

# Éléments de mathématiques pour la physique

JÉRÔME - - FILIO Paul

14 septembre 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Systèmes de coordonnées</b>	<b>2</b>
1.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	2
1.1.1	Vecteur position . . . . .	2
1.1.2	Vecteur vitesse . . . . .	2
1.1.3	Vecteur accélération . . . . .	2
1.1.4	Différentielles des vecteurs de base . . . . .	2
1.1.5	Déplacement élémentaire . . . . .	2
1.1.6	Volume élémentaire . . . . .	2
1.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	2
1.2.1	Vecteur position . . . . .	2
1.2.2	Vecteur vitesse . . . . .	2
1.2.3	Vecteur accélération . . . . .	2
1.2.4	Différentielles des vecteurs de base . . . . .	3
1.2.5	Déplacement élémentaire . . . . .	3
1.2.6	Volume élémentaire . . . . .	3
1.2.7	Matrice de changement de base . . . . .	3
1.3	Coordonnées sphériques . . . . .	3
1.3.1	Vecteur position . . . . .	3
1.3.2	Vecteur vitesse . . . . .	3
1.3.3	Vecteur accélération . . . . .	3
1.3.4	Différentielles des vecteurs de base . . . . .	3
1.3.5	Déplacement élémentaire . . . . .	3
1.3.6	Volume élémentaire . . . . .	4
1.3.7	Matrice de changement de base . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Vecteurs et différentiation</b>	<b>4</b>
2.1	Opérateurs vectoriels . . . . .	4
2.1.1	Nabla . . . . .	4
2.1.2	Gradient . . . . .	4
2.1.3	Divergence . . . . .	4
2.1.4	Rotationnel . . . . .	4
2.1.5	Laplacien scalaire . . . . .	5
2.1.6	Propriétés . . . . .	5
2.2	Différentielle d'une fonction de plusieurs variables . . . . .	5
2.3	Circulation d'un champ vectoriel . . . . .	5
2.3.1	Circulation le long d'une courbe fermée . . . . .	5
2.3.2	Circulation d'un gradient . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>5</b>
3.1	Équation différentielle linéaire d'ordre 1 . . . . .	5
3.2	Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants . . . . .	6
3.2.1	Dans $\mathbb{C}$ . . . . .	6
3.2.2	Dans $\mathbb{R}$ . . . . .	6
3.2.3	Quelques solutions particulières . . . . .	6

# 1 Systèmes de coordonnées

## 1.1 Coordonnées cartésiennes

### 1.1.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z$$

### 1.1.2 Vecteur vitesse

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

### 1.1.3 Vecteur accélération

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

### 1.1.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{u}_x &= dx\overrightarrow{u}_x \\d\overrightarrow{u}_y &= dy\overrightarrow{u}_x \\d\overrightarrow{u}_z &= dz\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

### 1.1.5 Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{\ell} = dx\overrightarrow{u}_x + dy\overrightarrow{u}_y + dz\overrightarrow{u}_z$$

### 1.1.6 Volume élémentaire

$$d\tau = dx dy dz$$

## 1.2 Coordonnées cylindriques

### 1.2.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$$

### 1.2.2 Vecteur vitesse

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

### 1.2.3 Vecteur accélération

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

### 1.2.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}d\vec{u}_r &= d\theta \vec{u}_\theta \\d\vec{u}_\theta &= -d\theta \vec{u}_r \\d\vec{u}_z &= dz \vec{u}_z\end{aligned}$$

### 1.2.5 Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

### 1.2.6 Volume élémentaire

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

### 1.2.7 Matrice de changement de base

$$P = \begin{pmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = P^\top$$

## 1.3 Coordonnées shériques

$$(\theta, \varphi) \in [0, \pi[ \times [0, 2\pi[$$

### 1.3.1 Vecteur position

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r$$

### 1.3.2 Vecteur vitesse

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

### 1.3.3 Vecteur accélération

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \left( \ddot{r} - r \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2 \right) \right) \vec{u}_r + \left( \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} - r \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi}^2 \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}) \vec{u}_\varphi$$

### 1.3.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}d\vec{u}_r &= d\theta \vec{u}_\theta + \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi \\d\vec{u}_\theta &= -d\theta \vec{u}_r + \cos(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi \\d\vec{u}_\varphi &= -d\varphi (\sin(\theta) \vec{u}_r + \cos(\theta) \vec{u}_\theta)\end{aligned}$$

### 1.3.5 Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

### 1.3.6 Volume élémentaire

$$d\tau = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

### 1.3.7 Matrice de changement de base

$$P = \begin{pmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = P^\top$$

## 2 Vecteurs et différentiation

### 2.1 Opérateurs vectoriels

#### 2.1.1 Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

#### 2.1.2 Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

#### 2.1.3 Divergence

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(A_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

#### 2.1.4 Rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

### 2.1.5 Laplacien scalaire

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

### 2.1.6 Propriétés

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \end{aligned}$$

## 2.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

$$df = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \cdot d\vec{\ell}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

## 2.3 Circulation d'un champ vectoriel

Circulation d'un champ vectoriel  $\vec{v}$  du point  $A$  au point  $B$  le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  :

$$\mathfrak{C} = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

### 2.3.1 Circulation le long d'une courbe fermée

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

### 2.3.2 Circulation d'un gradient

$$\int_A^B \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \cdot d\vec{\ell} = f(B) - f(A)$$

## 3 Équations différentielles

### 3.1 Équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$y(t) = \left( \int b(t) e^{\int a(t) dt} dt + C \right) e^{-\int a(t) dt}$$

## 3.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = c(t)$$

$$r^2 + ar + b = 0$$

### 3.2.1 Dans $\mathbb{C}$

### 3.2.2 Dans $\mathbb{R}$

### 3.2.3 Quelques solutions particulières