

# Exercices d'oraux banque PT 2025 - Mathématiques

## Table des matières

1 Mines Télécom	1
2 Maths I	4
3 Maths II	6
4 Questions de cours	7

## 1 Mines Télécom

### exercice 1 :

On définit le produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par, pour tout  $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^\top N)$$

On pose  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

1. Déterminer une base orthonormée de  $F^\perp$ .
2. Déterminer le projeté de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $F^\perp$ .
3. Déterminer la distance de  $J$  à  $F$ .

---

### exercice 2 :

On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies par, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  :  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$  et  $g(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2$ .

1. Déterminer les points critiques de  $f$  et  $g$ .
2. En repérant le début d'un carré, déterminer la nature des extrema locaux de  $f$ .
3. En utilisant deux droites, déterminer la nature des extrema locaux de  $g$ .

---

### exercice 3 :

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $I_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) \, dt$  et  $F(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) \, dt$ .

1. Exprimer  $I_n$  en fonction de  $I_{n-1}$ .
2. Exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$  (et de factorielles).
3. Montrer que  $f_t : x \mapsto \cos(x \sin(t))$  est développable en série entière en 0 et donner son développement en série entière.
4. À l'aide du théorème d'intégration terme à terme, donner un développement en série entière en 0 de  $F$ .

**exercice 4 :**

1. Diagonaliser  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. La matrice  $B_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

**exercice 5 :**

Déterminer le rayon de courbure, les centres de courbure et tracer la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= \ln(\cos(t)) \end{cases}$$

**exercice 6 :**

Déterminer, pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , la nature de  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ .

**exercice 7 :**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $u(M) = aM + bM^\top$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme.
2. Montrer que  $u$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
1. Calculer  $\text{tr}(u)$  et  $\det(u)$ .

**exercice 8 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$   $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Discuter de la diagonalisabilité de  $M = XY^\top$ .

**exercice 9 :**

1. Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Trouver  $a, b$  et  $c$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ , on ait :

$$\frac{2}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t - 1} + \frac{c}{t + 1}$$

2. Résoudre  $t(t^2 - 1)x' + 2x = \frac{t}{t^2 - 1}$ .

---

**exercice 10 :**

On pose  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et pour tout  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $f(M) = AM$ .

1. L'application  $f$  est-elle un endomorphisme ?
  2. Déterminer les dimensions de  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
  3. Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?
- 

**exercice 11 :**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 2x(x-1)y'' + (x+1)y' + y = 0$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de  $(E)$ .
  2. On suppose que  $x \mapsto x^\alpha$  est une solution de  $(E)$ . Déterminer  $\alpha$ .
  3. Résoudre complètement  $(E)$ .
- 

**exercice 12 :**

Déterminer les plans tangents à  $S : x^2 - 3y^2 + z^2 = 1$  passant par  $A(1, 0, 1)$  (on se place dans un espace euclidien ...)

---

**exercice 13 :**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad (x^2 + x)y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de  $(E)$ .
  2. Déterminer les solutions de  $(E)$  qui s'écrivent sous la forme  $y(x) = \frac{z(x)}{1+x}$ .
- 

**exercice 14 :**

$$\begin{cases} x(u, \theta) &= e^{-u} \cos(\theta) \\ y(u, \theta) &= e^{-u} \sin(\theta) \\ z(u, \theta) &= \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} \, dt \end{cases}$$

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé. Montrer que  $\mathcal{C}_\theta : (x(u, \theta), y(u, \theta), z(u, \theta))$  est une courbe plane. Dans quel plan est-elle contenue ?

2. Soit  $u \in \mathbb{R}$ . On pose  $\Gamma_u : \theta \mapsto (x(u, \theta), y(u, \theta), z(u, \theta))$ . Quel est le type de courbe? Donner son équation.
3. Trouver le point d'intersection des tangentes telles qu'elles soient orthogonales.

**exercice 15 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $2n$  boules numérotées de 1 à  $2n$ . On tire  $n$  boules.

1. Combien existe-t-il de façons de tirer  $n$  boules?
2. Soit  $k \in [1, 2n]$ . Quelle est la probabilité de ne pas tirer la boule numérotée  $k$ ?
2. Soit  $k_1, k_2 \in [1, 2n]$  avec  $k_1 \neq k_2$ . Quelle est la probabilité de ne pas tirer les boules numérotées  $k_1$  et  $k_2$ ?

## 2 Maths I

**exercice 1 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $Q$  un polynôme tel que  $\deg(Q) \leq n$ . On définit alors  $f_Q$  sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in E, \quad f_Q(P) = (PQ)^{(n)}$$

1. Montrer que  $f_Q$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $Q$  pour que  $f_Q$  soit un automorphisme.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $Q$  pour que  $f_Q$  soit diagonalisable. Donner  $\text{Im}(f_Q)$  et  $\text{Ker}(f_Q)$ .
4. Soit  $n = 2$ . Donner les sous-espaces propres de  $f_Q$  pour :
  - a)  $Q = X - 1$
  - b)  $Q = X^2 + X + 1$

**exercice 2 :**

On considère la série  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ .

1. Montrer que pour  $x \geq 0$ , cette série converge.

On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ .

2. Montrer que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ .

3. Calculer  $\int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt$ .

**exercice 3 :**

s Soit  $\beta$  la courbe paramétrée définie par, pour  $a \in \mathbb{R}_+$  :

$$\beta : \begin{cases} x(t) &= a(t - \cos(t)) \\ y(t) &= a(1 - \sin(t)) \end{cases}, \quad t \in ]0, 2\pi[$$

1. Calculer la longueur de la courbe.
2. On cherche à trouver les courbes  $\Gamma$  qui vérifient les conditions suivantes : il existe une droite  $\mathcal{D}$  et une abscisse curviligne  $s$  telles que quel que soit  $M \in \Gamma$ , l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $-\frac{S}{2}\vec{T}$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .
- a) Ceci est-il vrai pour  $\beta$  et  $\mathcal{D} : y = ax$  ? Si oui, quelle est l'origine de  $s$  ?

**exercice 4 :**

Soit  $\mathcal{S}$  une surface définie par  $z = f(x, y)$ , avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Déterminer le vecteur normal à  $\mathcal{S}$ .
2. Montrer que si la normale à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$  est parallèle à  $(Oz)$  ou coupe  $(Oz)$ , alors on a la relation

$$y_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - x_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

(Astuce : trouver une relation entre  $\overrightarrow{OM_0}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{k}$ .)

3. Soit  $g = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ . Déterminer les dérivées partielles de  $g$ .
4. Montrer que  $\mathcal{S}$  est une surface de révolution si la normale à  $\mathcal{S}$  est parallèle à  $(Oz)$  ou sécante à  $(Oz)$ .

**exercice 5 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. On suppose que  $\text{rg}(A) = 1$ . Montrer qu'il existe  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $A = XY^\top$ .
2. Qu'en est-il de la réciproque ?

Dans toute la suite, on suppose que  $\text{rg}(A) = 1$ .

3. Montrer que  $A^2 = \text{Tr}(A)A$ .
4. Déterminer une expression de  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .
5. À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on  $A^n = 0$  ? (condition sur la trace)
6. À quelle condition nécessaire et suffisante  $A$  est-elle diagonalisable ?

**exercice 6 :**

Soit  $A \in \mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction continue et décroissance sur  $[A, +\infty[$ .

1. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  avec  $N \leq p$ . Montrer que :

$$\int_A^{\frac{(p+1)A}{N}} f(t) dt \leq \frac{1}{N} \sum_{n=N}^p f\left(\frac{nA}{N}\right) \leq \int_A^{\frac{pA}{N}} f(t) dt + f\left(\frac{A}{N}\right)$$

2. Montrer que  $\sum_{n=N}^{+\infty} f\left(\frac{nA}{N}\right)$  converge.
- 

**exercice 7 :**

On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de premier terme  $u_0 = 1$  et telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$ .

1. On définit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de terme général  $v_n = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer un  $\alpha_0$  tel que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(v_n)$  converge.

2. Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$ .
- 

### 3 Maths II

**exercice 1 :**

Soit  $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \ln(5 + \sin(x)) \end{aligned}$$

1. Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .
  2. Encadrer  $h(x) = \ln(5 + \sin(x))$  et  $g(x) = \frac{1}{5 + \sin(x)}$ . En déduire le signe de  $f'$  et ses variations.
  3. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J$  un segment à déterminer.
  4. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $f$ .
  5. Déterminer  $f^{-1}$ .
- 

**exercice 2 :**

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > |y|\}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , et :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, t) &\longmapsto f(r \cosh t, r \sinh(t)) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $g$  est définie et est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Exprimer les dérivées partielles de  $g$  en fonction de celles de  $f$ .
3. Trouver toutes les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  qui vérifient

$$x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$$

---

## 4 Questions de cours

1. Développement en série entière de l'exponentielle. Théorème de dérivabilité d'un développement en série entière. Montrer que la dérivée du développement en série entière de  $\exp$  vaut bien  $\exp$ .
2. Tous les moyens disponibles pour montrer qu'une matrice est diagonalisable.
3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Dans quel cas est-ce intéressant (loi faible des grand nombres) ?
4. Tout sur la loi géométrique. Est-il plus probable que le premier succès soit pair ou impair ?
5. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis.  
Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.
6. Tout sur la loi de Poisson.
7. Tout sur les coniques.