Notes d’Analyse 1

Paul Lasry-Robin

18 décembre 2025

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres

Chapitre 2

Suites

Chapitre 3

Séries

Chapitre 4

Fonctions

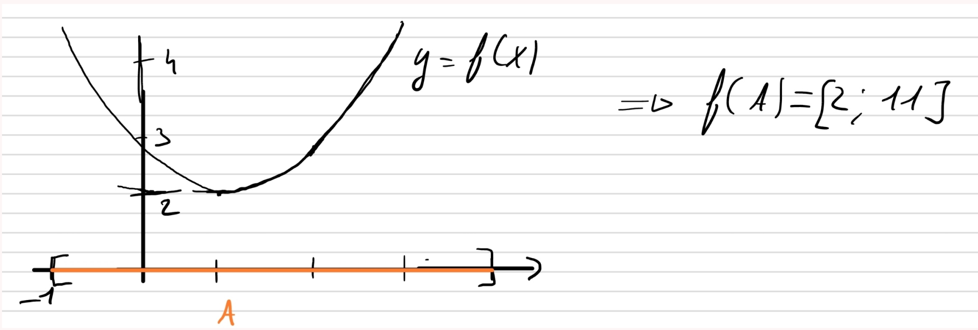
4.1 Rappels

Définition 4.1.1 *(Fonction majorées)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors f est majorée sur $A \subseteq D$ si $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$ l'est.
De plus, on pose :

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup f(A)$$

Pareil pour inf, max et min (si min et max existent).

Ex : Pour $f(x) = (x-1)^2 + 2$ et $A =]-1, 4[$



Donc $\forall x \in A$:

- $\inf f(x) = \min f(x) = 2$
- $\sup f(x) = 11$

Et max n'existe pas.

4.2 Limites

Ex : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
$D(f) = \mathbb{R}^*$. On aimerait définir $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.
Il faut deux ingréfiants pour conclure que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$:

1. f doit être définie "un peu autour" de x_0
2. $f(x)$ doit "s'approcher" de l lorsque $x \to x_0$.

Définition 4.2.1 *(Fonction définie au voisinage)* **.** Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $d \in \mathbb{R} > 0$ t.q :

$$]x_0 - d, x_0[\cup]x_0, x_0 + d[\subset D$$

Ex : $\frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de $x_0 = 0$ même si elle n'est pas définie en 0.

Définition 4.2.2 *(Limite d'une fonction)* **.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : D \to R$ def au voisinage de x_0. Alors, f ademt $l \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque $x \to x_0$.
On note : $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta_\epsilon > 0$ t.q. $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, on a :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Ex 1 : Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 132 & x = 0 \end{cases}$, alors $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 132$ car on s'interresse seulement au voisinage de 0.

Ex 2 : Soit $f(x) = 5x - 1$, $x_0 = 0$. Montrons que $\lim_{x\to 2} f(x) = 9$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \implies f$ est def dans tout voisinage de $x_0 = 2$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ tel que $|x - 2| \leq \delta$.

$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in D \setminus \{2\}$ et $|x - 2| \leq \delta$, on a :

$$|f(x) - 9| \leq \varepsilon$$

Théorème 4.2.3 *(Limites de fonction et suites)* **.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on peut dire que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si et seulement si $\lim_{x\to\infty} f(a_n) = l$ pour toute $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.*
Idée : $a_n \to x_0$ sont les manières de s'approcher de x_0. Donc $f(x) \to l$ si $f(a_n) \to l$ pour toutes les façons $(a_n \to x_0)$ de s'approcher de x_0.

Ex : Redémonstraion de $\lim_{x\to 2} 5x - 10 = 9$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.
Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} (5a_n - 1) = 5(\lim_{n\to\infty} a_n) - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$$

Comme la suite était arbitraire, on a montré que pour TOUTE SUITE (a_n) :

$$\lim_{x\to 2} 5x - 10 = 9$$

Corollaire 4.2.4 : *Si on a trouvé :*

- *Une suite* $(a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ *t.q.*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \text{ n'existe pas}$$

- *Deux suites* $(a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ *t.q.* $a_n \to x_0$ *et* $b_n \to x_0$ *mais :*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *n'existe pas.*

Ex Corollaire 4.2.4 **:** Prenons $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $x_0 = 0$. $D(f) = \mathbb{R}^*$, donc f est définie au voisinage de $x_0 = 0$.En effet :

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0 \qquad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \to 0$$

Mais :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n+1)\pi) = -1$$

Remarque 4.2.5 : On aurait aussi pu considérer la suite :

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} f(c_n) = \cos(\pi n) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \quad \text{qui n'existe pas}$$

Donc $\lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Propriété 4.2.6 *(Limites de fonctions)* **.**
Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et telles que : $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existent. Alors :

1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$, alors $l_1 = l_2$ (Unicité de la limite)
2. $\forall p, q \in \mathbb{R}$ on a :
$$\lim_{x\to x_0} p \cdot f(x) + q \cdot g(x) = p \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) + q \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
4. Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 alors :
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$
5. Si $h : D \to \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$, alors :
$$\lim_{x\to x_0} h(x) = l$$

Démonstration. Théorème des deux gendarmes □

4.3 Calculs de limites

Concidérons pour ces exemples $u \in \mathbb{R}$.

0. $\lim_{x \to x_0} c = c$ où c est une constante.

   Démonstration. Soit $a_n \to u$. On a $f(a_n) = c \to c$ □

   $\lim_{x \to u} x = u \qquad (f(x) = x)$

   Démonstration. Soit $a_n \to u$. On a $f(a_n) = a_n \to u$ □

1. **Polynômes** Exemple (par produit) :

$$\lim_{x \to u} x^2 = \lim_{x \to u}(x \cdot x) = \left(\lim_{x \to u} x\right) \cdot \left(\lim_{x \to u} x\right) = u \cdot u = u^2$$

   Par récurrence, on montre que $\lim_{x \to u} x^n = u^n$.

   Preuve rapide. **Init.** $(n = 0)$ **:** $\lim_{x \to u} 1 = 1$.
   Hérédité : $\lim_{x \to u} x^{n+1} = \lim_{x \to u}(x^n \cdot x) = (\lim_{x \to u} x^n) \cdot (\lim_{x \to u} x) = u^n \cdot u = u^{n+1}$. □

   Donc pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, on a :

$$\lim_{x \to u} P(x) = P(u)$$

2. **Fonctions rationnelles** : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Si $Q(u) \neq 0$, on a :

$$\lim_{x \to u} Q(x) = Q(u) \qquad \text{(Point 1)}$$

   Donc par la propriété 4, on a :

$$\lim_{x \to u} f(x) = \frac{P(u)}{Q(u)}$$

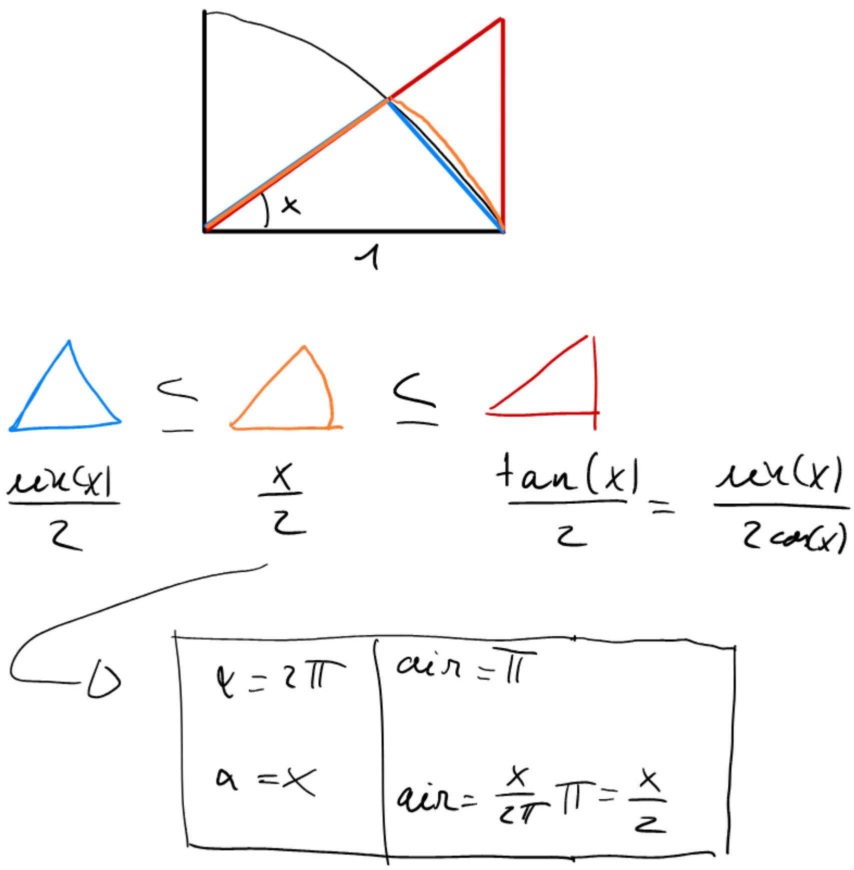
   Ex : Ainsi on a :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2}$$

   Mais si on a $Q(u) = 0$, il faut faire un travail supplémentaire :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1}(x - 1) = -2$$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} = 1$. Démostration imagée.



Le triangle bleu est plus petit ou égal au triangle orange lui-même plus petit que le rouge. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \\ \implies &\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\ \implies &\frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{1}{\cos x} \\ \implies &\frac{\sin x \cos x}{x} \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Finalement, comme $\cos x \in [0, 1]$ on a :

$$\cos x \geq \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \geq 1 - x^2$$

Donc

$$\cos x \geq 1 - x^2$$

On a alors la chaîne d'inégalités :

$$1 - x^2 \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Ceci est vallable pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, car toutes les fonctions sont paires.
Par le théorème des deux gendarmes, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Ex : On peut alors voir :

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} x = 1 \cdot 0 = 0$$

Propriété 4.3.1 *(Limites de fonctions composées / changement de variable)* **.** Soient $f : A \to B, g : B \to \mathbb{R}$ telle que :

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c \in \mathbb{R}$
3. $f(x) \neq b$ au voisinage de a

Alors :

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = c$$

Preuve à l'aide des suites. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A\setminus\{a\}$ t.q. $x_n \to a$. On pose $y_n = f(x_n)$. Alors $y_n \to b$ (par 1) et $y_n \neq b$ pour n assez grand (par 3) $\implies (y_n) \subset B \setminus \{b\}$ et $y_n \to b \implies g(y_n) \to c$ (par 2)

□

Ex 1 : Soit $f(x) = x^{12} - 1$. Alors $\lim_{x\to 1} cos(x^{12} - 1)$ vérifie 1 et 2 de la propriété au voisinage de 1 (dés que $x \neq \pm 1$).

Ex 2 : On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2 + \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{3 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$
$$= \lim_{y\to 1} \frac{y^2}{3+y^2} = \frac{1}{4}$$

Attention : La condition 3 est indispensable, regardons un cas où elle n'est pas vérifiée.

Ex 3 : $f(x) = 3$ (constante) et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$

On a $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(3) = 0$.
Mais : on ne peut pas utiliser la prop car f(x) = 3 dans le voisinage de 0. Donc :

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) \neq \lim_{y\to 3} g(y) = \lim_{y\to 3} 2 \neq 0$$

Propriété 4.3.2 *(Limites de réciproques)* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone Soit $u \in [a,b]$ et $v = f(u)$. Alors $f([a,b]) \to Im(f)$ est bij, et si $f^{-1}(Im(f)) \to [a,b]$est def au vois de v, alors :

$$\lim_{x\to v} f^{-1}(v) = u$$

Corollaire 4.3.3 : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \geq 0$, $\lim_{x\to v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$*

Démonstration. On pose $f(x) = x^n$, strictement croissante sur $[a,b]\forall b \geq 0$. Ainsi :

$$\lim_{x\to u} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$$

□

4.4 Lim à gauche/droite, limites infinies

Définition 4.4.1 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de $u \in \mathbb{R}$, c'est à dire $[u-d, u[\subseteq D$ pour tout $d > 0$ (resp. $[u, u+d[\subseteq D\ \forall d > 0$).
Alors f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche (resp. à droite) lorsque $x \to u$, si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D \setminus \{u\}$, on a $x \in [u-\delta, u[$ (resp. $x \in]u, u+\delta]$) :

$$\implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : limites à gauche : $\lim_{x\to u^-}$, limite à droite : $\lim_{x\to u^+}$

Ex : $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Il faut séparer les cas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow 0} -1 = \lim\limits_{x\to x^-} -1 = -1$ et $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\to x^+} = 1$.

Propriété 4.4.2 *(Limites gauche droite)* **.** Si f est def au voisinage de u, alors :

$$\lim_{x\to u} f(x) = l \iff \lim_{x\to u^+} f(x) = l \iff \lim_{x\to u^-} f(x) = l$$

Remarque 4.4.3 : Cela montre que $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Définition 4.4.4 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ def au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) c'est à dire $[a, +\infty[\subseteq D$ pour un $a \in \mathbb{R}$ (resp. $]-\infty, a] \subseteq D$).
Alors $f(x)$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite losrque $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on a :

$$x \geq c \text{ (resp. } x \leq c) \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \to l$

Ex : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Preuve avec epsilon. Soit $\varepsilon > 0$. On pose comme $c = \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $x \geq 0$ on a :

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c} \leq \varepsilon$$

Comme ε était arbitraire, on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in D, x \geq c \implies |f(x) - 0| \leq \varepsilon$$

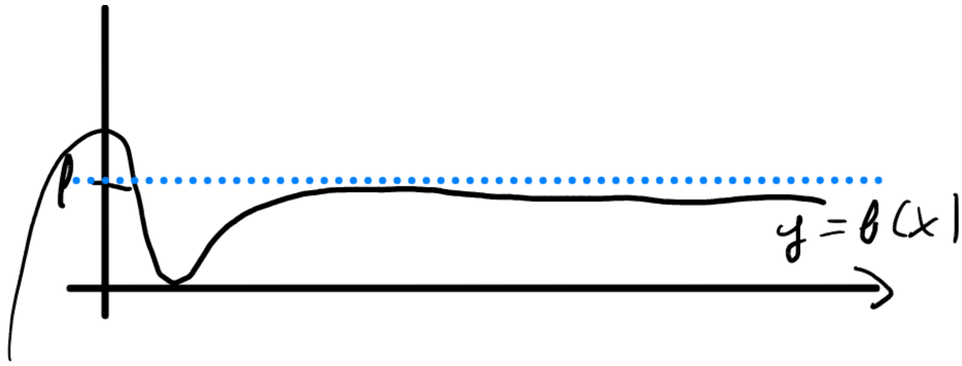
□

Preuve avec les suites. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite t.q. $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$. Alors,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Comme (x_n) était arbitraire, c'est vrai pour toute suitre. On a donc montré que $\forall (x_n) \to +\infty, \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$ □

Remarque 4.4.5 : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \iff f(x)$ a une asymptote horizontale d'équation $y = l$



Définition 4.4.6 *(Divergence vers l'infini)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ tends vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $x \to u$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D \setminus \{u\}$ on a :

$$|x - u| \leq \delta \iff f(x) \geq A \quad (\text{resp. } f(x) \geq A)$$

Notation : $\lim_{x \to u} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ou $f(x) \to +\infty$ (resp. $-\infty$)

Ex : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Preuve avec epsilon. Soit $A \in \mathbb{R}$. On pose $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ (ou $\delta = 1$ si $A < 0$). Alors dès que $|x - 0| \leq \delta$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2} = A$$

Comme A était arbitraire, c'est bon. □

Remarque 4.4.7 :

- On peut combiner ces lumites généralisées. Par exemple :

$$\lim_{c\downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

- $\lim_{x\to u^{\pm}} f(x) = \pm\infty \iff f(x)$ admet une asymptote verticale d'eq $x = u$

- Les propriétés algébriques, le théorème des gendarmes, les limites de composées et réciproques, ainsi que les calculs avec $+\infty$ vallable pour les suites restent vrais pour ces limites généralisées.

- Attention aux formes indéterminées :
  — $+\infty - +\infty$

  — $0 \cdot +\infty$

  — $\frac{+\infty}{+\infty}$

  — $\frac{0}{0}$

Ex :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = \infty$$

4.5 Fonctions continues

Définition 4.5.1 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est <u>continues en $x = u$</u> si :

$$\lim_{x\to u} f(x) = f(u)$$

Remarque 4.5.2 *(Concéquences de la continuité)* **:** Cela implique trois choses :

1. Si $u \in D$, alors f est définie au voisinage de u <u>et</u> en u.

2. la limite $\lim_{x\to u} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$

3. tout $f(u) \in \mathbb{R}$

Ex 1 : Les polynômes, les fonctions rationnelles, $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$ (toutes les fonction trigo), e^x, $\log x$ etc... sont continues <u>**sur leur domaine**</u>.

Ex 2 : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ est continues pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On voit que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2^2+1}{2-1} = 5 = f(2)$$

Mais $1 \notin D \implies f$ n'est pas continue en $x = 1$.

Remarque 4.5.3 : Si f est continue en $u \in \mathbb{R}$ et si $a_n \to u$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(u)$$

Définition 4.5.4 . Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage $\begin{array}{l}\text{à droite}\\ \text{à gauche}\end{array}$ de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est **continue** $\begin{array}{l}\textbf{à droite}\\ \textbf{à gauche}\end{array}$ **en** $x = u$ si : $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\downarrow u} f(x) = \lim\limits_{x\to u^+} f(x) = f(u)\\ \lim\limits_{x\uparrow u} f(x) = \lim\limits_{x\to u^-} f(x) = f(u)\end{array}$

Ex : $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases} \implies f$ est continue en tout $x \neq 0$. En $x = 0$ on a :

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) \overset{x\geq 0}{=} \lim_{x\downarrow 0}(2x+1) = 1 = f(0)$$

Donc f est continues à gauche et à droite, donc continue en $x = 0$ donc continue sur $\mathbb{R}$

Propriété 4.5.5 *(Opérations sur les fonctions continues)* **.** Si f et g sont continues en u alors $(f+g)$, $(f \cdot g)$, $(\alpha f + \beta g)$, $\left(\frac{f}{g}\right)$ (si $g(u) \neq 0$) sont aussi continues.
De plus, si f est continue en u et g continue en $f(u)$, alors $(f \circ g)(x)$ est continues en u.

Ex : $\dfrac{\sin(x^2+8x+1)}{\sqrt{x^2+5+\cos(x)}}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$

Définition 4.5.6 *(Prolongement par continuité)* **.** Si $f : D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de u avec $u \notin \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to u} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors, le <u>prolongement par continuité</u> de f est :

$$\begin{aligned} \hat{f} : D \cup \{u\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq u \\ l & \text{si } x = u \end{cases} \end{aligned}$$

Ex 1 : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

$$\hat{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On appelle cette fonction $\mathrm{sinc}(x)$

Ex 2 : A l'inverse $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut pas être prolongée par continuité en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Définition 4.5.7 *(Fonction continues sur un intervalle)* **.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u> (jusqu'au bord) si :

1. $\lim_{x\to u} f(x) = f(u)$ pour tout $u \in [a, b]$
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (f est continue à droite en $x = b$)
3. $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (f est continue à gauche en $x = b$)

De manière analogue :

$$\begin{aligned} f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ est continue} & \qquad \text{si } 1 + 2 \\ ]a, b] \to \mathbb{R} \text{ est continue} & \qquad \text{si } 1 + 3 \\ ]a, b[\to \mathbb{R} \text{ est continue} & \qquad \text{si } 1 \end{aligned}$$

Théorème 4.5.8 *(Valeur moyenne – TVI)* **.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors :*

$$f([a, b]) = \left[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right]$$

Remarque 4.5.9 *(TVI)* **:** Cela veut dire que f atteint :

- Son inf est son minimum :
$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$$
- Son sup est son maximum :
$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$$
- Toutes les valeurs intermédiaires.

Le min et max n'est pas $\pm\infty$. De plus, $f([a, b])$ est un intervalle fermé.

Preuve de la remarque. Posons $s = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup(f([a, b]))$. On sait qu'il existe une suite $(y_n) \in f([a, b])$ tel que $y_n \to s$. Ainsi

$$\begin{aligned} & f(x_n) && x_n \in [a, b] \\ \implies & \exists (x_{n_k}) \text{ une sous suite de } (x_n) \text{ t.q. } x_{n_k} \to u \in [a, b] \\ \implies & f(u) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) \\ & = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \\ & = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = s \end{aligned}$$

□

Ex : L'equation $\cos(x) = x$ possède une solution $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $f : \begin{aligned}\left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) - x\end{aligned}$, continue. On a $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 \underline{> 0}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) -$

$\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\underbrace{\min_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x)}_{x<0}, \underbrace{\max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x)}_{x>0}\right]$$

Ainsi, il existe $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = 0 \iff \cos(x_0) = x_0$

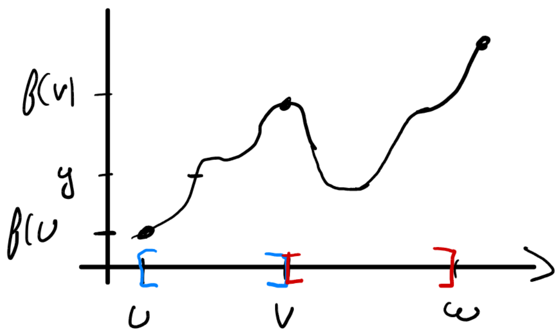
Corollaire 4.5.10 *(TVI – 1)* **:** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continues et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou l'inverse), alors il existe $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = 0$*

Corollaire 4.5.11 *(TVI – 2)* **:** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ et continue, où I est un intervalle, alors $\Im(f) = f(I)$ est aussi un intervalle.*

Corollaire 4.5.12 *(TVI – 3)* **:** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.*

Preuve du corrolaire 4.5.12. $\underline{\Longleftarrow}$ cf. Chap 0.
$\underline{\Longrightarrow}$ Supposons que f n'est pas strictement monotone :

$$\exists u < v < w \text{ tel que } f(u) < f(v) > f(w)$$



Ainsi, $f(x_1) = y = f(x_2)$, ce n'est donc pas injectif. $\square$

Chapitre 5

Dériviées

5.1 Définitions et exemples

Définition 5.1.1 *(Dériviée)* **.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage x_0 ou en x_0. Alors f est dérivable ou différentiable en x_0 si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe ($\in \mathbb{R}$).
Notation :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = \mathcal{D}_x f(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

On dit :

- $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0
- $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable en tout $x_0 \in D$.

Remarque 5.1.2 : Le nombre $f'(x_0)$ est la pentes de la tengente à la courbe $y = f(x)$ au point$(x_0, f(x_0))$.

Ex :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Définition 5.1.3 *(La fonction dérivée)* **.** La fonction dérivée d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est la fonction $\begin{aligned} f' : D(f(x)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$ où $D(f') = \{x \in D | f \text{ est dérivable en } x\}$

Ex 1 : $f(x) = x^2$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2\cdot x_0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = x^2$ est dérivable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

Ex 2 : $f(x) = \sin(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)-\sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} \\ \implies & \underbrace{-h}_{\to 0} = \frac{1-h^2-1}{h} \geq \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0} \geq \frac{0}{h} = \underbrace{0}_{\to 0} \\ \implies & \sin(x_0)\cdot 0 + \cos(x_0)\cdot 1 = \cos(x_0) \end{aligned}$$

sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. De manière analogue : $\cos'(x) = -\sin(x)^2$

Proposition 5.1.4 : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$*

1. *Si f est dérivable en x_0, alors f est aussi continue en x_0*
2. *f est dérivable en x_0 si et seulement si :*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\textit{équation de la tengente}} + \underbrace{(x-x_0)\cdot\varepsilon(x)}_{\textit{reste}}$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction tel que $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$. Le reste tend plus vite vers 0 que $x - x_0$

Preuve de la proposition.

1. On a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$$

2. Poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x-0)(x-x_0)}{x-x_0}$ et calculer la limite lorsque $x \to x_0$

$\square$

Remarque 5.1.5 : f continues $\not\Rightarrow$ f dérivable.

Ex : $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Alors f est continue en 0 mais on a

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h\uparrow 0}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\uparrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

Ainsi, la limite n'existe pas, donc f n'est pas dérivable en 0.

Propriété 5.1.6 *(Opérations algébriques)* **.** Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ derivables en $x_0 \in D$. Alors :

1. $(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = p \cdot f'(x_0) + q \cdot g'(x_0)$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, si $g(x_0) \neq 0$

Propriété 5.1.7 *(Dérivées de fonction usuelles)* **.**

0. $f(x) = c \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$
1. $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ pour $\mathbb{N}^*$

   Preuve. Par récurrence sur n.

   - $n = 1 : f(x) = x,\ f'(x) = 1.$
   - Supposons vrai pour n, montrons pour $n + 1$:

   $$\begin{aligned} f(x) &= x^{n+1} = x^n \cdot x \\ f'(x) &\overset{\text{Prop 2}}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

   $\square$

2. $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et

   $\tan'(x) = \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \overset{\text{Prop 3}}{=} \dfrac{\sin'(x)\cos - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \cdots = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ ou $1 + \tan^2(x)$

3. $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$

   $$\implies f(x) = \frac{1}{x^n} \overset{\text{Prop 3}}{\implies} f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

Propriété 5.1.8 *(Dériviées de composées)* **.** Soient $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, deux fonction telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$. Alors :

$$\begin{aligned} (g(f(x_0)))' &= (g \circ f)'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Dériviée interne}} \end{aligned}$$

Preuve de la propriété 5.1.8. Le quotient est

$$\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}=\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En prenant la limite lorsque $h\to 0$, on obtient le résultat voulu. $\square$

Propriété 5.1.9 *(Dériviées des réciproques)* **.** Soit $f : A \to B$ bijective et dérivable sur A, un intervalle ouvert. Si $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in A$, alors

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1(x)})}$$

Preuve de la propriété 5.1.9. On admet que f^{-1} est dérivable sur tout B. On dérive l'equation $f(f^{-1}(x))=x$ des deux cotés :

$$\begin{aligned} x=\left(f\circ f^{-1}\right)(x) \iff 1 =& f(f^{-1}(x))' \overset{\text{Prop 5.1.8}}{=} f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)\\ &\iff \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=(f^{-1})'(x)\end{aligned}$$

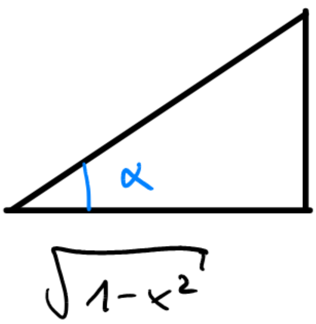
$\square$

Ex 1 : $f(x)=\sqrt[n]{x}=f^{-1}(x)$ où $f(x)=x^n$, où $x>0$

$$\begin{aligned} x=f(g(x))&=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\\ \implies 1&=n(\sqrt[n]{x})^{n-1}\cdot(\sqrt[n]{x})'\\ \implies (\sqrt[n]{x})'&=\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

On montre de manière analogue que $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$ pour tout $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ et on verra que c'est aussi vrai pour tout réel.

Ex 2 : $\arcsin'(x)=\dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$, $x\in\,]-1,1[$, car $f=\sin(x)$, donc $f'(x)=\cos(x)$



x $\cos(\arcsin(x)$

$= \cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

$$\implies \arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition 5.1.10 . $\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{f(x+h)-f(h)}{h}$ est la dérivée à droite, si $h\uparrow 0$, c'est la dérivée à gauche.

Propriété 5.1.11 . f est dérivable en x_0 si et seulement si les deux dérivées latérales existent ($\in \mathbb{R}$) et sont égales.

Ex 1 : $f(x)=|x|$. On a :

$$f'_{\text{doite}}(0)=1\neq -1=f'_{\text{gauche}}(0)$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Ex 2 : $f(x)=\sqrt[3]{x}$. On a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$f'(0)$ n'existe pas car $\notin\mathbb{R}$, mais les deux dérivées latérales sont égales à $+\infty$.

Définition 5.1.12 *(Dériviée d'ordre supérieur)* **.** La dérivée seconde de f est

$$f''(x)=f^{(2)}(x)=(f'(x))'$$

La dérivée d'ordre n de f est définie par récurrence :

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

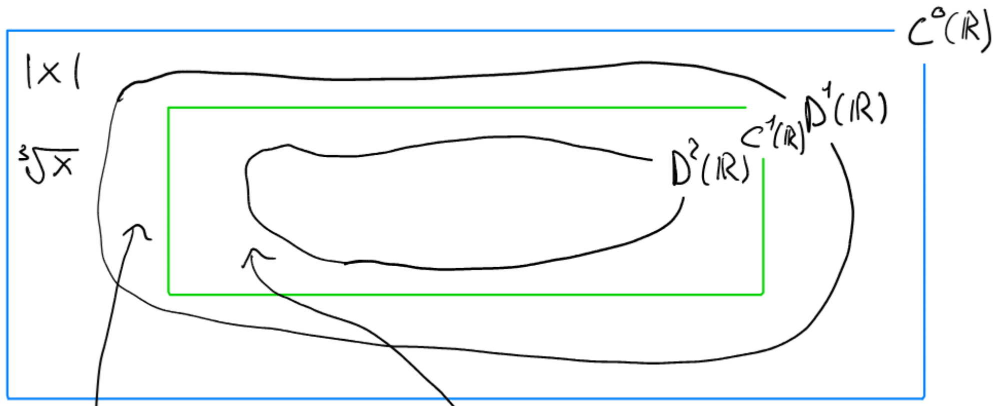
Définition 5.1.13 *(Clsses de fonctions dérivables)* **.** Soit I un intervalle. Alors

$$D^n(I)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}$$
$$C^n(I)=\left\{f:I\to\mathbb{R}\mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur et } f^{(n)} \text{ est continue sur } I\right\}$$

On pose $C^\infty(I)=\left\{f:I\to\mathbb{R}\mid f^{(n)} \text{ existe pour tour } n\in\mathbb{N}\right\}$.

Remarque 5.1.14 :

- $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Les fonction polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, rationnelles sont dans C^∞ sur leur domaine de définition.
- $C^0(I)\supseteq D^1(I)\supseteq C^1(I)\supseteq D^2(I)\supseteq C^2(I)\supseteq\cdots D^\infty\supseteq C^\infty$



$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \frac{h|h| - 0}{h} = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) = 2|x| \Rightarrow$ continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus D^2(\mathbb{R})$

Remarque 5.1.15 :

- $x^n\,|x|$ est dans $C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$
- $x\,|x| \in C^\infty\Big(\,]0, +\infty[\,\Big)$

  $\qquad \in C^\infty\Big(\,]-\infty, 0[\,\Big)$

Ex $D^1 \setminus C^1$: On a $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Alors

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si x} \neq 0$$

et

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

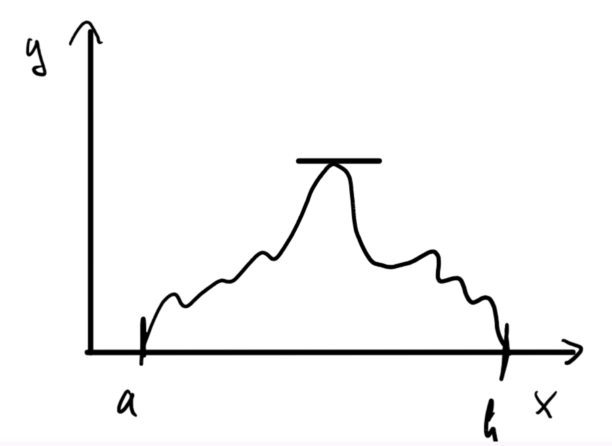
donc $f(x)$ appartient à $D^1(\mathbb{R})$. Cependant,

$$\lim_{x \to 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

donc $f'(x)$ n'est pas continue en 0. Donc $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$.

5.2 Dérivée et croissance

Théorème 5.2.1 *(Théorhème de Rolle)* **.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$. Alors il existe $u \in\ ]a, b[$ tel que $f'(u) = 0$.*



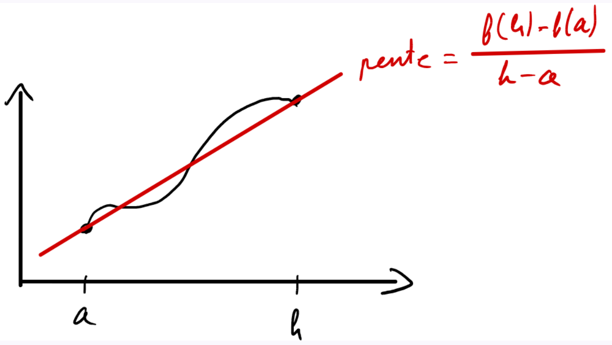
Preuve par le TVI. Par le TVI (4.5.8), f atteint son max $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, on le suppose supérieur à 0. Alors il existe $u \in\ ]a, b[$ tel que :

$$f(u) = M \implies f'(u) = f'_{\text{droite}}(u) = \lim_{x\to u^+} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq 0$$
$$\text{et} \quad f'(u) = f'_{\text{gauche}}(u) = \lim_{x\to u^-} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq 0$$

Donc $f'(u) = 0$. $\square$

Théorème 5.2.2 *(Théorhème des acroissements finis – TAF)* **.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que :*

$$f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Preuve. En exercice. $\square$

Propriété 5.2.3 *(Application du TAF (5.2.2))* **.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.

   Preuve. Le sens " $\Longleftarrow$ " est évident. Pour le sens " $\Longrightarrow$ ", si f n'est pas constante, on trouve $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$ et $f(c) \neq f(d)$. Par le TAF, $\exists u \in]c, d[$ tel que

   $$f'(u) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$$

   ce qui est une contradiction. □

2. Si $g : [a, b] \overset{\text{continue}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f(x) = g(x) + c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [a, b]$.
3. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$.
4. Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est décroissante sur $[a, b]$.
5. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
6. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Remarque 5.2.4 : Attention au point 5 et 6, la réciproques est en général fausse. Par exemple, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

5.2.1 La fonction exponentielle (et logarithmes)

Théorème 5.2.5 . *Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \textit{et} \quad f(0) &= 1 \end{aligned}$$

Preuve. La preuve de l'existence se fera plus tard.
Pour l'unicité, la preuve se fait en deux étapes :

1. $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$. On calcule la dérivée de h :

   $$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot \underbrace{f'(-x)}_{=f(-x)}(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc h est constante ! Comme $h(0) = f(0) \cdot f(0) = 1$, on a

   $$h(x) = \underbrace{f(x)}_{\neq 0} \cdot f(-x) = 1$$

2. **Unicité :** Soit $g(x)$ une (autre) fonction telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$. On pose

$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. On calcule $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2} = \frac{g \cdot f - g \cdot f}{f^2} = 0$$

Donc h est constante. Comme $h(0) = \frac{1}{1} = 1$ on a que $h(x) = 1 = \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \implies g(x) = f(x)$

$\square$

Définition 5.2.6 *(Fonction exponentielle)* **.** Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp(x)$ (et plus tard e^x).

Propriété 5.2.7 *($\exp(x)$)* **.**

1. $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$ nous donne
$$\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$$
2. $\exp(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
3. la fonction exponentielle est strictement croissante
4. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 0$

   Preuve. $\exp(x) \geq x$. En effet, si $g(x) = \exp(x) - x$, on a
$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp(x) - 1 > 0 (x > 0) \\ &\implies g \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\end{aligned}$$
   Comme $g(0) = 1$, donc $g(x) \geq 0$ $\square$

6. $\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Ainsi : $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$ et

$$\exp(n) = e^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$ et on vérifie que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Donc :

$$\exp\left(\frac{p}{q} = e^{\frac{p}{q}}\right) \quad \forall \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Définition 5.2.8 . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose que

$$e^x = \exp(x)$$

Remarque 5.2.9 : La fonction exponentielle est

- injective (car strictement croissante)
- surjective (coréstraintes à $]0, +\infty[$)

Donc $\exp(x)$ est bijective !

Définition 5.2.10 *(Logarithme)* **.** Le <u>logarithme</u> est la réciproque que la fonction exponentielle. Donc :

$$\begin{aligned} \log :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

Propriété 5.2.11 *(Logarithme)* **.**

1. $\mathcal{D}(\log) =]0, +\infty[$ et $\Im(\log) = \mathbb{R}$.
2. $\log(1) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} & x = \exp(\ln(x)) \\ \iff & 1 = \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = x \ln'(x) \\ \implies & \ln'(x) = \frac{1}{x} \\ \implies & \ln \in C^\infty(]0, +\infty[) \end{aligned}$$

3. log est strictement croissante.
4. $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$.

Définition 5.2.12 *(Autres bases)* **.** Pour $a \in \mathbb{R} > 0$

$$\begin{aligned} \exp_a(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x) = a^x \\ \log_a(x) &= \text{ réciproque} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Remarque 5.2.13 : Pour $x, u \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} & x^u = \exp(\log(x) \cdot u) \\ \implies & (x^u)' = \exp(\log(x) \cdot u) \cdot (\log(x) \cdot u)' = u x^{u-1} \end{aligned}$$

Définition 5.2.14 *(Fonctions trigonométriques hyperboliques)* **.** On défini :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Théorème 5.2.15 *(Règle de Bernouilli-l'Hospital)* **.** *Soit x_0 et $f, g : A \to \mathbb{R}$, où $A =]x_0 - d, x_0 + d[\setminus \{x_0\}$ est un voisinage de x_0. Si :*

1. $\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$
2. $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Preuve. En exercices (Application du TAF) □

Remarque 5.2.16 : Ce théorème marche aussi pour limite à droite et à gauche.

Ex 1 : Grâce a l'Hostpital, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x} = 1$$

Ex 2 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{\log(x)} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} px^p = \begin{cases} +\infty & p > 0 \\ 0 & p \leq 0 \end{cases}$$

Cela montre que $\log(x)$ croît moins vite que tout polynôme (de degré supérieur à 0).

Ex 3 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\log(\cos(2x)\cdot 3)}{x^2}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{\cos(2x)} \cdot \frac{-\sin(2x)}{2x} \cdot 2\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{3}{\cos(0)} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(y)}{y} \cdot 2\right)\\ &= \exp(-6) = e^{-6}\end{aligned}$$

Remarque 5.2.17 : **Attention :** Si la limite du quotient des dérivées n'existe pas ($\notin \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), alors B-H ne marche pas.

Propriété 5.2.18 *(Fonctions $\in C^1$ par morceaux)* **.** Soient $f, g \in C^1(I = \text{intervalle})$ et $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0)$, et on pose

$$\begin{aligned} h : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors h est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$ et dans ce cas, $h \in C^1(I)$.

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} h'_{\text{gauche}}(x_0) &\overset{x \leq x_0}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &\overset{\text{def de } h}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Similaire pour $h'_{droite}(x_0) = g'(x_0)$. La limites à gauche et à droite coïncindent si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$. Dans ce cas, on a :

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \leq 0 \\ g'(x) & x \geq 0 \end{cases} \implies h' \text{ est continue en } x_0$$

Dans ce cas, h' est continue sur I $(h \in C^1)$ □

Remarque 5.2.19 : Cette propriété peut être utilisée récursivement

- La preuve montre : $f'_{\text{gauche}}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$

  $f'_{\text{droite}}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

  si les limites existent

Ex : Soit $f(x) = \begin{cases} \sinh(x) & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$. Alors :

- f est continue en 0 car $\sinh(0) = 0 = \sin(0)$
- de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$ et $sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\in C^2$ car $\sinh''(0) = \sinh(0) = 0 = -\sin(0) = \sin''(0)$
- $\notin C^3$ car $\sinh'''(0) = \cosh(0) = 1 \neq \sin'''(0) = -1$

Donc $f(x) \in C^2(\mathbb{R}) \setminus D^3(\mathbb{R})$

5.3 Etude de fonctions

c.f. Slides

5.3.1 Applications : convergence de suites définies par récurrence

Une suite définie par récurrence est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 =$ valeur fixée et $a_{n+1} = g(a_n)$, pour une fonction $g : D \to \mathbb{R}$.

Remarque 5.3.1 *(Important)* **:** Si (a_n) converge, disons $a_n \to l \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) \\ &\overset{g \text{ est cont.}}{=} g(\lim_{n\to\infty} a_n) = g(l) \end{aligned}$$

Donc l est forcément une sol de l'équation $\underline{x = g(x)}$. On supposera en général que $g(x)$ est continue et même C^1 sur un intervalle.

Ex : Soit $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = a_n^2 = g(a_n)$ où $g(x) = x^2$. Condidats pour l : $x = g(x) = x^2$, donc $l = 0$ ou $l = 1$. On calcule quelques valeurs :

$$a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{1}{9}, a_2 = \frac{1}{81}, \ldots \to 0$$

En revanche, si $a_0 = 3$, on a :

$$(a_n) = (3, 9, 81, 81^2, \ldots) \to +\infty$$

De plus, si $a_0 = -1$, alors :

$$(a_n) = (-1, 1, 1, 1, \ldots) \to 1$$

Dans un cas simple comme celui-là, on peut montrer par récurrence que :

$$a_n = (a_n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$\begin{cases} a_n \to 0 & |a_0| < 1 \\ a_n \to 1 & a_0 = \pm 1 \\ a_n \to +\infty & |a_0| > 1 \end{cases}$$

Dans le cas général, une étude de la fonction $g(x)$ peut nous aider. Si

$$a_0 \geq l \text{ et } l \leq g(x) \leq x \quad \forall x \geq l \tag{5.3.1}$$

alors :

- $a_1 = g(a_0) \geq l$, $a_2 = g(a_1) \geq l$. Par récurrence : $a_{n+1} = g(a_n) \geq l$, donc $a_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (a_n) est <u>minorée</u>.

- $a_1 = g(a_0) \leq a_0 \implies \ldots \implies a_{n+1} = g(a_n) \leq a_n$ et par récurrence, (a_n) est <u>décroissante</u>

Ainsi, dans ce as (a_n) converge vers un candidat l par décroissance minorée.

Remarque 5.3.2 : Equation 5.3.1 se généralise

Théorème 5.3.3 *(Récurrence linéaire)* **.** *Soit (a_n) définie par récurrence via*

$$a_0 = a, a_{n+1} = g(a_n)$$

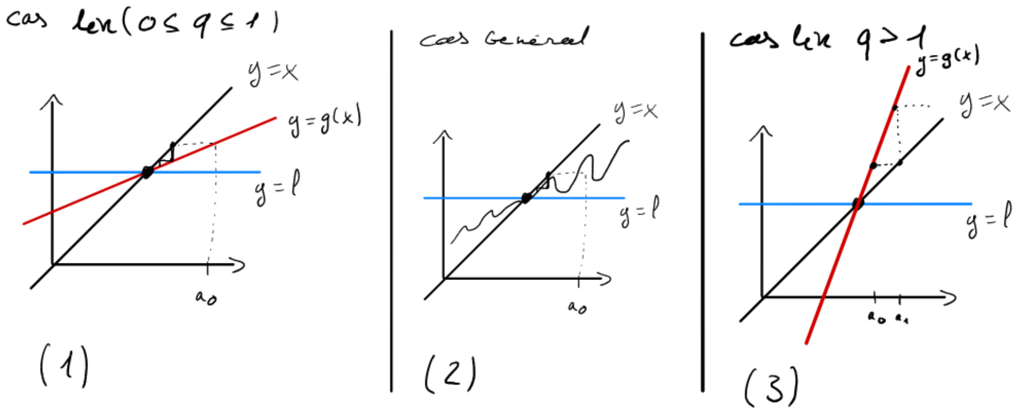
où $g(x) = qx + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$. Alors (a_n) converge vers l'unique solution l de l'equation $g(x) = x$ si et seulement si

$$|q| < 1 \quad ou \quad a_0 = l$$

Donc

$$l \leq g(x) \leq x$$

Démonstration. **Illustration :**



On voit que dans le cas (1), la fonction converge vers le seul candidat : l. Dans le cas (2), la fonction converge aussi. Dans le cas (3), la fonction diverge. Si $q \leq 0$, on pose

$$b_k = a_{2k}$$
$$c_k = a_{2k+1}$$

Ces suites sont définies par récurrence : $b_0 = a_0$, $b_{k+1} = a_{2k+2} = g(g(a_{2k})) = h(b_k)$ où $h(x) = g(g(x)) = g \circ g(x) = g(qx + b) = q^2x + qb + b$. Pareil pour c_n :

$$c_0 = a_1, c_{n+1} = g(g(a_{2k+1})) = h(c_k)$$

Si $-1 < q \leq 0$, alors, $0 \leq q^2 < 1$, donc b_k et c_k convergent par le cas précédent vers l.
Si $q < -1, q^2 > 1$, donc les suites b_n et c_n divergent par le cas précédent, donc a_n diverge également. $\square$

Ex Non linéaire : a_0 = fixé $\in \mathbb{R}^*$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = g(a_n)$ où $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Les candidats pour l sont $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$3 - x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$g(x) - x = \dfrac{3 - x^2}{2x}$	$+$	$-$	$+$	$-$
Comparaison	$g(x) > x$	$g(x) < x$	$g(x) > x$	$g(x) < x$

Donc on a

- si $a_0 \in [\sqrt{3}, +\infty[$, on a
$$\sqrt{3} \le g(x) \le x$$
et $a_n \to \sqrt{3}$
- si $a_0 \in]0, \sqrt{3}[$, $a_1 = g(a_0) \ge \sqrt{3}$ alors a_1 est dans la région précédente, donc $a_n \to \sqrt{3}$
- si $a_0 < 0, a_n \to -\sqrt{3}$

Donc on conclut que si $a_0 > 0, a_n \to \sqrt{3}$ et si $a_0 < 0, a_n \to -\sqrt{3}$.

5.4 Développements limités

Le but est d'approximer une fonction par un polynôme.

Définition 5.4.1 . Soit $f \in C^n(I)$ où I est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre n en x_0 est l'unique polynôme $p(x)$ de degré inférieur ou égal à n dont les dérivées d'ordre x_0 sont les mêmes que celles de f jusqu'à l'ordre n.

Ex : Soit $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$. On a

- $p_1(x) = x$ car $\sin(0) = 0 = p_1(0), \sin'(0) = 1 = p_1'(0)$.
- $p_2(x) = x$ car $\sin''(0) = 0 = p_2''(0)$.
- $p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ car $p_3'(x) = -1 - \frac{3}{6}x^2, p_3''(x) = \frac{-6}{6}x, p_3'''(x) = -1 = \sin'''(0)$

Ainsi, la formule pour trouver le p_n polynôme est
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$
où $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Définition 5.4.2 *(Développement limité)* **.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Alors, f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si
$$f(x) = \text{ polynôme de degré } \le n \ + \text{ reste } r_n(x)$$
pour tout $x \in I$ où $r_n(x)$ vérifie

- Pour tout $c > 0$, $|r_n(x)| \le c \cdot |x - x_0|^n$ dans un voisinage de x_0.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$
- $r_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ est telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Théorème 5.4.3 *(Formule de Taylor)* **.** *Soit $f \in C^n(I)$, où I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Alors f admet un DL_n en x_0 donné par*

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

Démonstration. On applique B-H n fois. □

Remarque 5.4.4 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ouvert. Alors

- Si f admet un DL_n, il est unique.
- Si f est continue en x_0, alors f admet un DL_0 en x_0, de plus l'autre sens en vrai aussi si on suppose que $\varepsilon(x) = 0$.
- Si f est continue en x_0 alors f admet un DL_1 en x_0 si et seulement si f est dérivable.

Ex : On va voir que $\sin(x)$ admet un développement limité d'ordre 3 en $x_0 = 0$ donné par $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$. La seule chose à montrer est

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \\ \iff &\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^2}{x^3} \overset{\text{B-H}}{=} 0 \end{aligned}$$

On a donc que le DL_2 en $x_0 = 0$ est

$$x + x^2\varepsilon(x)$$

Remarque 5.4.5 *(Estimation du reste)* **:** On a que

$$|r_n(x)| \leq \left|f^{(n+1)}(u)\right| \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n!}$$

pour u entre x et x_0.

5.4.1 Applications : Calculs de limites

- Calculons la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{6} + \varepsilon(x)\right) = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

  On voit qu'avec un DL_1 ca ne marche pas. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + x\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} \end{aligned}$$

  Donc il a fallu prendre un développement limité d'ordre plus grand.

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2+2\cos(x)}{x^4}$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(x^2 - 2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{12+\varepsilon(x)} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \varepsilon(x)\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{n} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

Cette série converge et la série originale aussi, par comparaison.

Ex Calculs de DL : Tant qu'on écrit le reste, on peut tout faire.

Ex : Le DL_2 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.
On utilise le DL_2 de $\sin(x)$ et le DL_1 de $\cos(x)$. Donc

$$
\begin{aligned}
\sin(x)\cos(x) &= \left(x + x^2\varepsilon(x)\right)(1 + x\varepsilon(x)) \\
&= x + x^2\varepsilon(x) + x^2\varepsilon(x) + x^3\varepsilon(x)\varepsilon(x) \\
&= x + x^2\left(\underbrace{\varepsilon(x) + \varepsilon(x) + x\varepsilon(x)\varepsilon(x)}_{\to 0}\right) \\
&= x + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

Ex : Le DL_1 en x_0 de $f(x) = e^{\cos(x)}$. On utiliser les DL_1 de $\cos(x)$ et e^x.

$$
e^{\cos(x)} = 1 + \cos(x) + \cos(x)\varepsilon\left(\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}\right)
$$

On voit que $\varepsilon(x)$ ne tend pas vers 0.
Solution : Méthode (i) : il faut réécrire l'expression pour avoit quelque chose qui tend vers 0. Donc :

$$
\begin{aligned}
e^{\cos(x)} &= e^{1+x\varepsilon(x)} = e \cdot e^{c\varepsilon(x)} \\
&= e\left(1 + x\varepsilon(x) + x\varepsilon(x)\varepsilon(x\varepsilon(x))\right) \\
&= e + x\left(e\varepsilon(x) + e\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(x\varepsilon(x))\right)
\end{aligned}
$$

Methode (ii) : Combiner le DL_1 en $x_0 = 0$ et de $\cos(x)$ avec le DL_1 en $x_0 = \cos(0) = 1$ de e^x. Donc :

$$
\begin{aligned}
e^x &= e + e(x-1) + (x-1)\underbrace{\tilde{\varepsilon}(x)}_{\to 0 \text{ lorsque } x\to 1} \\
\implies e^{\cos(x)} &= e + e\left(\cos(x) - 1\right) + \left(\cos(x) - 1\right)\tilde{\varepsilon}(x) \\
&= e + e(x\varepsilon(x)) + (x\varepsilon(x))\tilde{\varepsilon}(\cos(x)) \\
&= e + x\left(e\varepsilon(x)\right) + \varepsilon(x)\tilde{\varepsilon}(\cos(x))
\end{aligned}
$$

5.4.2 Séries de Taylor

Si $f \in C^n(I)$, avec I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

Question : si $f \in C^\infty(I)$, a-t-on $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$? Quand on a $n \to \infty$, il faut que :

1. La série converge
2. Le reste $r_n(x) \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$

Définition 5.4.6 *(Série de Taylor)* **.** Pour $f \in C^\infty(I)$ avec I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$, la série de Taylor de f centrée en x_0 est la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Remarque 5.4.7 :

- Cette série est définie quelque soit $f \in C^\infty(I)$ (même si $r_n(x) \nrightarrow 0$)
- Si $\mathrm{x}_0 = 0$, elle s'appelle aussi série de Maclaurin.
- C'est une série entière ! (cf. Chap. 3.3 $\rightsquigarrow$ centre $= x_0$, rayon de convergence pas connu)

Ex 1 : $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R}), x_0 = 0$. Le DL_n de f donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$$

Donc la série de Taylor (en $x_0 = 0$) est donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il reste à voir que $\lim_{x \to \infty} r_n(x) = 0$. On a :

$$|r_n(x)| \leq f^{(n+1)}(u)\frac{|x|^{n+1}}{n!} = e^u \frac{|x|^{n+1}}{n!} \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{n!} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Car exp est strictement croissant et que $u \in [0, x]$, donc $e^u \leq e^{|x|}$. Le reste tend bien vers 0. Donc e^x est égale à sa série de Taylor en $x_0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Remarque 5.4.8 : En fait, $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k$

Ex 2 : Cela marche aussi pour sin, cos, sinh, cosh !

$$\implies \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$
$$\implies \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.4.9 : Cela donne enfin une raison pour la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. En effet

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + i\sin(x) \end{aligned}$$

Proposition 5.4.10 *(Dériviées de série entières)* **:** *Si* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$*, alors*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{k+1} (x-x_0)^k$$

et les rayons de convergences sont les mêmes !

Concéquences de la porposition :

- On peut définir

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet, $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$ et

$$\exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \overset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x)$$

C'est donc l'unique fonction f telle que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

- Si $f(x)$ est déjà une série entière, i.e. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$, on dérive :

$$f(x_0) = b_0, f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (x-x_0)^{k-1} \implies f'(x_0) = b_1$$

$$f^{(k)}(x) = b_k \cdot k! \implies b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Ex 3 : $f(x) = \frac{1}{1-x} \in C^{\infty}(]-1,1[)$. On a vu que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1(x-0)^k \quad \text{si } |x| < 1$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \text{ série de Taylor en } x_0 = 0 \; = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Attention : pour $x \notin]-1,1[$, la série diverge. Par example :

$$f(-10) = \frac{1}{11} \neq \sum_{k=0}^{\infty} (-10)^k$$

Ex 4 : $f(x) = \log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^n \varepsilon(x)$. Série de Taylor ? $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$. On calcule $f(x) -$ série de Taylor $'$:

$$\begin{aligned} f(x) - \text{ série de Taylor }' &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} k x^{k-1} \\ &= \frac{1}{1-(-x)} - \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 0 \quad \text{cf. exemple précédent} \\ &\implies \log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = C = 0 \\ &\implies \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \end{aligned}$$

pour $x \in \,]-1,1[$. En $x = 1$, on obtient, par prolongement par continuité que :

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Ex 5 (Contre example) : On pose $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. On vérifie qu'elle est continue en 0 :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0. De plus, si $x \neq 0$, $f'(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$ et on calcule $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \to \pm\infty} e^{-y^2} 2y^3 \\ &= \lim_{y \to \pm\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0 \\ &\implies f'(0) = 0 \\ &\implies f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

où P_k est un polynôme. Donc $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(k+1)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série de Taylor de f en $x_0 = 0$ est nulle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Cependant, $f(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$. Donc f n'est pas égale à sa série de Taylor en $x_0 = 0$. La raison est que le DL de f est

$$f(x) = 0 + x^n \varepsilon(x) = r_n(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$$

Remarque 5.4.11 : Prenons $\sin(x)$ et $\sin(x) + e^{\frac{-1}{x^2}}$. Ces deux fonctions ont la même série de Taylor en $x_0 = 0$, mais seule $\sin(x)$ est égale à sa série de Taylor !

Chapitre 6

Intégrales

6.1 Primitives et intégrales

Définition 6.1.1 *(Primitive)* **.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue où I est intervalle. Une **primitive** de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Remarque 6.1.2 : Si F, G sont deux primitives de la même fonction f, alors :

$$F(x) - G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Donc F et G diffèrent d'une constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in I.$$

Notation : $\displaystyle\int f(x)dx$ est l'ensemble de <u>toutes</u> les primitives de f. Donc :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

où F est une primitive de f. Abus de notation :

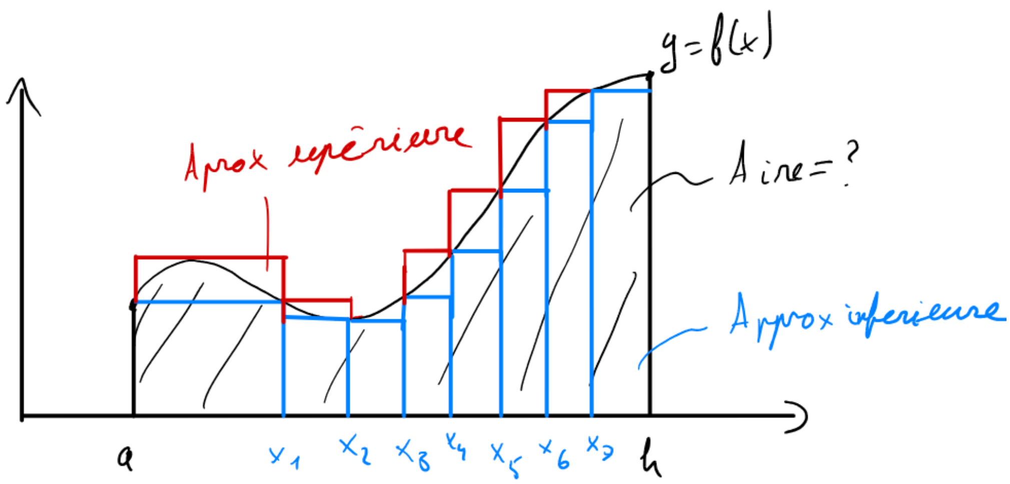
$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Remarque 6.1.3 : L'intégrale $\int f(x)dx$ s'appelle **intégrale indéfinie** de f.

Changeons de point de vue, pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$x^r \ (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$		
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$		

FIGURE 6.1 – Primitives de fonctions de base



Approx 1 (inférieure) :

$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))$$

Approx 2 (supérieure) :

$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))$$

Définition 6.1.4 *(Intégrale de Riemann)* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est **intégrable** (au sens de Riemann) si

$$\sup\{\text{Approx 1}\} = \inf\{\text{Approx 2}\} = A \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

Dans ce cas, on parle d'intégrale définie de f entre a et b.

Remarque 6.1.5 : On dit que $\int_a^b f(x)dx$ donne l'aire signée sous la courbe. Par convention, on dit que $\int_a^a = 0$ et que $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Théorème 6.1.6 . *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, monotone, bornée et continue partout sauf en un nombre finis de points, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$.*

Preuve. Technique (Ex : monotone) □

Ex Contre exemple **:** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors f n'est pas intégrable sur $[0,1]$. En effet, pour toute subdivision $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, on a

$$\text{Approx } 1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

car dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ il existe des réels irrationnels. De même,

$$\text{Approx } 2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$$

car dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ il existe des rationnels. Donc

$$\sup\{\text{Approx } 1\} = 0 \neq 1 = \inf\{\text{Approx } 2\}$$

et f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Remarque 6.1.7 : Cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue mais ce n'est pas le sujet de ce cours.

Propriété 6.1.8 *(Intégrale de Riemann)* **.** Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables au sens de Riemann et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ (Linéarité)
2. Si $a < u < b$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^u f(x)dx + \int_u^b f(x)dx$ (Additivité)
3. Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (Monotonie)

Preuve. Technique, mais :

1. Linéarité :

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \leq \alpha \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \beta \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x)$$

□

Remarque 6.1.9 : On peut écrire l'intégrale avec n'importe quelle variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

On a aussi :

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Théorème 6.1.10 *(Théorème de la moyenne)* **.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $u \in \,]a,b[$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)dx = f(u) \cdot (b-a)$$

Démonstration. On prend $m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq M = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. Donc :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ainsi :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u \in \,]a,b[$ tel que $f(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. $\square$

Remarque 6.1.11 : Donc $f(u)$ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Théorème 6.1.12 *(Théorème fondamental du calcul intégrale)* **.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors*

1. *La fonction $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   est une primitive de f sur $[a,b]$.

2. *Si F est une primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration. **Parie 1 :** On dérive G :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0} f(u)\left((x+h)-x\right) = f(x)h \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\underbrace{f(u)h}_{\in]x,x+h[} = \lim_{u\to x} f(x) \end{aligned}$$

Partie 2 : On a $F(x) = G(x) + c$, donc :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Notation : On note $F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

6.2 Calculs d'intégrale

Ex Facile : On calcule.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$. Mais attention : aire signée ! Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0$
2. $\displaystyle\int (3x+1)dx = \frac{3}{2}x^2 + x + c$
3. $\displaystyle\int a^x dx = \int e^{\ln(a)x}dx = \frac{1}{\ln(a)}e^{\ln(a)x} + c = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
4. $\displaystyle\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + c$ (vérifier en dérivant). Ex :
$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$
5. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$ (vérifier en dérivant). Ex :
$$\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + c$$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

Propriété 6.2.1 *(Changement de variable/substitution)* **.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [u,v] \to [a,b]$ une fonction de la classe C telle que $\varphi(u) = a, \varphi(v) = b$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Remarque 6.2.2 : Si φ est bijective, alors on peut écrire :

$$F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$$

Donc $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Ex : On pose $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. En posant :

$$\begin{aligned} \varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longmapsto \sin(t) \end{aligned}$$

Cette fonction est de classe C^1, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = \frac{\pi}{4} \quad \text{cf exemple précédent} \end{aligned}$$

Ex indéfinie : On reprend $\int \sqrt{1-x^2}$. On pose :

$$\begin{aligned} \varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\to [-1,1] \\ t &\mapsto \sin(t) \end{aligned}$$

φ est bijective. Donc :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\, dt &= \int cos^2(t)\, dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + c \end{aligned}$$

On évalue en $t = \arcsin(x)$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

Remarque 6.2.3 : On peut aussi exprimer t en fonction de x.

Ex remaeque : On pose $\int e^{x^2}dx$. Donc $t = x^2$, $\frac{dt}{dx} = 2x$:

$$\begin{aligned} \int e^{x^2}dx &= \frac{1}{2}\int e^t\, dt = \frac{1}{2}e^t + c \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + c \end{aligned}$$

Comment bien choisir <u>la</u> substitution ? C'est dur ! Voici quelques exemples :

- $\displaystyle\int e^{x^2}dx$: $t = x^2$
- $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx, \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3}dx$: $t = 1+\cos(x)$, ou $t = 1+x^2$. Il faut prendre ce qu'il ya "sous" le dénominateur, ou mieux "dedans dessous".

- $\int \sqrt{1-x^2}dx, \int \sqrt{1+x^2}dx$

  $x = \sin(t) \quad x = \sinh(t)$

- En cas de forces majeures, pour les fonction rationnelles en sin ou cos comme :

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx, \int \frac{1}{\sin^4(x)}dx$$

on pose

$$t = \tan(x) \text{ donc } \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\text{ou } t = \tan(\tfrac{x}{2}), \text{ donc } \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ex : $\int \frac{1}{\sin^4(x)}dx.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^4(x)}dx &\overset{t=\tan(x)}{=} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \int t^{-4} + 2t^{-2} + 1\, dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + c \\ &= -\frac{1}{3\tan^3(x)} - \frac{1}{\tan(x)} + c\end{aligned}$$

Ex : $\int \frac{1}{\sin(x)}dx.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)}dx &\overset{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c\end{aligned}$$

Propriété 6.2.4 *(Intégrale par parties)* **.** Soit $f \in C^0([a,b])$ et $g \in C^1([a,b])$ et F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Démonstration. On a $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg$, donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b (F(x)g(x))'\,dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

□

Remarque 6.2.5 : La preuve montre que c'est pareil pour les intégrales indéfinies.

Ex 1 :

$$\int e^x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x(x-1) + c$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int \ln(x) \cdot 1dx \\ &= \ln(x)x - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x\ln(x) - x + c \\ &= x(\ln(x) - 1) + c\end{aligned}$$

Ex 3 :

$$\begin{aligned}\underbrace{\int \cos^2(x)dx}_{I} &= \int \cos(x)\cdot\cos(x)dx \\ &= \sin(x)\cos(x) - \int \sin(x)\cdot(-\sin(x))\,dx \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \underbrace{\int \cos^2(x)dx}_{I} \\ \implies 2I &= \sin(x)\cos(x) + x - I \\ \implies 2I &= \sin(x)\cos(x) + x + c \\ \implies I &= \frac{1}{2}\left(\sin(x)\cos(x) + x\right) + c\end{aligned}$$

Ex 4 : (Intégrale par récurrence)

$$\begin{aligned}A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx \\ \implies A_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^{2n-1}(x)dx \\ &= \Big[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(2n-1)\cos^{2n-2}(x)(-sin(x))dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2(n-1)}(x)dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(x)dx - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx \\ \implies A_n &= (2n-1)A_{n-1} - (2n-1)A_n \\ \implies 2nA_n &= (2n-1)A_{n-1} \\ \implies A_n &= \frac{2n-1}{2n}A_{n-1}\end{aligned}$$

6.2.1 Intégration de fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont des fonctions de la forme $\frac{p(x)}{q(x)}$ où p, q sont des polynômes. Pour intégrer ces fonctions, on utilise la décomposition en éléments simples.

Building blocks

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$. Ainsi :

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \int \frac{1}{u}\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$$

avec $u = ax + b \implies du = adx \implies dx = \frac{1}{a}du$.

ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^k}dx = \int x^{-k}dx = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{x^{1-k}}{1-k} + c$, ainsi :

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^k}du = \frac{1}{a}\frac{u^{1-k}}{1-k} + c = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{1-k}}{1-k} + c$$

iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + c$. Si $q(x) = ax^2 + bx + c$ est tel que $\Delta < 0$, alors on peut "completer le carré" :

$$q(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right)$$

On pose $d^2 = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$, donc :

$$= ad^2\left(\left(\frac{x + \frac{b}{2na}}{d}\right) + 1\right)$$

On pose $u = \frac{x+\frac{b}{2na}}{d} \implies du = \frac{1}{d}dx \implies dx = d \cdot du$, donc :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{1}{ad^2}\int \frac{1}{u^2+1}d \cdot du \\ &= \frac{1}{ad}\arctan(u) + c = \frac{1}{ad}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2na}}{d}\right) + c\end{aligned}$$

iv) $\displaystyle\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = I$. On a alors :

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{q(x)}dx \\ &= \frac{1}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \text{(iii)} + c\end{aligned}$$

v) $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{1}{u^k}du$ avec $u = ax^2+bx+c \implies du = (2ax+b)dx$. Donc :

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

vi) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}dx$. En exercices.

A l'aide de ces 6 building blocks, ont peut intégrer tout $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec le décomposition en éléments simples.

Méthode 1

1. Si $\deg(p) \geq deg(q)$, faire la division polynomiale !

   Ex : Prenons $\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1}dx$. On fait la division polynomiale :

$$= \int \frac{3(x^4-x^3-x+1)}{x^4-x^3-x+1}dx + \int \frac{3x^3+3x+3}{x^3-x^3-x+1}dx$$

$$= \int 3dx + \int \frac{\cdots}{q(x)}dx = 3x + \int \frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1}dx$$

2. Factoriser le dénominateur $q(x)$ et décomposer. On a $q(x) = (x-u)^k \cdot (ax^2+bx+c)(x-v)$. Ainsi on peut écrire :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-u} + \frac{A_2}{(x-u)^2} + \frac{A_k}{(x-u)^k} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

   Ex : $q(x) = x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)^2(x^2+x+1)$. Donc :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2-2B+C)x^2 + (A_2+B-2C)x + (-A_1+A_2+C)}{x^4-x^3-x+1}$$

   On pose alors le système :

$$\implies \begin{cases} A_1 + B = 3 \\ A_2 - 2B + C = 0 \\ A_2 + B - 2C = 3 \\ -A_1 + A_2 + C = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A_1 = 1 \\ B = 2 \\ A_2 = 3 \\ C = 1 \end{cases}$$

   Donc :

$$\frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

3. Intégrer les éléments simples à l'aide des building blocks.

   Ex :

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \log|x-1| + c$$
$$\int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \int 3(x-1)^{-2}dx = \frac{-3}{x-1} + c$$
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \log|x^2+x+1| + c$$

   Ainsi :

$$\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1}dx = 3x + \log|x-1| - \frac{3}{x-1} + \log|x^2+x+1| + c$$

6.3 Intégrale généralisée ou impropres

On sait que si $f : [a,b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$ alors l'intégrale est l'air sous la courbe. On généralise à $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Ex : On pourrait s'intérresser à $\int_0^1 \log(x)dx$ (qui a une asymptote verticale en $x = 0$). Ou encors $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

Problème : L'approximation est toujours $\pm\infty$.
Solution : On restreint à un intervalle fermé, puis on utilise les limites.

Définition 6.3.1 *(Intégrales généralisées)* **.**

1. Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors :

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)dx$$

2. Si $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, alors :

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)dx$$

3. Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, alors :

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^w f(x)dx + \lim_{v \to b^-} \int_w^u f(x)dx$$

   où $w \in]a,b[$ est quelconque.

Remarque 6.3.2 :

- Ce sont les intégrales généralisées (ou impropres) de f.
- On dit que l'intégrale converge si la (les!) limites existe(nt) ($\in \mathbb{R}$), et l'intégrale diverge sinon.
- Pour le point 3), on peut montrer que le résultat ne dépend pas du w choisi.

Notation :

$$\int_a^{+\infty^-} = \int_a^{+\infty} \quad , \quad \int_{-\infty^+}^b = \int_{-\infty}^b$$

Ex 1 :

$$\begin{aligned}\int_{0^+}^1 \log(x)dx &= \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \log(x)dx = \lim_{u\to 0^+}\Big[x\log(x)-x\Big]_{x=u}^{x=1}\\ &= \lim_{x\to 0^+}(-1-u\log(u)+u) = -1+\lim_{u\to 0^+}\frac{-\log(x)}{\frac{1}{u}}\\ &\overset{\text{B-H}}{=} -1+\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -1\end{aligned}$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-x}dx = \lim_{u\to+\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^u\\ &= \lim_{uti+\infty}(1-e^{-u}) = 1\end{aligned}$$

Ex 3 : Pour $r > 0$, on a $\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r}dx = \begin{cases}\frac{1}{1-r} & r<1\\ +\infty & r\geq 1\end{cases}$. Aussi $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx = \begin{cases}\frac{1}{1-r} & r>1\\ +\infty & r\leq 1\end{cases}$.

Exemple :

$$I = \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r}dx = \lim_{u\to 0^+}\int_u^1\frac{1}{x^r}dx = \lim_{u\to 0^+}\begin{cases}(-\log(u)) = +\infty & r=1\\ \Big[\frac{x^{1-r}}{1-r}\Big]_{x=u}^{x=1} & r\neq 1\end{cases}$$

Calculons $\Big[\frac{x^{1-r}}{1-r}\Big]_{x=u}^{x=1}$:

$$\Big[\frac{x^{1-r}}{1-r}\Big]_{x=u}^{x=1} = \frac{1}{1-r}+\frac{1}{r-1}\lim_{u\to 0^+}u^{1-r}$$

Et ceci diverge si $r>1$ et converge vers $\frac{1}{1-r}$ si $r<1$

$$\implies I = \begin{cases}\frac{1}{1-r} & r<1\\ +\infty & r\geq 1\end{cases}$$

Ex 4 : On étudie : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$. On coupe en $w=0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{u\to-\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_{x=u}^0 + \lim_{u\to+\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_0^{x=u}\\ &= \pi\end{aligned}$$

Remarque 6.3.3 : Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge, i.e. si les deux limites existent, alors cette inégrae vaut :

$$\underbrace{\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^u f(x)dx}_{\text{veleur de cauchy}}$$

Ex 5 :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x dx &= \int_{-\infty}^{0} x dx + \int_{0}^{+\infty} x dx \\ &= \lim_{u \to -\infty} \frac{-u^2}{2} + \lim_{v \to +\infty} \frac{v^2}{2}\end{aligned}$$

L'intégrale diverge ! En revenche, sa valeur principale de Cauchy est $\lim_{u \to +\infty} \int_{-u}^{u} x dx = 0$. On voit alors que la valeur principale de Cauchy $\neq \int_{-\infty}^{+\infty}$.

> **Propriété 6.3.4** *(Comparaison d'intégrales)* **.** Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b[$. Alors :
>
> 1. $\int_a^{b^-} f(x) dx$ converge $\Longleftarrow$ $\int_a^{b^-} g(x) dx$ converge.
>
> *Démonstration.* Théorème du gendarme seul ! □

Ex du 1 : $I = \displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt &\overset{x=1-t}{=} -\int_1^{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \left(2\sqrt{1}\right) - \lim_{u \to 0^+} (2\sqrt{u}) = 2 - 0 = 2\end{aligned}$$

qui converge. Donc I converge par comparaison.

> **Propriété 6.3.5** *(Comparaison intégrales / séries)* **.** Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, et décroissante. Alors :
>
> $$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ converge } \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$
>
> ⚠Valeurs pas égales !

Ex : La somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\iff \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{n^p} dx$ converge si et seulement si $p > 1$.

Ex :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\underbrace{\log(n)}_{u})^p} \text{ converge } \iff I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\left(\log(x)\right)^p} dx \text{ converge}$$

Voyons la valeur de l'intégrale indéfinie :

$$\int \frac{1}{x\left(\log(x)\right)^p} dx \overset{du=\frac{1}{x}dx}{=} \int \frac{1}{u^p} du = \begin{cases} \frac{u^{1-p}}{1-p} + c & p \neq 1 \\ \log(u) + c & p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{log(x)^{1-p}}{1-p} & p \neq 1 \\ \log(\log(x)) & p = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\implies I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\left(\log(x)\right)^p} dx \overset{p=1}{=} \lim_{u\to+\infty} \Big[\log(\log(x))\Big]_{x=2}^{u} = +\infty$$

$$\implies I \overset{p\neq 1}{=} \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{\log(x)^{1-p}}{1-p}\right]_{x=2}^{u} = c\frac{-\lim_{u\to+\infty}\log(x)^{1-p}}{1-p} - \frac{\log(2)^{1-p}}{1-p}$$

I converge si et seulement si $p > 1$, donc par la propriété 6.3.5

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(\log(n)\right)^p} \text{ converge } \iff p > 1$$

En particulier :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)} \text{ diverge}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)^2} \text{ converge}$$