

Notes d'Analyse 1

Paul Lasry-Robin

24 novembre 2025

Table des matières

1	Les nombres	2
2	Suites	3
3	Séries	4
4	Fonctions	5
4.1	Rappels	5
4.2	Limites	6
4.3	Calculs de limites	8
4.4	Lim à gauche/droite, limites infinies	11
4.5	Fonctions continues	13
5	Dérivées	17
5.1	Définitions et exemples	17
5.2	Dérivée et croissance	23
5.2.1	La fonction exponentielle (et logarithmes)	24
5.3	Etude de fonctions	28
5.4	Application : convergence de suites définies par récurrence	29

Chapitre 1

Les nombres

Chapitre 2

Suites

Chapitre 3

Séries

Chapitre 4

Fonctions

4.1 Rappels

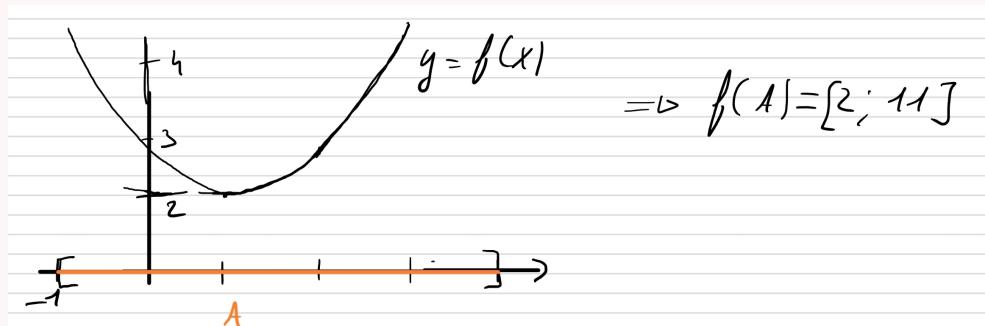
Définition 4.1.1 (Fonction majorées) . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors f est majorée sur $A \subseteq D$ si $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ l'est.

De plus, on pose :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

Pareil pour inf, max et min (si min et max existent).

Ex : Pour $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ et $A =] - 1, 4 [$



Donc $\forall x \in A :$

- $\inf f(x) = \min f(x) = 2$
- $\sup f(x) = 11$

Et max n'existe pas.

4.2 Limites

Ex : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$D(f) = \mathbb{R}^*$. On aimeraient définir $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

Il faut deux ingrédients pour conclure que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$:

1. f doit être définie "un peu autour" de x_0
2. $f(x)$ doit "s'approcher" de l lorsque $x \rightarrow x_0$.

Définition 4.2.1 (Fonction définie au voisinage). Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $d \in \mathbb{R} > 0$ t.q :

$$]x_0 - d, x_0] \cup]x_0, x_0 + d[\subset D$$

Ex $\frac{\sin x}{x}$: Est définie au voisinage de $x_0 = 0$ même si elle n'est pas définie en 0.

Définition 4.2.2 (Limite d'une fonction). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow R$ def au voisinage de x_0 . Alors, f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque $x \rightarrow x_0$.

On note : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ t.q. $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, on a :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Ex 1 : Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 132 & x = 0 \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 132$ car on s'interesse seulement au voisinage de 0.

Ex 2 : Soit $f(x) = 5x - 1$, $x_0 = 0$. Montrons que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \implies f$ est def dans tout voisinage de $x_0 = 2$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ tel que $|x - 2| \leq \delta$.

$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, on a montré que :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in D \setminus \{2\}$ et $|x - 2| \leq \delta$, on a :

$$|f(x) - 9| \leq \varepsilon$$

Théorème 4.2.3 (Limites de fonction et suites) . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ def au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on peut dire que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l \ \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

Idée : $a_n \rightarrow x_0$ sont les manières de s'approcher de x_0 . Donc $f(x) \rightarrow l$ si $(a_n) \rightarrow l$ pour toutes les façons ($a_n \rightarrow x_0$) de s'approcher de x_0 .

Ex Redémonstration de $\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 10 = 9$: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\}$ une suite t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5a_n - 1) = 5(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$$

Comme la suite était arbitraire, on a montré que pour TOUTE SUITE (a_n) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 10 = 9$$

Corollaire 4.2.4 : Si on a trouvé :

- Une suite $(a_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ t.q.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ n'existe pas}$$

- Deux suites $(a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ t.q. $a_n \rightarrow x_0$ et $b_n \rightarrow x_0$ mais :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Ex Corollaire : Prenons $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ $x_0 = 0$

$D(f) = \mathbb{R}^* \implies f$ est définie au voisinage de $x_0 = 0$. En effet :

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \rightarrow 0$$

Mais :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1$$

Remarque 4.2.5 : On aurait aussi pu considérer la suite :

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = \cos(\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \quad \text{qui n'existe pas}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Propriété 4.2.6 (*Limites de fonctions*) .

Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et telles que : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existent. Alors :

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$, alors $l_1 = l_2$ (Unicité de le limite)

2. $\forall p, q \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p \cdot f(x) + q \cdot g(x) = p \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + q \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

4. Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

5. Si $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ est t.q.

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

au voisinage de x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

(Théorème des deux gendarmes)

4.3 Calculs de limites

Concidérons pour ces exemples $u \in \mathbb{R}$.

0. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ où c est une constante.

[Soit $a_n \rightarrow u$. On a $f(a_n) = c \rightarrow c$]

$\lim_{x \rightarrow u} x = u$ ($f(x) = x$)

[Soit $a_n \rightarrow u$. On a $f(a_n) = a_n \rightarrow u$]

1. **Polynômes** Exemple (par produit) :

$$\lim_{x \rightarrow u} x^2 = \lim_{x \rightarrow u} (x \cdot x) = \left(\lim_{x \rightarrow u} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow u} x \right) = u \cdot u = u^2$$

Par récurrence, on montre que $\lim_{x \rightarrow u} x^n = u^n$. *Preuve rapide* :

Init. ($n = 0$) : $\lim_{x \rightarrow u} 1 = 1$.

Héritéité : $\lim_{x \rightarrow u} x^{n+1} = \lim_{x \rightarrow u} (x^n \cdot x) = (\lim_{x \rightarrow u} x^n) \cdot (\lim_{x \rightarrow u} x) = u^n \cdot u = u^{n+1}$.

Donc pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} P(x) = P(u)$$

2. Fonctions rationnelles : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Si $Q(u) \neq 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} Q(x) = Q(u) \quad (\text{Point 1})$$

Donc par la propriété 4, on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \frac{P(u)}{Q(u)}$$

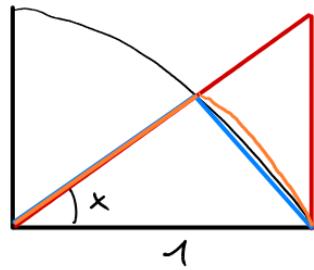
Ex : Ainsi on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2}$$

Mais si on a $Q(u) = 0$, il faut faire un travail supplémentaire :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 1$. Démonstration imagée.



$$\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{x}{z} \leq \frac{\tan(x)}{z} = \frac{\sin(x)}{z \cos(x)}$$

Diagram illustrating the proof:

$\ell = 2\pi$	$\text{air} = \pi$
$a = x$	$\text{air} = \frac{x}{2\pi} \pi = \frac{x}{2}$

Le triangle bleu est plus petit ou égal au triangle orange lui-même plus petit que le rouge.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{2} &\leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \\ \implies \sin x &\leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\ \implies \frac{\sin x}{x} &\leq 1 \leq \frac{1}{\cos x} \\ \implies \frac{\sin x \cos x}{x} &\leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

Finalement, comme $\cos x \in [0, 1]$ on a :

$$\cos x \geq \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \geq 1 - x^2$$

Donc

$$\cos x \geq 1 - x^2$$

On a alors la chaîne d'inégalités :

$$1 - x^2 \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Ceci est vivable pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, car toutes les fonctions sont paires.
Par le théorème des deux gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

Ex : On peut alors voir :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 1 \cdot 0 = 0$$

Propriété 4.3.1 (Limites de fonctions composées / changement de variable). Soient $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. :

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \in \mathbb{R}$
3. $f(x) \neq b$ au voisinage de a

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

Preuve à l'aide des suites. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{a\}$ t.q. $x_n \rightarrow a$.

On pose $y_n = f(x_n)$. Alors $y_n \rightarrow b$ (par 1) et $y_n \neq b$ pour n assez grand (par 3) $\implies (y_n) \subset B \setminus \{b\}$ et $y_n \rightarrow b \implies g(y_n) \rightarrow c$ (par 2)

□

Ex 1 : Soit $f(x) = x^{12} - 1$. Alors $\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x^{12} - 1)$ vérifie 1 et 2 de la propriété au voisinage de 1 (dés que $x \neq \pm 1$).

Ex 2 : On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 + \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{3 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2}{3 + y^2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Attention : La condition 3 est indispensable, regardons un cas où elle n'est pas vérifiée.

Ex 3 : $f(x) = 3$ (constante) et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} g(3) = 0$.

Mais : on ne peut pas utiliser la prop car $f(x) = 3$ dans le voisinage de 0. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq \lim_{y \rightarrow 3} g(y) = \lim_{y \rightarrow 3} 2 \neq 0$$

Propriété 4.3.2 (Limites de réciproques) . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Soit $u \in [a, b]$ et $v = f(u)$. Alors $f([a, b]) \rightarrow Im(f)$ est bij, et si $f^{-1}(Im(f)) \rightarrow [a, b]$ est def au vois de v , alors :

$$\lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(v) = u$$

Corollaire 4.3.3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$

Preuve. On pose $f(x) = x^n$, strictement croissante sur $[a, b] \forall b \geq 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow u} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$$

□

4.4 Lim à gauche/droite, limites infinies

Définition 4.4.1 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ def. dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de $u \in \mathbb{R}$, c'est à dire $[u - d, u[\subseteq D \forall d > 0$ (resp. $]u, u + d] \subseteq D \forall d > 0$).

Alors f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche (resp. à droite) lorsque $x \rightarrow u, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.q.

$$\forall x \in D \setminus \{u\}$$

On a

$$x \in [u - \delta, u[$$

(resp. $x \in]u, u + \delta]$)

$$\implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : limites à gauche : $\lim_{x \rightarrow u^-}$, limite à droite : $\lim_{x \rightarrow u^+}$

Ex : $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Il faut séparer les cas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} -1 = \lim_{x \rightarrow x^-} -1 = -1$ et $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x^+} 1 = 1$.

Propriété 4.4.2 (Limites gauche droite) . Si f est def au voisinage de u , alors :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow u^+} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) = l$$

Remarque 4.4.3 : Cela montre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Définition 4.4.4 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ def au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) c'est à dire $[a, +\infty[\subseteq D$ pour un $a \in \mathbb{R}$ (resp. $] -\infty, a] \subseteq D$).

Alors $f(x)$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$) si $\forall \varepsilon > 0 \exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in D$ on a :

$$x \geq c (x \leq c) \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \rightarrow l$

Ex : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Preuve avec epsilon. Soit $\varepsilon > 0$. On pose comme $c = \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $x \geq 0$ on a :

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c} \leq \varepsilon$$

Comme ε était arbitraire, on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in D, x \geq c \implies |f(x) - 0| \leq \varepsilon$$

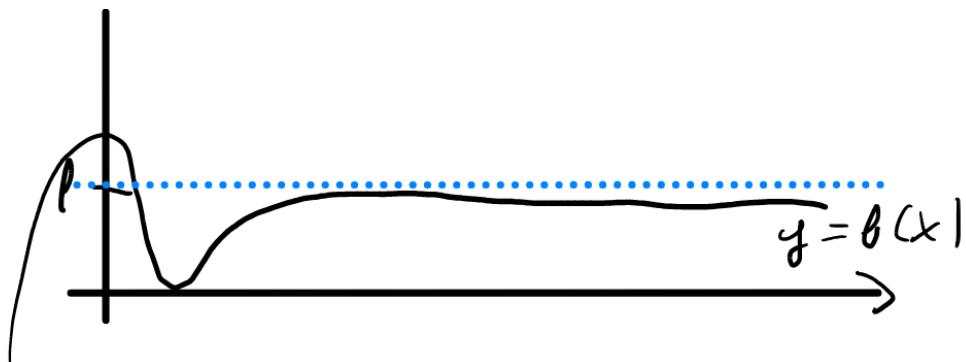
□

Preuve avec les suites. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Comme (x_n) était arbitraire, c'est vrai pour toute suite. On a donc montré que $\forall (x_n) \rightarrow +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ □

Remarque 4.4.5 : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \iff f(x)$ a une asymptote horizontale d'équation $y = l$



Définition 4.4.6 (Divergence vers l'infini) . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ def au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ tends vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $x \rightarrow u$ si $\forall A \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in D \setminus \{u\}$ on a :

$$|x - u| \leq \delta \iff f(x) \geq A \quad (\text{resp. } f(x) \leq A)$$

Notation : $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ou $f(x) \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$)

Ex : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Preuve avec epsilon. Soit $A \in \mathbb{R}$. On pose $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ (ou $\delta = 1$ si $A < 0$). Alors dès que $|x - 0| \leq \delta$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2} = A$$

Comme A était arbitraire, c'est bon. \square

Remarque 4.4.7 :

- On peut combiner ces limites généralisées. Par exemple :

$$\lim_{c \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow u^\pm} f(x) = \pm\infty \iff f(x)$ admet une asymptote verticale d'eq $x = u$
- Les propriétés algébriques, le théorème des gendarmes, les limites de composées et réciproques, ainsi que les calculs avec $+\infty$ valable pour les suites restent vrais pour ces limites généralisées.
- Attention aux formes indéterminées :

— $+\infty - +\infty$

— $0 \cdot +\infty$

— $\frac{\pm\infty}{+\infty}$

— $\frac{0}{0}$

Ex :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = \infty$$

4.5 Fonctions continues

Définition 4.5.1 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ def au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est continues en $x = u$ si :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$$

Remarque 4.5.2 (Concéquences de la continuité) : Cela implique trois choses

1. $u \in D \implies f$ def au voisinage de u et en u .
2. la limite $\lim_{x \rightarrow u} f(x)$ existe dans \mathbb{R}
3. tout $f(u) \in \mathbb{R}$

Ex 1 : Les polynômes, les fonctions rationnelles, $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$ (toutes les fonction trigo), e^x , $\log x$ etc... sont continues sur leur domaine.

Ex 2 : $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ est continues pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On voit que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2^2 + 1}{2 - 1} = 5 = f(2)$$

Mais $1 \notin D \implies f$ n'est pas continue en $x = 1$.

Remarque 4.5.3 : Si f est continue en $u \in \mathbb{R}$ et si $a_n \rightarrow u$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(u)$$

Définition 4.5.4 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ def au voisinage à droite à gauche de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est

continue à droite en $x = u$ si :
à gauche

$$\lim_{x \uparrow u} f(x) = f(u)$$

$$\lim_{x \downarrow u} f(x) = f(u)$$

Ex : $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases} \implies f$ est continue en tout $x \neq 0$. En $x = 0$ on a :

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \downarrow 0} (2x + 1) = 1 = f(0)$$

Donc f est continues à gauche et à droite, donc continue en $x = 0$ donc continue sur \mathbb{R}

Propriété 4.5.5 (Opération sur les fonctions continues) . Si f et g sont continues en u alors $f + g$, $f \cdot g$, $\alpha f + \beta g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(u) \neq 0$) sont aussi continue.

De plus, si f est continue en u et g continue en $f(u)$, alors $(f \circ g)(x)$ est continues en u .

Ex : $\frac{\sin(x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{x^2 + 5 + \cos(x)}}$ est continue sur tout \mathbb{R}

Définition 4.5.6 (Prolongement par continuité) . Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est def au voisinage de u avec $u \notin \mathbb{R}$ et tq $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors, le prolongement par continuité de f est :

$$\hat{f} : D \cup \{u\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq u \\ l & \text{si } x = u \end{cases}$$

Ex 1 : $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$\hat{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On appelle cette fonction $\text{sinc}(x)$

Ex 2 : A l'inverse $\cos(\frac{1}{x})$ ne peut pas être prolongée par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Définition 4.5.7 (Fonction continues sur un intervalle) . Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (jusqu'au bord) si :

1. $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u) \forall u \in [a, b]$
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (f est continue à droite en $x = b$)
3. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (f est continue à gauche en $x = b$)

De manière analogue :

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1 + 2
$]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1 + 3
$]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1

Théorème 4.5.8 (Valeur moyenne – TVI) . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors :

$$f([a, b]) = \left[\inf_{x \in [a, b]} f(x), \sup_{x \in [a, b]} f(x) \right]$$

Remarque 4.5.9 : Cela veut dire que f atteint :

- Son inf est son minimum :

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Son sup est son maximum :

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Toutes les valeurs intermédiaires.

Le min et max n'est pas $\pm\infty$. De plus, $f([a, b])$ est un intervalle fermé.

Preuve que f atteint. Posons $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup(f([a, b]))$. On sait qu'il existe une suite $(y_n) \in f([a, b])$ tel que $y_n \rightarrow s$. Ainsi

$$\begin{aligned} & f(x_n) & x_n \in [a, b] \\ \implies & \exists (x_{n_k}) \text{ une sous suite de } (x_n) \text{ t.q. } x_{n_k} \rightarrow u \in [a, b] \\ \implies & f(u) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = s \end{aligned}$$

□

Ex : L'équation $\cos(x) = x$ possède une solution $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On pose $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue. On a $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 \geq 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \leq 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\underbrace{\min_{x < 0} f(x)}, \underbrace{\min_{x > 0} f(x)}\right]$$

Ainsi, il existe $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = 0 \iff \cos(x_0) = x_0$

Corollaire 4.5.10 (TVI - 1) : Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou l'inverse), alors il existe $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = 0$

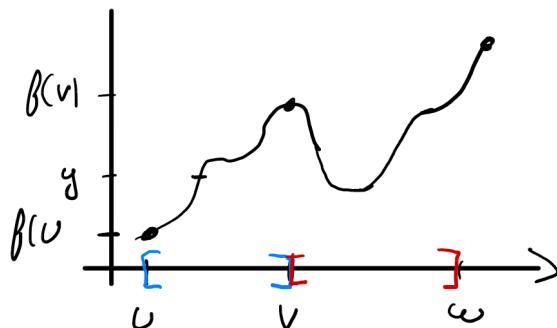
Corollaire 4.5.11 (TVI - 2) : Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, où I est un intervalle, alors $\Im(f) = f(I)$ est aussi un intervalle.

Corollaire 4.5.12 (TVI - 3) : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective $\iff f$ est strictement monotone.

Preuve du Corollaire 3. \iff cf. Chap 0.

\implies Supposons que f n'est pas strictement monotone :

$$\exists u < v < w \text{ t.q. } f(u) < f(v) > f(w)$$



Ainsi, $f(x_1) = y = f(x_2)$, ce n'est donc pas injectif. □

Chapitre 5

Dérivées

5.1 Définitions et exemples

Définition 5.1.1 (Dérivée) . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 ou en x_0 . Alors f est dérivable ou différentiable en x_0 si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe ($\in \mathbb{R}$).

Notation :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = \mathcal{D}_x f(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

On dit :

- $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable en tout $x_0 \in D$.

Remarque 5.1.2 : Le nombre $f'(x_0)$ est la pentes de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$.

Ex :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Définition 5.1.3 (La fonction dérivée) . La fonction dérivée d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $f' : D(f(x)) \rightarrow \mathbb{R}$ où $D(f') = \{x \in D | f \text{ est dérivable en } x\}$

$$x \mapsto f'(x)$$

Ex 1 : $f(x) = x^2$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2 \cdot x_0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = x^2$ est dérivable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

Ex 2 : $f(x) = \sin(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ \implies \underbrace{-h}_{\rightarrow 0} &= \frac{1 - \cos(h)}{h} \geq \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} \geq \frac{0}{h} = \underbrace{0}_{\rightarrow 0} \\ \implies \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

\sin est dérivable sur \mathbb{R} et $\sin'(x) = \cos(x)$. De manière analogue : $\cos'(x) = -\sin(x)^2$

Proposition 5.1.4 : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

1. Si f est dérivable en x_0 , alors f est aussi continue en x_0
2. f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{équation de la tangente}} + \underbrace{(\mathbf{x} - x_0) \cdot \varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. Le **reste** tend plus vite vers 0 que $x - x_0$

Preuve de la proposition.

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

2. Poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$ et calculer la limite lorsque $x \rightarrow x_0$

□

Remarque 5.1.5 : f continues $\not\Rightarrow f$ dérivable.

Ex : $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Alors f est continue en 0 mais on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \uparrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

Donc la limite n'existe pas, donc f n'est pas dérivable en 0.

Propriété 5.1.6 (Opérations algébriques) . Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $x_0 \in D$. Alors :

1. $(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = p \cdot f'(x_0) + q \cdot g'(x_0)$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, si $g(x_0) \neq 0$

Propriété 5.1.7 (Dérivées de fonction usuelles) .

0. $f(x) = c \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$
1. $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ pour \mathbb{N}^*

Preuve. Par récurrence sur n .

- $n = 1$: $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.
- Supposons vrai pour n , montrons pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{n+1} = x^n \cdot x \\ f'(x) &\stackrel{\text{Prop 2}}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

□

2. $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \stackrel{\text{Prop 3}}{=} \frac{\sin'(x) \cos - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \dots = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ ou } 1 + \tan^2(x)$$

3. $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \neq 0$

$$\implies f(x) = \frac{1}{x^n} \stackrel{\text{Prop 3}}{\implies} f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

Propriété 5.1.8 (Dérivées de composées). Soient $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$. Alors :

$$\begin{aligned}(g(f(x_0)))' &= (g \circ f)'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Dérivée interne}}\end{aligned}$$

Preuve. Le quotient est

$$\begin{aligned}&\frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} \\ &= \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient le résultat voulu. \square

Propriété 5.1.9 (Dérivées des réciproques). Soit $f : A \rightarrow B$ bijective et dérivable sur A , un intervalle ouvert. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$, alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Preuve. On admet que f^{-1} est dérivable sur tout B . On dérive l'équation $f(f^{-1}(x)) = x$ des deux cotés :

$$\begin{aligned}1 &= (f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) \\ \implies \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} &= (f^{-1})'(x)\end{aligned}$$

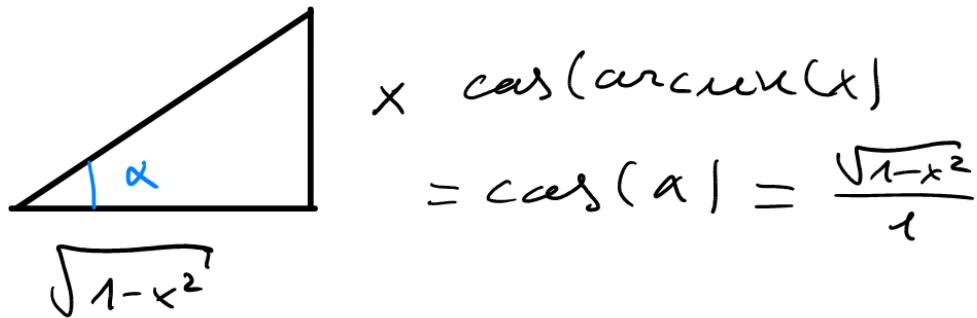
\square

Ex 1 : $f(x) = \sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ où $f(x) = x^n$, où $x > 0$

$$\begin{aligned}x &= f(g(x)) = (\sqrt[n]{x})^n \\ \implies 1 &= n(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot (\sqrt[n]{x})' \\ \implies (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

On montre de manière analogue que $(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et on verra que c'est aussi vrai pour tout réel.

Ex 2 : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$, $x \in]-1, 1[$



$$\Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition 5.1.10 . $\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{h}$ est la dérivée à droite, si $h \uparrow 0$, c'est la dérivée à gauche.

Propriété 5.1.11 . f est dérivable en x_0 si et seulement si les deux dérivées latérales existent et sont égales.

Ex 1 : $f(x) = |x|$. On a :

$$f'_{\text{droite}}(0) = 1 \neq -1 = f'_{\text{gauche}}(0)$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Ex 2 : $f(x) = \sqrt[3]{x}$. On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f'(0)$ n'existe pas, mais les deux dérivées latérales sont égales à $+\infty$.

Définition 5.1.12 (Dérivée d'ordre supérieur) . La dérivée seconde de f est

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$$

La dérivée d'ordre n de f est définie par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Définition 5.1.13 (Classes de fonctions dérивables) . Soit I un intervalle. Alors

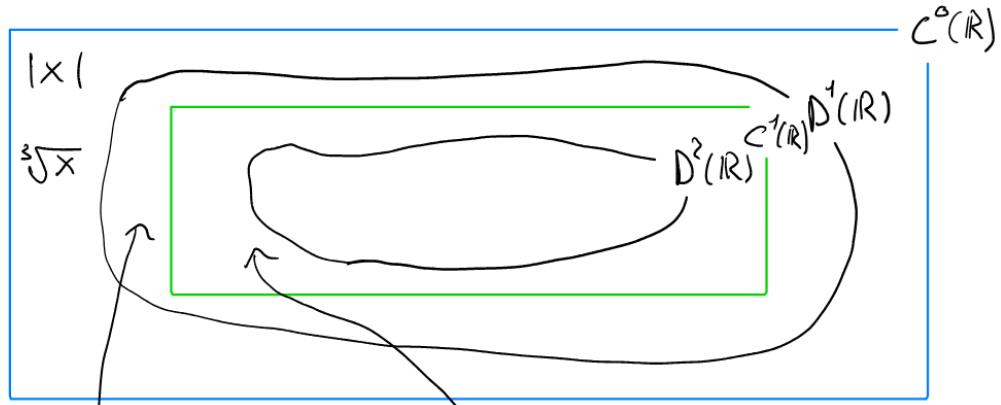
$$D^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}$$

$$C^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } f^{(n)} \text{ est continue sur } I\}$$

On pose $C^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque 5.1.14 :

- $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I .
- Les fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, rationnelles sont dans C^∞ sur leur domaine de définition.
- $C^0(I) \supseteq D^1(I) \supseteq C^1(I) \supseteq D^2(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \dots D^\infty \supseteq C^\infty$



$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \\
 \Rightarrow f'(x) &= \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \\
 &\Rightarrow f'(x) = 2|x| \Rightarrow \text{continue sur } \mathbb{R} \\
 &\quad \text{mais pas dérivable} \\
 &\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus D^2(\mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Remarque 5.1.15 :

- $x^n|x|$ est dans $C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$

- $x|x| \in C^\infty([0, +\infty[)$
 $\in C^\infty(]-\infty, 0[)$

Ex $D^1 \setminus C^1$: On a $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Alors

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0$$

et

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

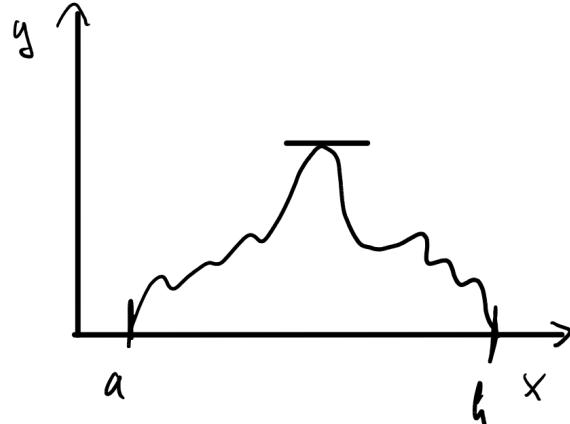
donc $f(x)$ appartient à $D^1(\mathbb{R})$. Cependant,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

donc $f'(x)$ n'est pas continue en 0. Donc $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$.

5.2 Dérivée et croissance

Théorème 5.2.1 (Théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$. Alors $\exists u \in]a, b[$ tel que $f'(u) = 0$.



Preuve par le TVI. Par le TVI, f atteint son max $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, on le suppose supérieur à 0. Alors $\exists u \in]a, b[$ tel que :

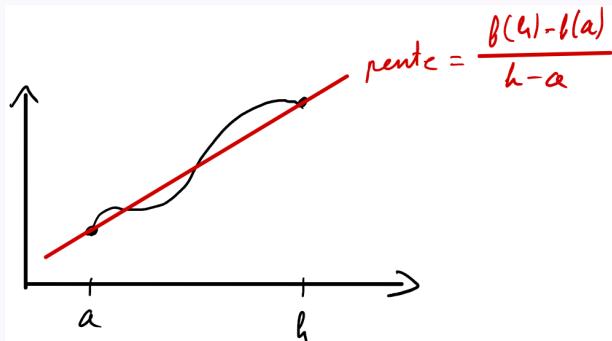
$$f(u) = M \implies f'(u) = f'_{\text{droite}}(u) = \lim_{x \rightarrow u^+} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq 0$$

et $f'(u) = f'_{\text{gauche}}(u) = \lim_{x \rightarrow u^-} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq 0$

Donc $f'(u) = 0$. □

Théorème 5.2.2 (Théorème des accroissements finis (TAF)). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists u \in]a, b[$ tel que :

$$f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Preuve. En exercice. □

Propriété 5.2.3 (Application du TAF) . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.

Preuve. Le sens " \Leftarrow " est évident. Pour le sens " \Rightarrow ", si f n'est pas constante, on trouve $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$ et $f(c) \neq f(d)$. Par le TAF, $\exists u \in]c, d[$ tel que

$$f'(u) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$$

ce qui est une contradiction. □

2. Si $g : [a, b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f(x) = g(x) + c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [a, b]$.
3. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$.
4. Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est décroissante sur $[a, b]$.
5. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
6. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Remarque 5.2.4 : Attention au point 5 et 6, la réciproques est en général fausse. Par exemple, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} mais $f'(0) = 0$.

5.2.1 La fonction exponentielle (et logarithmes)

Théorème 5.2.5 . Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Preuve. La preuve de l'existence se fera plus tard.

Pour l'unicité, la preuve se fait en deux étapes :

1. $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$. On calcule la dérivée de h :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot \underbrace{f'(-x)}_{=f(-x)}(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc h est constante ! Comme $h(0) = f(0) \cdot f(0) = 1$, on a

$$h(x) = \underbrace{f(x) \cdot f(-x)}_{\neq 0} = 1$$

2. **Unicité :** Soit $g(x)$ une (autre) fonction telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$. On pose $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. On calcule $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2} = \frac{g \cdot f - g \cdot f}{f^2} = 0$$

Donc h est constante. Comme $h(0) = \frac{1}{1} = 1$ on a que $h(x) = 1 = \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \implies g(x) = f(x)$

□

Définition 5.2.6 (Fonction exponentielle). Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle. Notée

$$\exp(x) \quad (\text{plus tard } e^x)$$

Propriété 5.2.7 ($\exp(x)$) .

1. $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$ nous donne

$$\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$$

2. $\exp(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

3. \exp est strictement croissante

4. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \forall x \in \mathbb{R}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 0$

Preuve. $\exp(x) \geq x$. En effet, si $g(x) = \exp(x) - x$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp(x) - 1 > 0 (x > 0) \\ \implies g &\text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\end{aligned}$$

Comme $g(0) = 1$, donc $g(x) \geq 0$

□

6. $\exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Ainsi : $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$ et

$$\exp(n) = e^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$ et on vérifie que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Donc :

$$\exp\left(\frac{p}{q} = e^{\frac{p}{q}}\right) \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Définition 5.2.8 . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose que

$$e^x = \exp(x)$$

Remarque 5.2.9 : La fonction exponentielle est

- injective (car strictement croissante)
- surjective (coréstraines à $]0, +\infty[$)

Donc $\exp(x)$ est bijective !

Définition 5.2.10 (Logarithme) . Le logarithme est la réciproque que la fonction exponentielle. Donc :

$$\begin{aligned} \log :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

Propriété 5.2.11 (Logarithme) .

1. $\mathcal{D}(\ln) =]0, +\infty[$ et $\mathfrak{S}(\ln) = \mathbb{R}$.

2. $\ln(1) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} x &= \exp(\ln(x)) \\ \iff 1 &= \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = x \ln'(x) \\ \implies \ln'(x) &= \frac{1}{x} \\ \implies \ln &\in C^\infty (]0, +\infty[) \end{aligned}$$

3. \log est strictement croissante.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$.

Définition 5.2.12 (Autres bases) . Pour $a \in \mathbb{R} > 0$

$$\begin{aligned} \exp_a(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x) = a^x \\ \log_a(x) &= \text{réciproque} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Remarque 5.2.13 : Pour $x, u \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^u &= \exp(\log(x) \cdot u) \\ \implies (x^u)' &= \exp(\log(x) \cdot u) \cdot (\log(x) \cdot u)' = ux^{u-1} \end{aligned}$$

Définition 5.2.14 (*Fonctions trigonométriques hyperboliques*) . On définit :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Théorème 5.2.15 (*Règle de Bernouilli-l'Hospital*) . Soit x_0 et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, où $A =]x_0 - d, x_0 + d[\setminus x_0$ est un voisinage de x_0 . Si :

$$1. \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

$$2. \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve. En exercices (Application du TAF) □

Remarque 5.2.16 : Ce théorème marche aussi pour limite à droite et à gauche.

Ex 1 : Grâce à l'Hostpital, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log(x)} &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} px^p = \begin{cases} +\infty & p > 0 \\ 0 & p \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cela montre que $\log(x)$ croît moins vite que tout polynôme.

Ex 3 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\log(\cos(2x)) \cdot 3}{x^2}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{\cos(2x)} \cdot \frac{-\sin(2x)}{2x} \cdot 2\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{3}{\cos(0)} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin(y)}{y} \cdot 2\right) \\ &= \exp(-6) = e^{-6} \end{aligned}$$

Remarque 5.2.17 : Attention : Si la limite du quotient des dérivées n'existe pas ($\notin \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), alors B-H ne marche pas.

Propriété 5.2.18 (Finction C^1 par morceaux). Soient $f, g \in C^1(I = \text{intervalle})$ et $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0)$, et on pose

$$h : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$$

Alors h est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$ et dans ce cas, $h \in C^1(I)$.

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} h'_{\text{gauche}}(x_0) &\stackrel{x \leq x_0}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{def de } h}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Similaire pour $h'_{\text{droite}}(x_0) = g'(x_0)$. La limites à gauche et à droite coïncident si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$. Dans ce cas, on a :

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \leq 0 \\ g'(x) & x \geq 0 \end{cases} \implies h' \text{ est continue en } x_0$$

Dans ce cas, h' est continue sur I ($h \in C^1$) □

Remarque 5.2.19 : Cette propriété peut être utilisée récursivement

- La preuve montre : $f'_{\text{gauche}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$
- $$f'_{\text{droite}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

si les limites existent

Ex : Soit $f(x) = \begin{cases} \sinh(x) & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$. Alors :

- f est continue en 0 car $\sinh(0) = 0 = \sin(0)$
- de classe C^1 sur \mathbb{R} , car $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$ et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\in C^2$ car $\sinh''(0) = \sinh(0) = 0 = -\sin(0) = \sin''(0)$
- $\notin C^3$ car $\sinh'''(0) = \cosh(0) = 1 \neq \sin'''(0) = -1$

Donc $f(x) \in C^2(\mathbb{R}) \setminus D^3(\mathbb{R})$

5.3 Etude de fonctions

Slides

5.4 Application : convergence de suites définies par récurrence

Rappel : Une suite définie par récurrence est une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 =$ valeur fixée et $a_{n+1} = g(a_n)$, pour une fonction $g : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 5.4.1 (Important) : Si (a_n) converge, disons $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \\ &\stackrel{g \text{ est cont.}}{=} g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = g(l) \end{aligned}$$

Donc l est forcément une sol de l'équation $x = g(x)$. On supposera en général que $g(x)$ est continue et même C^1 sur un intervalle.

Ex : Soit $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = a_n^2 = g(a_n)$ où $g(x) = x^2$. Candidates pour $l : x = g(x) = x^2$, donc $l = 0$ ou $l = 1$. On calcule quelques valeurs :

$$a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{1}{9}, a_2 = \frac{1}{81}, \dots \rightarrow 0$$

En revanche, si $a_0 = 3$, on a :

$$(a_n) = (3, 9, 81, 81^2, \dots) \rightarrow +\infty$$

De plus, si $a_0 = -1$, alors :

$$(a_n) = (-1, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1$$

Dans un cas simple comme celui-là, on peut montrer par récurrence que :

$$a_n = (a_n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$\begin{cases} a_n \rightarrow 0 & |a_0| < 1 \\ a_n \rightarrow 1 & a_0 = \pm 1 \\ a_n \rightarrow +\infty & |a_0| > 1 \end{cases}$$

Dans le cas général, une étude de la fonction $g(x)$ peut nous aider si

$$a_0 \geq a \text{ et } a \leq g(x) \leq x \quad \forall x \geq a \tag{5.4.1}$$

alors :

- $a_1 = g(a_0) = g(a_0) \geq a$, $a_2 = g(a_1) \geq a$. Par récurrence : $a_{n+1} = g(a_n) \geq a$, donc $a_n \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (a_n) est minorée.
- $a_1 = g(a_0) \leq a_0 \implies \dots \implies a_{n+1} = g(a_n) \leq a_n$ et par récurrence, (a_n) est décroissante. Ainsi, dans ce cas (a_n) converge vers un candidat l par décroissance minorée.

Remarque 5.4.2 : Equation 5.4.1 se généralise

Théorème 5.4.3 (Récurrence linéaire) . Soit (a_n) définie par récurrence via

où $g(x) = qx + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$. Alors (a_n) converge vers l'unique solution l de l'équation $g(x) = x$ si et seulement si

$$|q| < 1 \quad \text{ou} \quad a_0 = l$$