Polynômes étoilés

Paul Coutant–Denord

1er octobre 2025

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Définitions **2**

3 Résultats généraux **3**

4 Les extensions de degré fini de $\mathbb{Q}$ **4**

5 Les extensions réels **5**

5.1 Le cas réel 5

5.2 Le cas complexe 6

5.2.1 Une première famille de polynômes 6

5.2.2 Topologie et géométrie des parties étoilées complexes . 7

5.2.3 Un cas particulier : le degré 2 8

5.2.4 Démonstration de l'expression de $\mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 9

6 Perspectives **10**

1 Introduction

L'objectif de ce texte est d'étudier les polynômes conservant les parties étoilées. On commencera par définir précisément cette notion. On cherchera ensuite à déterminer, sur quelques exemples d'extensions de corps, ces polynômes.

2 Définitions

Soit k un corps ordonné (donc de caractéristique 0) et K une extension de k, pas nécessairement ordonnée.

Définition 2.1. On définit alors, pour $A, B \in K$, le segment

$$[A, B] = \{tA + (1-t)B,\ t \in k,\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Définition 2.2. Une partie E est étoilée en $A \in K$ si et seulement si pour tout $B \in E$, $[AB] \subset E$.

Définition 2.3. Soit K une extension de k ordonné. Un polynôme $P \in K[X]$ est $k-$ étoilé de A vers B si pour tout $C \in K$, $P([A, C])$ est étoilée en B. On notera alors $\mathcal{E}(K/k)_{A,B}$ l'ensemble de ces polynômes, avec $A, B \in K$ fixés.

Notons alors $\mathcal{T}_A = \{E \subset K, E \text{ étoilée en } A\} \cup \emptyset$.

Théorème 2.1. $\mathcal{T}_A$ est une topologie sur K dont $\{[A, B], B \in K\}$ forme une base topologique

Démonstration. En effet, si l'on prend $(E_i)_{i\in I}$ avec $E_i \in \mathcal{T}_A$, et $B \in \cup_{i\in I} E_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $B \in E_i$ et donc $[AB] \subset E_i \subset \cup_{i\in I} E_i$. Ce qui montre la stabilité par union. Il en est de même pour l'intersection.

De plus, $[A, B] \in \mathcal{T}_A$ pour tout B, et comme pour $E \in \mathcal{T}_A$, on a $E = \cup_{B\in B}[AB]$. Ainsi $\{[A, B], B \in K\}$ forme une base topologique de $\mathcal{T}_A$. □

On dispose alors d'une caractérisation topologique des polynômes étoilés. Un polynôme $P \in K[X]$ est k-étoilé de A vers B si et seulement s'il s'agit d'une application ouverte de $(K, \mathcal{T}_A)$ vers $(K, \mathcal{T}_B)$. On ne s'intéresse pas à la continuité pour cette topologie.

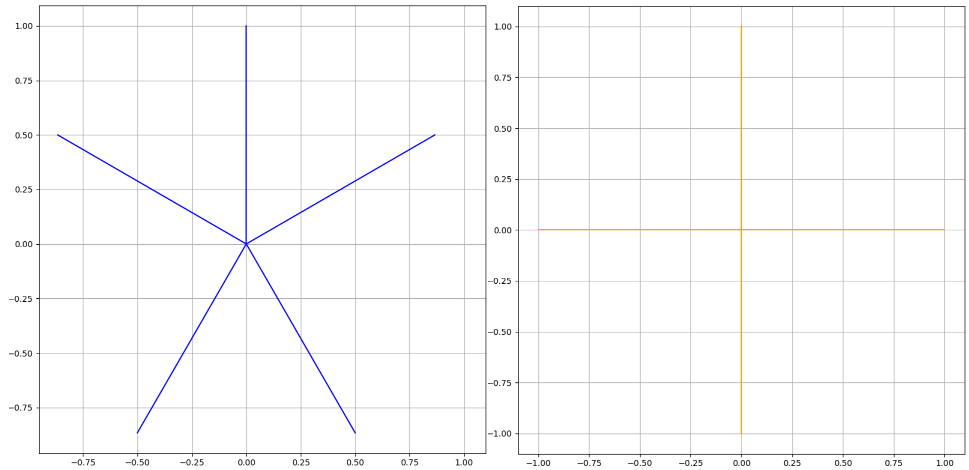


FIGURE 1 – Exemple de X^3, qui appartient à $\mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R})_{0,0}$, transformant la partie de gauche en celle de droite.

3 Résultats généraux

Remarquons tout de suite que $f : \mathcal{E}(K/k)_{A,B} \to \mathcal{E}(K/k)_{0,0}$, défini par $f(P) = P(X - A) - B$, définit une bijection d'inverse $P \mapsto P(X + A) + B$.

On peut donc se ramener à l'étude de $\mathcal{E}(K/k) := \mathcal{E}(K/k)_{0,0}$.

De plus, pour $P \in \mathcal{E}(K/k)$, on a $P(\{0\}) = \{P(0)\}$ étoilé en 0, donc $P(0) = 0$. On a également que, pour $\lambda \in K$, $\lambda P \in \mathcal{E}(K/k)$. On remarque de plus que $X \in \mathcal{E}(K/k)$ et que $(\mathcal{E}(K/k), \circ)$ forme un monoïde. L'objectif final est donc de classifier les $\mathcal{E}(K/k)$.

Théorème 3.1. Soit $e_1, ..., e_n \in K$, $n \geq 2$, une famille libre sur k. Alors $P = \sum_{i=1}^{n} e_i X^i$ n'est pas étoilé

.

Démonstration. En effet, l'image de $[0, 1]$ par P doit être étoilée en 0, donc contenir le segment $[0, P(1)]$. Donc, pour $t' \in [0, 1]$, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $t'P(1) = \sum_{i=1}^{n} t'e_i = P(t) = \sum_{i=1}^{n} e_i t^i$. Or les e_i étant libres, on a que $t' = t^i$ pour tout $i \in [|1, n|]$. En particulier, en prenant $t = 1/2$, on a aboutit à une absurdité. $\square$

La proposition précédente permet, en particulier, dans certains cas, de traiter les polynômes de degré 2 . En effet, soit K une extension de k,

$K \neq k$, et $P \in \mathcal{E}(K/k)$ de degré 2. Alors, quitte à multiplier par un scalaire, $P = X^2 + aX$ et l'on a nécessairement $a \in k$ donc $P \in k[X]$.

Un résultat, au final anecdotique, est qu'en faisant agir le groupe $Gal(K/k)$ sur le sous-ensemble de $\mathcal{E}(K/k)$ des polynômes envoyant les segments $[0, A]$ sur des segments, on obtient de nouvelles fonctions, non polynomiales, qui restent cependant ouvertes. Mieux, si l'on prend f une application linéaire du $k-$ espace vectoriel K vers lui même, alors $f(0) = 0$ et $f(tA) = tf(A)$ et donc $f([0, A]) = [0, f(A)]$, et donc f est étoilée.

4 Les extensions de degré fini de $\mathbb{Q}$

On se propose tout d'abord de montrer le résultat suivant :

Théorème 4.1. Soit $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, on a alors $\mathcal{E}(K/\mathbb{Q}) = KX$

Nous allons tout d'abord avoir besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2. Si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est telle que $[0, \varepsilon] \subset P(\mathbb{Q}_+)$, alors P est de degré 1.

Démonstration. Quitte à multiplier P par un entier, on peut le considérer dans $\mathbb{Z}[X]$. En notant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. et si p est un nombre premier, alors $\frac{1}{b^n} P(a/b) = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k b^{n-k}$ et en prenant $a \wedge b = 1$ et a/b un antécédent de $\frac{1}{p}$ avec p ne divisant pas a_n suffisamment grand pour être dans $[0, \varepsilon]$, on aboutit à une absurdité si $n \geq 2$ (on peut trouver une preuve détaillée dans [1]) $\square$

On a alors, quitte à multiplier $P \in \mathcal{E}(K/\mathbb{Q})$ par -1 pour qu'il soit positif au voisinage positif de 0, le résultat suivant.

Lemme 4.3. Soit K une extension de $\mathbb{Q}$ et $P \in \mathcal{E}(K/\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}[X]$. Alors P est de degré 1

En particulier, $\mathcal{E}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}X$.

On va maintenant prouver le théorème énoncé au début de la section.

Démonstration. Soit maintenant $K \subset \mathbb{R}$ une extension de $\mathbb{Q}$. Si $P \in \mathcal{E}(K/\mathbb{Q}) \backslash \{0\}$ est monotone sur $\mathbb{Q}_+$, alors il est de degré 1. En effet, $P([0, 1]) = [0, P(1)]$, donc quitte à diviser P par $P(1)$, on peux supposer $P(1) = 1$. Et alors $P([0, 1]) = [0, 1]$. Alors P est à coefficients rationnels, car prends une infinité de valeurs rationnelles en des rationnels. D'où le résultat. Le résultat est en réalité plus fort. En effet, si l'on prend $P \in \mathcal{E}(K/\mathbb{Q})\backslash 0$, alors P en tant que fonction réelle est monotone sur $[0, \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Puis par densité de $\mathbb{Q}$, on peut prendre ε rationnel. Et alors, de même, quitte à diviser $P(\varepsilon)$, on a $P([0, \varepsilon]) = [0, 1]$ et on a de même que P est de degré plus petit que 1.

Ainsi, pour toute extension K de $\mathbb{Q}$, on a $\mathcal{E}(K/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}X$

□

Soit maintenant $k = \mathbb{Q}(t_1, ..., t_n)$ et $K \subset \mathbb{R}$ une extension de k. On se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème 4.4. $\mathcal{E}(K/k) = kX$

L'idée est que, comme k est une extension de degré fini de $\mathbb{Q}$, on va pouvoir se ramener au cas du théorème 4.1.

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{E}(K/k)$. Comme précédemment, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_{1,2} \in \mathbb{Q}$ tel que $P([0, \varepsilon_1]) = [0, \varepsilon_2]$. Alors, $P/\varepsilon_2 \in k[X]$ comme précédemment. On peut alors écrire, en notant $\alpha_1, ..., \alpha_r$ une base positive de k comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel : $P = \sum_{i=1}^{r} \alpha_r P_i$ avec donc $P_i \in \mathbb{Q}[X]$ pour tout i. Or, pour t assez petit, on a $t(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i) \in [0, 1]$ et donc $t' \in [0, \varepsilon]$ tel que $P_i(t') = t$ pour tout i. En particulier, tous les P_i étant surjectif dans le segment $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, on a d'après le lemme 4.2 que P_i est de degré 1. D'où le résultat. □

5 Les extensions réels

On se propose ici de traiter des extensions $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ du corps réel. Le caractère complet de ce dernier va nous permettre d'utiliser des arguments topologiques forts.

5.1 Le cas réel

Théorème 5.1. $\mathcal{E}(\mathbb{R}/\mathbb{R}) = X\mathbb{R}[X]$

Démonstration. Déterminons $\mathcal{E}(\mathbb{R}/\mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathcal{E}(\mathbb{R}/\mathbb{R})$. On a $P(0) = 0$ donc $X \mid P$.

Réciproquement, soit $P = XQ$. Sur $\mathbb{R}$, une partie étoilée en 0 est un intervalle contenant 0. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $P(E)$ avec E étoilée en 0 est un intervalle et comme $0 \in E$, $P(0) = 0 \in P(E)$, $P(E)$ est étoilée en 0.

Ainsi, $\mathcal{E}(\mathbb{R}/\mathbb{R}) = X\mathbb{R}[X]$. □

5.2 Le cas complexe

L'objectif que l'on se donne est de déterminer $\mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Pourquoi s'étendre sur le cas complexe ? Tout d'abord, parce que $\mathbb{C}$ est le corps idéal pour faire de la géométrie. De plus, étant algébriquement clos, l'étude des polynômes y est simplifié. En somme, c'est ici que nous auront le plus d'outil de nature diverses, et que nous retrouverons concrètement l'aspect géométrique du problème.

Le théorème que l'on va chercher à montrer est le suivant :

Théorème 5.2. $\mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \cup_{n\geq 1}\mathbb{C}X^n$

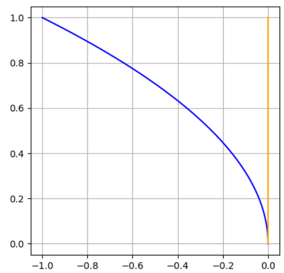
5.2.1 Une première famille de polynômes

En utilisant les propriétés sur les segments, vues plus haut, le lemme suivant ce montre aisément :

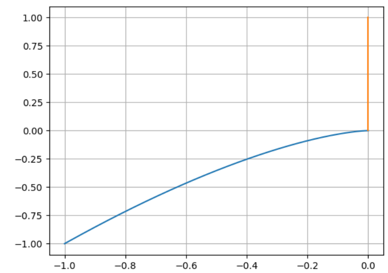
Lemme 5.3. $\bigcup_{n\geq 1}\mathbb{C}X^n \subset \mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

Démonstration. En effet, soit $\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, alors $a(t\rho e^{i\theta})^n = at^n\rho^n e^{i\theta n}$ pour $t \in [0,1]$ et donc, $P = aX^n$ envoie le segment $[0, \rho e^{i\theta}]$ sur $[0, a\rho^n e^{i\theta n}]$. $\square$

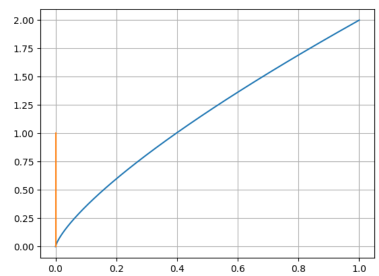
Notons que tout polynôme de $X\mathbb{C}[X]$ n'est pas étoilé. Par exemple, si l'on pose $P = X^2 + X$, alors l'image de $[0, i]$ n'est pas un segment (d'autres exemples sont présentés) :



(a) $X^2 + X$



(b) $X^3 + X^2$



(c) $X^4 - 2X^3$

FIGURE 2 – Images du segment $[0, i]$ par différents polynômes.

5.2.2 Topologie et géométrie des parties étoilées complexes

Il convient d'étudier un peu les parties étoilées de $\mathbb{C}$.

On se propose de montrer le lemme suivant

Lemme 5.4. Si $E = \gamma([0,1])$ est un chemin dans $\mathbb{C}$ et une partie étoilée en A, alors E est une union finie de segments d'extrémité A.

Démonstration. Quitte à translater, on peut supposer E étoilée en 0.

Supposons par l'absurde que E ne soit pas union finie de segments d'extrémité 0. Il existe alors $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$ tels que : $\forall t \in [t_1, t_2], \gamma(t) \neq 0$ et $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ ne sont pas sur un même segment passant par 0. On peut alors regarder $t \mapsto |\gamma(t)|$ sur le compact $[t_1, t_2]$, qui admet donc un minimum non nul r. Alors, si l'on regarde l'intersection du cercle de rayon r avec $[0, \gamma(t_1)]$ et avec $[0, \gamma(t_2)]$, notés A et B. Alors le triangle OAB n'est pas plat et est donc d'intérieur non vide. Or $OAB \subset E$. Et donc E n'est pas d'intérieur vide, or E est un chemin, donc doit être d'intérieur vide, d'où l'absurdité.

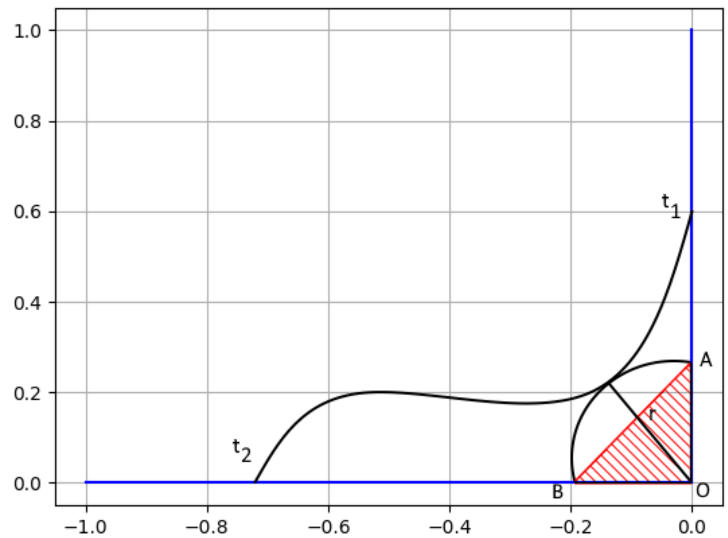


FIGURE 3 – Construction géométrique dans la preuve.

Ainsi, pour $P \in \mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ et $A \in \mathbb{C}$, on a que $P([0, A])$ est une union finie de segments.

□

Ce résultat nous sera utile, car il permettra d'affirmer, sous certaines conditions, que l'image d'un segment bien choisi par un polynôme étoilé sera également étoilé. On peut alors intuiter les deux propositions suivantes :

— Pour $P \in \mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ et $A \in \mathbb{C}$, $P([0, A])$ est un segment.

— $\mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}X^n$

La seconde proposition entraîne la première.

5.2.3 Un cas particulier : le degré 2

Soit $P \in \mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \cap \mathbb{C}_2[X]$.

On peut supposer que $P = X^2 + aX$, le cas des polynômes de degré 1 ayant déjà été traité, et alors, on veut que le segment $[0, i]$ soit envoyé sur une partie étoilée. On a : $P(ti) = -t^2 + ait = t(ai - t)$. Regardons en quel t

ce chemin passe par 0 : ou bien $t = 0$, ou bien $t = ai$. Dans le deuxième cas, on a $ai \in [0, 1]$ donc $a \in [0, -i]$.

Supposons tout d'abord $a \notin]0, -i]$. Alors l'image de $[0, 1]$ est un segment et donc $P(i/2)$ et $P(i)$ sont proportionnels. En écrivant $a = x + iy$, on voit que $a = 0$.

Supposons maintenant $a \in [0, -i]$. On regarde alors l'image de $[0, -i]$ et d'après les mêmes arguments que précédemment, on trouve que $a = 0$.

Ainsi, $\mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \cap \mathbb{C}_2[X] = \mathbb{C}X \cup \mathbb{C}X^2$, ce qui conforte la conjecture.

5.2.4 Démonstration de l'expression de $\mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$

En s'inspirant de ce qui a été fait pour le second degré, on va chercher à se ramener au cas d'un segment qui doit être envoyé sur un segment. Voici donc la preuve du théorème 5.2.

Démonstration. Soit $P = X^r Q \in \mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. On suppose $Q(0) \neq 0$ et, par l'absurde, $\deg(Q) \geq 1$.

Comme Q admet un nombre fini de racines, il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $Q(te^{i\theta}) \neq 0$ pour tout t. Alors $P([0, e^{i\theta}])$ est un segment, car le chemin associé ne passe par 0 qu'en $t = 0$ et doit être une partie étoilée. En réalité, il n'y a qu'un nombre fini de direction qui ne vérifie pas cela, et donc, en particulier il existe θ_0, θ_1 tels que l'on puisse prendre $\theta \in]\theta_0, \theta_1[$ arbitraire.

Ainsi, on a que $\frac{Q(e^{i\theta})}{Q(te^{i\theta})} \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in]0, 1[$, et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$. En notant $Q = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$, on a alors

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(e^{i\theta} - z_k)(te^{-i\theta} - \overline{z_k})}{t^2 + |z_k|^2} \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, le polynôme $R = \prod_{k=1}^{n} (e^{i\theta} - z_k)(Xe^{-i\theta} - \overline{z_k})$ est tel que son image sur $]0, 1[$ est réelle. En l'exprimant en fonction des polynômes interpolateurs de Lagrange en un nombre suffisant de points deux à deux distincts et arbitraires de $]0, 1[$, on a que $R \in \mathbb{R}[X]$.

Ainsi, comme R n'admet pas de racine réelle (sinon Q s'annulerait sur $\mathbb{R}e^{i\theta}$, ce qui est exclu), et est à coefficients réels, ses racines sont conjugués. Ainsi, $\overline{z_k} e^{i\theta} = z_{k(\theta)} e^{-i\theta}$. Donc $e^{2i\theta} \overline{z}_k = z_{k(\theta)}$. Or, en faisant parcourir $]\theta_0, \theta_1[$ à θ, on voit que $z_{k(\theta)}$ admet qu'un nombre fini de valeur, et que l'expression de gauche en admet une infinité de différente. D'où l'absurdité. Géométriquement, le caractère conjugué des racines se voit comme une propriété de symétrie par rapport à l'axe $i\mathbb{R}$, or on peut appliquer une infinité de rotation qui vont conserver cette symétrie. Ce qui montre l'absurdité. $\square$

Ainsi, $\mathcal{E}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \cup_{n\geq 1}\mathbb{C}X^n$.

6 Perspectives

Le sujet des polynômes étoilés n'a été, dans cet article, qu'effleuré. Il reste encore beaucoup à étudier.

Le problème majeur résidant dans la classification des $\mathcal{E}(K/k)$ de manière générique.

Une autre tâche, beaucoup plus ardue, serait l'étude de manière générique des fonctions ouvertes pour cette topologie, non nécessairement polynomiales. On risque alors de manquer de contraintes.

Un autre problème connexe, qui présente un intérêt limité, est celui de quitter le monde des polynômes à une indéterminée. On peut alors munir, pour $n \geq 1$, k^n d'une topologie étoilée. Par les mêmes translations qu'utilisées dans cet article, on se ramène à n'étudier que la topologie étoilée en 0, mais cette fois-ci pour des polynômes de $k[X_1, ..., X_n]$. L'intérêt est limité car l'image de ces polynômes serait dans k, donc dans un espace à une dimension. Par exemple, pour $P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ avec $P(0)$, toute partie étoilée en 0 est connexe, donc son image par P est un intervalle, contenant 0, donc le problème se traite de la même manière que sur $\mathbb{R}$.

La définition des segments nécessite que le corps de base soit ordonné, et donc de caractéristique nulle. Cependant, on pourrait s'intéresser au même problème, en prenant un corps K de caractéristique p et en considérant $[A, B] = \{tA + (p - 1 - t)B, t \in \mathbb{F}_p\}$. Les segments sont alors discrets.

Références

[1] Serge Nicolas Serge Francinou, Hervé Gianella. *Exercice de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 1.* Cassini, 2007.