Notes d'Analyse 1

Paul Lasry-Robin

1^er décembre 2025

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres

Chapitre 2

Suites

Chapitre 3

Séries

Chapitre 4

Fonctions

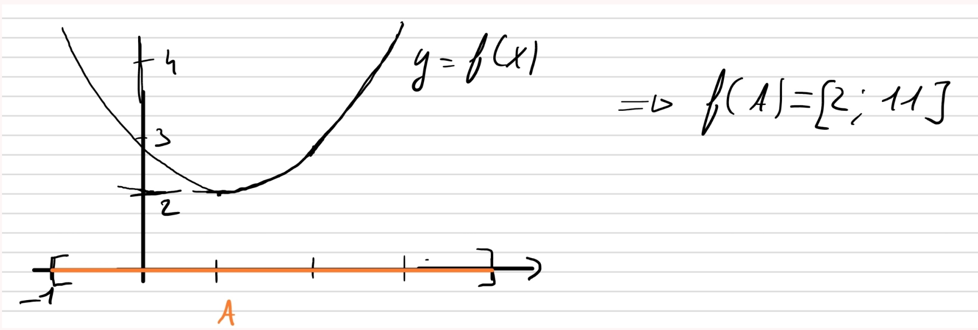
4.1 Rappels

Définition 4.1.1 *(Fonction majorées)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une foonction réelle. Alors f est majorée sur $A \subseteq D$ si $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ l'est.
De plus, on pose :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

Pareil pour inf, max et min (si min et max existent).

Ex : Pour $f(x) = (x-1)^2 + 2$ et $A =]-1, 4[$



Donc $\forall x \in A$:

- $\inf f(x) = \min f(x) = 2$
- $\sup f(x) = 11$

Et max n'existe pas.

4.2 Limites

Ex : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
$D(f) = \mathbb{R}^*$. On aimerait définir $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.
Il faut deux ingréfiants pour conclure que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$:

1. f doit être définie "un peu autour" de x_0
2. $f(x)$ doit "s'approcher" de l lorsque $x \to x_0$.

Définition 4.2.1 *(Fonction définie au voisinage)* **.** Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est définie au <u>définie au voisinage</u> de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $d \in \mathbb{R} > 0$ t.q :

$$]x_0 - d, x_0[\cup]x_0,\, x_0 + d[\subset D$$

Ex $\frac{\sin x}{x}$ **:** Est définie au voisinage de $x_0 = 0$ même si elle n'est pas définie en 0.

Définition 4.2.2 *(Limite d'une fonction)* **.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : D \to R$ def au voisinage de x_0. Alors, f ademt $l \in \mathbb{R}$ pour <u>limite</u> lorsque $x \to x_0$.
On note : $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta_\epsilon > 0$ t.q. $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, on a :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Ex 1 : Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 132 & x = 0 \end{cases}$, alors $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 132$ car on s'interresse seulement au voisinage de 0.

Ex 2 : Soit $f(x) = 5x - 1,\ x_0 = 0$. Montrons que $\lim_{x\to 2} f(x) = 9$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \implies f$ est def dans tout voisinage de $x_0 = 2$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ tel que $|x - 2| \leq \delta$.

$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, on a montré que :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ t.q. si } x \in D \setminus \{2\} \text{ et } |x - 2| \leq \delta,\ \text{ on a :}$$

$$|f(x) - 9| \leq \varepsilon$$

Théorème 4.2.3 *(Limites de fonction et suites)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ def au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Aloes on peut dire que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to\infty} f(a_n) = l \ \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.
<u>Idée :</u> $a_n \to x_0$ sont les manière de s'approcher de x_0. Donc $f(x) \to l$ si $(a_n) \to l$ pour toutes les façons $(a_n \to x_0)$ de s'approcher de x_0.

Ex Redémonstraion de $\lim_{x\to 2} 5x - 10 = 9$ **:** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{2\}$ une suite t.q. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty}(5a_n - 1) = 5(\lim_{n\to\infty} a_n) - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$$

Comme la suite était arbitraire, on a montré que pour <u>TOUTE SUITE</u> (a_n) :

$$\lim_{x\to 2} 5x - 10 = 9$$

Corollaire 4.2.4 : Si on a trouvé :

- Une suite $(a_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ t.q.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \text{ n'existe pas}$$

- Deux suites $(a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ t.q. $a_n \to x_0$ et $b_n \to x_0$ mais :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Ex Corollaire **:** Prenons $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ $x_0 = 0$
$D(f) = \mathbb{R}^* \implies f$ est définie au voisinage de $x_0 = 0$. En effet :

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0 \qquad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \to 0$$

Mais :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n+1)\pi) = -1$$

Remarque 4.2.5 : On aurait aussi pu considérer la suite :

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} f(c_n) = \cos(\pi n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \quad \text{qui n'existe pas}$$

Donc $\lim_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Propriété 4.2.6 *(Limites de fonctions)* **.**
Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et telles que : $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existent. Alors :

1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$, alors $l_1 = l_2$ (Unicité de le limite)
2. $\forall p, q \in \mathbb{R}$ on a :
$$\lim_{x\to x_0} p \cdot f(x) + q \cdot g(x) = p \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) + q \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$
3. $$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$
4. Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 alors :
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$
5. Si $h : D \to \mathbb{R}$ est t.q.
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$
au voisinage de x_0 et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$, alors :
$$\lim_{x\to x_0} h(x) = l$$
(Théorème des deux gendarmes)

4.3 Calculs de limites

Concidérons pour ces exemples $u \in \mathbb{R}$.

0. $\lim_{x\to x_0} c = c$ où c est une constante.
   [Soit $a_n \to u$. On a $f(a_n) = c \to c$]
   $\lim_{x\to u} x = u$ $(f(x) = x)$
   [Soit $a_n \to u$. On a $f(a_n) = a_n \to u$]
1. **Polynômes** Exemple (par produit) :
$$\lim_{x\to u} x^2 = \lim_{x\to u}(x \cdot x) = \left(\lim_{x\to u} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to u} x\right) = u \cdot u = u^2$$
   Par récurrence, on montre que $\lim_{x\to u} x^n = u^n$. *Preuve rapide :*
   Init. $(n = 0)$ **:** $\lim_{x\to u} 1 = 1$.
   Hérédité : $\lim_{x\to u} x^{n+1} = \lim_{x\to u}(x^n \cdot x) = (\lim_{x\to u} x^n) \cdot (\lim_{x\to u} x) = u^n \cdot u = u^{n+1}$.
   Donc pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, on a :
$$\lim_{x\to u} P(x) = P(u)$$

2. **Fonctions rationnelles** : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Si $Q(u) \neq 0$, on a :

$$\lim_{x \to u} Q(x) = Q(u) \quad \text{(Point 1)}$$

Donc par la propriété 4, on a :

$$\lim_{x \to u} f(x) = \frac{P(u)}{Q(u)}$$

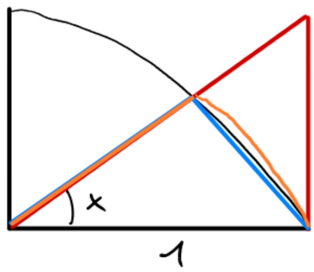
Ex : Ainsi on a :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2}$$

Mais si on a $Q(u) = 0$, il faut faire un travail supplémentaire :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2$$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\cos}{x} = 1$. Démonstration imagée.



$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

$\ell = 2\pi$	air $= \pi$
$a = x$	air $= \frac{x}{2\pi}\pi = \frac{x}{2}$

Le triangle bleu est plus petit ou égal au triangle orange lui-même plus petit que le rouge. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \\ \implies & \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\ \implies & \frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{1}{\cos x} \\ \implies & \frac{\sin x \cos x}{x} \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Finalement, comme $\cos x \in [0, 1]$ on a :

$$\cos x \geq \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \geq 1 - x^2$$

Donc

$$\cos x \geq 1 - x^2$$

On a alors la chaîne d'inégalités :

$$1 - x^2 \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Ceci est vallable pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, car toutes les fonctions sont paires.
Par le théorème des deux gendarmes, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Ex : On peut alors voir :

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} x = 1 \cdot 0 = 0$$

Propriété 4.3.1 *(Limites de fonctions composées / changement de variable)* **.** Soient $f : A \to B, g : B \to \mathbb{R}$ t.q. :

1. $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{y \to b} g(y) = c \in \mathbb{R}$
3. $f(x) \neq b$ au voisinage de a

Alors :

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to b} g(y) = c$$

Preuve à l'aide des suites. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{a\}$ t.q. $x_n \to a$.
On pose $y_n = f(x_n)$. Alors $y_n \to b$ (par 1) et $y_n \neq b$ pour n assez grand (par 3) $\implies$ $(y_n) \subset B \setminus \{b\}$ et $y_n \to b \implies g(y_n) \to c$ (par 2)

$\square$

Ex 1 : Soit $f(x) = x^{12} - 1$. Alors $\lim_{x\to 1} cos(x^{12}-1)$ vérifie 1 et 2 de la propriété au voisinage de 1 (dés que $x \neq \pm 1$).

Ex 2 : On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2+\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{3+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$
$$= \lim_{y\to 1} \frac{y^2}{3+y^2} = \frac{1}{4}$$

Attention : La condition 3 est indispensable, regardons un cas où elle n'est pas vérifiée.

Ex 3 : $f(x) = 3$ (constante) et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$

On a $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(3) = 0$.
Mais : on ne peut pas utiliser la prop car f(x) = 3 dans le voisinage de 0. Donc :

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) \neq \lim_{y\to 3} g(y) = \lim_{y\to 3} 2 \neq 0$$

Propriété 4.3.2 *(Limites de réciproques)* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone
Soit $u \in [a,b]$ et $v = f(u)$. Alors $f([a,b]) \to Im(f)$ est bij, et si $f^{-1}(Im(f)) \to [a,b]$est def au vois de v, alors :

$$\lim_{x\to v} f^{-1}(v) = u$$

Corollaire 4.3.3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \geq 0$, $\lim_{x\to v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$

Preuve. On pose $f(x) = x^n$, strictement croissante sur $[a,b]\forall b \geq 0$. Ainsi :

$$\lim_{x\to u} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$$

□

4.4 Lim à gauche/droite, limites infinies

Définition 4.4.1 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ def. dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de $u \in \mathbb{R}$, c'est à dire $[u-d, u[\subseteq D \; \forall d > 0$ (resp. $[u, u+d[\subseteq \; D \; \forall d > 0$).
Alors f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche (resp. à droite) lorsque $x \to u, \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q.

$$\forall x \in D \setminus \{u\}$$

On a

$$x \in [u-\delta, u[$$

(resp. $x \in]u, u+\delta]$)

$$\implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : limites à gauche : $\lim_{x\to u^-}$, limite à droite : $\lim_{x\to u^+}$

Ex : $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Il faut séparer les cas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} -1 = \lim_{x \to x^-} -1 = -1$ et $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \to x^+} = 1$.

Propriété 4.4.2 *(Limites gauche droite)* **.** Si f est def au voisinage de u, alors :

$$\lim_{x \to u} f(x) = l \iff \lim_{x \to u^+} f(x) = l \iff \lim_{x \to u^-} f(x) = l$$

Remarque 4.4.3 : Cela montre que $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Définition 4.4.4 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ def au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) c'est à dire $[a, +\infty[\subseteq D$ pour un $a \in \mathbb{R}$ (resp. $]-\infty, a] \subseteq D$).
Alors $f(x)$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite losrque $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$) si $\forall \varepsilon > 0\ \exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in D$ on a :

$$x \geq c (x \leq c) \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \to l$

Ex : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Preuve avec epsilon. Soit $\varepsilon > 0$. On pose comme $c = \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $x \geq 0$ on a :

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c} \leq \varepsilon$$

Comme ε était arbitraire, on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in D,\ x \geq c \implies |f(x) - 0| \leq \varepsilon$$

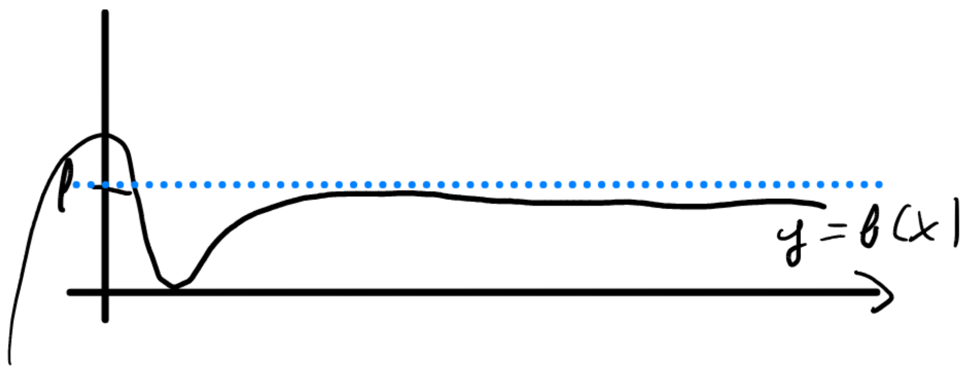
□

Preuve avec les suites. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite t.q. $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$. Alors,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Comme (x_n) était arbitraire, c'est vrai pour toute suitre. On a donc montré que $\forall (x_n) \to +\infty, \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$ □

Remarque 4.4.5 : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \iff f(x)$ a une asymptote horizontale d'équation $y = l$



Définition 4.4.6 *(Divergence vers l'infini)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ def au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ tends vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $x \to u$ si $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in D \setminus \{u\}$ on a :

$$|x - u| \leq \delta \iff f(x) \geq A \quad (\text{resp. } f(x) \geq A)$$

Notation : $\lim_{x \to u} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ou $f(x) \to +\infty$ (resp. $-\infty$)

Ex : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Preuve avec epsilon. Soit $A \in \mathbb{R}$. On pose $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ (ou $\delta = 1$ si $A < 0$). Alors dès que $|x - 0| \leq \delta$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2} = A$$

Comme A était arbitraire, c'est bon. □

Remarque 4.4.7 :

- On peut combiner ces lumites généralisées. Par exemple :

$$\lim_{c \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

- $\lim_{x \to u^{\pm}} f(x) = \pm\infty \iff f(x)$ admet une asymptote verticale d'eq $x = u$
- Les propriétés algébriques, le théorème des gendarmes, les limites de composées et réciproques, ainsi que les calculs avec $+\infty$ vallable pour les suites restent vrais pour ces limites généralisées.
- Attention aux formes indéterminées :
  — $+\infty - +\infty$
  — $0 \cdot +\infty$
  — $\frac{\pm\infty}{+\infty}$
  — $\frac{0}{0}$

Ex :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = \infty$$

4.5 Fonctions continues

Définition 4.5.1 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ def au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est <u>continues en $x = u$</u> si :

$$\lim_{x \to u} f(x) = f(u)$$

Remarque 4.5.2 *(Concéquences de la continuité)* **:** Cela implique trois choses

1. $u \in D \implies f$ def au voisinage de u <u>et</u> en u.
2. la limite $\lim_{x \to u} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$
3. tout $f(u) \in \mathbb{R}$

Ex 1 : Les polynômes, les fonctions rationnelles, $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$ (toutes les fonction trigo), e^x, $\log x$ etc... sont continues **<u>sur leur domaine</u>**.

Ex 2 : $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ est continues pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On voit que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{2^2+1}{2-1} = 5 = f(2)$$

Mais $1 \notin D \implies f$ n'est pas continue en $x = 1$.

Remarque 4.5.3 : Si f est continue en $u \in \mathbb{R}$ et si $a_n \to u$, alors :

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \to \infty} a_n) = f(u)$$

Définition 4.5.4 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ def au voisinage $\begin{matrix} \text{à droite} \\ \text{à gauche} \end{matrix}$ de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est **continue** $\begin{matrix} \textbf{à droite} \\ \textbf{à gauche} \end{matrix}$ **en** $x = u$ si :

$$\lim_{x \uparrow u} f(x) = f(u)$$
$$\lim_{x \downarrow u} f(x) = f(u)$$

Ex : $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases} \implies f$ est continue en tout $x \neq 0$. En $x = 0$ on a :

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) \overset{x \geq 0}{=} \lim_{x \downarrow 0} (2x+1) = 1 = f(0)$$

Donc f est continues à gauche et à droite, donc continue en $x = 0$ donc continue sur $\mathbb{R}$

Propriété 4.5.5 *(Opération sur les fonctions continues)* **.** Si f et g sont continues en u alors $f + g$, $f \cdot g$, $\alpha f + \beta g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(u) \neq 0$) sont aussi continue.
De plus, si f est continue en u et g continue en $f(u)$, alors $(f \circ g)(x)$ est continues en u.

Ex : $\dfrac{\sin(x^2+8x+1)}{\sqrt{x^2+5+\cos(x)}}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$

Définition 4.5.6 *(Prolongement par continuité)* **.** Si $f : D \to \mathbb{R}$ est def au voisinage de u avec $u \notin \mathbb{R}$ et tq $\lim_{x\to u} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors, le <u>prolongement par continuité</u> de f est :

$$\begin{aligned} \hat{f} : D \cup \{u\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq u \\ l & \text{si } x = u \end{cases} \end{aligned}$$

Ex 1 : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

$$\hat{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On appelle cette fonction $\operatorname{sinc}(x)$

Ex 2 : A l'inverse $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut pas être prolongée par continuité en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Définition 4.5.7 *(Fonction continues sur un intervalle)* **.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u> (jusqu'au bord) si :

1. $\lim_{x\to u} f(x) = f(u)\, \forall u \in [a, b]$
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (f est continue à droite en $x = b$)
3. $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (f est continue à gauche en $x = b$)

De manière analogue :

$$\begin{aligned} f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ est continue} \quad & \text{si } 1 + 2 \\ ]a, b] \to \mathbb{R} \text{ est continue} \quad & \text{si } 1 + 3 \\ ]a, b[\to \mathbb{R} \text{ est continue} \quad & \text{si } 1 \end{aligned}$$

Théorème 4.5.8 *(Valeur moyenne – TVI)* **.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

$$f([a, b]) = \left[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x) \right]$$

Remarque 4.5.9 : Cela veut dire que f atteint :

- Son inf est son minimum :

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Son sup est son maximum :

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Toutes les valeurs intermédiaires.

Le min et max n'est pas $\pm\infty$. De plus, $f([a,b])$ est un intervalle fermé.

Preuve que f atteint. Posons $s = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup(f([a,b]))$. On sait qu'il existe une suite $(y_n) \in f([a,b])$ tel que $y_n \to s$. Ainsi

$$\begin{aligned} & f(x_n) && x_n \in [a,b] \\ \implies & \exists(x_{n_k}) \text{ une sous suite de } (x_n) \text{ t.q. } x_{n_k} \to u \in [a,b] \\ \implies & f(u) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) \\ & = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \\ & = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = s \end{aligned}$$

$\square$

Ex : L'equation $\cos(x) = x$ possède une solution $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On pose $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(x) - x$ qui est continue. On a $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 \underline{\geq 0}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \underline{\leq 0}$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\underbrace{\min f(x)}_{x<0}, \underbrace{\min f(x)}_{x>0}\right]$$

Ainsi, il existe $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = 0 \iff \cos(x_0) = x_0$

Corollaire 4.5.10 *(TVI – 1)* **:** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continues et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou l'inverse), alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f(u) = 0$

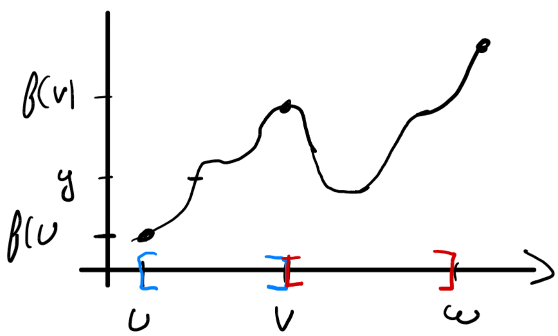
Corollaire 4.5.11 *(TVI – 2)* **:** Si $f : I \to \mathbb{R}$ et continue, où I est un intervalle, alors $\Im(f) = f(I)$ est aussi un intervalle.

Corollaire 4.5.12 *(TVI – 3)* **:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective $\iff$ f est strictement monotone.

Preuve du Corollaire 3. $\underline{\Longleftarrow}$ cf. Chap 0.

$\underline{\Longrightarrow}$ Supposons que f n'est pas strictement monotone :

$$\exists u < v < w \text{ t.q. } f(u) < f(v) > f(w)$$



Ainsi, $f(x_1) = y = f(x_2)$, ce n'est donc pas injectif. $\square$

Chapitre 5

Dériviées

5.1 Définitions et exemples

Définition 5.1.1 *(Dériviée)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 ou en x_0. Alors f est dérivable ou différentiable en x_0 si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe ($\in \mathbb{R}$).
Notation :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = \mathcal{D}_x f(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

On dit :

- $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0
- $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable en tout $x_0 \in D$.

Remarque 5.1.2 : Le nombre $f'(x_0)$ est la pentes de la tengente à la courbe $y = f(x)$ au point$(x_0, f(x_0))$.

Ex :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Définition 5.1.3 *(La fonction dérivée)* **.** La fonction dérivée d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est la fonction $\begin{aligned} f' : D(f(x)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$ où $D(f') = \{x \in D | f \text{ est dérivable en } x\}$

Ex 1 : $f(x) = x^2$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) = 2\cdot x_0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = x^2$ est dérivable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

Ex 2 : $f(x) = \sin(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)-\sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} \\ \implies & \underbrace{-h}_{\to 0} = \frac{1-h^2-1}{h} \geq \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0} \geq \frac{0}{h} = \underbrace{0}_{\to 0} \\ \implies & \sin(x_0)\cdot 0 + \cos(x_0)\cdot 1 = \cos(x_0) \end{aligned}$$

sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. De manière analogue : $\cos'(x) = -\sin(x)^{\mathbf{2}}$

Proposition 5.1.4 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$

1. Si f est dérivable en x_0, alors f est aussi continue en x_0
2. f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{équation de la tangente}} + \underbrace{(x-x_0)\cdot\varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

   où $\varepsilon(x)$ est une fonction tel que $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$. Le reste tend plus vite vers 0 que $x - x_0$

Preuve de la proposition.

1. On a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$$

2. Poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x-0)(x-x_0)}{x-x_0}$ et calculer la limite lorsque $x \to x_0$

□

Remarque 5.1.5 : f continues $\not\Longrightarrow$ f dérivable.

Ex : $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Alors f est continue en 0 mais on a

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h\uparrow 0}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\uparrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

Donc la limite n'existe pas, donc f n'est pas dérivable en 0.

Propriété 5.1.6 *(Opérations algébriques)* **.** Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ derivables en $x_0 \in D$. Alors :

1. $(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = p \cdot f'(x_0) + q \cdot g'(x_0)$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, si $g(x_0) \neq 0$

Propriété 5.1.7 *(Dérivées de fonction usuelles)* **.**

0. $f(x) = c \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$
1. $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ pour $\mathbb{N}^*$

   Preuve. Par récurrence sur n.

   - $n = 1$: $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.
   - Supposons vrai pour n, montrons pour $n+1$:

   $$\begin{aligned} f(x) &= x^{n+1} = x^n \cdot x \\ f'(x) &\overset{\text{Prop 2}}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

   □

2. $\sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x)$ et

   $$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \overset{\text{Prop 3}}{=} \frac{\sin'(x)\cos - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \cdots = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ ou } 1 + \tan^2(x)$$

3. $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$

   $$\implies f(x) = \frac{1}{x^n} \overset{\text{Prop 3}}{\implies} f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

Propriété 5.1.8 *(Dériviées de composées)* **.** Soient $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, deux fonction telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$. Alors :

$$\begin{aligned}(g(f(x_0)))' &= (g \circ f)'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Dériviée interne}}\end{aligned}$$

Preuve. Le quotient est

$$\begin{aligned}&\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} \\ =&\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque $h \to 0$, on obtient le résultat voulu. □

Propriété 5.1.9 *(Dériviées des réciproques)* **.** Soit $f : A \to B$ bijective et dérivable sur A, un intervalle ouvert. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$, alors

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1(x)})}$$

Preuve. On admet que f^{-1} est dérivable sur tout B. On dérive l'equation $f(f^{-1}(x)) = x$ des deux cotés :

$$\begin{aligned}1 &= (f \circ f^{-1})'(x) = f'\left(f^{-1}(x)\right) \\ \Longrightarrow \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} &= (f^{-1})'(x)\end{aligned}$$

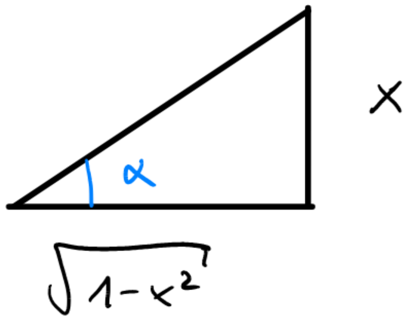
□

Ex 1 : $f(x) = \sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ où $f(x) = x^n$, où $x > 0$

$$\begin{aligned}x &= f(g(x)) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \\ &\Longrightarrow 1 = n(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot (\sqrt[n]{x})' \\ &\Longrightarrow (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

On montre de manière analogue que $\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et on verra que c'est aussi vrai pour tout réel.

Ex 2 : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}, x \in]-1,1[$



$$\cos(\arcsin(x)) = \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$$

$$\implies arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition 5.1.10 . $\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{h}$ est la dérivée à droite, si $h \uparrow 0$, c'est la dérivée à gauche.

Propriété 5.1.11 . f est dérivable en x_0 si et seulement si les deux dérivées latérales existent et sont égales.

Ex 1 : $f(x) = |x|$. On a :

$$f'_{\text{doite}}(0) = 1 \neq -1 = f'_{\text{gauche}}(0)$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Ex 2 : $f(x) = \sqrt[3]{x}$. On a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{n})^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f'(0)$ n'existe pas, mais les deux dérivées latérales sont égales à $+\infty$.

Définition 5.1.12 *(Dériviée d'ordre supérieur)* **.** La dérivée seconde de f est

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$$

La dérivée d'ordre n de f est définie par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

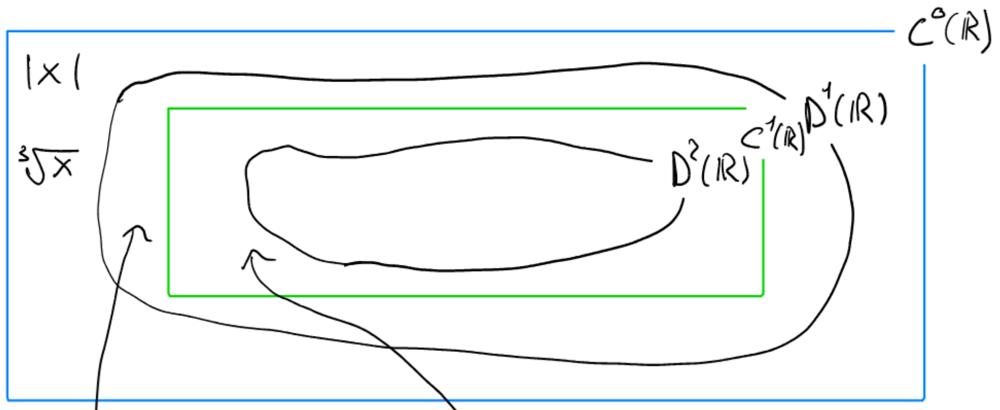
Définition 5.1.13 *(Clsses de fonctions dérivables)* **.** Soit I un intervalle. Alors

$$D^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | \, f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}$$
$$C^n(I) = \left\{f : I \to \mathbb{R} | \, f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur et } f^{(n)} \text{ est continue sur } I\right\}$$

On pose $C^\infty(I) = \left\{f : I \to \mathbb{R} \,|\, f^{(n)} \text{ existe pour tour } n \in \mathbb{N}\right\}$.

Remarque 5.1.14 :

- $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Les fonction polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, rationnelles sont dans C^∞ sur leur domaine de définition.
- $C^0(I) \supseteq D^1(I) \supseteq C^1(I) \supseteq D^2(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \cdots D^\infty \supseteq C^\infty$



$$f(x) = x\cdot|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{h|h|-0}{h} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) = 2|x| \Rightarrow$ continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus D^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Remarque 5.1.15 :

- $x^n|x|$ est dans $C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$
- $x|x| \in C^\infty(]0, +\infty[)$
  $\in C^\infty(]-\infty, 0[)$

Ex $D^1 \setminus C^1$: On a $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Alors

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si x} \neq 0$$

et

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

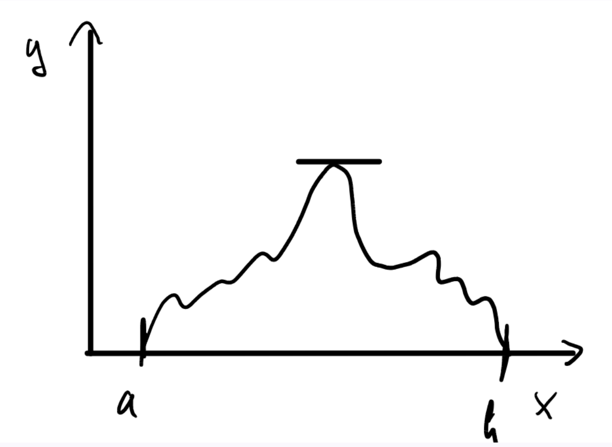
donc $f(x)$ appartient à $D^1(\mathbb{R})$. Cependant,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

donc $f'(x)$ n'est pas continue en 0. Donc $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$.

5.2 Dérivée et croissance

Théorème 5.2.1 *(Théorhème de Rolle)* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$. Alors $\exists u \in]a,b[$ tel que $f'(u) = 0$.



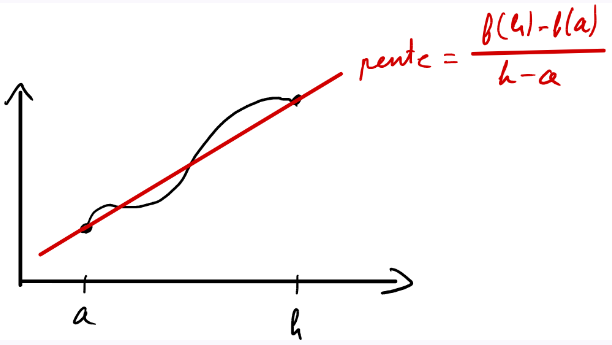
Preuve par le TVI. Par le TVI, f atteint son max $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, on le suppose supérieur à 0. Alors $\exists u \in]a,b[$ tel que :

$$f(u) = M \implies f'(u) = f'_{\text{droite}}(u) = \lim_{x\to u^+} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq 0$$
$$\text{et} \quad f'(u) = f'_{\text{gauche}}(u) = \lim_{x\to u^-} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \geq 0$$

Donc $f'(u) = 0$. □

Théorème 5.2.2 *(Théorhème des acroissements finis (TAF))* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists u \in]a,b[$ tel que :

$$f'(u) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Preuve. En exercice. □

Propriété 5.2.3 *(Application du TAF)* **.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.

   Preuve. Le sens " $\Longleftarrow$ " est évident. Pour le sens " $\Longrightarrow$ ", si f n'est pas constante, on trouve $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$ et $f(c) \neq f(d)$. Par le TAF, $\exists u \in]c, d[$ tel que

   $$f'(u) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$$

   ce qui est une contradiction. □

2. Si $g : [a, b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f(x) = g(x) + c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [a, b]$.
3. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$.
4. Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est décroissante sur $[a, b]$.
5. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
6. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Remarque 5.2.4 : Attention au point 5 et 6, la réciproques est en général fausse. Par exemple, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

5.2.1 La fonction exponentielle (et logarithmes)

Théorème 5.2.5 . Il existe une <u>unique</u> fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Preuve. La preuve de l'existence se fera plus tard.
Pour l'unicité, la preuve se fait en deux étapes :

1. $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$. On calcule la dérivée de h :

   $$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot \underbrace{f'(-x)}_{=f(-x)}(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc h est constante ! Comme $h(0) = f(0) \cdot f(0) = 1$, on a

   $$h(x) = \underbrace{f(x)}_{\neq 0} \cdot f(-x) = 1$$

2. **Unicité :** Soit $g(x)$ une (autre) fonction telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$. On pose $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. On calcule $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2} = \frac{g \cdot f - g \cdot f}{f^2} = 0$$

Donc h est constante. Comme $h(0) = \frac{1}{1} = 1$ on a que $h(x) = 1 = \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \implies g(x) = f(x)$

□

Définition 5.2.6 *(Foonction exponentielle)* **.** Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle. Notée

$$\exp(x) \quad (\text{plus tard } e^x)$$

Propriété 5.2.7 *($\exp(x)$)* **.**

1. $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$ nous donne

$$\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$$

2. $\exp(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

3. exp est strictement croissante

4. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \ \forall x \in \mathbb{R}$

5. $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0} \exp(x) = 0$

Preuve. $\exp(x) \geq x$. En effet, si $g(x) = \exp(x) - x$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) = &\exp(x) - 1 > 0 (x > 0) \\ &\implies g \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\end{aligned}$$

Comme $g(0) = 1$, donc $g(x) \geq 0$ □

6. $\exp(1) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Ainsi : $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$ et

$$\exp(n) = e^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$ et on vérifie que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Donc :

$$\exp\left(\frac{p}{q} = e^{\frac{p}{q}}\right) \quad \forall \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Définition 5.2.8 . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose que

$$e^x = \exp(x)$$

Remarque 5.2.9 : La fonction exponentielle est

- injective (car strictement croissante)
- surjective (coréstraintes à $]0, +\infty[$)

Donc $\exp(x)$ est bijective !

Définition 5.2.10 *(Logarithme)* **.** Le logarithme est la réciproque que la fonction exponentielle. Donc :

$$\begin{aligned} \log :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

Propriété 5.2.11 *(Logarithme)* **.**

1. $\mathcal{D}(\ln) =]0, +\infty[$ et $\Im(\ln) = \mathbb{R}$.
2. $\ln(1) = 0$. On a :
$$\begin{aligned} & x = \exp(\ln(x)) \\ \iff & 1 = \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = x \ln'(x) \\ \implies & \ln'(x) = \frac{1}{x} \\ \implies & \ln \in C^\infty\left(]0, +\infty[\right) \end{aligned}$$
3. log est strictement croissante.
4. $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$.

Définition 5.2.12 *(Autres bases)* **.** Pour $a \in \mathbb{R} > 0$

$$\begin{aligned} \exp_a(x) &\overset{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x) = a^x \\ \log_a(x) &= \text{ réciproque} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Remarque 5.2.13 : Pour $x, u \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} & x^u = \exp(\log(x) \cdot u) \\ \implies & (x^u)' = \exp(\log(x) \cdot u) \cdot (\log(x) \cdot u)' = ux^{u-1} \end{aligned}$$

Définition 5.2.14 *(Fonctions trigonométriques hyperboliques)* **.** On défini :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Théorème 5.2.15 *(Règle de Bernouilli-l'Hospital)* **.** Soit x_0 et $f, g : A \to \mathbb{R}$, où $A =]x_0 - d, x_0 + d[\setminus \{x_0\}$ est un voisinage de x_0. Si :

1. $\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$
2. $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Preuve. En exercices (Application du TAF) □

Remarque 5.2.16 : Ce théorème marche aussi pour limite à droite et à gauche.

Ex 1 : Grâce a l'Hostpital, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x} = 1$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{\log(x)} &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} px^p = \begin{cases} +\infty & p > 0 \\ 0 & p \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Cela montre que $\log(x)$ croît moins vite que tout polynôme.

Ex 3 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x\to 0} \exp(\frac{\log(\cos(2x) \cdot 3)}{x^2}) \\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{\cos(2x)} \cdot \frac{-\sin(2x)}{2x} \cdot 2\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{3}{\cos(0)} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(y)}{y} \cdot 2\right) \\ &= \exp(-6) = e^{-6}\end{aligned}$$

Remarque 5.2.17 : Attention : Si la limite du quotient des dérivées n'existe pas ($\notin \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), alors B-H ne marche pas.

Propriété 5.2.18 *(Finction C^1 par morceaux)* **.** Soient $f, g \in C^1(I = \text{intervalle})$ et $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0)$, et on pose

$$\begin{aligned} h : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors h est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$ et dans ce cas, $h \in C^1(I)$.

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} h'_{\text{gauche}}(x_0) &\overset{x \leq x_0}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &\overset{\text{def de } h}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Similaire pour $h'_{droite}(x_0) = g'(x_0)$. La limites à gauche et à droite coïncindent si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$. Dans ce cas, on a :

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \leq 0 \\ g'(x) & x \geq 0 \end{cases} \implies h' \text{ est continue en } x_0$$

Dans ce cas, h' est continue sur I $(h \in C^1)$ □

Remarque 5.2.19 : Cette propriété peut être utilisée récursivement

- La preuve montre : $f'_{\text{gauche}}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$

  $f'_{\text{droite}}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

  si les limites existent

Ex : Soit $f(x) = \begin{cases} \sinh(x) & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$. Alors :

- f est continue en 0 car $\sinh(0) = 0 = \sin(0)$
- de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$ et $sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\in C^2$ car $\sinh''(0) = \sinh(0) = 0 = -\sin(0) = \sin''(0)$
- $\notin C^3$ car $\sinh'''(0) = \cosh(0) = 1 \neq \sin'''(0) = -1$

Donc $f(x) \in C^2(\mathbb{R}) \setminus D^3(\mathbb{R})$

5.3 Etude de fonctions

Slides

5.3.1 Applications : convergence de suites définies par récurrence

Rappel : Une suite définie par récurrence est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 =$ valeur fixée et $a_{n+1} = g(a_n)$, pour une fonction $g : D \to \mathbb{R}$.

Remarque 5.3.1 *(Important)* **:** Si (a_n) converge, disons $a_n \to l \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) \\ &\overset{g \text{ est cont.}}{=} g(\lim_{n\to\infty} a_n) = g(l) \end{aligned}$$

Donc l est foncément une sol de l'équation $\underline{x = g(x)}$. On supposera en général que $g(x)$ est continue et même C^1 sur un intervalle.

Ex : Soit $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = a_n^2 = g(a_n)$ où $g(x) = x^2$. Condidats pour l : $x = g(x) = x^2$, donc $l = 0$ ou $l = 1$. On calcule quelques valeurs :

$$a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{1}{9}, a_2 = \frac{1}{81}, \ldots \to 0$$

En revanche, si $a_0 = 3$, on a :

$$(a_n) = (3, 9, 81, 81^2, \ldots) \to +\infty$$

De plus, si $a_0 = -1$, alors :

$$(a_n) = (-1, 1, 1, 1, \ldots) \to 1$$

Dans un cas simple comme celui-là, on peut montrer par récurrence que :

$$a_n = (a_n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$\begin{cases} a_n \to 0 & |a_0| < 1 \\ a_n \to 1 & a_0 = \pm 1 \\ a_n \to +\infty & |a_0| > 1 \end{cases}$$

Dans le cas général, une étude de la fonction $g(x)$ peut nous aider. Si

$$a_0 \geq l \text{ et } l \leq g(x) \leq x \quad \forall x \geq l \tag{5.3.1}$$

alors :

- $a_1 = g(a_0) \geq l$, $a_2 = g(a_1) \geq l$. Par récurrence : $a_{n+1} = g(a_n) \geq l$, donc $a_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (a_n) est minorée.

- $a_1 = g(a_0) \leq a_0 \implies \ldots \implies a_{n+1} = g(a_n) \leq a_n$ et par récurrence, (a_n) est décroissante

Ainsi, dans ce as (a_n) converge vers un candidat l par décroissance minorée.

Remarque 5.3.2 : Equation 5.3.1 se généralise

Théorème 5.3.3 *(Récurrence linéaire)* **.** Soit (a_n) définie par récurrence via

$$a_0 = a, a_{n+1} = g(a_n)$$

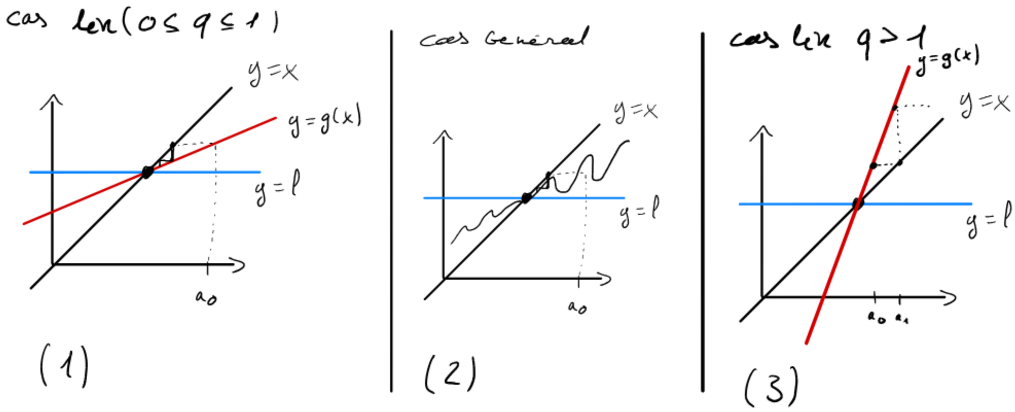
où $g(x) = qx + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$. Alors (a_n) converge vers l'unique solution l de l'equation $g(x) = x$ si et seulement si

$$|q| < 1 \quad \text{ou} \quad a_0 = l$$

Donc

$$l \leq g(x) \leq x$$

Démonstration. **Illustration :**



On voi que dans le cas (1), la fonction converge vers le seul candidat : l. Dans le cas (2), la fonction converge aussi. Dans le cas (3), la fonction diverge. Si $q \leq 0$, on pose

$$b_k = a_{2k}$$
$$c_k = a_{2k+1}$$

Ces suites sont définies par récurrence : $b_0 = a_0$, $b_{k+1} = a_{2k+2} = g(g(a_{2k})) = h(b_k)$ où $h(x) = g(g(x)) = g \circ g(x) = g(qx + b) = q^2x + qb + b$. Pareil pour c_n :

$$c_0 = a_1, c_{n+1} = g(g(a_{2k+1})) = h(c_k)$$

Si $-1 < q \leq 0$, alors, $0 \leq q^2 < 1$, donc b_k et c_k convergent par le cas précédent vers l.
Si $q < -1, q^2 > 1$, donc les suites b_n et c_n divergent par le cas précédent, donc a_n diverge également. □

Ex Non linéaire **:** $a_0 =$ fixé $\in \mathbb{R}^*$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = g(a_n)$ où $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Les candidats pour l sont $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$3 - x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$g(x) - x = \dfrac{3-x^2}{2x}$	$+$	$-$	$+$	$-$
Comparaison	$g(x) > x$	$g(x) < x$	$g(x) > x$	$g(x) < x$

Donc on a

- si $a_0 \in [\sqrt{3}, +\infty[$, on a
$$\sqrt{3} \leq g(x) \leq x$$
et $a_n \to \sqrt{3}$
- si $a_0 \in]0, \sqrt{3}[$, $a_1 = g(a_0) \geq \sqrt{3}$ alors a_1 est dans la région précédente, donc $a_n \to \sqrt{3}$
- si $a_0 < 0, a_n \to -\sqrt{3}$

Donc on conclut que si $a_0 > 0, a_n \to \sqrt{3}$ et si $a_0 < 0, a_n \to -\sqrt{3}$.

5.4 Développements limités

Le but est d'approximer une fonction par un polynôme.

Définition 5.4.1 . Soit $f \in C^n(I)$ où I est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre n en x_0 est l'unique polynôme $p(x)$ de degré $\leq n$ dont les dérivées en x_0 sont les mêmes que celles de f jusqu'à l'ordre n.

Ex : Soit $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$. On a

- $p_1(x) = x$ car $\sin(0) = 0 = p_1(0), \sin'(0) = 1 = p_1'(0)$.
- $p_2(x) = x$ car $\sin''(0) = 0 = p_2''(0)$.
- $p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ car $p_3'(x) = -1 - \frac{3}{6}x^2, p_3''(x) = \frac{-6}{6}x, p_3'''(x) = -1 = \sin'''(0)$

Ainsi, la formule pour trouver le p_n polynôme est
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$
où $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Définition 5.4.2 *(Développement limité)* **.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Alors, f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si
$$f(x) = \text{ polynôme de degré } \leq n \; + \; \text{reste } r_n(x)$$
pour tout $x \in I$ où $r_n(x)$ vérifie

- Pour tout $c > 0$, $|r_n(x)| \leq c|x - x_0|^n$ dans un voisinage de x_0.
- $\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$
- $r_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ est telle que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Théorème 5.4.3 *(Formule de Taylor)* **.** Soit $f \in C^n(I)$, où I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Alors f admet un DL_n en x_0 donné par

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

Démonstration. On applique B-H n fois. □

Remarque 5.4.4 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ouvert. Alors

- Si f admet un DL_n, il est unique.
- Si f est continue en x_0, alors f admet un DL_0 en x_0, de plus l'autre sens en vrai aussi si on suppose que $\varepsilon(x) = 0$.
- Si f est continue en x_0 alors f admet un DL_1 en x_0 si et seulement si f est dérivable.

Ex : On va voir que $\sin(x)$ admet un développement limité d'ordre 3 en $x_0 = 0$ donné par $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$. La seule chose à montrer est

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \\ \iff &\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^2}{x^3} \overset{\text{B-H}}{=} 0 \end{aligned}$$

On a donc que le DL_2 en $x_0 = 0$ est

$$x + x^2\varepsilon(x)$$

Remarque 5.4.5 *(Estimation du reste)* **:** On dit que $|r_n(x)| \leq f^{(n+1)}(u) = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!}$

5.4.1 Applications : Calculs de limites

- Calculons la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{6} + \varepsilon(x) = -\frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

  On voit qu'avec un DL_1 ca ne marche pas. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + x\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} \end{aligned}$$

  Donc il a fallu prendre un développement limité d'ordre plus grand.

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2+2\cos(x)}{x^4}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(x^2 - 2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right)\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{12 + \varepsilon(x)} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$:

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\varepsilon(x)\right)\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^2\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Comme c est supérieur à 0, cette série converge et la série originale aussi, par comparaison.

Ex Calculs de DL **:** Tant qu'on écrit le rest, on peut tout faire.

Ex Le DL_2 en $x_0 = 0$ de $f(x = \sin(x)\cos(x))$ **:** On utilise le DL_2 de $\sin(x)$ et le DL_1 de $\cos(x)$. Donc

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) &= \left(x+x^2\varepsilon(x)\right)(1+x\varepsilon(x))\\ &= x+x^2\varepsilon(x)+x^2\varepsilon(x)+x^3\varepsilon(x)\varepsilon(x)\\ &= x+x^2\left(\underbrace{\varepsilon(x)+\varepsilon(x)+x\varepsilon(x)\varepsilon(x)}_{\to 0}\right)\\ &= x+x^2\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Ex : Le DL_1 en x_0 de $f(x) = e^{\cos(x)}$. On utiliser les DL_1 de $\cos(x)$ et e^x.

$$e^{\cos(x)} = 1+\cos(x)+\cos(x)\varepsilon\left(\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}\right)$$

On voit que $\varepsilon(x)$ ne tend pas vers 0.
Solution : Méthode (i) : il faut réécrire l'expression pour avoit quelque chose qui tend vers 0. Donc :

$$\begin{aligned}e^{\cos(x)} &= e^{1+x\varepsilon(x)} = e\cdot e^{c\varepsilon(x)}\\ &= e\left(1+x\varepsilon(x)+x\varepsilon(x)\varepsilon(x\varepsilon(x))\right)\\ &= e+x\left(e\varepsilon(x)+e\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(x\varepsilon(x))\right)\end{aligned}$$

Methode (ii) : Combiner le DL_1 en $x_0 = 0$ et de $\cos(x)$ avec le DL_1 en $x_0 = \cos(0) = 1$ de e^x. Donc :

$$\begin{aligned}e^x &= e+e(x-1)+(x-1)\underbrace{\quad\tilde{\varepsilon}(x)\quad}_{\to 0 \text{ lorsque } x\to 1}\\ \implies e^{\cos(x)} &= e+e\left(\cos(x)-1\right)+\left(\cos(x)-1\right)\tilde{\varepsilon}(x)\\ &= e+e(x\varepsilon(x))+(x\varepsilon(x))\tilde{\varepsilon}(\cos(x))\\ &= e+x\left(e\varepsilon(x)\right)+\varepsilon(x)\tilde{\varepsilon}(\cos(x))\end{aligned}$$

5.4.2 Séries de Taylor

Si $f \in C^n(I)$, avec I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$$

Question : si $f \in C^\infty(I)$, a-t-on $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$? Quand on a $n \to \infty$, il faut que :

1. La série converge
2. Le reste $r_n(x) \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$

Définition 5.4.6 . Pour $f \in C^\infty(I)$ avec I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, la série de Taylor de f centrée en x_0 est la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Remarque 5.4.7 :

- Cette série est définie quelque soit $f \in C^\infty(I)$ (même si $r_n(x) \nrightarrow 0$)
- Si $\mathrm{x}_0 = 0$, elle s'appelle aussi série de Maclaurin.
- C'est une série entière ! (cf. Chap. 3.3 $\rightsquigarrow$ centre $= x_0$, rayon de convergence pas connu)

Ex 1 : $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R}), x_0 = 0$. Le DL_n de f donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$$

Donc la série de Taylor (en $x_0 = 0$) est donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il reste à voir que $\lim_{x\to\infty} r_n(x) = 0$. On a :

$$|r_n(x)| \leq f^{(n+1)}(u)\frac{|x|^{n+1}}{n!} = e^u \frac{|x|^{n+1}}{n!} \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{n!} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Ainsi la limite du ret et bien 0. Donc e^x est égale à sa série de Taylor en $x_0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Remarque 5.4.8 : En fait, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^n$

Ex 2 : Cela marche aussi pour sin, cos, sinh, cosh !

$$\implies \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$
$$\implies \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.4.9 : Cela donne enfin une raison pour la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. En effet

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^2}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + i\sin(x) \end{aligned}$$

Propriété 5.4.10 *(Dériviées de série entières)* **.** Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$, alors

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot b_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{k+1} (x - x_0)$$

et les rayons de convergences sont les mêmes ! Par example, on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$