

# Analyse Complexe

Paul Lehaut

November 18, 2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Différentiabilité Complexe</b>	<b>3</b>
1.1	Préliminaires . . . . .	3
1.2	Dérivée et différentielle complexe . . . . .	3
1.3	Équations de Cauchy-Riemann . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Intégrale Linéaire et Primitive</b>	<b>4</b>
2.1	Chemin . . . . .	4
2.2	Intégrales de Ligne . . . . .	4
2.3	Primitives . . . . .	6

# 1 Différentiabilité Complexe

## 1.1 Préliminaires

Dans tout ce cours,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

Définition: Différentiabilité complexe

Soit  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en un point intérieur  $a$  de  $A$  si:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe dans } \mathbb{C}.$$

$f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable sur  $A$  si elle est dérivable en tout point de  $A$ , on dit alors qu'elle est holomorphe. Si  $A = \mathbb{C}$ , on dit que  $f$  est complète.

Théorème:

$f$  holomorphe implique  $f$  continue et  $f'$  holomorphe.

## 1.2 Dérivée et différentielle complexe

On rappelle qu'un espace vectoriel est réel (resp complexe) si son champ de scalaire est l'axe des réels (resp le plan complexe).

Définition:

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels normés complexes, soit  $l : E \rightarrow F$ ,  $l$  est linéaire complexe si elle est additive et homogène complexe (ie  $\forall \lambda \in \mathbb{C} l(\lambda z) = \lambda l(z)$ ).

Soient  $f : A \subset E \rightarrow F$ ,  $z$  un point intérieur de  $A$ , la différentielle complexe de  $f$  en  $z$  est l'opérateur linéaire complexe (donc continu):

$$df_z : E \rightarrow F \text{ tel que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(z+h) - f(z) - df_z(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

On a alors:  $f(z+h) = f(z) + df_z(h) + \epsilon(h)\|h\|$  où  $\epsilon(h) \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$ .

Théorème:

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$   $df_z$  existe si et seulement si  $f'(z)$  existe et alors:  $df_z(h) = f'(z)h$ .

Proposition:

On a les résultats classiques d'addition, de produit, de quotient et de composition des fonctions  $\mathbb{C}$ -différentiable.

## 1.3 Équations de Cauchy-Riemann

On note dans cette section  $f = u + iv$ , une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ .

Théorème:

$f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable si et seulement si on a l'une des équivalences suivantes:

- $f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable sur  $\Omega$  et sa différentielle est  $\mathbb{C}$ -linéaire
- $df_z(i) = idf_z(1)$  (1)
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$  (2)
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  (3)

Les égalités (2) et (3) correspondent aux équations de Cauchy-Riemann.

Corrolaire :

$f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable si et seulement si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent, sont continues et  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$  ce qui équivaut également à  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  et  $\frac{\partial v}{\partial y}$  existent, sont continues et vérifient l'égalité de Cauchy-Riemann définie précédemment.

## 2 Intégrale Linéaire et Primitive

### 2.1 Chemin

L'objectif principal de cette session est d'obtenir la version complexe du théorème fondamental du calcul intégral qui donne, dans le cas réel:

Pour  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue, alors  $g$  est la primitive de  $f$  si et seulement si:

$$\forall x \in I, g(x) = g(a) + \int_a^x f.$$

Définition: Chemin

Un chemin  $\gamma$  est une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$ , si  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma$  est un chemin de  $A$  si son image est incluse dans  $A$ .

Un chemin est fermé si son point de départ est égal à son point d'arrivé ie:  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Des chemins sont consécutifs si le point de départ de l'un est le point final de l'autre.

Le chemin retour de  $\gamma$  est le chemin  $\gamma^*(t) = \gamma(1 - t)$ .

Définition: Ensembles ouverts (connexes par arcs)

$\Omega$  est connexe (par arcs) si pour chacun de ces points  $x, y$  il y a un chemin de  $\Omega$  qui lie  $x$  à  $y$ .

Définition: Concaténation de chemins

Soit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  une partition de  $[0, 1]$ , la concaténation de chemins consécutifs associées à cette partition est le chemin  $\gamma$  défini par:

$$\gamma = \gamma_1|_{t_1} \dots |_{t_{n-1}} \gamma_n \text{ tel que } \forall k, \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} = \gamma_k \left( \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \right).$$

Si la partition est uniforme (ie  $t_k = k/n$ ), alors on notera:  $\gamma = \gamma_1|...|\gamma_n$ .

Définition: Chemin rectifiable

Un chemin  $\gamma$  est rectifiable s'il est continûment différentiable par morceaux, on peut alors écrire  $\gamma = \gamma_1|_{t_1} \dots |_{t_{n-1}} \gamma_n$  où les  $\gamma_k$  sont continûments différentiables.

On peut donc introduire le lemme suivant pour renforcer la notion de connexité:

Lemme: Connexité et chemins rectifiables

$\Omega$  est connexe si et seulement si toute paire de points de  $\Omega$  peut être reliée par un chemin rectifiable dans  $\Omega$ .

### 2.2 Intégrales de Ligne

Pour étudier les intégrales de ligne on doit d'abord introduire la notion suivante:

Définition: Longueur d'un chemin rectifiable

La longueur d'un chemin  $\gamma$  continûment différentiable est:

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'| \geq 0.$$

Si  $\gamma$  est seulement un chemin rectifiable, alors:

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^n l(\gamma_k).$$

On peut alors définir:

Définition: Intégrale de ligne

L'intégrale de ligne le long d'un chemin continûment différentiable  $\gamma$  d'une fonction complexe  $f$  définie et continue sur l'image de  $\gamma$  est le nombre complexe défini par:

$$\int_{\gamma} f = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si  $\gamma$  est seulement un chemin rectifiable, alors:

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f.$$

Proposition:

L'intégrale de ligne est  $\mathbb{C}$ -linéaire.

Pour  $\gamma^*$  le chemin retour de  $\gamma$ , alors  $l(\gamma) = l(\gamma^*)$  et  $\int_{\gamma} f = -\int_{\gamma^*} f$ .

Théorème: Inégalité M-L

Pour tout chemin rectifiable  $\gamma$  et toute fonction continue  $f : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$|\int_{\gamma} f| \leq (\max_{z \in \gamma([0, 1])} |f(z)|)l(\gamma).$$

Corrolaire: Convergence dans les intégrales de ligne

Pour tout chemin rectifiable  $\gamma$  et toute suite de fonction continue  $f_n : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$  qui converge uniformément vers  $f$ , il vient:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f.$$

Théorème: Invariance par re-paramétrisation

Soit  $\gamma$  un chemin continûment différentiable, soit  $\Phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  strictement croissant tel que  $\Phi(0) = 0$  et  $\Phi(1) = 1$ , alors il vient:

- Le chemin  $\mu = \gamma \circ \Phi$  est continûment différentiable, son image est la même que celle de  $\gamma$ ,
- Les longueurs de  $\mu$  et de  $\gamma$  sont identiques,
- Pour toutes fonctions continues  $f : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\int_{\gamma} f = \int_{\mu} f.$$

Définition: Image d'un chemin par un fonction

Soit un chemin  $\gamma$  et une fonctions continues  $f : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ , l'image de  $\gamma$  par  $f$  est le chemin  $f \circ \gamma$ .

Théorème: Changement de variable

Soit  $\gamma$  un chemin rectifiable sur  $\Omega$  et  $f$  une fonction  $\mathbb{C}$ -différentiable, alors le chemin  $f \circ \gamma$  est rectifiable et pour toute fonction continue  $g : f \circ \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\int_{f \circ \gamma} g = \int_{\gamma} (g \circ f)(t)f'(t)dt.$$

## 2.3 Primitives

On va définir la primitive de façon analogue à la primitive de l'analyse réelle:

Définition: Primitive

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , une primitive (ou antiderivée) de  $f$  est une fonction holomorphe  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $g' = f$ .

Théorème: Théorème fondamental du calcul intégral

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et soit  $a$  un point de  $\Omega$ . Une fonction  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est une primitive de  $f$  si et seulement si pour tout  $z \in \Omega$  et tout chemin rectifiable  $\gamma$  de  $\Omega$  qui lie  $a$  et  $z$ , alors:

$$g(z) = g(a) + \int_{\gamma} f(w)dw.$$

Corollaire: Existence de primitives et ensemble de primitives

On suppose que  $\Omega$  est connexe, la fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  admet une primitive si et seulement si elle est continue et si pour tout chemin fermé rectifiable  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Maintenant, si  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est une primitive de  $f$ , alors la fonction  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est également une primitive de  $f$  si et seulement si elle est égale à  $g$  à une constante près.

Corollaire: Intégration par parties

On suppose que  $\Omega$  est connexe, soit  $\gamma$  un chemin rectifiable de  $\Omega$ , pour toute paire de fonction holomorphe  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , alors:

$$\int_{\gamma} f'g = [fg(\gamma(1)) - fg(\gamma(0))] - \int_{\gamma} fg'.$$