

Complément d'Analyse Fonctionnelle

Paul Lehaut

November 7, 2025

Contents

1 Convergence Faible dans les Espaces de Hilbert	3
1.1 Notions de Topologie Générales	3
1.2 Convergence Faible et Topologie Faible	4
1.3 Compacité Faible des Suites Bornées	4
1.4 Quelques Résultats Essentiels	5
1.5 Convergence Faible dans L^2 et H^1	5
2 Espace de Sobolev	6
2.1 Espace de Sobolev d'Ordre Entier	6
2.2 IPP en Dimension d et Formule de Stokes	7

1 Convergence Faible dans les Espaces de Hilbert

Dans tout ce chapitre \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert.

Définition: Convergence faible dans un espace de Hilbert

Soient $(u_n) \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ et $u \in \mathcal{H}$, on dit que:

- (u_n) converge fortement vers u dans \mathcal{H} , ce qu'on note $u_n \rightarrow u$ si et seulement si $\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{H}} = 0$
- (u_n) converge faiblement vers u dans \mathcal{H} , ce qu'on note $u_n \rightharpoonup u$ si et seulement si:

$$\forall v \in \mathcal{H}, \lim(v, u_n)_{\mathcal{H}} = (v, u)_{\mathcal{H}}.$$

1.1 Notions de Topologie Générales

On définit tout d'abord le concept même d'une topologie et des concepts fondamentaux:

Définition:

Soit X un ensemble, un ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ est appelé une topologie si:

- \mathcal{O} contient X et \emptyset
- \mathcal{O} est stable par union quelconque
- \mathcal{O} est stable par intersection finie.

Un élément de \mathcal{O} est alors appelé un ouvert, son complémentaire est un fermé.

Pour deux topologies $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, on dit que \mathcal{O}_1 est la plus fine si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.

Soit $x \in X$, un ensemble V_x est appelé un voisinage de x s'il contient un ouvert contenant x .

Une topologie est dite séparée si elle vérifie l'axiome de Hausdorff: pour tout élément distinct x et y il existe deux voisinages de x et y disjoints.

Différentes topologies permettent de définir différentes notions de continuité et de convergence.

Définition: Convergence dans un espace topologique

On dit qu'une suite (x_n) converge vers x pour la topologie \mathcal{O} si et seulement si: pour tout voisinage de x , il existe un certain rang de (x_n) à partir duquel (x_n) est incluse dans ce voisinage.

Il est intéressant de noter que, dans un espace topologique non séparé, une suite peut avoir plusieurs limites.

Définition: Continuité

Soient (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) deux espaces topologiques, la fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite continue en $x \in X$ si, pour tout voisinage $V_{f(x)}$ de $f(x)$, il existe U_x un voisinage de x tel que:

$$f(U_x) \subset V_{f(x)}$$

on dit que f est continue si elle est continue en tout point x de X .

Définition: Espace métrique et topologie métrique

X est un espace métrique si on peut le munir d'une distance $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ symétrique telle que: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

On peut alors définir la topologie métrique qui est la topologie séparée définie par:

$$\mathcal{O}_d = \{\Omega \subset X \mid \forall x \in \Omega, \exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset \Omega\}.$$

Définition: Topologie forte d'un espace-vectoriel normé

Soit X un espace-vectoriel normé et d la distance associée à la norme, la topologie métrique de X est appelée la topologie forte de X .

Définition: Ensemble compact selon Borel-Lebesgue

Soient (X, \mathcal{O}) un espace topologique séparé et $K \subset X$, on dit que K est un compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue c'est-à-dire que de tout recouvrement d'ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Théorème: Ensemble compact selon Bolzano-Weiestrass

On considère le cas particulier où X est un espace métrique, alors $K \subset X$ est compact si et seulement si il vérifie la propriété de Bolzano-Weiestrass c'est-à-dire que de toute suite d'élément de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K .

1.2 Convergence Faible et Topologie Faible

Soit \mathcal{Z} un ensemble de cardinal fini d'éléments d'un espace de Hilbert \mathcal{H} , pour $r > 0$ on pose:

$$V_{u,r,\mathcal{Z}} = \{v \in \mathcal{H} \mid \forall w \in \mathcal{Z}, |(w, v - u)_{\mathcal{H}}| < r\}$$

et:

$$\mathcal{O}_{\text{faible}} = \{\Omega \subset \mathcal{H} \mid \forall u \in \Omega, \exists r > 0 \text{ et } \exists \mathcal{Z} \subset \mathcal{H} \text{ fini: } V_{u,r,\mathcal{Z}} \subset \Omega\}.$$

Alors on a les résultats suivants:

- $\mathcal{O}_{\text{faible}}$ est une topologie sur \mathcal{H} , $V_{u,r,\mathcal{Z}}$ est un voisinage ouvert de u pour la topologie faible
- $\mathcal{O}_{\text{faible}}$ est séparée et moins fine que la topologie forte, c'est en fait la topologie la moins fine assurant la continuité de toutes les formes linéaires (fortement) continues sur \mathcal{H}
- Une suite de \mathcal{H} converge au sens de la topologie faible si et seulement si elle converge faiblement
- Si \mathcal{H} est de dimension finie, alors $\mathcal{O}_{\text{faible}} = \mathcal{O}_{\text{forte}}$.

Intuitivement, l'ensemble \mathcal{Z} correspond à un ensemble d'observateurs par rapport auxquels on considère les distances. Le point u correspond alors au centre du voisinage, prenons par exemple $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$, $u = 0$, $r = 1$ et $\mathcal{Z} = \{(1, 0, 0)\}$, alors $V_{u,r,\mathcal{Z}}$ est la plaque infinie selon y, z avec $x \in (-1, 1)$.

1.3 Compacité Faible des Suites Bornées

On commence par rappeler un théorème fondamental:

Théorème: Existence de bases hilbertiennes dans un espace de Hilbert séparable

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, alors il existe une famille (e_k) d'éléments de \mathcal{H} telle que:

- Pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $(e_k, e_l) = \delta_{k,l}$
- $\overline{\text{Vect}((e_k)_k)} = \mathcal{H}$.

Une telle famille est appelée une base hilbertienne de \mathcal{H} . On a alors, pour tout $u \in \mathcal{H}$:

- $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} (e_n, u) e_n$
- $\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(e_n, u)_{\mathcal{H}}|^2$, il s'agit de la formule de Parseval.

Théorème: Compacité faible des suites bornées

De toute suite bornée d'éléments de \mathcal{H} on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) qui converge faiblement vers $u \in \mathcal{H}$.

Démonstration:

Soit (u_n) une suite bornée de \mathcal{H} , on note C sa borne supérieure. On considère (e_n) une base hilbertienne de \mathcal{H} (si \mathcal{H} n'est pas séparable on peut simplement étudier $\overline{\text{Vect}((u_n)_n)}$ qui, muni du produit scalaire de \mathcal{H} , est un espace

de Hilbert séparable).

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} (e_k, u_n)_{\mathcal{H}} e_k \quad \text{avec} \quad \|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |(e_k, u_n)|^2 \leq C^2.$$

Pour tout entier naturel k , la suite $((e_k, u_n))_n$ est donc une suite bornée de \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Par procédé diagonal, on peut donc extraire de (u_n) une sous-suite (u_{n_j}) telle que, pour tout k , $((e_k, u_{n_j}))_j$ converge vers w_k .

Il vient alors:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |w_k|^2 \leq C^2.$$

On peut donc définir $w = \sum_{k \in \mathbb{N}} w_k e_k$.

Soit maintenant $v \in \mathcal{H}$, alors:

$$(v, u_{n_j})_{\mathcal{H}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (e_j, u_{n_j})_{\mathcal{H}} (v, e_k)_{\mathcal{H}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} w_k (v, e_k)_{\mathcal{H}} = (v, w)_{\mathcal{H}}$$

donc $(u_{n_j})_j$ converge faiblement vers w .

1.4 Quelques Résultats Essentiels

On introduit les résultats suivants:

Théorème:

- Toute suite faiblement convergente dans \mathcal{H} est bornée.
- Si (u_n) converge faiblement vers u , alors: $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \liminf_n \|u_n\|_{\mathcal{H}}$.
- Si (u_n) converge faiblement vers u et si (v_n) converge fortement vers v , alors: $\lim (v_n, u_n)_{\mathcal{H}} = (v, u)_{\mathcal{H}}$.

Théorème: Mazur

Soit K un sous-ensemble de \mathcal{H} convexe et fermé pour la topologie forte, alors K est fermé pour la topologie faible. En particulier si une suite d'éléments de K converge faiblement dans \mathcal{H} , alors sa limite est dans K .

Théorème:

Soit $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnelle continue et convexe telle que: $\lim_{\|u\|_{\mathcal{H}} \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty$. Soit K un sous-ensemble fermé convexe et non-vide de \mathcal{H} , alors J admet un minimiseur global sur K . De plus, tout minimiseur local de J sur K est global.

L'ensemble des minimiseurs de J sur K est un sous-ensemble convexe et fermé de K .

1.5 Convergence Faible dans L^2 et H^1

Tout d'abord, il est claire que si $(u_n) \in (L^2)^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans L^2 vers u , alors la convergence a également lieux dans D' .

En effet, si $\Phi \in D'$, alors $\Phi \in L^2$ et il vient:

$$\langle u_n, \Phi \rangle = (u_n, \Phi)_{L^2} \rightarrow (u, \Phi)_{L^2} = \langle u, \Phi \rangle.$$

On introduit alors le lemme suivant:

Lemme:

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et soit $(u_n) \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers u . Alors (u_n) converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration: Soient $\Phi \in L^2(\Omega)$, $w_{\Phi} \in H^1(\Omega)$ le représentant de Riesz de la forme linéaire continue L_{Φ} sur H^1 définie par:

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad L_{\Phi}(v) = (v, \Phi)_{L^2(\Omega)}$$

on a donc: $\forall v \in H^1(\Omega), \quad (w_{\Phi}, v)_{H^1} = L_{\Phi}(v) = (v, \Phi)_{L^2}$,

et donc: $(u_n, \Phi)_{L^2} = (w_{\Phi}, u_n)_{H^1} \rightarrow (w_{\Phi}, u)_{H^1} = (u, \Phi)_{L^2}$.

2 Espace de Sobolev

On utilisera également dans ce chapitre les espaces de Hölder définis par, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert:

$$\forall 0 < \alpha \leq 1, \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid \|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} = \|u\|_{\mathcal{C}^0} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty\}$$

$$\text{avec } \|u\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$$

et:

$$\forall 0 < \alpha \leq 1, m \in \mathbb{N}, \mathcal{C}^{m,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega}) \mid \|u\|_{\mathcal{C}^{m,\alpha}} = \max_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta u\|_{\mathcal{C}^0} + \max_{|\beta|=m} \|\partial^\beta u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} < +\infty\}.$$

On notera que l'espace-vectoriel des fonctions de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω ou bien $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ou bien $\mathcal{D}(\omega)$ selon qu'on l'interprète comme l'ensemble des fonctions test ou non.

2.1 Espace de Sobolev d'Ordre Entier

Il s'agit d'une généralisation naturelle des espaces de Sobolev H^k vus en première année.

Théorème:

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq +\infty$. On note $W^{k,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

on le muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \text{ si } p < +\infty, \quad \|u\|_{W^{k,\infty}} = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \text{ sinon}$$

alors il s'agit d'un espace de Banach.

Définition:

Pour $p = 2$, on note $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, on munit cette espace du produit scalaire:

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}$$

on remarque en particulier que: $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)\}$.

Proposition:

Pour $u \in H^1$, alors: $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$.

Théorème:

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Démonstration: Pour H^1

Soit (u_n) une suite de Cauchy dans H^1 , alors, comme:

$$\|u_{n+p} - u_n\|_{L^2} \leq \|u_{n+p} - u_n\|_{H^1} \text{ et } \|\nabla u_{n+p} - \nabla u_n\|_{L^2} \leq \|u_{n+p} - u_n\|_{H^1}$$

on en déduit que les suites (u_n) et $(\partial^j u_n)$ sont des suites de Cauchy dans L^2 , or L^2 est Complet, il existe donc u et v_j telles que:

$$u_n \rightarrow u \text{ et } \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \rightarrow v_j.$$

Or, la convergence dans L^2 implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ implique:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

donc, comme $D'(\Omega)$ est séparé, alors la limite est imite et $v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, donc $\nabla u = (v_1, \dots, v_n)^T \in L^2(\Omega)$. On en déduit donc que $u \in H^1(\Omega)$ et:

$$\|u_n - u\|_{H^1} = \|u_n - u\|_{L^2} + \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2} \text{ donc } u_n \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Définition:

On note $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$. Il s'agit d'un sous-espace-vectoriel fermé de l'espace de Banach $W^{k,p}(\Omega)$, c'est donc également un espace de Banach (pour la norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$).

2.2 IPP en Dimension d et Formule de Stokes

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d .

Définition:

Ω est lipschitzien si, pour tout x de sa frontière, il existe un voisinage V_x de x et un homéomorphisme $\Phi_x : (-1, 1)^d \rightarrow V_x$ tel que Φ_x et Φ_x^{-1} soient lipschitzien avec $\Phi_x(0) = x$ et $\Phi_x((-1, 1)^{d-1} \times (-1, 0)) = V_x \cap \Omega$.

On dit que Ω est uniformément lipschitzien si les constantes de lipschitz de Φ_x et Φ_x^{-1} peuvent être choisies uniformément bornées.

On dit que Ω est de classe \mathcal{C}^k si Φ_x et son inverse peuvent être choisies de classe \mathcal{C}^k .

On dit que Ω est régulier si il est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème: Stokes

Si Ω est lipschitzien, on peut définir σ une mesure de surface sur sa frontière et une normale sortante $n(x)$ presque partout (pour la mesure σ) telles que:

$$\forall X \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d), \int_{\Omega} \operatorname{div} X = \int_{\partial\Omega} X \cdot n d\sigma.$$