b = 4 mm, σ_a=0,25×10^{-7} S/m, σ_b = 10^{-7} S/m ?

Réponses: a) $J_\rho=I_f/(2\pi\rho)$ et $E_\rho=(b\, I_f)/(2\pi\sigma_b\rho^2)$; b) $V_0=I_f(b-a)/(2\pi\sigma_b a)$;

c) $R_f=(b-a)/(2\pi\sigma_b a)$; d) R_f=4,77 MΩ

$\sigma_a, a \to 0$

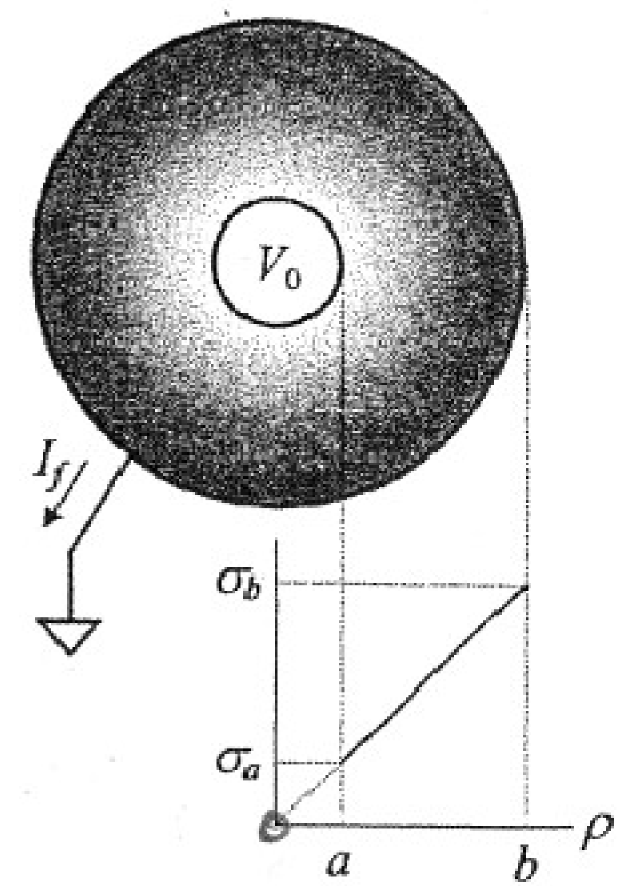
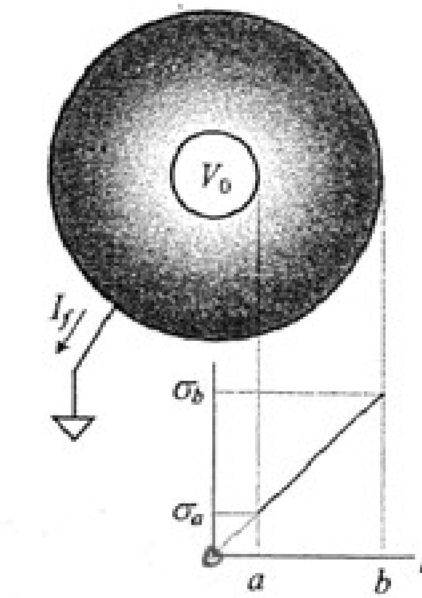


Figure 4.17 Câble coaxial avec diélectrique

Câble coaxial inhomogène



La conductivité varie linéairement entre les rayons a et b

1) On détermine l'expression de la densité de courant $\vec{\boldsymbol{J}}$ de fuite:

$$I_f = \int_S \vec{\boldsymbol{J}}_f . \boldsymbol{d}\vec{S} = J_f\, S = J_f\, 2\pi\rho\, L \Rightarrow \vec{\boldsymbol{J}}_f = \frac{I_f}{2\pi\rho\, L}\hat{\rho}$$

2) De la figure on déduit la variation de la conductivité en fonction du rayon $\boldsymbol{\rho}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{\sigma_b}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\rho} \qquad \left(on\ peut\ utiliser\ aussi\ l'expression\ \ \sigma = \frac{\sigma_a}{a}\rho \quad ou \quad \sigma = \frac{\sigma_b - \sigma_a}{b-a}\rho\right)$$

3) Et donc le champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I_f b}{2\pi\boldsymbol{\rho}^2\boldsymbol{\sigma_b}L}\hat{\rho}$$

3) Calcul de la différence de potentiel:

$$V_{ab} = V_a - V_b = V_0 - 0 = -\int_b^a \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{I_f b}{2\pi\boldsymbol{\sigma_b}L}\left[\int_b^a \frac{1}{\boldsymbol{\rho}^2}d\rho\right] = -\frac{I_f b}{2\pi\boldsymbol{\sigma_b}L}\left[-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right] = \frac{I_f}{2\pi\boldsymbol{\sigma_b}L}\left[\frac{b-a}{a}\right]$$

4) Résistance:

$$R_F = \frac{V_0}{I_f} = \frac{1}{2\pi\boldsymbol{\sigma_b}L}\left[\frac{b-a}{a}\right]$$

Séance 4	**2** heures	(4.9.1, 4.9.2, 4.9.3, 4.9.4)

4.9.4 Ligne souterraine

Une ligne de transport d'énergie est formée de deux câbles conducteurs parallèles enfouis dans le sol. Chaque câble est formé d'un conducteur de rayon a = 1 cm entouré d'une gaine isolante de rayon b = 1,5 cm. La conductivité de cette gaine est $\sigma_g = 10^{-9}$ S/m. La distance entre le centre des câbles est d = 30 cm. Le sol a une conductivité $\sigma_S = 10^{-2}$ S/m et il s'étend à l'infini. Quelle est la résistance entre les deux câbles pour une longueur de 1 km? Note : Parce que $d >> a$ et $d >> b$, on considère que la densité de courant est uniforme à la surface des conducteurs et de la gaine et que le champ électrique en tout point est égal à la somme des champs produits par chaque conducteur. Parce que $d << 1$ km, on considère que les câbles ont une longueur infinie.

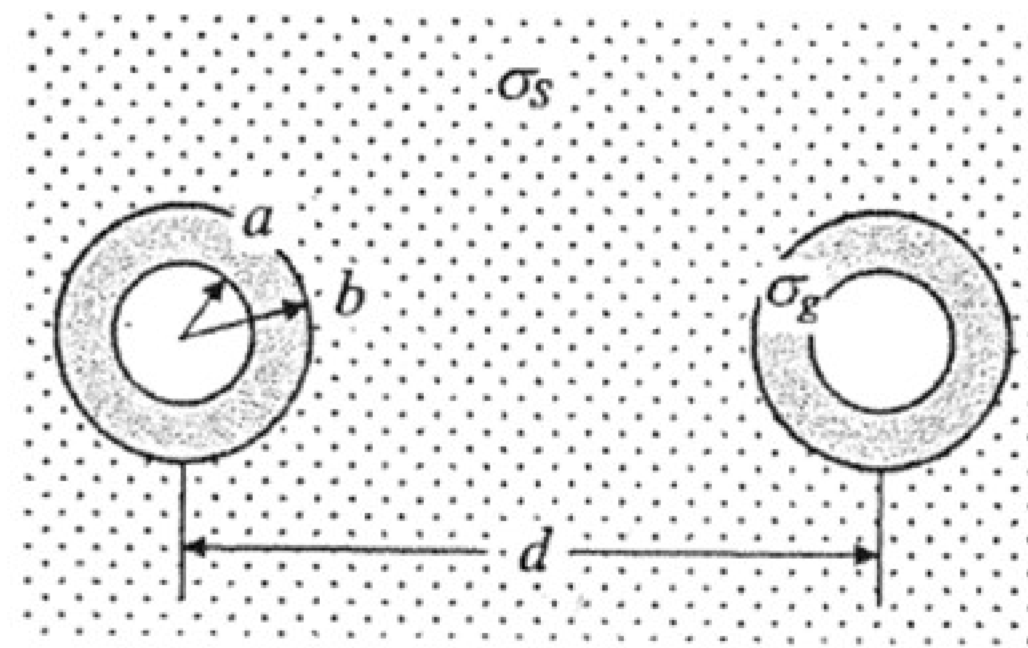
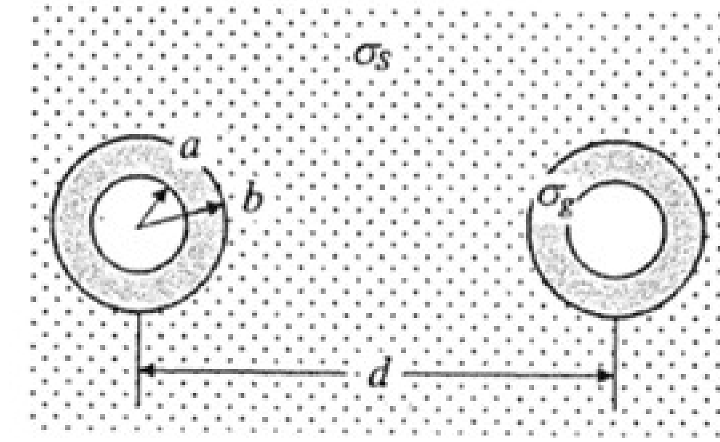


Figure 4.18 Deux câbles dans le sol.

Réponse : R=~~135~~ kΩ
129

Ligne souterraine



$$I = \int_S \vec{\boldsymbol{J}}.\boldsymbol{d}\vec{S} = 2\pi J\, r^2 \Rightarrow \mathrm{J} = \frac{I}{2\pi\rho L}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J}_g = -\dfrac{I}{2\pi\rho_g L}\hat{x} \\ \vec{J}_g = -\dfrac{I}{2\pi\rho_d L}\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \vec{J} = \vec{J}_g + \vec{J}_g \Rightarrow \vec{J} = -\frac{1}{2\pi L}\left[\frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)}\right]\hat{x}$$

2) Expression du champ électrique:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{J}}_f}{\sigma_g} = -\dfrac{1}{2\pi L\sigma_g}\left[\dfrac{I}{x} + \dfrac{I}{(d-x)}\right]\hat{x} \qquad pour \quad a < x < b \quad et \quad d-a < x < d-b \\ \qquad \vec{E} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{J}}_f}{\sigma_s} = -\dfrac{1}{2\pi L\sigma_s}\left[\dfrac{I}{x} + \dfrac{I}{(d-x)}\right]\hat{x} \qquad pour \quad b < x < d-b \end{cases}$$

3) Calcul de la différence de potentiel

$$V_{(d-a)a} = V = -\int_a^{d-a} E\,dx = \int_a^b \frac{1}{2\pi L\sigma_g}\left[\frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)}\right]dx + \int_b^{d-b} \frac{1}{2\pi L\sigma_s}\left[\frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)}\right] + \int_{d-b}^{d-a} \frac{1}{2\pi L\sigma_s}\left[\frac{I}{x} + \frac{I}{(d-x)}\right]$$

…

3) Résistance:

$$R = \frac{V}{I} = 129\ k\Omega$$