Notes d'Analyse 1

Paul Lasry-Robin

13 janvier 2026

Résumé

Ce document constitue une prise de notes en temps réel du cours d'Analyse d'Olivier Mila. En raison de sa nature "live", le texte peut contenir des fautes de frappe ou des imperfections de mise en page.

L'objectif de ce support est d'offrir une révision interactive et efficace grâce à l'intégration de liens internes. Si vous relevez des erreurs mathématiques, merci de me les signaler sur Telegram : @leodagan68. Le code source LaTeX de ce projet est disponible sur mon répertoire GitHub (BA1).

Je n'ai commencé à prendre des notes qu'a partir du troisème chapitre, j'ai essayé de le completer pendant les révisions mais cela prenait trop de temps, donc le document est vide sur les chapitre des suites et séries.

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres

1.1 Entiers et rationnels

Définition 1.1.1 *(Entiers naturels)* **.** On note

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \quad , \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Définition 1.1.2 *(Entiers relatifs)* **.** On note

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$$

Définition 1.1.3 *(Nombres naturels)* **.** On note

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Proposition 1.1.4 : *L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$*

Lemme : $a^2 \equiv 0 \mod 2 \implies a \equiv 0 \mod 2$

Preuve du lemme. Si a est impaire, on a que $a = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$ donc $a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Ainsi a^2 est impaire. Par la contraposé, on a que :

a est pair si et seulement si a^2 est paire.

□

Démonstration. Supposons q'il existe une solution $x = \frac{a}{b}$ tel que $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. On suppose la fraction irreductible. On a alors :

$$x^2 = 2 \implies \frac{a^2}{b^2} = 2 \implies a^2 = 2b^2$$

Par le lemme, on sait que a est paire

$$\begin{aligned} a = 2c &\implies 2b^2 = 4c^2 \\ &\implies b^2 = 2c^2 \implies b^2 \equiv 0 \mod 2 \end{aligned}$$

Par le lemme, b est pair, donc :

$$x = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$$

La fraction est réductible, ce qui est en condratiction avec l'hypothèse. Il n'y a donc pas de solution dans $\mathbb{Q}$. $\square$

1.2 Construction des nombres réels

On utilise la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ pour "ajouter" des nomnbres aux entiers.

Définition 1.2.1 *(Minorant / Majorant)* **.** Soit $A \subseteq \mathbb{Q}$ un ensemble non vide.

- Un majorant / minorant de l'ensemble A est un nombre x tel que $x \geq (\leq) \forall a \in A$
- S'il existe un majorant / minorant de A tel que $x \in A$ alors il s'appelle le maximum / minimum de A
- L'ensemble A est majoré / minoré / borné s'il admet un majorant / minorant / les deux.

Ex : $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. On a que A est borné, $\min A = 0, \max A = 1$.

Définition 1.2.2 *(Supprémum / Infinimum)* **.** Soit $A \subseteq \mathbb{Q}(\mathbb{R})$.

- Le supprémum de A est

$$\sup A = \min x \mid x \text{ est un majorant de } A$$

- Le infinimum de A est

$$\inf A = \{x \mid x \text{ est un minorant de } A\}$$

Remarque 1.2.3 : Si A n'a pas de minorant / majorant, on dit par convention $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$.
De plus, si $\max A$, $\min A$ existent, on a :

$$\sup A = \max A$$
$$\inf A = \min A$$

Remarque 1.2.4 : Pour un ensemble borné, on s'attend à toujours avoir un inf et sup, même si min et max n'existent pas, mais c'est faux :

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq x^2\}$$

$$|x| \leq \frac{3}{2} \iff \underbrace{-\frac{3}{2}}_{\text{minorant de } A} \leq x \leq \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{majorant de } A}$$

Proposition 1.2.5 : *Si $x = \sup D$ existe, alors $x^2 = 2$.*

Preuve proposition. 1) Supposons que $x^2 < 2$. Soit $d \in D$ tel que $d = x + \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est choisi tel que $n \geq \frac{2x+1}{2-x^2}$, on a :

$$\begin{aligned} d^2 = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2 \\ \iff \frac{2x+1}{n} &\leq 2 - x^2 \iff n \leq \frac{2x+1}{2-x^2} \end{aligned}$$

Comme n a été choisi comme tel, on a que $d^2 \leq 2$. Ainsi, $d \in D$ et $d > x$, ainsi x n'est pas majorant.

2) Supposons que $x^2 > 2$ [exercice dur !]. Comme on ne peut pas avoir ni $x^2 < 2$ ni $x^2 > 2$, on a que $x^2 = 2$

□

Corollaire 1.2.6 : *Le nombre $x = \sup D$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.*

Remarque 1.2.7 : Il n'y a pas de $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$.

On voit qu'il manque des nombres dans $\mathbb{Q}$, cela nous indique à en ajouter !
Construction de $\mathbb{R}$:
$\mathbb{R}$ s'obtient à partir de $\mathbb{Q}$ en ajoutant les sup et les inf de tous les ensembles bornés $A \subseteq \mathbb{Q}$.

1.3 Propriétés de réels

(i) $\mathbb{R}$ est un corp, (on a $0, 1, +, \cdot$, inverse pour $+$ et $\cdot$, distibutivité, muni d'un ordre total $(x \leq y)$)

(ii) Les definitions de min, max etc... restent les mêmes, pour des sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$

(iii) Réussite de la construction

Théorème 1.3.1 . *Pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et minoré / majoré, le nombre $\sup A$ / $\inf A$ existe toujours et est unique.*

Remarque 1.3.2 : $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} \implies \sup D = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$

1.4 Représentation décimale

Tout nombre $x \in \mathbb{R}$ s'écrit $x \pm d_1 d_2 d_3 \dots d_n, d_{n+1}$ avec $d_i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq d_i \leq 9$

Théorème 1.4.1 . *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si x a une représentation décimale finie et périodique.*

Conséquence du théorème :

- La représentation de $\sqrt{2}$ est bel et bien infinie, non-périodique.
- Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous $x < y \in \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $x < a < y$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a - x| < \varepsilon$.

1.5 Nombre complexe

Dans $\mathbb{R}$, on a une solution de $x^2 = a$ pour tout $a \leq 0$. Mais pas de solution de $x^2 = -1$. On prend $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on le munnit de :

1) L'addition : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2) La multiplication : $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Remarque /Notation :

(i) $(a, 0) + (c, 0) = (a + b, 0)$, $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ab, 0)$. On identifie l'ensemble

$$\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

(ii) Le "nombre" $(0, 1)$ est intéressant :

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

On l'appelle $i = (0, 1) =$ unité imaginaire. On dit aussi que $(a, b) = a + bi$.

Définition 1.5.1 . L'ensemble $\mathbb{R}^2$ munit de $+, \cdot$ et de ces notations / identification est le corp des nomnbres complexe, qu'on note $\mathbb{C}$.

Remarque 1.5.2 : Tout nomnbre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. C'est la forme cartésienne de z.

1.6 Propriétés des nomnbres complexes

(i) $\Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} \quad , \quad \Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$

(iii) $|z_1|^2 = z \cdot \bar{z} \implies (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

(iv) $|z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \implies |z_1 \cdot z_2|^2 \overset{(iii)}{=} z_1 \cdot z_2 \cdot z_1 \bar{\cdot} z_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

(v) Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$

(vi) Inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Trois représentations de $\mathbb{C}$

1) Cartésienne : $z = a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$
2) Forme polaire : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r \in \mathbb{R}^*$
3) Forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$

Conséquences de l'exponentielle complexe

- Pour $z \in \mathbb{C}, \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. Dnc si $z = re^{i\theta}$, alors $\overline{z} = e^{-i\theta}$.

Propriété 1.6.1 *(Formule d'Euler)* **.**

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Propriété 1.6.2 *(Formule de Moivre)* **.**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{1.6.1}$$

$$\implies (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \tag{1.6.2}$$

Propriété 1.6.3 *(Formule pour* $\sin$ *et* $\cos$*)* **.**

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

1.7 Calcul dans $\mathbb{C}$

Calcul de $(1 - \sqrt{3}i)^{30}$

$$\begin{aligned} z &= 1 - \sqrt{3}i \\ |z| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ \arg z &= \arctan\frac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan -\sqrt{3} = \frac{-\pi}{3} \end{aligned}$$

Avec ces informations, on passe en forme polaire :

$$z^{30} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{30} = \ldots = 2^{30}$$

L'équation $z^n = 1$**,** $z = er^{i\theta}$

Par la formule de Moivre (1.6.2), on a :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$$

On a alors que $r^n = 1$ et $n\theta = 0$, donc :

$$r = 1 \quad , \quad \theta = \frac{k2\pi}{n}$$

Les solutions sont donc $\left\{z \in \mathbb{C} \mid e^{i\frac{2k\pi}{n}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il y a bien n solutions distinctes.

L'équation $z^n = w$, pour tout $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$

Etape 1 : Trouver une solution z_0, appellée solution particulière.

Ex : Si $w = se^{i\phi}$, prendre $z_0 = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\phi}{n}}$

Etape 2 : Trouver la solution générele. On a $z^n = w = z_0^n$. Donc :

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

On trouve a nouveau n solutions distinctes : $\mathbb{S} = z_0 \cdot \{\text{solutions de } z^n = 1\}$.

Théorème 1.7.1 *(Théorème fondamental de l'algèbre)* **.** *Tout polynomes $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_i z^i + a_0$, avec $a_i \in \mathbb{C}$ se factorise en :*

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

Corollaire 1.7.2 : *Toute équation polynomiale $p(z) = 0$ de degré n possède n solutions complexes en comptant les multiplicités.*

Ex : Polynome de degré 2.

$$p(z) = az^2 + bz + c = 0$$
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

A interpreter comme : $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ sont les solutions de $u^2 = b^2 - 4ac$

$$\iff z = \frac{-b + \text{"sols de } u^2 = b^2 - 4ac\text{"}}{2a}$$

Ex : $z^2 + 2z + 3 = 0$:

$$z = \frac{-2 \pm \text{"}\sqrt{4 - 12}\text{"}}{2}$$

Les solution de $u^2 = -8$ sont $u_1 = 2\sqrt{2} \cdot i,\ u_2 = -2\sqrt{2} \cdot i$, donc :

$$z = -1 \pm \sqrt{2} \cdot i$$

Remarque 1.7.3 : Si $p(z)$ est à coefficient réels, alors les racines non-réelles vienntn par paire complexes conjuguées.

Chapitre 2

Suites

Chapitre 3

Séries

Chapitre 4

Fonctions

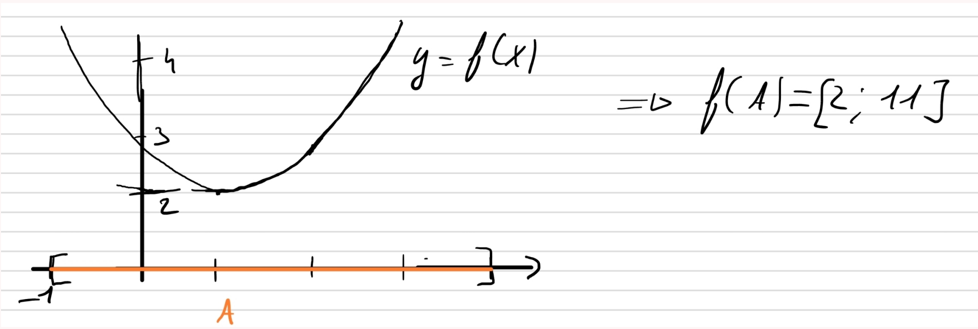
4.1 Rappels

Définition 4.1.1 *(Fonction majorées)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors f est majorée sur $A \subseteq D$ si $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ l'est.
De plus, on pose :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

Pareil pour inf, max et min (si min et max existent).

Ex : Pour $f(x) = (x-1)^2 + 2$ et $A =]-1, 4[$



Donc $\forall x \in A$:

- $\inf f(x) = \min f(x) = 2$
- $\sup f(x) = 11$

Et max n'existe pas.

4.2 Limites

Ex : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$D(f) = \mathbb{R}^*$. On aimerait définir $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.
Il faut deux ingréfiants pour conclure que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$:

1) f doit être définie "un peu autour" de x_0
2) $f(x)$ doit "s'approcher" de l lorsque $x \to x_0$.

Définition 4.2.1 *(Fonction définie au voisinage)* **.** Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $d \in \mathbb{R} > 0$ t.q :

$$]x_0 - d, x_0[\cup]x_0, x_0 + d[\subset D$$

Ex : $\frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de $x_0 = 0$ même si elle n'est pas définie en 0.

Définition 4.2.2 *(Limite d'une fonction)* **.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : D \to R$ def au voisinage de x_0. Alors, f ademt $l \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque $x \to x_0$.
On note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta_\epsilon > 0$ t.q. $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, on a :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Ex 1 : Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 132 & x = 0 \end{cases}$, alors $\lim_{x \to 0} g(x) \neq 132$ car on s'interresse seulement au voisinage de 0.

Ex 2 : Soit $f(x) = 5x - 1$, $x_0 = 0$. Montrons que $\lim_{x \to 2} f(x) = 9$.

1) $D(f) = \mathbb{R} \implies f$ est def dans tout voisinage de $x_0 = 2$.

2) Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ tel que $|x - 2| \leq \delta$.

$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in D \setminus \{2\}$ et $|x - 2| \leq \delta$, on a :

$$|f(x) - 9| \leq \varepsilon$$

Théorème 4.2.3 *(Limites de fonction et suites)* **.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on peut dire que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si et seulement si $\lim_{x \to \infty} f(a_n) = l$ pour toute $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$.*
Idée : $a_n \to x_0$ sont les manières de s'approcher de x_0. Donc $f(x) \to l$ si $f(a_n) \to l$ pour toutes les façons $(a_n \to x_0)$ de s'approcher de x_0.

Ex : Redémonstraion de $\lim_{x \to 2} 5x - 10 = 9$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\}$ une suite telle que $\lim_{n \to \infty} a_n = 2$.
Alors on a :

$$\lim_{n \to \infty} (5a_n - 1) = 5(\lim_{n \to \infty} a_n) - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$$

Comme la suite était arbitraire, on a montré que pour TOUTE SUITE (a_n) :

$$\lim_{x \to 2} 5x - 10 = 9$$

Corollaire 4.2.4 : *Si on a trouvé :*

- *Une suite* $(a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ *t.q.*
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \text{ n'existe pas}$$
- *Deux suites* $(a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ *t.q.* $a_n \to x_0$ *et* $b_n \to x_0$ *mais :*
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *n'existe pas.*

Ex Corollaire 4.2.4 **:** Prenons $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $x_0 = 0$. $D(f) = \mathbb{R}^*$, donc f est définie au voisinage de $x_0 = 0$.En effet :

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0 \qquad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \to 0$$

Mais :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n+1)\pi) = -1$$

Remarque 4.2.5 : On aurait aussi pu considérer la suite :

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} f(c_n) = \cos(\pi n) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \quad \text{qui n'existe pas}$$

Donc $\lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Propriété 4.2.6 *(Limites de fonctions)* **.**
Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et telles que : $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existent. Alors :

1) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$, alors $l_1 = l_2$ (Unicité de la limite)

2) $\forall p, q \in \mathbb{R}$ on a :
$$\lim_{x\to x_0} p \cdot f(x) + q \cdot g(x) = p \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) + q \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

3) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

4) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 alors :
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

5) Si $h : D \to \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$, alors :
$$\lim_{x\to x_0} h(x) = l$$

Démonstration. Théorème des deux gendarmes □

4.3 Calculs de limites

Concidérons pour ces exemples $u \in \mathbb{R}$.

0) $\lim_{x \to x_0} c = c$ où c est une constante.

Démonstration. Soit $a_n \to u$. On a $f(a_n) = c \to c$ □

$\lim_{x \to u} x = u \qquad (f(x) = x)$

Démonstration. Soit $a_n \to u$. On a $f(a_n) = a_n \to u$ □

1) **Polynômes** Exemple (par produit) :

$$\lim_{x \to u} x^2 = \lim_{x \to u}(x \cdot x) = \left(\lim_{x \to u} x\right) \cdot \left(\lim_{x \to u} x\right) = u \cdot u = u^2$$

Par récurrence, on montre que $\lim_{x \to u} x^n = u^n$.

Preuve rapide. **Init.** $(n = 0)$ **:** $\lim_{x \to u} 1 = 1$.
Hérédité : $\lim_{x \to u} x^{n+1} = \lim_{x \to u}(x^n \cdot x) = (\lim_{x \to u} x^n) \cdot (\lim_{x \to u} x) = u^n \cdot u = u^{n+1}$. □

Donc pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, on a :

$$\lim_{x \to u} P(x) = P(u)$$

2) **Fonctions rationnelles** : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Si $Q(u) \neq 0$, on a :

$$\lim_{x \to u} Q(x) = Q(u) \qquad \text{(Point 1)}$$

Donc par la propriété 4, on a :

$$\lim_{x \to u} f(x) = \frac{P(u)}{Q(u)}$$

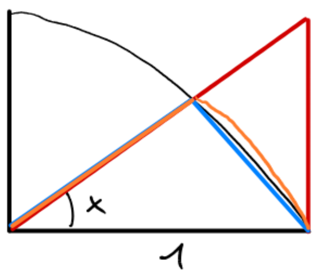
Ex : Ainsi on a :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2}$$

Mais si on a $Q(u) = 0$, il faut faire un travail supplémentaire :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\cos}{x} = 1$. Démostration imagée.



$$\frac{\sin(x)}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

$\ell = 2\pi$	air $= \pi$
$a = x$	air $= \frac{x}{2\pi}\pi = \frac{x}{2}$

Le triangle bleu est plus petit ou égal au triangle orange lui-même plus petit que le rouge. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{\sin x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan x}{2} \\ \implies &\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x} \\ \implies &\frac{\sin x}{x} \le 1 \le \frac{1}{\cos x} \\ \implies &\frac{\sin x \cos x}{x} \le \cos x \le \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Finalement, comme $\cos x \in [0, 1]$ on a :

$$\cos x \ge \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \ge 1 - x^2$$

Donc

$$\cos x \ge 1 - x^2$$

On a alors la chaîne d'inégalités :

$$1 - x^2 \le \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Ceci est vallable pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, car toutes les fonctions sont paires.
Par le théorème des deux gendarmes, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Ex : On peut alors voir :

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} x = 1 \cdot 0 = 0$$

Propriété 4.3.1 *(Limites de fonctions composées / changement de variable)* **.** Soient $f : A \to B, g : B \to \mathbb{R}$ telle que :

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$
2) $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c \in \mathbb{R}$
3) $f(x) \neq b$ au voisinage de a

Alors :

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = c$$

Preuve à l'aide des suites. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \backslash \{a\}$ t.q. $x_n \to a$. On pose $y_n = f(x_n)$. Alors $y_n \to b$ (par 1) et $y_n \neq b$ pour n assez grand (par 3) $\implies (y_n) \subset B \setminus \{b\}$ et $y_n \to b \implies g(y_n) \to c$ (par 2)

□

Ex 1 : Soit $f(x) = x^{12} - 1$. Alors $\lim_{x\to 1} cos(x^{12} - 1)$ vérifie 1 et 2 de la propriété au voisinage de 1 (dés que $x \neq \pm 1$).

Ex 2 : On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2 + \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{3 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$
$$= \lim_{y\to 1} \frac{y^2}{3+y^2} = \frac{1}{4}$$

Attention : La condition 3 est indispensable, regardons un cas où elle n'est pas vérifiée.

Ex 3 : $f(x) = 3$ (constante) et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$

On a $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(3) = 0$.
Mais : on ne peut pas utiliser la prop car f(x) = 3 dans le voisinage de 0. Donc :

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) \neq \lim_{y\to 3} g(y) = \lim_{y\to 3} 2 \neq 0$$

Propriété 4.3.2 *(Limites de réciproques)* **.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone Soit $u \in [a, b]$ et $v = f(u)$. Alors $f([a, b]) \to Im(f)$ est bij, et si $f^{-1}(Im(f)) \to [a, b]$est def au vois de v, alors :

$$\lim_{x \to v} f^{-1}(v) = u$$

Corollaire 4.3.3 : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \geq 0$, $\lim_{x \to v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$*

Démonstration. On pose $f(x) = x^n$, strictement croissante sur $[a, b] \forall b \geq 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to u} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \to v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$$

□

4.4 Lim à gauche/droite, limites infinies

Définition 4.4.1 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de $u \in \mathbb{R}$, c'est à dire $[u - d, u[\subseteq D$ pour tout $d > 0$ (resp. $[u, u + d[\subseteq D \ \forall d > 0$).
Alors f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche (resp. à droite) lorsque $x \to u$, si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D \setminus \{u\}$, on a $x \in [u - \delta, u[$ (resp. $x \in]u, u + \delta]$) :

$$\implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : limites à gauche : $\lim_{x \to u^-}$, limite à droite : $\lim_{x \to u^+}$

Ex : $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Il faut séparer les cas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 0} -1 = \lim\limits_{x \to x^-} -1 = -1$ et $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \to x^+} = 1$.

Propriété 4.4.2 *(Limites gauche droite)* **.** Si f est def au voisinage de u, alors :

$$\lim_{x \to u} f(x) = l \iff \lim_{x \to u^+} f(x) = l \iff \lim_{x \to u^-} f(x) = l$$

Remarque 4.4.3 : Cela montre que $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Définition 4.4.4 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ def au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) c'est à dire $[a, +\infty[\subseteq D$ pour un $a \in \mathbb{R}$ (resp. $]-\infty, a] \subseteq D$).
Alors $f(x)$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite losrque $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on a :

$$x \geq c \text{ (resp. } x \leq c) \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \to l$

Ex : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Preuve avec epsilon. Soit $\varepsilon > 0$. On pose comme $c = \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $x \geq 0$ on a :

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c} \leq \varepsilon$$

Comme ε était arbitraire, on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in D, x \geq c \implies |f(x) - 0| \leq \varepsilon$$

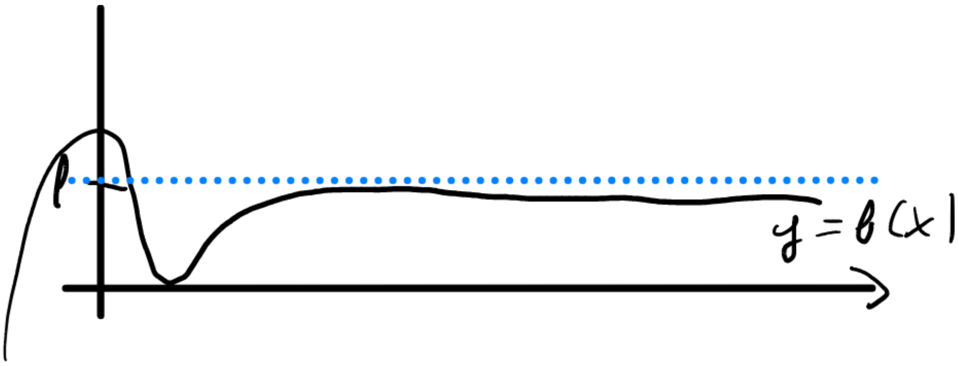
$\square$

Preuve avec les suites. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite t.q. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Comme (x_n) était arbitraire, c'est vrai pour toute suitre. On a donc montré que $\forall (x_n) \to +\infty, \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ $\square$

Remarque 4.4.5 : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \iff f(x)$ a une asymptote horizontale d'équation $y = l$



> **Définition 4.4.6** *(Divergence vers l'infini)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ tends vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $x \to u$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D \setminus \{u\}$ on a :
>
> $$|x - u| \leq \delta \iff f(x) \geq A \quad (\text{resp. } f(x) \geq A)$$
>
> **Notation :** $\lim_{x\to u} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ou $f(x) \to +\infty$ (resp. $-\infty$)

Ex : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Preuve avec epsilon. Soit $A \in \mathbb{R}$. On pose $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ (ou $\delta = 1$ si $A < 0$). Alors dès que $|x - 0| \leq \delta$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2} = A$$

Comme A était arbitraire, c'est bon. $\square$

Remarque 4.4.7 :

- On peut combiner ces lumites généralisées. Par exemple :
$$\lim_{c\downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$
- $\lim_{x\to u^{\pm}} f(x) = \pm\infty \iff f(x)$ admet une asymptote verticale d'eq $x = u$
- Les propriétés algébriques, le théorème des gendarmes, les limites de composées et réciproques, ainsi que les calculs avec $+\infty$ vallable pour les suites restent vrais pour ces limites généralisées.
- Attention aux formes indéterminées :
  — $+\infty - +\infty$
  — $0 \cdot +\infty$
  — $\frac{+\infty}{+\infty}$
  — $\frac{0}{0}$

Ex :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = \infty$$

4.5 Fonctions continues

Définition 4.5.1 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est <u>continues en $x = u$</u> si :
$$\lim_{x\to u} f(x) = f(u)$$

Remarque 4.5.2 *(Concéquences de la continuité)* **:** Cela implique trois choses :

1) Si $u \in D$, alors f est définie au voisinage de u <u>et</u> en u.
2) la limite $\lim_{x\to u} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$
3) tout $f(u) \in \mathbb{R}$

Ex 1 : Les polynômes, les fonctions rationnelles, $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$ (toutes les fonction trigo), e^x, $\log x$ etc... sont continues <u>**sur leur domaine**</u>.

Ex 2 : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ est continues pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On voit que
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2^2+1}{2-1} = 5 = f(2)$$
Mais $1 \notin D \implies f$ n'est pas continue en $x = 1$.

Remarque 4.5.3 : Si f est continue en $u \in \mathbb{R}$ et si $a_n \to u$, alors :
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(u)$$

Définition 4.5.4 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage $\begin{matrix}\text{à droite}\\ \text{à gauche}\end{matrix}$ de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est **continue** $\begin{matrix}\textbf{à droite}\\ \textbf{à gauche}\end{matrix}$ **en** $x = u$ si : $\begin{matrix}\lim_{x\downarrow u} f(x) = \lim_{x\to u^+} f(x) = f(u)\\ \lim_{x\uparrow u} f(x) = \lim_{x\to u^-} f(x) = f(u)\end{matrix}$

Ex : $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases} \implies f$ est continue en tout $x \neq 0$. En $x = 0$ on a :

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) \overset{x\geq 0}{=} \lim_{x\downarrow 0}(2x+1) = 1 = f(0)$$

Donc f est continues à gauche et à droite, donc continue en $x = 0$ donc continue sur $\mathbb{R}$

Propriété 4.5.5 *(Opérations sur les fonctions continues)* **.** Si f et g sont continues en u alors $(f+g)$, $(f \cdot g)$, $(\alpha f + \beta g)$, $\left(\frac{f}{g}\right)$ (si $g(u) \neq 0$) sont aussi continues.
De plus, si f est continue en u et g continue en $f(u)$, alors $(f \circ g)(x)$ est continues en u.

Ex : $\dfrac{\sin(x^2+8x+1)}{\sqrt{x^2+5+\cos(x)}}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$

Définition 4.5.6 *(Prolongement par continuité)* **.** Si $f : D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de u avec $u \notin \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to u} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors, le <u>prolongement par continuité</u> de f est :

$$\begin{aligned} \hat{f} : D \cup \{u\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq u \\ l & \text{si } x = u \end{cases} \end{aligned}$$

Ex 1 : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

$$\hat{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On appelle cette fonction $\text{sinc}(x)$

Ex 2 : A l'inverse $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut pas être prolongée par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Définition 4.5.7 *(Fonction continues sur un intervalle)* **.** Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u> (jusqu'au bord) si :

1) $\lim_{x\to u} f(x) = f(u)$ pour tout $u \in [a,b]$
2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (f est continue à droite en $x = b$)
3) $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (f est continue à gauche en $x = b$)

De manière analogue :

$$\begin{aligned} f : [a,b[\to \mathbb{R} \text{ est continue} &\qquad \text{si } 1+2 \\ ]a,b] \to \mathbb{R} \text{ est continue} &\qquad \text{si } 1+3 \\ ]a,b[\to \mathbb{R} \text{ est continue} &\qquad \text{si } 1 \end{aligned}$$

Théorème 4.5.8 *(Valeur moyenne – TVI)* **.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors :*

$$f([a,b]) = \left[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x) \right]$$

Remarque 4.5.9 *(TVI)* **:** Cela veut dire que f atteint :

- Son inf est son minimum :
$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$$
- Son sup est son maximum :
$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$$
- Toutes les valeurs intermédiaires.

Le min et max n'est pas $\pm\infty$. De plus, $f([a,b])$ est un intervalle fermé.

Preuve de la remarque. Posons $s = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup(f([a,b]))$. On sait qu'il existe une suite $(y_n) \in f([a,b])$ tel que $y_n \to s$. Ainsi

$$\begin{aligned} & f(x_n) && x_n \in [a,b] \\ \implies & \exists (x_{n_k}) \text{ une sous suite de } (x_n) \text{ t.q. } x_{n_k} \to u \in [a,b] \\ \implies & f(u) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) \\ & = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \\ & = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = s \end{aligned}$$

□

Ex : L'equation $\cos(x) = x$ possède une solution $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On pose $f : \begin{aligned} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) - x \end{aligned}$, continue. On a $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 \underline{\geq 0}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) -$

$\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \underline{< 0}$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\underbrace{\min_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x)}_{x<0}, \underbrace{\max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x)}_{x>0}\right]$$

Ainsi, il existe $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = 0 \iff \cos(x_0) = x_0$

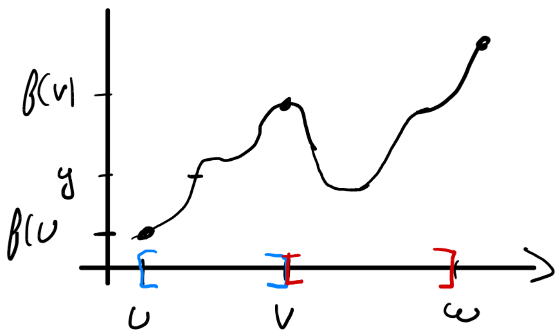
Corollaire 4.5.10 *(TVI – 1)* **:** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continues et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou l'inverse), alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f(u) = 0$*

Corollaire 4.5.11 *(TVI – 2)* **:** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ et continue, où I est un intervalle, alors $\Im(f) = f(I)$ est aussi un intervalle.*

Corollaire 4.5.12 *(TVI – 3)* **:** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.*

Preuve du corrolaire 4.5.12. $\underline{\Longleftarrow}$ cf. Chap 0.
$\underline{\Longrightarrow}$ Supposons que f n'est pas strictement monotone :

$$\exists u < v < w \text{ tel que } f(u) < f(v) > f(w)$$



Ainsi, $f(x_1) = y = f(x_2)$, ce n'est donc pas injectif. □

Chapitre 5

Dériviées

5.1 Définitions et exemples

Définition 5.1.1 *(Dériviée)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage x_0 ou en x_0. Alors f est dérivable ou différentiable en x_0 si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe ($\in \mathbb{R}$).
Notation :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = \mathcal{D}_x f(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

On dit :

- $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0
- $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable en tout $x_0 \in D$.

Remarque 5.1.2 : Le nombre $f'(x_0)$ est la pentes de la tengente à la courbe $y = f(x)$ au point$(x_0, f(x_0))$.

Ex :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Définition 5.1.3 *(La fonction dérivée)* **.** La fonction dérivée d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est la fonction $\begin{aligned} f' : D(f(x)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$ où $D(f') = \{x \in D | f \text{ est dérivable en } x\}$

Ex 1 : $f(x) = x^2$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2 \cdot x_0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = x^2$ est dérivable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

Ex 2 : $f(x) = \sin(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ \implies & \underbrace{-h}_{\to 0} = \frac{1 - h^2 - 1}{h} \geq \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\to 0} \geq \frac{0}{h} = \underbrace{0}_{\to 0} \\ \implies & \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0) \end{aligned}$$

sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. De manière analogue : $\cos'(x) = -\sin(x)^2$

Proposition 5.1.4 : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$*

1) *Si f est dérivable en x_0, alors f est aussi continue en x_0*

2) *f est dérivable en x_0 si et seulement si :*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{équation de la tengente}} + \underbrace{(x - x_0) \cdot \varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction tel que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Le reste tend plus vite vers 0 que $x - x_0$

Preuve de la proposition.

1) On a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

2) Poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x-0)(x-x_0)}{x - x_0}$ et calculer la limite lorsque $x \to x_0$

□

Remarque 5.1.5 : f continues $\not\Rightarrow$ f dérivable.

Ex : $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Alors f est continue en 0 mais on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \uparrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Ainsi, la limite n'existe pas, donc f n'est pas dérivable en 0.

Propriété 5.1.6 *(Opérations algébriques)* **.** Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ derivables en $x_0 \in D$. Alors :

1) $(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = p \cdot f'(x_0) + q \cdot g'(x_0)$
2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, si $g(x_0) \neq 0$

Propriété 5.1.7 *(Dérivées de fonction usuelles)* **.**

0) $f(x) = c \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$
1) $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ pour $\mathbb{N}^*$

Preuve. Par récurrence sur n.

- $n = 1 : f(x) = x,\ f'(x) = 1.$
- Supposons vrai pour n, montrons pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{n+1} = x^n \cdot x \\ f'(x) &\overset{\text{Prop 2)}}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

$\square$

2) $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \overset{\text{Prop 3}}{=} \frac{\sin'(x)\cos - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \cdots = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ ou } 1 + \tan^2(x)$$

3) $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$

$$\implies f(x) = \frac{1}{x^n} \overset{\text{Prop 3)}}{\implies} f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

Propriété 5.1.8 *(Dériviées de composées)* **.** Soient $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, deux fonction telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$. Alors :

$$\begin{aligned} (g(f(x_0)))' &= (g \circ f)'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Dériviée interne}} \end{aligned}$$

Preuve de la propriété 5.1.8. Le quotient est

$$\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En prenant la limite lorsque $h \to 0$, on obtient le résultat voulu. $\square$

Propriété 5.1.9 *(Dériviées des réciproques)* **.** Soit $f : A \to B$ bijective et dérivable sur A, un intervalle ouvert. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$, alors

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1(x)})}$$

Preuve de la propriété 5.1.9. On admet que f^{-1} est dérivable sur tout B. On dérive l'equation $f(f^{-1}(x)) = x$ des deux cotés :

$$\begin{aligned} x = \left(f \circ f^{-1}\right)(x) &\iff 1 = f(f^{-1}(x))' \overset{\text{Prop 5.1.8}}{=} f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) \\ &\iff \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = (f^{-1})'(x) \end{aligned}$$

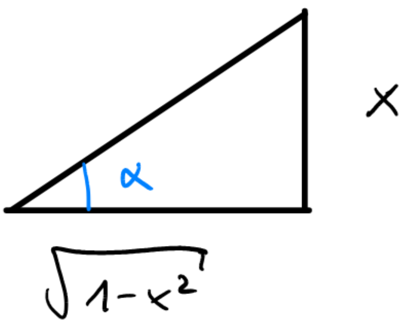
$\square$

Ex 1 : $f(x) = \sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ où $f(x) = x^n$, où $x > 0$

$$\begin{aligned} x = f(g(x)) &= \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \\ &\implies 1 = n(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot (\sqrt[n]{x})' \\ &\implies (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

On montre de manière analogue que $\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et on verra que c'est aussi vrai pour tout réel.

Ex 2 : $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$, $x \in \,]-1,1[$, car $f = \sin(x)$, donc $f'(x) = \cos(x)$



$\cos(\arcsin(x)) = \cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

$$\implies \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition 5.1.10 . $\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{h}$ est la dérivée à droite, si $h \uparrow 0$, c'est la dérivée à gauche.

Propriété 5.1.11 . f est dérivable en x_0 si et seulement si les deux dérivées latérales existent ($\in \mathbb{R}$) et sont égales.

Ex 1 : $f(x) = |x|$. On a :

$$f'_{\text{doite}}(0) = 1 \neq -1 = f'_{\text{gauche}}(0)$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Ex 2 : $f(x) = \sqrt[3]{x}$. On a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n}\right)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f'(0)$ n'existe pas car $\notin \mathbb{R}$, mais les deux dérivées latérales sont égales à $+\infty$.

Définition 5.1.12 *(Dériviée d'ordre supérieur)* **.** La <u>dérivée seconde</u> de f est

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$$

La <u>dérivée d'ordre n</u> de f est définie par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

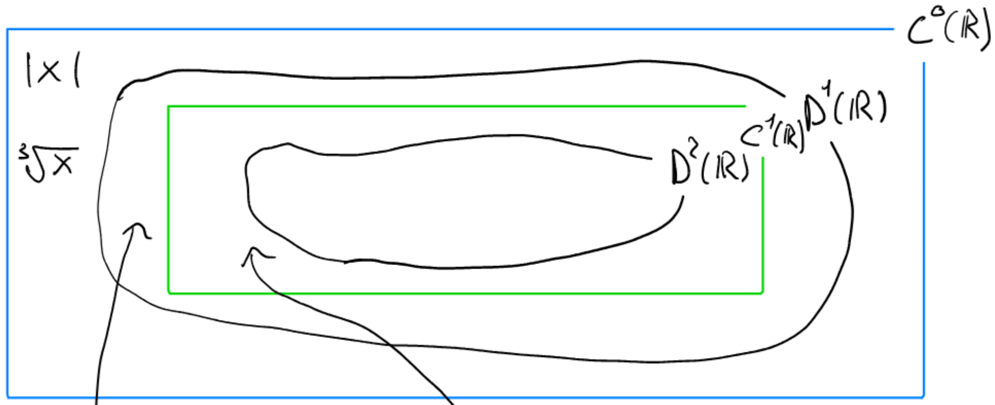
Définition 5.1.13 *(Clsses de fonctions dérivables)* **.** Soit I un intervalle. Alors

$$D^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}$$
$$C^n(I) = \left\{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur et } f^{(n)} \text{ est continue sur } I\right\}$$

On pose $C^\infty(I) = \left\{f : I \to \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe pour tour } n \in \mathbb{N}\right\}$.

Remarque 5.1.14 :

- $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Les fonction polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, rationnelles sont dans C^∞ sur leur domaine de définition.
- $C^0(I) \supseteq D^1(I) \supseteq C^1(I) \supseteq D^2(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \cdots D^\infty \supseteq C^\infty$



$f(x) = x\cdot|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{h|h|-0}{h} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = 2|x| \Rightarrow$ continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus D^2(\mathbb{R})$

$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Remarque 5.1.15 :

- $x^n\,|x|$ est dans $C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$
- $x\,|x| \in C^\infty\Big(\,]0,+\infty[\,\Big)$
  $\in C^\infty\Big(\,]-\infty,0[\,\Big)$

Ex $D^1 \setminus C^1$: On a $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Alors

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si x} \neq 0$$

et

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

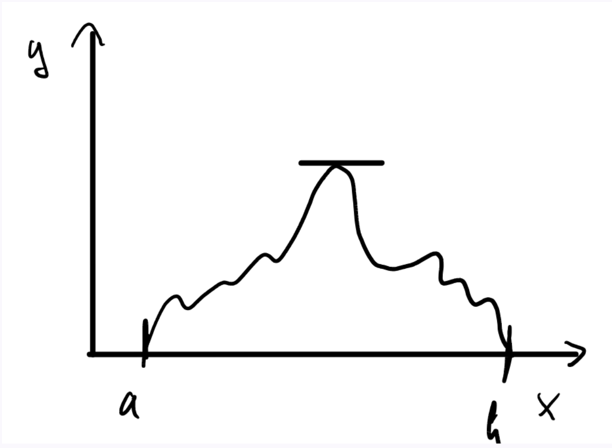
donc $f(x)$ appartient à $D^1(\mathbb{R})$. Cependant,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

donc $f'(x)$ n'est pas continue en 0. Donc $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$.

5.2 Dérivée et croissance

Théorème 5.2.1 *(Théorhème de Rolle)* **.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f'(u) = 0$.*



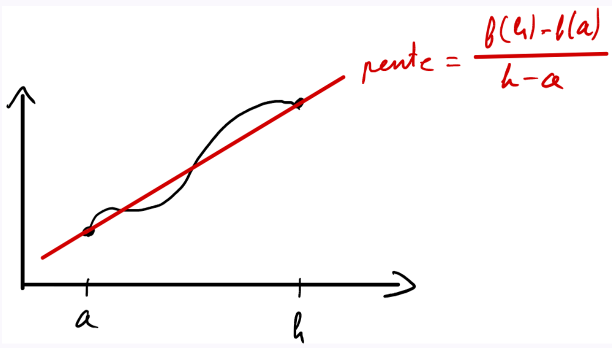
Preuve par le TVI. Par le TVI (4.5.8), f atteint son max $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, on le suppose supérieur à 0. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que :

$$f(u) = M \implies f'(u) = f'_{\text{droite}}(u) = \lim_{x\to u^+} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq 0$$
$$\text{et} \quad f'(u) = f'_{\text{gauche}}(u) = \lim_{x\to u^-} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \geq 0$$

Donc $f'(u) = 0$. □

Théorème 5.2.2 *(Théorhème des acroissements finis – TAF)* **.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que :*

$$f'(u) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Preuve. En exercice. □

Propriété 5.2.3 *(Application du TAF (5.2.2))* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1) Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est constante sur $[a,b]$.

   Preuve. Le sens " $\Longleftarrow$ " est évident. Pour le sens " $\Longrightarrow$ ", si f n'est pas constante, on trouve $c, d \in [a,b]$ tels que $c < d$ et $f(c) \neq f(d)$. Par le TAF, $\exists u \in]c,d[$ tel que
   $$f'(u) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$$
   ce qui est une contradiction. $\square$

2) Si $g : [a,b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$ dérivable sur $]a,b[$ et $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, alors $f(x) = g(x) + c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [a,b]$.

3) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.

4) Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est décroissante sur $[a,b]$.

5) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

6) Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

Remarque 5.2.4 : Attention au point 5 et 6, la réciproques est en général fausse. Par exemple, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

5.2.1 La fonction exponentielle (et logarithmes)

Théorème 5.2.5 . *Il existe une <u>unique</u> fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \quad f(0) &= 1 \end{aligned}$$

Preuve. La preuve de l'existence se fera plus tard.
Pour l'unicité, la preuve se fait en deux étapes :

1) $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$. On calcule la dérivée de h :
   $$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot \underbrace{f'(-x)}_{=f(-x)}(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Donc h est constante ! Comme $h(0) = f(0) \cdot f(0) = 1$, on a
   $$h(x) = \underbrace{f(x)}_{\neq 0} \cdot f(-x) = 1$$

2) **Unicité :** Soit $g(x)$ une (autre) fonction telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$. On pose

$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. On calcule $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2} = \frac{g \cdot f - g \cdot f}{f^2} = 0$$

Donc h est constante. Comme $h(0) = \frac{1}{1} = 1$ on a que $h(x) = 1 = \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \implies g(x) = f(x)$

$\square$

Définition 5.2.6 *(Fonction exponentielle)* **.** Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp(x)$ (et plus tard e^x).

Propriété 5.2.7 *(exp(x))* **.**

1) $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$ nous donne

$$\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$$

2) $\exp(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

3) la fonction exponentielle est strictement croissante

4) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 0$

Preuve. $\exp(x) \geq x$. En effet, si $g(x) = \exp(x) - x$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) =& \exp(x) - 1 > 0 (x > 0) \\ &\implies g \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\end{aligned}$$

Comme $g(0) = 1$, donc $g(x) \geq 0$ $\square$

6) $\exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Ainsi : $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$ et

$$\exp(n) = e^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$ et on vérifie que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Donc :

$$\exp\left(\frac{p}{q} = e^{\frac{p}{q}}\right) \quad \forall \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Définition 5.2.8 . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose que

$$e^x = \exp(x)$$

Remarque 5.2.9 : La fonction exponentielle est

- injective (car strictement croissante)
- surjective (coréstraintes à $]0, +\infty[$)

Donc $\exp(x)$ est bijective !

Définition 5.2.10 *(Logarithme)* **.** Le <u>logarithme</u> est la réciproque que la fonction exponentielle. Donc :

$$\begin{aligned} \log :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

Propriété 5.2.11 *(Logarithme)* **.**

1) $\mathcal{D}(\log) =]0, +\infty[$ et $\Im(\log) = \mathbb{R}$.
2) $\log(1) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} & x = \exp(\ln(x)) \\ \iff & 1 = \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = x \ln'(x) \\ \implies & \ln'(x) = \frac{1}{x} \\ \implies & \ln \in C^\infty\left(]0, +\infty[\right) \end{aligned}$$

3) log est strictement croissante.
4) $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$.

Définition 5.2.12 *(Autres bases)* **.** Pour $a \in \mathbb{R} > 0$

$$\begin{aligned} \exp_a(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x) = a^x \\ \log_a(x) &= \text{ réciproque} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Remarque 5.2.13 : Pour $x, u \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} & x^u = \exp(\log(x) \cdot u) \\ \implies & (x^u)' = \exp(\log(x) \cdot u) \cdot (\log(x) \cdot u)' = u x^{u-1} \end{aligned}$$

Définition 5.2.14 *(Fonctions trigonométriques hyperboliques)* **.** On défini :

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2},\\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2},\\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\end{aligned}$$

Théorème 5.2.15 *(Règle de Bernouilli-l'Hospital)* **.** *Soit x_0 et $f, g : A \to \mathbb{R}$, où $A =]x_0 - d, x_0 + d[\setminus \{x_0\}$ est un voisinage de x_0. Si :*

1) $\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$

2) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Preuve. En exercices (Application du TAF) □

Remarque 5.2.16 : Ce théorème marche aussi pour limite à droite et à gauche.

Ex 1 : Grâce a l'Hostpital, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x} = 1$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \frac{x^p}{\log(x)} &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to +\infty} px^p = \begin{cases} +\infty & p > 0\\ 0 & p \leq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Cela montre que $\log(x)$ croît moins vite que tout polynôme (de degré supérieur à 0).

Ex 3 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\log(\cos(2x)\cdot 3)}{x^2}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{\cos(2x)} \cdot \frac{-\sin(2x)}{2x} \cdot 2\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{3}{\cos(0)} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(y)}{y} \cdot 2\right)\\ &= \exp(-6) = e^{-6}\end{aligned}$$

Remarque 5.2.17 : Attention : Si la limite du quotient des dérivées n'existe pas ($\notin \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), alors B-H ne marche pas.

Propriété 5.2.18 *(Fonctions $\in C^1$ par morceaux)* **.** Soient $f, g \in C^1(I = \text{intervalle})$ et $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0)$, et on pose

$$\begin{aligned} h : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors h est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$ et dans ce cas, $h \in C^1(I)$.

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} h'_{\text{gauche}}(x_0) &\overset{x \leq x_0}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &\overset{\text{def de } h}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Similaire pour $h'_{droite}(x_0) = g'(x_0)$. La limites à gauche et à droite coïncindent si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$. Dans ce cas, on a :

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \leq 0 \\ g'(x) & x \geq 0 \end{cases} \implies h' \text{ est continue en } x_0$$

Dans ce cas, h' est continue sur I $(h \in C^1)$ □

Remarque 5.2.19 : Cette propriété peut être utilisée récursivement

- La preuve montre : $f'_{\text{gauche}}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$

  $f'_{\text{droite}}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$

  si les limites existent

Ex : Soit $f(x) = \begin{cases} \sinh(x) & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$. Alors :

- f est continue en 0 car $\sinh(0) = 0 = \sin(0)$
- de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$ et $sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\in C^2$ car $\sinh''(0) = \sinh(0) = 0 = -\sin(0) = \sin''(0)$
- $\notin C^3$ car $\sinh'''(0) = \cosh(0) = 1 \neq \sin'''(0) = -1$

Donc $f(x) \in C^2(\mathbb{R}) \setminus D^3(\mathbb{R})$

5.3 Etude de fonctions

c.f. Slides

5.3.1 Applications : convergence de suites définies par récurrence

Une suite définie par récurrence est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 =$ valeur fixée et $a_{n+1} = g(a_n)$, pour une fonction $g : D \to \mathbb{R}$.

Remarque 5.3.1 *(Important)* **:** Si (a_n) converge, disons $a_n \to l \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) \\ &\overset{g \text{ est cont.}}{=} g(\lim_{n\to\infty} a_n) = g(l) \end{aligned}$$

Donc l est forcément une sol de l'équation $\underline{x = g(x)}$. On supposera en général que $g(x)$ est continue et même C^1 sur un intervalle.

Ex : Soit $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = a_n^2 = g(a_n)$ où $g(x) = x^2$. Condidats pour l : $x = g(x) = x^2$, donc $l = 0$ ou $l = 1$. On calcule quelques valeurs :

$$a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{1}{9}, a_2 = \frac{1}{81}, \ldots \to 0$$

En revanche, si $a_0 = 3$, on a :

$$(a_n) = (3, 9, 81, 81^2, \ldots) \to +\infty$$

De plus, si $a_0 = -1$, alors :

$$(a_n) = (-1, 1, 1, 1, \ldots) \to 1$$

Dans un cas simple comme celui-là, on peut montrer par récurrence que :

$$a_n = (a_n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$\begin{cases} a_n \to 0 & |a_0| < 1 \\ a_n \to 1 & a_0 = \pm 1 \\ a_n \to +\infty & |a_0| > 1 \end{cases}$$

Dans le cas général, une étude de la fonction $g(x)$ peut nous aider. Si

$$a_0 \geq l \text{ et } l \leq g(x) \leq x \quad \forall x \geq l \tag{5.3.1}$$

alors :

- $a_1 = g(a_0) \geq l$, $a_2 = g(a_1) \geq l$. Par récurrence : $a_{n+1} = g(a_n) \geq l$, donc $a_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (a_n) est <u>minorée</u>.

- $a_1 = g(a_0) \leq a_0 \implies \ldots \implies a_{n+1} = g(a_n) \leq a_n$ et par récurrence, (a_n) est <u>décroissante</u>

Ainsi, dans ce as (a_n) converge vers un candidat l par décroissance minorée.

Remarque 5.3.2 : Equation 5.3.1 se généralise

Théorème 5.3.3 *(Récurrence linéaire)* **.** *Soit (a_n) définie par récurrence via*

$$a_0 = a, a_{n+1} = g(a_n)$$

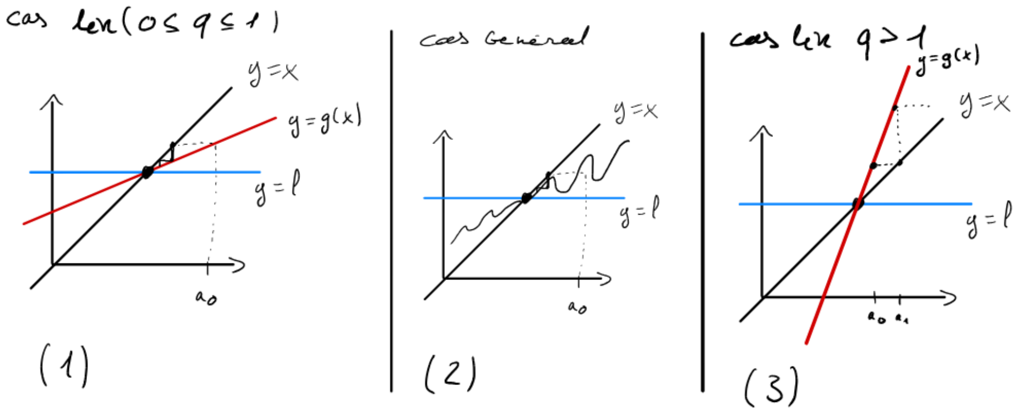
où $g(x) = qx + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$. Alors (a_n) converge vers l'unique solution l de l'equation $g(x) = x$ si et seulement si

$$|q| < 1 \quad ou \quad a_0 = l$$

Donc

$$l \leq g(x) \leq x$$

Démonstration. **Illustration :**



On voit que dans le cas (1), la fonction converge vers le seul candidat : l. Dans le cas (2), la fonction converge aussi. Dans le cas (3), la fonction diverge. Si $q \leq 0$, on pose

$$b_k = a_{2k}$$
$$c_k = a_{2k+1}$$

Ces suites sont définies par récurrence : $b_0 = a_0$, $b_{k+1} = a_{2k+2} = g(g(a_{2k})) = h(b_k)$ où $h(x) = g(g(x)) = g \circ g(x) = g(qx + b) = q^2x + qb + b$. Pareil pour c_n :

$$c_0 = a_1, c_{n+1} = g(g(a_{2k+1})) = h(c_k)$$

Si $-1 < q \leq 0$, alors, $0 \leq q^2 < 1$, donc b_k et c_k convergent par le cas précédent vers l.
Si $q < -1, q^2 > 1$, donc les suites b_n et c_n divergent par le cas précédent, donc a_n diverge également. □

Ex Non linéaire **:** $a_0 =$ fixé $\in \mathbb{R}^*$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = g(a_n)$ où $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Les candidats pour l sont $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$3 - x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$g(x) - x = \dfrac{3 - x^2}{2x}$	$+$	$-$	$+$	$-$
Comparaison	$g(x) > x$	$g(x) < x$	$g(x) > x$	$g(x) < x$

Donc on a

- si $a_0 \in [\sqrt{3}, +\infty[$, on a
$$\sqrt{3} \leq g(x) \leq x$$
et $a_n \to \sqrt{3}$
- si $a_0 \in]0, \sqrt{3}[$, $a_1 = g(a_0) \geq \sqrt{3}$ alors a_1 est dans la région précédente, donc $a_n \to \sqrt{3}$
- si $a_0 < 0, a_n \to -\sqrt{3}$

Donc on conclut que si $a_0 > 0, a_n \to \sqrt{3}$ et si $a_0 < 0, a_n \to -\sqrt{3}$.

5.4 Développements limités

Le but est d'approximer une fonction par un polynôme.

Définition 5.4.1 . Soit $f \in C^n(I)$ où I est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre n en x_0 est l'unique polynôme $p(x)$ de degré inférieur ou égal à n dont les dérivées d'ordre x_0 sont les mêmes que celles de f jusqu'à l'ordre n.

Ex : Soit $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$. On a

- $p_1(x) = x$ car $\sin(0) = 0 = p_1(0), \sin'(0) = 1 = p_1'(0)$.
- $p_2(x) = x$ car $\sin''(0) = 0 = p_2''(0)$.
- $p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ car $p_3'(x) = -1 - \frac{3}{6}x^2, p_3''(x) = \frac{-6}{6}x, p_3'''(x) = -1 = \sin'''(0)$

Ainsi, la formule pour trouver le p_n polynôme est

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

où $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Définition 5.4.2 *(Développement limité)* **.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Alors, f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si

$$f(x) = \text{ polynôme de degré} \leq n \ + \text{ reste } r_n(x)$$

pour tout $x \in I$ où $r_n(x)$ vérifie

- Pour tout $c > 0$, $|r_n(x)| \leq c \cdot |x - x_0|^n$ dans un voisinage de x_0.
- $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$
- $r_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ est telle que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Théorème 5.4.3 *(Formule de Taylor)* **.** *Soit $f \in C^n(I)$, où I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Alors f admet un DL_n en x_0 donné par*

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

Démonstration. On applique B-H n fois. □

Remarque 5.4.4 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ouvert. Alors

- Si f admet un DL_n, il est unique.
- Si f est continue en x_0, alors f admet un DL_0 en x_0, de plus l'autre sens en vrai aussi si on suppose que $\varepsilon(x) = 0$.
- Si f est continue en x_0 alors f admet un DL_1 en x_0 si et seulement si f est dérivable.

Ex : On va voir que $\sin(x)$ admet un développement limité d'ordre 3 en $x_0 = 0$ donné par $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$. La seule chose à montrer est

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \\ \iff &\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^2}{x^3} \overset{\text{B-H}}{=} 0 \end{aligned}$$

On a donc que le DL_2 en $x_0 = 0$ est

$$x + x^2\varepsilon(x)$$

Remarque 5.4.5 *(Estimation du reste)* **:** On a que

$$|r_n(x)| \leq \left|f^{(n+1)}(u)\right| \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n!}$$

pour u entre x et x_0.

5.4.1 Applications : Calculs de limites

- Calculons la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{6} + \varepsilon(x)\right) = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

  On voit qu'avec un DL_1 ca ne marche pas. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + x\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} \end{aligned}$$

  Donc il a fallu prendre un développement limité d'ordre plus grand.

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2+2\cos(x)}{x^4}$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(x^2-2+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{12+\varepsilon(x)} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\varepsilon(x)\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^2\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

Cette série converge et la série originale aussi, par comparaison.

Ex Calculs de DL : Tant qu'on écrit le reste, on peut tout faire.

Ex : Le DL_2 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.
On utilise le DL_2 de $\sin(x)$ et le DL_1 de $\cos(x)$. Donc

$$
\begin{aligned}
\sin(x)\cos(x) &= \left(x+x^2\varepsilon(x)\right)(1+x\varepsilon(x)) \\
&= x+x^2\varepsilon(x)+x^2\varepsilon(x)+x^3\varepsilon(x)\varepsilon(x) \\
&= x+x^2\left(\underbrace{\varepsilon(x)+\varepsilon(x)+x\varepsilon(x)\varepsilon(x)}_{\to 0}\right) \\
&= x+x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

Ex : Le DL_1 en x_0 de $f(x) = e^{\cos(x)}$. On utiliser les DL_1 de $\cos(x)$ et e^x.

$$
e^{\cos(x)} = 1+\cos(x)+\cos(x)\varepsilon\left(\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}\right)
$$

On voit que $\varepsilon(x)$ ne tend pas vers 0.
Solution : Méthode (i) : il faut réécrire l'expression pour avoit quelque chose qui tend vers 0. Donc :

$$
\begin{aligned}
e^{\cos(x)} &= e^{1+x\varepsilon(x)} = e\cdot e^{c\varepsilon(x)} \\
&= e\left(1+x\varepsilon(x)+x\varepsilon(x)\varepsilon(x\varepsilon(x))\right) \\
&= e+x\left(e\varepsilon(x)+e\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(x\varepsilon(x))\right)
\end{aligned}
$$

Methode (ii) : Combiner le DL_1 en $x_0 = 0$ et de $\cos(x)$ avec le DL_1 en $x_0 = \cos(0) = 1$ de e^x. Donc :

$$
\begin{aligned}
e^x &= e+e(x-1)+(x-1)\underbrace{\tilde{\varepsilon}(x)}_{\to 0 \text{ lorsque } x\to 1} \\
\implies e^{\cos(x)} &= e+e\left(\cos(x)-1\right)+\left(\cos(x)-1\right)\tilde{\varepsilon}(x) \\
&= e+e(x\varepsilon(x))+(x\varepsilon(x))\tilde{\varepsilon}(\cos(x)) \\
&= e+x\left(e\varepsilon(x)\right)+\varepsilon(x)\tilde{\varepsilon}(\cos(x))
\end{aligned}
$$

5.4.2 Séries de Taylor

Si $f \in C^n(I)$, avec I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$$

Question : si $f \in C^\infty(I)$, a-t-on $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$? Quand on a $n \to \infty$, il faut que :

1) La série converge

2) Le reste $r_n(x) \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$

Définition 5.4.6 *(Série de Taylor)* **.** Pour $f \in C^\infty(I)$ avec I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$, la série de Taylor de f centrée en x_0 est la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Remarque 5.4.7 :

- Cette série est définie quelque soit $f \in C^\infty(I)$ (même si $r_n(x) \nrightarrow 0$)
- Si $\mathrm{x}_0 = 0$, elle s'appelle aussi série de Maclaurin.
- C'est une série entière ! (cf. Chap. 3.3 $\rightsquigarrow$ centre $= x_0$, rayon de convergence pas connu)

Ex 1 : $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R}), x_0 = 0$. Le DL_n de f donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$$

Donc la série de Taylor (en $x_0 = 0$) est donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il reste à voir que $\lim_{x\to\infty} r_n(x) = 0$. On a :

$$|r_n(x)| \leq f^{(n+1)}(u)\frac{|x|^{n+1}}{n!} = e^u \frac{|x|^{n+1}}{n!} \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{n!} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Car exp est strictement croissant et que $u \in [0, x]$, donc $e^u \leq e^{|x|}$. Le reste tend bien vers 0. Donc e^x est égale à sa série de Taylor en $x_0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Remarque 5.4.8 : En fait, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k$

Ex 2 : Cela marche aussi pour sin, cos, sinh, cosh !

$$\implies \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$
$$\implies \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.4.9 : Cela donne enfin une raison pour la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. En effet

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + i\sin(x) \end{aligned}$$

Proposition 5.4.10 *(Dériviées de série entières)* **:** *Si* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$, *alors*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{k+1} (x-x_0)^k$$

et les rayons de convergences sont les mêmes !

Concéquences de la porposition :

- On peut définir

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet, $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$ et

$$\exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \overset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x)$$

C'est donc l'unique fonction f telle que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

- Si $f(x)$ est déjà une série entière, i.e. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$, on dérive :

$$f(x_0) = b_0, f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (x-x_0)^{k-1} \implies f'(x_0) = b_1$$

$$f^{(k)}(x) = b_k \cdot k! \implies b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Ex 3 : $f(x) = \frac{1}{1-x} \in C^\infty(]-1,1[)$. On a vu que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1(x-0)^k \quad \text{si } |x| < 1$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \text{ série de Taylor en } x_0 = 0 \; = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Attention : pour $x \notin]-1,1[$, la série diverge. Par example :

$$f(-10) = \frac{1}{11} \neq \sum_{k=0}^{\infty} (-10)^k$$

Ex 4 : $f(x) = \log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^n \varepsilon(x)$. Série de Taylor ? $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$. On calcule $f(x) -$ série de Taylor :

$$\begin{aligned}
f(x) - \text{ série de Taylor } &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} k x^{k-1} \\
&= \frac{1}{1-(-x)} - \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 0 \quad \text{cf. exemple précédent} \\
&\implies \log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = C = 0 \\
&\implies \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k
\end{aligned}$$

pour $x \in]-1,1[$. En $x = 1$, on obtient, par prolongement par continuité que :

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Ex 5 (Contre example) : On pose $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. On vérifie qu'elle est continue en 0 :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0. De plus, si $x \neq 0$, $f'(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$ et on calcule $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \to \pm\infty} e^{-y^2} 2y^3 \\
&= \lim_{y \to \pm\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0 \\
&\implies f'(0) = 0 \\
&\implies f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

où P_k est un polynôme. Donc $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(k+1)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série de Taylor de f en $x_0 = 0$ est nulle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Cependant, $f(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$. Donc f n'est pas égale à sa série de Taylor en $x_0 = 0$. La raison est que le DL de f est

$$f(x) = 0 + x^n \varepsilon(x) = r_n(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$$

Remarque 5.4.11 : Prenons $\sin(x)$ et $\sin(x) + e^{\frac{-1}{x^2}}$. Ces deux fonctions ont la même série de Taylor en $x_0 = 0$, mais seule $\sin(x)$ est égale à sa série de Taylor !

Chapitre 6

Intégrales

6.1 Primitives et intégrales

Définition 6.1.1 *(Primitive)* **.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue où I est intervalle. Une **primitive** de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Remarque 6.1.2 : Si F, G sont deux primitives de la même fonction f, alors :

$$F(x) - G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Donc F et G diffèrent d'une constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in I.$$

Notation : $\displaystyle\int f(x)dx$ est l'ensemble de <u>toutes</u> les primitives de f. Donc :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

où F est une primitive de f. Abus de notation :

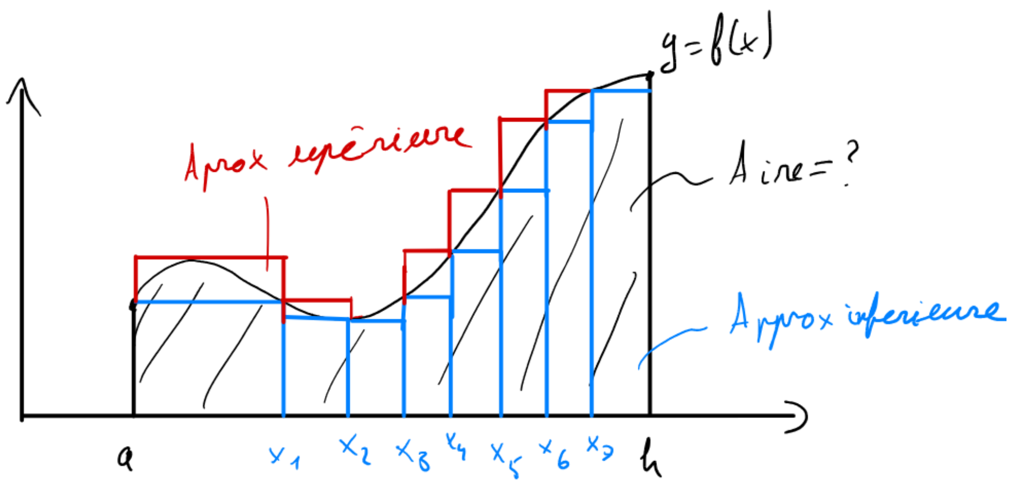
$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Remarque 6.1.3 : L'intégrale $\int f(x)dx$ s'appelle **intégrale indéfinie** de f.

Changeons de point de vue, pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$x^r\ (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$		
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$		

FIGURE 6.1 – Primitives de fonctions de base



Approx 1 (inférieure) :

$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))$$

Approx 2 (supérieure) :

$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))$$

Définition 6.1.4 *(Intégrale de Riemann)* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est **intégrable** (au sens de Riemann) si

$$\sup\{\text{Approx 1}\} = \inf\{\text{Approx 2}\} = A \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

Dans ce cas, on parle d'intégrale définie de f entre a et b.

Remarque 6.1.5 : On dit que $\int_a^b f(x)dx$ donne l'aire signée sous la courbe. Par convention, on dit que $\int_a^a = 0$ et que $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Théorème 6.1.6 . *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, monotone, bornée et continue partout sauf en un nombre finis de points, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$.*

Preuve. Technique (Ex : monotone) □

Ex Contre exemple : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors f n'est pas intégrable sur $[0,1]$. En effet, pour toute subdivision $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, on a

$$\text{Approx } 1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

car dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ il existe des réels irrationnels. De même,

$$\text{Approx } 2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$$

car dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ il existe des rationnels. Donc

$$\sup\{\text{Approx } 1\} = 0 \neq 1 = \inf\{\text{Approx } 2\}$$

et f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Remarque 6.1.7 : Cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue mais ce n'est pas le sujet de ce cours.

Propriété 6.1.8 *(Intégrale de Riemann)* **.** Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables au sens de Riemann et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ (Linéarité)

2) Si $a < u < b$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^u f(x)dx + \int_u^b f(x)dx$ (Additivité)

3) Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (Monotonie)

Preuve. Technique, mais :

1) Linéarité :

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \leq \alpha \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \beta \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x)$$

□

Remarque 6.1.9 : On peut écrire l'intégrale avec n'importe quelle variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

On a aussi :

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Théorème 6.1.10 *(Théorème de la moyenne)* **.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $u \in\,]a, b[$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)dx = f(u) \cdot (b - a)$$

Démonstration. On prend $m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq M = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Donc :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

Ainsi :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u \in\,]a, b[$ tel que $f(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. □

Remarque 6.1.11 : Donc $f(u)$ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Théorème 6.1.12 *(Théorème fondamental du calcul intégrale)* **.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors*

1) *La fonction $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $[a, b]$.

2) *Si F est une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration. **Parie 1 :** On dérive G :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0} f(u)\left((x+h)-x\right) = f(x)h \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\underbrace{f(u)h}_{\in]x,x+h[} = \lim_{u\to x} f(x) \end{aligned}$$

Partie 2 : On a $F(x) = G(x) + c$, donc :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Notation : On note $F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

6.2 Calculs d'intégrale

Ex Facile : On calcule.

1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$. Mais attention : aire signée ! Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0$

2) $\displaystyle\int (3x+1)dx = \frac{3}{2}x^2 + x + c$

3) $\displaystyle\int a^x dx = \int e^{\ln(a)x}dx = \frac{1}{\ln(a)}e^{\ln(a)x} + c = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

4) $\displaystyle\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + c$ (vérifier en dérivant). Ex :
$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$

5) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$ (vérifier en dérivant). Ex :
$$\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

Propriété 6.2.1 *(Changement de variable/substitution)* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [u,v] \to [a,b]$ une fonction de la classe C telle que $\varphi(u) = a, \varphi(v) = b$. Alors :
$$\int_a^b f(x)dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Remarque 6.2.2 : Si φ est bijective, alors on peut écrire :

$$F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$$

Donc $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Ex : On pose $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. En posant :

$$\begin{aligned} \varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longmapsto \sin(t) \end{aligned}$$

Cette fonction est de classe C^1, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt = \frac{\pi}{4} \quad \text{cf exemple précédent} \end{aligned}$$

Ex indéfinie : On reprend $\int \sqrt{1-x^2}$. On pose :

$$\begin{aligned} \varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\to [-1,1] \\ t &\mapsto \sin(t) \end{aligned}$$

φ est bijective. Donc :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\ dt &= \int cos^2(t)\ dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + c \end{aligned}$$

On évalue en $t = \arcsin(x)$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

Remarque 6.2.3 : On peut aussi exprimer t en fonction de x.

Ex remaeque : On pose $\int e^{x^2}dx$. Donc $t = x^2$, $\frac{dt}{dx} = 2x$:

$$\begin{aligned} \int e^{x^2}dx &= \frac{1}{2}\int e^t\ dt = \frac{1}{2}e^t + c \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + c \end{aligned}$$

Comment bien choisir <u>la</u> substitution ? C'est dur ! Voici quelques exemples :

- $\displaystyle\int e^{x^2}dx : t = x^2$
- $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx, \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3}dx : t = 1+\cos(x)$, ou $t = 1+x^2$. Il faut prendre ce qu'il ya "sous" le dénominateur, ou mieux "dedans dessous".

- $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx, \int \sqrt{1+x^2}dx$

  $x=\sin(t) \quad x=\sinh(t)$

- En cas de forces majeures, pour les fonction rationnelles en sin ou cos comme :

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx, \int \frac{1}{\sin^4(x)}dx$$

on pose

$$t=\tan(x) \text{ donc } \sin(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } \cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$
$$\text{ou } t=\tan(\tfrac{x}{2}), \text{ donc } \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ex : $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4(x)}dx.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^4(x)}dx &\overset{t=\tan(x)}{=} \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^4}\frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \int t^{-4}+2t^{-2}+1\ dt = \frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}+c \\ &= -\frac{1}{3\tan^3(x)}-\frac{1}{\tan(x)}+c\end{aligned}$$

Ex : $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)}dx &\overset{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c\end{aligned}$$

Propriété 6.2.4 *(Intégrale par parties)* **.** Soit $f \in C^0([a,b])$ et $g \in C^1([a,b])$ et F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Démonstration. On a $(Fg)'=F'g+Fg'=fg+Fg$, donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b \left(F(x)g(x)\right)'dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

□

Remarque 6.2.5 : La preuve montre que c'est pareil pour les intégrales indéfinies.

Ex 1 :

$$\int e^x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x(x-1) + c$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int \ln(x) \cdot 1dx \\ &= \ln(x)x - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x\ln(x) - x + c \\ &= x(\ln(x) - 1) + c\end{aligned}$$

Ex 3 :

$$\begin{aligned}\underbrace{\int \cos^2(x)dx}_{I} &= \int \cos(x) \cdot \cos(x)dx \\ &= \sin(x)\cos(x) - \int \sin(x) \cdot (-\sin(x))\, dx \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \underbrace{\int \cos^2(x)dx}_{I} \\ &\implies 2I = \sin(x)\cos(x) + x - I \\ &\implies 2I = \sin(x)\cos(x) + x + c \\ &\implies I = \frac{1}{2}\left(\sin(x)\cos(x) + x\right) + c\end{aligned}$$

Ex 4 : (Intégrale par récurrence)

$$\begin{aligned}A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx \\ \implies A_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^{2n-1}(x)dx \\ &= \left[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(2n-1)\cos^{2n-2}(x)(-sin(x))dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2(n-1)}(x)dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(x)dx - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx \\ \implies A_n &= (2n-1)A_{n-1} - (2n-1)A_n \\ \implies 2nA_n &= (2n-1)A_{n-1} \\ \implies A_n &= \frac{2n-1}{2n}A_{n-1}\end{aligned}$$

6.2.1 Intégration de fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont des fonctions de la forme $\frac{p(x)}{q(x)}$ où p, q sont des polynômes. Pour intégrer ces fonctions, on utilise la décomposition en éléments simples.

Building blocks

i) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$. Ainsi :

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \int \frac{1}{u}\frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \log|ax+b| + c$$

avec $u = ax + b \implies du = adx \implies dx = \frac{1}{a}du$.

ii) $\int \frac{1}{x^k} dx = \int x^{-k} dx = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{x^{1-k}}{1-k} + c$, ainsi :

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^k} du = \frac{1}{a}\frac{u^{1-k}}{1-k} + c = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{1-k}}{1-k} + c$$

iii) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + c$. Si $q(x) = ax^2 + bx + c$ est tel que $\Delta < 0$, alors on peut "completer le carré" :

$$q(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right)$$

On pose $d^2 = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$, donc :

$$= ad^2\left(\left(\frac{x + \frac{b}{2na}}{d}\right) + 1\right)$$

On pose $u = \frac{x + \frac{b}{2na}}{d} \implies du = \frac{1}{d}dx \implies dx = d \cdot du$, donc :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{ad^2} \int \frac{1}{u^2+1} d \cdot du \\ &= \frac{1}{ad} \arctan(u) + c = \frac{1}{ad} \arctan\left(\frac{x + \frac{b}{2na}}{d}\right) + c\end{aligned}$$

iv) $\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = I$. On a alors :

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{q(x)} dx \\ &= \frac{1}{2a} \log|ax^2 + bx + c| + \text{(iii)} + c\end{aligned}$$

v) $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{1}{u^k}du$ avec $u = ax^2+bx+c \implies du = (2ax+b)dx$. Donc :

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

vi) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}dx$. En exercices.

A l'aide de ces 6 building blocks, ont peut intégrer tout $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec le décomposition en éléments simples.

Méthode 1

1) Si deg$(p) \geq deg(q)$, faire la division polynomiale !

   Ex : Prenons $\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1}dx$. On fait la division polynomiale :

$$= \int \frac{3(x^4-x^3-x+1)}{x^4-x^3-x+1}dx + \int \frac{3x^3+3x+3}{x^3-x^3-x+1}dx$$

$$= \int 3dx + \int \frac{\dots}{q(x)}dx = 3x + \int \frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1}dx$$

2) Factoriser le dénominateur $q(x)$ et décomposer. On a $q(x) = (x-u)^k \cdot (ax^2+bx+c)(x-v)$. Ainsi on peut écrire :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-u} + \frac{A_2}{(x-u)^2} + \frac{A_k}{(x-u)^k} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

   Ex : $q(x) = x^4-x^3-x+1 = (x-1)^2(x^2+x+1)$. Donc :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2-2B+C)x^2 + (A_2+B-2C)x + (-A_1+A_2+C)}{x^4-x^3-x+1}$$

   On pose alors le système :

$$\implies \begin{cases} A_1 + B = 3 \\ A_2 - 2B + C = 0 \\ A_2 + B - 2C = 3 \\ -A_1 + A_2 + C = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A_1 = 1 \\ B = 2 \\ A_2 = 3 \\ C = 1 \end{cases}$$

   Donc :

$$\frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

3) Intégrer les éléments simples à l'aide des building blocks.

Ex :

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \log|x-1| + c$$
$$\int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \int 3(x-1)^{-2}dx = \frac{-3}{x-1} + c$$
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \log|x^2+x+1| + c$$

Ainsi :

$$\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1}dx = 3x + \log|x-1| - \frac{3}{x-1} + \log|x^2+x+1| + c$$

6.3 Intégrale généralisée ou impropres

On sait que si $f : [a,b] \overset{\text{continue}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ alors l'intégrale est l'air sous la courbe. On généralise à $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $f :]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Ex : On pourrait s'intérresser à $\int_0^1 \log(x)dx$ (qui a une asymptote verticale en $x = 0$). Ou encors $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

Problème : L'approximation est toujours $\pm\infty$.
Solution : On restreint à un intervalle fermé, puis on utilise les limites.

Définition 6.3.1 *(Intégrales généralisées)* **.** 1) Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors :

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)dx$$

2) Si $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, alors :

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)dx$$

3) Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, alors :

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^w f(x)dx + \lim_{v \to b^-} \int_w^u f(x)dx$$

où $w \in]a,b[$ est quelconque.

Remarque 6.3.2 :
- Ce sont les intégrales généralisées (ou impropres) de f.
- On dit que l'intégrale converge si la (les !) limites existe(nt) ($\in \mathbb{R}$), et l'intégrale diverge sinon.
- Pour le point 3), on peut montrer que le résultat ne dépend pas du w choisi.

Notation :

$$\int_a^{+\infty^-} = \int_a^{+\infty} \quad , \quad \int_{-\infty^+}^b = \int_{-\infty}^b$$

Ex 1 :

$$\begin{aligned}\int_{0^+}^1 \log(x)dx &= \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \log(x)dx = \lim_{u\to 0^+}\Big[x\log(x)-x\Big]_{x=u}^{x=1}\\ &= \lim_{x\to 0^+}(-1-u\log(u)+u) = -1+\lim_{u\to 0^+}\frac{-\log(x)}{\frac{1}{u}}\\ &\overset{\text{B-H}}{=} -1+\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -1\end{aligned}$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-x}dx = \lim_{u\to+\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^u\\ &= \lim_{uti+\infty}(1-e^{-u}) = 1\end{aligned}$$

Ex 3 : Pour $r>0$, on a $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r}dx = \begin{cases}\frac{1}{1-r} & r<1\\ +\infty & r\geq 1\end{cases}$. Aussi $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx = \begin{cases}\frac{1}{1-r} & r>1\\ +\infty & r\leq 1\end{cases}$.

Exemple :

$$I = \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r}dx = \lim_{u\to 0^+}\int_u^1\frac{1}{x^r}dx = \lim_{u\to 0^+}\begin{cases}(-\log(u)) = +\infty & r=1\\ \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_{x=u}^{x=1} & r\neq 1\end{cases}$$

Calculons $\left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_{x=u}^{x=1}$:

$$\left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_{x=u}^{x=1} = \frac{1}{1-r}+\frac{1}{r-1}\lim_{u\to 0^+}u^{1-r}$$

Et ceci diverge si $r>1$ et converge vers $\frac{1}{1-r}$ si $r<1$

$$\implies I = \begin{cases}\frac{1}{1-r} & r<1\\ +\infty & r\geq 1\end{cases}$$

Ex 4 : On étudie : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$. On coupe en $w=0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{u\to-\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_{x=u}^0 + \lim_{u\to+\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_0^{x=u}\\ &= \pi\end{aligned}$$

Remarque 6.3.3 : Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge, i.e. si les deux limites existent, alors cette intégrale vaut :

$$\underbrace{\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^u f(x)dx}_{\text{valeur de cauchy}}$$

Ex 5 :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} xdx &= \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{+\infty} xdx \\ &= \lim_{u\to-\infty} \frac{-u^2}{2} + \lim_{v\to+\infty} \frac{v^2}{2}\end{aligned}$$

L'intégrale diverge ! En revenche, sa valeur principale de Cauchy est $\lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} xdx = 0$. On voit alors que la valeur principale de Cauchy $\neq \int_{-\infty}^{+\infty}$.

Propriété 6.3.4 *(Comparaison d'intégrales)* **.** Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b[$. Alors :

1) $\int_a^{b^-} f(x)dx$ converge $\Longleftarrow$ $\int_a^{b^-} g(x)dx$ converge.

Démonstration. Théorème du gendarme seul ! □

Ex du 1) : $I = \displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt &\overset{x=1-t}{=} -\int_1^{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \left(2\sqrt{1}\right) - \lim_{u\to0^+} \left(2\sqrt{u}\right) = 2 - 0 = 2\end{aligned}$$

qui converge. Donc I converge par comparaison.

Propriété 6.3.5 *(Comparaison intégrales / séries)* **.** Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, et décroissante. Alors :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ converge } \Longleftrightarrow \int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

⚠Valeurs pas égales !

Ex : La somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{n^p}dx$ converge si et seulement si $p > 1$.

Ex :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\underbrace{\log(n)}_{u})^p} \text{ converge } \iff I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\left(\log(x)\right)^p} dx \text{ converge}$$

Voyons la valeur de l'intégrale indéfinie :

$$\int \frac{1}{x\left(\log(x)\right)^p} dx \overset{du=\frac{1}{x}dx}{=} \int \frac{1}{u^p} du = \begin{cases} \frac{u^{1-p}}{1-p} + c & p \neq 1 \\ \log(u) + c & p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{log(x)^{1-p}}{1-p} & p \neq 1 \\ \log(\log(x)) & p = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\implies I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\left(\log(x)\right)^p} dx \overset{p=1}{=} \lim_{u \to +\infty} \left[\log(\log(x))\right]_{x=2}^{u} = +\infty$$

$$\implies I \overset{p\neq 1}{=} \lim_{u \to +\infty} \left[\frac{\log(x)^{1-p}}{1-p}\right]_{x=2}^{u} = c\frac{-\lim_{u\to+\infty} \log(x)^{1-p}}{1-p} - \frac{\log(2)^{1-p}}{1-p}$$

I converge si et seulement si $p > 1$, donc par la propriété 6.3.5

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(\log(n)\right)^p} \text{ converge } \iff p > 1$$

En particulier :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)} \text{ diverge}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)^2} \text{ converge}$$