

# Notes d'Analyse 1

Paul Lasry-Robin

9 janvier 2026

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les nombres</b>	<b>2</b>
1.1	Entiers et rationnels . . . . .	2
1.2	Construction des nombres réels . . . . .	3
1.3	Propriétés de réels . . . . .	4
1.4	Représentation décimale . . . . .	4
1.5	Nombre complexe . . . . .	5
1.6	Propriétés des nombres complexes . . . . .	5
1.7	Calcul dans $\mathbb{C}$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Suites</b>	<b>8</b>
2.1	Définitions et exemples . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Séries</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Fonctions</b>	<b>10</b>
4.1	Rappels . . . . .	10
4.2	Limites . . . . .	10
4.3	Calculs de limites . . . . .	13
4.4	Lim à gauche/droite, limites infinies . . . . .	16
4.5	Fonctions continues . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Dérivées</b>	<b>22</b>
5.1	Définitions et exemples . . . . .	22
5.2	Dérivée et croissance . . . . .	28
5.2.1	La fonction exponentielle (et logarithmes) . . . . .	29
5.3	Etude de fonctions . . . . .	33
5.3.1	Applications : convergence de suites définies par récurrence . . . . .	34
5.4	Développements limités . . . . .	36
5.4.1	Applications : Calculs de limites . . . . .	37
5.4.2	Séries de Taylor . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Intégrales</b>	<b>43</b>
6.1	Primitives et intégrales . . . . .	43
6.2	Calculs d'intégrale . . . . .	47
6.2.1	Intégration de fonctions rationnelles . . . . .	51
6.3	Intégrale généralisée ou impropres . . . . .	53

# Chapitre 1

## Les nombres

### 1.1 Entiers et rationnels

**Définition 1.1.1** (*Entiers naturels*) . On note

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad , \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

**Définition 1.1.2** (*Entiers relatifs*) . On note

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$$

**Définition 1.1.3** (*Nombres naturels*) . On note

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

**Proposition 1.1.4** : L'équation  $x^2 = 2$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{Q}$

**Lemme** :  $a^2 \equiv 0 \pmod{2} \implies a \equiv 0 \pmod{2}$

*Preuve du lemme.* Si  $a$  est impaire, on a que  $a = 2k + 1$  où  $k \in \mathbb{Z}$  donc  $a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ . Ainsi  $a^2$  est impaire. Par la contraposé, on a que :

$a$  est pair si et seulement si  $a^2$  est paire.

□

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une solution  $x = \frac{a}{b}$  tel que  $a, b \in \mathbb{Z}$  et  $b \neq 0$ . On suppose la fraction irréductible. On a alors :

$$x^2 = 2 \implies \frac{a^2}{b^2} = 2 \implies a^2 = 2b^2$$

Par le lemme, on sait que  $a$  est paire

$$\begin{aligned} a = 2c &\implies 2b^2 = 4c^2 \\ &\implies b^2 = 2c^2 \implies b^2 \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Par le lemme,  $b$  est pair, donc :

$$x = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$$

La fraction est réductible, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Il n'y a donc pas de solution dans  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

## 1.2 Construction des nombres réels

On utilise la relation d'ordre sur  $\mathbb{Q}$  pour "ajouter" des nombres aux entiers.

**Définition 1.2.1** (*Minorant / Majorant*) . Soit  $A \subseteq \mathbb{Q}$  un ensemble non vide.

- Un majorant / minorant de l'ensemble  $A$  est un nombre  $x$  tel que  $x \geq (\leq) \forall a \in A$
- S'il existe un majorant / minorant de  $A$  tel que  $x \in A$  alors il s'appelle le maximum / minimum de  $A$
- L'ensemble  $A$  est majoré / minoré / borné s'il admet un majorant / minorant / les deux.

**Ex :**  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ . On a que  $A$  est borné,  $\min A = 0, \max A = 1$ .

**Définition 1.2.2** (*Suprémum / Infimum*) . Soit  $A \subseteq \mathbb{Q}(\mathbb{R})$ .

- Le suprémum de  $A$  est

$$\sup A = \min x \mid x \text{ est un majorant de } A$$

- Le infimum de  $A$  est

$$\inf A = \{x \mid x \text{ est un minorant de } A\}$$

**Remarque 1.2.3 :** Si  $A$  n'a pas de minorant / majorant, on dit par convention  $\sup A = +\infty$ ,  $\inf A = -\infty$ .

De plus, si  $\max A, \min A$  existent, on a :

$$\begin{aligned} \sup A &= \max A \\ \inf A &= \min A \end{aligned}$$

**Remarque 1.2.4 :** Pour un ensemble borné, on s'attend à toujours avoir un inf et sup, même si min et max n'existent pas, mais c'est faux :

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq x^2\}$$

$$|x| \leq \frac{3}{2} \iff \underbrace{-\frac{3}{2}}_{\text{minorant de } A} \leq x \leq \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{majorant de } A}$$

**Proposition 1.2.5 :** Si  $x = \sup D$  existe, alors  $x^2 = 2$ .

*Preuve proposition.* 1) Supposons que  $x^2 < 2$ . Soit  $d \in D$  tel que  $d = x + \frac{1}{n}$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  est choisi tel que  $n \geq \frac{2x+1}{2-x^2}$ , on a :

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2 \\ &\iff \frac{2x+1}{n} \leq 2 - x^2 \iff n \leq \frac{2x+1}{2-x^2} \end{aligned}$$

Comme  $n$  a été choisi comme tel, on a que  $d^2 \leq 2$ . Ainsi,  $d \in D$  et  $d > x$ , ainsi  $x$  n'est pas majorant.

2) Supposons que  $x^2 > 2$  [exercice dur !]. Comme on ne peut pas avoir ni  $x^2 < 2$  ni  $x^2 > 2$ , on a que  $x^2 = 2$

□

**Corollaire 1.2.6 :** Le nombre  $x = \sup D$  n'existe pas dans  $\mathbb{Q}$ .

**Remarque 1.2.7 :** Il n'y a pas de  $x \in \mathbb{Q}$  tel que  $x^2 = 2$ .

On voit qu'il manque des nombres dans  $\mathbb{Q}$ , cela nous indique à en ajouter !

**Construction de  $\mathbb{R}$  :**

$\mathbb{R}$  s'obtient à partir de  $\mathbb{Q}$  en ajoutant les sup et les inf de tous les ensembles bornés  $A \subseteq \mathbb{Q}$ .

## 1.3 Propriétés de réels

- (i)  $\mathbb{R}$  est un corp, (on a  $0, 1, +, \cdot$ , inverse pour  $+$  et  $\cdot$ , distributivité, muni d'un ordre total ( $x \leq y$ ))
- (ii) Les définitions de min, max etc... restent les mêmes, pour des sous-ensembles  $A \subseteq \mathbb{R}$
- (iii) Réussite de la construction

**Théorème 1.3.1 .** Pour tout  $A \subseteq \mathbb{R}$  non-vide et minoré / majoré, le nombre  $\sup A$  /  $\inf A$  existe toujours et est unique.

**Remarque 1.3.2 :**  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} \implies \sup D = \sqrt{2} \quad , \quad \inf A = -\sqrt{2}$

## 1.4 Représentation décimale

Tout nombre  $x \in \mathbb{R}$  s'écrit  $x \pm d_1 d_2 d_3 \dots d_n, d_{n+1}$  avec  $d_i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq d_i \leq 9$

**Théorème 1.4.1 .** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $x \in \mathbb{Q}$  si et seulement si  $x$  a une représentation décimale finie et périodique.

**Conséquence du théorème :**

- La représentation de  $\sqrt{2}$  est bel et bien infinie, non-périodique.
- Densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tous  $x < y \in \mathbb{R}$ , il existe  $a \in \mathbb{Q}$  tel que  $x < a < y$
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $|a - x| < \varepsilon$ .

## 1.5 Nombre complexe

Dans  $\mathbb{R}$ , on a une solution de  $x^2 = a$  pour tout  $a \geq 0$ . Mais pas de solution de  $x^2 = -1$ . On prend  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et on le munit de :

- 1) L'addition :  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- 2) La multiplication :  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

**Remarque / Notation :**

- (i)  $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ ,  $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$ . On identifie l'ensemble

$$\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

- (ii) Le "nombre"  $(0, 1)$  est intéressant :

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

On l'appelle  $i = (0, 1)$  = unité imaginaire. On dit aussi que  $(a, b) = a + bi$ .

**Définition 1.5.1** . L'ensemble  $\mathbb{R}^2$  munit de  $+$ ,  $\cdot$  et de ces notations / identification est le corps des nombres complexe, qu'on note  $\mathbb{C}$ .

**Remarque 1.5.2** : Tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  s'écrit  $z = a + bi$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . C'est la forme cartésienne de  $z$ .

## 1.6 Propriétés des nombres complexes

(i)  $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  ,  $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$

(ii)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$

(iii)  $|z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \implies (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

(iv)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \implies |z_1 \cdot z_2|^2 \stackrel{(iii)}{=} z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

(v) Si  $z \in \mathbb{C}^*$ , alors  $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$

- (vi) Inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

**Trois représentations de  $\mathbb{C}$** 

- 1) Cartésienne :  $z = a + bi$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$
- 2) Forme polaire :  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  où  $r \in \mathbb{R}^*$
- 3) Forme exponentielle :  $z = re^{i\theta}$

**Conséquences de l'exponentielle complexe**

- Pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ . Dnc si  $z = re^{i\theta}$ , alors  $\bar{z} = e^{-i\theta}$ .

**Propriété 1.6.1 (Formule d'Euler) .**

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

**Propriété 1.6.2 (Formule de Moivre) .**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (1.6.1)$$

$$\implies (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (1.6.2)$$

**Propriété 1.6.3 (Formule pour sin et cos) .**

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

**1.7 Calcul dans  $\mathbb{C}$** 

Calcul de  $(1 - \sqrt{3}i)^{30}$

$$\begin{aligned} z &= 1 - \sqrt{3}i \\ |z| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ \arg z &= \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan -\sqrt{3} = \frac{-\pi}{3} \end{aligned}$$

Avec ces informations, on passe en forme polaire :

$$z^{30} = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{30} = \dots = 2^{30}$$

**L'équation**  $z^n = 1$ ,  $z = er^{i\theta}$

Par la formule de Moivre (1.6.2), on a :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$$

On a alors que  $r^n = 1$  et  $n\theta = 0$ , donc :

$$r = 1 \quad , \quad \theta = \frac{k2\pi}{n}$$

Les solutions sont donc  $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid e^{i\frac{2k\pi}{n}} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Il y a bien  $n$  solutions distinctes.

**L'équation  $z^n = w$ , pour tout  $w \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{Z}$**

**Etape 1 :** Trouver une solution  $z_0$ , appelée solution particulière.

**Ex :** Si  $w = se^{i\phi}$ , prendre  $z_0 = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\phi}{n}}$

**Etape 2 :** Trouver la solution générale. On a  $z^n = w = z_0^n$ . Donc :

$$\left( \frac{z}{z_0} \right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

On trouve a nouveau  $n$  solutions distinctes :  $\mathbb{S} = z_0 \cdot \{\text{solutions de } z^n = 1\}$ .

**Théorème 1.7.1 (Théorème fondamental de l'algèbre) .** Tout polynomes  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_i z^i + a_0$ , avec  $a_i \in \mathbb{C}$  se factorise en :

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

**Corollaire 1.7.2 :** Toute équation polynomiale  $p(z) = 0$  de degré  $n$  possède  $n$  solutions complexes en comptant les multiplicités.

**Ex :** Polynome de degré 2.

$$p(z) = az^2 + bz + c = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A interpreter comme :  $\pm \sqrt{b^2 - 4ac}$  sont les solutions de  $u^2 = b^2 - 4ac$

$$\iff z = \frac{-b + \text{"sols de } u^2 = b^2 - 4ac"}{2a}$$

**Ex :**  $z^2 + 2z + 3 = 0$  :

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

Les solution de  $u^2 = -8$  sont  $u_1 = 2\sqrt{2} \cdot i$ ,  $u_2 = -2\sqrt{2} \cdot i$ , donc :

$$z = -1 \pm \sqrt{2} \cdot i$$

**Remarque 1.7.3 :** Si  $p(z)$  est à coefficient réels, alors les racines non-réelles viennent par paire complexes conjuguées.

# Chapitre 2

## Suites

### 2.1 Définitions et exemples

**Définition 2.1.1 .** Une suite de nombres réels est une fonction :

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow a(n) = a_n \end{aligned}$$

**Notation :**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \geq 0} = (a_n)_{\mathbb{N}} = a_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$

**Ex :** 1) Suite arithmétique :

# Chapitre 3

## Séries

# Chapitre 4

## Fonctions

### 4.1 Rappels

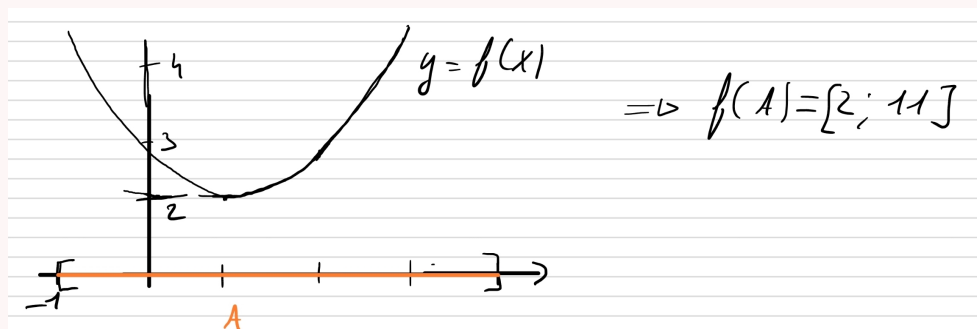
**Définition 4.1.1** (*Fonction majorées*) . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. Alors  $f$  est majorée sur  $A \subseteq D$  si  $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$  l'est.

De plus, on pose :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

Pareil pour inf, max et min (si min et max existent).

**Ex :** Pour  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$  et  $A = ]-1, 4[$



Donc  $\forall x \in A$  :

- $\inf f(x) = \min f(x) = 2$
- $\sup f(x) = 11$

Et max n'existe pas.

### 4.2 Limites

**Ex :**  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$D(f) = \mathbb{R}^*$ . On aimerait définir  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ .

Il faut deux ingrédient pour conclure que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  :

- 1)  $f$  doit être définie "un peu autour" de  $x_0$
- 2)  $f(x)$  doit "s'approcher" de  $l$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ .

**Définition 4.2.1** (*Fonction définie au voisinage*). Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$  s'il existe  $d \in \mathbb{R} > 0$  t.q :

$$]x_0 - d, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + d[ \subset D$$

**Ex :**  $\frac{\sin x}{x}$  est définie au voisinage de  $x_0 = 0$  même si elle n'est pas définie en 0.

**Définition 4.2.2** (*Limite d'une fonction*). Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  def au voisinage de  $x_0$ . Alors,  $f$  admet  $l \in \mathbb{R}$  pour limite lorsque  $x \rightarrow x_0$ .

On note :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$  t.q.  $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ , on a :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

**Ex 1 :** Soit  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 132 & x = 0 \end{cases}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 132$  car on s'intéresse seulement au voisinage de 0.

**Ex 2 :** Soit  $f(x) = 5x - 1, x_0 = 0$ . Montrons que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$ .

1)  $D(f) = \mathbb{R} \implies f$  est def dans tout voisinage de  $x_0 = 2$ .

2) Soit  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$  tel que  $|x - 2| \leq \delta$ .

$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on a montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $x \in D \setminus \{2\}$  et  $|x - 2| \leq \delta$ , on a :

$$|f(x) - 9| \leq \varepsilon$$

**Théorème 4.2.3** (*Limites de fonction et suites*). Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors on peut dire que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$  pour toute  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ .

Idée :  $a_n \rightarrow x_0$  sont les manières de s'approcher de  $x_0$ . Donc  $f(x) \rightarrow l$  si  $f(a_n) \rightarrow l$  pour toutes les façons  $(a_n \rightarrow x_0)$  de s'approcher de  $x_0$ .

**Ex :** Redémonstration de  $\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 10 = 9$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5a_n - 10) = 5(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) - 10 = 5 \cdot 2 - 10 = 0$$

Comme la suite était arbitraire, on a montré que pour TOUTE SUITE  $(a_n)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 10 = 0$$

**Corollaire 4.2.4 :** Si on a trouvé :

- Une suite  $(a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$  t.q.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ n'existe pas}$$

- Deux suites  $(a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$  t.q.  $a_n \rightarrow x_0$  et  $b_n \rightarrow x_0$  mais :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  n'existe pas.

**Ex Corollaire 4.2.4 :** Prenons  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $x_0 = 0$ .  $D(f) = \mathbb{R}^*$ , donc  $f$  est définie au voisinage de  $x_0 = 0$ . En effet :

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \rightarrow 0$$

Mais :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1 \end{aligned}$$

**Remarque 4.2.5 :** On aurait aussi pu considérer la suite :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) &= \cos(\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \quad \text{qui n'existe pas} \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'existe pas.

#### Propriété 4.2.6 (Limites de fonctions) .

Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  définies au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$  et telles que :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existent. Alors :

$$1) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2, \text{ alors } l_1 = l_2 \quad (\text{Unicité de la limite})$$

$$2) \forall p, q \in \mathbb{R} \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p \cdot f(x) + q \cdot g(x) = p \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + q \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$4) \text{ Si } f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ alors :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$5) \text{ Si } h : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ est telle que } f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ et si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l, \text{ alors :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

*Démonstration.* Théorème des deux gendarmes

□

## 4.3 Calculs de limites

Considérons pour ces exemples  $u \in \mathbb{R}$ .

- 0)  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$  où  $c$  est une constante.

*Démonstration.* Soit  $a_n \rightarrow u$ . On a  $f(a_n) = c \rightarrow c$  □

$$\lim_{x \rightarrow u} x = u \quad (f(x) = x)$$

*Démonstration.* Soit  $a_n \rightarrow u$ . On a  $f(a_n) = a_n \rightarrow u$  □

- 1) **Polynômes** Exemple (par produit) :

$$\lim_{x \rightarrow u} x^2 = \lim_{x \rightarrow u} (x \cdot x) = \left( \lim_{x \rightarrow u} x \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow u} x \right) = u \cdot u = u^2$$

Par récurrence, on montre que  $\lim_{x \rightarrow u} x^n = u^n$ .

*Preuve rapide. Init.* ( $n = 0$ ) :  $\lim_{x \rightarrow u} 1 = 1$ .

**Hérédité :**  $\lim_{x \rightarrow u} x^{n+1} = \lim_{x \rightarrow u} (x^n \cdot x) = \left( \lim_{x \rightarrow u} x^n \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow u} x \right) = u^n \cdot u = u^{n+1}$ . □

Donc pour  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} P(x) = P(u)$$

- 2) **Fonctions rationnelles** :  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Si  $Q(u) \neq 0$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} Q(x) = Q(u) \quad (\text{Point 1})$$

Donc par la propriété 4, on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \frac{P(u)}{Q(u)}$$

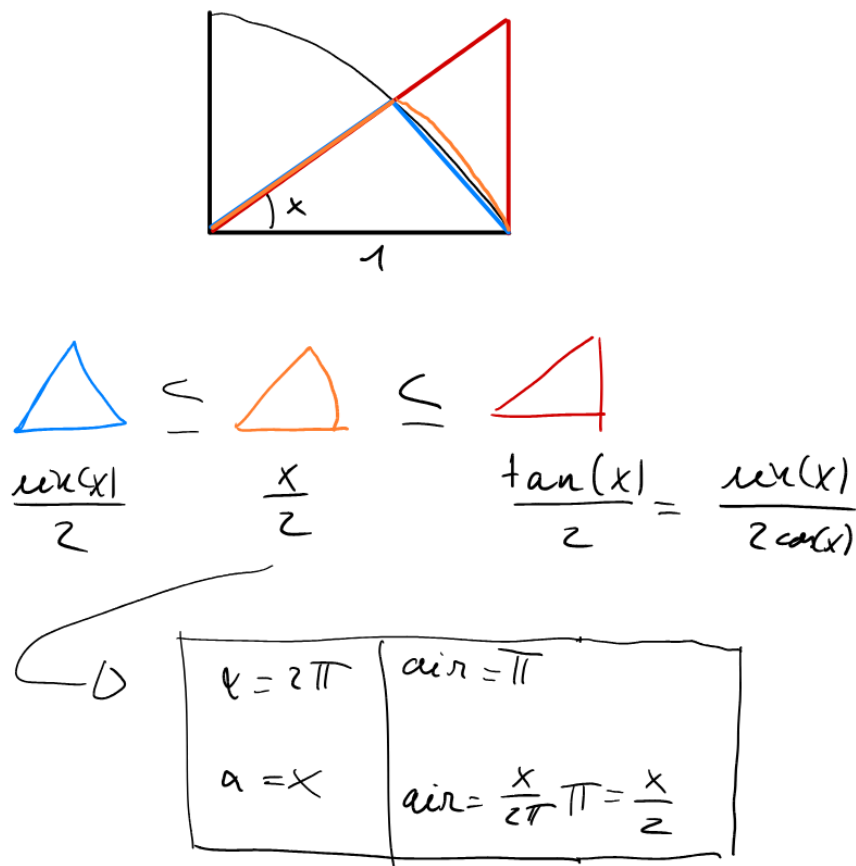
**Ex :** Ainsi on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2}$$

Mais si on a  $Q(u) = 0$ , il faut faire un travail supplémentaire :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$$

- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 1$ . Démonstration imagée.



Le triangle bleu est plus petit ou égal au triangle orange lui-même plus petit que le rouge. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \\
 \Rightarrow & \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\
 \Rightarrow & \frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{1}{\cos x} \\
 \Rightarrow & \frac{\sin x \cos x}{x} \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x}
 \end{aligned}$$

Finalement, comme  $\cos x \in [0, 1]$  on a :

$$\cos x \geq \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \geq 1 - x^2$$

Donc

$$\cos x \geq 1 - x^2$$

On a alors la chaîne d'inégalités :

$$1 - x^2 \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Ceci est valable pour  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , car toutes les fonctions sont paires.  
Par le théorème des deux gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

**Ex :** On peut alors voir :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 1 \cdot 0 = 0$$

**Propriété 4.3.1** (*Limites de fonctions composées / changement de variable*) . Soient  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$
- 2)  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \in \mathbb{R}$
- 3)  $f(x) \neq b$  au voisinage de  $a$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

*Preuve à l'aide des suites.* Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{a\}$  t.q.  $x_n \rightarrow a$ . On pose  $y_n = f(x_n)$ . Alors  $y_n \rightarrow b$  (par 1) et  $y_n \neq b$  pour  $n$  assez grand (par 3)  $\implies (y_n) \subset B \setminus \{b\}$  et  $y_n \rightarrow b \implies g(y_n) \rightarrow c$  (par 2)

□

**Ex 1 :** Soit  $f(x) = x^{12} - 1$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x^{12} - 1)$  vérifie 1 et 2 de la propriété au voisinage de 1 (dès que  $x \neq \pm 1$ ).

**Ex 2 :** On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 + \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{3 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2}{3 + y^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Attention : La condition 3 est indispensable, regardons un cas où elle n'est pas vérifiée.

**Ex 3 :**  $f(x) = 3$  (constante) et  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} g(3) = 0$ .

Mais : on ne peut pas utiliser la prop car  $f(x) = 3$  dans le voisinage de 0. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq \lim_{y \rightarrow 3} g(y) = \lim_{y \rightarrow 3} 2 \neq 0$$

**Propriété 4.3.2 (Limites de réciproques)** . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone. Soit  $u \in [a, b]$  et  $v = f(u)$ . Alors  $f([a, b]) \rightarrow \text{Im}(f)$  est bij, et si  $f^{-1}(\text{Im}(f)) \rightarrow [a, b]$  est def au vois de  $v$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(v) = u$$

**Corollaire 4.3.3** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$

*Démonstration.* On pose  $f(x) = x^n$ , strictement croissante sur  $[a, b] \forall b \geq 0$ . Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow u} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$$

□

## 4.4 Lim à gauche/droite, limites infinies

**Définition 4.4.1** . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de  $u \in \mathbb{R}$ , c'est à dire  $[u - d, u[ \subseteq D$  pour tout  $d > 0$  (resp.  $]u, u + d[ \subseteq D \forall d > 0$ ).

Alors  $f$  admet  $l \in \mathbb{R}$  pour limite à gauche (resp. à droite) lorsque  $x \rightarrow u$ , si, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in D \setminus \{u\}$ , on a  $x \in [u - \delta, u[$  (resp.  $x \in ]u, u + \delta]$ ) :

$$\implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

**Notation** : limites à gauche :  $\lim_{x \rightarrow u^-}$ , limite à droite :  $\lim_{x \rightarrow u^+}$

**Ex** :  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ . Il faut séparer les cas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

Donc :  $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} -1 = \lim_{x \rightarrow x^-} -1 = -1$  et  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x^+} 1 = 1$ .

**Propriété 4.4.2 (Limites gauche droite)** . Si  $f$  est def au voisinage de  $u$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow u^+} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) = l$$

**Remarque 4.4.3** : Cela montre que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{|x|}{x}$  n'existe pas.

**Définition 4.4.4** . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  def au voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) c'est à dire  $[a, +\infty[ \subseteq D$  pour un  $a \in \mathbb{R}$  (resp.  $]-\infty, a] \subseteq D$ ).

Alors  $f(x)$  admet  $l \in \mathbb{R}$  comme limite lorsque  $x \rightarrow +\infty$  (resp.  $x \rightarrow -\infty$ ) si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in D$  on a :

$$x \geq c \text{ (resp. } x \leq c) \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

**Notation** :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ou  $f(x) \rightarrow l$

**Ex :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

*Preuve avec epsilon.* Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose comme  $c = \frac{1}{\varepsilon}$ . Alors dès que  $x \geq 0$  on a :

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c} \leq \varepsilon$$

Comme  $\varepsilon$  était arbitraire, on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in D, x \geq c \implies |f(x) - 0| \leq \varepsilon$$

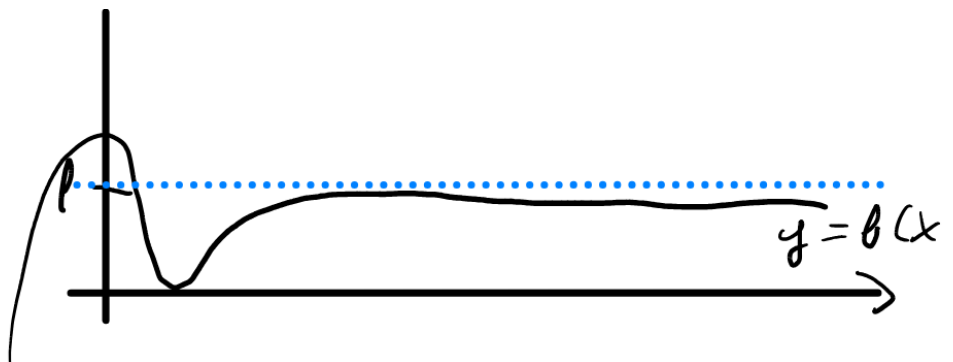
□

*Preuve avec les suites.* Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite t.q.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Comme  $(x_n)$  était arbitraire, c'est vrai pour toute suite. On a donc montré que  $\forall (x_n) \rightarrow +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$  □

**Remarque 4.4.5 :**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \iff f(x)$  a une asymptote horizontale d'équation  $y = l$



**Définition 4.4.6 (Divergence vers l'infini).** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $u \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(x)$  tends vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) lorsque  $x \rightarrow u$  si pour tout  $A \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$  tel que  $\forall x \in D \setminus \{u\}$  on a :

$$|x - u| \leq \delta \iff f(x) \geq A \quad (\text{resp. } f(x) \leq A)$$

**Notation :**  $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) ou  $f(x) \rightarrow +\infty$  (resp.  $-\infty$ )

**Ex :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

*Preuve avec epsilon.* Soit  $A \in \mathbb{R}$ . On pose  $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$  (ou  $\delta = 1$  si  $A < 0$ ). Alors dès que  $|x - 0| \leq \delta$ , on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2} = A$$

Comme  $A$  était arbitraire, c'est bon. □

**Remarque 4.4.7 :**

- On peut combiner ces limites généralisées. Par exemple :

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow u^\pm} f(x) = \pm\infty \iff f(x)$  admet une asymptote verticale d'éq  $x = u$
- Les propriétés algébriques, le théorème des gendarmes, les limites de composées et réciproques, ainsi que les calculs avec  $+\infty$  valable pour les suites restent vrais pour ces limites généralisées.
- Attention aux formes indéterminées :
  - $+\infty - +\infty$
  - $0 \cdot +\infty$
  - $\frac{+\infty}{+\infty}$
  - $\frac{0}{0}$

**Ex :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = \infty$$

## 4.5 Fonctions continues

**Définition 4.5.1** . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $u \in \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est continue en  $x = u$  si :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$$

**Remarque 4.5.2** (*Conséquences de la continuité*) : Cela implique trois choses :

- 1) Si  $u \in D$ , alors  $f$  est définie au voisinage de  $u$  et en  $u$ .
- 2) la limite  $\lim_{x \rightarrow u} f(x)$  existe dans  $\mathbb{R}$
- 3) tout  $f(u) \in \mathbb{R}$

**Ex 1 :** Les polynômes, les fonctions rationnelles,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sin x$  (toutes les fonction trigo),  $e^x$ ,  $\log x$  etc... sont continues sur leur domaine.

**Ex 2 :**  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$  est continue pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On voit que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2^2 + 1}{2 - 1} = 5 = f(2)$$

Mais  $1 \notin D \implies f$  n'est pas continue en  $x = 1$ .

**Remarque 4.5.3** : Si  $f$  est continue en  $u \in \mathbb{R}$  et si  $a_n \rightarrow u$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = f(u)$$

**Définition 4.5.4** . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage  $\begin{matrix} \text{à droite} \\ \text{à gauche} \end{matrix}$  de  $u \in \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est

**continue**  $\begin{matrix} \text{à droite} \\ \text{à gauche} \end{matrix}$  **en**  $x = u$  si :

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow u} f(x) &= \lim_{x \rightarrow u^+} f(x) = f(u) \\ \lim_{x \uparrow u} f(x) &= \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) = f(u) \end{aligned}$$

**Ex :**  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases} \implies f$  est continue en tout  $x \neq 0$ . En  $x = 0$  on a :

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \downarrow 0} (2x + 1) = 1 = f(0)$$

Donc  $f$  est continues à gauche et à droite, donc continue en  $x = 0$  donc continue sur  $\mathbb{R}$

**Propriété 4.5.5 (Opérations sur les fonctions continues)** . Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $u$  alors  $(f + g)$ ,  $(f \cdot g)$ ,  $(\alpha f + \beta g)$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)$  (si  $g(u) \neq 0$ ) sont aussi continues. De plus, si  $f$  est continue en  $u$  et  $g$  continue en  $f(u)$ , alors  $(f \circ g)(x)$  est continues en  $u$ .

**Ex :**  $\frac{\sin(x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{x^2 + 5} + \cos(x)}$  est continue sur tout  $\mathbb{R}$

**Définition 4.5.6 (Prolongement par continuité)** . Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est définie au voisinage de  $u$  avec  $u \notin \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = l \in \mathbb{R}$  alors, le prolongement par continuité de  $f$  est :

$$\begin{aligned} \hat{f} : D \cup \{u\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq u \\ l & \text{si } x = u \end{cases} \end{aligned}$$

**Ex 1 :**  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$\hat{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On appelle cette fonction  $\text{sinc}(x)$

**Ex 2 :** A l'inverse  $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  ne peut pas être prolongée par continuité en  $x = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'existe pas.

**Définition 4.5.7** (*Fonction continues sur un intervalle*) . Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue (jusqu'au bord) si :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$  pour tout  $u \in [a, b]$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  ( $f$  est continue à droite en  $x = a$ )
- 3)  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$  ( $f$  est continue à gauche en  $x = b$ )

De manière analogue :

$f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1 + 2
$]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1 + 3
$]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1

**Théorème 4.5.8** (*Valeur moyenne – TVI*) . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors :

$$f([a, b]) = \left[ \inf_{x \in [a, b]} f(x), \sup_{x \in [a, b]} f(x) \right]$$

**Remarque 4.5.9** (*TVI*) : Cela veut dire que  $f$  atteint :

- Son inf est son minimum :

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Son sup est son maximum :

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Toutes les valeurs intermédiaires.

Le min et max n'est pas  $\pm\infty$ . De plus,  $f([a, b])$  est un intervalle fermé.

*Preuve de la remarque.* Posons  $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup(f([a, b]))$ . On sait qu'il existe une suite  $(y_n) \in f([a, b])$  tel que  $y_n \rightarrow s$ . Ainsi

$$\begin{aligned} & f(x_n) & x_n & \in [a, b] \\ \implies & \exists (x_{n_k}) \text{ une sous suite de } (x_n) \text{ t.q. } x_{n_k} \rightarrow u \in [a, b] \\ \implies & f(u) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = s \end{aligned}$$

□

**Ex :** L'équation  $\cos(x) = x$  possède une solution  $x_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

On pose  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue. On a  $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 \geq 0$  et  $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} < 0$ .  
 $x \mapsto \cos(x) - x$

$$\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \leq 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[ \underbrace{\min_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x)}_{x < 0}, \underbrace{\max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x)}_{x > 0} \right]$$

Ainsi, il existe  $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $f(x_0) = 0 \iff \cos(x_0) = x_0$

**Corollaire 4.5.10 (TVI - 1) :** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et que  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$  (ou l'inverse), alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que  $f(u) = 0$

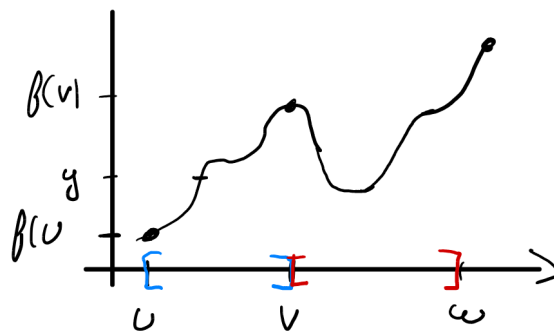
**Corollaire 4.5.11 (TVI - 2) :** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, où  $I$  est un intervalle, alors  $\mathfrak{S}(f) = f(I)$  est aussi un intervalle.

**Corollaire 4.5.12 (TVI - 3) :** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est strictement monotone.

*Preuve du corollaire 4.5.12.*  $\Leftarrow$  cf. Chap 0.

$\Rightarrow$  Supposons que  $f$  n'est pas strictement monotone :

$$\exists u < v < w \text{ tel que } f(u) < f(v) > f(w)$$



Ainsi,  $f(x_1) = y = f(x_2)$ , ce n'est donc pas injectif.  $\square$

# Chapitre 5

## Dérivées

### 5.1 Définitions et exemples

**Définition 5.1.1 (Dérivée)** . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage  $x_0$  ou en  $x_0$ . Alors  $f$  est dérivable ou différentiable en  $x_0$  si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe ( $\in \mathbb{R}$ ).

**Notation :**

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = \mathcal{D}_x f(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

On dit :

- $f'(x_0)$  est la dérivée de  $f$  en  $x_0$
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable si elle est dérivable en tout  $x_0 \in D$ .

**Remarque 5.1.2 :** Le nombre  $f'(x_0)$  est la pente de la tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $(x_0, f(x_0))$ .

**Ex :**

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

**Définition 5.1.3 (La fonction dérivée)** . La fonction dérivée d'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction  $f' : D(f') \rightarrow \mathbb{R}$  où  $D(f') = \{x \in D \mid f \text{ est dérivable en } x\}$

$$x \mapsto f'(x)$$

**Ex 1 :**  $f(x) = x^2$ . On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2 \cdot x_0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f(x) = x^2$  est dérivable pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sa dérivée est  $f'(x) = 2x$ .

**Ex 2 :**  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ \Rightarrow \underbrace{-h}_{\rightarrow 0} &= \frac{1 - h^2 - 1}{h} \geq \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} \geq \frac{0}{h} = \underbrace{0}_{\rightarrow 0} \\ \Rightarrow \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

$\sin$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\sin'(x) = \cos(x)$ . De manière analogue :  $\cos'(x) = -\sin(x)$

**Proposition 5.1.4 :** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  est aussi continue en  $x_0$
- 2)  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{équation de la tangente}} + \underbrace{(x - x_0) \cdot \varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

où  $\varepsilon(x)$  est une fonction tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ . Le **reste** tend plus vite vers 0 que  $x - x_0$

*Preuve de la proposition.*

- 1) On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

- 2) Poser  $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$  et calculer la limite lorsque  $x \rightarrow x_0$

□

**Remarque 5.1.5 :**  $f$  continues  $\nRightarrow f$  dérivable.

**Ex :**  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ . Alors  $f$  est continue en 0 mais on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \uparrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

Ainsi, la limite n'existe pas, donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Propriété 5.1.6** (*Opérations algébriques*) . Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en  $x_0 \in D$ . Alors :

- 1)  $(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = p \cdot f'(x_0) + q \cdot g'(x_0)$
- 2)  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- 3)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ , si  $g(x_0) \neq 0$

**Propriété 5.1.7** (*Dérivées de fonction usuelles*) .

- 0)  $f(x) = c \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$
- 1)  $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$  pour  $\mathbb{N}^*$

*Preuve.* Par récurrence sur  $n$ .

- $n = 1 : f(x) = x, f'(x) = 1$ .
- Supposons vrai pour  $n$ , montrons pour  $n + 1$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{n+1} = x^n \cdot x \\ f'(x) &\stackrel{\text{Prop 2}}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

□

- 2)  $\sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x)$  et

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \stackrel{\text{Prop 3}}{=} \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \dots = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ ou } 1 + \tan^2(x)$$

- 3)  $f(x) = x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$

$$\implies f(x) = \frac{1}{x^n} \stackrel{\text{Prop 3}}{\implies} f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

**Propriété 5.1.8** (*Dérivées de composées*) . Soient  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , deux fonction telles que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ . Alors :

$$\begin{aligned} (g(f(x_0)))' &= (g \circ f)'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Dérivée interne}} \end{aligned}$$

Preuve de la propriété 5.1.8. Le quotient est

$$\frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En prenant la limite lorsque  $h \rightarrow 0$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Propriété 5.1.9 (Dérivées des réciproques)** . Soit  $f : A \rightarrow B$  bijective et dérivable sur  $A$ , un intervalle ouvert. Si  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in A$ , alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Preuve de la propriété 5.1.9. On admet que  $f^{-1}$  est dérivable sur tout  $B$ . On dérive l'équation  $f(f^{-1}(x)) = x$  des deux cotés :

$$\begin{aligned} x = (f \circ f^{-1})(x) &\iff 1 = f(f^{-1}(x))' \stackrel{\text{Prop 5.1.8}}{=} f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) \\ &\iff \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = (f^{-1})'(x) \end{aligned}$$

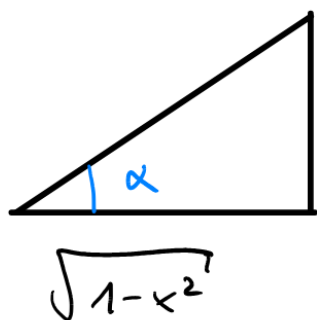
$\square$

**Ex 1 :**  $f(x) = \sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$  où  $f(x) = x^n$ , où  $x > 0$

$$\begin{aligned} x &= f(g(x)) = (\sqrt[n]{x})^n \\ \implies 1 &= n(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot (\sqrt[n]{x})' \\ \implies (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

On montre de manière analogue que  $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$  pour tout  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  et on verra que c'est aussi vrai pour tout réel.

**Ex 2 :**  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ ,  $x \in ]-1, 1[$ , car  $f = \sin(x)$ , donc  $f'(x) = \cos(x)$



$$\begin{aligned} &x \cos(\arcsin(x)) \\ &= \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \end{aligned}$$

$$\implies \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Définition 5.1.10** .  $\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}$  est la dérivée à droite, si  $h \uparrow 0$ , c'est la dérivée à gauche.

**Propriété 5.1.11** .  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si les deux dérivées latérales existent ( $\in \mathbb{R}$ ) et sont égales.

**Ex 1** :  $f(x) = |x|$ . On a :

$$f'_{\text{droite}}(0) = 1 \neq -1 = f'_{\text{gauche}}(0)$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Ex 2** :  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f'(0)$  n'existe pas car  $\notin \mathbb{R}$ , mais les deux dérivées latérales sont égales à  $+\infty$ .

**Définition 5.1.12 (Dérivée d'ordre supérieur)** . La dérivée seconde de  $f$  est

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$$

La dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  est définie par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

**Définition 5.1.13 (Classes de fonctions dérivables)** . Soit  $I$  un intervalle. Alors

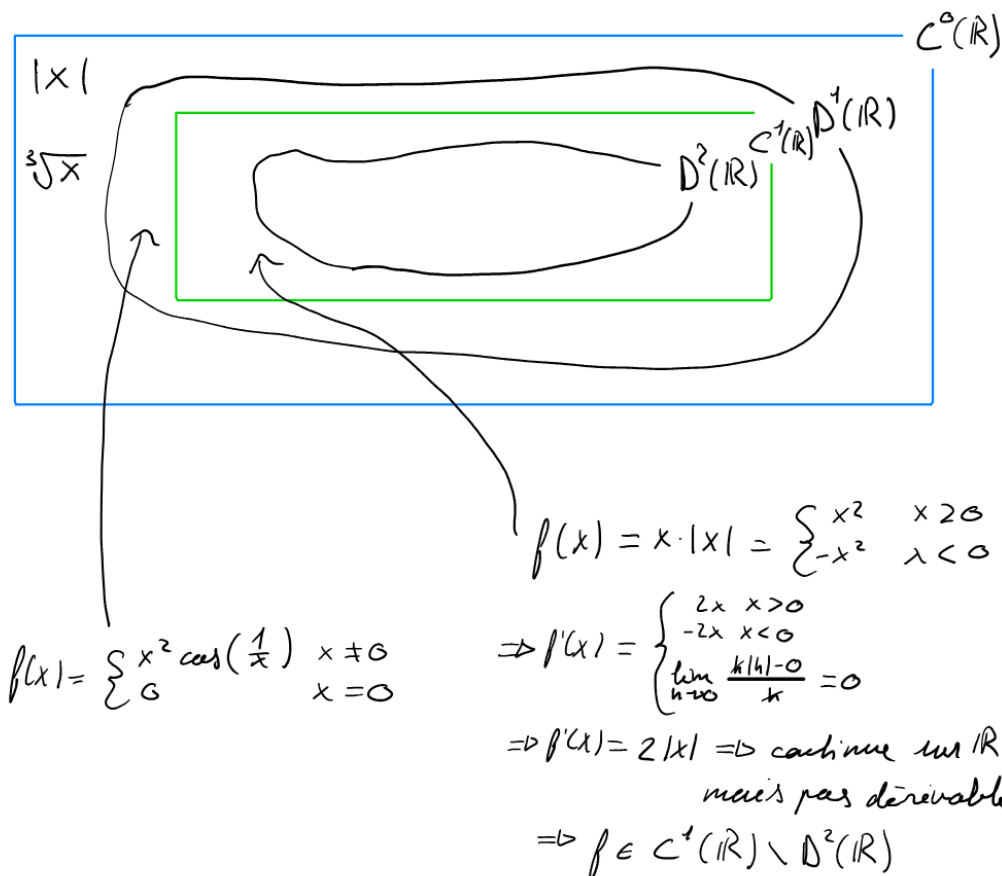
$$D^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}$$

$$C^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur et } f^{(n)} \text{ est continue sur } I\}$$

On pose  $C^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ .

**Remarque 5.1.14** :

- $C^0(I)$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ .
- Les fonction polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, rationnelles sont dans  $C^\infty$  sur leur domaine de définition.
- $C^0(I) \supseteq D^1(I) \supseteq C^1(I) \supseteq D^2(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \dots D^\infty \supseteq C^\infty$

**Remarque 5.1.15 :**

- $x^n |x|$  est dans  $C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$
- $x |x| \in C^\infty(]0, +\infty[)$   
 $\in C^\infty(]-\infty, 0[)$

**Ex  $D^1 \setminus C^1$  :** On a  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . Alors

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0$$

et

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

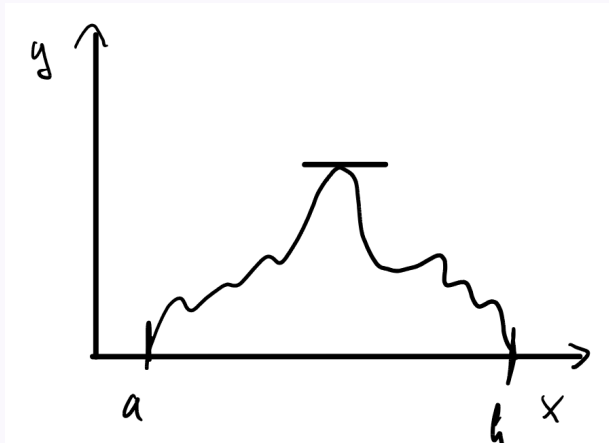
donc  $f(x)$  appartient à  $D^1(\mathbb{R})$ . Cependant,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

donc  $f'(x)$  n'est pas continue en 0. Donc  $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$ .

## 5.2 Dérivée et croissance

**Théorème 5.2.1 (Théorème de Rolle)** . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose que  $f(a) = 0 = f(b)$ . Alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que  $f'(u) = 0$ .



*Preuve par le TVI.* Par le TVI (4.5.8),  $f$  atteint son max  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ , on le suppose supérieur à 0. Alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que :

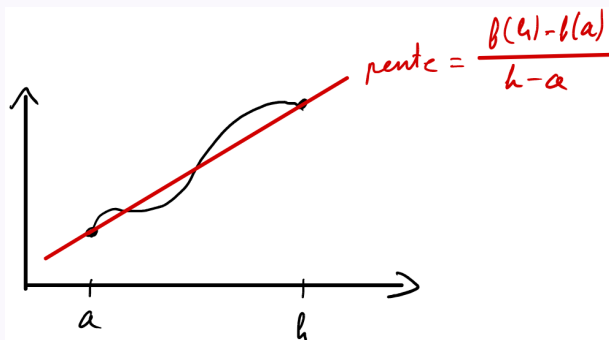
$$f(u) = M \implies f'(u) = f'_{\text{droite}}(u) = \lim_{x \rightarrow u^+} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq 0$$

$$\text{et } f'(u) = f'_{\text{gauche}}(u) = \lim_{x \rightarrow u^-} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq 0$$

Donc  $f'(u) = 0$ . □

**Théorème 5.2.2 (Théorème des accroissements finis – TAF)** . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que :

$$f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



*Preuve.* En exercice. □

**Propriété 5.2.3** (*Application du TAF (5.2.2)*) . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

- 1) Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est constante sur  $[a, b]$ .

*Preuve.* Le sens " $\Leftarrow$ " est évident. Pour le sens " $\Rightarrow$ ", si  $f$  n'est pas constante, on trouve  $c, d \in [a, b]$  tels que  $c < d$  et  $f(c) \neq f(d)$ . Par le TAF,  $\exists u \in ]c, d[$  tel que

$$f'(u) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$$

ce qui est une contradiction. □

- 2) Si  $g : [a, b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$  dérivable sur  $]a, b[$  et  $f'(x) = g'(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f(x) = g(x) + c$  pour un certain  $c \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in [a, b]$ .
- 3) Si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ .
- 4) Si  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est décroissante sur  $[a, b]$ .
- 5) Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$ .
- 6) Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $[a, b]$ .

**Remarque 5.2.4 :** Attention au point 5 et 6, la réciproque est en général fausse. Par exemple,  $f(x) = x^3$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  mais  $f'(0) = 0$ .

### 5.2.1 La fonction exponentielle (et logarithmes)

**Théorème 5.2.5 .** Il existe une unique fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \quad f(0) &= 1 \end{aligned}$$

*Preuve.* La preuve de l'existence se fera plus tard.

Pour l'unicité, la preuve se fait en deux étapes :

- 1)  $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . On pose  $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$ . On calcule la dérivée de  $h$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot \underbrace{f'(-x)}_{=f(-x)}(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $h$  est constante ! Comme  $h(0) = f(0) \cdot f(0) = 1$ , on a

$$h(x) = \underbrace{f(x)}_{\neq 0} \cdot f(-x) = 1$$

- 2) **Unicité :** Soit  $g(x)$  une (autre) fonction telle que  $g'(x) = g(x)$  et  $g(0) = 1$ . On pose

$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ . On calcule  $h'(x)$  :

$$h'(x) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2} = \frac{g \cdot f - g \cdot f}{f^2} = 0$$

Donc  $h$  est constante. Comme  $h(0) = \frac{1}{1} = 1$  on a que  $h(x) = 1 = \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \implies g(x) = f(x)$

□

**Définition 5.2.6 (Fonction exponentielle)** . Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle, notée  $\exp(x)$  (et plus tard  $e^x$ ).

**Propriété 5.2.7 ( $\exp(x)$ )** .

1)  $\exp'(x) = \exp(x)$  et  $\exp(0) = 1$  nous donne

$$\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$$

2)  $\exp(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  et  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

3) la fonction exponentielle est strictement croissante

4)  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 0$

*Preuve.*  $\exp(x) \geq x$ . En effet, si  $g(x) = \exp(x) - x$ , on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp(x) - 1 > 0 \quad (x > 0) \\ \implies g &\text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[ \end{aligned}$$

Comme  $g(0) = 1$ , donc  $g(x) \geq 0$

□

$$6) \exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ainsi :  $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$  et

$$\exp(n) = e^n \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

De plus  $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$  et on vérifie que  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Donc :

$$\exp\left(\frac{p}{q} = e^{\frac{p}{q}}\right) \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

**Définition 5.2.8** . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose que

$$e^x = \exp(x)$$

**Remarque 5.2.9** : La fonction exponentielle est

- injective (car strictement croissante)
- surjective (coréstraints à  $]0, +\infty[$ )

Donc  $\exp(x)$  est bijective !

**Définition 5.2.10 (Logarithme)** . Le logarithme est la réciproque que la fonction exponentielle. Donc :

$$\begin{aligned} \log : ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

**Propriété 5.2.11 (Logarithme)** .

1)  $\mathcal{D}(\log) = ]0, +\infty[$  et  $\mathfrak{S}(\log) = \mathbb{R}$ .

2)  $\log(1) = 0$ . On a :

$$\begin{aligned} x &= \exp(\ln(x)) \\ \iff 1 &= \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = x \ln'(x) \\ \implies \ln'(x) &= \frac{1}{x} \\ \implies \ln &\in C^\infty(]0, +\infty[) \end{aligned}$$

3)  $\log$  est strictement croissante.

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$ .

**Définition 5.2.12 (Autres bases)** . Pour  $a \in \mathbb{R} > 0$

$$\begin{aligned} \exp_a(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x) = a^x \\ \log_a(x) &= \text{réciproque} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

**Remarque 5.2.13** : Pour  $x, u \in \mathbb{R}$  et  $x > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} x^u &= \exp(\log(x) \cdot u) \\ \implies (x^u)' &= \exp(\log(x) \cdot u) \cdot (\log(x) \cdot u)' = ux^{u-1} \end{aligned}$$

**Définition 5.2.14** (*Fonctions trigonométriques hyperboliques*) . On défini :

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\end{aligned}$$

**Théorème 5.2.15** (*Règle de Bernoulli-l'Hospital*) . Soit  $x_0$  et  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $A = ]x_0 - d, x_0 + d[ \setminus \{x_0\}$  est un voisinage de  $x_0$ . Si :

$$1) \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

$$2) \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Preuve.* En exercices (Application du TAF) □

**Remarque 5.2.16 :** Ce théorème marche aussi pour limite à droite et à gauche.

**Ex 1 :** Grâce à l'Hospital, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

**Ex 2 :**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log(x)} &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} px^p = \begin{cases} +\infty & p > 0 \\ 0 & p \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Cela montre que  $\log(x)$  croît moins vite que tout polynôme (de degré supérieur à 0).

**Ex 3 :**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x)^{\frac{3}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\log(\cos(2x) \cdot 3)}{x^2}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{\cos(2x)} \cdot \frac{-\sin(2x)}{2x} \cdot 2\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{3}{\cos(0)} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin(y)}{y} \cdot 2\right) \\ &= \exp(-6) = e^{-6}\end{aligned}$$

**Remarque 5.2.17 : Attention :** Si la limite du quotient des dérivées n'existe pas ( $\notin \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ), alors B-H ne marche pas.

**Propriété 5.2.18** (*Fonctions  $\in C^1$  par morceaux*). Soient  $f, g \in C^1(I = \text{intervalle})$  et  $x_0 \in I$ . On suppose que  $f(x_0) = g(x_0)$ , et on pose

$$h : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$$

Alors  $h$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f'(x_0) = g'(x_0)$  et dans ce cas,  $h \in C^1(I)$ .

*Preuve.* On calcule

$$\begin{aligned} h'_{\text{gauche}}(x_0) &\stackrel{x \leq x_0}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{def de } h}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Similaire pour  $h'_{\text{droite}}(x_0) = g'(x_0)$ . La limites à gauche et à droite coïncident si et seulement si  $f'(x_0) = g'(x_0)$ . Dans ce cas, on a :

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \leq 0 \\ g'(x) & x \geq 0 \end{cases} \implies h' \text{ est continue en } x_0$$

Dans ce cas,  $h'$  est continue sur  $I$  ( $h \in C^1$ ) □

**Remarque 5.2.19 :** Cette propriété peut être utilisée récursivement

- La preuve montre :  $f'_{\text{gauche}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$

$$f'_{\text{droite}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

si les limites existent

**Ex :** Soit  $f(x) = \begin{cases} \sinh(x) & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$ . Alors :

- $f$  est continue en 0 car  $\sinh(0) = 0 = \sin(0)$
- de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , car  $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$  et  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\in C^2$  car  $\sinh''(0) = \sinh(0) = 0 = -\sin(0) = \sin''(0)$
- $\notin C^3$  car  $\sinh'''(0) = \cosh(0) = 1 \neq \sin'''(0) = -1$

Donc  $f(x) \in C^2(\mathbb{R}) \setminus D^3(\mathbb{R})$

## 5.3 Etude de fonctions

c.f. Slides

### 5.3.1 Applications : convergence de suites définies par récurrence

Une suite définie par récurrence est une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 =$  valeur fixée et  $a_{n+1} = g(a_n)$ , pour une fonction  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Remarque 5.3.1 (Important) :** Si  $(a_n)$  converge, disons  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , alors :

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$$

$$\stackrel{g \text{ est cont.}}{=} g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = g(l)$$

Donc  $l$  est forcément une sol de l'équation  $x = g(x)$ . On supposera en général que  $g(x)$  est continue et même  $C^1$  sur un intervalle.

**Ex :** Soit  $a_0 = \frac{1}{3}$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 = g(a_n)$  où  $g(x) = x^2$ . Candidats pour  $l : x = g(x) = x^2$ , donc  $l = 0$  ou  $l = 1$ . On calcule quelques valeurs :

$$a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{1}{9}, a_2 = \frac{1}{81}, \dots \rightarrow 0$$

En revanche, si  $a_0 = 3$ , on a :

$$(a_n) = (3, 9, 81, 81^2, \dots) \rightarrow +\infty$$

De plus, si  $a_0 = -1$ , alors :

$$(a_n) = (-1, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1$$

Dans un cas simple comme celui-là, on peut montrer par récurrence que :

$$a_n = (a_0)^{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$\begin{cases} a_n \rightarrow 0 & |a_0| < 1 \\ a_n \rightarrow 1 & a_0 = \pm 1 \\ a_n \rightarrow +\infty & |a_0| > 1 \end{cases}$$

Dans le cas général, une étude de la fonction  $g(x)$  peut nous aider. Si

$$a_0 \geq l \text{ et } l \leq g(x) \leq x \quad \forall x \geq l \quad (5.3.1)$$

alors :

- $a_1 = g(a_0) \geq l$ ,  $a_2 = g(a_1) \geq l$ . Par récurrence :  $a_{n+1} = g(a_n) \geq l$ , donc  $a_n \geq l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $(a_n)$  est minorée.

- $a_1 = g(a_0) \leq a_0 \implies \dots \implies a_{n+1} = g(a_n) \leq a_n$  et par récurrence,  $(a_n)$  est décroissante

Ainsi, dans ce cas  $(a_n)$  converge vers un candidat  $l$  par décroissance minorée.

**Remarque 5.3.2 :** Equation 5.3.1 se généralise

**Théorème 5.3.3 (Récurrence linéaire)** . Soit  $(a_n)$  définie par récurrence via

$$a_0 = a, a_{n+1} = g(a_n)$$

où  $g(x) = qx + b$ , où  $q, b \in \mathbb{R}$  et  $q \neq 1$ . Alors  $(a_n)$  converge vers l'unique solution  $l$  de l'équation  $g(x) = x$  si et seulement si

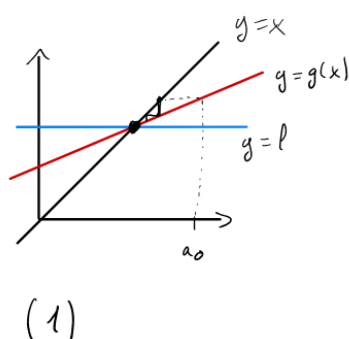
$$|q| < 1 \quad \text{ou} \quad a_0 = l$$

Donc

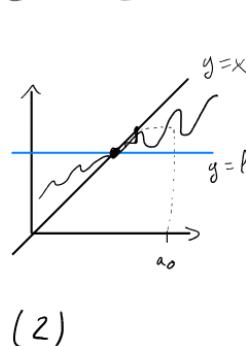
$$l \leq g(x) \leq x$$

Démonstration. Illustration :

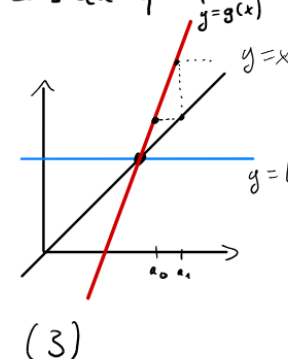
cas lin ( $0 \leq q \leq 1$ )



cas General



cas lin  $q > 1$



On voit que dans le cas (1), la fonction converge vers le seul candidat :  $l$ . Dans le cas (2), la fonction converge aussi. Dans le cas (3), la fonction diverge. Si  $q \leq 0$ , on pose

$$b_k = a_{2k}$$

$$c_k = a_{2k+1}$$

Ces suites sont définies par récurrence :  $b_0 = a_0$ ,  $b_{k+1} = a_{2k+2} = g(g(a_{2k})) = h(b_k)$  où  $h(x) = g(g(x)) = g \circ g(x) = g(qx + b) = q^2x + qb + b$ . Pareil pour  $c_n$  :

$$c_0 = a_1, c_{n+1} = g(g(a_{2k+1})) = h(c_k)$$

Si  $-1 < q \leq 0$ , alors,  $0 \leq q^2 < 1$ , donc  $b_k$  et  $c_k$  convergent par le cas précédent vers  $l$ .

Si  $q < -1$ ,  $q^2 > 1$ , donc les suites  $b_n$  et  $c_n$  divergent par le cas précédent, donc  $a_n$  diverge également.  $\square$

**Ex Non linéaire** :  $a_0 = \text{fixé} \in \mathbb{R}^*$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) = g(a_n)$  où  $g(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right)$ . Les candidats pour  $l$  sont  $x = \sqrt{3}$  ou  $x = -\sqrt{3}$ .

$x$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$3 - x^2$	-	+	+	-
$x$	-	-	+	+
$g(x) - x = \frac{3 - x^2}{2x}$	+	-	+	-
Comparaison	$g(x) > x$	$g(x) < x$	$g(x) > x$	$g(x) < x$

Donc on a

- si  $a_0 \in [\sqrt{3}, +\infty[$ , on a

$$\sqrt{3} \leq g(x) \leq x$$

et  $a_n \rightarrow \sqrt{3}$

- si  $a_0 \in ]0, \sqrt{3}[$ ,  $a_1 = g(a_0) \geq \sqrt{3}$  alors  $a_1$  est dans la région précédente, donc  $a_n \rightarrow \sqrt{3}$
- si  $a_0 < 0$ ,  $a_n \rightarrow -\sqrt{3}$

Donc on conclut que si  $a_0 > 0$ ,  $a_n \rightarrow \sqrt{3}$  et si  $a_0 < 0$ ,  $a_n \rightarrow -\sqrt{3}$ .

## 5.4 Développements limités

Le but est d'approximer une fonction par un polynôme.

**Définition 5.4.1** . Soit  $f \in C^n(I)$  où  $I$  est un intervalle ouvert et  $x_0 \in I$ . Le polynôme de Taylor de  $f$  d'ordre  $n$  en  $x_0$  est l'unique polynôme  $p(x)$  de degré inférieur ou égal à  $n$  dont les dérivées d'ordre  $x_0$  sont les mêmes que celles de  $f$  jusqu'à l'ordre  $n$ .

**Ex :** Soit  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$ . On a

- $p_1(x) = x$  car  $\sin(0) = 0 = p_1(0)$ ,  $\sin'(0) = 1 = p_1'(0)$ .
- $p_2(x) = x$  car  $\sin''(0) = 0 = p_2''(0)$ .
- $p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$  car  $p_3'(x) = -1 - \frac{3}{6}x^2$ ,  $p_3''(x) = -\frac{6}{6}x$ ,  $p_3'''(x) = -1 = \sin'''(0)$

Ainsi, la formule pour trouver le  $p_n$  polynôme est

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

où  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

**Définition 5.4.2 (Développement limité)** . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$ . Alors,  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$  si

$$f(x) = \text{polynôme de degré } \leq n + \text{reste } r_n(x)$$

pour tout  $x \in I$  où  $r_n(x)$  vérifie

- Pour tout  $c > 0$ ,  $|r_n(x)| \leq c \cdot |x - x_0|^n$  dans un voisinage de  $x_0$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$
- $r_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ , où  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

**Théorème 5.4.3 (Formule de Taylor)** . Soit  $f \in C^n(I)$ , où  $I$  est un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$ . Alors  $f$  admet un  $DL_n$  en  $x_0$  donné par

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

*Démonstration.* On applique B-H  $n$  fois. □

**Remarque 5.4.4** : Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  ouvert. Alors

- Si  $f$  admet un  $DL_n$ , il est unique.
- Si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $f$  admet un  $DL_0$  en  $x_0$ , de plus l'autre sens en vrai aussi si on suppose que  $\varepsilon(x) = 0$ .
- Si  $f$  est continue en  $x_0$  alors  $f$  admet un  $DL_1$  en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable.

**Ex** : On va voir que  $\sin(x)$  admet un développement limité d'ordre 3 en  $x_0 = 0$  donné par  $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ . La seule chose à montrer est

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) &= 0 \\ \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^2}{x^3} &\stackrel{\text{B-H}}{=} 0 \end{aligned}$$

On a donc que le  $DL_2$  en  $x_0 = 0$  est

$$x + x^2\varepsilon(x)$$

**Remarque 5.4.5 (Estimation du reste)** : On a que

$$|r_n(x)| \leq |f^{(n+1)}(u)| \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n!}$$

pour  $u$  entre  $x$  et  $x_0$ .

### 5.4.1 Applications : Calculs de limites

- Calculons la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{6} + \varepsilon(x) \right) = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

On voit qu'avec un  $DL_1$  ça ne marche pas. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Donc il a fallu prendre un développement limité d'ordre plus grand.

$$\begin{aligned}
& \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2 \cos(x)}{x^4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left( x^2 - 2 + 2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x) \right) \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12 + \varepsilon(x)} = \frac{1}{12} \\
& \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right) : \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \varepsilon(x) \right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{n} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Cette série converge et la série originale aussi, par comparaison.

**Ex Calculs de DL :** Tant qu'on écrit le reste, on peut tout faire.

**Ex :** Le  $DL_2$  en  $x_0 = 0$  de  $f(x) = \sin(x) \cos(x)$ .

On utilise le  $DL_2$  de  $\sin(x)$  et le  $DL_1$  de  $\cos(x)$ . Donc

$$\begin{aligned}
\sin(x) \cos(x) &= (x + x^2 \varepsilon(x)) (1 + x \varepsilon(x)) \\
&= x + x^2 \varepsilon(x) + x^2 \varepsilon(x) + x^3 \varepsilon(x) \varepsilon(x) \\
&= x + x^2 \underbrace{\left( \varepsilon(x) + \varepsilon(x) + x \varepsilon(x) \varepsilon(x) \right)}_{\rightarrow 0} \\
&= x + x^2 \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

**Ex :** Le  $DL_1$  en  $x_0$  de  $f(x) = e^{\cos(x)}$ . On utilise les  $DL_1$  de  $\cos(x)$  et  $e^x$ .

$$e^{\cos(x)} = 1 + \cos(x) + \cos(x) \varepsilon \left( \underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1} \right)$$

On voit que  $\varepsilon(x)$  ne tend pas vers 0.

**Solution :** Méthode (i) : il faut réécrire l'expression pour avoir quelque chose qui tend vers 0. Donc :

$$\begin{aligned}
e^{\cos(x)} &= e^{1+x\varepsilon(x)} = e \cdot e^{x\varepsilon(x)} \\
&= e (1 + x\varepsilon(x) + x\varepsilon(x)\varepsilon(x\varepsilon(x))) \\
&= e + x (e\varepsilon(x) + e\varepsilon(x) \cdot \varepsilon(x\varepsilon(x)))
\end{aligned}$$

Méthode (ii) : Combiner le  $DL_1$  en  $x_0 = 0$  et de  $\cos(x)$  avec le  $DL_1$  en  $x_0 = \cos(0) = 1$  de  $e^x$ . Donc :

$$\begin{aligned}
e^x &= e + e(x-1) + (x-1) \underbrace{\tilde{\varepsilon}(x)}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 1} \\
\implies e^{\cos(x)} &= e + e(\cos(x)-1) + (\cos(x)-1) \tilde{\varepsilon}(x) \\
&= e + e(x\varepsilon(x)) + (x\varepsilon(x)) \tilde{\varepsilon}(\cos(x)) \\
&= e + x (e\varepsilon(x)) + \varepsilon(x) \tilde{\varepsilon}(\cos(x))
\end{aligned}$$

### 5.4.2 Séries de Taylor

Si  $f \in C^n(I)$ , avec  $I$  un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$ , on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$$

**Question :** si  $f \in C^\infty(I)$ , a-t-on  $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ ? Quand on a  $n \rightarrow \infty$ , il faut que :

- 1) La série converge
- 2) Le reste  $r_n(x) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$

**Définition 5.4.6 (Série de Taylor) .** Pour  $f \in C^\infty(I)$  avec  $I$  un intervalle ouvert et  $x_0 \in I$ , la série de Taylor de  $f$  centrée en  $x_0$  est la série

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**Remarque 5.4.7 :**

- Cette série est définie quelque soit  $f \in C^\infty(I)$  (même si  $r_n(x) \not\rightarrow 0$ )
- Si  $x_0 = 0$ , elle s'appelle aussi série de Maclaurin.
- C'est une série entière ! (cf. Chap. 3.3  $\leadsto$  centre =  $x_0$ , rayon de convergence pas connu)

**Ex 1 :**  $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $x_0 = 0$ . Le  $DL_n$  de  $f$  donne

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$$

Donc la série de Taylor (en  $x_0 = 0$ ) est donc  $\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$ . Cette série converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Il reste à voir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ . On a :

$$|r_n(x)| \leq f^{(n+1)}(u) \frac{|x|^{n+1}}{n!} = e^u \frac{|x|^{n+1}}{n!} \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{n!} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Car  $\exp$  est strictement croissant et que  $u \in [0, x]$ , donc  $e^u \leq e^{|x|}$ . Le reste tend bien vers 0. Donc  $e^x$  est égale à sa série de Taylor en  $x_0 = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$$

**Remarque 5.4.8 :** En fait,  $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k$

**Ex 2 :** Cela marche aussi pour  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$  !

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ \Rightarrow \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\end{aligned}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 5.4.9 :** Cela donne enfin une raison pour la formule  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ . En effet

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + i \sin(x)\end{aligned}$$

**Proposition 5.4.10 (Dérivées de série entières) :** Si  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ , alors

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)b_{k+1}(x-x_0)^k$$

et les rayons de convergences sont les mêmes !

**Conséquences de la proposition :**

- On peut définir

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet,  $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$  et

$$\exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x)$$

C'est donc l'unique fonction  $f$  telle que  $f'(x) = f(x)$  et  $f(0) = 1$ .

- Si  $f(x)$  est déjà une série entière, i.e.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ , on dérive :

$$f(x_0) = b_0, f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x-x_0)^{k-1} \implies f'(x_0) = b_1$$

$$f^{(k)}(x) = b_k \cdot k! \implies b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

**Ex 3 :**  $f(x) = \frac{1}{1-x} \in C^\infty(]-1, 1[)$ . On a vu que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1(x-0)^k \quad \text{si } |x| < 1$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \text{série de Taylor en } x_0 = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Attention : pour  $x \notin ]-1, 1[$ , la série diverge. Par exemple :

$$f(-10) = \frac{1}{11} \neq \sum_{k=0}^{\infty} (-10)^k$$

**Ex 4 :**  $f(x) = \log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^n \varepsilon(x)$ . Série de Taylor ?  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ . On calcule  $f(x) - \text{série de Taylor}$  :

$$\begin{aligned} f(x) - \text{série de Taylor} &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \\ &= \frac{1}{1-(-x)} - \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 0 \quad \text{cf. exemple précédent} \\ \implies \log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k &= C = 0 \\ \implies \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \end{aligned}$$

pour  $x \in ]-1, 1[$ . En  $x = 1$ , on obtient, par prolongement par continuité que :

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

**Ex 5 (Contre exemple) :** On pose  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . On vérifie qu'elle est continue en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

Donc  $f$  est continue en 0. De plus, si  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$  et on calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$  :

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} e^{-y^2} 2y^3 \\ &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0 \\ \implies f'(0) &= 0 \\ \implies f'(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

où  $P_k$  est un polynôme. Donc  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  et  $f^{(k+1)}(0) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Ainsi, la série de Taylor de  $f$  en  $x_0 = 0$  est nulle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Cependant,  $f(x) \neq 0$  pour  $x \neq 0$ . Donc  $f$  n'est pas égale à sa série de Taylor en  $x_0 = 0$ . La raison est que le  $DL$  de  $f$  est

$$f(x) = 0 + x^n \varepsilon(x) = r_n(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$$

**Remarque 5.4.11 :** Prenons  $\sin(x)$  et  $\sin(x) + e^{\frac{-1}{x^2}}$ . Ces deux fonctions ont la même série de Taylor en  $x_0 = 0$ , mais seule  $\sin(x)$  est égale à sa série de Taylor !

# Chapitre 6

## Intégrales

### 6.1 Primitives et intégrales

**Définition 6.1.1** (*Primitive*) . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue où  $I$  est intervalle. Une **primitive** de  $f$  est une fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

**Remarque 6.1.2** : Si  $F, G$  sont deux primitives de la même fonction  $f$ , alors :

$$F(x) - G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Donc  $F$  et  $G$  diffèrent d'une constante : il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in I.$$

**Notation** :  $\int f(x)dx$  est l'ensemble de toutes les primitives de  $f$ . Donc :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

où  $F$  est une primitive de  $f$ . Abus de notation :

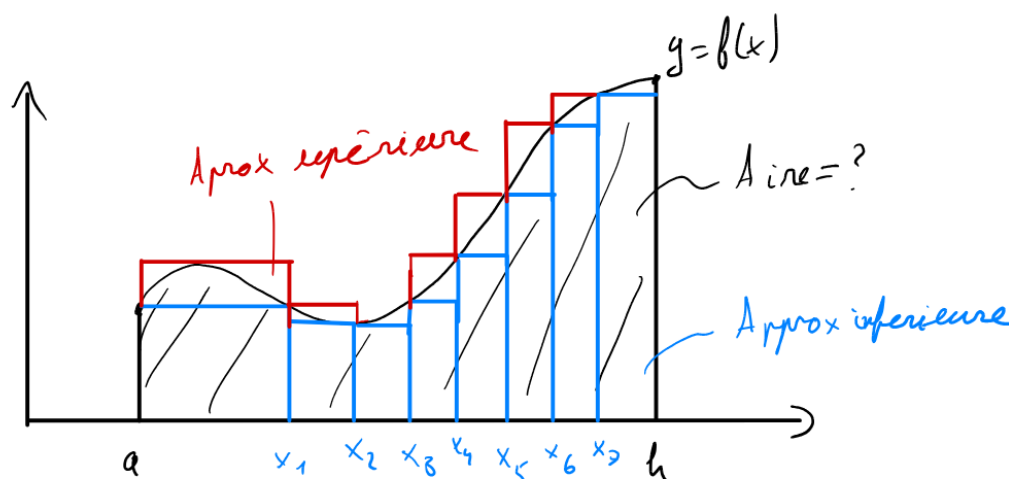
$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

**Remarque 6.1.3** : L'intégrale  $\int f(x)dx$  s'appelle **intégrale indéfinie** de  $f$ .

Changeons de point de vue, pour  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$x^r \ (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{x}$	$\log x  + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$e^x$	$e^x + C$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$		
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$		

FIGURE 6.1 – Primitives de fonctions de base



Approx 1 (inférieure) :

$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left( \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right)$$

Approx 2 (supérieure) :

$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left( \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right)$$

**Définition 6.1.4 (Intégrale de Riemann)** . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** (au sens de Riemann) si

$$\sup\{\text{Approx 1}\} = \inf\{\text{Approx 2}\} = A \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

Dans ce cas, on parle d'intégrale définie de  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

**Remarque 6.1.5** : On dit que  $\int_a^b f(x) dx$  donne l'aire signée sous la courbe. Par convention, on dit que  $\int_a^a = 0$  et que  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .

**Théorème 6.1.6** . Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, monotone, bornée et continue partout sauf en un nombre fini de points, alors  $f$  est intégrable (au sens de Riemann) sur  $[a, b]$ .

*Preuve.* Technique (Ex : monotone) □

**Ex Contre exemple :** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors  $f$  n'est pas intégrable sur  $[0, 1]$ . En effet, pour toute subdivision  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ , on a

$$\text{Approx 1} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

car dans chaque intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  il existe des réels irrationnels. De même,

$$\text{Approx 2} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$$

car dans chaque intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  il existe des rationnels. Donc

$$\sup\{\text{Approx 1}\} = 0 \neq 1 = \inf\{\text{Approx 2}\}$$

et  $f$  n'est pas intégrable au sens de Riemann.

**Remarque 6.1.7 :** Cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue mais ce n'est pas le sujet de ce cours.

**Propriété 6.1.8** (*Intégrale de Riemann*) . Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrables au sens de Riemann et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$1) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (\text{Linéarité})$$

$$2) \text{ Si } a < u < b, \text{ alors : } \int_a^b f(x) dx = \int_a^u f(x) dx + \int_u^b f(x) dx \quad (\text{Additivité})$$

$$3) \text{ Si } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b], \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (\text{Monotonie})$$

*Preuve.* Technique, mais :

1) Linéarité :

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \leq \alpha \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \beta \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x)$$

□

**Remarque 6.1.9 :** On peut écrire l'intégrale avec n'importe quelle variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

On a aussi :

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Théorème 6.1.10 (Théorème de la moyenne) .** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = f(u) \cdot (b - a)$$

*Démonstration.* On prend  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq f(x) \leq M = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .  
Donc :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

Ainsi :

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $u \in ]a, b[$  tel que  $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ .  $\square$

**Remarque 6.1.11 :** Donc  $f(u)$  est la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Théorème 6.1.12 (Théorème fondamental du calcul intégrale) .** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors

1) La fonction  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

2) Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*Démonstration. Partie 1 :* On dérive  $G$  :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(u) ((x+h) - x) = f(x)h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{f(u)h}_{\in ]x, x+h[} = \lim_{u \rightarrow x} f(x) \end{aligned}$$

**Partie 2 :** On a  $F(x) = G(x) + c$ , donc :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

**Notation :** On note  $F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ .

## 6.2 Calculs d'intégrale

**Ex Facile :** On calcule.

$$\begin{aligned} 1) \int_0^\pi \sin(x)dx &= \left[-\cos(x)\right]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2. \text{ Mais attention : aire signée ! Donc} \\ \int_0^{2\pi} \sin(x)dx &= \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0 \end{aligned}$$

$$2) \int (3x + 1)dx = \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

$$3) \int a^x dx = \int e^{\ln(a)x} dx = \frac{1}{\ln(a)} e^{\ln(a)x} + c = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$4) \int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + c \text{ (vérifier en dérivant). Ex :}$$

$$\int \sin(x) \cos(x)dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$

$$5) \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c \text{ (vérifier en dérivant). Ex :}$$

$$\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

**Propriété 6.2.1** (*Changement de variable/substitution*) . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $\varphi : [u, v] \rightarrow [a, b]$  une fonction de la classe  $C$  telle que  $\varphi(u) = a, \varphi(v) = b$ . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

**Remarque 6.2.2 :** Si  $\varphi$  est bijective, alors on peut écrire :

$$F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$$

Donc  $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ .

**Ex :** On pose  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ . En posant :

$$\begin{aligned}\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto \sin(t)\end{aligned}$$

Cette fonction est de classe  $C^1$ ,  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ . Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4} \quad \text{cf exemple précédent}\end{aligned}$$

**Ex indéfinie :** On reprend  $\int \sqrt{1-x^2}$ . On pose :

$$\begin{aligned}\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow [-1, 1] \\ t &\mapsto \sin(t)\end{aligned}$$

$\varphi$  est bijective. Donc :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt &= \int \cos^2(t) dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + c\end{aligned}$$

On évalue en  $t = \arcsin(x)$  :

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

**Remarque 6.2.3 :** On peut aussi exprimer  $t$  en fonction de  $x$ .

**Ex remarque :** On pose  $\int e^{x^2} dx$ . Donc  $t = x^2$ ,  $\frac{dt}{dx} = 2x$  :

$$\begin{aligned}\int e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} + c\end{aligned}$$

Comment bien choisir la substitution ? C'est dur ! Voici quelques exemples :

- $\int e^{x^2} dx : t = x^2$
- $\int \frac{x}{1+x^2} dx, \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3} dx : t = 1 + \cos(x)$ , ou  $t = 1 + x^2$ . Il faut prendre ce qu'il ya "sous" le dénominateur, ou mieux "dedans dessous".

- $\int \sqrt{1-x^2}dx, \int \sqrt{1+x^2}dx$   
 $x = \sin(t) \quad x = \sinh(t)$

- En cas de forces majeures, pour les fonction rationnelles en sin ou cos comme :

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx, \int \frac{1}{\sin^4(x)}dx$$

on pose

$$t = \tan(x) \text{ donc } \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\text{ou } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \text{ donc } \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

**Ex :**  $\int \frac{1}{\sin^4(x)}dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^4(x)}dx &\stackrel{t=\tan(x)}{=} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int t^{-4} + 2t^{-2} + 1 dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + c \\ &= -\frac{1}{3 \tan^3(x)} - \frac{1}{\tan(x)} + c \end{aligned}$$

**Ex :**  $\int \frac{1}{\sin(x)}dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin(x)}dx &\stackrel{t=\tan(\frac{x}{2})}{=} \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c \end{aligned}$$

**Propriété 6.2.4** (*Intégrale par parties*) . Soit  $f \in C^0([a, b])$  et  $g \in C^1([a, b])$  et  $F$  une primitive de  $f$ . Alors

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

*Démonstration.* On a  $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$ , donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b (F(x)g(x))' dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

□

**Remarque 6.2.5 :** La preuve montre que c'est pareil pour les intégrales indéfinies.

**Ex 1 :**

$$\int e^x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x(x-1) + c$$

**Ex 2 :**

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \ln(x) \cdot 1 dx \\ &= \ln(x)x - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x \ln(x) - x + c \\ &= x(\ln(x) - 1) + c \end{aligned}$$

**Ex 3 :**

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \cos^2(x) dx}_I &= \int \cos(x) \cdot \cos(x) dx \\ &= \sin(x) \cos(x) - \int \sin(x) \cdot (-\sin(x)) dx \\ &= \sin(x) \cos(x) + \int \sin^2(x) dx \\ &= \sin(x) \cos(x) + \int 1 dx - \underbrace{\int \cos^2(x) dx}_I \\ \implies 2I &= \sin(x) \cos(x) + x - I \\ \implies 2I &= \sin(x) \cos(x) + x + c \\ \implies I &= \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x) + c \end{aligned}$$

**Ex 4 :** (Intégrale par récurrence)

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx \\ \implies A_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos^{2n-1}(x) dx \\ &= \left[ \sin(x) \cos^{2n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) (2n-1) \cos^{2n-2}(x) (-\sin(x)) dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2(n-1)}(x) dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(x) dx - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx \\ \implies A_n &= (2n-1) A_{n-1} - (2n-1) A_n \\ \implies 2n A_n &= (2n-1) A_{n-1} \\ \implies A_n &= \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} \end{aligned}$$

### 6.2.1 Intégration de fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont des fonctions de la forme  $\frac{p(x)}{q(x)}$  où  $p, q$  sont des polynômes. Pour intégrer ces fonctions, on utilise la décomposition en éléments simples.

#### Building blocks

i)  $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$ . Ainsi :

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \int \frac{1}{u} \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \log|ax+b| + c$$

$$\text{avec } u = ax + b \implies du = a dx \implies dx = \frac{1}{a} du.$$

ii)  $\int \frac{1}{x^k} dx = \int x^{-k} dx = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{x^{1-k}}{1-k} + c$ , ainsi :

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^k} du = \frac{1}{a} \frac{u^{1-k}}{1-k} + c = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{1-k}}{1-k} + c$$

iii)  $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + c$ . Si  $q(x) = ax^2 + bx + c$  est tel que  $\Delta < 0$ , alors on peut "compléter le carré" :

$$q(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right)$$

On pose  $d^2 = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ , donc :

$$= ad^2 \left( \left( \frac{x + \frac{b}{2a}}{d} \right)^2 + 1 \right)$$

On pose  $u = \frac{x + \frac{b}{2a}}{d} \implies du = \frac{1}{d} dx \implies dx = d \cdot du$ , donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{ad^2} \int \frac{1}{u^2 + 1} d \cdot du \\ &= \frac{1}{ad} \arctan(u) + c = \frac{1}{ad} \arctan \left( \frac{x + \frac{b}{2a}}{d} \right) + c \end{aligned}$$

iv)  $\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = I$ . On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{q(x)} dx \\ &= \frac{1}{2a} \log|ax^2 + bx + c| + \text{(iii)} + c \end{aligned}$$

$$\text{v)} \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \int \frac{1}{u^k} du \text{ avec } u = ax^2+bx+c \implies du = (2ax+b)dx. \text{ Donc :}$$

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

$$\text{vi)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k} dx. \text{ En exercices.}$$

A l'aide de ces 6 building blocks, on peut intégrer tout  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  avec la décomposition en éléments simples.

### Méthode 1

1) Si  $\deg(p) \geq \deg(q)$ , faire la division polynomiale !

**Ex :** Prenons  $\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1} dx$ . On fait la division polynomiale :

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3(x^4 - x^3 - x + 1)}{x^4 - x^3 - x + 1} dx + \int \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^3 - x^3 - x + 1} dx \\ &= \int 3dx + \int \frac{\dots}{q(x)} dx = 3x + \int \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} dx \end{aligned}$$

2) Factoriser le dénominateur  $q(x)$  et décomposer. On a  $q(x) = (x-u)^k \cdot (ax^2+bx+c)(x-v)$ . Ainsi on peut écrire :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-u} + \frac{A_2}{(x-u)^2} + \frac{A_k}{(x-u)^k} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

**Ex :**  $q(x) = x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)^2(x^2+x+1)$ . Donc :

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2-2B+C)x^2 + (A_2+B-2C)x + (-A_1+A_2+C)}{x^4 - x^3 - x + 1} \end{aligned}$$

On pose alors le système :

$$\begin{aligned} \implies & \begin{cases} A_1 + B = 3 \\ A_2 - 2B + C = 0 \\ A_2 + B - 2C = 3 \\ -A_1 + A_2 + C = 3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} A_1 = 1 \\ B = 2 \\ A_2 = 3 \\ C = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

3) Intégrer les éléments simples à l'aide des building blocks.

**Ex :**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x-1} dx &= \log|x-1| + c \\ \int \frac{3}{(x-1)^2} dx &= \int 3(x-1)^{-2} dx = \frac{-3}{x-1} + c \\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \log|x^2+x+1| + c\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1} dx = 3x + \log|x-1| - \frac{3}{x-1} + \log|x^2+x+1| + c$$

## 6.3 Intégrale généralisée ou impropres

On sait que si  $f : [a, b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$  alors l'intégrale est l'air sous la courbe. On généralise à  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : ]-\infty, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ex :** On pourrait s'intéresser à  $\int_0^1 \log(x) dx$  (qui a une asymptote verticale en  $x = 0$ ). Ou encors  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ .

**Problème :** L'approximation est toujours  $\pm\infty$ .

**Solution :** On restreint à un intervalle fermé, puis on utilise les limites.

**Définition 6.3.1 (Intégrales généralisées) .** 1) Si  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , alors :

$$\int_a^{b-} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b-} \int_a^u f(x) dx$$

2) Si  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , alors :

$$\int_{a+}^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow a+} \int_u^b f(x) dx$$

3) Si  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, alors :

$$\int_{a+}^{b-} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow a+} \int_u^w f(x) dx + \lim_{v \rightarrow b-} \int_v^u f(x) dx$$

où  $w \in ]a, b[$  est quelconque.

**Remarque 6.3.2 :** • Ce sont les intégrales généralisées (ou impropres) de  $f$ .

- On dit que l'intégrale converge si la (les!) limites existe(nt) ( $\in \mathbb{R}$ ), et l'intégrale diverge sinon.
- Pour le point 3), on peut montrer que le résultat ne dépend pas du  $w$  choisi.

**Notation :**

$$\int_a^{+\infty-} = \int_a^{+\infty} \quad , \quad \int_{-\infty+}^b = \int_{-\infty}^b$$

**Ex 1 :**

$$\begin{aligned} \int_{0+}^1 \log(x) dx &= \lim_{u \rightarrow 0+} \int_u^1 \log(x) dx = \lim_{u \rightarrow 0+} \left[ x \log(x) - x \right]_{x=u}^{x=1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-1 - u \log(u) + u) = -1 + \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{-\log(x)}{\frac{1}{u}} \\ &\stackrel{\text{B-H}}{=} -1 + \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -1 \end{aligned}$$

**Ex 2 :**

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (1 - e^{-u}) = 1 \end{aligned}$$

**Ex 3 :** Pour  $r > 0$ , on a  $\int_{0+}^1 \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r < 1 \\ +\infty & r \geq 1 \end{cases}$ . Aussi  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r > 1 \\ +\infty & r \leq 1 \end{cases}$ .

Exemple :

$$I = \int_{0+}^1 \frac{1}{x^r} dx = \lim_{u \rightarrow 0+} \int_u^1 \frac{1}{x^r} dx = \lim_{u \rightarrow 0+} \begin{cases} (-\log(u)) & r = 1 \\ \left[ \frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1} & r \neq 1 \end{cases}$$

Calculons  $\left[ \frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1}$  :

$$\left[ \frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1} = \frac{1}{1-r} + \frac{1}{r-1} \lim_{u \rightarrow 0+} u^{1-r}$$

Et ceci diverge si  $r > 1$  et converge vers  $\frac{1}{1-r}$  si  $r < 1$

$$\Rightarrow I = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r < 1 \\ +\infty & r \geq 1 \end{cases}$$

**Ex 4 :** On étudie :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ . On coupe en  $w = 0$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left[ \arctan(x) \right]_{x=u}^0 + \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \arctan(x) \right]_0^{x=u} \\ &= \pi \end{aligned}$$

**Remarque 6.3.3 :** Si  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge, i.e. si les deux limites existent, alors cette intégrale vaut :

$$\underbrace{\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(x) dx}_{\text{valeur de cauchy}}$$

**Ex 5 :**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x dx &= \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{+\infty} x dx \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-u^2}{2} + \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v^2}{2}\end{aligned}$$

L'intégrale diverge ! En revanche, sa valeur principale de Cauchy est  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u x dx = 0$ . On voit alors que la valeur principale de Cauchy  $\neq \int_{-\infty}^{+\infty}$ .

**Propriété 6.3.4** (*Comparaison d'intégrales*). Soient  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in [a, b[$ . Alors :

$$1) \int_a^{b-} f(x) dx \text{ converge} \iff \int_a^{b-} g(x) dx \text{ converge}.$$

*Démonstration.* Théorème du gendarme seul ! □

**Ex du 1)** :  $I = \int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$  converge :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt &\stackrel{x=1-t}{=} - \int_1^{0+} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_{0+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \left(2\sqrt{x}\right) \Big|_{0+}^1 - \lim_{u \rightarrow 0+} (2\sqrt{u}) = 2 - 0 = 2\end{aligned}$$

qui converge. Donc  $I$  converge par comparaison.

**Propriété 6.3.5** (*Comparaison intégrales / séries*). Soit  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, positive, et décroissante. Alors :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

**⚠ Valeurs pas égales !**

**Ex :** La somme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge  $\iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{n^p} dx$  converge si et seulement si  $p > 1$ .

**Ex :**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(\log(n))^p}}_u \text{ converge} \iff I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p} dx \text{ converge}$$

Voyons la valeur de l'intégrale indéfinie :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\log(x))^p} dx &\stackrel{du=\frac{1}{x}dx}{=} \int \frac{1}{u^p} du = \begin{cases} \frac{u^{1-p}}{1-p} + c & p \neq 1 \\ \log(u) + c & p = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\log(x)^{1-p}}{1-p} & p \neq 1 \\ \log(\log(x)) & p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \implies I &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p} dx \stackrel{p \neq 1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \log(\log(x)) \right]_{x=2}^u = +\infty \\ \implies I &\stackrel{p \neq 1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\log(x)^{1-p}}{1-p} \right]_{x=2}^u = c \frac{-\lim_{u \rightarrow +\infty} \log(x)^{1-p}}{1-p} - \frac{\log(2)^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

$I$  converge si et seulement si  $p > 1$ , donc par la propriété 6.3.5

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p} \text{ converge} \iff p > 1$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} &\text{ diverge} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^2} &\text{ converge} \end{aligned}$$