

Éléments de mathématiques pour la physique

JÉRÔME - - FILIO Paul

12 septembre 2024

Table des matières

1	Systèmes de coordonnées	2
1.1	Coordonnées cartésiennes	2
1.1.1	Vecteur position	2
1.1.2	Vecteur vitesse	2
1.1.3	Vecteur accélération	2
1.1.4	Différentielles des vecteurs de base	2
1.1.5	Déplacement élémentaire	2
1.1.6	Volume élémentaire	2
1.2	Coordonnées cylindriques	2
1.2.1	Vecteur position	2
1.2.2	Vecteur vitesse	2
1.2.3	Vecteur accélération	2
1.2.4	Différentielles des vecteurs de base	3
1.2.5	Déplacement élémentaire	3
1.2.6	Volume élémentaire	3
1.3	Coordonnées sphériques	3
1.3.1	Vecteur position	3
1.3.2	Différentielles des vecteurs de base	3
1.3.3	Déplacement élémentaire	3
1.3.4	Volume élémentaire	3
2	Vecteurs et différentiation	3
2.1	Différentielle d'une fonction de plusieurs variables	3
2.2	Vecteurs et différentiation	3
2.2.1	Nabla	3
2.2.2	Gradient	4
2.2.3	Divergence	4
2.2.4	Rotationnel	4
2.2.5	Laplacien scalaire	4

1 Systèmes de coordonnées

1.1 Coordonnées cartésiennes

1.1.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z$$

1.1.2 Vecteur vitesse

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

1.1.3 Vecteur accélération

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

1.1.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{u}_x &= dx\overrightarrow{u}_x \\d\overrightarrow{u}_y &= dy\overrightarrow{u}_x \\d\overrightarrow{u}_z &= dz\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

1.1.5 Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{\ell} = dx\overrightarrow{u}_x + dy\overrightarrow{u}_y + dz\overrightarrow{u}_z$$

1.1.6 Volume élémentaire

$$d\tau = dx dy dz$$

1.2 Coordonnées cylindriques

1.2.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$$

1.2.2 Vecteur vitesse

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

1.2.3 Vecteur accélération

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

1.2.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}d\vec{u}_r &= d\theta \vec{u}_\theta \\d\vec{u}_\theta &= -d\theta \vec{u}_r \\d\vec{u}_z &= dz \vec{u}_z\end{aligned}$$

1.2.5 Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

1.2.6 Volume élémentaire

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

1.3 Coordonnées sphériques

$$(\theta, \varphi) \in [0, \pi[\times [0, 2\pi[$$

1.3.1 Vecteur position

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r$$

1.3.2 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}d\vec{u}_r &= d\theta \vec{u}_\theta + \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi \\d\vec{u}_\theta &= -d\theta \vec{u}_r + \cos(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi \\d\vec{u}_\varphi &= -d\varphi (\sin(\theta) \vec{u}_r + \cos(\theta) \vec{u}_\theta)\end{aligned}$$

1.3.3 Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

1.3.4 Volume élémentaire

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

2 Vecteurs et différentiation

2.1 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

2.2 Vecteurs et différentiation

2.2.1 Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.2.2 Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.2.3 Divergence

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial (A_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.2.4 Rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

2.2.5 Laplacien scalaire

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} f$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$