# Autour des matrices carrées réelles de rang 1

Paul JÉRÔME--FILIO

19 septembre 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la diagonalisabilité et diagonalisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans un premier temps, on cherche à montrer le théorème suivant :

**Théorème.** *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = XY^\top$.*

*Démonstration.* $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ses colonnes. Si $A$ est la matrice nulle, le sens direct du théorème est évidemment vrai. On suppose donc que $A$ n'est pas la matrice nulle. Il existe alors $i \in [\![1, n]\!]$ telle que $c_i$ n'est pas la colonne nulle. Il existe donc $(\lambda_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^{[\![1,n]\!]}$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $c_k = \lambda_k c_i$. On a alors :

$$\begin{aligned}
A &= [c_1, c_2, \ldots, c_n] \\
&= [\lambda_1 c_i, \lambda_2 c_i, \ldots, \lambda_n c_i] \\
&= c_i \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^\top \\
&= XY^\top \qquad \text{en posant} \quad X = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, il suffit de remonter le raisonnement ci-dessus pour montrer que si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{rg}\left(XY^\top\right) = 1$.

$\square$

Bien que ce théorème soit inutile (ou du moins pas le plus rapide) pour traiter notre problème, il est intéressant car permet de montrer avec les théorèmes suivants que le produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par, pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(X|Y) = \operatorname{Tr}\left(XY^\top\right)$, renvoie l'unique valeur propre non-nulle de $XY^\top$ (le cas $n = 1$ est évident). On s'intéresse réellement au théorème suivant :

**Théorème.** *Si $n \neq 1$ et que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, alors 0 est une valeur propre de $A$ et* $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

*Démonstration.* Par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$. Pour que 0 soit une valeur propre de $A$, il faut qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non-nul tel que $AX = 0X = 0$, autrement dit $X$ doit être un vecteur non-nul de $\ker(A)$. Or comme $\ker(A)$ est de dimension $n-1 > 0$, alors il existe bien un tel $X$ non-nul. 0 est bien une valeur propre de $A$ et le sous-espace propre associé vérifie $\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A - 0I_n)) = \dim(\ker(A)) = n - 1$. □

**Remarque.** *Pour montrer que* 0 *est une valeur propre de* $A$*, on pouvait aussi procéder comme suit : comme* $\mathrm{rg}(A) = 1$*, on a* $\det(A) = 0$*. Par ailleurs, on a* $\det(A) = \prod_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \mu^{m_\mu(A)}$*. On tire donc* $\prod_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \mu^{m_\mu(A)} = 0$*, donc par la règle du produit nul,* $0 \in \mathrm{Sp}(A)$*.*

**Remarque.** *Comme* 0 *est valeur propre de* $A$*, on a* $\det(A) = \prod_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \mu^{m_\mu(A)} = 0$*, d'où on retrouve le fait qu'une matrice de rang* 1 *n'est pas inversible.*

On en déduit alors la proposition ci-après :

**Proposition.** *Si* $n \neq 1$ *et que la matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est de rang* 1*, alors* $A$ *est diagonalisable si et seulement si* $m_0(A) = n - 1$*. Dans ce cas,* $\lambda = \mathrm{Tr}(A)$ *est l'autre valeur propre de* $A$*, avec* $m_\lambda(A) = 1$*.*

*Démonstration.* $A$ est diagonalisable si et seulement si pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim(E_\mu(A)) = m_\mu(A)$. Il faut donc, d'après ce qui précède, $m_0(A) = \dim(E_0(A)) = n - 1$ et une autre valeur propre $\lambda \neq 0$ avec $m_\lambda(A) = 1$. On a de plus $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \mu \times m_\mu(A) = 1 \times \lambda + 0(n-1) = \lambda$. □

On remarque que si $n = 1$, alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est déjà diagonale, et son unique valeur propre est son seul coefficient. Une conséquence immédiate de la proposition précédente est le théorème suivant :

**Théorème.** *Si* $n \neq 1$ *et que la matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est de rang* 1*, alors* $A$ *est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$*.*

*Démonstration.* En effet, $A$ est diagonalisable si et seulement si $A$ admet une autre (et unique) valeur propre $\lambda \neq 0$ et dans ce cas uniquement on a $\mathrm{Tr}(A) = \lambda \neq 0$. □

On est alors en mesure de diagonaliser de tête des matrices de rang 1.

**exemple.** *Diagonaliser* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

*$M$ est de rang 1, et diagonalisable d'après le théorème spectral car symétrique réelle (pour la diagonalisabilité, on peut simplement remarquer que* $\mathrm{Tr}(A) = 3 \neq 0$*). D'après ce qui précède, on sait que* 0 *est valeur propre de* $M$ *d'ordre de multiplicité* 2 *et que son unique autre valeur propre est* $\mathrm{Tr}(M) = 3$*. Ainsi,* $M$ *est semblable à la matrice diagonale* $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*Un autre exemple est la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *: elle est de rang* 1 *mais pas diagonalisable puisque sa trace est nulle.*

La diagonalisation permettant simplement de déterminer les puissances successives d'une matrice, on peut s'intéresser aux puissances successives de notre matrice $A$ de rang 1.

**Proposition.** *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est de rang* 1 *et diagonalisable, alors* $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$*.*

*Démonstration.* D'après ce qui précède, $A$ peut se diagonaliser sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(A)U$ en posant $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. On a $U^2 = U$, puis

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ &= P\left(\mathrm{Tr}(A)U\right)^2 P^{-1} = P\,\mathrm{Tr}(A)^2U^2P^{-1} \\ &= \mathrm{Tr}(A)P\,\mathrm{Tr}(A)UP^{-1} = \mathrm{Tr}(A)PDP^{-1} \\ &= \mathrm{Tr}(A)A \end{aligned}$$

□

On peut généraliser ce résultat au cas où $A$ n'est pas diagonalisable :

**Proposition.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, alors $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.*

*Démonstration.* Comme $A$ n'est *a priori* pas diagonalisable, on ne peut pas passer par la matrice $U$ qui était bien pratique. On utilise le premier théorème : $A$ étant de rang 1, il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = XY^\top$. On a de plus $Y^\top X = \mathrm{Tr}(A)$ en assimilant une matrice $1 \times 1$ à son coefficient réel. Alors $A^2 = XY^\top XY^\top = X\,\mathrm{Tr}(A)Y^\top = \mathrm{Tr}(A)XY^\top = \mathrm{Tr}(A)A$. □

**Remarque.** *Si l'on ne voulait pas utiliser le premier théorème dans la démonstration, il reste à traiter le cas $\mathrm{Tr}(A) = 0$. On continue avec la réduction matricielle. Dans ce cas, 0 est la seule valeur propre, d'ordre de multiplicité $n$ avec $\dim(E_0(A)) = n - 1$. On trigonalise donc $A$ sous la forme $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ et $T$ une matrice triangulaire supérieure sous la forme de Jordan :*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*On vérifie facilement par calcul matriciel que $T^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ (puisque matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle), d'où finalement :*

$$A^2 = PTP^{-1} = PTP^{-1}PTP^{-1} = PT^2P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \mathrm{Tr}(A)A$$

De ce résultat, on déduit le théorème suivant :

**Théorème.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^k = \mathrm{Tr}(A)^{k-1}A$.*

*Démonstration.* Par une récurrence immédiate. □

**Corollaire.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, alors $A$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Dans ce cas, $A$ est nilpotente d'ordre 2.*

*Démonstration.* L'énoncé est immédiat avec le théorème précédent. □

**exemple.** *En reprenant les exemples précédents,* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et pour tout $n > 1$,* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On peut maintenant s'intéresser à l'exponentiation de matrices de rang 1.

**Définition.** *On définit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :*

$$\begin{aligned}(\cdot|\cdot) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)\end{aligned}$$

*On appelle norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application :*

$$\begin{aligned}||\cdot|| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ M &\longmapsto \sqrt{(M|M)}\end{aligned}$$

**Théorème.** *La norme euclidienne est sous-multiplicative, c'est-à-dire que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $||AB|| \leq ||A||\,||B||$.*

*Démonstration.* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On aura besoin de l'égalité suivante :

$$||M||^2 = (M|M) = \operatorname{Tr}\left(M^\top M\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[M^\top M\right]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left[M^\top\right]_{ij} [M]_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [M]_{ji}^2$$

Alors : $(||A||\,||B||)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ji}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [B]_{ji}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} [A]_{jk}^2 [B]_{li}^2$

Et :

$$\begin{aligned}||AB||^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [AB]_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{jk} [B]_{ki}\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{jk}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} [B]_{li}^2\right) \qquad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} [A]_{jk}^2 [B]_{li}^2 \\ &\leq (||A||\,||B||)^2\end{aligned}$$

Puis par passage à la racine, les normes étant positives, on a bien $||AB|| \leq ||A||\,||B||$.

□

**Proposition.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} M^k$ est absolument convergente.*

*Démonstration.* Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème précédent, on a $\left|\left|\frac{1}{k!} M^k\right|\right| = \frac{1}{k}\left|\left|M^k\right|\right| \leq \frac{1}{k}||M||^k$ qui est le terme général d'une série convergente de réels positifs, donc par comparaison $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} M^k$ converge absolument. □

**Définition.** *On définit l'exponentielle d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée* $\exp(M) = e^M$*, par la matrice image de $M$ par l'application*

$$\begin{aligned}\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto \exp(M) = e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k\end{aligned}$$

Et dans le cas des matrices de rang 1, on a le théorème suivant :

**Théorème.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.*
— *Si* $\mathrm{Tr}(A) = 0$, *alors* $e^A = I_n + A$.
— *Si* $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, *alors il existe* $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ *telle que* $e^A = P\,\mathrm{diag}(e^{\mathrm{Tr}(A)}, 1, \dots, 1)P^{-1}$.

*Démonstration.* — Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors comme $A^k = 0$ pour tout entier $k \geq 2$, on a $e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = A^0 + A + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I_n + A$.

— Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors d'après ce qui précède, $A$ est diagonalisable sous la forme $A = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{Tr}(A), 0, \dots, 0)P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$. On montre par une récurrence immédiate que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{Tr}(A), 0, \dots, 0)^k P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\mathrm{Tr}(A)^k, 0, \dots, 0\right) P^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P\,\mathrm{diag}(\mathrm{Tr}(A), 0, \dots, 0)P^{-1} \\
&= P \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,\mathrm{diag}(\mathrm{Tr}(A), 0, \dots, 0) \right) P^{-1} \\
&= P\,\mathrm{diag}\left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,\mathrm{Tr}(A)^k, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) P^{-1} \\
&= P\,\mathrm{diag}\left( e^{\mathrm{Tr}(A)}, e^0, \dots, e^0 \right) P^{-1} \\
&= P\,\mathrm{diag}\left( e^{\mathrm{Tr}(A)}, 1, \dots, 1 \right) P^{-1}
\end{aligned}$$

□

**exemple.** *On reprend les exemples précédents.*

*On a* $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ *d'où* $\exp\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

*Pour* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *de trace non-nulle, on la diagonalise sous la forme* $M = PDP^{-1}$ *avec*

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et on calcule* $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

*On a alors* $e^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

*d'où finalement,* $\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^3+2}{3} & \dfrac{e^3-1}{3} & \dfrac{e^3-1}{3} \\ \dfrac{e^3-1}{3} & \dfrac{e^3+2}{3} & \dfrac{e^3-1}{3} \\ \dfrac{e^3-1}{3} & \dfrac{e^3-1}{3} & \dfrac{e^3+2}{3} \end{pmatrix}$

Cependant, il est nécessaire d'effectuer une diagonalisation complète pour calculer l'exponentielle dans le cas $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, ce qui est lourd en calcul. On peut plutôt utiliser le théorème suivant :

**Théorème.** *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice de rang* $1$ *et que* $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$*, alors* $e^A = I_n + \dfrac{e^{\operatorname{Tr}(A)} - 1}{\operatorname{Tr}(A)} A$.

*Démonstration.* On utilise le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^k = \operatorname{Tr}(A)^{k-1} A$ :

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \\ &= I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \\ &= I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}(A)^{k-1}}{k!} A \\ &= I_n + \frac{1}{\operatorname{Tr}(A)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}(A)^k}{k!} A \\ &= I_n + \frac{1}{\operatorname{Tr}(A)} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}(A)^k}{k!} - \frac{\operatorname{Tr}(A)^0}{0!} \right) A \\ &= I_n + \frac{e^{\operatorname{Tr}(A)} - 1}{\operatorname{Tr}(A)} A \end{aligned}$$

□

**Remarque.** *Si* $\operatorname{Tr}(A) = 0$*, la formule du théorème "devient" vraie car* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

**exemple.** *Le calcul de l'exemple précédent est alors simplifié : il n'y a plus à effectuer la réduction matricielle. On a* $\exp \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \dfrac{e^3 - 1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} \end{pmatrix}$.

On peut généraliser ce résultat aux fonctions développables en série entière.

**Définition.** *Soit* $f$ *une fonction développable en série entière en* $0$*, de rayon de convergence infini. On définit l'image d'une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *par* $f$*, notée* $f(M)$*, par la matrice image de* $M$ *par l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto f(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} M^k \end{aligned}$$

On a alors le théorème suivant, qui est une généralisation du théorème précédent :

**Théorème.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice de rang* $1$ *et* $f$ *une fonction développable en série entière en* $0$ *de rayon de convergence infini.*

— *Si* $\operatorname{Tr}(A) = 0$*, alors* $f(A) = f(0) I_n + f'(0) A$.

— *Si* $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$*, alors* $f(A) = f(0) I_n + \dfrac{f(\operatorname{Tr}(A)) - f(0)}{\operatorname{Tr(A)}} A$.

*Démonstration.* — Si $\operatorname{Tr}(A) = 0$, alors comme $A^k = 0$ pour tout entier $k \geq 2$,

on a $f(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k(0)}{k!} A^k = f(0) A^0 + f'(0) A + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = f(0) I_n + f'(0) A$.

— Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, on utilise le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^k = \mathrm{Tr}(A)^{k-1}A$ :

$$\begin{aligned}
f(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} A^k \\
&= f(0)I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} A^k \\
&= f(0)I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \mathrm{Tr}(A)^{k-1}A \\
&= f(0)I_n + \frac{1}{\mathrm{Tr}(A)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \mathrm{Tr}(A)^{k}A \\
&= f(0)I_n + \frac{1}{\mathrm{Tr}(A)} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \mathrm{Tr}(A)^{k} - \frac{f^{(0)}}{0!} \mathrm{Tr}(A)^0 \right) A \\
&= f(0)I_n + \frac{f(\mathrm{Tr}(A)) - f(0)}{\mathrm{Tr}(A)} A
\end{aligned}$$

□

**Remarque.** *Si* $\mathrm{Tr}(A) = 0$*, la formule du deuxième point "devient" vraie car*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

**Remarque.** *On peut, de même que pour l'exponentielle, montrer que si* $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$*, alors il existe* $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ *telle que* $f(A) = P \operatorname{diag}(f(\mathrm{Tr}(A)), f(0), \ldots, f(0))P^{-1}$*, mais cette formule très calculatoire n'a que peu d'intérêt en pratique.*

**Remarque.** *En réalité, les formules du théorème précédent sont valables si $f$ n'est pas développable en série entière ou de rayon de convergence fini, tant que $f$ est dérivable en* $0$*. Cependant, il faudrait pour montrer cela changer notre définition de l'image d'une matrice par une série entière, et adopter une définition* via *le calcul fonctionnel appliqué au spectre de $A$.*

On peut aussi déterminer des propriétés sur les projections et symétries vectorielles dans le cas de matrices de rang 1.

**Proposition.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang* $1$*. $A$ est la matrice d'une projection vectorielle si et seulement si* $\mathrm{Tr}(A) = 1$*.*

*Démonstration.* $A$ est la matrice d'une projection vectorielle si et seulement si $A = A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 1$. □

**Proposition.** *Il n'existe pas de symétrie vectorielle de rang* $1$ *dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$.*

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 qui soit la matrice d'une symétrie vectorielle. Alors $A^2 = I_n$ d'où $A$ est inversible et $A^{-1} = A$, ce qui est absurde puisque $A$ est de rang 1 donc pas inversible. □