Éléments de mathématiques pour la physique

JÉRÔME - - FILIO Paul

11 septembre 2024

Table des matières

1 Systèmes de coordonnées

1.1 Coordonnées cartésiennes

1.2 Coordonnées cylindriques

1.3 Coordonnées shériques

2 Vecteurs et différentiation

2.1 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

2.2 Vecteurs et différentiation

2.2.1 Nabla

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathrm{u}_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathrm{u}_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathrm{u}_z}} \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{\mathrm{u}_r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{\mathrm{u}_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathrm{u}_z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\vec{\mathrm{u}_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{\mathrm{u}_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{\mathrm{u}_\varphi} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$

2.2.2 Gradient

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{\mathrm{u}_\varphi} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$

2.2.3 Divergence

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r}\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial (A_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$

2.2.4 Rotationnel

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}}$$

2.2.5 Laplacien scalaire

$$\boxed{\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}} f}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cylindriques} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$