

Notes d'Analyse 1

Paul Lasry-Robin

17 décembre 2025

Table des matières

1	Les nombres	2
2	Suites	3
3	Séries	4
4	Fonctions	5
4.1	Rappels	5
4.2	Limites	5
4.3	Calculs de limites	8
4.4	Lim à gauche/droite, limites infinies	11
4.5	Fonctions continues	13
5	Dérivées	17
5.1	Définitions et exemples	17
5.2	Dérivée et croissance	23
5.2.1	La fonction exponentielle (et logarithmes)	24
5.3	Etude de fonctions	28
5.3.1	Applications : convergence de suites définies par récurrence	29
5.4	Développements limités	31
5.4.1	Applications : Calculs de limites	32
5.4.2	Séries de Taylor	33
6	Intégrales	37
6.1	Primitives et intégrales	37
6.2	Calculs d'intégrale	41
6.2.1	Intégration de fonctions rationnelles	44
6.3	Intégrale généralisée ou impropre	47

Chapitre 1

Les nombres

Chapitre 2

Suites

Chapitre 3

Séries

Chapitre 4

Fonctions

4.1 Rappels

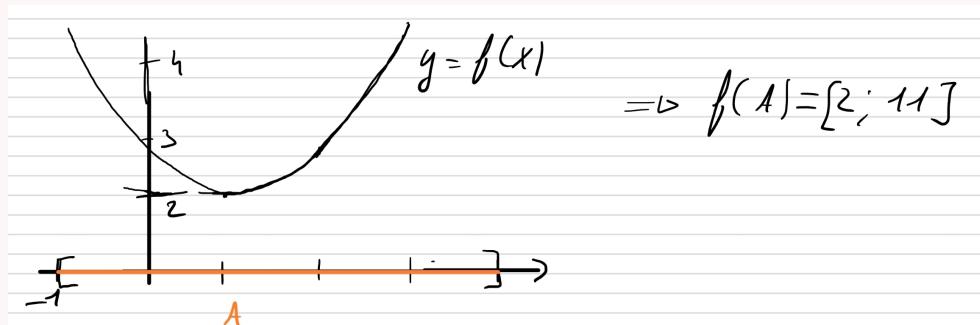
Définition 4.1.1 (Fonction majorées). Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors f est majorée sur $A \subseteq D$ si $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ l'est.

De plus, on pose :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

Pareil pour inf, max et min (si min et max existent).

Ex : Pour $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ et $A =]-1, 4[$



Donc $\forall x \in A :$

- $\inf f(x) = \min f(x) = 2$
- $\sup f(x) = 11$

Et max n'existe pas.

4.2 Limites

Ex : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$D(f) = \mathbb{R}^*$. On aimeraït définir $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

Il faut deux ingrédients pour conclure que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$:

1. f doit être définie "un peu autour" de x_0
2. $f(x)$ doit "s'approcher" de l lorsque $x \rightarrow x_0$.

Définition 4.2.1 (Fonction définie au voisinage). Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $d \in \mathbb{R} > 0$ t.q :

$$]x_0 - d, x_0[\cup]x_0, x_0 + d[\subset D$$

Ex : $\frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de $x_0 = 0$ même si elle n'est pas définie en 0.

Définition 4.2.2 (Limite d'une fonction). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ def au voisinage de x_0 . Alors, f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque $x \rightarrow x_0$.

On note : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ t.q. $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, on a :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Ex 1 : Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 132 & x = 0 \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 132$ car on s'interesse seulement au voisinage de 0.

Ex 2 : Soit $f(x) = 5x - 1$, $x_0 = 0$. Montrons que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \implies f$ est def dans tout voisinage de $x_0 = 2$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ tel que $|x - 2| \leq \delta$.

$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in D \setminus \{2\}$ et $|x - 2| \leq \delta$, on a :

$$|f(x) - 9| \leq \varepsilon$$

Théorème 4.2.3 (Limites de fonction et suites). Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on peut dire que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ pour toute $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

Idée : $a_n \rightarrow x_0$ sont les manières de s'approcher de x_0 . Donc $f(x) \rightarrow l$ si $f(a_n) \rightarrow l$ pour toutes les façons ($a_n \rightarrow x_0$) de s'approcher de x_0 .

Ex : Redémonstration de $\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 10 = 9$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5a_n - 1) = 5(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$$

Comme la suite était arbitraire, on a montré que pour TOUTE SUITE (a_n) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 10 = 9$$

Corollaire 4.2.4 : Si on a trouvé :

- Une suite $(a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ t.q.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ n'existe pas}$$

- Deux suites $(a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ t.q. $a_n \rightarrow x_0$ et $b_n \rightarrow x_0$ mais :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Ex Corollaire 4.2.4 : Prenons $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$, $x_0 = 0$. $D(f) = \mathbb{R}^*$, donc f est définie au voisinage de $x_0 = 0$. En effet :

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \rightarrow 0$$

Mais :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1 \end{aligned}$$

Remarque 4.2.5 : On aurait aussi pu considérer la suite :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) &= \cos(\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \quad \text{qui n'existe pas} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Propriété 4.2.6 (*Limites de fonctions*) .

Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et telles que : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existent. Alors :

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$, alors $l_1 = l_2$ (Unicité de la limite)

2. $\forall p, q \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p \cdot f(x) + q \cdot g(x) = p \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + q \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

4. Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

5. Si $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Démonstration. Théorème des deux gendarmes \square

4.3 Calculs de limites

Concidérons pour ces exemples $u \in \mathbb{R}$.

0. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ où c est une constante.

Démonstration. Soit $a_n \rightarrow u$. On a $f(a_n) = c \rightarrow c$

$$\lim_{x \rightarrow u} x = u \quad (f(x) = x)$$

Démonstration. Soit $a_n \rightarrow u$. On a $f(a_n) = a_n \rightarrow u$

1. **Polynômes** Exemple (par produit) :

$$\lim_{x \rightarrow u} x^2 = \lim_{x \rightarrow u} (x \cdot x) = \left(\lim_{x \rightarrow u} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow u} x \right) = u \cdot u = u^2$$

Par récurrence, on montre que $\lim_{x \rightarrow u} x^n = u^n$.

Preuve rapide. **Init.** ($n = 0$) : $\lim_{x \rightarrow u} 1 = 1$.

Héritage : $\lim_{x \rightarrow u} x^{n+1} = \lim_{x \rightarrow u} (x^n \cdot x) = (\lim_{x \rightarrow u} x^n) \cdot (\lim_{x \rightarrow u} x) = u^n \cdot u = u^{n+1}$. \square

Donc pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} P(x) = P(u)$$

2. **Fonctions rationnelles** : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Si $Q(u) \neq 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} Q(x) = Q(u) \quad (\text{Point 1})$$

Donc par la propriété 4, on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \frac{P(u)}{Q(u)}$$

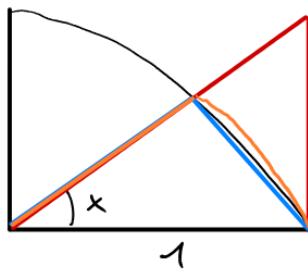
Ex : Ainsi on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2}$$

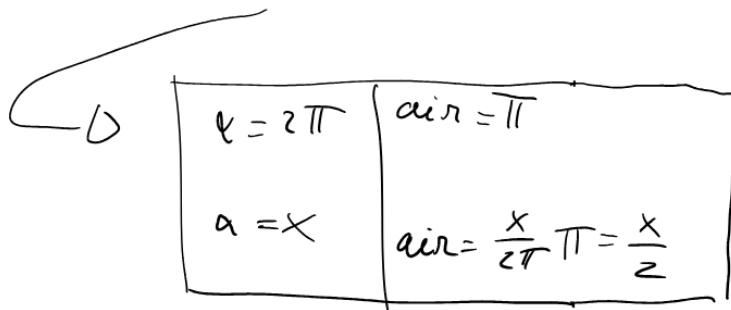
Mais si on a $Q(u) = 0$, il faut faire un travail supplémentaire :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 1$. Démonstration imagée.



$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$



Le triangle bleu est plus petit ou égal au triangle orange lui-même plus petit que le rouge.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{2} &\leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \\ \Rightarrow \sin x &\leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\ \Rightarrow \frac{\sin x}{x} &\leq 1 \leq \frac{1}{\cos x} \\ \Rightarrow \frac{\sin x \cos x}{x} &\leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Finalement, comme $\cos x \in [0, 1]$ on a :

$$\cos x \geq \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \geq 1 - x^2$$

Donc

$$\cos x \geq 1 - x^2$$

On a alors la chaîne d'inégalités :

$$1 - x^2 \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Ceci est valable pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, car toutes les fonctions sont paires.

Par le théorème des deux gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

Ex : On peut alors voir :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 1 \cdot 0 = 0$$

Propriété 4.3.1 (Limites de fonctions composées / changement de variable). Soient $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \in \mathbb{R}$
3. $f(x) \neq b$ au voisinage de a

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

Preuve à l'aide des suites. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{a\}$ t.q. $x_n \rightarrow a$. On pose $y_n = f(x_n)$. Alors $y_n \rightarrow b$ (par 1) et $y_n \neq b$ pour n assez grand (par 3) $\implies (y_n) \subset B \setminus \{b\}$ et $y_n \rightarrow b \implies g(y_n) \rightarrow c$ (par 2)

□

Ex 1 : Soit $f(x) = x^{12} - 1$. Alors $\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x^{12} - 1)$ vérifie 1 et 2 de la propriété au voisinage de 1 (dés que $x \neq \pm 1$).

Ex 2 : On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 + \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{3 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2}{3 + y^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Attention : La condition 3 est indispensable, regardons un cas où elle n'est pas vérifiée.

Ex 3 : $f(x) = 3$ (constante) et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} g(3) = 0$.

Mais : on ne peut pas utiliser la prop car $f(x) = 3$ dans le voisinage de 0. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq \lim_{y \rightarrow 3} g(y) = \lim_{y \rightarrow 3} 2 \neq 0$$

Propriété 4.3.2 (Limites de réciproques). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Soit $u \in [a, b]$ et $v = f(u)$. Alors $f([a, b]) \rightarrow Im(f)$ est bij, et si $f^{-1}(Im(f)) \rightarrow [a, b]$ est def au vois de v , alors :

$$\lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(v) = u$$

Corollaire 4.3.3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$

Démonstration. On pose $f(x) = x^n$, strictement croissante sur $[a, b] \forall b \geq 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow u} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$$

□

4.4 Lim à gauche/droite, limites infinies

Définition 4.4.1. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de $u \in \mathbb{R}$, c'est à dire $[u - d, u[\subseteq D$ pour tout $d > 0$ (resp. $]u, u + d] \subseteq D \forall d > 0$).

Alors f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche (resp. à droite) lorsque $x \rightarrow u$, si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D \setminus \{u\}$, on a $x \in [u - \delta, u[$ (resp. $x \in]u, u + \delta]$) :

$$\implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : limites à gauche : $\lim_{x \rightarrow u^-}$, limite à droite : $\lim_{x \rightarrow u^+}$

Ex : $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Il faut séparer les cas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} -1 = \lim_{x \rightarrow x^-} -1 = -1$ et $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x^+} 1 = 1$.

Propriété 4.4.2 (Limites gauche droite). Si f est def au voisinage de u , alors :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow u^+} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) = l$$

Remarque 4.4.3 : Cela montre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Définition 4.4.4. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ def au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) c'est à dire $[a, +\infty[\subseteq D$ pour un $a \in \mathbb{R}$ (resp. $] -\infty, a] \subseteq D$).

Alors $f(x)$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on a :

$$x \geq c \text{ (resp. } x \leq c) \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \rightarrow l$

Ex : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Preuve avec epsilon. Soit $\varepsilon > 0$. On pose comme $c = \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $x \geq c$ on a :

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{c} \leq \varepsilon$$

Comme ε était arbitraire, on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in D, x \geq c \implies |f(x) - 0| \leq \varepsilon$$

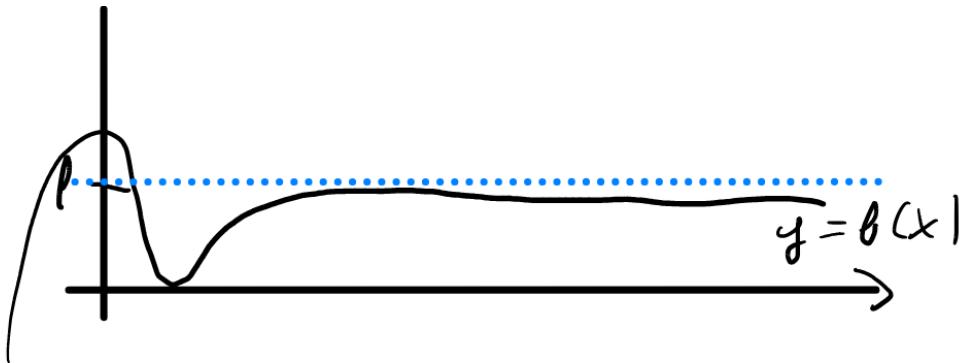
□

Preuve avec les suites. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Comme (x_n) était arbitraire, c'est vrai pour toute suite. On a donc montré que $\forall (x_n) \rightarrow +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$

Remarque 4.4.5 : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \iff f(x)$ a une asymptote horizontale d'équation $y = l$



Définition 4.4.6 (Divergence vers l'infini). Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ tends vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $x \rightarrow u$ si pour tout $A \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D \setminus \{u\}$ on a :

$$|x - u| \leq \delta \iff f(x) \geq A \quad (\text{resp. } f(x) \leq A)$$

Notation : $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ou $f(x) \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$)

Ex : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Preuve avec epsilon. Soit $A \in \mathbb{R}$. On pose $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ (ou $\delta = 1$ si $A < 0$). Alors dès que $|x - 0| \leq \delta$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2} = A$$

Comme A était arbitraire, c'est bon.

□

Remarque 4.4.7 :

- On peut combiner ces limites généralisées. Par exemple :

$$\lim_{c \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow u^\pm} f(x) = \pm\infty \iff f(x)$ admet une asymptote verticale d'eq $x = u$
- Les propriétés algébriques, le théorème des gendarmes, les limites de composées et réciproques, ainsi que les calculs avec $+\infty$ valable pour les suites restent vrais pour ces limites généralisées.
- Attention aux formes indéterminées :
 - $+\infty - +\infty$
 - $0 \cdot +\infty$
 - $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
 - $\frac{0}{0}$

Ex :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = \infty$$

4.5 Fonctions continues

Définition 4.5.1 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est continues en $x = u$ si :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$$

Remarque 4.5.2 (Concéquences de la continuité) : Cela implique trois choses :

1. Si $u \in D$, alors f est définie au voisinage de u et en u .
2. la limite $\lim_{x \rightarrow u} f(x)$ existe dans \mathbb{R}
3. tout $f(u) \in \mathbb{R}$

Ex 1 : Les polynômes, les fonctions rationnelles, $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$ (toutes les fonction trigo), e^x , $\log x$ etc... sont continues sur leur domaine.

Ex 2 : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ est continues pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On voit que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2^2 + 1}{2 - 1} = 5 = f(2)$$

Mais $1 \notin D \implies f$ n'est pas continue en $x = 1$.

Remarque 4.5.3 : Si f est continue en $u \in \mathbb{R}$ et si $a_n \rightarrow u$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(u)$$

Définition 4.5.4 . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage à droite et à gauche de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est

continue à droite en $x = u$ si : $\lim_{x \downarrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u^+} f(x) = f(u)$
 continue à gauche en $x = u$ si : $\lim_{x \uparrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) = f(u)$

Ex : $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f$ est continue en tout $x \neq 0$. En $x = 0$ on a :

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \downarrow 0} (2x + 1) = 1 = f(0)$$

Donc f est continue à gauche et à droite, donc continue en $x = 0$ donc continue sur \mathbb{R}

Propriété 4.5.5 (Opérations sur les fonctions continues) . Si f et g sont continues en u alors $(f + g)$, $(f \cdot g)$, $(\alpha f + \beta g)$, $\left(\frac{f}{g}\right)$ (si $g(u) \neq 0$) sont aussi continues.

De plus, si f est continue en u et g continue en $f(u)$, alors $(f \circ g)(x)$ est continue en u .

Ex : $\frac{\sin(x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{x^2 + 5 + \cos(x)}}$ est continue sur tout \mathbb{R}

Définition 4.5.6 (Prolongement par continuité) . Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est définie au voisinage de u avec $u \notin \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors, le prolongement par continuité de f est :

$$\hat{f} : D \cup \{u\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq u \\ l & \text{si } x = u \end{cases}$$

Ex 1 : $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$\hat{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On appelle cette fonction $\text{sinc}(x)$

Ex 2 : A l'inverse $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut pas être prolongée par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Définition 4.5.7 (Fonction continues sur un intervalle). Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (jusqu'au bord) si :

1. $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$ pour tout $u \in [a, b]$
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (f est continue à droite en $x = b$)
3. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (f est continue à gauche en $x = b$)

De manière analogue :

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1 + 2
$]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1 + 3
$]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1

Théorème 4.5.8 (Valeur moyenne – TVI). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors :

$$f([a, b]) = \left[\inf_{x \in [a, b]} f(x), \sup_{x \in [a, b]} f(x) \right]$$

Remarque 4.5.9 (TVI) : Cela veut dire que f atteint :

- Son inf est son minimum :

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Son sup est son maximum :

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Toutes les valeurs intermédiaires.

Le min et max n'est pas $\pm\infty$. De plus, $f([a, b])$ est un intervalle fermé.

Preuve de la remarque. Posons $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup(f([a, b]))$. On sait qu'il existe une suite $(y_n) \in f([a, b])$ tel que $y_n \rightarrow s$. Ainsi

$$\begin{aligned} & f(x_n) && x_n \in [a, b] \\ \implies & \exists (x_{n_k}) \text{ une sous suite de } (x_n) \text{ t.q. } x_{n_k} \rightarrow u \in [a, b] \\ \implies & f(u) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = s \end{aligned}$$

□

Ex : L'équation $\cos(x) = x$ possède une solution $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On pose $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, continue. On a $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 \geq 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} < 0$.
 $x \mapsto \cos(x) - x$

$$\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \leq 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\underbrace{\min_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} f(x)}_{x < 0}, \underbrace{\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} f(x)}_{x > 0} \right]$$

Ainsi, il existe $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(x_0) = 0 \iff \cos(x_0) = x_0$

Corollaire 4.5.10 (TVI – 1) : Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou l'inverse), alors il existe $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = 0$

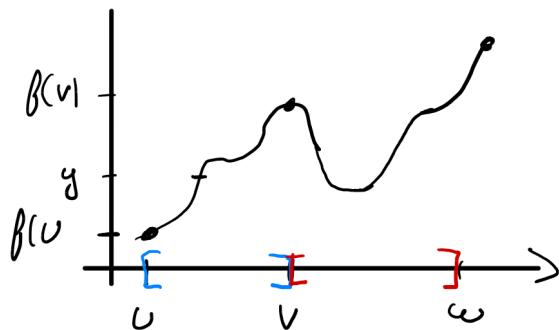
Corollaire 4.5.11 (TVI – 2) : Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, où I est un intervalle, alors $\mathfrak{F}(f) = f(I)$ est aussi un intervalle.

Corollaire 4.5.12 (TVI – 3) : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Preuve du corrolaire 4.5.12. \Leftarrow cf. Chap 0.

\Rightarrow Supposons que f n'est pas strictement monotone :

$$\exists u < v < w \text{ tel que } f(u) < f(v) > f(w)$$



Ainsi, $f(x_1) = y = f(x_2)$, ce n'est donc pas injectif. □

Chapitre 5

Dérivées

5.1 Définitions et exemples

Définition 5.1.1 (Dérivée) . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage x_0 ou en x_0 . Alors f est dérivable ou différentiable en x_0 si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe ($\in \mathbb{R}$).

Notation :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = \mathcal{D}_x f(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

On dit :

- $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable en tout $x_0 \in D$.

Remarque 5.1.2 : Le nombre $f'(x_0)$ est la pentes de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$.

Ex :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Définition 5.1.3 (La fonction dérivée) . La fonction dérivée d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $f' : D(f(x)) \rightarrow \mathbb{R}$ où $D(f') = \{x \in D | f \text{ est dérivable en } x\}$

$$x \mapsto f'(x)$$

Ex 1 : $f(x) = x^2$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2 \cdot x_0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = x^2$ est dérivable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

Ex 2 : $f(x) = \sin(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ \implies \underbrace{-h}_{\rightarrow 0} &= \frac{1 - h^2 - 1}{h} \geq \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} \geq \frac{0}{h} = \underbrace{0}_{\rightarrow 0} \\ \implies \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

\sin est dérivable sur \mathbb{R} et $\sin'(x) = \cos(x)$. De manière analogue : $\cos'(x) = -\sin(x)^2$

Proposition 5.1.4 : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

1. Si f est dérivable en x_0 , alors f est aussi continue en x_0
2. f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{équation de la tangente}} + \underbrace{(x - x_0) \cdot \varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. Le **reste** tend plus vite vers 0 que $x - x_0$

Preuve de la proposition.

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

2. Poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$ et calculer la limite lorsque $x \rightarrow x_0$

□

Remarque 5.1.5 : f continues \Rightarrow f dérivable.

Ex : $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Alors f est continue en 0 mais on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \uparrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

Ainsi, la limite n'existe pas, donc f n'est pas dérivable en 0.

Propriété 5.1.6 (Opérations algébriques). Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $x_0 \in D$. Alors :

1. $(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = p \cdot f'(x_0) + q \cdot g'(x_0)$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, si $g(x_0) \neq 0$

Propriété 5.1.7 (Dérivées de fonction usuelles).

0. $f(x) = c \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$
1. $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ pour \mathbb{N}^*

Preuve. Par récurrence sur n .

- $n = 1$: $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.
- Supposons vrai pour n , montrons pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{n+1} = x^n \cdot x \\ f'(x) &\stackrel{\text{Prop 2}}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

□

2. $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \stackrel{\text{Prop 3}}{=} \frac{\sin'(x)\cos - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \dots = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ ou } 1 + \tan^2(x)$$

3. $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \neq 0$

$$\implies f(x) = \frac{1}{x^n} \stackrel{\text{Prop 3}}{\implies} f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

Propriété 5.1.8 (Dérivées de composées). Soient $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$. Alors :

$$\begin{aligned} (g(f(x_0)))' &= (g \circ f)'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Dérivée interne}} \end{aligned}$$

Preuve de la propriété 5.1.8. Le quotient est

$$\frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En prenant la limite lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient le résultat voulu. \square

Propriété 5.1.9 (Dérivées des réciproques). Soit $f : A \rightarrow B$ bijective et dérivable sur A , un intervalle ouvert. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$, alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Preuve de la propriété 5.1.9. On admet que f^{-1} est dérivable sur tout B . On dérive l'équation $f(f^{-1}(x)) = x$ des deux cotés :

$$\begin{aligned} x = (f \circ f^{-1})(x) &\iff 1 = f(f^{-1}(x))' \stackrel{\text{Prop 5.1.8}}{=} f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) \\ &\iff \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = (f^{-1})'(x) \end{aligned}$$

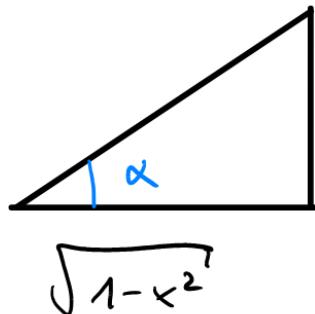
\square

Ex 1 : $f(x) = \sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ où $f(x) = x^n$, où $x > 0$

$$\begin{aligned} x = f(g(x)) &= (\sqrt[n]{x})^n \\ &\implies 1 = n(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot (\sqrt[n]{x})' \\ &\implies (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

On montre de manière analogue que $(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et on verra que c'est aussi vrai pour tout réel.

Ex 2 : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$, $x \in]-1, 1[$, car $f = \sin(x)$, donc $f'(x) = \cos(x)$



$$\begin{aligned} &\times \cos(\arcsin(x)) \\ &= \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \end{aligned}$$

$$\implies \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition 5.1.10 . $\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est la dérivée à droite, si $h \uparrow 0$, c'est la dérivée à gauche.

Propriété 5.1.11 . f est dérivable en x_0 si et seulement si les deux dérivées latérales existent ($\in \mathbb{R}$) et sont égales.

Ex 1 : $f(x) = |x|$. On a :

$$f'_{\text{droite}}(0) = 1 \neq -1 = f'_{\text{gauche}}(0)$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Ex 2 : $f(x) = \sqrt[3]{x}$. On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f'(0)$ n'existe pas car $\notin \mathbb{R}$, mais les deux dérivées latérales sont égales à $+\infty$.

Définition 5.1.12 (Dérivée d'ordre supérieur) . La dérivée seconde de f est

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$$

La dérivée d'ordre n de f est définie par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Définition 5.1.13 (Classes de fonctions dérивables) . Soit I un intervalle. Alors

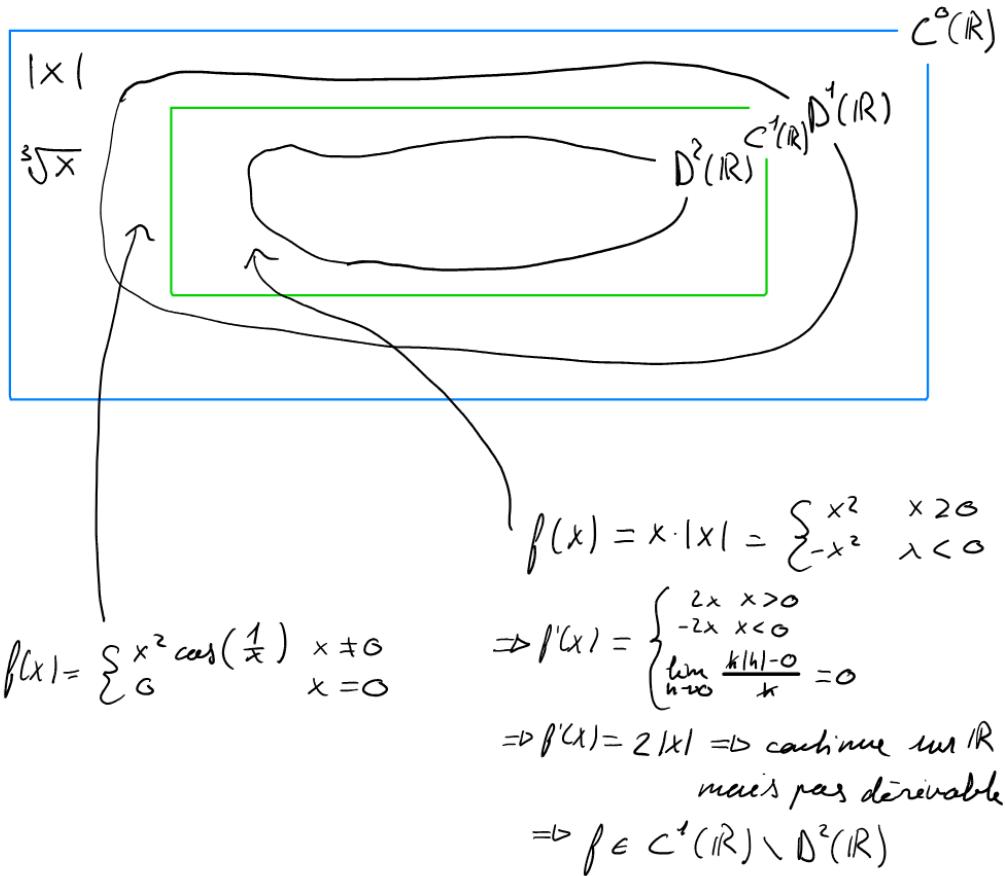
$$D^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}$$

$$C^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur et } f^{(n)} \text{ est continue sur } I\}$$

On pose $C^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque 5.1.14 :

- $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I .
- Les fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, rationnelles sont dans C^∞ sur leur domaine de définition.
- $C^0(I) \supseteq D^1(I) \supseteq C^1(I) \supseteq D^2(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \dots D^\infty \supseteq C^\infty$



Remarque 5.1.15 :

- $x^n |x|$ est dans $C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$

- $x|x| \in C^\infty([0, +\infty[)$
 $\in C^\infty(]-\infty, 0[)$

Ex $D^1 \setminus C^1$: On a $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Alors

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0$$

et

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

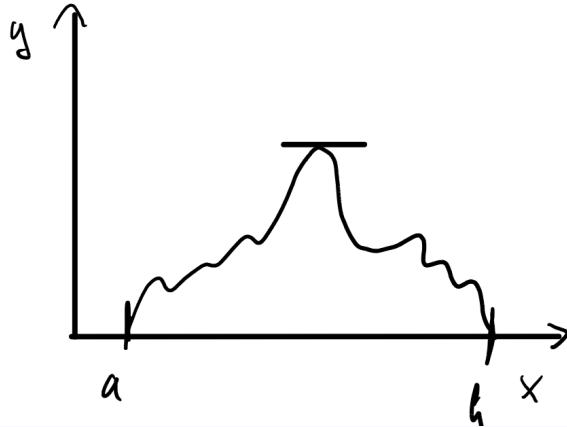
donc $f(x)$ appartient à $D^1(\mathbb{R})$. Cependant,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

donc $f'(x)$ n'est pas continue en 0. Donc $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$.

5.2 Dérivée et croissance

Théorème 5.2.1 (Théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que $f'(u) = 0$.



Preuve par le TVI. Par le TVI (4.5.8), f atteint son max $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, on le suppose supérieur à 0. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que :

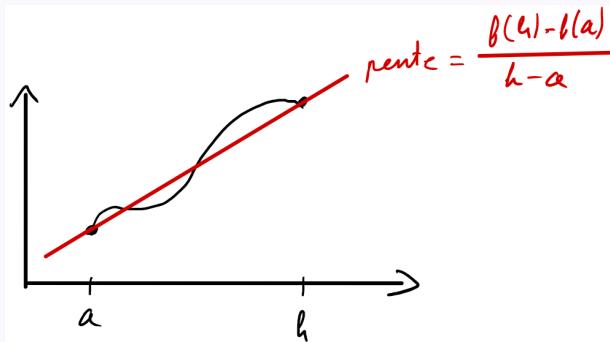
$$f(u) = M \implies f'(u) = f'_{\text{droite}}(u) = \lim_{x \rightarrow u^+} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq 0$$

et $f'(u) = f'_{\text{gauche}}(u) = \lim_{x \rightarrow u^-} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq 0$

Donc $f'(u) = 0$. \square

Théorème 5.2.2 (Théorème des accroissements finis – TAF). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que :

$$f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Preuve. En exercice. \square

Propriété 5.2.3 (Application du TAF (5.2.2)) . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.

Preuve. Le sens " \Leftarrow " est évident. Pour le sens " \Rightarrow ", si f n'est pas constante, on trouve $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$ et $f(c) \neq f(d)$. Par le TAF, $\exists u \in]c, d[$ tel que

$$f'(u) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$$

ce qui est une contradiction. \square

- Si $g : [a, b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f(x) = g(x) + c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [a, b]$.
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est décroissante sur $[a, b]$.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Remarque 5.2.4 : Attention au point 5 et 6, la réciproques est en général fausse. Par exemple, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} mais $f'(0) = 0$.

5.2.1 La fonction exponentielle (et logarithmes)

Théorème 5.2.5 . Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \quad f(0) &= 1 \end{aligned}$$

Preuve. La preuve de l'existence se fera plus tard.

Pour l'unicité, la preuve se fait en deux étapes :

- $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$. On calcule la dérivée de h :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot \underbrace{f'(-x)}_{=f(-x)}(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc h est constante ! Comme $h(0) = f(0) \cdot f(0) = 1$, on a

$$h(x) = \underbrace{f(x) \cdot f(-x)}_{\neq 0} = 1$$

- Unicité :** Soit $g(x)$ une (autre) fonction telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$. On pose

$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. On calcule $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2} = \frac{g \cdot f - g \cdot f}{f^2} = 0$$

Donc h est constante. Comme $h(0) = \frac{1}{1} = 1$ on a que $h(x) = 1 = \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \implies g(x) = f(x)$

□

Définition 5.2.6 (Fonction exponentielle) . Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp(x)$ (et plus tard e^x).

Propriété 5.2.7 ($\exp(x)$) .

1. $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$ nous donne

$$\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$$

2. $\exp(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

3. \exp est strictement croissante

4. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 0$

Preuve. $\exp(x) \geq x$. En effet, si $g(x) = \exp(x) - x$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp(x) - 1 > 0 (x > 0) \\ &\implies g \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\end{aligned}$$

Comme $g(0) = 1$, donc $g(x) \geq 0$

□

6. $\exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Ainsi : $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$ et

$$\exp(n) = e^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$ et on vérifie que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Donc :

$$\exp\left(\frac{p}{q} = e^{\frac{p}{q}}\right) \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Définition 5.2.8 . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose que

$$e^x = \exp(x)$$

Remarque 5.2.9 : La fonction exponentielle est

- injective (car strictement croissante)
- surjective (coréstraines à $]0, +\infty[$)

Donc $\exp(x)$ est bijective !

Définition 5.2.10 (Logarithme) . Le logarithme est la réciproque que la fonction exponentielle. Donc :

$$\begin{aligned} \log :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

Propriété 5.2.11 (Logarithme) .

1. $\mathcal{D}(\ln) =]0, +\infty[$ et $\mathfrak{S}(\ln) = \mathbb{R}$.

2. $\ln(1) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} x &= \exp(\ln(x)) \\ \iff 1 &= \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = x \ln'(x) \\ \implies \ln'(x) &= \frac{1}{x} \\ \implies \ln &\in C^\infty (]0, +\infty[) \end{aligned}$$

3. \log est strictement croissante.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$.

Définition 5.2.12 (Autres bases) . Pour $a \in \mathbb{R} > 0$

$$\begin{aligned} \exp_a(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x) = a^x \\ \log_a(x) &= \text{réciproque} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Remarque 5.2.13 : Pour $x, u \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^u &= \exp(\log(x) \cdot u) \\ \implies (x^u)' &= \exp(\log(x) \cdot u) \cdot (\log(x) \cdot u)' = ux^{u-1} \end{aligned}$$

Définition 5.2.14 (Fonctions trigonométriques hyperboliques). On définit :

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\end{aligned}$$

Théorème 5.2.15 (Règle de Bernouilli-l'Hospital). Soit x_0 et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, où $A = [x_0 - d, x_0 + d] \setminus \{x_0\}$ est un voisinage de x_0 . Si :

$$1. \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

$$2. \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve. En exercices (Application du TAF) □

Remarque 5.2.16 : Ce théorème marche aussi pour limite à droite et à gauche.

Ex 1 : Grâce à l'Hostpital, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log(x)} &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} px^p = \begin{cases} +\infty & p > 0 \\ 0 & p \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Cela montre que $\log(x)$ croît moins vite que tout polynôme.

Ex 3 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\log(\cos(2x) \cdot 3)}{x^2}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{\cos(2x)} \cdot \frac{-\sin(2x)}{2x} \cdot 2\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{3}{\cos(0)} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin(y)}{y} \cdot 2\right) \\ &= \exp(-6) = e^{-6}\end{aligned}$$

Remarque 5.2.17 : Attention : Si la limite du quotient des dérivées n'existe pas ($\notin \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), alors B-H ne marche pas.

Propriété 5.2.18 (Finction C^1 par morceaux). Soient $f, g \in C^1(I = \text{intervalle})$ et $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0)$, et on pose

$$\begin{aligned} h : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors h est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$ et dans ce cas, $h \in C^1(I)$.

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} h'_{\text{gauche}}(x_0) &\stackrel{x \leq x_0}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{def de } h}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Similaire pour $h'_{\text{droite}}(x_0) = g'(x_0)$. La limites à gauche et à droite coïncident si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$. Dans ce cas, on a :

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \leq 0 \\ g'(x) & x \geq 0 \end{cases} \implies h' \text{ est continue en } x_0$$

Dans ce cas, h' est continue sur I ($h \in C^1$) □

Remarque 5.2.19 : Cette propriété peut être utilisée récursivement

- La preuve montre : $f'_{\text{gauche}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$
 $f'_{\text{droite}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$

si les limites existent

Ex : Soit $f(x) = \begin{cases} \sinh(x) & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$. Alors :

- f est continue en 0 car $\sinh(0) = 0 = \sin(0)$
- de classe C^1 sur \mathbb{R} , car $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$ et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\in C^2$ car $\sinh''(0) = \sinh(0) = 0 = -\sin(0) = \sin''(0)$
- $\notin C^3$ car $\sinh'''(0) = \cosh(0) = 1 \neq \sin'''(0) = -1$

Donc $f(x) \in C^2(\mathbb{R}) \setminus D^3(\mathbb{R})$

5.3 Etude de fonctions

Slides

5.3.1 Applications : convergence de suites définies par récurrence

Rappel : Une suite définie par récurrence est une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 =$ valeur fixée et $a_{n+1} = g(a_n)$, pour une fonction $g : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 5.3.1 (Important) : Si (a_n) converge, disons $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \\ &\stackrel{g \text{ est cont.}}{=} g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = g(l) \end{aligned}$$

Donc l est forcément une sol de l'équation $x = g(x)$. On supposera en général que $g(x)$ est continue et même C^1 sur un intervalle.

Ex : Soit $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = a_n^2 = g(a_n)$ où $g(x) = x^2$. Candidates pour $l : x = g(x) = x^2$, donc $l = 0$ ou $l = 1$. On calcule quelques valeurs :

$$a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{1}{9}, a_2 = \frac{1}{81}, \dots \rightarrow 0$$

En revanche, si $a_0 = 3$, on a :

$$(a_n) = (3, 9, 81, 81^2, \dots) \rightarrow +\infty$$

De plus, si $a_0 = -1$, alors :

$$(a_n) = (-1, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1$$

Dans un cas simple comme celui-là, on peut montrer par récurrence que :

$$a_n = (a_n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$\begin{cases} a_n \rightarrow 0 & |a_0| < 1 \\ a_n \rightarrow 1 & a_0 = \pm 1 \\ a_n \rightarrow +\infty & |a_0| > 1 \end{cases}$$

Dans le cas général, une étude de la fonction $g(x)$ peut nous aider. Si

$$a_0 \geq l \text{ et } l \leq g(x) \leq x \quad \forall x \geq l \tag{5.3.1}$$

alors :

- $a_1 = g(a_0) \geq l$, $a_2 = g(a_1) \geq l$. Par récurrence : $a_{n+1} = g(a_n) \geq l$, donc $a_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (a_n) est minorée.

- $a_1 = g(a_0) \leq a_0 \implies \dots \implies a_{n+1} = g(a_n) \leq a_n$ et par récurrence, (a_n) est décroissante. Ainsi, dans ce cas (a_n) converge vers un candidat l par décroissance minorée.

Remarque 5.3.2 : Equation 5.3.1 se généralise

Théorème 5.3.3 (Récurrence linéaire). Soit (a_n) définie par récurrence via

$$a_0 = a, a_{n+1} = g(a_n)$$

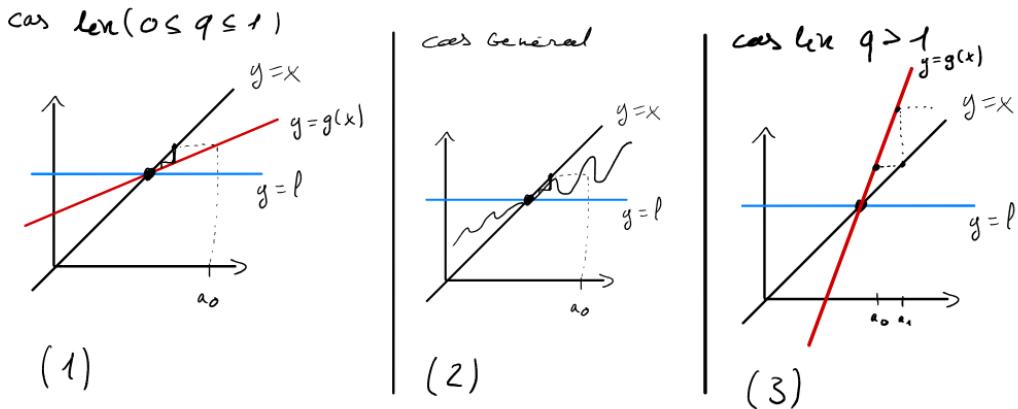
où $g(x) = qx + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$. Alors (a_n) converge vers l'unique solution l de l'équation $g(x) = x$ si et seulement si

$$|q| < 1 \quad \text{ou} \quad a_0 = l$$

Donc

$$l \leq g(x) \leq x$$

Démonstration. Illustration :



On voit que dans le cas (1), la fonction converge vers le seul candidat : l . Dans le cas (2), la fonction converge aussi. Dans le cas (3), la fonction diverge. Si $q \leq 0$, on pose

$$b_k = a_{2k}$$

$$c_k = a_{2k+1}$$

Ces suites sont définies par récurrence : $b_0 = a_0$, $b_{k+1} = a_{2k+2} = g(g(a_{2k})) = h(b_k)$ où $h(x) = g(g(x)) = g \circ g(x) = g(qx + b) = q^2x + qb + b$. Pareil pour c_n :

$$c_0 = a_1, c_{n+1} = g(g(a_{2k+1})) = h(c_k)$$

Si $-1 < q \leq 0$, alors, $0 \leq q^2 < 1$, donc b_k et c_k convergent par le cas précédent vers l .

Si $q < -1$, $q^2 > 1$, donc les suites b_n et c_n divergent par le cas précédent, donc a_n diverge également. \square

Ex Non linéaire : $a_0 = \text{fixé} \in \mathbb{R}^*$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) = g(a_n)$ où $g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{3} \right)$. Les candidats pour l sont $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$3 - x^2$	-	+	+	-
x	-	-	+	+
$g(x) - x = \frac{3 - x^2}{2x}$	+	-	+	-
Comparaison	$g(x) > x$	$g(x) < x$	$g(x) > x$	$g(x) < x$

Donc on a

- si $a_0 \in [\sqrt{3}, +\infty[$, on a

$$\sqrt{3} \leq g(x) \leq x$$

et $a_n \rightarrow \sqrt{3}$

- si $a_0 \in]0, \sqrt{3}[$, $a_1 = g(a_0) \geq \sqrt{3}$ alors a_1 est dans la région précédente, donc $a_n \rightarrow \sqrt{3}$

- si $a_0 < 0$, $a_n \rightarrow -\sqrt{3}$

Donc on conclut que si $a_0 > 0$, $a_n \rightarrow \sqrt{3}$ et si $a_0 < 0$, $a_n \rightarrow -\sqrt{3}$.

5.4 Développements limités

Le but est d'approximer une fonction par un polynôme.

Définition 5.4.1 . Soit $f \in C^n(I)$ où I est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre n en x_0 est l'unique polynôme $p(x)$ de degré $\leq n$ dont les dérivées en x_0 sont les mêmes que celles de f jusqu'à l'ordre n .

Ex : Soit $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$. On a

- $p_1(x) = x$ car $\sin(0) = 0 = p_1(0)$, $\sin'(0) = 1 = p_1'(0)$.
- $p_2(x) = x$ car $\sin''(0) = 0 = p_2''(0)$.
- $p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ car $p_3'(x) = -1 - \frac{3}{6}x^2$, $p_3''(x) = \frac{-6}{6}x$, $p_3'''(x) = -1 = \sin'''(0)$

Ainsi, la formule pour trouver le p_n polynôme est

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

où $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Définition 5.4.2 (Développement limité) . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Alors, f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si

$$f(x) = \text{polynôme de degré } \leq n + \text{reste } r_n(x)$$

pour tout $x \in I$ où $r_n(x)$ vérifie

- Pour tout $c > 0$, $|r_n(x)| \leq c|x - x_0|^n$ dans un voisinage de x_0 .

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$

- $r_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, où $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

Théorème 5.4.3 (Formule de Taylor). Soit $f \in C^n(I)$, où I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Alors f admet un DL_n en x_0 donné par

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

Démonstration. On applique B-H n fois. \square

Remarque 5.4.4 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ouvert. Alors

- Si f admet un DL_n , il est unique.
- Si f est continue en x_0 , alors f admet un DL_0 en x_0 , de plus l'autre sens en vrai aussi si on suppose que $\varepsilon(x) = 0$.
- Si f est continue en x_0 alors f admet un DL_1 en x_0 si et seulement si f est dérivable.

Ex : On va voir que $\sin(x)$ admet un développement limité d'ordre 3 en $x_0 = 0$ donné par $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$. La seule chose à montrer est

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) &= 0 \\ \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^2}{x^3} &\stackrel{\text{B-H}}{=} 0 \end{aligned}$$

On a donc que le DL_2 en $x_0 = 0$ est

$$x + x^2\varepsilon(x)$$

Remarque 5.4.5 (Estimation du reste) : On dit que $|r_n(x)| \leq f^{(n+1)}(u) = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!}$

5.4.1 Applications : Calculs de limites

- Calculons la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$
- $$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + \varepsilon(x) \right) = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

On voit qu'avec un DL_1 ça ne marche pas. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Donc il a fallu prendre un développement limité d'ordre plus grand.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos(x)}{x^4}$
- $$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left(x^2 - 2 + 2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12 + \varepsilon(x)} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(\frac{1}{n})) :$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \varepsilon(x) \right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{n} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

Comme c est supérieur à 0, cette série converge et la série originale aussi, par comparaison.

Ex Calculs de DL : Tant qu'on écrit le rest, on peut tout faire.

Ex Le DL_2 en $x_0 = 0$ de $f(x = \sin(x)\cos(x))$: On utilise le DL_2 de $\sin(x)$ et le DL_1 de $\cos(x)$. Donc

$$\begin{aligned} \sin(x)\cos(x) &= (x + x^2\varepsilon(x))(1 + x\varepsilon(x)) \\ &= x + x^2\varepsilon(x) + x^2\varepsilon(x) + x^3\varepsilon(x)\varepsilon(x) \\ &= x + x^2 \left(\underbrace{\varepsilon(x) + \varepsilon(x) + x\varepsilon(x)\varepsilon(x)}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= x + x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Ex : Le DL_1 en x_0 de $f(x) = e^{\cos(x)}$. On utiliser les DL_1 de $\cos(x)$ et e^x .

$$e^{\cos(x)} = 1 + \cos(x) + \cos(x)\varepsilon\left(\underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1}\right)$$

On voit que $\varepsilon(x)$ ne tend pas vers 0.

Solution : Méthode (i) : il faut réécrire l'expression pour avoir quelque chose qui tend vers 0. Donc :

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e^{1+x\varepsilon(x)} = e \cdot e^{x\varepsilon(x)} \\ &= e(1 + x\varepsilon(x) + x\varepsilon(x)\varepsilon(x\varepsilon(x))) \\ &= e + x(e\varepsilon(x) + e\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(x\varepsilon(x))) \end{aligned}$$

Méthode (ii) : Combiner le DL_1 en $x_0 = 0$ et de $\cos(x)$ avec le DL_1 en $x_0 = \cos(0) = 1$ de e^x . Donc :

$$\begin{aligned} e^x &= e + e(x-1) + (x-1) \underbrace{\tilde{\varepsilon}(x)}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 1} \\ \implies e^{\cos(x)} &= e + e(\cos(x)-1) + (\cos(x)-1)\tilde{\varepsilon}(x) \\ &= e + e(x\varepsilon(x)) + (x\varepsilon(x))\tilde{\varepsilon}(\cos(x)) \\ &= e + x(e\varepsilon(x)) + \varepsilon(x)\tilde{\varepsilon}(\cos(x)) \end{aligned}$$

5.4.2 Séries de Taylor

Si $f \in C^n(I)$, avec I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$$

Question : si $f \in C^\infty(I)$, a-t-on $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$? Quand on a $n \rightarrow \infty$, il faut que :

1. La série converge
2. Le reste $r_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$

Définition 5.4.6 . Pour $f \in C^\infty(I)$ avec I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, la série de Taylor de f centrée en x_0 est la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Remarque 5.4.7 :

- Cette série est définie quelque soit $f \in C^\infty(I)$ (même si $r_n(x) \neq 0$)
- Si $x_0 = 0$, elle s'appelle aussi série de Maclaurin.
- C'est une série entière ! (cf. Chap. 3.3 \rightsquigarrow centre = x_0 , rayon de convergence pas connu)

Ex 1 : $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$, $x_0 = 0$. Le DL_n de f donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$$

Donc la série de Taylor (en $x_0 = 0$) est donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il reste à voir que $\lim_{x \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$. On a :

$$|r_n(x)| \leq f^{(n+1)}(u) \frac{|x|^{n+1}}{n!} = e^u \frac{|x|^{n+1}}{n!} \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{n!} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Ainsi la limite du reste est bien 0. Donc e^x est égale à sa série de Taylor en $x_0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Remarque 5.4.8 : En fait, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k$

Ex 2 : Cela marche aussi pour sin, cos, sinh, cosh !

$$\begin{aligned} &\implies \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &\implies \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.4.9 : Cela donne enfin une raison pour la formule $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. En effet

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^2}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + i \sin(x) \end{aligned}$$

Propriété 5.4.10 (Dérivées de série entières). Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$, alors $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot b_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)b_{k+1}(x-x_0)$ et les rayons de convergences sont les mêmes ! Concéquences de la porp :

- On peut définir

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet, $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$ et

$$\exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x)$$

C'est donc l'unique fonction f telle que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

- Si $f(x)$ est déjà une série entière, i.e. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$, on dérive :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= b_0, f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x-x_0)^{k-1} \implies f'(x_0) = b_1 \\ f^{(k)}(x) &= b_k \cdot k! \implies b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned}$$

Ex 3 : $f(x) = \frac{1}{1-x} \in C^{\infty}(]-1, 1[)$. On a vu que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1(x-0)^k \quad \text{si } |x| < 1$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \text{série de Taylor en } x_0 = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Attention : pour $x \notin]-1, 1[$, la série diverge. Par exemple :

$$f(-10) = \frac{1}{11} \neq \sum_{k=0}^{\infty} (-10)^k$$

Ex 4 : $f(x) = \log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^n \varepsilon(x)$. Série de Taylor ?? $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$. On calcule $f(x) -$ série de Taylor :

$$\begin{aligned} f(x) - \text{série de Taylor} &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} kx^{k-1} \\ &= \frac{1}{1-(-x)} - \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 0 \quad \text{quad cf. exemple précédent} \\ \implies \log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k &= C = 0 \\ \implies \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \end{aligned}$$

pour $x \in]-1, 1[$. En $x = 1$, on obtient, par prolongement par continuité que :

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Ex 5 (Contre exemple) : On pose $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. On vérifie qu'elle est continue en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0. De plus, si $x \neq 0$, $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$ et on calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} e^{-y^2} 2y^3 \\ &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0 \\ \implies f'(0) &= 0 \\ \implies f'(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

où P_k est un polynôme. Donc $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(k+1)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série de Taylor de f en $x_0 = 0$ est nulle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Cependant, $f(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$. Donc f n'est pas égale à sa série de Taylor en $x_0 = 0$. La raison est que le *DL* de f est

$$f(x) = 0 + x^n \varepsilon(x) = r_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Remarque 5.4.11 : Prenons $\sin(x)$ et $\sin(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ces deux fonctions ont la même série de Taylor en $x_0 = 0$, mais seule $\sin(x)$ est égale à sa série de Taylor !

Chapitre 6

Intégrales

6.1 Primitives et intégrales

Définition 6.1.1 (Primitive) . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue où I est intervalle. Une primitive de f est une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Remarque 6.1.2 : Si F, G sont deux primitives de la même fonction f , alors :

$$F(x) - G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Donc F et G diffèrent d'une constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in I.$$

Notation : $\int f(x)dx$ est l'ensemble de toutes les primitives de f . Donc :

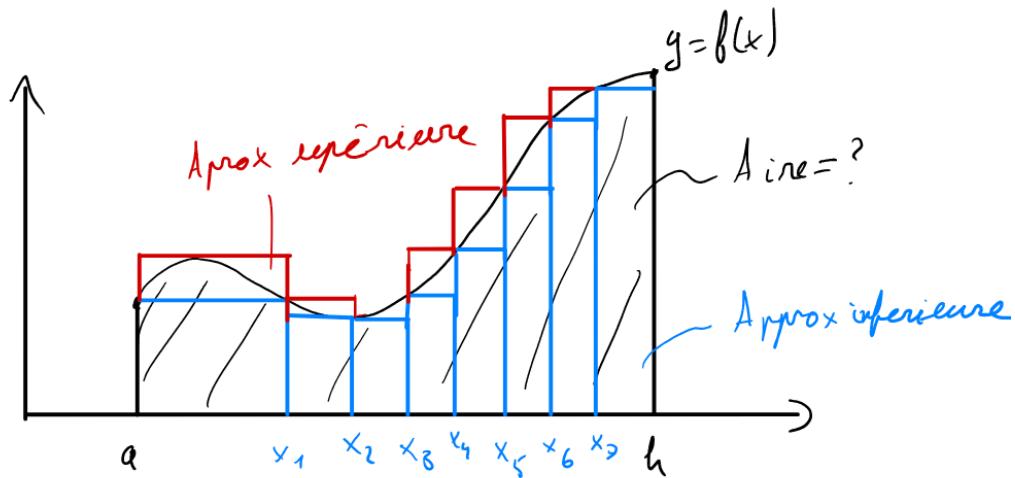
$$\int f(x)dx = \{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\}$$

où F est une primitive de f . Alors la notation

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Remarque 6.1.3 : L'intégrale $\int f(x)dx$ s'appelle intégrale indéfinie de f .

Changeons de point de vue, pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.



Approx 1 :

$$\text{Aire} \gtrsim \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))$$

Approx 2 :

$$\text{Aire} \lesssim \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))$$

Définition 6.1.4 (Intégrale de Riemann) . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\sup\{\text{Approx 1}\} = \inf\{\text{Approx 2}\} = A \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

Dans ce cas, on parle d'intégrale définie de f entre a et b .

Remarque 6.1.5 : On dit que $\int_a^b f(x) dx$ donne l'aire signée sous la courbe. Par convention, on dit que $\int_a^a f(x) dx = 0$ et que $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

Théorème 6.1.6 . Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, monotone, bornée et continue partout sauf en un nombre finis de points, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$.

Preuve. Technique (Ex : monotone) □

Ex Contre exemple : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors f n'est pas intégrable sur $[0, 1]$. En effet, pour toute subdivision $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, on a

$$\text{Approx 1} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

car dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ il existe des réels irrationnels. De même,

$$\text{Approx 2} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$$

car dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ il existe des rationnels. Donc

$$\sup\{\text{Approx 1}\} = 0 \neq 1 = \inf\{\text{Approx 2}\}$$

et f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Remarque 6.1.7 : Cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue mais ce n'est pas le sujet de ce cours.

Propriété 6.1.8 (Intégrale de Riemann) . Les fonctions intégrables au sens de Riemann ont ces propriétés. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ (linéarité)
2. Si $a < u < b$, alors : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^u f(x) dx + \int_u^b f(x) dx$ (additivité)
3. Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ (monotonie)

Preuve. Technique, mais :

1. Linéarité :

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \leq \alpha \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \beta \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x)$$

□

Remarque 6.1.9 : On peut écrire l'intégrale avec n'importe quelle variable :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$$

On a aussi :

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Théorème 6.1.10 (Théorème de la moyenne) . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx = f(u) \cdot (b - a)$$

Démonstration. On prend $m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \leq f(x) \leq M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Donc :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ainsi :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. \square

Remarque 6.1.11 : Donc $f(u)$ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Théorème 6.1.12 (Théorème fondamental du calcul intégrale). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors

1. La fonction $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $[a, b]$.

2. Si F est une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration. **Partie 1 :** On dérive G :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{\int_x^{x+h} f(t)dt}_{f(u)h \text{ thm de la moyenne}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{f(u)h}_{\in]x, x+h[} = \lim_{u \rightarrow x} f(x) \end{aligned}$$

Partie 2 : On a $F(x) = G(x) + c$, donc :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

\square

Notation : On note $F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

6.2 Calculs d'intégrale

Ex Facile : On calcule.

1. $\int_0^\pi \sin(x)dx = \left[-\cos(x) \right]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$. Mais attention : aire signée ! Donc
 $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0$

2. $\int (3x + 1)dx = \frac{3}{2}x^2 + x + c$

3. $\int a^x dx = \int e^{\ln(a)x} dx = \frac{1}{\ln(a)}e^{\ln(a)x} + c = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

4. $\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + c$ (vérifier en dérivant). Ex :

$$\int \sin(x) \cos(x)dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) + c$$

5. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln |f(x)| + c$ (vérifier en dérivant). Ex :

$$\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

Propriété 6.2.1 (Changement de variable/substitution) . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [u, v] \rightarrow [a, b]$ une fonction de la classe C telle que $\varphi(u) = a, \varphi(v) = b$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Remarque 6.2.2 : Si φ est bijective, alors on peut écrire :

$$F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$$

Donc $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Ex : On pose $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. En posant :

$$\begin{aligned} \varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto \sin(t) \end{aligned}$$

Cette fonction est de classe C^1 , $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4} \quad \text{cf exemple précédent}\end{aligned}$$

Ex indéfinie : On reprend $\int \sqrt{1-x^2}$. On pose :

$$\begin{aligned}\varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow [-1, 1] \\ t &\mapsto \sin(t)\end{aligned}$$

φ est bijective. Donc :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt &= \int \cos^2(t) dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + c\end{aligned}$$

On évalue en $t = \arcsin(x)$:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

Remarque 6.2.3 : On peut aussi exprimer t en fonction de x .

Ex remaeque : On pose $\int e^{x^2} dx$. Donc $t = x^2$, $\frac{dt}{dx} = 2x$:

$$\begin{aligned}\int e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + c\end{aligned}$$

Comment bien choisir la substitution ? C'est dur ! Voici quelques exemples :

- $\int e^{x^2} dx : t = x^2$
- $\int \frac{x}{1+x^2} dx, \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3} dx : t = 1+\cos(x)$, ou $t = 1+x^2$. Il faut prendre ce qu'il ya "sous" le dénominateur, ou mieux "dedans dessous".
- $\int \sqrt{1-x^2} dx, \int \sqrt{1+x^2} dx$
 $x = \sin(t) \quad x = \sinh(t)$
- En cas de forces majeures, pour les fonction rationnelles en sin ou cos comme :

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx, \int \frac{1}{\sin^4(x)} dx$$

on pose

$t = \tan(x)$ donc $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
ou $t = \tan(\frac{x}{2})$, donc $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Ex : $\int \frac{1}{\sin^4(x)} dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^4(x)} dx &\stackrel{t=\tan(x)}{=} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int t^{-4} + 2t^{-2} + 1 dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + c \\ &= -\frac{1}{3\tan^3(x)} - \frac{1}{\tan(x)} + c \end{aligned}$$

Ex : $\int \frac{1}{\sin(x)} dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin(x)} dx &\stackrel{t=\tan(\frac{x}{2})}{=} \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c \end{aligned}$$

Propriété 6.2.4 (Intégrale par parties) . Soit $f \in C^0([a, b])$ et $g \in C^1([a, b])$ et F une primitive de f . Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx$$

Démonstration. On a $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg$, donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \int_a^b (F(x)g(x))' dx - \int_a^b F(x)g'(x) dx \\ &= \left[F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

□

Remarque 6.2.5 : La preuve montre que c'est pareil pour les intégrales indéfinies.

Ex 1 :

$$\int e^x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x(x-1) + c$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \ln(x) \cdot 1 dx \\ &= \ln(x)x - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x \ln(x) - x + c \\ &= x(\ln(x) - 1) + c \end{aligned}$$

Ex 3 :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int \cos^2(x) dx}_I &= \int \cos(x) \cdot \cos(x) dx \\
 &= \sin(x) \cos(x) - \int \sin(x) \cdot (-\sin(x)) dx \\
 &= \sin(x) \cos(x) + \int \sin^2(x) dx \\
 &= \sin(x) \cos(x) + \int 1 dx - \underbrace{\int \cos^2(x) dx}_I \\
 \implies 2I &= \sin(x) \cos(x) + x - I \\
 \implies 2I &= \sin(x) \cos(x) + x + c \\
 \implies I &= \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x) + c
 \end{aligned}$$

Ex 4 : (Intégrale par récurrence)

$$\begin{aligned}
 A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx \\
 \implies A_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos^{2n-1}(x) dx \\
 &= \left[\sin(x) \cos^{2n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(2n-1) \cos^{2n-2}(x)(-\sin(x)) dx \\
 &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2(n-1)}(x) dx \\
 &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(x) dx - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx \\
 \implies A_n &= (2n-1)A_{n-1} - (2n-1)A_n \\
 \implies 2nA_n &= (2n-1)A_{n-1} \\
 \implies A_n &= \frac{2n-1}{2n} A_{n-1}
 \end{aligned}$$

6.2.1 Intégration de fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont des fonctions de la forme $\frac{p(x)}{q(x)}$ où p, q sont des polynômes. Pour intégrer ces fonctions, on utilise la décomposition en éléments simples.

Building blocks

i) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$. Ainsi :

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \int \frac{1}{u} \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \log|ax+b| + c$$

avec $u = ax + b \implies du = adx \implies dx = \frac{1}{a} du$.

ii) $\int \frac{1}{x^k} dx = \int x^{-k} dx = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{x^{1-k}}{1-k} + c$, ainsi :

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^k} du = \frac{1}{a} \frac{u^{1-k}}{1-k} + c = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{1-k}}{1-k} + c$$

iii) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + c$. Si $q(x) = ax^2 + bx + c$ est tel que $\Delta < 0$, alors on peut "compléter le carré" :

$$q(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right)$$

On pose $d^2 = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$, donc :

$$= ad^2 \left(\left(\frac{x + \frac{b}{2na}}{d} \right)^2 + 1 \right)$$

On pose $u = \frac{x + \frac{b}{2na}}{d} \implies du = \frac{1}{d} dx \implies dx = d \cdot du$, donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx &= \frac{1}{ad^2} \int \frac{1}{u^2+1} d \cdot du \\ &= \frac{1}{ad} \arctan(u) + c = \frac{1}{ad} \arctan \left(\frac{x + \frac{b}{2na}}{d} \right) + c \end{aligned}$$

iv) $\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = I$. On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{q(x)} dx \\ &= \frac{1}{2a} \log|ax^2+bx+c| + (\text{iii}) + c \end{aligned}$$

v) $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \int \frac{1}{u^k} du$ avec $u = ax^2+bx+c \implies du = (2ax+b)dx$. Donc :

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

vi) $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k} dx$. En exercices.

A l'aide de ces 6 building blocks, on peut intégrer tout $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec la décomposition en éléments simples.

Méthode 1

- Si $\deg(p) \geq \deg(q)$, faire la division polynomiale !

Ex : Prenons $\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1} dx$. On fait la division polynomiale :

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3(x^4 - x^3 - x + 1)}{x^4 - x^3 - x + 1} dx + \int \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} dx \\ &= \int 3dx + \int \frac{\dots}{q(x)} dx = 3x + \int \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} dx \end{aligned}$$

- Factoriser le dénominateur $q(x)$ et décomposer. On a $q(x) = (x-u)^k \cdot (ax^2+bx+c)(x-v)$. Ainsi on peut écrire :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-u} + \frac{A_2}{(x-u)^2} + \frac{A_k}{(x-u)^k} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

Ex : $q(x) = x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)^2(x^2+x+1)$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2-2B+C)x^2 + (A_2+B-2C)x + (-A_1+A_2+C)}{x^4 - x^3 - x + 1} \end{aligned}$$

On pose alors le système :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} A_1 + B = 3 \\ A_2 - 2B + C = 0 \\ A_2 + B - 2C = 3 \\ -A_1 + A_2 + C = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A_1 = 1 \\ B = 2 \\ A_2 = 3 \\ C = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

- Intégrer les éléments simples à l'aide des building blocks.

Ex :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1} dx &= \log|x-1| + c \\ \int \frac{3}{(x-1)^2} dx &= \int 3(x-1)^{-2} dx = \frac{-3}{x-1} + c \\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \log|x^2+x+1| + c \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int \frac{3x^4 + 6}{x^4 - x^3 - x + 1} dx = 3x + \log|x - 1| - \frac{3}{x - 1} + \log|x^2 + x + 1| + c$$

6.3 Intégrale généralisée ou impropre

On sait que si $f : [a, b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$ alors l'intégrale est l'aire sous la courbe. On généralise à $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, f :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Ex : On pourrait s'intéresser à $\int_0^1 \log(x)dx$ (qui a une asymptote verticale en $x = 0$). Ou encore $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

Problème : L'approximation est toujours $\pm\infty$.

Solution : On restreint à un intervalle fermé, puis on utilise les limites.

Définition 6.3.1 (Intégrales généralisées). 1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

alors :

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x)dx$$

2. Si $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, alors :

$$\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x)dx$$

3. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors :

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^w f(x)dx + \lim_{v \rightarrow b^-} \int_w^v f(x)dx$$

où $w \in]a, b[$ est quelconque.

Remarque 6.3.2 : • Ce sont les intégrales généralisées (ou impropre) de f .

- On dit que l'intégrale converge si la (les!) limites existe(nt) ($\in \mathbb{R}$), et l'intégrale diverge sinon.
- Pour le point 3), on peut montrer que le résultat ne dépend pas du w choisi.
Ce sont les intégrales généralisées (ou impropre) de f .

Notation :

$$\int_a^{+\infty^-} = \int_a^{+\infty}, \quad \int_{-\infty^+}^b = \int_{-\infty}^b$$

Ex 1 :

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^1 \log(x) dx &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^1 \log(x) dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[x \log(x) - x \right]_{x=u}^{x=1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 - u \log(u) + u) = -1 + \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\log(u)}{\frac{1}{u}} \\ &\stackrel{\text{B-H}}{=} -1 + \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -1 \end{aligned}$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} \right]_0^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (1 - e^{-u}) = 1 \end{aligned}$$

Ex 3 : Pour $r > 0$, on a $\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r < 1 \\ +\infty & r \geq 1 \end{cases}$. Aussi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r > 1 \\ +\infty & r \leq 1 \end{cases}$.

Exemple :

$$I = \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r} dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^1 \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\log(u)) = +\infty & r = 1 \\ \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1} & r \neq 1 \end{cases}$$

Calculons $\left[\frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1}$:

$$\left[\frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1} = \frac{1}{1-r} + \frac{1}{r-1} \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{1-r}$$

Et ceci diverge si $r > 1$ et converge vers $\frac{1}{1-r}$ si $r < 1$

$$\Rightarrow I = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r < 1 \\ +\infty & r \geq 1 \end{cases}$$

Ex 4 : On étudie : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. On coupe en $w = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left[\arctan(x) \right]_{x=u}^0 + \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\arctan(x) \right]_0^{x=u} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Remarque 6.3.3 : Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge, i.e. si les deux limites existent, alors cette intégrale vaut :

$$\underbrace{\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(x) dx}_{\text{valeur de cauchy}}$$

Ex 5 :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x dx &= \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{+\infty} x dx \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-u^2}{2} + \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v^2}{2}\end{aligned}$$

L'intégrale diverge ! En revanche, sa valeur principale de Cauchy est $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u x dx = 0$. On voit alors que la valeur principale de Cauchy $\neq \int_{-\infty}^{+\infty} x dx$.

Propriété 6.3.4 (Comparaison d'intégrales) . Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors :

1. $\int_a^{b^-} f(x) dx$ converge $\iff \int_a^{b^-} g(x) dx$ converge.

Démonstration. Théorème du gendarme seul ! □

Ex du 1 : $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt &\stackrel{x=1-t}{=} -\int_1^{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx\end{aligned}$$

Qui converge

Propriété 6.3.5 (Comparaison intégrales / séries) . Soit $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, et décroissante. Alors :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

⚠ Valeurs pas égales !

Ex : La somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge si et seulement si $p > 1$.

Ex :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(\log(n))^p}}_u \text{ converge} \iff \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p} dx \text{ converge}$$

Voyons la valeur de l'intégrale indéfinie :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\log(x))^p} dx &= \int \frac{1}{u^p} du = \begin{cases} \frac{u^{1-p}}{1-p} + c & p \neq 1 \\ \log(u) & p = 1 \end{cases} \\ &\stackrel{du=\frac{1}{x}dx}{=} \begin{cases} \frac{\log(x)^{1-p}}{1-p} & p \neq 1 \\ \log(\log(x)) & p = 1 \end{cases} \\ \implies I &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p} dx \stackrel{p=1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\log(\log(x)) \right]_x^u = +\infty \\ \implies I &\stackrel{p \neq 1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log(x)^{1-p}}{1-p} \right]_x^u = c \frac{-\lim_{u \rightarrow +\infty} \log(x)^{1-p}}{1-p} - \frac{\log(2)^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

I converge si et seulement si $p > 1$, ainsi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p} \text{ converge} \iff p > 1$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} &\text{ diverge} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^2} &\text{ converge} \end{aligned}$$