

Éléments de mathématiques pour la physique

JÉRÔME - - FILIO Paul

22 décembre 2024

Table des matières

1	Systèmes de coordonnées	2
1.1	Coordonnées cartésiennes	2
1.1.1	Vecteur position	2
1.1.2	Vecteur vitesse	2
1.1.3	Vecteur accélération	2
1.1.4	Différentielles des vecteurs de base	2
1.1.5	Déplacement élémentaire	2
1.1.6	Volume élémentaire	2
1.2	Coordonnées cylindriques	2
1.2.1	Vecteur position	2
1.2.2	Vecteur vitesse	2
1.2.3	Vecteur accélération	2
1.2.4	Différentielles des vecteurs de base	3
1.2.5	Déplacement élémentaire	3
1.2.6	Volume élémentaire	3
1.2.7	Matrice de changement de base	3
1.3	Coordonnées sphériques	3
1.3.1	Vecteur position	3
1.3.2	Vecteur vitesse	3
1.3.3	Vecteur accélération	3
1.3.4	Différentielles des vecteurs de base	3
1.3.5	Déplacement élémentaire	3
1.3.6	Volume élémentaire	4
1.3.7	Matrice de changement de base	4
2	Vecteurs et différentiation	4
2.1	Opérateurs vectoriels	4
2.1.1	Nabla	4
2.1.2	Gradient	4
2.1.3	Divergence	4
2.1.4	Rotationnel	4
2.1.5	Laplacien scalaire	5
2.1.6	Laplacien vectoriel	5
2.1.7	Propriétés	5
2.2	Différentielle d'une fonction de plusieurs variables	5
2.3	Circulation d'un champ vectoriel	5
2.3.1	Circulation le long d'une courbe fermée	5
2.3.2	Circulation d'un champ de gradient	5
3	Équations différentielles	6
3.1	Équation différentielle linéaire d'ordre 1	6
3.2	Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants	6
3.2.1	Solution de l'équation homogène dans \mathbb{C}	6
3.2.2	Solution de l'équation homogène dans \mathbb{R}	6
3.2.3	Quelques solutions particulières	6

1 Systèmes de coordonnées

1.1 Coordonnées cartésiennes

1.1.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z$$

1.1.2 Vecteur vitesse

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

1.1.3 Vecteur accélération

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

1.1.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{u}_x &= dx\overrightarrow{u}_x \\d\overrightarrow{u}_y &= dy\overrightarrow{u}_x \\d\overrightarrow{u}_z &= dz\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

1.1.5 Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{\ell} = dx\overrightarrow{u}_x + dy\overrightarrow{u}_y + dz\overrightarrow{u}_z$$

1.1.6 Volume élémentaire

$$d\tau = dx dy dz$$

1.2 Coordonnées cylindriques

1.2.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$$

1.2.2 Vecteur vitesse

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

1.2.3 Vecteur accélération

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

1.2.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned} d\vec{u}_r &= d\theta \vec{u}_\theta \\ d\vec{u}_\theta &= -d\theta \vec{u}_r \\ d\vec{u}_z &= dz \vec{u}_z \end{aligned}$$

1.2.5 Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

1.2.6 Volume élémentaire

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

1.2.7 Matrice de changement de base

$$P = \begin{pmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = P^\top$$

1.3 Coordonnées sphériques

$$(\theta, \varphi) \in [0, \pi[\times [0, 2\pi[$$

1.3.1 Vecteur position

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r$$

1.3.2 Vecteur vitesse

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

1.3.3 Vecteur accélération

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \left(\ddot{r} - r \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2 \right) \right) \vec{u}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} - r \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi}^2 \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}) \vec{u}_\varphi$$

1.3.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned} d\vec{u}_r &= d\theta \vec{u}_\theta + \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi \\ d\vec{u}_\theta &= -d\theta \vec{u}_r + \cos(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi \\ d\vec{u}_\varphi &= -d\varphi (\sin(\theta) \vec{u}_r + \cos(\theta) \vec{u}_\theta) \end{aligned}$$

1.3.5 Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

1.3.6 Volume élémentaire

$$d\tau = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

1.3.7 Matrice de changement de base

$$P = \begin{pmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = P^\top$$

2 Vecteurs et différentiation

2.1 Opérateurs vectoriels

2.1.1 Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.1.2 Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.1.3 Divergence

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(A_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.1.4 Rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

2.1.5 Laplacien scalaire

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.1.6 Laplacien vectoriel

$$\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}^2 \cdot \overrightarrow{A}$$

2.1.7 Propriétés

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \right) &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f = 0 \\ \operatorname{div} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{A} \right) &= \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \right) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{A} \right) \right) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\operatorname{div} \left(\overrightarrow{A} \right) \right) - \overrightarrow{\Delta} \cdot \overrightarrow{A} \end{aligned}$$

2.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

$$df = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \cdot d\overrightarrow{\ell}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

2.3 Circulation d'un champ vectoriel

Circulation d'un champ vectoriel \overrightarrow{v} du point A au point B le long d'une courbe \mathcal{C} :

$$\mathfrak{C} = \int_A^B \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{\ell}$$

2.3.1 Circulation le long d'une courbe fermée

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{v}) \cdot d\overrightarrow{S}$$

2.3.2 Circulation d'un champ de gradient

$$\int_A^B \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \cdot d\overrightarrow{\ell} = f(B) - f(A)$$

3 Équations différentielles

3.1 Équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$y(t) = \left(\int b(t)e^{\int a(t)dt} dt + C \right) e^{-\int a(t)dt}$$

3.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = \varphi(t)$$

$$r^2 + ar + b = 0 \quad (\mathcal{E}_c)$$

3.2.1 Solution de l'équation homogène dans \mathbb{C}

Si (\mathcal{E}_c) admet deux solutions distinctes :

$$h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Si (\mathcal{E}_c) admet une solution double :

$$h(x) = (C_1 x + C_2) e^{r_0 x}$$

3.2.2 Solution de l'équation homogène dans \mathbb{R}

Si $\Delta \geq 0$, voir ci-dessus dans \mathbb{C} . Si $\Delta < 0$, en posant $r = \alpha \pm i\beta$:

$$h(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

3.2.3 Quelques solutions particulières

Si $\varphi(x) = Ae^{\lambda x}$,

- $f_0(x) = C_0 e^{\lambda x}$ si λ n'est pas solution de (\mathcal{E}_c)
- $f_0(x) = C_0 x e^{\lambda x}$ si λ est solution simple de (\mathcal{E}_c)
- $f_0(x) = C_0 x^2 e^{\lambda x}$ si λ est solution double de (\mathcal{E}_c)

Si $\varphi(x) = B \cos(\omega x)$ (resp. \sin), alors une solution particulière est obtenue en considérant la partie réelle (resp. imaginaire) d'une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + ay' + b' = B e^{i\omega x}$.