Exercices d'oraux banque PT 2025 - Mathématiques

Table des matières

1 Mines Télécom

exercice 1 :

On définit le produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\langle M, N\rangle = \operatorname{Tr}\left(M^\top N\right)$$

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

2. Déterminer le projeté de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

3. Déterminer la distance de J à F.

---

exercice 2 :

On considère les deux fonctions f et g définies par, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2$.

1. Déterminer les points critiques de f et g.

2. En repérant le début d'un carré, déterminer la nature des extrema locaux de f.

3. En utilisant deux droites, déterminer la nature des extrema locaux de g.

---

exercice 3 :

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}\,t$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}\,t$.

1. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.

2. Exprimer I_n en fonction de n (et de factorielles).

3. Montrer que $f_t : x \mapsto \cos(x\sin(t))$ est développable en série entière en 0 et donner son développement en série entière.

4. À l'aide du théorème d'intégration terme à terme, donner un développement en série entière en 0 de F.

---

exercice 4 :

1. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice $B_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

---

exercice 5 :

Déterminer le rayon de courbure, les centres de courbure et tracer la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = \ln(\cos(t)) \end{cases}$$

---

exercice 6 :

Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

---

exercice 7 :

Soit $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u(M) = aM + bM^\top$.

1. Montrer que u est un endomorphisme.

2. Montrer que u est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

1. Calculer $\mathrm{tr}(u)$ et $\det(u)$.

---

exercice 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Discuter de la diagonalisabilité de $M = XY^\top$.

---

exercice 9 :

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trouver a, b et c tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$, on ait :

$$\frac{2}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$$

2. Résoudre $t(t^2-1)x'+2x=\dfrac{t}{t^2-1}$.

---

exercice 10 :

On pose $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et pour tout $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M)=AM$.

1. L'application f est-elle un endomorphisme ?

2. Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

---

exercice 11 :

On considère l'équation différentielle :

$$(E):\quad 2x(x-1)y''+(x+1)y'+y=0$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).

2. On suppose que $x\mapsto x^\alpha$ est une solution de (E). Déterminer α.

3. Résoudre complètement (E).

---

exercice 12 :

Déterminer les plans tangents à $S : x^2-3y^2+z^2=1$ passant par $A(1,0,1)$ (on se place dans un espace euclidien ...)

---

exercice 13 :

On considère l'équation différentielle :

$$(E):\quad (x^2+x)y''+(3x-1)y'+y=0$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).

2. Déterminer les solutions de (E) qui s'écrivent sous la forme $y(x)=\dfrac{z(x)}{1+x}$.

---

exercice 14 :

$$\begin{cases} x(u,\theta) & = e^{-u}\cos(\theta)\\ y(u,\theta) & = e^{-u}\sin(\theta)\\ z(u,\theta) & = \displaystyle\int_0^u \sqrt{1-e^{-2t}}\,\mathrm{d}\,t\end{cases}$$

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ fixé. Montrer que $\mathcal{C}_\theta : (x(u,\theta),y(u,\theta),z(u,\theta))$ est une courbe plane. Dans quel plan est-elle contenue ?

2. Soit $u \in \mathbb{R}$. On pose $\Gamma_u : \theta \mapsto (x(u,\theta), y(u,\theta), z(u,\theta))$. Quel est le type de courbe ? Donner son équation.

3. Trouver le point d'intersection des tangentes telles qu'elles soient orthogonales.

---

2 Maths I

exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose Q un polynôme tel que $\deg(Q) \leq n$. On définit alors f_Q sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in E, \quad f_Q(P) = (PQ)^{(n)}$$

1. Montrer que f_Q est un endomorphisme de E.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f_Q soit un automorphisme.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f_Q soit diagonalisable. Donner $\mathrm{Im}(f_Q)$ et $\mathrm{Ker}(f_Q)$.

4. Soit $n = 2$. Donner les sous-espaces propres de f_Q pour :
a) $Q = X - 1$
b) $Q = X^2 + X + 1$

---

exercice 2 :

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que pour $x \geq 0$, cette série converge.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}\,t$.

---

exercice 3 :
s Soit β la courbe paramétrée définie par, pour $a \in \mathbb{R}_+$:

$$\beta : \begin{cases} x(t) &= a(t - \cos(t)) \\ y(t) &= a(1 - \sin(t)) \end{cases}, \quad t \in]0,\, 2\pi[$$

1. Calculer la longueur de la courbe.

2. On cherche à trouver les courbes Γ qui vérifient les conditions suivantes : il existe une droite $\mathcal{D}$ et une abscisse curviligne s telles que quel que soit $M \in \Gamma$, l'image de M par la translation de vecteur $-\dfrac{S}{2}\overrightarrow{T}$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

a) Ceci est-il vrai pour β et $\mathcal{D} : y = ax$? Si oui, quelle est l'origine de s ?

---

exercice 4 :

Soit $\mathcal{S}$ une surface définie par $z = f(x, y)$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer le vecteur normal à $\mathcal{S}$.

2. Montrer que si la normale à $\mathcal{S}$ en M_0 est parallèle à (Oz) ou coupe (Oz), alors on a la relation

$$y_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - x_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

(Astuce : trouver une relation entre $\overrightarrow{OM_0}$, $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{k}$.)

3. Soit $g = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Déterminer les dérivées partielles de g.

4. Montrer que $\mathcal{S}$ est une surface de révolution si la normale à $\mathcal{S}$ est parallèle à (Oz) ou sécante à (Oz).

---

exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A = XY^\top$.

2. Qu'en est-il de la réciproque ?

Dans toute la suite, on suppose que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

3. Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

4. Déterminer une expression de A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5. À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $A^n = 0$? (condition sur la trace)

6. À quelle condition nécessaire et suffisante A est-elle diagonalisable ?

---

exercice 6 :

Soit $A \in \mathbb{R}$, et f une fonction continue et décroissance sur $[A, +\infty[$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \leq p$. Montrer que :

$$\int_A^{\frac{(p+1)A}{N}} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leq \frac{1}{N} \sum_{n=N}^{p} f\left(\frac{nA}{N}\right) \leq \int_A^{\frac{pA}{N}} f(t)\,\mathrm{d}\,t + f\left(\frac{A}{N}\right)$$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} f\left(\frac{nA}{N}\right)$ converge.

---

exercice 7 :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de premier terme $u_0 = 1$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} u_n$.

1. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de terme général $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un α_0 tel que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(v_n)$ converge.

2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$.

---

3 Maths II

exercice 1 :

Soit $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x\ln(5+\sin(x)) \end{aligned}$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

2. Encadrer $h(x) = \ln(5+\sin(x))$ et $g(x) = \dfrac{1}{5+\sin(x)}$. En déduire le signe de f' et ses variations.

3. Montrer que f réalise une bijection de I sur J un segment à déterminer.

4. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de f.

5. Déterminer f^{-1}.

---

exercice 2 :

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x > |y|\right\}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,t) &\longmapsto f(r\cosh t, r\sinh(t)) \end{aligned}$$

1. Montrer que g est définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

3. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient

$$x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$$

---

4 Questions de cours

1. Développement en série entière de l'exponentielle. Théorème de dérivabilité d'un développement en série entière. Montrer que la dérivée du développement en série entière de exp vaut bien exp.

2. Tous les moyens disponibles pour montrer qu'une matrice est diagonalisable.

3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Dans quel cas est-ce intéressant (loi faible des grand nombres) ?

4. Tout sur la loi géométrique. Est-il plus probable que le premier succès soit pair ou impair ?

5. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis.
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

6. Tout sur la loi de Poisson.

7. Tout sur les coniques.