Éléments de mathématiques pour la physique

JÉRÔME - - FILIO Paul

12 septembre 2024

Table des matières

1 Systèmes de coordonnées

1.1 Coordonnées cartésiennes

1.1.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + y\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + z\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.1.2 Vecteur vitesse

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + \dot{y}\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + \dot{z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.1.3 Vecteur accélération

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + \ddot{y}\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + \ddot{z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.1.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_x} &= \mathrm{d}x\overrightarrow{\mathrm{u}_x} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_y} &= \mathrm{d}y\overrightarrow{\mathrm{u}_x} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_z} &= \mathrm{d}z\overrightarrow{\mathrm{u}_z}
\end{aligned}$$

1.1.5 Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.1.6 Volume élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

1.2 Coordonnées cylindriques

1.2.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{\mathrm{u}_r}$$

1.2.2 Vecteur vitesse

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.2.3 Vecteur accélération

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.2.4 Différentielles des vecteurs de base

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_r} &= \mathrm{d}\theta\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} &= -\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{\mathrm{u}_r} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_z} &= \mathrm{d}z\overrightarrow{\mathrm{u}_z}
\end{aligned}
$$

1.2.5 Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.2.6 Volume élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

1.3 Coordonnées shériques

$$\boxed{(\theta,\,\varphi) \in [0,\,\pi[\times[0,\,2\pi[}$$

1.3.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{\mathrm{u}_r}$$

1.3.2 Différentielles des vecteurs de base

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_r} &= \mathrm{d}\theta\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{\mathrm{u}_\varphi} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} &= -\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \cos(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{\mathrm{u}_\varphi} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_\varphi} &= -\,\mathrm{d}\varphi\,(\sin(\theta)\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \cos(\theta)\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta})
\end{aligned}
$$

1.3.3 Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{\mathrm{u}_\varphi}$$

1.3.4 Volume élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}$$

2 Vecteurs et différentiation

2.1 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

2.2 Vecteurs et différentiation

2.2.1 Nabla

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}} \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z} && \text{en coordonnées cylindriques}\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{u_\varphi} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$

2.2.2 Gradient

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \vec{\nabla} f}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u_z} && \text{en coordonnées cartésiennes}\\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u_z} && \text{en coordonnées cylindriques}\\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u_\varphi} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$

2.2.3 Divergence

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cartésiennes}\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cylindriques}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial (A_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$

2.2.4 Rotationnel

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$$

2.2.5 Laplacien scalaire

$$\boxed{\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}} f}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cartésiennes}\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cylindriques}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$