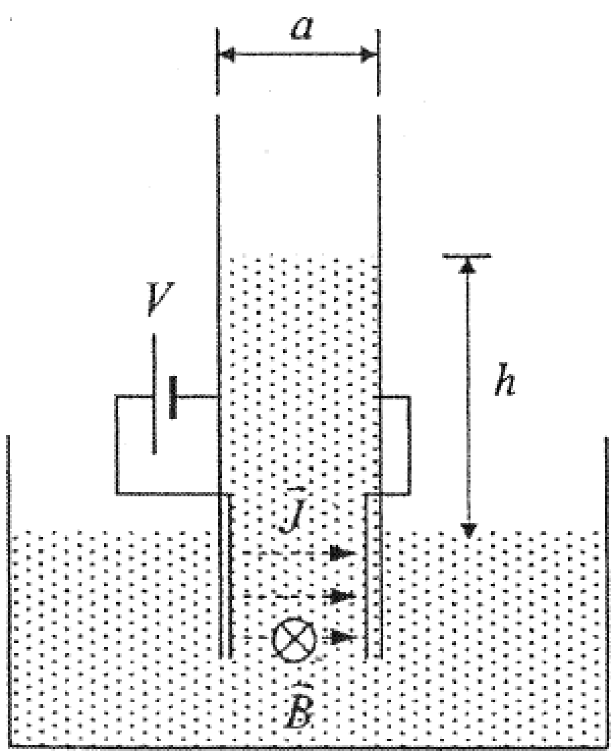
PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 8	3 heures	(8.8.4, 8.8.6, 8.8.8)

8.8.4 Pompe magnétohydrodynamique

Une pompe magnétohydrodynamique permet de pomper un liquide conducteur par l'action d'un courant électrique circulant dans le liquide exposé à un champ magnétique. Dans l'exemple ci-contre, une colonne de plastique creuse ayant une largeur a=2cm et une profondeur a=2cm est plongée dans un bain d'eau salée ayant une conductivité $\sigma = 50$ S/m et une perméabilité μ_0. Dans la partie immergée de la colonne, on dispose sur deux côtés opposés, deux électrodes carrées $a\times a$ aux bornes desquelles on branche une source de tension V=50V. Cette partie immergée de la colonne est également soumise à un champ magnétique ayant une densité de flux $\vec{B}$ =0,1T. À quelle hauteur h s'élève le niveau de l'eau dans la colonne? Discuter de l'efficacité de cette pompe. On considère que les champs électrique et magnétique sont uniformes entre les électrodes et nuls à l'extérieur; la densité de l'eau est de 1g/cm^3, et la constante gravitationnelle est $g = 9.8$ m/s^2.

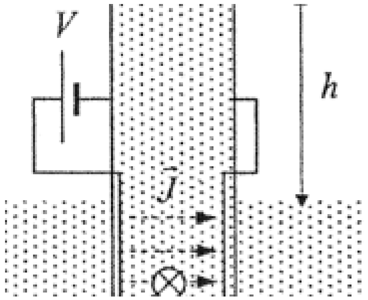


Les champs électriques et magnétiques sont uniformes dans le volume d'eau entre les deux électrodes. On connait la différence de potentiel ainsi que l'espacement entre les électrodes.

Information recherchée

La hauteur h de l'élévation d'eau et la puissance dissipée dans l'eau.

Nous calculons le champ électrique (qui est uniforme ici) en utilisant la différence de potentiel V entre les deux électrodes et la distance a qui sépare celles-ci.



$$V = \int \vec{E}.d\vec{l} = Ea \Longrightarrow E = \frac{V}{a} = 2500\ V/m$$

La densité de courant J dans le liquide de volume en fonction de la conductivité électrique $\boldsymbol{\sigma}$ est donnée par :

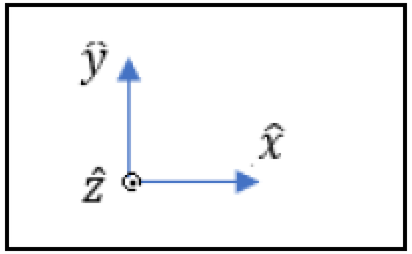
$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \rightarrow J = \sigma\frac{V}{a} = 50 \times 2500 = 1{,}25 \times 10^5\ A/m^2$$

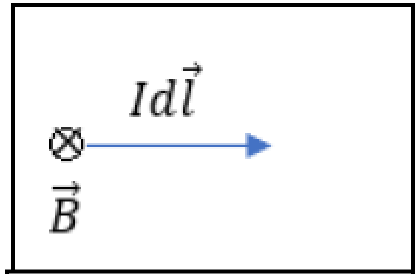
Le courant total électrique qui traverse la surface a^2:

$$I = \int_S \vec{J}.\,d\vec{S} = \int \vec{J}.d\,\vec{S} = J\ S \rightarrow I = J\,a^2 = 1{,}25 \times 10^5 \times (2 \times 10^{-2})^2 = 50\ A$$

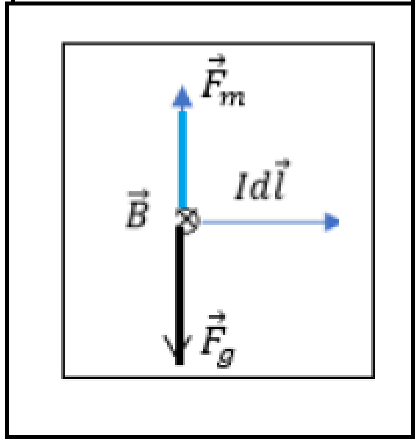
La force magnétique qui agit sur la ligne de courant (fil d'eau) est donnée par:

$$\vec{F}_m = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = IB \int_0^a dx\,(\hat{x}) \times (-\hat{z}) = -IBa(-\hat{y}) = IBa\,\hat{y}$$





Le diagramme de force de la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ et la force sur le courant (fil d'eau) dans le champ magnétique $\vec{F}_m$ permet de trouver la masse d'eau surélevée en fonction des grandeurs de l'exercice.



$$\vec{F}_m = -\vec{F}_g \Longrightarrow F_m = F_g \Longrightarrow IBa = mg \Longrightarrow m = \frac{IBa}{g}$$

Or, la masse surélevée en fonction de la masse volumique ρ et le volume V est donnée par: $m = \rho V = \rho\, a^2 h$, d'où:

$$\rho a^2 h = \frac{IBa}{g} \Rightarrow h = \frac{IB}{\rho a g} = \frac{IB}{\rho a g} = \frac{50 \times 0{,}1}{1000 \times 2 \times 10^{-2} \times 9{,}8} = 2{,}55\ cm$$

Puissance dissipée dans l'eau:

La résistivité de l'eau est donnée en S/m. La résistivité (résistance) de l'eau :

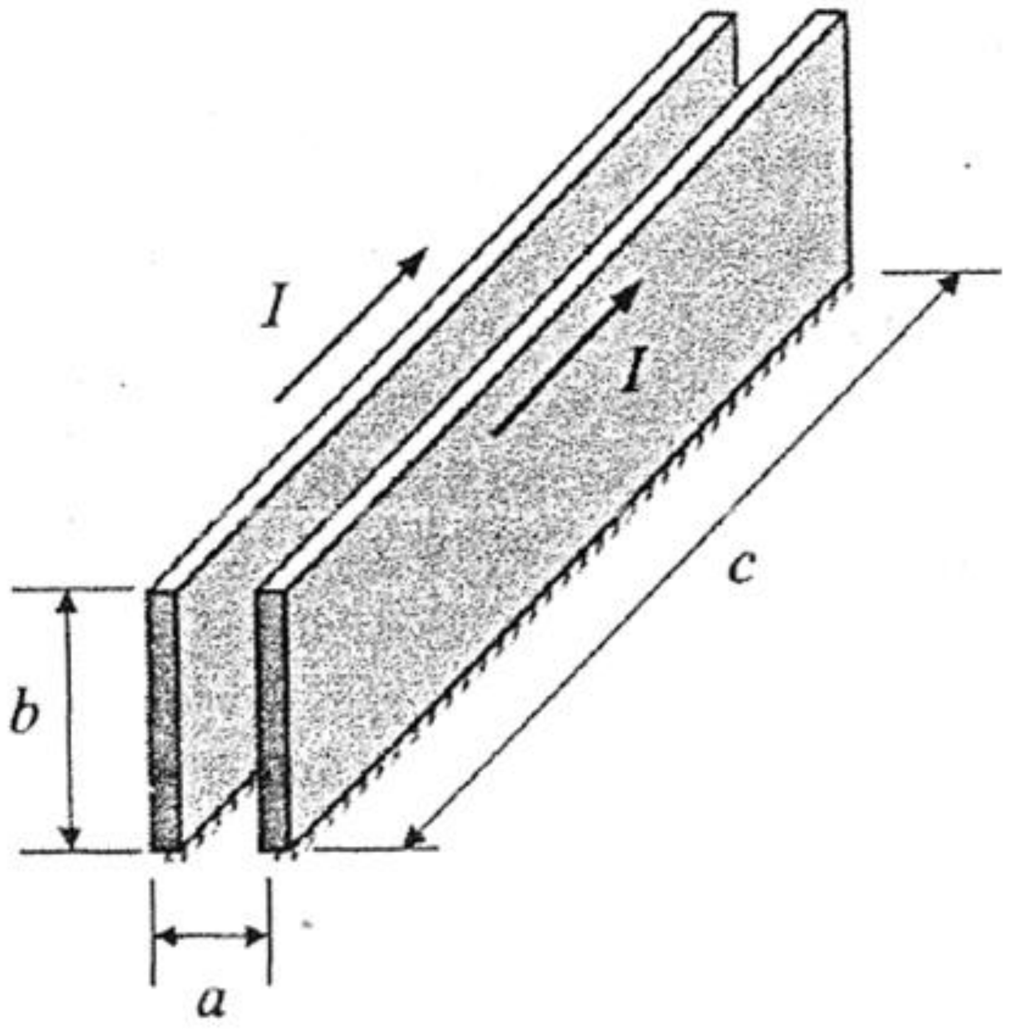
$$R = \frac{1}{\sigma\, a} = \frac{1}{50 \times 0{,}02} = 1\Omega$$

La puissance dissipée dans l'eau : $P = R\, I^2 = 50^2 = 2500\ W = 2{,}5kW$, pertes élevées et donc la pompe n'est pas très efficace.

Séance 8	3 heures	(8.8.4, 8.8.6, 8.8.8)

8.8.6 Forces sur des barres omnibus

Les barres omnibus (*bus bars*) sont souvent utilisées pour distribuer le courant dans les postes de transformation. Ces barres sont des conducteurs de cuivre ($\mu = \mu_0$) plats qui peuvent transporter des courants très élevés. Dans la figure ci-contre, deux longues et minces barres parallèles de largeur b sont séparées d'une distance a et transportent chacune un courant I dans la même direction. Quelle est la force magnétique due au courant I qui s'exerce sur chacune des deux barres pour une longueur c = 10 m et les paramètres suivants: $a = 1$ cm, $b = 62{,}8$ cm, $I = 100$ A?



Le courant qui circule dans une barre produit un champ magnétique qui est ressenti par le courant qui circule dans l'autre barre. Le courant dans l'autre barre ressent alors une force. La situation étant parfaitement symétrique, les deux barres ressentent la même force.

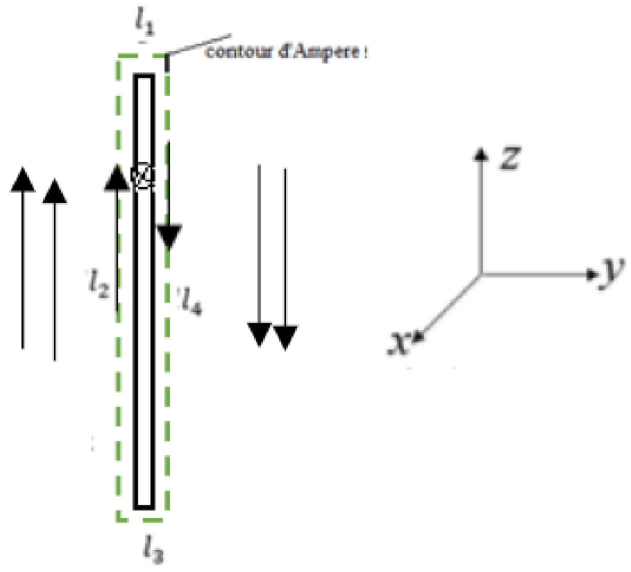
$c \gg a$, on fait l'approximation que le champ produit par une barre est celui produit par une couche infinie (réf. Problème 7.5.4) dans les directions de b et de c.

Information recherchée

On cherche la force (vecteur) subie la barre omnibus de droite.

L'idée est de calculer le champ magnétique produit par la barre de gauche avec le théorème d'Ampère, puis de calculer la force sur la barre de droite avec l'équation de la force sur un courant.

1. Calcul du champ magnétique produit par la barre gauche (théorème d'Ampère)



On fait l'hypothèse que la barre a des dimensions infinies ($b \gg a$ et $c \gg a$, effet de bord négligeable) et une épaisseur négligeable, ce qui permet d'utiliser le théorème d'Ampère $I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$ avec un contour fermé **rectangulaire**.

$$I = \oint \vec{H}.d\vec{l} = \int \vec{H}.d\vec{l_1} + \int \vec{H}.d\vec{l_2} + \int \vec{H}.d\vec{l_3} + \int \vec{H}.d\vec{l_4}$$

Par la symétrie du problème (plan infini, courant selon $-\hat{x}$), le champ magnétique de chaque côté de la barre :

- a seulement une composante selon $\hat{z}$. Le champ pointe vers le haut à gauche de la barre ($\vec{H} = H\hat{z}$) et vers le bas à droite de la barre ($\vec{H} = -H\hat{z}$) par la règle de la main droite ;

- est uniforme sur tous les points à la même distance horizontale y de la barre.

Dans ce cas, $\vec{H} \perp \overrightarrow{dl_1}$ et $\vec{H} \perp \overrightarrow{dl_3}$ et on obtient :

$$I = 0 + \int_0^b H dz + 0 + \int_b^0 (-H) dz = Hb + Hb = 2Hb$$

$$\boxed{H = \frac{I}{2b}}$$

Avec ces hypothèses, le champ produit par la barre est uniforme dans l'espace.

2. Densité de flux magnétique ressentie par la barre de droite

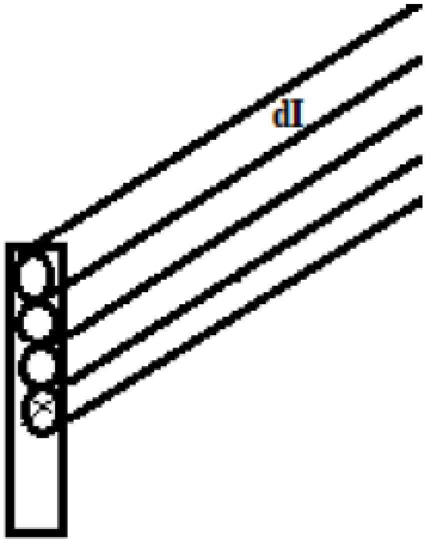
La barre de droite ressent un champ orienté vers le bas, d'où le signe négatif.

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -\frac{\mu_0 I}{2b} \hat{z}}$$

3. Force exercée par la barre de gauche sur la barre de droite

La force exercée sur un courant est donnée par :

$$\vec{F}_m = \int_L I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$



La barre de droite est constituée d'une infinité de fils de longueur infinie et de hauteur dz qui transportent chacun un courant infinitésimal dI.

La force ressentie par un de ces fils infinitésimaux de courant dI est donc :

$$d\vec{F}_m = \int_L dI\, d\vec{l} \times \vec{B} = dI \int_L d\vec{l} \times \vec{B} = dI \int_{x=c}^{0} dx\, \hat{x} \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2b}\right)\hat{z} = -\, dI\, \frac{\mu_0 I c}{2b}\hat{y}$$

où l'on a utilisé le fait que $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$ et où on intègre de c à 0 parce que le courant entre dans la page.

En faisant l'hypothèse que le courant est uniformément réparti dans la barre, on peut relier le courant dI et la hauteur dz d'un fil infinitésimal au courant total I et à la hauteur b de la barre par une règle de proportionnalité :

$$\frac{dI}{I} = \frac{dz}{b} \Longrightarrow dI = \frac{I}{b}dz$$

La force subie par la barre s'obtient en intégrant sur tous les fils infinitésimaux qui la constituent :

$$\vec{F}_m = \int d\vec{F}_m = \int - dI\,\frac{\mu_0 I c}{2b}\hat{y} = \int_{z=0}^{b} -\frac{I}{b}dz\frac{\mu_0 I c}{2b}\hat{y}$$

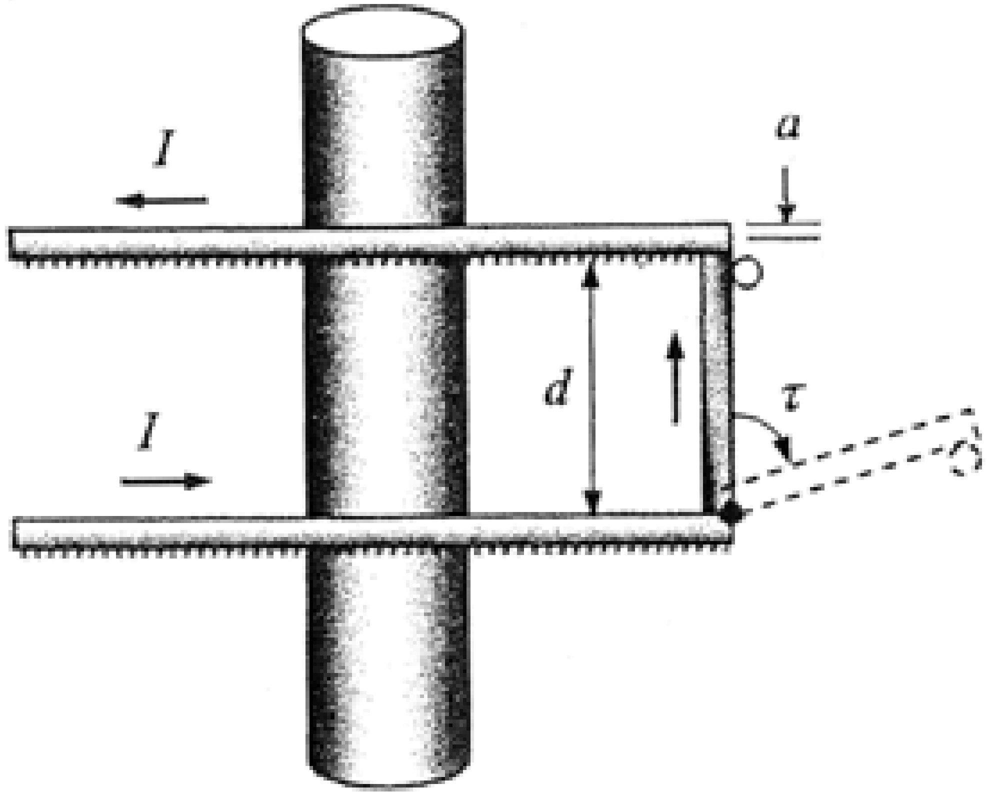
$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_m = -\frac{\boldsymbol{\mu_0 I^2 c}}{\boldsymbol{2b}}\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{-0,1\hat{y}\ \mathrm{N}\ \ (\mathrm{force\ d'attraction})}}$$

PHS1102 – Champs électromagnétiques

Séance 8	3 heures	(8.8.4, 8.8.6, 8.8.8)

8.8.8 Couple sur un sectionneur

Un sectionneur est un dispositif qui permet d'interrompre manuellement l'alimentation d'une partie d'un réseau local de distribution électrique. Dans la figure ci-contre, le sectionneur de longueur d est relié à deux longs conducteurs cylindriques parallèles de rayon a et transportant un courant I. Quel est le couple magnétique τ produit par le courant I qui s'exerce sur le sectionneur pour les paramètres suivants: $a = 1$ cm, $d = 30$ cm, $I = 150$ A.



Information recherchée

Le couple ressenti par cette tige. Le couple est le moment de la force résultante par rapport au pivot.

- Calculer le champ magnétique produit par un fil semi-infini à son extrémité (par la loi de Biot-Savart) et appliquer le principe de superposition pour obtenir le champ magnétique total ressenti par les deux fils.
- Le champ magnétique dépend de la position, ce qui fait que chaque point de la tige ressent une force infinitésimale différente. On doit alors sommer (intégrer) ces forces finitésimales sur toute la tige pour avoir la force résultante que ressent la tige.
- La dernière étape consiste calculer le moment en remplaçant la somme des forces infinitésimales par la force résultante appliquée au centre de la tige).

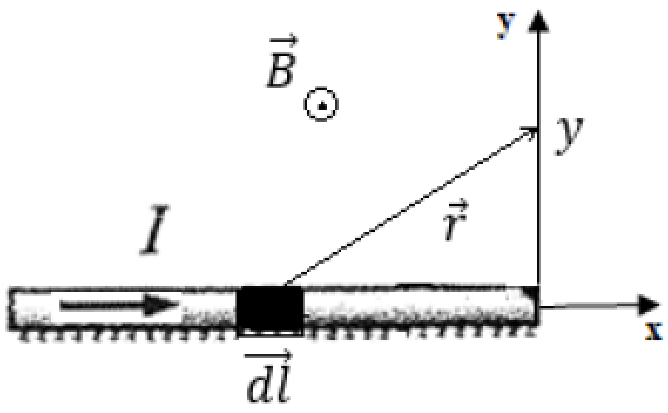
1. **Calcul du champ magnétique produit par le demi - fil 1 :** on utilise l'expression de Biot- Savard car le fil n'est pas infini.

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad \text{É}q. 1$$

r est la distance qui sépare l'élément de longueur $d\vec{l}$ de la tige parcourue par le courant I à son extrémité sur l'axe des ordonnées.

En coordonnées cartésiennes: $\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'élément $d\vec{l}$ est dans la direction $\hat{x}$: $d\vec{l} = \mathrm{d}\vec{x}$



Nous remplaçons dans l'équation 1 ce qui donne:

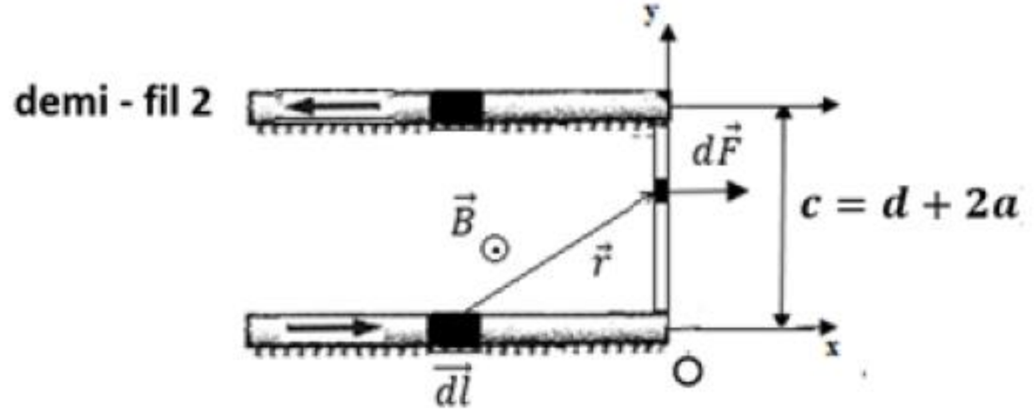
$$d\vec{H}_1 = \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{I}{4\pi}\frac{dx\,\hat{x}\times(x\,\hat{x}+y\,\hat{y})}{r^3} = \frac{I}{4\pi}\frac{dx\,y\,\hat{z}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

Avec $\hat{x}\times\hat{x} = 0 \quad et \qquad \hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$

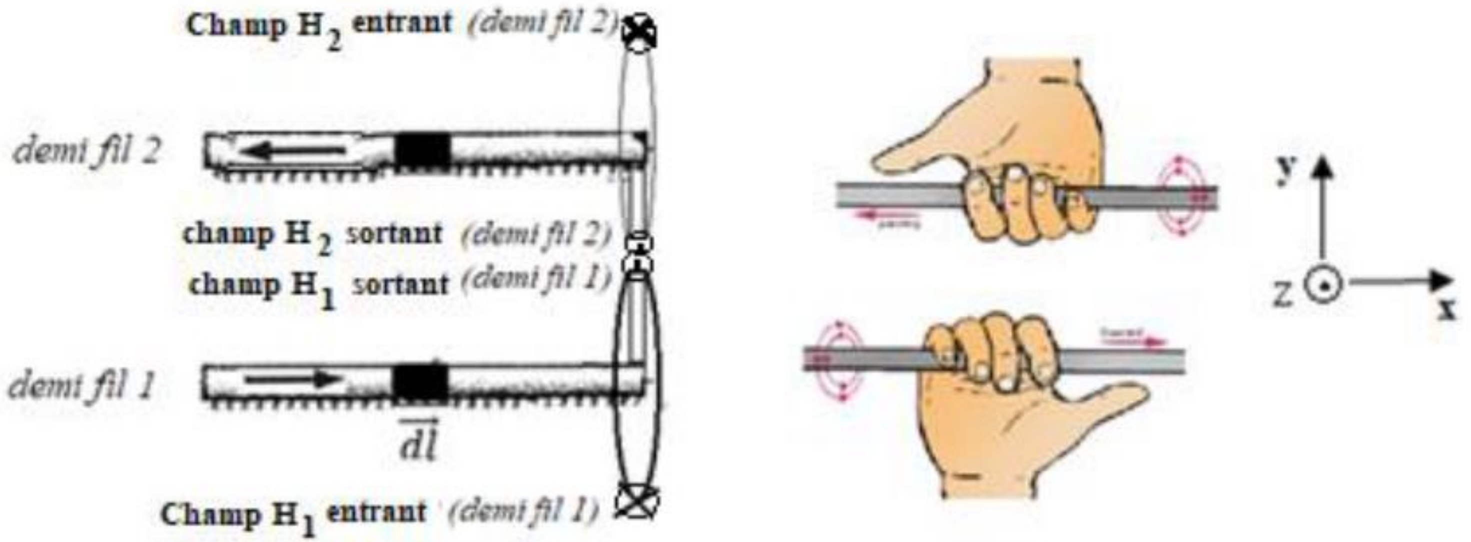
Le détail du calcul de l'intégrale $\int \frac{y\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ est en annexe:

$$\vec{H}_1 = \frac{I\hat{z}}{4\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{I\hat{z}}{4\pi y}\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{I\,\hat{z}}{4\pi y}$$

2. **Calcul du champ magnétique produit par le demi - fil 2 (même problème centré en : $c = d + 2a$)**



$$\vec{H}_2 = \frac{-I\ \hat{z}}{4\pi(y - c)}$$



$\vec{H}_2 = \frac{-I\,\hat{z}}{4\pi(y-c)}$: Noter selon la figure précédente que $y < c \Rightarrow\ y - c < 0 \ \Rightarrow \frac{-I}{4\pi(y-c)} > 0$, c'est-à-dire que le sens de $\vec{H}_2$ est celui de $\hat{z}$. C'est le résultat qu'on obtient pour le sens de $\vec{H}_2$ avec la règle de la main droite.

3. Calcul du champ magnétique total (Principe de superposition) :

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{(y-c)}\right)\hat{z}$$

Et

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{(y-c)}\right)\hat{z}}$$

4. **Calcul de la force infinitésimale qui agit sur un élément $d\vec{l} = \mathrm{d}\vec{y} = dy\,\hat{y}$ du sectionneur (tige):**

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B} = I dy\,\hat{y} \times B\,\hat{z} = I\,B(y)\,dy\,\hat{x}$$

$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$

5. **Moment de force (Couple) :**

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = y\,\hat{y} \times I\,B(y)\,dy\,\hat{x}$$

$$d\tau = y\,dF = y\,I\,B(y)\,dy = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} y\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{(y-c)}\right) dy$$

$$d\tau = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^{d+a} \left(1 - \frac{y}{(y-c)}\right) dy$$

$$\boxed{\tau = \mu_0 I^2\,(d+2a)\ln\left(\frac{d+a}{a}\right) = 2{,}3\,mN.m}$$