

# Notes d'Analyse 1

Paul Lasry-Robin

13 janvier 2026

## Résumé

Ce document constitue une prise de notes en temps réel du cours d'Analyse I d'Olivier Mila. En raison de sa nature "live", le texte peut contenir des fautes de frappe ou des imperfections de mise en page.

L'objectif de ce support est d'offrir une révision interactive et efficace grâce à l'intégration de liens internes. Si vous relevez des erreurs mathématiques, merci de me les signaler sur Telegram : [@leodagan68](#). Le code source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X de ce projet est disponible sur mon [répertoire GitHub \(BA1\)](#).

Je n'ai commencé à prendre des notes qu'à partir du troisième chapitre, j'ai essayé de le compléter pendant les révisions mais cela prenait trop de temps, donc le document est vide sur les chapitres des suites et séries.

# Table des matières

<b>1 Les nombres</b>	<b>ii</b>
1.1 Entiers et rationnels . . . . .	ii
1.2 Construction des nombres réels . . . . .	iii
1.3 Propriétés de réels . . . . .	iv
1.4 Représentation décimale . . . . .	iv
1.5 Nombre complexe . . . . .	v
1.6 Propriétés des nomnbres complexes . . . . .	v
1.7 Calcul dans $\mathbb{C}$ . . . . .	vi
<b>2 Suites</b>	<b>viii</b>
<b>3 Séries</b>	<b>ix</b>
<b>4 Fonctions</b>	<b>x</b>
4.1 Rappels . . . . .	x
4.2 Limites . . . . .	x
4.3 Calculs de limites . . . . .	xiii
4.4 Lim à gauche/droite, limites infinies . . . . .	xvi
4.5 Fonctions continues . . . . .	xviii
<b>5 Dériviées</b>	<b>xxii</b>
5.1 Définitions et exemples . . . . .	xxii
5.2 Dérivée et croissance . . . . .	xxviii
5.2.1 La fonction exponentielle (et logarithmes) . . . . .	xxix
5.3 Etude de fonctions . . . . .	xxxiii
5.3.1 Applications : convergence de suites définies par récurrence . . . . .	xxxiv
5.4 Développements limités . . . . .	xxxvi
5.4.1 Applications : Calculs de limites . . . . .	xxxvii
5.4.2 Séries de Taylor . . . . .	xxxix
<b>6 Intégrales</b>	<b>xliii</b>
6.1 Primitives et intégrales . . . . .	xliii
6.2 Calculs d'intégrale . . . . .	xlvii
6.2.1 Intégration de fonctions rationnelles . . . . .	li
6.3 Intégrale généralisée ou impropre . . . . .	liii

# Chapitre 1

## Les nombres

### 1.1 Entiers et rationnels

**Définition 1.1.1** (*Entiers naturels*) . On note

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} , \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

**Définition 1.1.2** (*Entiers relatifs*) . On note

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$$

**Définition 1.1.3** (*Nombres naturels*) . On note

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

**Proposition 1.1.4 :** L'équation  $x^2 = 2$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{Q}$

**Lemme :**  $a^2 \equiv 0 \pmod{2} \implies a \equiv 0 \pmod{2}$

*Preuve du lemme.* Si  $a$  est impaire, on a que  $a = 2k + 1$  où  $k \in \mathbb{Z}$  donc  $a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ . Ainsi  $a^2$  est impaire. Par la contraposé, on a que :

$a$  est pair si et seulement si  $a^2$  est paire.

□

*Démonstration.* Supposons q'il existe une solution  $x = \frac{a}{b}$  tel que  $a, b \in \mathbb{Z}$  et  $b \neq 0$ . On suppose la fraction irreductible. On a alors :

$$x^2 = 2 \implies \frac{a^2}{b^2} = 2 \implies a^2 = 2b^2$$

Par le lemme, on sait que  $a$  est paire

$$\begin{aligned} a = 2c &\implies 2b^2 = 4c^2 \\ &\implies b^2 = 2c^2 \implies b^2 \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Par le lemme,  $b$  est pair, donc :

$$x = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$$

La fraction est réductible, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Il n'y a donc pas de solution dans  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

## 1.2 Construction des nombres réels

On utilise la relation d'ordre sur  $\mathbb{Q}$  pour "ajouter" des nombres aux entiers.

**Définition 1.2.1 (Minorant / Majorant)** . Soit  $A \subseteq \mathbb{Q}$  un ensemble non vide.

- Un majorant / minorant de l'ensemble  $A$  est un nombre  $x$  tel que  $x \geq (\leq) \forall a \in A$
- S'il existe un majorant / minorant de  $A$  tel que  $x \in A$  alors il s'appelle le maximum / minimum de  $A$
- L'ensemble  $A$  est majoré / minoré / borné s'il admet un majorant / minorant / les deux.

**Ex :**  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ . On a que  $A$  est borné,  $\min A = 0, \max A = 1$ .

**Définition 1.2.2 (Supréum / Infimum)** . Soit  $A \subseteq \mathbb{Q}(\mathbb{R})$ .

- Le supréum de  $A$  est

$$\sup A = \min x \mid x \text{ est un majorant de } A$$

- Le infimum de  $A$  est

$$\inf A = \{x \mid x \text{ est un minorant de } A\}$$

**Remarque 1.2.3 :** Si  $A$  n'a pas de minorant / majorant, on dit par convention  $\sup A = +\infty$ ,  $\inf A = -\infty$ .

De plus, si  $\max A, \min A$  existent, on a :

$$\begin{aligned}\sup A &= \max A \\ \inf A &= \min A\end{aligned}$$

**Remarque 1.2.4 :** Pour un ensemble borné, on s'attend à toujours avoir un inf et sup, même si min et max n'existent pas, mais c'est faux :

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq x^2\}$$

$$|x| \leq \frac{3}{2} \iff \underbrace{-\frac{3}{2}}_{\text{minorant de } A} \leq x \leq \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{majorant de } A}$$

**Proposition 1.2.5 :** Si  $x = \sup D$  existe, alors  $x^2 = 2$ .

*Preuve proposition.* 1) Supposons que  $x^2 < 2$ . Soit  $d \in D$  tel que  $d = x + \frac{1}{n}$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  est choisi tel que  $n \geq \frac{2x+1}{2-x^2}$ , on a :

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2 \\ \iff \frac{2x+1}{n} &\leq 2 - x^2 \iff n \leq \frac{2x+1}{2-x^2} \end{aligned}$$

Comme  $n$  a été choisi comme tel, on a que  $d^2 \leq 2$ . Ainsi,  $d \in D$  et  $d > x$ , ainsi  $x$  n'est pas majorant.

2) Supposons que  $x^2 > 2$  [exercice dur !]. Comme on ne peut pas avoir ni  $x^2 < 2$  ni  $x^2 > 2$ , on a que  $x^2 = 2$

□

**Corollaire 1.2.6 :** Le nombre  $x = \sup D$  n'existe pas dans  $\mathbb{Q}$ .

**Remarque 1.2.7 :** Il n'y a pas de  $x \in \mathbb{Q}$  tel que  $x^2 = 2$ .

On voit qu'il manque des nombres dans  $\mathbb{Q}$ , cela nous indique à en ajouter !

**Construction de  $\mathbb{R}$  :**

$\mathbb{R}$  s'obtient à partir de  $\mathbb{Q}$  en ajoutant les sup et les inf de tous les ensembles bornés  $A \subseteq \mathbb{Q}$ .

## 1.3 Propriétés de réels

- (i)  $\mathbb{R}$  est un corps, (on a  $0, 1, +, \cdot$ , inverse pour  $+$  et  $\cdot$ , distributivité, muni d'un ordre total ( $x \leq y$ ))
- (ii) Les définitions de min, max etc... restent les mêmes, pour des sous-ensembles  $A \subseteq \mathbb{R}$
- (iii) Réussite de la construction

**Théorème 1.3.1 .** Pour tout  $A \subseteq \mathbb{R}$  non-vide et minoré / majoré, le nombre  $\sup A$  /  $\inf A$  existe toujours et est unique.

**Remarque 1.3.2 :**  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} \implies \sup D = \sqrt{2} \quad , \quad \inf D = -\sqrt{2}$

## 1.4 Représentation décimale

Tout nombre  $x \in \mathbb{R}$  s'écrit  $x \pm d_1 d_2 d_3 \dots d_n, d_{n+1}$  avec  $d_i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq d_i \leq 9$

**Théorème 1.4.1 .** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $x \in \mathbb{Q}$  si et seulement si  $x$  a une représentation décimale finie et périodique.

Conséquence du théorème :

- La représentation de  $\sqrt{2}$  est bel et bien infinie, non-périodique.
- Densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tous  $x < y \in \mathbb{R}$ , il existe  $a \in \mathbb{Q}$  tel que  $x < a < y$
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $|a - x| < \varepsilon$ .

## 1.5 Nombre complexe

Dans  $\mathbb{R}$ , on a une solution de  $x^2 = a$  pour tout  $a \leq 0$ . Mais pas de solution de  $x^2 = -1$ . On prend  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et on le munnit de :

- 1) L'addition :  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- 2) La multiplication :  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

**Remarque /Notation :**

- (i)  $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ ,  $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ab, 0)$ . On identifie l'ensemble

$$\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

- (ii) Le "nombre"  $(0, 1)$  est intéressant :

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

On l'appelle  $i = (0, 1)$  = unité imaginaire. On dit aussi que  $(a, b) = a + bi$ .

**Définition 1.5.1 .** L'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni de  $+$ ,  $\cdot$  et de ces notations / identification est le corps des nombres complexes, qu'on note  $\mathbb{C}$ .

**Remarque 1.5.2 :** Tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  s'écrit  $z = a + bi$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . C'est la forme cartésienne de  $z$ .

## 1.6 Propriétés des nombres complexes

- (i)  $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  ,  $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$
- (ii)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
- (iii)  $|z_1|^2 = z \cdot \bar{z} \implies (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$
- (iv)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \implies |z_1 \cdot z_2|^2 \stackrel{(iii)}{=} z_1 \cdot z_2 \cdot z_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$
- (v) Si  $z \in \mathbb{C}^*$ , alors  $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$
- (vi) Inégalité triangulaire :  

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

### Trois représentations de $\mathbb{C}$

- 1) Cartésienne :  $z = a + bi$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$
- 2) Forme polaire :  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  où  $r \in \mathbb{R}^*$
- 3) Forme exponentielle :  $z = re^{i\theta}$

### Conséquences de l'exponentielle complexe

- Pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ . Dnc si  $z = re^{i\theta}$ , alors  $\bar{z} = e^{-i\theta}$ .

**Propriété 1.6.1 (Formule d'Euler) .**

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

**Propriété 1.6.2 (Formule de Moivre) .**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (1.6.1)$$

$$\implies (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (1.6.2)$$

**Propriété 1.6.3 (Formule pour sin et cos) .**

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

## 1.7 Calcul dans $\mathbb{C}$

Calcul de  $(1 - \sqrt{3}i)^{30}$

$$\begin{aligned} z &= 1 - \sqrt{3}i \\ |z| &= \sqrt{1 + 3} = 2 \\ \arg z &= \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan -\sqrt{3} = \frac{-\pi}{3} \end{aligned}$$

Avec ces informations, on passe en forme polaire :

$$z^{30} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{30} = \dots = 2^{30}$$

**L'équation**  $z^n = 1$ ,  $z = er^{i\theta}$

Par la formule de Moivre (1.6.2), on a :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$$

On a alors que  $r^n = 1$  et  $n\theta = 0$ , donc :

$$r = 1 \quad , \quad \theta = \frac{k2\pi}{n}$$

Les solutions sont donc  $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid e^{i\frac{2k\pi}{n}} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Il y a bien  $n$  solutions distinctes.

**L'équation**  $z^n = w$ , **pour tout**  $w \in \mathbb{C}$  **et**  $n \in \mathbb{Z}$

**Etape 1 :** Trouver une solution  $z_0$ , appellée solution particulière.

**Ex :** Si  $w = se^{i\phi}$ , prendre  $z_0 = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\phi}{n}}$

**Etape 2 :** Trouver la solution générale. On a  $z^n = w = z_0^n$ . Donc :

$$\left( \frac{z}{z_0} \right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

On trouve à nouveau  $n$  solutions distinctes :  $\mathbb{S} = z_0 \cdot \{\text{solutions de } z^n = 1\}$ .

**Théorème 1.7.1 (Théorème fondamental de l'algèbre)** . Tout polynomes  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_i z^i + a_0$ , avec  $a_i \in \mathbb{C}$  se factorise en :

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

**Corollaire 1.7.2 :** Toute équation polynomiale  $p(z) = 0$  de degré  $n$  possède  $n$  solutions complexes en comptant les multiplicités.

**Ex :** Polynome de degré 2.

$$p(z) = az^2 + bz + c = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

A interpréter comme :  $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$  sont les solutions de  $u^2 = b^2 - 4ac$

$$\iff z = \frac{-b + \text{"sols de } u^2 = b^2 - 4ac\text{"}}{2a}$$

**Ex :**  $z^2 + 2z + 3 = 0$  :

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

Les solutions de  $u^2 = -8$  sont  $u_1 = 2\sqrt{2} \cdot i$ ,  $u_2 = -2\sqrt{2} \cdot i$ , donc :

$$z = -1 \pm \sqrt{2} \cdot i$$

**Remarque 1.7.3 :** Si  $p(z)$  est à coefficient réels, alors les racines non-réelles viennent par paire complexes conjuguées.

## Chapitre 2

### Suites

# Chapitre 3

## Séries

# Chapitre 4

## Fonctions

### 4.1 Rappels

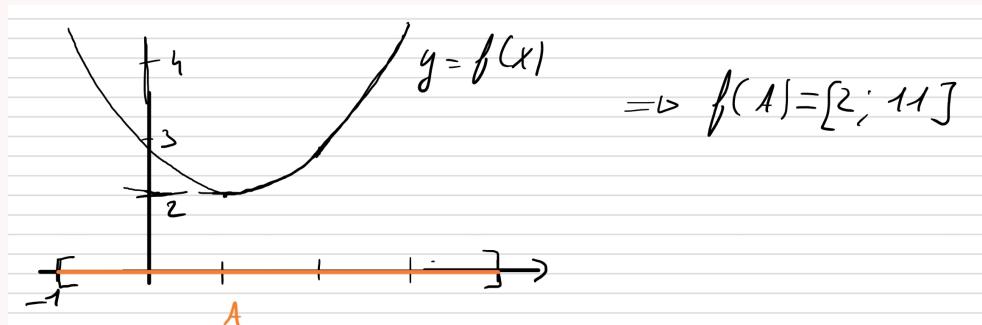
**Définition 4.1.1 (Fonction majorées)**. Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. Alors  $f$  est majorée sur  $A \subseteq D$  si  $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$  l'est.

De plus, on pose :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

Pareil pour inf, max et min (si min et max existent).

**Ex :** Pour  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$  et  $A = ]-1, 4[$



Donc  $\forall x \in A$  :

- $\inf f(x) = \min f(x) = 2$
- $\sup f(x) = 11$

Et max n'existe pas.

### 4.2 Limites

**Ex :**  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$D(f) = \mathbb{R}^*$ . On aimeraït définir  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ .

Il faut deux ingrédients pour conclure que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  :

- 1)  $f$  doit être définie "un peu autour" de  $x_0$
- 2)  $f(x)$  doit "s'approcher" de  $l$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ .

**Définition 4.2.1 (Fonction définie au voisinage).** Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$  s'il existe  $d \in \mathbb{R} > 0$  t.q :

$$]x_0 - d, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + d[ \subset D$$

**Ex :**  $\frac{\sin x}{x}$  est définie au voisinage de  $x_0 = 0$  même si elle n'est pas définie en 0.

**Définition 4.2.2 (Limite d'une fonction).** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  def au voisinage de  $x_0$ . Alors,  $f$  admet  $l \in \mathbb{R}$  pour limite lorsque  $x \rightarrow x_0$ .

On note :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$  t.q.  $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ , on a :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

**Ex 1 :** Soit  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 132 & x = 0 \end{cases}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 132$  car on s'interesse seulement au voisinage de 0.

**Ex 2 :** Soit  $f(x) = 5x - 1$ ,  $x_0 = 0$ . Montrons que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$ .

1)  $D(f) = \mathbb{R} \implies f$  est def dans tout voisinage de  $x_0 = 2$ .

2) Soit  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$  tel que  $|x - 2| \leq \delta$ .

$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on a montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $x \in D \setminus \{2\}$  et  $|x - 2| \leq \delta$ , on a :

$$|f(x) - 9| \leq \varepsilon$$

**Théorème 4.2.3 (Limites de fonction et suites).** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors on peut dire que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$  pour toute  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ .

Idée :  $a_n \rightarrow x_0$  sont les manières de s'approcher de  $x_0$ . Donc  $f(x) \rightarrow l$  si  $f(a_n) \rightarrow l$  pour toutes les façons ( $a_n \rightarrow x_0$ ) de s'approcher de  $x_0$ .

**Ex :** Redémonstration de  $\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 10 = 9$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5a_n - 1) = 5(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$$

Comme la suite était arbitraire, on a montré que pour TOUTE SUITE  $(a_n)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 10 = 9$$

**Corollaire 4.2.4 :** Si on a trouvé :

- Une suite  $(a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$  t.q.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ n'existe pas}$$

- Deux suites  $(a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$  t.q.  $a_n \rightarrow x_0$  et  $b_n \rightarrow x_0$  mais :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  n'existe pas.

**Ex Corollaire 4.2.4 :** Prenons  $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ ,  $x_0 = 0$ .  $D(f) = \mathbb{R}^*$ , donc  $f$  est définie au voisinage de  $x_0 = 0$ . En effet :

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \rightarrow 0$$

Mais :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1 \end{aligned}$$

**Remarque 4.2.5 :** On aurait aussi pu considérer la suite :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) &= \cos(\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \quad \text{qui n'existe pas} \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$  n'existe pas.

#### Propriété 4.2.6 (Limites de fonctions).

Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  définies au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$  et telles que :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existent. Alors :

$$1) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2, \text{ alors } l_1 = l_2 \quad (\text{Unicité de la limite})$$

$$2) \forall p, q \in \mathbb{R} \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p \cdot f(x) + q \cdot g(x) = p \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + q \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$4) \text{ Si } f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ alors :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$5) \text{ Si } h : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ est telle que } f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ et si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l, \text{ alors :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

*Démonstration.* Théorème des deux gendarmes

□

## 4.3 Calculs de limites

Concidérons pour ces exemples  $u \in \mathbb{R}$ .

- 0)  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$  où  $c$  est une constante.

*Démonstration.* Soit  $a_n \rightarrow u$ . On a  $f(a_n) = c \rightarrow c$

$$\lim_{x \rightarrow u} x = u \quad (f(x) = x)$$

*Démonstration.* Soit  $a_n \rightarrow u$ . On a  $f(a_n) = a_n \rightarrow u$

- 1) **Polynômes** Exemple (par produit) :

$$\lim_{x \rightarrow u} x^2 = \lim_{x \rightarrow u} (x \cdot x) = \left( \lim_{x \rightarrow u} x \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow u} x \right) = u \cdot u = u^2$$

Par récurrence, on montre que  $\lim_{x \rightarrow u} x^n = u^n$ .

*Preuve rapide. Init.* ( $n = 0$ ) :  $\lim_{x \rightarrow u} 1 = 1$ .

**Héritage** :  $\lim_{x \rightarrow u} x^{n+1} = \lim_{x \rightarrow u} (x^n \cdot x) = (\lim_{x \rightarrow u} x^n) \cdot (\lim_{x \rightarrow u} x) = u^n \cdot u = u^{n+1}$ .  $\square$

Donc pour  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} P(x) = P(u)$$

- 2) **Fonctions rationnelles** :  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Si  $Q(u) \neq 0$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} Q(x) = Q(u) \quad (\text{Point 1})$$

Donc par la propriété 4, on a :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \frac{P(u)}{Q(u)}$$

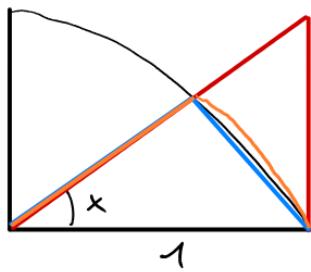
**Ex :** Ainsi on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2}$$

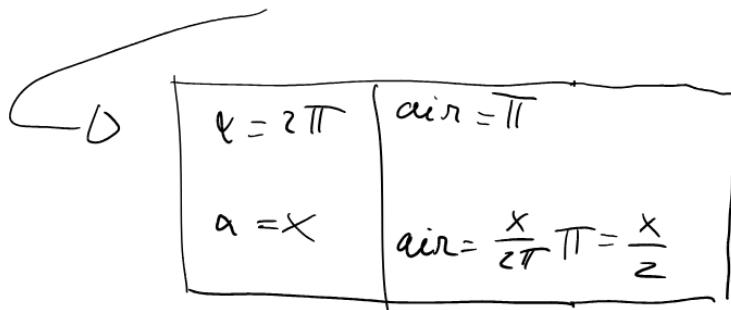
Mais si on a  $Q(u) = 0$ , il faut faire un travail supplémentaire :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$$

- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 1$ . Démonstration imagée.



$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2 \cos(x)}$$



Le triangle bleu est plus petit ou égal au triangle orange lui-même plus petit que le rouge.  
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{2} &\leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \\ \Rightarrow \sin x &\leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\ \Rightarrow \frac{\sin x}{x} &\leq 1 \leq \frac{1}{\cos x} \\ \Rightarrow \frac{\sin x \cos x}{x} &\leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Finalement, comme  $\cos x \in [0, 1]$  on a :

$$\cos x \geq \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \geq 1 - x^2$$

Donc

$$\cos x \geq 1 - x^2$$

On a alors la chaîne d'inégalités :

$$1 - x^2 \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Ceci est valable pour  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , car toutes les fonctions sont paires.

Par le théorème des deux gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

**Ex :** On peut alors voir :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 1 \cdot 0 = 0$$

**Propriété 4.3.1 (Limites de fonctions composées / changement de variable)**. Soient  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \in \mathbb{R}$$

$$3) f(x) \neq b \text{ au voisinage de } a$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

*Preuve à l'aide des suites.* Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{a\}$  t.q.  $x_n \rightarrow a$ . On pose  $y_n = f(x_n)$ . Alors  $y_n \rightarrow b$  (par 1) et  $y_n \neq b$  pour  $n$  assez grand (par 3)  $\implies (y_n) \subset B \setminus \{b\}$  et  $y_n \rightarrow b \implies g(y_n) \rightarrow c$  (par 2)

□

**Ex 1 :** Soit  $f(x) = x^{12} - 1$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x^{12} - 1)$  vérifie 1 et 2 de la propriété au voisinage de 1 (dés que  $x \neq \pm 1$ ).

**Ex 2 :** On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 + \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{3 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2}{3 + y^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Attention : La condition 3 est indispensable, regardons un cas où elle n'est pas vérifiée.

**Ex 3 :**  $f(x) = 3$  (constante) et  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} g(3) = 0$ .

Mais : on ne peut pas utiliser la prop car  $f(x) = 3$  dans le voisinage de 0. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq \lim_{y \rightarrow 3} g(y) = \lim_{y \rightarrow 3} 2 \neq 0$$

**Propriété 4.3.2 (Limites de réciproques).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone. Soit  $u \in [a, b]$  et  $v = f(u)$ . Alors  $f([a, b]) \rightarrow Im(f)$  est bij, et si  $f^{-1}(Im(f)) \rightarrow [a, b]$  est def au vois de  $v$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(v) = u$$

**Corollaire 4.3.3 :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$

*Démonstration.* On pose  $f(x) = x^n$ , strictement croissante sur  $[a, b] \forall b \geq 0$ . Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow u} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$$

□

## 4.4 Lim à gauche/droite, limites infinies

**Définition 4.4.1.** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de  $u \in \mathbb{R}$ , c'est à dire  $[u - d, u[ \subseteq D$  pour tout  $d > 0$  (resp.  $]u, u + d] \subseteq D \forall d > 0$ ).

Alors  $f$  admet  $l \in \mathbb{R}$  pour limite à gauche (resp. à droite) lorsque  $x \rightarrow u$ , si, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in D \setminus \{u\}$ , on a  $x \in [u - \delta, u[$  (resp.  $x \in ]u, u + \delta]$ ) :

$$\implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

**Notation :** limites à gauche :  $\lim_{x \rightarrow u^-}$ , limite à droite :  $\lim_{x \rightarrow u^+}$

**Ex :**  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ . Il faut séparer les cas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

Donc :  $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} -1 = \lim_{x \rightarrow x^-} -1 = -1$  et  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x^+} 1 = 1$ .

**Propriété 4.4.2 (Limites gauche droite).** Si  $f$  est def au voisinage de  $u$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow u^+} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) = l$$

**Remarque 4.4.3 :** Cela montre que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{|x|}{x}$  n'existe pas.

**Définition 4.4.4.** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  def au voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) c'est à dire  $[a, +\infty[ \subseteq D$  pour un  $a \in \mathbb{R}$  (resp.  $] -\infty, a] \subseteq D$ ).

Alors  $f(x)$  admet  $l \in \mathbb{R}$  comme limite lorsque  $x \rightarrow +\infty$  (resp.  $x \rightarrow -\infty$ ) si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in D$  on a :

$$x \geq c \text{ (resp. } x \leq c) \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

**Notation :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ou  $f(x) \rightarrow l$

**Ex :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

*Preuve avec epsilon.* Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose comme  $c = \frac{1}{\varepsilon}$ . Alors dès que  $x \geq c$  on a :

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{c} \leq \varepsilon$$

Comme  $\varepsilon$  était arbitraire, on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in D, x \geq c \implies |f(x) - 0| \leq \varepsilon$$

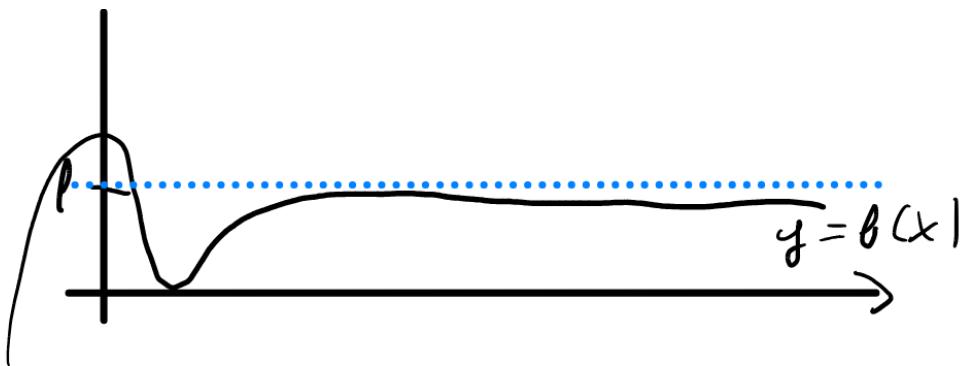
□

*Preuve avec les suites.* Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite t.q.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Comme  $(x_n)$  était arbitraire, c'est vrai pour toute suite. On a donc montré que  $\forall (x_n) \rightarrow +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$

**Remarque 4.4.5 :**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \iff f(x)$  a une asymptote horizontale d'équation  $y = l$



**Définition 4.4.6 (Divergence vers l'infini).** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $u \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(x)$  tends vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) lorsque  $x \rightarrow u$  si pour tout  $A \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$  tel que  $\forall x \in D \setminus \{u\}$  on a :

$$|x - u| \leq \delta \iff f(x) \geq A \quad (\text{resp. } f(x) \leq A)$$

**Notation :**  $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) ou  $f(x) \rightarrow +\infty$  (resp.  $-\infty$ )

**Ex :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

*Preuve avec epsilon.* Soit  $A \in \mathbb{R}$ . On pose  $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$  (ou  $\delta = 1$  si  $A < 0$ ). Alors dès que  $|x - 0| \leq \delta$ , on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2} = A$$

Comme  $A$  était arbitraire, c'est bon.

□

**Remarque 4.4.7 :**

- On peut combiner ces limites généralisées. Par exemple :

$$\lim_{c \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow u^\pm} f(x) = \pm\infty \iff f(x)$  admet une asymptote verticale d'eq  $x = u$
- Les propriétés algébriques, le théorème des gendarmes, les limites de composées et réciproques, ainsi que les calculs avec  $+\infty$  valable pour les suites restent vrais pour ces limites généralisées.
- Attention aux formes indéterminées :
  - $+\infty - +\infty$
  - $0 \cdot +\infty$
  - $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
  - $\frac{0}{0}$

**Ex :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = \infty$$

## 4.5 Fonctions continues

**Définition 4.5.1 .** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $u \in \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est continues en  $x = u$  si :

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$$

**Remarque 4.5.2 (Concéquences de la continuité) :** Cela implique trois choses :

- 1) Si  $u \in D$ , alors  $f$  est définie au voisinage de  $u$  et en  $u$ .
- 2) la limite  $\lim_{x \rightarrow u} f(x)$  existe dans  $\mathbb{R}$
- 3) tout  $f(u) \in \mathbb{R}$

**Ex 1 :** Les polynômes, les fonctions rationnelles,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sin x$  (toutes les fonction trigo),  $e^x$ ,  $\log x$  etc... sont continues sur leur domaine.

**Ex 2 :**  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$  est continues pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . On voit que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2^2 + 1}{2 - 1} = 5 = f(2)$$

Mais  $1 \notin D \implies f$  n'est pas continue en  $x = 1$ .

**Remarque 4.5.3 :** Si  $f$  est continue en  $u \in \mathbb{R}$  et si  $a_n \rightarrow u$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(u)$$

**Définition 4.5.4 .** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage à droite et à gauche de  $u \in \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est

continue à droite en  $x = u$  si :  $\lim_{x \downarrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u^+} f(x) = f(u)$   
 continue à gauche en  $x = u$  si :  $\lim_{x \uparrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) = f(u)$

**Ex :**  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f$  est continue en tout  $x \neq 0$ . En  $x = 0$  on a :

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \downarrow 0} (2x + 1) = 1 = f(0)$$

Donc  $f$  est continue à gauche et à droite, donc continue en  $x = 0$  donc continue sur  $\mathbb{R}$

**Propriété 4.5.5 (Opérations sur les fonctions continues) .** Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $u$  alors  $(f + g)$ ,  $(f \cdot g)$ ,  $(\alpha f + \beta g)$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)$  (si  $g(u) \neq 0$ ) sont aussi continues.

De plus, si  $f$  est continue en  $u$  et  $g$  continue en  $f(u)$ , alors  $(f \circ g)(x)$  est continue en  $u$ .

**Ex :**  $\frac{\sin(x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{x^2 + 5 + \cos(x)}}$  est continue sur tout  $\mathbb{R}$

**Définition 4.5.6 (Prolongement par continuité) .** Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est définie au voisinage de  $u$  avec  $u \notin \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = l \in \mathbb{R}$  alors, le prolongement par continuité de  $f$  est :

$$\hat{f} : D \cup \{u\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq u \\ l & \text{si } x = u \end{cases}$$

**Ex 1 :**  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$\hat{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On appelle cette fonction  $\text{sinc}(x)$

**Ex 2 :** A l'inverse  $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  ne peut pas être prolongée par continuité en  $x = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'existe pas.

**Définition 4.5.7 (Fonction continues sur un intervalle)**. Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue (jusqu'au bord) si :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$  pour tout  $u \in [a, b]$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  ( $f$  est continue à droite en  $x = b$ )
- 3)  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$  ( $f$  est continue à gauche en  $x = b$ )

De manière analogue :

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1 + 2
$]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1 + 3
$]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue	si 1

**Théorème 4.5.8 (Valeur moyenne – TVI)**. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors :

$$f([a, b]) = \left[ \inf_{x \in [a, b]} f(x), \sup_{x \in [a, b]} f(x) \right]$$

**Remarque 4.5.9 (TVI)** : Cela veut dire que  $f$  atteint :

- Son inf est son minimum :

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Son sup est son maximum :

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

- Toutes les valeurs intermédiaires.

Le min et max n'est pas  $\pm\infty$ . De plus,  $f([a, b])$  est un intervalle fermé.

*Preuve de la remarque.* Posons  $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup(f([a, b]))$ . On sait qu'il existe une suite  $(y_n) \in f([a, b])$  tel que  $y_n \rightarrow s$ . Ainsi

$$\begin{aligned} & f(x_n) && x_n \in [a, b] \\ \implies & \exists (x_{n_k}) \text{ une sous suite de } (x_n) \text{ t.q. } x_{n_k} \rightarrow u \in [a, b] \\ \implies & f(u) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = s \end{aligned}$$

□

**Ex :** L'équation  $\cos(x) = x$  possède une solution  $x_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

On pose  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue. On a  $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 \geq 0$  et  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} < 0$ . Par le théorème de la valeur moyenne, il existe  $x_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $f(x_0) = 0$ .

$$\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \leq 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[ \underbrace{\min_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} f(x)}_{x < 0}, \underbrace{\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} f(x)}_{x > 0} \right]$$

Ainsi, il existe  $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  tel que  $f(x_0) = 0 \iff \cos(x_0) = x_0$

**Corollaire 4.5.10 (TVI – 1) :** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et que  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$  (ou l'inverse), alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que  $f(u) = 0$

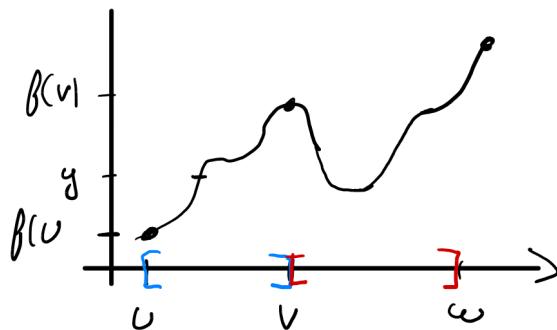
**Corollaire 4.5.11 (TVI – 2) :** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, où  $I$  est un intervalle, alors  $\mathfrak{F}(f) = f(I)$  est aussi un intervalle.

**Corollaire 4.5.12 (TVI – 3) :** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est strictement monotone.

*Preuve du corrolaire 4.5.12.*  $\Leftarrow$  cf. Chap 0.

$\Rightarrow$  Supposons que  $f$  n'est pas strictement monotone :

$$\exists u < v < w \text{ tel que } f(u) < f(v) > f(w)$$



Ainsi,  $f(x_1) = y = f(x_2)$ , ce n'est donc pas injectif. □

# Chapitre 5

## Dérivées

### 5.1 Définitions et exemples

**Définition 5.1.1 (Dérivée)** . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage  $x_0$  ou en  $x_0$ . Alors  $f$  est dérivable ou différentiable en  $x_0$  si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe ( $\in \mathbb{R}$ ).

**Notation :**

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = \mathcal{D}_x f(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

On dit :

- $f'(x_0)$  est la dérivée de  $f$  en  $x_0$
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable si elle est dérivable en tout  $x_0 \in D$ .

**Remarque 5.1.2 :** Le nombre  $f'(x_0)$  est la pentes de la tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $(x_0, f(x_0))$ .

**Ex :**

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

**Définition 5.1.3 (La fonction dérivée)** . La fonction dérivée d'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction  $f' : D(f(x)) \rightarrow \mathbb{R}$  où  $D(f') = \{x \in D | f \text{ est dérivable en } x\}$

$$x \mapsto f'(x)$$

**Ex 1 :**  $f(x) = x^2$ . On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2 \cdot x_0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f(x) = x^2$  est dérivable pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sa dérivée est  $f'(x) = 2x$ .

**Ex 2 :**  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ \implies \underbrace{-h}_{\rightarrow 0} &= \frac{1 - h^2 - 1}{h} \geq \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} \geq \frac{0}{h} = \underbrace{0}_{\rightarrow 0} \\ \implies \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

$\sin$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\sin'(x) = \cos(x)$ . De manière analogue :  $\cos'(x) = -\sin(x)$ <sup>2</sup>

**Proposition 5.1.4 :** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  est aussi continue en  $x_0$
- 2)  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{équation de la tangente}} + \underbrace{(\mathbf{x} - x_0) \cdot \varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

où  $\varepsilon(x)$  est une fonction tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ . Le **reste** tend plus vite vers 0 que  $x - x_0$

Preuve de la proposition.

- 1) On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

- 2) Poser  $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$  et calculer la limite lorsque  $x \rightarrow x_0$

□

**Remarque 5.1.5 :**  $f$  continues  $\Rightarrow$   $f$  dérivable.

**Ex :**  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ . Alors  $f$  est continue en 0 mais on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \uparrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

Ainsi, la limite n'existe pas, donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Propriété 5.1.6 (Opérations algébriques)**. Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en  $x_0 \in D$ . Alors :

- 1)  $(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = p \cdot f'(x_0) + q \cdot g'(x_0)$
- 2)  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- 3)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}, \text{ si } g(x_0) \neq 0$

**Propriété 5.1.7 (Dérivées de fonction usuelles)**.

- 0)  $f(x) = c \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0$
- 1)  $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$  pour  $\mathbb{N}^*$

*Preuve.* Par récurrence sur  $n$ .

- $n = 1$  :  $f(x) = x$ ,  $f'(x) = 1$ .
- Supposons vrai pour  $n$ , montrons pour  $n + 1$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{n+1} = x^n \cdot x \\ f'(x) &\stackrel{\text{Prop 2)}}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

□

- 2)  $\sin'(x) = \cos(x)$ ,  $\cos'(x) = -\sin(x)$  et

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \stackrel{\text{Prop 3)}}{=} \frac{\sin'(x)\cos - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \dots = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ ou } 1 + \tan^2(x)$$

- 3)  $f(x) = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$

$$\implies f(x) = \frac{1}{x^n} \stackrel{\text{Prop 3)}}{=} f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

**Propriété 5.1.8 (Dérivées de composées)**. Soient  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , deux fonctions telles que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ . Alors :

$$\begin{aligned} (g(f(x_0)))' &= (g \circ f)'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Dérivée interne}} \end{aligned}$$

Preuve de la propriété 5.1.8. Le quotient est

$$\frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En prenant la limite lorsque  $h \rightarrow 0$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Propriété 5.1.9 (Dérivées des réciproques).** Soit  $f : A \rightarrow B$  bijective et dérivable sur  $A$ , un intervalle ouvert. Si  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in A$ , alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Preuve de la propriété 5.1.9. On admet que  $f^{-1}$  est dérivable sur tout  $B$ . On dérive l'équation  $f(f^{-1}(x)) = x$  des deux cotés :

$$\begin{aligned} x = (f \circ f^{-1})(x) &\iff 1 = f(f^{-1}(x))' \stackrel{\text{Prop 5.1.8}}{=} f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) \\ &\iff \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = (f^{-1})'(x) \end{aligned}$$

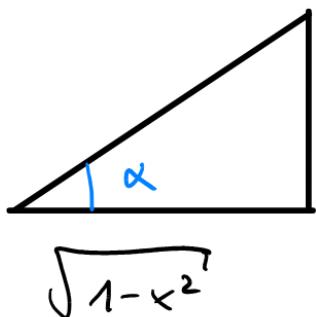
$\square$

**Ex 1 :**  $f(x) = \sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$  où  $f(x) = x^n$ , où  $x > 0$

$$\begin{aligned} x = f(g(x)) &= (\sqrt[n]{x})^n \\ &\implies 1 = n(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot (\sqrt[n]{x})' \\ &\implies (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

On montre de manière analogue que  $(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$  pour tout  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  et on verra que c'est aussi vrai pour tout réel.

**Ex 2 :**  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ ,  $x \in ]-1, 1[$ , car  $f = \sin(x)$ , donc  $f'(x) = \cos(x)$



$$\begin{aligned} &\times \cos(\arcsin(x)) \\ &= \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \end{aligned}$$

$$\implies \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Définition 5.1.10 .**  $\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  est la dérivée à droite, si  $h \uparrow 0$ , c'est la dérivée à gauche.

**Propriété 5.1.11 .**  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si les deux dérivées latérales existent ( $\in \mathbb{R}$ ) et sont égales.

**Ex 1 :**  $f(x) = |x|$ . On a :

$$f'_{\text{droite}}(0) = 1 \neq -1 = f'_{\text{gauche}}(0)$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Ex 2 :**  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f'(0)$  n'existe pas car  $\notin \mathbb{R}$ , mais les deux dérivées latérales sont égales à  $+\infty$ .

**Définition 5.1.12 (Dérivée d'ordre supérieur) .** La dérivée seconde de  $f$  est

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$$

La dérivée d'ordre n de  $f$  est définie par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

**Définition 5.1.13 (Classes de fonctions dérивables) .** Soit  $I$  un intervalle. Alors

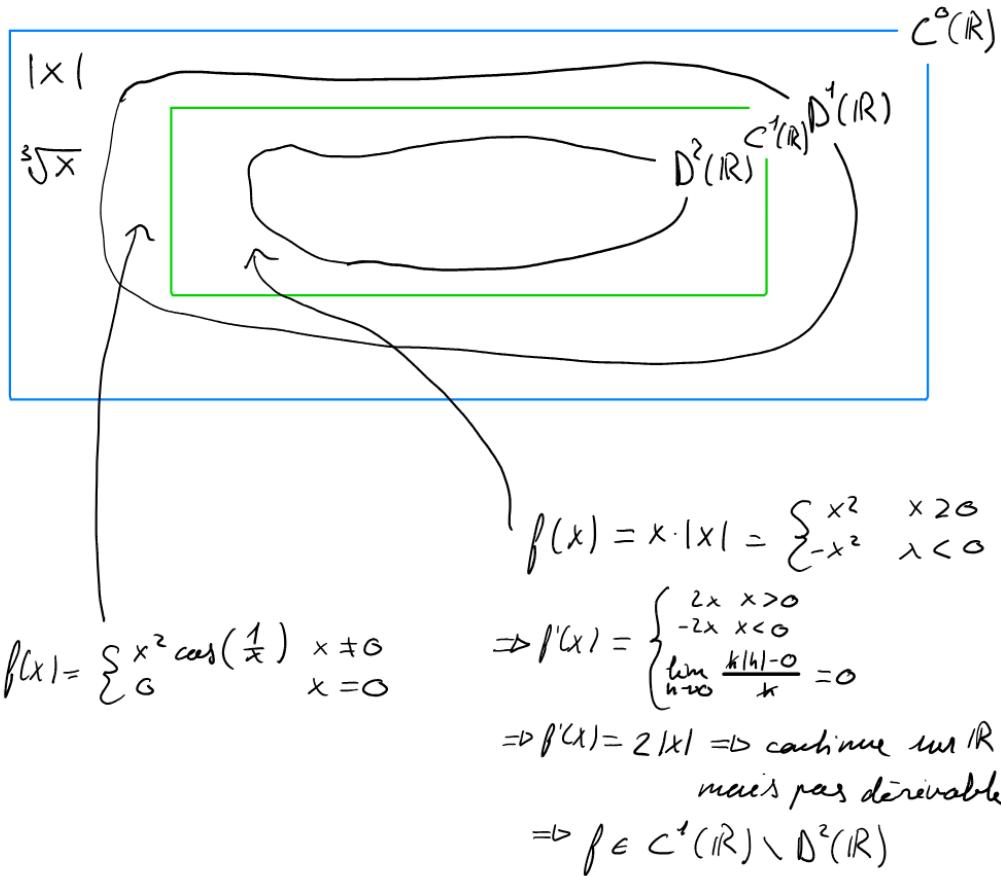
$$D^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}$$

$$C^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur et } f^{(n)} \text{ est continue sur } I\}$$

On pose  $C^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ .

**Remarque 5.1.14 :**

- $C^0(I)$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ .
- Les fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, rationnelles sont dans  $C^\infty$  sur leur domaine de définition.
- $C^0(I) \supseteq D^1(I) \supseteq C^1(I) \supseteq D^2(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \dots D^\infty \supseteq C^\infty$



**Remarque 5.1.15 :**

- $x^n |x|$  est dans  $C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$

- $x|x| \in C^\infty([0, +\infty[)$   
 $\in C^\infty(]-\infty, 0[)$

**Ex  $D^1 \setminus C^1$  :** On a  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . Alors

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0$$

et

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

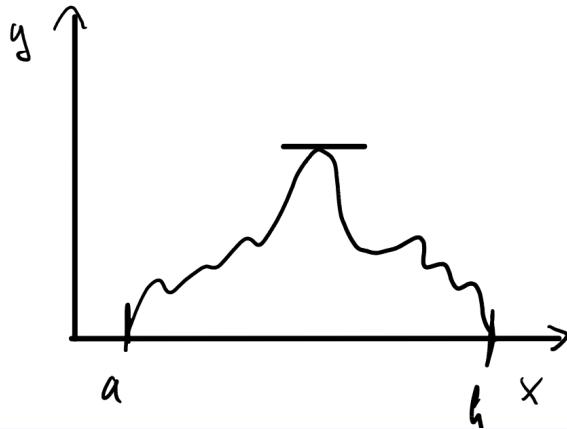
donc  $f(x)$  appartient à  $D^1(\mathbb{R})$ . Cependant,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

donc  $f'(x)$  n'est pas continue en 0. Donc  $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$ .

## 5.2 Dérivée et croissance

**Théorème 5.2.1 (Théorème de Rolle).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose que  $f(a) = 0 = f(b)$ . Alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que  $f'(u) = 0$ .



*Preuve par le TVI.* Par le TVI (4.5.8),  $f$  atteint son max  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ , on le suppose supérieur à 0. Alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que :

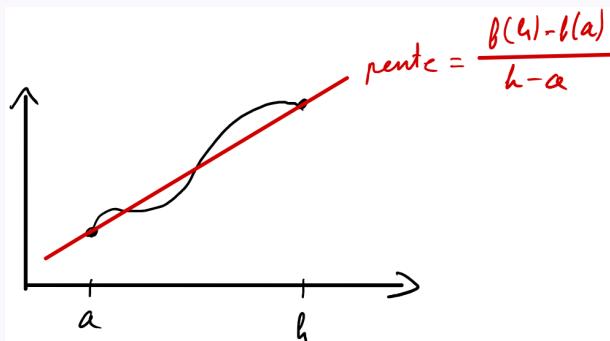
$$f(u) = M \implies f'(u) = f'_{\text{droite}}(u) = \lim_{x \rightarrow u^+} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq 0$$

et     $f'(u) = f'_{\text{gauche}}(u) = \lim_{x \rightarrow u^-} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq 0$

Donc  $f'(u) = 0$ .  $\square$

**Théorème 5.2.2 (Théorème des accroissements finis – TAF).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que :

$$f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



*Preuve.* En exercice.  $\square$

**Propriété 5.2.3 (Application du TAF (5.2.2)) .** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

- 1) Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est constante sur  $[a, b]$ .

*Preuve.* Le sens " $\Leftarrow$ " est évident. Pour le sens " $\Rightarrow$ ", si  $f$  n'est pas constante, on trouve  $c, d \in [a, b]$  tels que  $c < d$  et  $f(c) \neq f(d)$ . Par le TAF,  $\exists u \in ]c, d[$  tel que

$$f'(u) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$$

ce qui est une contradiction.  $\square$

- 2) Si  $g : [a, b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$  dérivable sur  $]a, b[$  et  $f'(x) = g'(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f(x) = g(x) + c$  pour un certain  $c \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in [a, b]$ .
- 3) Si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ .
- 4) Si  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est décroissante sur  $[a, b]$ .
- 5) Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$ .
- 6) Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $[a, b]$ .

**Remarque 5.2.4 :** Attention au point 5 et 6, la réciproques est en général fausse. Par exemple,  $f(x) = x^3$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  mais  $f'(0) = 0$ .

### 5.2.1 La fonction exponentielle (et logarithmes)

**Théorème 5.2.5 .** Il existe une unique fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \quad f(0) &= 1 \end{aligned}$$

*Preuve.* La preuve de l'existence se fera plus tard.

Pour l'unicité, la preuve se fait en deux étapes :

- 1)  $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . On pose  $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$ . On calcule la dérivée de  $h$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot \underbrace{f'(-x)}_{=f(-x)}(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $h$  est constante! Comme  $h(0) = f(0) \cdot f(0) = 1$ , on a

$$h(x) = \underbrace{f(x) \cdot f(-x)}_{\neq 0} = 1$$

- 2) **Unicité :** Soit  $g(x)$  une (autre) fonction telle que  $g'(x) = g(x)$  et  $g(0) = 1$ . On pose

$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ . On calcule  $h'(x)$  :

$$h'(x) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2} = \frac{g \cdot f - g \cdot f}{f^2} = 0$$

Donc  $h$  est constante. Comme  $h(0) = \frac{1}{1} = 1$  on a que  $h(x) = 1 = \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \implies g(x) = f(x)$

□

**Définition 5.2.6 (Fonction exponentielle)** . Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle, notée  $\exp(x)$  (et plus tard  $e^x$ ).

**Propriété 5.2.7 ( $\exp(x)$ ) .**

1)  $\exp'(x) = \exp(x)$  et  $\exp(0) = 1$  nous donne

$$\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$$

2)  $\exp(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  et  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

3) la fonction exponentielle est strictement croissante

4)  $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 0$

*Preuve.*  $\exp(x) \geq x$ . En effet, si  $g(x) = \exp(x) - x$ , on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp(x) - 1 > 0 (x > 0) \\ \implies g &\text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[ \end{aligned}$$

Comme  $g(0) = 1$ , donc  $g(x) \geq 0$

□

6)  $\exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Ainsi :  $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$  et

$$\exp(n) = e^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus  $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$  et on vérifie que  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Donc :

$$\exp\left(\frac{p}{q} = e^{\frac{p}{q}}\right) \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

**Définition 5.2.8 .** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose que

$$e^x = \exp(x)$$

**Remarque 5.2.9 :** La fonction exponentielle est

- injective (car strictement croissante)
- surjective (coréstraines à  $]0, +\infty[$ )

Donc  $\exp(x)$  est bijective !

**Définition 5.2.10 (Logarithme) .** Le logarithme est la réciproque que la fonction exponentielle. Donc :

$$\begin{aligned} \log : ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

**Propriété 5.2.11 (Logarithme) .**

1)  $\mathcal{D}(\log) = ]0, +\infty[$  et  $\mathfrak{F}(\log) = \mathbb{R}$ .

2)  $\log(1) = 0$ . On a :

$$\begin{aligned} x &= \exp(\ln(x)) \\ \iff 1 &= \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = x \ln'(x) \\ \implies \ln'(x) &= \frac{1}{x} \\ \implies \ln &\in C^\infty (]0, +\infty[) \end{aligned}$$

3)  $\log$  est strictement croissante.

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$ .

**Définition 5.2.12 (Autres bases) .** Pour  $a \in \mathbb{R} > 0$

$$\begin{aligned} \exp_a(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x) = a^x \\ \log_a(x) &= \text{réciproque} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

**Remarque 5.2.13 :** Pour  $x, u \in \mathbb{R}$  et  $x > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} x^u &= \exp(\log(x) \cdot u) \\ \implies (x^u)' &= \exp(\log(x) \cdot u) \cdot (\log(x) \cdot u)' = ux^{u-1} \end{aligned}$$

**Définition 5.2.14 (Fonctions trigonométriques hyperboliques)**. On définit :

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\end{aligned}$$

**Théorème 5.2.15 (Règle de Bernouilli-l'Hospital)**. Soit  $x_0$  et  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $A = [x_0 - d, x_0 + d] \setminus \{x_0\}$  est un voisinage de  $x_0$ . Si :

- 1)  $\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$
  - 2)  $\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
- Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

*Preuve.* En exercices (Application du TAF) □

**Remarque 5.2.16 :** Ce théorème marche aussi pour limite à droite et à gauche.

**Ex 1 :** Grâce à l'Hostpital, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

**Ex 2 :**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log(x)} &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} px^p = \begin{cases} +\infty & p > 0 \\ 0 & p \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Cela montre que  $\log(x)$  croît moins vite que tout polynôme (de degré supérieur à 0).

**Ex 3 :**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\log(\cos(2x) \cdot 3)}{x^2}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{\cos(2x)} \cdot \frac{-\sin(2x)}{2x} \cdot 2\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{3}{\cos(0)} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin(y)}{y} \cdot 2\right) \\ &= \exp(-6) = e^{-6}\end{aligned}$$

**Remarque 5.2.17 : Attention** : Si la limite du quotient des dérivées n'existe pas ( $\notin \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ), alors B-H ne marche pas.

**Propriété 5.2.18 (Fonctions  $\in C^1$  par morceaux)**. Soient  $f, g \in C^1(I = \text{intervalle})$  et  $x_0 \in I$ . On suppose que  $f(x_0) = g(x_0)$ , et on pose

$$\begin{aligned} h : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors  $h$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f'(x_0) = g'(x_0)$  et dans ce cas,  $h \in C^1(I)$ .

*Preuve.* On calcule

$$\begin{aligned} h'_{\text{gauche}}(x_0) &\stackrel{x \leq x_0}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{def de } h}{=} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Similaire pour  $h'_{\text{droite}}(x_0) = g'(x_0)$ . La limites à gauche et à droite coïncident si et seulement si  $f'(x_0) = g'(x_0)$ . Dans ce cas, on a :

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \leq 0 \\ g'(x) & x \geq 0 \end{cases} \implies h' \text{ est continue en } x_0$$

Dans ce cas,  $h'$  est continue sur  $I$  ( $h \in C^1$ ) □

**Remarque 5.2.19 :** Cette propriété peut être utilisée récursivement

- La preuve montre :  $f'_{\text{gauche}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$   
 $f'_{\text{droite}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$

si les limites existent

**Ex :** Soit  $f(x) = \begin{cases} \sinh(x) & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$ . Alors :

- $f$  est continue en 0 car  $\sinh(0) = 0 = \sin(0)$
- de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , car  $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$  et  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\in C^2$  car  $\sinh''(0) = \sinh(0) = 0 = -\sin(0) = \sin''(0)$
- $\notin C^3$  car  $\sinh'''(0) = \cosh(0) = 1 \neq \sin'''(0) = -1$

Donc  $f(x) \in C^2(\mathbb{R}) \setminus D^3(\mathbb{R})$

## 5.3 Etude de fonctions

c.f. Slides

### 5.3.1 Applications : convergence de suites définies par récurrence

Une suite définie par récurrence est une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = \text{valeur fixée}$  et  $a_{n+1} = g(a_n)$ , pour une fonction  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Remarque 5.3.1 (Important) :** Si  $(a_n)$  converge, disons  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \\ &\stackrel{g \text{ est cont.}}{=} g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = g(l) \end{aligned}$$

Donc  $l$  est forcément une sol de l'équation  $x = g(x)$ . On supposera en général que  $g(x)$  est continue et même  $C^1$  sur un intervalle.

**Ex :** Soit  $a_0 = \frac{1}{3}$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 = g(a_n)$  où  $g(x) = x^2$ . Condidats pour  $l : x = g(x) = x^2$ , donc  $l = 0$  ou  $l = 1$ . On calcule quelques valeurs :

$$a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{1}{9}, a_2 = \frac{1}{81}, \dots \rightarrow 0$$

En revanche, si  $a_0 = 3$ , on a :

$$(a_n) = (3, 9, 81, 81^2, \dots) \rightarrow +\infty$$

De plus, si  $a_0 = -1$ , alors :

$$(a_n) = (-1, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1$$

Dans un cas simple comme celui-là, on peut montrer par récurrence que :

$$a_n = (a_n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$\begin{cases} a_n \rightarrow 0 & |a_0| < 1 \\ a_n \rightarrow 1 & a_0 = \pm 1 \\ a_n \rightarrow +\infty & |a_0| > 1 \end{cases}$$

Dans le cas général, une étude de la fonction  $g(x)$  peut nous aider. Si

$$a_0 \geq l \text{ et } l \leq g(x) \leq x \quad \forall x \geq l \tag{5.3.1}$$

alors :

- $a_1 = g(a_0) \geq l$ ,  $a_2 = g(a_1) \geq l$ . Par récurrence :  $a_{n+1} = g(a_n) \geq l$ , donc  $a_n \geq l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $(a_n)$  est minorée.

•  $a_1 = g(a_0) \leq a_0 \implies \dots \implies a_{n+1} = g(a_n) \leq a_n$  et par récurrence,  $(a_n)$  est décroissante. Ainsi, dans ce cas  $(a_n)$  converge vers un candidat  $l$  par décroissance minorée.

**Remarque 5.3.2 :** Equation 5.3.1 se généralise

**Théorème 5.3.3 (Récurrence linéaire).** Soit  $(a_n)$  définie par récurrence via

$$a_0 = a, a_{n+1} = g(a_n)$$

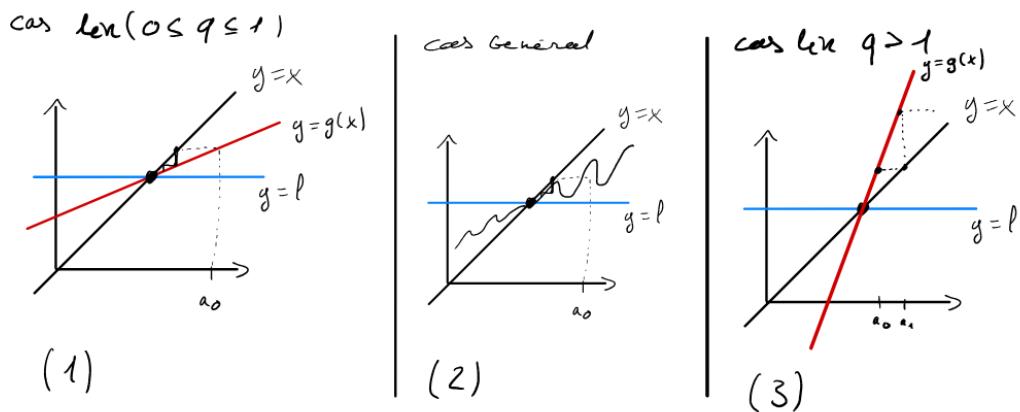
où  $g(x) = qx + b$ , où  $q, b \in \mathbb{R}$  et  $q \neq 1$ . Alors  $(a_n)$  converge vers l'unique solution  $l$  de l'équation  $g(x) = x$  si et seulement si

$$|q| < 1 \quad \text{ou} \quad a_0 = l$$

Donc

$$l \leq g(x) \leq x$$

Démonstration. Illustration :



On voit que dans le cas (1), la fonction converge vers le seul candidat :  $l$ . Dans le cas (2), la fonction converge aussi. Dans le cas (3), la fonction diverge. Si  $q \leq 0$ , on pose

$$b_k = a_{2k}$$

$$c_k = a_{2k+1}$$

Ces suites sont définies par récurrence :  $b_0 = a_0$ ,  $b_{k+1} = a_{2k+2} = g(g(a_{2k})) = h(b_k)$  où  $h(x) = g(g(x)) = g \circ g(x) = g(qx + b) = q^2x + qb + b$ . Pareil pour  $c_n$  :

$$c_0 = a_1, c_{n+1} = g(g(a_{2k+1})) = h(c_k)$$

Si  $-1 < q \leq 0$ , alors,  $0 \leq q^2 < 1$ , donc  $b_k$  et  $c_k$  convergent par le cas précédent vers  $l$ .

Si  $q < -1$ ,  $q^2 > 1$ , donc les suites  $b_n$  et  $c_n$  divergent par le cas précédent, donc  $a_n$  diverge également.  $\square$

**Ex Non linéaire :**  $a_0 = \text{fixé} \in \mathbb{R}^*$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) = g(a_n)$  où  $g(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{3} \right)$ . Les candidats pour  $l$  sont  $x = \sqrt{3}$  ou  $x = -\sqrt{3}$ .

$x$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$3 - x^2$	-	+	+	-
$x$	-	-	+	+
$g(x) - x = \frac{3 - x^2}{2x}$	+	-	+	-
Comparaison	$g(x) > x$	$g(x) < x$	$g(x) > x$	$g(x) < x$

Donc on a

- si  $a_0 \in [\sqrt{3}, +\infty[$ , on a

$$\sqrt{3} \leq g(x) \leq x$$

et  $a_n \rightarrow \sqrt{3}$

- si  $a_0 \in ]0, \sqrt{3}[$ ,  $a_1 = g(a_0) \geq \sqrt{3}$  alors  $a_1$  est dans la région précédente, donc  $a_n \rightarrow \sqrt{3}$

- si  $a_0 < 0$ ,  $a_n \rightarrow -\sqrt{3}$

Donc on conclut que si  $a_0 > 0$ ,  $a_n \rightarrow \sqrt{3}$  et si  $a_0 < 0$ ,  $a_n \rightarrow -\sqrt{3}$ .

## 5.4 Développements limités

Le but est d'approximer une fonction par un polynôme.

**Définition 5.4.1 .** Soit  $f \in C^n(I)$  où  $I$  est un intervalle ouvert et  $x_0 \in I$ . Le polynôme de Taylor de  $f$  d'ordre  $n$  en  $x_0$  est l'unique polynôme  $p(x)$  de degré inférieur ou égal à  $n$  dont les dérivées d'ordre  $x_0$  sont les mêmes que celles de  $f$  jusqu'à l'ordre  $n$ .

**Ex :** Soit  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$ . On a

- $p_1(x) = x$  car  $\sin(0) = 0 = p_1(0)$ ,  $\sin'(0) = 1 = p_1'(0)$ .
- $p_2(x) = x$  car  $\sin''(0) = 0 = p_2''(0)$ .
- $p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$  car  $p_3'(x) = -1 - \frac{3}{6}x^2$ ,  $p_3''(x) = \frac{-6}{6}x$ ,  $p_3'''(x) = -1 = \sin'''(0)$

Ainsi, la formule pour trouver le  $p_n$  polynôme est

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

où  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

**Définition 5.4.2 (Développement limité) .** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$ . Alors,  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$  si

$$f(x) = \text{polynôme de degré } \leq n + \text{reste } r_n(x)$$

pour tout  $x \in I$  où  $r_n(x)$  vérifie

- Pour tout  $c > 0$ ,  $|r_n(x)| \leq c \cdot |x - x_0|^n$  dans un voisinage de  $x_0$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$
- $r_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ , où  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

**Théorème 5.4.3 (Formule de Taylor)**. Soit  $f \in C^n(I)$ , où  $I$  est un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$ . Alors  $f$  admet un  $DL_n$  en  $x_0$  donné par

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

Démonstration. On applique B-H  $n$  fois.  $\square$

**Remarque 5.4.4 :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  ouvert. Alors

- Si  $f$  admet un  $DL_n$ , il est unique.
- Si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $f$  admet un  $DL_0$  en  $x_0$ , de plus l'autre sens en vrai aussi si on suppose que  $\varepsilon(x) = 0$ .
- Si  $f$  est continue en  $x_0$  alors  $f$  admet un  $DL_1$  en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable.

**Ex :** On va voir que  $\sin(x)$  admet un développement limité d'ordre 3 en  $x_0 = 0$  donné par  $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ . La seule chose à montrer est

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) &= 0 \\ \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^2}{x^3} &\stackrel{\text{B-H}}{=} 0 \end{aligned}$$

On a donc que le  $DL_2$  en  $x_0 = 0$  est

$$x + x^2\varepsilon(x)$$

**Remarque 5.4.5 (Estimation du reste) :** On a que

$$|r_n(x)| \leq |f^{(n+1)}(u)| \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n!}$$

pour  $u$  entre  $x$  et  $x_0$ .

### 5.4.1 Applications : Calculs de limites

- Calculons la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$
- $$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{6} + \varepsilon(x) \right) = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

On voit qu'avec un  $DL_1$  ça ne marche pas. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x\varepsilon(x) - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Donc il a fallu prendre un développement limité d'ordre plus grand.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos(x)}{x^4}$ 

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left( x^2 - 2 + 2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x) \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12 + \varepsilon(x)} = \frac{1}{12}$$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(\frac{1}{n})) :$ 

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \left( 1 - \frac{(\frac{1}{n})^2}{2} + \left( \frac{1}{n} \right)^2 \varepsilon(x) \right) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{n})^2}{n} - \left( \frac{1}{n} \right)^2 \varepsilon \left( \frac{1}{n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^2$$

Cette série converge et la série originale aussi, par comparaison.

**Ex Calculs de DL :** Tant qu'on écrit le reste, on peut tout faire.

**Ex :** Le  $DL_2$  en  $x_0 = 0$  de  $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ .

On utilise le  $DL_2$  de  $\sin(x)$  et le  $DL_1$  de  $\cos(x)$ . Donc

$$\begin{aligned} \sin(x)\cos(x) &= (x + x^2\varepsilon(x))(1 + x\varepsilon(x)) \\ &= x + x^2\varepsilon(x) + x^2\varepsilon(x) + x^3\varepsilon(x)\varepsilon(x) \\ &= x + x^2 \left( \underbrace{\varepsilon(x) + \varepsilon(x) + x\varepsilon(x)\varepsilon(x)}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= x + x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

**Ex :** Le  $DL_1$  en  $x_0$  de  $f(x) = e^{\cos(x)}$ . On utiliser les  $DL_1$  de  $\cos(x)$  et  $e^x$ .

$$e^{\cos(x)} = 1 + \cos(x) + \cos(x)\varepsilon \left( \underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1} \right)$$

On voit que  $\varepsilon(x)$  ne tend pas vers 0.

**Solution :** Méthode (i) : il faut réécrire l'expression pour avoir quelque chose qui tend vers 0. Donc :

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e^{1+x\varepsilon(x)} = e \cdot e^{x\varepsilon(x)} \\ &= e(1 + x\varepsilon(x) + x\varepsilon(x)\varepsilon(x\varepsilon(x))) \\ &= e + x(e\varepsilon(x) + e\varepsilon(x) \cdot \varepsilon(x\varepsilon(x))) \end{aligned}$$

Méthode (ii) : Combiner le  $DL_1$  en  $x_0 = 0$  et de  $\cos(x)$  avec le  $DL_1$  en  $x_0 = \cos(0) = 1$  de  $e^x$ . Donc :

$$\begin{aligned} e^x &= e + e(x-1) + (x-1) \underbrace{\tilde{\varepsilon}(x)}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 1} \\ \implies e^{\cos(x)} &= e + e(\cos(x)-1) + (\cos(x)-1)\tilde{\varepsilon}(x) \\ &= e + e(x\varepsilon(x)) + (x\varepsilon(x))\tilde{\varepsilon}(\cos(x)) \\ &= e + x(e\varepsilon(x)) + \varepsilon(x)\tilde{\varepsilon}(\cos(x)) \end{aligned}$$

### 5.4.2 Séries de Taylor

Si  $f \in C^n(I)$ , avec  $I$  un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$ , on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$$

**Question :** si  $f \in C^\infty(I)$ , a-t-on  $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ ? Quand on a  $n \rightarrow \infty$ , il faut que :

- 1) La série converge
- 2) Le reste  $r_n(x) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$

**Définition 5.4.6 (Série de Taylor).** Pour  $f \in C^\infty(I)$  avec  $I$  un intervalle ouvert et  $x_0 \in I$ , la série de Taylor de  $f$  centrée en  $x_0$  est la série

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**Remarque 5.4.7 :**

- Cette série est définie quelque soit  $f \in C^\infty(I)$  (même si  $r_n(x) \neq 0$ )
- Si  $x_0 = 0$ , elle s'appelle aussi série de Maclaurin.
- C'est une série entière! (cf. Chap. 3.3  $\rightsquigarrow$  centre =  $x_0$ , rayon de convergence pas connu)

**Ex 1 :**  $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $x_0 = 0$ . Le  $DL_n$  de  $f$  donne

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$$

Donc la série de Taylor (en  $x_0 = 0$ ) est donc  $\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$ . Cette série converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Il reste à voir que  $\lim_{x \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ . On a :

$$|r_n(x)| \leq f^{(n+1)}(u) \frac{|x|^{n+1}}{n!} = e^u \frac{|x|^{n+1}}{n!} \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{n!} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Car  $\exp$  est strictement croissant et que  $u \in [0, x]$ , donc  $e^u \leq e^{|x|}$ . Le reste tend bien vers 0. Donc  $e^x$  est égale à sa série de Taylor en  $x_0 = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$$

**Remarque 5.4.8 :** En fait,  $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k$

**Ex 2 :** Cela marche aussi pour sin, cos, sinh, cosh !

$$\begin{aligned}\implies \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ \implies \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\end{aligned}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 5.4.9 :** Cela donne enfin une raison pour la formule  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ . En effet

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + i \sin(x)\end{aligned}$$

**Proposition 5.4.10 (Dérivées de série entières) :** Si  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ , alors

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{k+1} (x - x_0)^k$$

et les rayons de convergences sont les mêmes !

**Concéquences de la proposition :**

- On peut définir

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet,  $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$  et

$$\exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x)$$

C'est donc l'unique fonction  $f$  telle que  $f'(x) = f(x)$  et  $f(0) = 1$ .

- Si  $f(x)$  est déjà une série entière, i.e.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ , on dérive :

$$f(x_0) = b_0, f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k-1} \implies f'(x_0) = b_1$$

$$f^{(k)}(x) = b_k \cdot k! \implies b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

**Ex 3 :**  $f(x) = \frac{1}{1-x} \in C^\infty(]-1, 1[)$ . On a vu que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1(x-0)^k \quad \text{si } |x| < 1$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \text{ série de Taylor en } x_0 = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Attention : pour  $x \notin ]-1, 1[$ , la série diverge. Par exemple :

$$f(-10) = \frac{1}{11} \neq \sum_{k=0}^{\infty} (-10)^k$$

**Ex 4 :**  $f(x) = \log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^n \varepsilon(x)$ . Série de Taylor ?  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ . On calcule  $f(x)$  – série de Taylor :

$$\begin{aligned} f(x) - \text{série de Taylor} &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} kx^{k-1} \\ &= \frac{1}{1-(-x)} - \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 0 \quad \text{cf. exemple précédent} \\ \implies \log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k &= C = 0 \\ \implies \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \end{aligned}$$

pour  $x \in ]-1, 1[$ . En  $x = 1$ , on obtient, par prolongement par continuité que :

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

**Ex 5 (Contre exemple) :** On pose  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . On vérifie qu'elle est continue en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

Donc  $f$  est continue en 0. De plus, si  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$  et on calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3} :$

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} e^{-y^2} 2y^3 \\ &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0 \\ \implies f'(0) &= 0 \\ \implies f'(x) &= \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \frac{2}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k \left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

où  $P_k$  est un polynôme. Donc  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  et  $f^{(k+1)}(0) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Ainsi, la série de Taylor de  $f$  en  $x_0 = 0$  est nulle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Cependant,  $f(x) \neq 0$  pour  $x \neq 0$ . Donc  $f$  n'est pas égale à sa série de Taylor en  $x_0 = 0$ . La raison est que le *DL* de  $f$  est

$$f(x) = 0 + x^n \varepsilon(x) = r_n(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$$

**Remarque 5.4.11 :** Prenons  $\sin(x)$  et  $\sin(x) + e^{\frac{-1}{x^2}}$ . Ces deux fonctions ont la même série de Taylor en  $x_0 = 0$ , mais seule  $\sin(x)$  est égale à sa série de Taylor !

# Chapitre 6

## Intégrales

### 6.1 Primitives et intégrales

**Définition 6.1.1 (Primitive)** . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue où  $I$  est intervalle. Une **primitive** de  $f$  est une fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

**Remarque 6.1.2 :** Si  $F, G$  sont deux primitives de la même fonction  $f$ , alors :

$$F(x) - G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Donc  $F$  et  $G$  diffèrent d'une constante : il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in I.$$

**Notation :**  $\int f(x)dx$  est l'ensemble de toutes les primitives de  $f$ . Donc :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

où  $F$  est une primitive de  $f$ . Abus de notation :

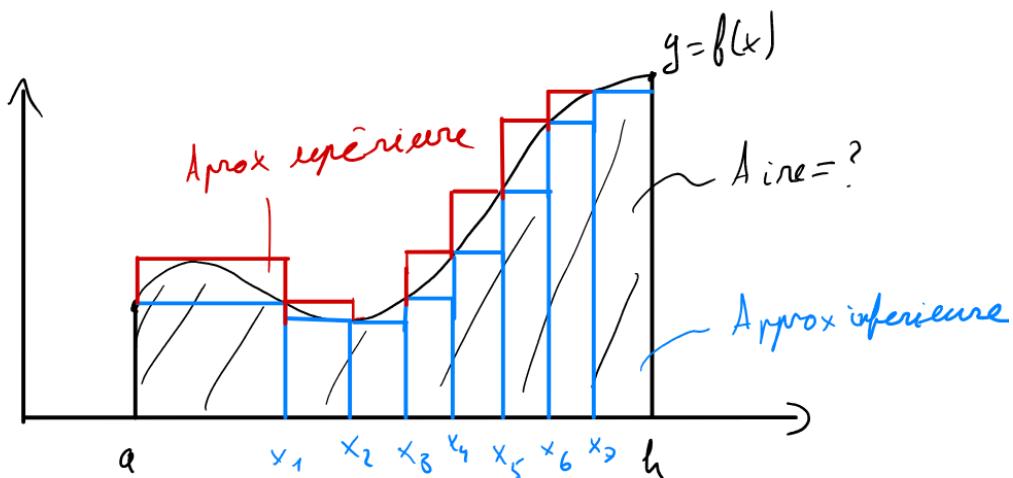
$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

**Remarque 6.1.3 :** L'intégrale  $\int f(x)dx$  s'appelle **intégrale indéfinie** de  $f$ .

Changeons de point de vue, pour  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$x^r$ ( $r \neq -1$ )	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{x}$	$\log x  + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$e^x$	$e^x + C$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$		
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$		

FIGURE 6.1 – Primitives de fonctions de base



Approx 1 (inférieure) :

$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))$$

Approx 2 (supérieure) :

$$\text{Aire} \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))$$

**Définition 6.1.4 (Intégrale de Riemann).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** (au sens de Riemann) si

$$\sup\{\text{Approx 1}\} = \inf\{\text{Approx 2}\} = A \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

Dans ce cas, on parle d'intégrale définie de  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

**Remarque 6.1.5 :** On dit que  $\int_a^b f(x) dx$  donne l'aire signée sous la courbe. Par convention, on dit que  $\int_a^a f(x) dx = 0$  et que  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .

**Théorème 6.1.6 .** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, monotone, bornée et continue partout sauf en un nombre finis de points, alors  $f$  est intégrable (au sens de Riemann) sur  $[a, b]$ .

Preuve. Technique (Ex : monotone) □

**Ex Contre exemple :** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors  $f$  n'est pas intégrable sur  $[0, 1]$ . En effet, pour toute subdivision  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ , on a

$$\text{Approx 1} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

car dans chaque intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  il existe des réels irrationnels. De même,

$$\text{Approx 2} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$$

car dans chaque intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  il existe des rationnels. Donc

$$\sup\{\text{Approx 1}\} = 0 \neq 1 = \inf\{\text{Approx 2}\}$$

et  $f$  n'est pas intégrable au sens de Riemann.

**Remarque 6.1.7 :** Cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue mais ce n'est pas le sujet de ce cours.

**Propriété 6.1.8 (Intégrale de Riemann) .** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrables au sens de Riemann et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$1) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (\text{Linéarité})$$

$$2) \text{ Si } a < u < b, \text{ alors : } \int_a^b f(x) dx = \int_a^u f(x) dx + \int_u^b f(x) dx \quad (\text{Additivité})$$

$$3) \text{ Si } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b], \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (\text{Monotonie})$$

Preuve. Technique, mais :

1) Linéarité :

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \leq \alpha \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \beta \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x)$$

□

**Remarque 6.1.9 :** On peut écrire l'intégrale avec n'importe quelle variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

On a aussi :

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Théorème 6.1.10 (Théorème de la moyenne).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors il existe  $u \in ]a, b[$  tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = f(u) \cdot (b - a)$$

Démonstration. On prend  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq f(x) \leq M = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Donc :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

Ainsi :

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $u \in ]a, b[$  tel que  $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ .  $\square$

**Remarque 6.1.11 :** Donc  $f(u)$  est la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Théorème 6.1.12 (Théorème fondamental du calcul intégrale).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors

1) La fonction  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

2) Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration. **Parie 1 :** On dérive  $G$  :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(u) ((x + h) - x) = f(x)h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{f(u)h}_{\in ]x, x+h[} = \lim_{u \rightarrow x} f(x) \end{aligned}$$

**Partie 2 :** On a  $F(x) = G(x) + c$ , donc :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

**Notation :** On note  $F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

## 6.2 Calculs d'intégrale

**Ex Facile :** On calcule.

$$\begin{aligned} 1) \quad \int_0^\pi \sin(x)dx &= \left[ -\cos(x) \right]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2. \text{ Mais attention : aire signée ! Donc} \\ \int_0^{2\pi} \sin(x)dx &= \left[ -\cos(x) \right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0 \end{aligned}$$

$$2) \quad \int (3x+1)dx = \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

$$3) \quad \int a^x dx = \int e^{\ln(a)x} dx = \frac{1}{\ln(a)}e^{\ln(a)x} + c = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$4) \quad \int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + c \text{ (vérifier en dérivant). Ex :}$$

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$

$$5) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c \text{ (vérifier en dérivant). Ex :}$$

$$\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$6) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

**Propriété 6.2.1 (Changement de variable/substitution)**. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $\varphi : [u, v] \rightarrow [a, b]$  une fonction de la classe  $C$  telle que  $\varphi(u) = a, \varphi(v) = b$ . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

**Remarque 6.2.2 :** Si  $\varphi$  est bijective, alors on peut écrire :

$$F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$$

Donc  $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ .

**Ex :** On pose  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ . En posant :

$$\begin{aligned}\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto \sin(t)\end{aligned}$$

Cette fonction est de classe  $C^1$ ,  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ . Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4} \quad \text{cf exemple précédent}\end{aligned}$$

**Ex indéfinie :** On reprend  $\int \sqrt{1-x^2}$ . On pose :

$$\begin{aligned}\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow [-1, 1] \\ t &\mapsto \sin(t)\end{aligned}$$

$\varphi$  est bijective. Donc :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt &= \int \cos^2(t) dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + c\end{aligned}$$

On évalue en  $t = \arcsin(x)$  :

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

**Remarque 6.2.3 :** On peut aussi exprimer  $t$  en fonction de  $x$ .

**Ex remaeque :** On pose  $\int e^{x^2}dx$ . Donc  $t = x^2$ ,  $\frac{dt}{dx} = 2x$  :

$$\begin{aligned}\int e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + c\end{aligned}$$

Comment bien choisir la substitution ? C'est dur ! Voici quelques exemples :

- $\int e^{x^2}dx : t = x^2$

- $\int \frac{x}{1+x^2}dx, \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3}dx : t = 1+\cos(x)$ , ou  $t = 1+x^2$ . Il faut prendre ce qu'il ya "sous" le dénominateur, ou mieux "dedans dessous".

- $\int \sqrt{1-x^2}dx, \int \sqrt{1+x^2}dx$   
 $x = \sin(t) \quad x = \sinh(t)$

- En cas de forces majeures, pour les fonction rationnelles en sin ou cos comme :

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx, \int \frac{1}{\sin^4(x)}dx$$

on pose

$$t = \tan(x) \text{ donc } \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

ou  $t = \tan(\frac{x}{2})$ , donc  $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ .

**Ex :**  $\int \frac{1}{\sin^4(x)}dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^4(x)}dx &\stackrel{t=\tan(x)}{=} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int t^{-4} + 2t^{-2} + 1 dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + c \\ &= -\frac{1}{3\tan^3(x)} - \frac{1}{\tan(x)} + c \end{aligned}$$

**Ex :**  $\int \frac{1}{\sin(x)}dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin(x)}dx &\stackrel{t=\tan(\frac{x}{2})}{=} \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c \end{aligned}$$

**Propriété 6.2.4 (Intégrale par parties)** . Soit  $f \in C^0([a, b])$  et  $g \in C^1([a, b])$  et  $F$  une primitive de  $f$ . Alors

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Démonstration. On a  $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg$ , donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b (F(x)g(x))' dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

□

**Remarque 6.2.5 :** La preuve montre que c'est pareil pour les intégrales indéfinies.

**Ex 1 :**

$$\int e^x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x(x - 1) + c$$

**Ex 2 :**

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \ln(x) \cdot 1 dx \\ &= \ln(x)x - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x \ln(x) - x + c \\ &= x(\ln(x) - 1) + c \end{aligned}$$

**Ex 3 :**

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \cos^2(x) dx}_I &= \int \cos(x) \cdot \cos(x) dx \\ &= \sin(x) \cos(x) - \int \sin(x) \cdot (-\sin(x)) dx \\ &= \sin(x) \cos(x) + \int \sin^2(x) dx \\ &= \sin(x) \cos(x) + \int 1 dx - \underbrace{\int \cos^2(x) dx}_I \\ &\implies 2I = \sin(x) \cos(x) + x - I \\ &\implies 2I = \sin(x) \cos(x) + x + c \\ &\implies I = \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x) + c \end{aligned}$$

**Ex 4 :** (Intégrale par récurrence)

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx \\ \implies A_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos^{2n-1}(x) dx \\ &= \left[ \sin(x) \cos^{2n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(2n-1) \cos^{2n-2}(x)(-\sin(x)) dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2(n-1)}(x) dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(x) dx - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx \\ &\implies A_n = (2n-1)A_{n-1} - (2n-1)A_n \\ \implies 2nA_n &= (2n-1)A_{n-1} \\ \implies A_n &= \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} \end{aligned}$$

### 6.2.1 Intégration de fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont des fonctions de la forme  $\frac{p(x)}{q(x)}$  où  $p, q$  sont des polynômes. Pour intégrer ces fonctions, on utilise la décomposition en éléments simples.

#### Building blocks

i)  $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$ . Ainsi :

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \int \frac{1}{u} \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \log|ax+b| + c$$

avec  $u = ax + b \implies du = adx \implies dx = \frac{1}{a} du$ .

ii)  $\int \frac{1}{x^k} dx = \int x^{-k} dx = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{x^{1-k}}{1-k} + c$ , ainsi :

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^k} du = \frac{1}{a} \frac{u^{1-k}}{1-k} + c = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{1-k}}{1-k} + c$$

iii)  $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + c$ . Si  $q(x) = ax^2 + bx + c$  est tel que  $\Delta < 0$ , alors on peut "compléter le carré" :

$$q(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right)$$

On pose  $d^2 = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ , donc :

$$= ad^2 \left( \left( \frac{x + \frac{b}{2a}}{d} \right)^2 + 1 \right)$$

On pose  $u = \frac{x + \frac{b}{2a}}{d} \implies du = \frac{1}{d} dx \implies dx = d \cdot du$ , donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx &= \frac{1}{ad^2} \int \frac{1}{u^2+1} d \cdot du \\ &= \frac{1}{ad} \arctan(u) + c = \frac{1}{ad} \arctan \left( \frac{x + \frac{b}{2a}}{d} \right) + c \end{aligned}$$

iv)  $\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = I$ . On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{q(x)} dx \\ &= \frac{1}{2a} \log|ax^2+bx+c| + (iii) + c \end{aligned}$$

v)  $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \int \frac{1}{u^k} du$  avec  $u = ax^2 + bx + c \implies du = (2ax+b)dx$ . Donc :

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

vi)  $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k} dx$ . En exercices.

A l'aide de ces 6 building blocks, on peut intégrer tout  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  avec le décomposition en éléments simples.

### Méthode 1

1) Si  $\deg(p) \geq \deg(q)$ , faire la division polynomiale !

**Ex :** Prenons  $\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1} dx$ . On fait la division polynomiale :

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3(x^4 - x^3 - x + 1)}{x^4 - x^3 - x + 1} dx + \int \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} dx \\ &= \int 3dx + \int \frac{\dots}{q(x)} dx = 3x + \int \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} dx \end{aligned}$$

2) Factoriser le dénominateur  $q(x)$  et décomposer. On a  $q(x) = (x-u)^k \cdot (ax^2+bx+c)(x-v)$ . Ainsi on peut écrire :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-u} + \frac{A_2}{(x-u)^2} + \frac{A_k}{(x-u)^k} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

**Ex :**  $q(x) = x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)^2(x^2+x+1)$ . Donc :

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2-2B+C)x^2 + (A_2+B-2C)x + (-A_1+A_2+C)}{x^4 - x^3 - x + 1} \end{aligned}$$

On pose alors le système :

$$\begin{aligned} &\implies \begin{cases} A_1 + B = 3 \\ A_2 - 2B + C = 0 \\ A_2 + B - 2C = 3 \\ -A_1 + A_2 + C = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A_1 = 1 \\ B = 2 \\ A_2 = 3 \\ C = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

3) Intégrer les éléments simples à l'aide des building blocks.

**Ex :**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x-1} dx &= \log|x-1| + c \\ \int \frac{3}{(x-1)^2} dx &= \int 3(x-1)^{-2} dx = \frac{-3}{x-1} + c \\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \log|x^2+x+1| + c\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1} dx = 3x + \log|x-1| - \frac{3}{x-1} + \log|x^2+x+1| + c$$

## 6.3 Intégrale généralisée ou impropre

On sait que si  $f : [a, b] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$  alors l'intégrale est l'aire sous la courbe. On généralise à  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}, f : ]-\infty, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ex :** On pourrait s'intéresser à  $\int_0^1 \log(x) dx$  (qui a une asymptote verticale en  $x = 0$ ). Ou encors  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ .

**Problème :** L'approximation est toujours  $\pm\infty$ .

**Solution :** On restreint à un intervalle fermé, puis on utilise les limites.

**Définition 6.3.1 (Intégrales généralisées).** 1) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , alors :

$$\int_a^{b^-} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx$$

2) Si  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , alors :

$$\int_{a^+}^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx$$

3) Si  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, alors :

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^w f(x) dx + \lim_{v \rightarrow b^-} \int_w^v f(x) dx$$

où  $w \in ]a, b[$  est quelconque.

**Remarque 6.3.2 :** • Ce sont les intégrales généralisées (ou impropre) de  $f$ .

- On dit que l'intégrale converge si la (les!) limites existe(nt) ( $\in \mathbb{R}$ ), et l'intégrale diverge sinon.
- Pour le point 3), on peut montrer que le résultat ne dépend pas du  $w$  choisi.

**Notation :**

$$\int_a^{+\infty^-} = \int_a^{+\infty}, \quad \int_{-\infty^+}^b = \int_{-\infty}^b$$

**Ex 1 :**

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^1 \log(x) dx &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^1 \log(x) dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[ x \log(x) - x \right]_{x=u}^{x=1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 - u \log(u) + u) = -1 + \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\log(u)}{\frac{1}{u}} \\ &\stackrel{\text{B-H}}{=} -1 + \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -1 \end{aligned}$$

**Ex 2 :**

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (1 - e^{-u}) = 1 \end{aligned}$$

**Ex 3 :** Pour  $r > 0$ , on a  $\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r < 1 \\ +\infty & r \geq 1 \end{cases}$ . Aussi  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r > 1 \\ +\infty & r \leq 1 \end{cases}$ .

Exemple :

$$I = \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r} dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^1 \frac{1}{x^r} dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} \begin{cases} (-\log(u)) = +\infty & r = 1 \\ \left[ \frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1} & r \neq 1 \end{cases}$$

Calculons  $\left[ \frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1}$  :

$$\left[ \frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_{x=u}^{x=1} = \frac{1}{1-r} + \frac{1}{r-1} \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{1-r}$$

Et ceci diverge si  $r > 1$  et converge vers  $\frac{1}{1-r}$  si  $r < 1$

$$\implies I = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & r < 1 \\ +\infty & r \geq 1 \end{cases}$$

**Ex 4 :** On étudie :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ . On coupe en  $w = 0$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left[ \arctan(x) \right]_{x=u}^0 + \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \arctan(x) \right]_0^{x=u} \\ &= \pi \end{aligned}$$

**Remarque 6.3.3 :** Si  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge, i.e. si les deux limites existent, alors cette intégrale vaut :

$$\underbrace{\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(x) dx}_{\text{valeur de cauchy}}$$

**Ex 5 :**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x dx &= \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{+\infty} x dx \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-u^2}{2} + \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v^2}{2}\end{aligned}$$

L'intégrale diverge ! En revanche, sa valeur principale de Cauchy est  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u x dx = 0$ . On voit alors que la valeur principale de Cauchy  $\neq \int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ .

**Propriété 6.3.4 (Comparaison d'intégrales)** . Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Alors :

$$1) \int_a^{b^-} f(x) dx \text{ converge} \iff \int_a^{b^-} g(x) dx \text{ converge.}$$

*Démonstration.* Théorème du gendarme seul ! □

**Ex du 1) :**  $I = \int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$  converge :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt &\stackrel{x=1-t}{=} - \int_1^{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= (2\sqrt{1}) - \lim_{u \rightarrow 0^+} (2\sqrt{u}) = 2 - 0 = 2\end{aligned}$$

qui converge. Donc  $I$  converge par comparaison.

**Propriété 6.3.5 (Comparaison intégrales / séries)** . Soit  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, positive, et décroissante. Alors :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

**⚠ Valeurs pas égales !**

**Ex :** La somme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge  $\iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  converge si et seulement si  $p > 1$ .

**Ex :**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(\log(n))^p}}_u \text{ converge} \iff I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p} dx \text{ converge}$$

Voyons la valeur de l'intégrale indéfinie :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\log(x))^p} dx &\stackrel{du=\frac{1}{x}dx}{=} \int \frac{1}{u^p} du = \begin{cases} \frac{u^{1-p}}{1-p} + c & p \neq 1 \\ \log(u) + c & p = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\log(x)^{1-p}}{1-p} & p \neq 1 \\ \log(\log(x)) & p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \implies I &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p} dx \stackrel{p=1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \log(\log(x)) \right]_x^u = +\infty \\ \implies I &\stackrel{p \neq 1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\log(x)^{1-p}}{1-p} \right]_x^u = c \frac{-\lim_{u \rightarrow +\infty} \log(x)^{1-p}}{1-p} - \frac{\log(2)^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

$I$  converge si et seulement si  $p > 1$ , donc par la propriété 6.3.5

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p} \text{ converge} \iff p > 1$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} &\text{ diverge} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^2} &\text{ converge} \end{aligned}$$