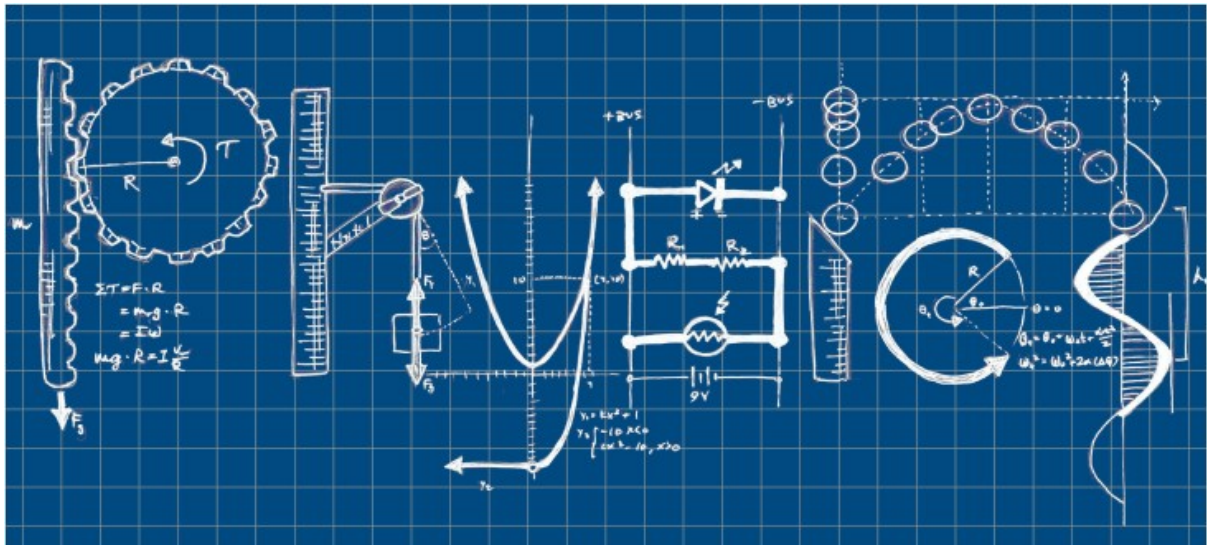




# Meccanica e Termodinamica





# Contents

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Cinematica del punto materiale</b>                                | <b>5</b>  |
| 1.1      | Moto rettilineo uniforme . . . . .                                   | 5         |
| 1.2      | Moto rettilineo uniformemente accelerato . . . . .                   | 6         |
| 1.2.1    | Relazione tra velocità ed accelerazione in funzione dello spazio . . | 6         |
| 1.3      | Moto armonico semplice . . . . .                                     | 7         |
| 1.3.1    | Equazione differenziale dell'oscillatore armonico . . . . .          | 7         |
| 1.4      | Moto rettilineo smorzato esponenzialmente . . . . .                  | 7         |
| 1.5      | Coordinate curvilinee e coordinate polari nel piano . . . . .        | 8         |
| 1.6      | Moto circolare uniforme . . . . .                                    | 11        |
| 1.7      | Moto circolare uniformemente accelerato . . . . .                    | 11        |
| 1.8      | Moto parabolico . . . . .  | 12        |
| <b>2</b> | <b>Dinamica del punto materiale</b>                                  | <b>15</b> |
| 2.1      | Leggi di Newton . . . . .  | 15        |
| 2.2      | Quantità di moto . . . . .   | 15        |
| 2.3      | Teorema dell'impulso . . . . .                                       | 16        |
| 2.4      | Condizione di equilibrio statico . . . . .                           | 16        |
| 2.5      | Forza di reazione vincolare . . . . .                                | 17        |
| 2.6      | Forza d'attrito . . . . .  | 18        |
| 2.6.1    | Attrito statico . . . . .  | 18        |
| 2.6.2    | Attrito dinamico . . . . .   | 18        |
| 2.6.3    | Attrito viscoso . . . . .  | 19        |
| 2.7      | Piano inclinato . . . . .  | 22        |
| 2.8      | Forza elastica . . . . .   | 23        |
| 2.9      | Pendolo semplice . . . . .   | 23        |
| 2.10     | Lavoro di una forza . . . . .  | 24        |
| 2.10.1   | Potenza . . . . .  | 25        |
| 2.10.2   | Lavoro come variazione di energia cinetica . . . . .                 | 25        |
| 2.10.3   | Lavoro della forza gravitazionale . . . . .                          | 25        |
| 2.10.4   | Lavoro della forza elastica . . . . .                                | 26        |
| 2.10.5   | Lavoro della forza d'attrito radente . . . . .                       | 26        |
| 2.10.6   | Lavoro di forze conservative e non conservative . . . . .            | 27        |
| 2.11     | Momento angolare . . . . .   | 27        |
| 2.11.1   | Momento di una forza . . . . .                                       | 29        |
| 2.12     | Teorema dell'impulso angolare . . . . .                              | 29        |
| <b>3</b> | <b>Moti relativi</b>   | <b>31</b> |
| 3.1      | Teorema delle velocità relative . . . . .                            | 31        |

|                     |           |
|---------------------|-----------|
| <b>Bibliografia</b> | <b>33</b> |
|---------------------|-----------|



## Chapter 1

### Cinematica del punto materiale

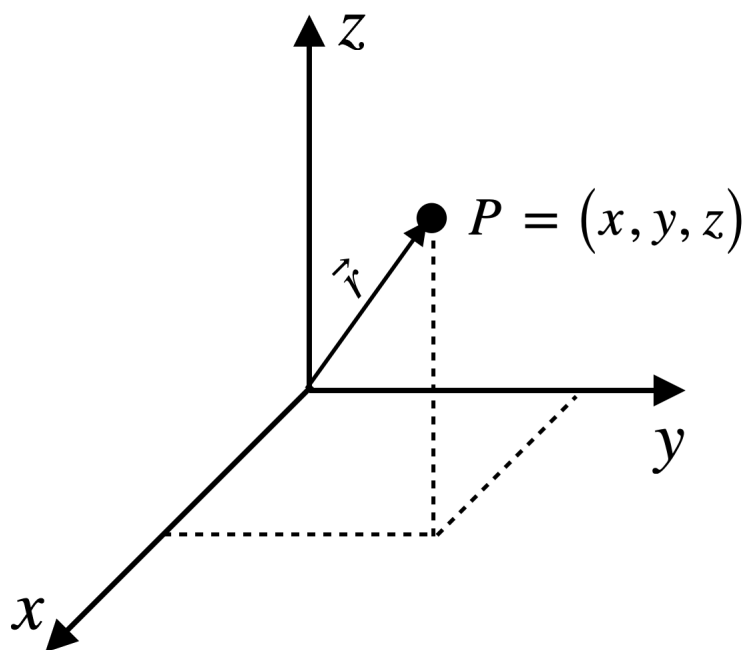


Figure 1.1: Sistema di riferimento cartesiano: punto materiale ( $P$ ), raggio vettore  $\vec{r}$ .

#### 1.1 Moto rettilineo uniforme

Un moto rettilineo uniforme è un moto che avviene lungo una retta a velocità costante, dunque può sempre essere ricondotto ad un moto unidimensionale.

Supponiamo di avere dunque un punto materiale nello spazio, che si muove di velocità generica costante. Ricaviamo le equazioni del moto:

$$\vec{v}_{(t)} = \vec{v}_0 = \text{cost} \qquad \vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad (1.1)$$

Integrando tra l'istante iniziale e quello finale otterremo la legge oraria di un moto rettilineo uniforme:

$$\vec{x}_{(t)} = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t dt' \vec{v}_{(t')} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{x}_{(t)} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0)} \qquad (1.2)$$

Dove  $t_0$  ed  $\vec{x}_0$  sono rispettivamente, istante e posizione iniziali.

## 1.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

In questo caso è l'accelerazione ad essere costante nel tempo ne segue che:

$$\vec{a}_{(t)} = \vec{a}_0 \quad \vec{a}_{(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (1.3)$$

Per ricavare la legge oraria del moto uniformemente accelerato, dobbiamo integrare due volte nel tempo, dato che l'accelerazione è la derivata seconda del vettore  $\vec{x}$ .

$$\vec{v}_{(t)} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}_{(t')} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{x}_{(t)} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_0 (t - t_0)^2} \quad (1.4)$$

### 1.2.1 Relazione tra velocità ed accelerazione in funzione dello spazio

Ora vedremo un modo per legare le grandezze velocità ed accelerazione, considerando la loro dipendenza dalla posizione invece che dal tempo.

In questo esempio però ci mettiamo nel sistema di riferimento in cui il moto si svolge lungo una retta, che chiameremo asse  $x$ .

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^v dv' v' = \int_{x_0}^x dx' a_{(x')} \quad (1.5)$$

Se l'accelerazione non dipende dalla posizione ( $a_{(x)} = a_0$ ), otterremo:

$$\boxed{v_{(x)}^2 = v_0^2 + 2a_0 (x - x_0)} \quad (1.6)$$

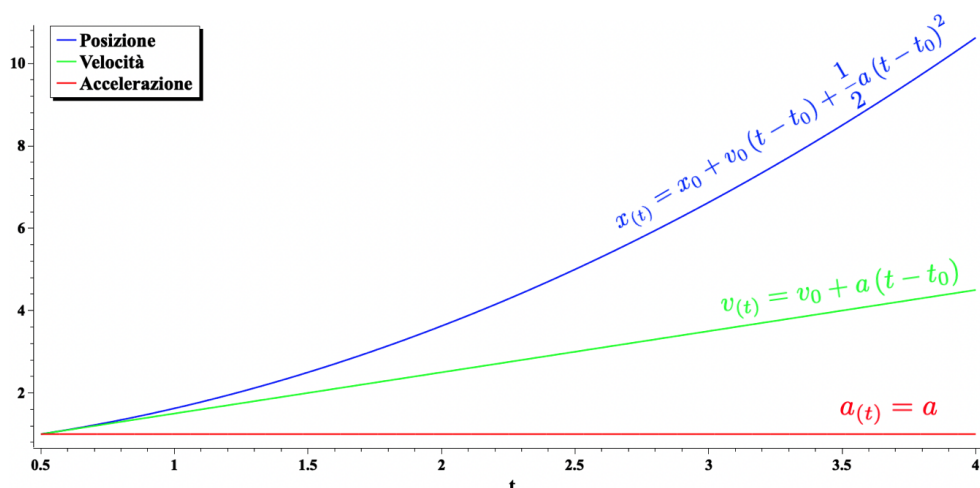


Figure 1.2: Un esempio del grafico di accelerazione (rosso), velocità (verde) e posizione (blu), nel moto uniformemente accelerato unidimensionale. L'asse delle ascisse rappresenta il tempo, mentre quello delle ordinate la variabile dipendente.



### 1.3 Moto armonico semplice

Il moto armonico semplice è un tipo di moto, periodico, che avviene in una regione confinata dello spazio.

Prendiamo il caso in cui un punto materiale oscilla tra una posizione minima ed una massima, nel caso più generale possibile possiamo scrivere la sua legge oraria utilizzando una funzione armonica.

$$\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \phi)} \quad (1.7)$$

Dove  $A$  è l'ampiezza di oscillazione, il punto si muove tra  $x = -A$  ed  $x = A$ .  $\omega$  è la pulsazione,  $\omega = 2\pi\nu$  dove  $\nu$  è la frequenza ed indica in numero di oscillazioni effettuate in un secondo.

$\phi$  è lo sfasamento iniziale, è collegato alla posizione iniziale tramite:  $x_0 := x(0) = A \sin \phi$ . Una volta nota la legge oraria è immediato calcolare velocità ed accelerazione, dato che basta derivare rispetto al tempo.

Introduciamo ora una notazione molto utilizzata in fisica ovvero, l'utilizzo di un punto posto sopra il simbolo di una grandezza per indicarne la derivata totale rispetto al tempo.

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (1.8)$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (1.9)$$

Possiamo notare che esiste una relazione tra accelerazione e posizione.

#### 1.3.1 Equazione differenziale dell'oscillatore armonico

Come si può notare chiaramente, l'accelerazione è direttamente proporzionale alla posizione.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0} \quad (1.10)$$

La (1.10) è un'equazione differenziale al secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenea. Che unita alle due condizioni iniziali:  $x(0) = A \sin \phi$  ed  $\dot{x}(0) = A\omega \cos \phi$  ha come soluzione la (1.7).

Ora che sappiamo che  $a(x) = -\omega^2 x$  possiamo utilizzare la formula (1.5) per ottenere  $v(x)$ .

$$v_{(x)}^2 = v_0^2 - \omega^2 (x^2 - x_0^2) \quad (1.11)$$

### 1.4 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Questo tipo di moto si incontra quando si ha un'accelerazione proporzionale alla velocità con coefficiente negativo (altrimenti sarebbe forzato esponenzialmente nel tempo). Introduciamo quindi un parametro di smorzamento  $\beta > 0$ .

$$a(t) = -\beta v(t) = \dot{v}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{v}}{v} = -\beta \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^t dt' \frac{\dot{v}}{v} = -\beta \int_{t_0}^t dt' \quad (1.12)$$

$$\ln \left[ \frac{v(t)}{v_0} \right] = -\beta (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0 e^{-\beta(t-t_0)}} = \dot{x} \quad (1.13)$$



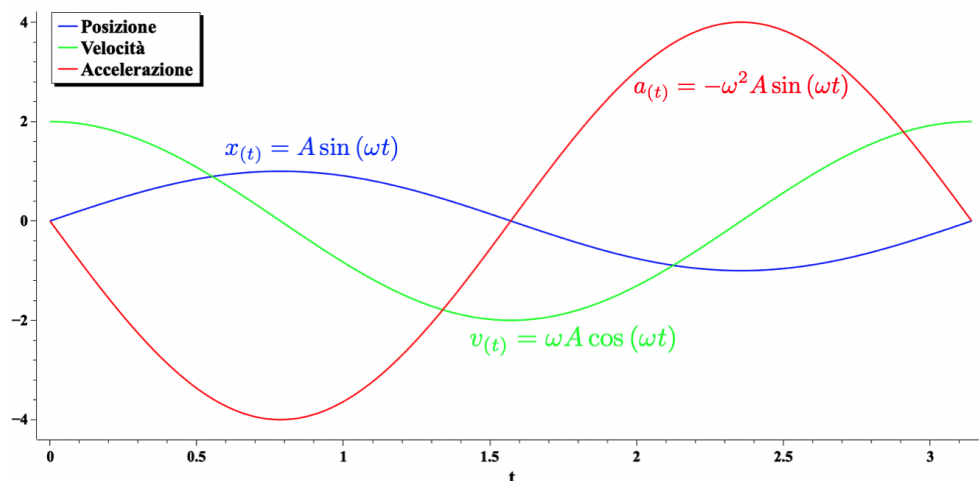


Figure 1.3: Un esempio del grafico di accelerazione (rosso), velocità (verde) e posizione (blu), nel moto armonico semplice. L'asse delle ascisse rappresenta il tempo, mentre quello delle ordinate la variabile dipendente.

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}] \quad (1.14)$$

$$a = -\beta v = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow v(x) = v_0 - \beta(x - x_0) \quad (1.15)$$

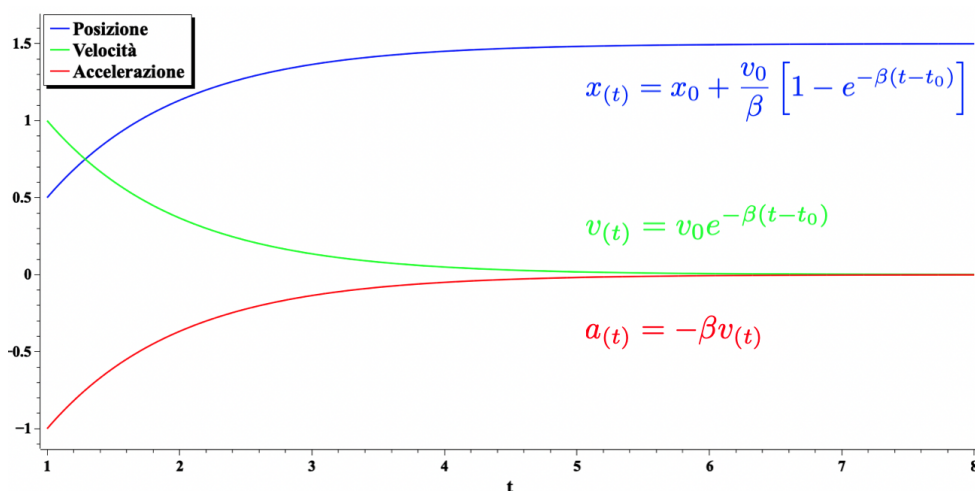


Figure 1.4: Un esempio del grafico di accelerazione (rosso), velocità (verde) e posizione (blu), nel moto smorzato esponenzialmente. L'asse delle ascisse rappresenta il tempo, mentre quello delle ordinate la variabile dipendente.

## 1.5 Coordinate curvilinee e coordinate polari nel piano

In molti casi in fisica risulta particolarmente conveniente utilizzare tipologie diverse di coordinate, rispetto a quelle cartesiane. Due di queste sono le coordinate curvilinee e





quelle polari.

Le coordinate cartesiane identificano la posizione di un punto materiale mediante tre coordinate, corrispondenti alla proiezione del punto lungo gli assi cartesiani. Utilizzando i versori canonici  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  possiamo scrivere:

$$\vec{x} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \quad (1.16)$$

Le coordinate curvilinee identificano come posizione, la distanza effettivamente percorsa dal punto materiale, e utilizzano come direzioni principali quella tangente ( $\hat{\tau}$ ) e quella normale ( $\hat{n}$ ).

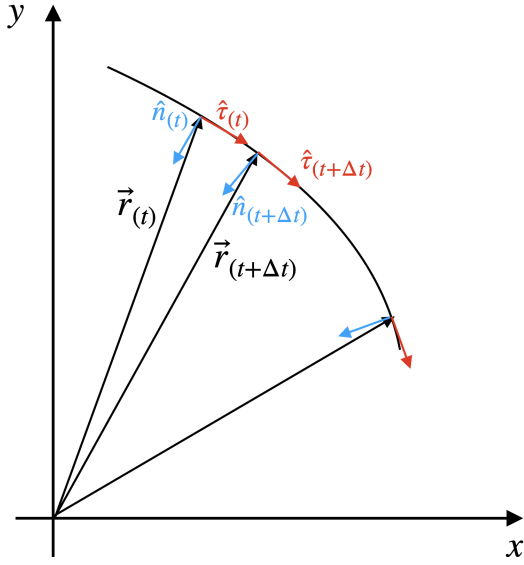


Figure 1.5: Rappresentazione dei versori tangente e normale lungo un tratto di curva.

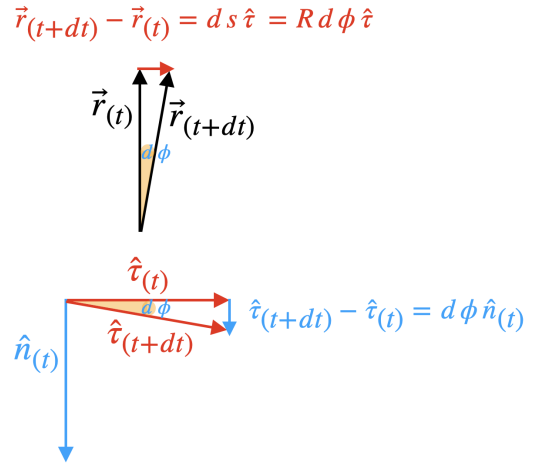


Figure 1.6: Rappresentazione grafica della variazione infinitesima del vettore  $\vec{r}$  e del versore  $\hat{\tau}$ .



$$d\vec{x} = ds\hat{\tau} \Rightarrow \vec{v} = \dot{s}\hat{\tau} = v\hat{\tau} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{s}\hat{\tau} + \dot{s}\dot{\phi}\hat{n} \quad (1.17)$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}\dot{s} = \dot{s}\frac{d\phi}{Rd\phi} = \frac{v}{R} \quad (1.18)$$

$$\boxed{\vec{v} = v\hat{\tau}} \quad \boxed{\vec{a} = \dot{v}\hat{\tau} + \frac{v^2}{R}\hat{n} = a_t\hat{\tau} + a_n\hat{n}} \quad (1.19)$$

L'accelerazione in coordinate curvilinee ha due componenti, una tangente ed una normale o centripeta. La velocità invece è sempre tangente alla traiettoria percorsa. Per quanto riguarda invece le coordinate polari, si scelgono come direzioni principali quella radiale ( $\hat{r}$ ) e quella trasversa ( $\hat{\phi}$ ).

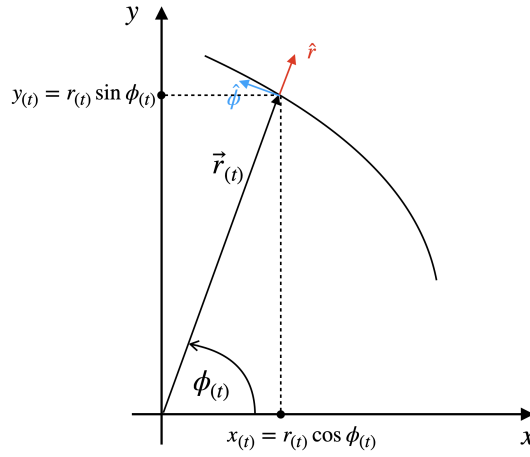


Figure 1.7: Rappresentazione dei versori tangente e normale lungo un tratto di curva.

$$\boxed{\vec{x} = r\hat{r}} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}} \quad (1.20)$$

Per ottenere l'espressione dell'accelerazione in coordinate polari è necessario svolgere alcuni calcoli.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\frac{d\hat{\phi}}{dt} \quad (1.21)$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\phi}\hat{\phi} \quad \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{r} \quad (1.22)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi} \quad (1.23)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\phi}) \right] \hat{\phi} = a_r\hat{r} + a_\phi\hat{\phi}} \quad (1.24)$$



## 1.6 Moto circolare uniforme

Un moto circolare è un moto planare in cui il punto materiale descrive come traiettoria una circonferenza. Esso può essere scomposto in due moti armonici. Il moto circolare uniforme è chiamato in questo modo perché avviene a velocità angolare ( $\omega$ ) costante. Usiamo come coordinate principali quelle curvilinee.

$$s(t) = R\phi(t) \Rightarrow \phi = \frac{s}{R} \Rightarrow \omega = \dot{\phi} = \frac{v}{R} \quad (1.25)$$

Otteniamo la relazione:

$$\boxed{v = \omega R} \quad (1.26)$$

Ora esattamente come abbiamo fatto nel paragrafo (1.1) calcoliamo la legge oraria per la variabile  $\phi$ .

$$\omega(t) = \dot{\phi} \Rightarrow \phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^t dt' \omega(t') \quad \omega(t) = \omega_0 \quad (1.27)$$

$$\boxed{\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 (t - t_0)} \quad (1.28)$$

$$v = \omega_0 R \Rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega_0^2 R \quad (1.29)$$

Il periodo di rotazione è:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi R}{v} \quad (1.30)$$

## 1.7 Moto circolare uniformemente accelerato

Il moto circolare non uniforme si ha quando la velocità angolare non è costante nel tempo. Questo comporta che la componente tangente di  $\vec{a}$  non è nulla. Nel caso in cui  $\omega$  è lineare nel tempo si avrà un moto circolare uniformemente accelerato. Definiamo quindi l'accelerazione angolare:

$$\alpha(t) = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \Rightarrow a_t = \dot{v} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \alpha R \quad (1.31)$$

Di conseguenza avremo che:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t dt' \alpha(t') = \omega_0 + \alpha_0 (t - t_0) \Rightarrow \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha_0 (t - t_0)^2 \quad (1.32)$$

Esiste anche un analogo della formula (1.6).

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\phi} \dot{\phi} \Rightarrow \omega_{(\phi)}^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_0 (\phi - \phi_0) \quad (1.33)$$

Utilizzando un formalismo vettoriale possiamo scrivere che:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \Rightarrow |\vec{v}| = \omega R \quad (1.34)$$



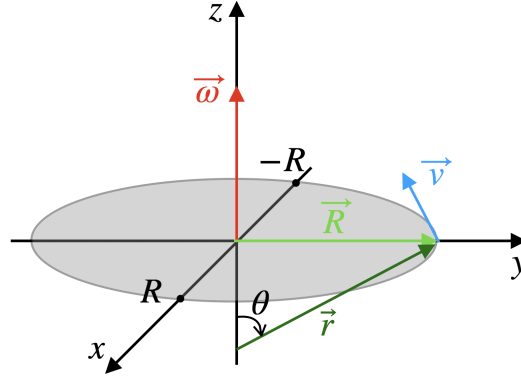


Figure 1.8: Schema di un moto circolare con la rappresentazione del vettore velocità angolare.

Se trasliamo verso il l'origine degli assi otteniamo che:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \omega r \sin \theta = \omega R \quad (1.35)$$

Ne segue che dato un vettore generico rotante  $\vec{A}$  avremo che:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (1.36)$$

Infine scriviamo la forma dell'accelerazione.

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (1.37)$$

Come possiamo notare se consideriamo il caso particolare in cui  $\alpha = 0$  otteniamo:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{R}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{R} = \omega^2 R \hat{n} = \frac{v^2}{R} \hat{n} \quad (1.38)$$

Possiamo decomporre il moto circolare in due moti armonici, uno per l'asse  $x$  ed uno per l'asse  $y$ .

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \phi(t) \\ y(t) = R \sin \phi(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -R\dot{\phi} \sin \phi(t) \\ \dot{y}(t) = R\dot{\phi} \cos \phi(t) \end{cases} \quad (1.39)$$

## 1.8 Moto parabolico

Un moto parabolico è il moto che compie un proiettile lanciato con una certa velocità  $\vec{v}_0$ , sottoposto ad un campo di forze uniforme e costante, ovvero il campo gravitazionale in prossimità della superficie terrestre.

Il moto parabolico può essere scomposto in due moti disaccoppiati, un moto rettilineo uniforme lungo l'asse  $x$  ed un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse  $y$ . Questo perché non sono presenti forze orizzontali, e l'unica forza agente sul corpo è quella gravitazionale in direzione verticale. Dunque è presente un'accelerazione pari a:  $\vec{a} = -g\hat{j}$ . Per semplicità poniamo l'istante iniziale  $t_0 = 0$ .



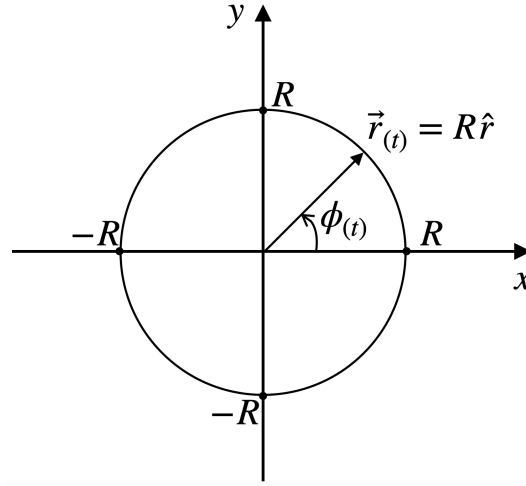


Figure 1.9: Rappresentazione della traiettoria, del raggio vettore e della variabile angolare  $\phi$  nel moto circolare.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos \phi t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin \phi t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos \phi \\ \dot{y}(t) = v_0 \sin \phi - gt \end{cases} \quad (1.40)$$

Si può anche ricavare l'equazione della traiettoria, isolando il tempo dalla legge oraria per  $x$  ed inserendolo nell'equazione per  $y$ .

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \phi} \Rightarrow y(x) = y_0 + \tan \phi (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \phi} (x - x_0)^2 \quad (1.41)$$

Come si può notare è l'equazione di una parabola centrata in  $x_0$  con coefficiente del termine di secondo grado sempre negativo, stante ad indicare che la traiettoria parabolica ha sempre la concavità rivolta verso il basso, come è giusto che sia dato che il punto materiale dovrà cadere a terra.

Imponendo la  $y$  uguale a zero, possiamo ricavare il tempo di volo.

$$y_0 + v_0 \sin \phi \tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{v_0}{g} \sin \phi + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \phi + 2\frac{y_0}{g}} \quad (1.42)$$

Calcolando  $x(\tau)$  oppure imponendo uguale a zero  $y(x)$ , otterremo la gittata del proiettile, ovvero la massima distanza percorsa lungo l'asse orizzontale.

$$R = x_0 + \frac{v_0^2}{g} \sin(\phi) \cos(\phi) + v_0 \cos \phi \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \phi + 2\frac{y_0}{g}} \quad (1.43)$$

Se consideriamo il caso in cui il proiettile parte da terra, abbiamo che  $y_0 = 0$  quindi la gittata diventerà:

$$R = x_0 + 2\frac{v_0^2}{g} \sin(\phi) \cos(\phi) = x_0 + \frac{v_0^2}{g} \sin(2\phi) \quad (1.44)$$



Il valore massimo di questa  $R$  si ottiene quando il  $\sin(2\phi)$  è pari ad 1, dunque la gittata massima si otterrà per  $\phi = 45^\circ$ . Dobbiamo ricordare che nel caso in cui  $x_0 \neq 0$ ,  $R$  rappresenta ovviamente l'ascissa del punto in cui il proiettile cade a terra. Quindi per calcolare la distanza effettivamente percorsa, si deve considerare la differenza  $R - x_0$ .

Per quanto riguarda invece la quota massima raggiunta dal proiettile, bisogna annullare la  $\dot{y}(t)$  per ricavare il tempo in cui si raggiunge tale quota (velocità verticale nulla).

$$t^* = \frac{v_0}{g} \sin \phi \quad \Rightarrow \quad h = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \phi \quad (1.45)$$

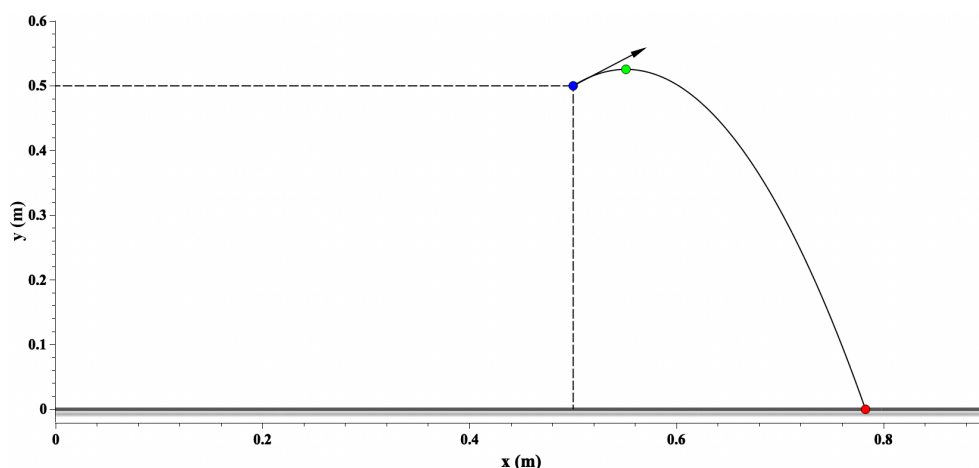


Figure 1.10: Esempio di una traiettoria di un moto parabolico generico. Sono stati riportati il punto iniziale in blu, il punto a quota massima in verde ed il punto ad ascissa massima.



## Chapter 2

# Dinamica del punto materiale

### 2.1 Leggi di Newton

1. Prima legge di Newton (Principio d'inerzia): Un corpo non soggetto a forze esterne non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in quiete o in moto rettilineo uniforme.
2. Seconda legge di Newton: La somma delle forze che agiscono su un corpo è proporzionale all'accelerazione del corpo stesso, mediante un coefficiente chiamato massa inerziale.

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \quad (2.1)$$

3. Terza legge di Newton (Principio di azione e reazione): Se un corpo  $A$  esercita una forza  $F$  su un corpo  $B$ , allora  $B$  esercita una forza  $-F$  su  $A$ . Quindi la forza ha le unità di misura di una massa per una lunghezza per un tempo alla meno due.

L'unità di misura della forza è il Newton ( $N$ ) ed è definito come ( $Kg \frac{m}{s^2}$ ).

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad [F] = M \cdot L \cdot T^{-2} \quad \Rightarrow \quad 1N := 1Kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

### 2.2 Quantità di moto

Una grandezza molto importante che si introduce in dinamica è la quantità di moto o impulso o momento (lineare). La quantità di moto di un corpo è definita come il prodotto tra la sua massa e la sua velocità, dunque nel sistema internazionale si misura in chilogrammi per metro al secondo.

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad [p] = M \cdot L \cdot T^{-1} \quad (2.2)$$

Nel caso in cui la massa dell'oggetto sia costante nel tempo, ovvero nella maggior parte dei casi che incontreremo, derivando l'impulso rispetto al tempo otterremo che:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (2.3)$$

Quindi la seconda legge di Newton nel caso più generale, identifica la forza come la derivata temporale della quantità di moto.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad (2.4)$$

## 2.3 Teorema dell'impulso

Integrando l'equazione (2.4) possiamo ricavare la variazione della quantità di moto tra istante finale e istante iniziale che chiameremo impulso ( $\vec{J}$ ).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^t dt' \frac{d\vec{p}}{dt'} = \int_{t_0}^t dt' \vec{F} \Rightarrow \vec{p}_{(t)} - \vec{p}_{(t_0)} = \int_{t_0}^t dt' \vec{F} \quad (2.5)$$

$$\boxed{\vec{J} = \int_{t_0}^t dt' \vec{F}} \quad (2.6)$$

Per il teorema della media, il valor medio della forza è proprio il rapporto tra variazione di quantità di moto e intervallo di tempo.

$$\vec{F}_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t dt' \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad (2.7)$$

- Se  $\vec{F}$  è costante nel tempo allora:

$$\vec{J} = \vec{F} \Delta t \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{J} \Rightarrow \Delta \vec{v} = \frac{\vec{J}}{m} \quad (2.8)$$

- Se  $\vec{F}$  è nulla allora:

$$\Delta \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{(t)} = \text{cost} \quad (2.9)$$

In assenza di forze applicate la quantità di moto di un corpo si conserva.

## 2.4 Condizione di equilibrio statico

Se su un corpo agiscono più forze, diremo che il corpo è in equilibrio statico se e solo se la risultante delle forze (la somma) è nulla.

Supponiamo di avere un corpo soggetto ad  $n$  forze, se chiamiamo la forza  $i$ -esima:  $\vec{F}_i$ , la risultante sarà:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m \vec{a}_i = m \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \quad \text{eq. statico} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{0} \quad (2.10)$$





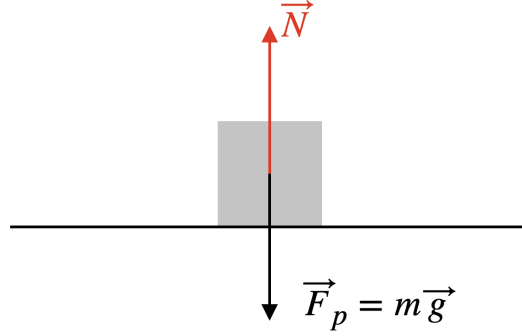


Figure 2.1: Corpo in equilibrio soggetto alla forza peso ed alla reazione vincolare.

## 2.5 Forza di reazione vincolare

Ogni volta che un corpo soggetto ad una forza incontra un vincolo, quest'ultimo esercita per il principio di azione e reazione una forza uguale e opposta, in modo tale da bilanciare la forza applicata. La forza di reazione vincolare è chiamata anche forza di reazione normale, dato che è ortogonale al vincolo ed infatti è indicata con la lettera  $\vec{N}$ .

In questo caso abbiamo solo due forze, la forza peso e la forza di reazione vincolare e sono entrambe dirette lungo la stessa direzione, ma di verso opposto.

$$\vec{N} + \vec{F}_p = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad N - F_p = N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = mg} \quad (2.11)$$

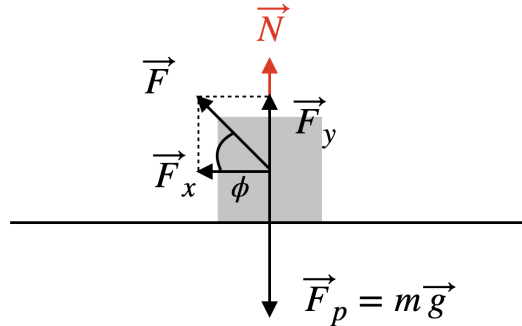


Figure 2.2: Corpo soggetto alla forza peso, alla forza  $\vec{F}$  ed alla reazione vincolare.

Nella situazione rappresentata in figura (2.2), notiamo che l'aggiunta di una terza forza nel sistema modifica l'intensità di  $\vec{N}$ . Per prima cosa bisogna scomporre lungo l'asse  $x$  ed  $y$  la forza  $\vec{F}$ .

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_x = -F \cos \phi < 0 \\ F_y = F \sin \phi > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Adesso procediamo con il calcolo scrivendo le equazioni di Newton.

$$x : \quad F_x = m\ddot{x} \quad (2.13)$$

$$y : \quad N - mg + F_y = m\ddot{y} = 0 \quad (2.14)$$



Ne segue che la reazione vincolare è: 
$$N = mg - F \sin \phi \quad (2.15)$$

Per quanto riguarda l'asse  $x$ , c'è solo la componente orizzontale di  $\vec{F}$  che agisce sul corpo, dunque, supponendo  $\phi$  ed il modulo della forza  $F$  costanti nel tempo e  $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ , il corpo si muove di moto uniformemente accelerato lungo la direzione negativa dell'asse  $x$ . Con accelerazione pari a:  $a = \frac{F_x}{m} = -\frac{F}{m} \cos \phi$ .

## 2.6 Forza d'attrito

Per capire cosa sia una forza d'attrito consideriamo ancora il caso raffigurato in figura (2.2). La conclusione a cui siamo giunti, ovvero che il corpo si muove di moto uniformemente accelerato, implica l'aver considerato che non ci sia interazione tra il corpo ed il vincolo, lungo la direzione  $x$ . Inoltre è stato completamente trascurato l'effetto dell'aria sul corpo durante il moto. In realtà esistono tre tipi di forze, forze d'attrito, che migliorano la descrizione del problema precedentemente trattato.

Le forze d'attrito radente statico e dinamico e la forza d'attrito viscoso.

### 2.6.1 Attrito statico

La forza d'attrito radente statico è la responsabile del fatto che un corpo, posto su un piano, ha bisogno di una certa forza iniziale per cominciare il moto. Se questo tipo di forza non esistesse basterebbe una forza piccola a piacere per mettere un corpo in moto. La forza d'attrito statico è caratterizzata dal fatto che ha un valore variabile, da un minimo di zero, quando non si applica nessuna forza esterna, ad un massimo che segneremo con  $F_s$ .

Dunque applicando gradualmente una forza esterna, avremo che la forza d'attrito aumenterà anch'essa in modo graduale, bilanciando perfettamente la forza esterna, fino al suo valore massimo.

Quindi ritornando al caso della figura (2.2) il corpo inizia a muoversi solo se  $F \cos \phi > F_s$ .

$$F_s = \mu_s N \quad (2.16)$$

$$-F \cos \phi + F_s = -F \cos \phi + \mu_s N < 0 \quad \Rightarrow \quad F \cos \phi > \mu_s (mg - F \sin \phi) \quad (2.17)$$

Dove  $\mu_s$  è chiamato coefficiente d'attrito statico. Ora supponendo di mantenere fissato l'angolo  $\phi$  calcoliamo quali valori deve assumere  $F = |\vec{F}|$  per mettere in moto l'oggetto.

$$F > \frac{\mu_s}{\mu_s \sin \phi + \cos \phi} mg \quad (2.18)$$

### 2.6.2 Attrito dinamico

L'attrito dinamico invece entra in gioco proprio quando la forza esterna supera il valore della forza d'attrito massima. La forza d'attrito dinamico è una forza costante diretta in direzione opposta a quella della velocità dell'oggetto.

Quindi una volta che la forza esterna supera il valore di  $F_s$ , la forza d'attrito statico si annulla e si "attiva" la forza d'attrito dinamico.



$$\vec{F}_d = -\mu_d N \hat{u}_v \quad (2.19)$$

Supponiamo di avere una forza che soddisfi la (2.18) ne segue che:

$$-F \cos \phi + \mu_d N = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \mu_d g - \frac{F}{m} (\mu_d \sin \phi + \cos \phi) \quad (2.20)$$

L'accelerazione del corpo subisce una modifica. Trascurare l'attrito significa considerare  $\mu_{s,d} \ll 1$ , ed infatti in questa approssimazione riotteniamo il caso discusso nel paragrafo (2.5), ovvero:

$$F > 0 \quad \ddot{x} = -\frac{F}{m} \cos \phi \quad (2.21)$$

Un'ultima cosa da dire è che il coefficiente d'attrito statico  $\mu_s$  è sempre maggiore del coefficiente d'attrito dinamico  $\mu_d$ , infatti è più facile mantenere in moto il corpo, piuttosto che spostarlo dalla sua posizione di quiete.

### 2.6.3 Attrito viscoso

La forza di attrito viscoso è dovuto alla resistenza che oppone un fluido quando un corpo è in movimento al suo interno. Se il fluido è in regime laminare (non turbolento) la forza di attrito viscoso può essere stimata con la seguente formula.

$$\vec{F}_v = -b\vec{v} \quad (2.22)$$

Dove  $b$  è il coefficiente di attrito viscoso ed è collegato alle proprietà geometriche del corpo ed alla viscosità del fluido in questione.

$$b = k\eta \quad (2.23)$$

Dove  $\eta$  è la viscosità del fluido, ha le dimensioni di una pressione per un tempo  $(Pa \cdot s) = (N \cdot m^{-2} \cdot s)$ . Mentre  $k$  è il fattore geometrico che dipende dalla forma del corpo ed è misurato in metri, ad esempio per una sfera  $k = 6\pi R$ . Se sul corpo non agiscono altre forze oltre a quella d'attrito viscoso, allora abbiamo anche un'accelerazione proporzionale alla velocità e dunque un moto smorzato esponenzialmente, come quello incontrato nel paragrafo (1.4).

$$\vec{F}_v = -k\eta\vec{v} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{k\eta}{m}\vec{v} = -\beta\vec{v} \quad (2.24)$$

È interessante considerare il caso di caduta libera in presenza di attrito viscoso. Scegliamo un sistema di riferimento unidimensionale rivolto verso il basso, e lasciamo cadere un oggetto a partire dall'origine.

Quindi scrivendo la somma delle forze che agiscono su  $m$  otterremo:

$$mg - bv = m\dot{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = g - \frac{b}{m}v \quad (2.25)$$

Ora definiamo un tempo caratteristico del sistema, che chiameremo  $\tau$ . Questo fattore determina una scala temporale del moto. La regione in cui  $t \gg \tau$  è chiamata regime, mentre la zona in cui  $t \ll \tau$  è chiamata transiente.



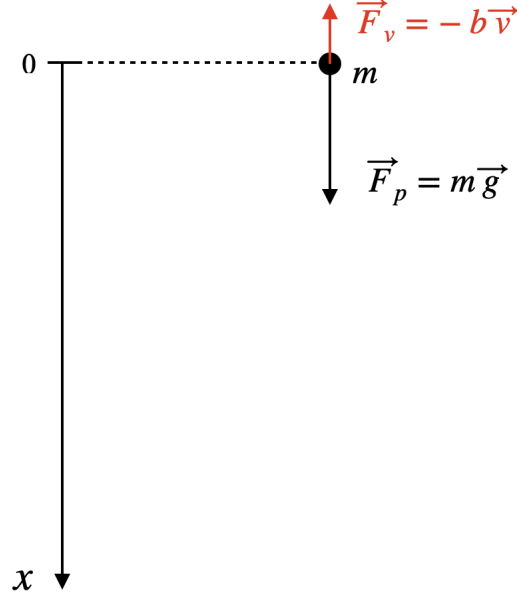


Figure 2.3: Corpo di massa  $m$  soggetto alla forza peso ed alla forza di attrito viscoso.

$$\tau := \frac{m}{b} = \frac{1}{\beta} \quad (2.26)$$

Andiamo ora a ricavare la velocità in funzione del tempo.

$$\dot{v} = g - \frac{b}{m}v = g - \frac{v}{\tau} = -\frac{1}{\tau}(v - g\tau) \Rightarrow \frac{\dot{v}}{v - g\tau} = -\frac{1}{\tau} \quad (2.27)$$

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{v - g\tau} = -\int_0^t \frac{dt'}{\tau} \Rightarrow \ln \left[ 1 - \frac{v(t)}{g\tau} \right] = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \boxed{v(t) = g\tau \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)} \quad (2.28)$$

Integrando nuovamente si ottiene l'equazione del moto:

$$x(t) = g\tau \int_0^t dt' \left( 1 - e^{-\frac{t'}{\tau}} \right) \Rightarrow \boxed{x(t) = g\tau \left[ t + \tau \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \right]} \quad (2.29)$$

Il valore a regime di  $v(t)$  si calcola facendo il limite per  $t \gg \tau \Rightarrow$

$$v_\infty := v_{(t \gg \tau)} = g\tau \quad (2.30)$$

La velocità tende a diventare costante in quanto la forza d'attrito tende a bilanciare la forza peso dunque il corpo tenderà a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Se invece sviluppiamo sia  $x(t)$  che  $v(t)$  per  $t \ll \tau$ , possiamo osservare che l'effetto della forza d'attrito è ancora troppo piccolo e quindi le curve posso essere approssimate con le equazioni della caduta libera senza attrito.



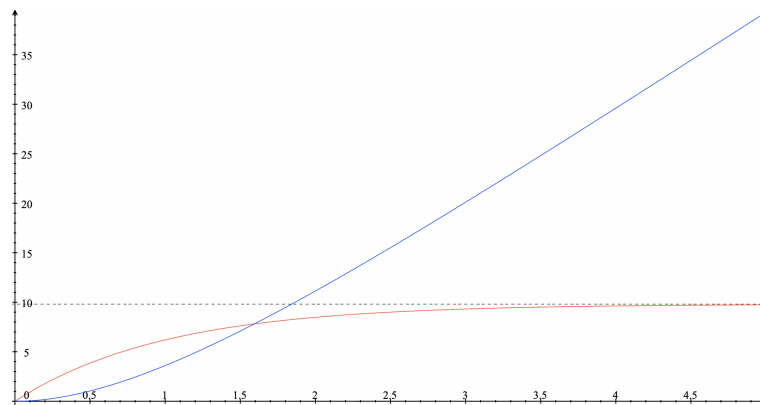


Figure 2.4: Spazio percorso (blu) e velocità (rosso) di un corpo in caduta libera con attrito viscoso. La linea orizzontale tratteggiata rappresenta il valore asintotico (a regime) della velocità. L'asse delle ascisse rappresenta il tempo in unità di  $\tau$ .

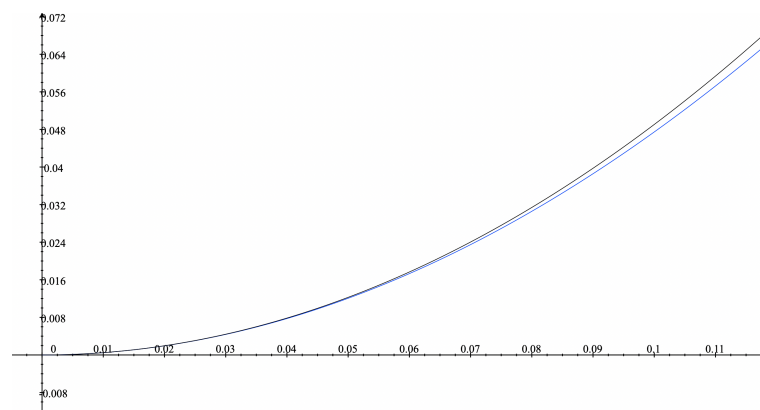


Figure 2.5: Approssimazione per piccoli tempi, la curva nera è l'equazione della posizione in funzione del tempo in caduta libera senza attrito:  $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

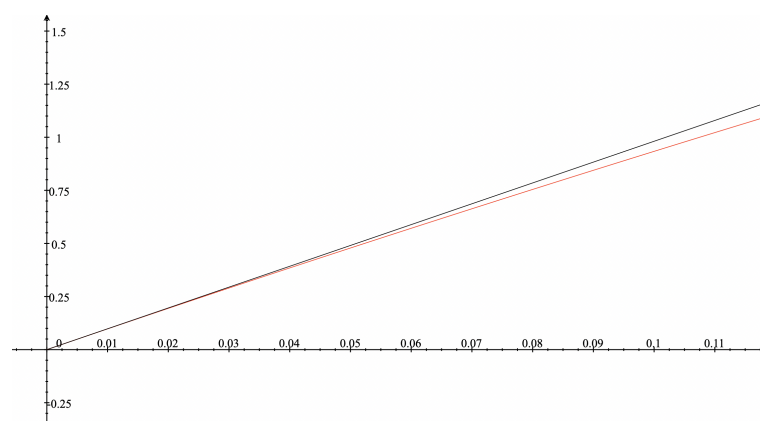


Figure 2.6: Approssimazione per piccoli tempi, la curva nera è l'equazione della velocità in funzione del tempo in caduta libera senza attrito:  $v(t) = gt$



## 2.7 Piano inclinato

Vogliamo studiare il problema di un punto materiale di massa  $m$  in caduta libera, lungo un piano inclinato con pendenza  $\theta$ . Studieremo prima il caso senza attrito e poi il caso con attrito, trascureremo in entrambi i casi l'attrito viscoso con l'aria.

Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse  $x$  parallelo al piano e l'asse ortogonale ad esso, come mostrato in figura (2.7).

Nel caso senza attrito le forze in gioco sono: la forza peso diretta in direzione verticale e scomponibile in  $\vec{F}_{px}$  ed  $\vec{F}_{py}$ , e la forza di reazione vincolare diretta lungo la direzione positiva dell'asse  $y$ . Dunque avremo che:

$$x : \quad mg \sin \theta = m\ddot{x} \quad y : \quad N - mg \cos \theta = 0 \quad (2.31)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_x = g \sin \theta \\ N = mg \cos \theta \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t^2 \quad (2.32)$$

Si ha un moto uniformemente accelerato con accelerazione  $g \sin \theta$ .

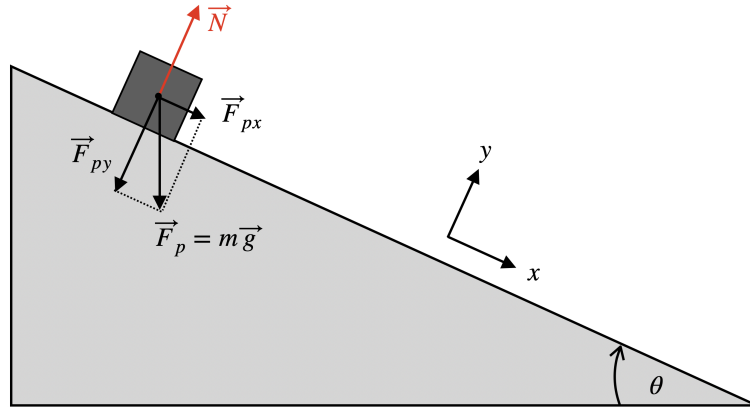


Figure 2.7: Rappresentazione di un piano inclinato con angolo  $\theta$  e rappresentazione del sistema di riferimento scelto, con la coordinata  $x$  parallela al piano e la  $y$  ortogonale.

Nel caso con attrito avremo un moto solo se la componente parallela della forza peso è maggiore della forza d'attrito massima:

$$mg \sin \theta > \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \boxed{\tan \theta > \mu_s} \quad (2.33)$$

Supponendo di trovarci in questa situazione, studiamo il caso dinamico:

$$x : \quad mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta = m\ddot{x} \Rightarrow \boxed{a_x = g (\sin \theta - \mu_d \cos \theta)} \quad (2.34)$$

Dato che  $\mu_d < \mu_s$ , non può verificarsi il caso in cui  $\tan \theta = \mu_d$  che annullerebbe l'accelerazione lungo  $x$ .



## 2.8 Forza elastica

La forza elastica è una forza di richiamo generata da una molla, quando viene discostata dalla sua posizione di equilibrio. Essa è proporzionale alla contrazione/dilatazione effettuata.

Quindi se supponiamo di avere un punto collegato ad una molla in posizione iniziale  $\vec{x}_0$ , e lo spostiamo fino al punto  $\vec{x}$ , allora la forza elastica sarà:

$$\vec{F}_e = -k(\vec{x} - \vec{x}_0) = -k\Delta x \cdot \hat{u}_x \quad (2.35)$$

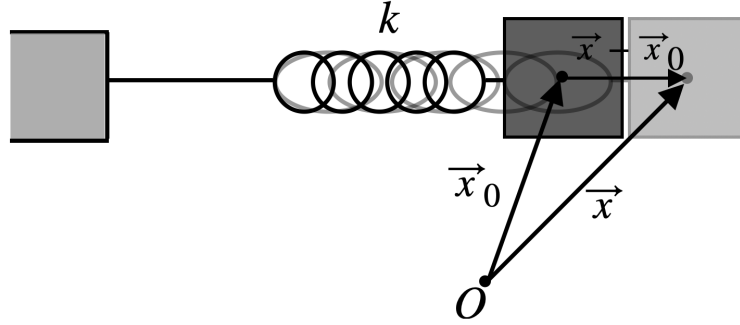


Figure 2.8: Rappresentazione dell'elongazione di una molla rispetto alla sua posizione di riposo.

La costante elastica  $k$  è caratteristica della molla ed è misurata in  $\frac{N}{m}$ . Se studiamo il caso dinamico in cui un corpo è soggetto alla sola forza elastica otterremo che:

$$F_x = m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \quad (2.36)$$

È l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico con  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  e periodo  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . La soluzione sarà come la (1.7), possiamo utilizzare la funzione coseno in quanto il punto parte da una posizione pari a  $\Delta x$ :

$$x(t) = \Delta x \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (2.37)$$

In realtà non è necessaria la presenza di una molla per avere una forza elastica, e quindi questo tipo di moto, ma qualsiasi sistema fisico in cui è presente una forza come quella in (2.35) è riconducibile ad un oscillatore armonico semplice.

## 2.9 Pendolo semplice

Il pendolo è un sistema fisico costituito da un punto materiale di massa ( $m$ ) sottoposto ad una forza costante, in questo caso la gravità, vincolato ad avere una certa distanza ( $L$ ) da un punto fisso.

Nel caso mostrato in figura (2.9), la distanza viene vincolata con un filo inestensibile teso con una tensione ( $\vec{T}$ ). Volgiamo studiare la legge oraria dell'angolo  $\theta$ , l'angolo tra l'asse verticale e la fune.



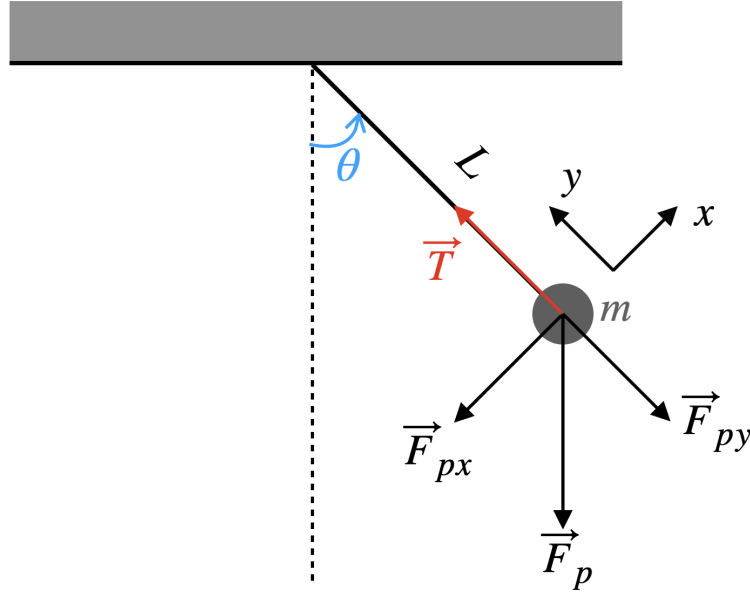


Figure 2.9: Rappresentazione di un pendolo inclinato di un certo angolo  $\theta$  rispetto alla verticale. È stato raffigurato anche il sistema di riferimento, con l'asse  $y$  parallelo al filo di lunghezza  $L$ , e l'asse  $x$  ortogonale ad esso.

Scriviamo dunque le equazioni di Newton nel sistema di riferimento mostrato in figura (2.9), con un asse parallelo alla fune ed uno ortogonale.

$$x : -mg \sin \theta = ma_t \quad y : T - mg \cos \theta = ma_n \quad (2.38)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (L\dot{\theta}) = L\ddot{\theta} \quad a_n = 0 \quad (2.39)$$

Lungo l'asse  $y$  il corpo è in equilibrio, mentre lungo l'asse  $x$  abbiamo la seguente equazione differenziale:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0} \quad (2.40)$$

Se consideriamo l'approssimazione di piccole oscillazioni, l'equazione differenziale appena ottenuta si riduce all'equazione dell'oscillatore armonico, in quanto:

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (2.41)$$

Dove la pulsazione propria del sistema è  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \dot{\theta}(t) = \omega_0 \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.42)$$

## 2.10 Lavoro di una forza

Il lavoro di una forza è la quantità di energia scambiata tra due sistemi, quando avviene uno spostamento per mezzo di una forza. Matematicamente è definito come l'integrale





della forza lungo una curva, ovvero il percorso lungo cui si sposta il corpo.

$$W = \int_{\gamma} d\vec{s} \cdot \vec{F} \quad (2.43)$$

Ne segue che la forza è sempre ortogonale allo spostamento, questa non compierà lavoro sul corpo. Se pensiamo ad  $\vec{F}$  come una risultante delle forze otterremo che:

$$W = \int_{\gamma} d\vec{s} \cdot \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} d\vec{s} \cdot \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n W_k \quad (2.44)$$

Il lavoro totale può essere visto come la somma dei lavori delle singole forze che costituiscono  $\vec{F}$ . Se il lavoro è positivo, allora si dice lavoro motore, mentre se è negativo si dice lavoro resistente. Il lavoro essendo un'energia è misurato nel S.I. con il ( $J$ ) Joule. Un Joule è definito come l'energia scambiata da una forza di un Newton, per compiere uno spostamento di un metro lungo la sua stessa direzione:  $1J = 1N \cdot 1m$ .

### 2.10.1 Potenza

La potenza esprime la velocità con cui viene trasferita una particolare forma di energia. Adesso parleremo di potenza meccanica, definita come la derivata rispetto al tempo del lavoro, ed è misurata in Watt ( $W$ ). Una potenza di un Watt trasferisce un Joule in un secondo.

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (2.45)$$

### 2.10.2 Lavoro come variazione di energia cinetica

Scriviamo il lavoro infinitesimo per una forza generica data da  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = ma_t ds = m\dot{v} ds = mv dv \quad (2.46)$$

Integrando otterremo che il lavoro per spostare il corpo dal punto  $A$  al punto  $B$  sarà:

$$W = \int_{v_A}^{v_B} mv dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (2.47)$$

Quindi definendo l'energia cinetica, l'energia associata al movimento di un corpo, come  $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ , otteniamo che:

$$W = K_B - K_A = \Delta K \quad (2.48)$$

### 2.10.3 Lavoro della forza gravitazionale

Prendiamo il caso in cui la forza peso faccia spostare un corpo di massa  $m$  da un punto  $A$  ad un punto  $B$ , a quota più bassa di  $A$ . Supponiamo che il corpo segua un percorso a piacere, purché vada da  $A$  a  $B$ . quindi prendo un asse verticale  $z$  diretto verso l'alto, otterremo che:

$$W = \int_A^B d\vec{s} \cdot \vec{F}_p = -mg \int_A^B ds \cos \theta = -mg \int_A^B dz = -mg(z_B - z_A) \quad (2.49)$$



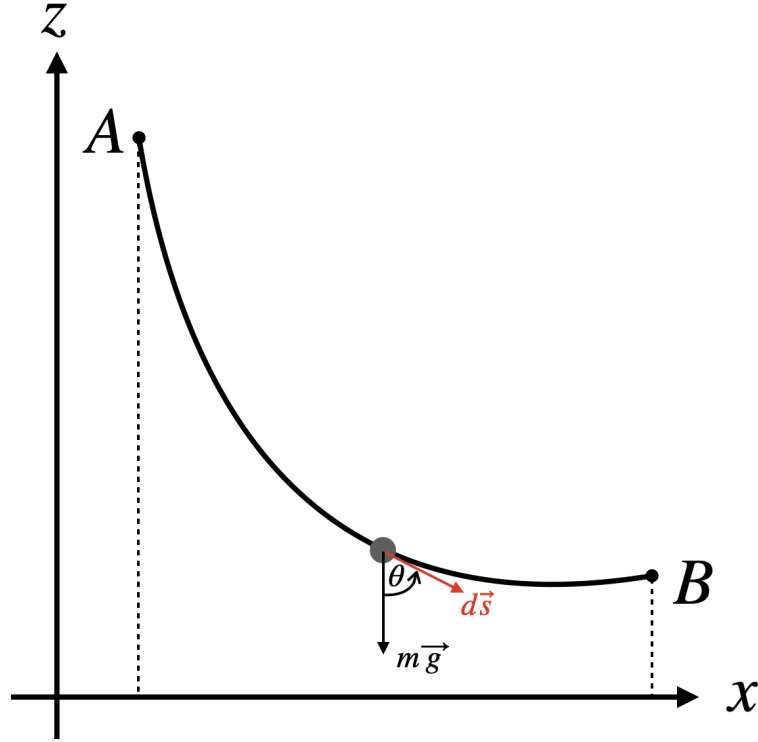


Figure 2.10: Rappresentazione del lavoro infinitesimo lungo un tratto elementare di curva  $d\vec{s}$  del forza gravitazionale  $\vec{F}_p = m\vec{g}$ .

Ovvero definendo l'energia potenziale gravitazionale come  $U = mgz$ , abbiamo che il lavoro è meno la variazione di energia potenziale:

$$W = U_A - U_B = -\Delta U \quad (2.50)$$

imponendo uguali le equazioni (2.48) e (2.50) otteniamo il principio di conservazione dell'energia meccanica  $E = K + U$ .

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow K_B - K_A = U_A - U_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow \boxed{E_A = E_B} \quad (2.51)$$

#### 2.10.4 Lavoro della forza elastica

Calcoliamo il lavoro di una forza elastica diretta lungo  $x$ :  $\vec{F}_e = -kx\hat{i}$ .

$$W = -k \int_A^B dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 \quad U_e = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow W = -\Delta U_e \quad (2.52)$$

#### 2.10.5 Lavoro della forza d'attrito radente

La forza d'attrito, essendo sempre diretta in verso opposto alla velocità produce un lavoro negativo, ovvero sempre resistente. L'integrale sulla curva dipende dal percorso scelto, al contrario delle forze conservative, e quindi in un percorso chiuso il lavoro d'attrito sarà diverso da zero.

$$\vec{F}_a = -\mu_d N \hat{u}_v \Rightarrow W_a = -\mu_d \int_A^B ds N = -\mu_d N \Delta s \quad (2.53)$$



### 2.10.6 Lavoro di forze conservative e non conservative

Come abbiamo visto, il lavoro di una forza conservativa, che ammette un'energia potenziale, non dipende dal percorso su cui si integra, ne segue che se scegliamo un percorso chiuso l'integrale sulla curva chiusa sarà sempre nullo.

Quindi se  $\vec{F}$  è una forza conservativa ne segue che:

$$\oint_{\gamma} d\vec{s} \cdot \vec{F} = 0 \quad (2.54)$$

Dunque in questi casi che l'energia meccanica si conserva, quindi l'energia meccanica nello stato iniziale è uguale all'energia meccanica nello stato finale:

$$E_i = E_f \quad (2.55)$$

Mentre nel caso in cui sono presenti forze non conservative, il lavoro delle forze non conservative non è nullo ed è pari alla variazione di energia meccanica. E dato che durante il processo si dissipa energia:

$$W_{NC} = \Delta E = E_f - E_i < 0 \quad (2.56)$$

Se prendiamo una generica forza  $\vec{F}_{(x,y,z)} = (F_x, F_y, F_z)$ , se supponiamo che essa sia conservativa possiamo scrivere che:

$$\int_A^B d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (2.57)$$

Ora se ammettiamo l'esistenza di un'energia potenziale, tale per cui la forza è il suo gradiente cambiato di segno:

$$\vec{F}_{(x,y,z)} = -\vec{\nabla} U_{(x,y,z)} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad (2.58)$$

Trovandoci in questa situazione avremo che:

$$\int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \int \vec{\nabla} U \cdot d\vec{x} = - \int dU = - [U_{(B)} - U_{(A)}] = -\Delta U \quad (2.59)$$

Come possiamo notare i risultati ottenuti nelle equazioni (2.50) e (2.52), sono in realtà molto più generali e, data una forza esprimibile come il gradiente di un'energia potenziale (cambiato di segno), si avrà che il lavoro da un punto  $A$  a un punto  $B$  seguendo una qualsiasi curva, sarà pari a meno la variazione di energia potenziale. Di conseguenza una volta appreso questo fatto, possiamo capire facilmente il perchè dell'equazione (2.54). Se si sceglie una curva chiusa, punto  $A$  coincide con il punto  $B$  dunque dato che l'energia potenziale iniziale e finale sono uguali, il lavoro è nullo.

## 2.11 Momento angolare

Il momento angolare è una grandezza molto importante in fisica, esso è definito come il prodotto vettoriale tra il raggio vettore ed il vettore impulso. È analogo alla quantità di moto in quanto, infatti esprime un concetto di resistenza non al cambio di velocità



lineare come nel caso dell'impulso, ma al cambiamento dello stato di rotazione di un corpo. Infatti se un corpo ha un momento angolare costante nel tempo, allora si muove di moto circolare uniforme. Mentre se il momento angolare varia nel tempo, esisterà un'accelerazione angolare.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (2.60)$$

È importante ricordare che il momento angolare è uno pseudo-vettore in quanto ha una forma diversa in base al polo rispetto al quale viene calcolato. Ad esempio se trasliamo l'origine degli assi  $O$  in  $O'$ , come mostrato in figura (2.11), otterremo che:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p} = (\vec{r} + \vec{t}) \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{t} \times \vec{p} = \vec{L} + \vec{t} \times \vec{p} \quad (2.61)$$

Quindi traslando il polo otterremo una variazione del momento angolare che è la seguente:

$$\vec{L}' - \vec{L} = \vec{t} \times \vec{p} \quad (2.62)$$

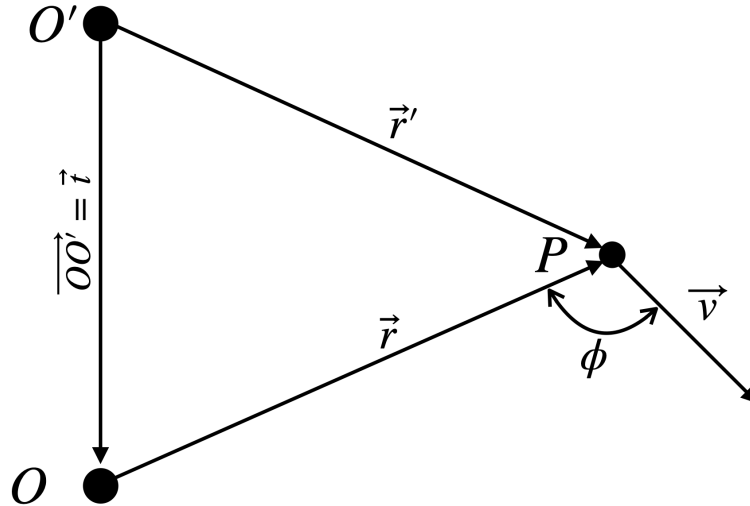


Figure 2.11: Schema dei vettori  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{t}$ , utilizzati per il calcolo del momento angolare rispetto ai poli  $O$  ed  $O'$ .

In coordinate polari possiamo scrivere la velocità come somma della sua componente radiale e quella trasversa, ne segue che dato che la componente radiale è ortogonale al raggio vettore, essa non dà contributo al momento angolare.

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\phi) = \vec{r} \times m\vec{v}_\phi \quad (2.63)$$

Quindi dato che  $\vec{v}_\phi = r \frac{d\phi}{dt}$  possiamo scrivere il modulo del momento angolare di un punto materiale nel seguente modo:

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} = I\omega \quad (2.64)$$

Dove abbiamo chiamato  $I$  il momento d'inerzia. Il momento d'inerzia è un analogo del termine di massa che compare nella definizione di impulso, quindi come la massa



esprime un concetto di resistenza alla variazione dello stato di moto, il momento d'inerzia rappresenta lo stesso concetto, ma per moti rotatori. Da notare dunque l'analogia in formule:  $\vec{p}$  con  $\vec{L}$ ,  $m$  con  $I$  e  $\vec{v}$  con  $\vec{\omega}$ .

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \vec{L} = I\vec{\omega} \quad (2.65)$$

In questo caso il momento d'inerzia di un punto che ruota su una circonferenza di raggio  $r$  è pari ad  $I = mr^2$ . Vedremo poi in seguito, nel capitolo sui corpo rigidi, come in realtà questo momento d'inerzia per corpo estesi è una matrice, dunque in generale potremmo incontrare casi in cui il momento angolare non è parallelo alla velocità angolare.

### 2.11.1 Momento di una forza

In analogia con il momento angolare, il momento di una forza è definito dal prodotto vettoriale tra il raggio vettore e la forza.

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \quad (2.66)$$

Partendo dalla definizione di momento angolare, si può effettuare la derivata rispetto al tempo ottenendo infine la relazione che lega momento angolare e momento delle forze.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad (2.67)$$

## 2.12 Teorema dell'impulso angolare

Analogamente a quanto fatto per il teorema dell'impulso, iniziamo integrando l'equazione (2.67).

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \int_0^\tau dt \frac{d\vec{L}}{dt} = \int_0^\tau dt \vec{M} \Rightarrow \Delta\vec{L} = \int_0^\tau dt \vec{M} \quad (2.68)$$

$$\vec{M}_m = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\tau} \quad (2.69)$$





## Chapter 3

### Moti relativi

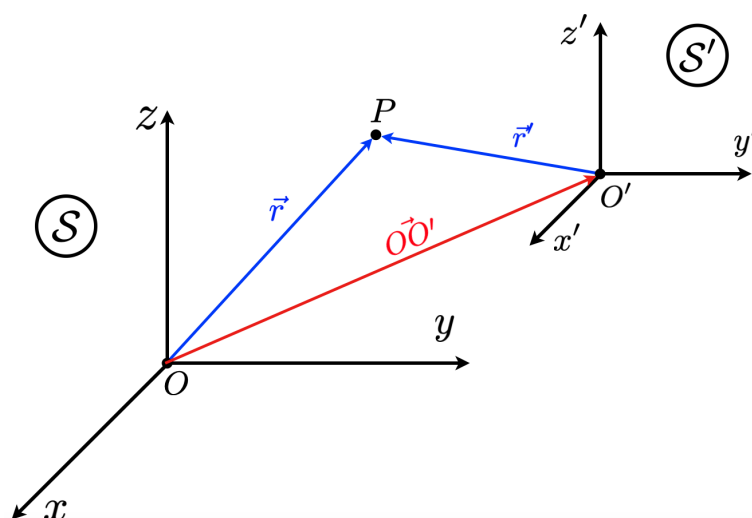


Figure 3.1: Rappresentazione del sistema di riferimento fisso  $\mathcal{S}$ , e del sistema  $\mathcal{S}'$  in moto generico rispetto ad  $\mathcal{S}$ .

#### 3.1 Teorema delle velocità relative

Dati due differenti sistemi di riferimento,  $\mathcal{S}$  in quiete, ed  $\mathcal{S}'$  in moto rispetto ad  $\mathcal{S}$ , si vogliono trovare le relazioni che legano le grandezze osservate nel sistema fisso e quelle osservate nel sistema mobile.

Quindi preso un punto generico  $P$  nello spazio, esso avrà come raggio vettore  $\vec{r}$  in  $\mathcal{S}$ , ed  $\vec{r}'$  in  $\mathcal{S}'$ .

Possiamo dunque scrivere che:

$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}' \quad (3.1)$$

Dove  $\vec{OO'}$  è il raggio vettore dell'origine del sistema  $\mathcal{S}'$ . Derivando rispetto al tempo l'equazione (3.1) si otterrà la velocità del punto  $P$  nel sistema  $\mathcal{S}$  in funzione della velocità del punto  $P$  in  $\mathcal{S}'$ , della velocità di traslazione del sistema  $\mathcal{S}'$  ed in generale anche della velocità angolare con cui ruota  $\mathcal{S}'$ .

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}'} \quad (3.2)$$

$$\vec{v}_t := \vec{v} - \vec{v}' = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t \quad (3.3)$$





# Bibliography

- [1] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci - Fisica (Volume 1)
- [2] <https://elearning.uniroma1.it/pluginfile.php/996072/course/summary/physics.jpg>