

# Stochastic Process and Applications

Paul Lehaut

October 18, 2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Chapitre 1: Rappels</b>	<b>3</b>
1.1	Mesure . . . . .	3
1.2	Fonctions Mesurables . . . . .	3
1.3	Théorème de convergence pour l'intégration . . . . .	4
1.4	Espaces $L^p$ . . . . .	4
1.5	Espérance, Variance et Inégalités . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Espérance Conditionnelle</b>	<b>5</b>
2.1	Espérance Conditionnelle . . . . .	5
2.2	Espérance Conditionnée par une VA . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Chaînes de Markov Discrètes</b>	<b>7</b>
3.1	Définitions et Propriétés . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Points A Retenir</b>	<b>8</b>
4.1	Fonctions Mesurables . . . . .	8
4.2	Espaces $L^p$ . . . . .	8
4.3	Espérance . . . . .	8
4.3.1	Espérance Conditionnelle . . . . .	8

# 1 Chapitre 1: Rappels

## 1.1 Mesure

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable.

Définition:

Une fonction  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  est dite  $\sigma$ -additive si pour toute collection dénombrable  $(A_i, i \in I)$  d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, on a:

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Une mesure  $\mu$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est  $\sigma$ -additive, à valeur dans  $[0, +\infty]$ , définie sur  $\mathcal{F}$  telle que:  $\mu(\emptyset) = 0$ . On dit que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  est un espace mesuré,  $A \in \mathcal{F}$  est de mesure nulle si  $\mu(A) = 0$ .

$\mu$  est dite  $\sigma$ -finie si il existe  $(\Omega_n, n \in \mathbb{N})$  telle que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \mu(\Omega_n) < +\infty.$$

Une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  est une mesure telle que  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

Soit donc  $\mu$  une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Proposition:

On a les propriétés suivantes:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$$

Convergence monotone: pour  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$ , alors  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$

Si  $(A_i, i \in I)$  est une collection dénombrable d'ensembles mesurables, alors il vient:  $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$ .

Définition:

Les événements  $(A_i, i \in I)$  sont indépendants si, pour tout sous-ensemble fini  $J \subset I$ , on a:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

## 1.2 Fonctions Mesurables

Soient  $(S, \mathcal{S})$  et  $(E, \mathcal{E})$  deux espaces mesurables. Soit  $f$  une fonction de  $S$  dans  $E$ , alors:

$$\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{E}\} = \sigma(f)$$

est une  $\sigma$ -algèbre.

Définition: Fonction mesurable

La fonction  $f$  est dite mesurable si  $\sigma(f) \subset \mathcal{S}$ .

Si  $\mu$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{E})$  et que  $f$  est mesurable, alors  $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$  est une mesure sur  $(S, \mathcal{S})$ .

Une fonction continue définie sur un espace topologique et prenant ses valeurs dans un espace topologique est mesurable au sens de la  $\sigma$ -algèbre borélienne.

Pour  $f$  et  $g$  des fonctions mesurables à valeurs réelles définies sur le même espace mesurable, alors les fonction  $fg$

et  $\max(f, g)$  sont mesurables. Si par ailleurs ses fonctions ne prennent pas de valeurs infinies, alors la fonction  $f + g$  est mesurable.

La composition de fonctions mesurables est également mesurable.

Proposition:

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions réelles mesurables, alors les fonctions  $\liminf f_n$  et  $\limsup f_n$  sont mesurables, en particulier, si  $(f_n)$  converge simplement, alors sa limite est mesurable.

Définition: Variable Aléatoire

Une variable aléatoire  $X$  définie de  $\Omega$  dans  $E$  est une fonction mesurable définie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ .  $X$  est dite indépendante de la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{H}$  si, pour tout  $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ , les événements  $\{X \in A\}$  et  $B$  sont indépendants.

### 1.3 Théorème de convergence pour l'intégration

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles. Cette suite converge presque partout si

$$\liminf f_n = \limsup f_n \text{ presque partout.}$$

On rappelle que la limite de cette suite de fonction est alors mesurable.

Théorème: Convergence monotone

Soit  $(f_n, n \in \mathbb{N})$  une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  presque partout, alors il vient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Le lemme de Fatou donne, pour  $(f_n, n)$  une suite de fonctions mesurables et positives presque partout, alors il vient:

$$\liminf \int f_n d\mu \geq \int \liminf f_n d\mu.$$

Théorème: Convergence dominée de Lebesgue

Soient  $f, g$  deux fonctions à valeurs réelles mesurables, soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs réelles mesurables. On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a presque partout  $|f_n| \leq g$ , que  $f$  désigne la limite de  $(f_n)$  et que  $g$  est intégrable, alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

### 1.4 Espaces $L^p$

On commence par rappeler les inégalités suivantes pour  $f$  et  $g$  des fonctions mesurables à valeurs réelles:

Inégalité de Hölder: Soient  $p, q \in (1, +\infty)$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , supposons que  $|f|^p$  et  $|g|^q$  soient intégrables, alors  $fg$  est intégrable et on a:

$$\int |fg| d\mu \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz: Supposons que  $f$  et  $g$  soient de carré intégrable, alors  $fg$  est intégrable et on a:

$$\int |fg| d\mu \leq \left( \int f^2 d\mu \right)^{1/2} \left( \int g^2 d\mu \right)^{1/2}$$

on a égalité si et seulement si  $f$  et  $g$  sont proportionnelles presque partout.

Inégalité de Minkowski: Soit  $p \in [1, +\infty)$ , supposons que  $|f|^p$  et  $|g|^p$  soient intégrables, alors on a:

$$(\int |f + g|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int |g|^p d\mu)^{1/p}.$$

Proposition:

Soit  $p \in [1, +\infty)$ , l'espace-vectoriel normé  $(L^p, \|\cdot\|_p)$  est complet.

Théorème: Fubini

Soient  $\nu$  et  $\mu$  deux mesures  $\sigma$ -finies respectivement sur  $(E, \mathcal{E})$  et  $(S, \mathcal{S})$ , alors:

-il existe une unique mesure sur  $(E \times S, \mathcal{E} \otimes \mathcal{S})$ , notée  $\nu \otimes \mu$ , telle que:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{S}, \nu \otimes \mu(A \times B) = \nu(A)\mu(B)$$

c'est la mesure produit

-Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $E \times S$ , alors:

$$\int f(x, y) \nu \otimes \mu(dx, dy) = \int \int f(x, y) \mu(dy) \nu(dx) = \int \int f(x, y) \nu(dx) \mu(dy).$$

## 1.5 Espérance, Variance et Inégalités

Soit  $X$  une variable aléatoire, soit  $f$  une fonction à valeurs réelles, si  $\mathbb{E}(f(X))$  est bien définie, alors on a:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int f(x) \mathbb{P}_X(dx).$$

Inégalité de Tchebychev: Soit  $X$  une  $VA_{\mathbb{R}}$ , soit,  $a > 0$ , alors:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

Inégalité de Jensen: Soit  $X$  une  $VA_{\mathbb{R}^d}$  intégrable, soit  $f$  une fonction à valeurs réelles convexe définie sur  $\mathbb{R}^d$ , alors  $\mathbb{E}(f(X))$  est bien définie et:

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

## 2 Espérance Conditionnelle

### 2.1 Espérance Conditionnelle

On s'intéresse à une  $VA_{\mathbb{R}}$  définie sur  $(E, \mathcal{F})$  dont l'espérance est bien définie ainsi qu'à  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$  une  $\sigma$ -algèbre.

Définition: Espérance conditionnelle

On dit qu'une variable aléatoire  $Z$ , mesurable pour  $\mathcal{H}$  telle que  $\mathbb{E}(Z)$  soit bien définie, est l'espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\mathcal{H}$  si:

$$\mathbb{E}(X1_A) = \mathbb{E}(Z1_A), \forall A \in \mathcal{H}.$$

Pour  $Z$  et  $Z'$  deux variables aléatoires  $\mathcal{H}$  mesurables telles que leurs espérances soient bien définies et que:

$$\mathbb{E}(Z1_A) = \mathbb{E}(Z'1_A), \forall A \in \mathcal{H}$$

alors  $Z = Z'$  presque partout.

Théorème: Radon-Nikodym

Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures  $\sigma$ -finie sur  $(\Omega, \mathcal{H})$  telles que:  $\nu(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$ , alors il existe une fonction mesurable  $f$  positive telle que:

$$\int_A f d\nu = \mu(A)$$

on note alors:  $f = \frac{d\mu}{d\nu}$  et on l'appelle dérivée de Radon-Nikodym.

Proposition:

Pour  $X$  et  $Y$  des VAR de carré intégrable alors:

-Si  $X$  est positive presque partout, alors l'espérance conditionnelle de  $X$  est positive presque partout.

-On a presque partout:  $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{H}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$ .

-Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  une suite croissante de VAR positives de carré intégrable alors on a presque partout:

$$\lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\lim X_n|\mathcal{H}).$$

Proposition:

L'espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\mathcal{H}$  existe toujours, par ailleurs on a:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})) = \mathbb{E}(X)$$

donc l'intégrabilité de  $X$  entraîne celle de  $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ .

Proposition:

-Si  $X$  est positive presque partout alors son espérance conditionnelle l'est également.

-Si  $X$  et  $Y$  sont intégrables, alors, pour tout réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{H}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$$

et, si  $X \leq Y$  presque partout, alors  $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$  presque partout.

-Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  une suite croissante de VAR positives presque partout, alors on a presque partout:

$$\lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\lim X_n|\mathcal{H}).$$

-Le lemme de Fatou s'écrit: Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  une suite de VAR positives presque partout, alors on a presque partout:

$$\mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{H}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}).$$

-La convergence dominée de Lebesgue s'écrit: Soient  $X, Y, (X_n)$  des VAR telles que  $(X_n)$  converge vers  $X$  presque partout et  $|X_n| \leq Y$  avec  $Y$  intégrable, alors on a :

$$\lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

Par ailleurs, les inégalités de Hölder, Cauchy-Schwarz, Minkowski et Jensen restent valables pour l'espérance conditionnelle.

De plus, pour  $X$  et  $Y$  deux VAR telles que  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(XY)$  soient bien définies et que  $Y$  soit  $\mathcal{H}$  mesurable, alors on a:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})Y).$$

Proposition:

On suppose  $X$  intégrable, alors:

- Si  $X$  est  $\mathcal{H}$  mesurable, alors:  $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = X$ .
- Si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{H}$  alors:  $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X)$ .
- Si  $Y$  est une VA  $\mathcal{H}$  mesurable telle que  $\mathbb{E}(XY)$  soit bien définie, alors:  $\mathbb{E}(YX|\mathcal{H}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ .
- Si  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$  est une  $\sigma$ -algèbre, alors:  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ .
- Si  $A \in \mathcal{H}$ , alors:  $\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X1_A)\mathbb{P}(A)$ .

## 2.2 Espérance Conditionnée par une VA

Soit  $V$  une variable aléatoire définie sur  $(E, \mathcal{E})$ , on note  $\mathbb{E}(X|V) = \mathbb{E}(X|\sigma(V))$ , si  $\mathbb{E}(X)$  est bien définie, alors il existe une fonction mesurable  $g$  définie sur  $E$  telle que:  $\mathbb{E}(X|V) = g(V)$ .

Si  $V$  est discrète, alors:

$$g(v) = \frac{\mathbb{E}(X1_{V=v})}{\mathbb{P}(V=v)} = \mathbb{E}(X|V=v) \text{ si } \mathbb{P}(V=v) > 0, \text{ et } g(v) = 0 \text{ sinon.}$$

## 3 Chaînes de Markov Discrètes

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires  $X = (X_n)$  qui représente l'évolution dynamique d'un système stochastique. La propriété fondamentale des chaînes de Markov est que l'état du système à l'instant  $n$  ne dépend des états précédents qu'à travers  $X_n$ . C'est-à-dire que, conditionnellement à  $X_n$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(X_{n+k})_k$  sont indépendants.

Dans ce qui suit on considère l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et l'espace  $(E, \mathcal{E})$  où  $E$  est au plus dénombrable, sans précisions supplémentaires les VAs seront définies de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{E}$ .

### 3.1 Définitions et Propriétés

Soit  $X = (X_n)$  une chaîne de Markov, on définit l'ensemble des informations disponibles à l'instant  $n$  par la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}_n$

Définition: Filtre

Un filtre  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$  est une suite croissante de  $\sigma$ -algèbres incluses dans  $\mathcal{F}$ . Une suite de VAs  $(X_n)$  est adaptée pour  $\mathbb{F}$  si  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$  mesurable pour tout  $n$ .

Définition:

Le processus  $X = (X_n)$  est une chaîne de Markov qui respecte le filtre  $\mathbb{F}$  si elle est adaptée pour ce filtre et si elle vérifie la propriété de Markov: pour tout  $n$ , conditionnellement à  $X_n$ ,  $\mathcal{F}_n$  et  $(X_{n+k})_{k \in \mathbb{N}}$  sont indépendants.

Proposition: Définitions équivalentes

On suppose que  $(X_n)$  est adaptée au filtre  $\mathbb{F}$ , alors on a les équivalences suivantes:

- $(X_n)$  est une chaîne de Markov
- Pour tout  $n$  et  $B \in \sigma(X_k)_{k \geq n}$  on a  $\mathbb{P}(B|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(B|X_n)$
- Pour tout  $n$  et  $y \in E$  on a  $\mathbb{P}(X_{n+1} = y|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n)$ .

La proposition précédente nous permet d'introduire le lemme suivant:

Lemme:

Soient un espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$  et  $(U_n)$  une suite de VAs indépendantes à valeurs dans  $S$ . Soient  $X_0$  une variable aléatoire à valeurs dans  $E$  indépendante de  $(U_n)$  et  $f$  une fonction mesurable définie de  $E \times S$  dans  $E$ , on peut alors définir le système dynamique stochastique suivant:  $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$  qui est une chaîne de Markov.

## 4 Points A Retenir

### 4.1 Fonctions Mesurables

On rappelle, pour  $f$  de  $(S, \mathcal{S})$  dans  $(E, \mathcal{E})$ :  $\sigma(f) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{E}\}$ .

La fonction  $f$  est alors dite mesurable si  $\sigma(f) \in \mathcal{S}$ .

En général le produit, le max et la somme de fonction mesurable est mesurable.

La limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.

Le théorème de convergence monotone donne, pour  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles telle que  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  presque partout, alors il vient:

$$\lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu.$$

### 4.2 Espaces $L^p$

Inégalités:

- Hölder: pour  $p, q \in (1, +\infty)$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , supposons que  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ , alors  $fg$  est intégrable et:

$$\int |fg| d\mu \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- CS: supposons désormais que  $f$  et  $g$  soient de carré intégrable, alors:

$$\int |fg| d\mu \leq \left( \int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Minkowski: soit  $p \in [1, +\infty)$ , on suppose que  $f, g \in L^p$ , alors:

$$\left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $p \in [1, +\infty)$ , l'espace-vectoriel normé  $(L^p, \|\cdot\|_p)$  est complet.

### 4.3 Espérance

Inégalité de Tchebychev: pour  $a > 0$ , on a:  $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}$ . Inégalité de Jensen: pour  $f$  convexe:  $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$ .

#### 4.3.1 Espérance Conditionnelle

On rappelle la définition: une variable aléatoire  $Z$ , mesurable pour  $\mathcal{H}$  telle que son espérance soit bien définie, est l'espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\mathcal{H}$  si:

$$\mathbb{E}(X1_A) = \mathbb{E}(Z1_A), \forall A \in \mathcal{H}.$$

L'espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\mathcal{H}$  existe toujours et, par ailleurs:  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})) = \mathbb{E}(X)$ .

La convergence dominée de Lebesgue s'écrit ici: soient  $X, Y, (X_n)$  des VAR telles que  $(X_n)$  converge vers  $X$  presque partout et  $|X_n| \leq Y$  avec  $Y$  intégrable, alors on a :

$$\lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

De plus, pour  $X$  et  $Y$  deux VAR telles que  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(XY)$  soient bien définies et que  $Y$  soit  $\mathcal{H}$  mesurable, alors il vient;

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})Y).$$

Propriétés importantes:



- Si  $X$  est  $\mathcal{H}$  mesurable, alors:  $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = X$
- Si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{H}$ , alors:  $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X)$
- Si  $Y$  est une VA  $\mathcal{H}$  mesurable telle que  $\mathbb{E}(XY)$  soit bien définie, alors:  $\mathbb{E}(YX|\mathcal{H}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$
- Si  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$  est une  $\sigma$ -algèbre, alors:  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$
- Si  $A \in \mathcal{H}$ , alors:  $\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X1_A)\mathbb{P}(A)$ .