Stochastic Process and Applications

Paul Lehaut

October 1, 2025

Contents

1 Chapitre 1: Rappels

1.1 Mesure

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.

Définition:

Une fonction $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ est dite σ-additive si pour toute collection dénombrable $(A_i,\ i \in I)$ d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, on a:

$$\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est σ-additive, à valeur dans $[0, +\infty]$, définie sur $\mathcal{F}$ telle que: $\mu(\varnothing) = 0$. On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré, $A \in \mathcal{F}$ est de mesure nulle si $\mu(A) = 0$.
μ est dite σ-finie si il existe $(\Omega_n,\ n \in \mathbb{N})$ telle que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(\Omega_n) < +\infty.$$

Une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est une mesure telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Soit donc μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Proposition:

On a les propriétés suivantes:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$$

Convergence monotone: pour $(A_n,\ n \in \mathbb{N})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n,$ alors $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

Si $(A_i, i \in I)$ est une collection dénombrable d'ensembles mesurables, alors il vient: $\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.

Définition:

Les événements $(A_i, i \in I)$ sont indépendants si, pour touT sous-ensemble fini $J \subset I$, on a:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

1.2 Fonctions Mesurables

Soient $(S, \mathcal{S})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables. Soit f une fonction de S dans E, alors:

$$\{f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{E}\} = \sigma(f)$$

est une σ-algèbre.

Définition: Fonction mesurable

La fonction f est dite mesurable si $\sigma(f) \subset \mathcal{S}$.

Si μ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et que f est mesurable, alors $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ est une mesure sur $(S, \mathcal{S})$.
Une fonction continue définie sur un espace topologique et prenant ses valeurs dans un espace topologique est mesurable au sens de la σ-algèbre borélienne.
Pour f et g des fonctions mesurables à valeurs réelles définies sur le même espace mesurable, alors les fonction fg

et $\max(f,g)$ sont mesurables. Si par ailleurs ses fonctions ne prennent pas de valeurs infinies, alors la fonction $f+g$ est mesurable.
La composition de fonctions mesurables est également mesurable.

Proposition:
Soit (f_n) une suite de fonctions réelles mesurables, alors les fonctions $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont mesurables, en particulier, si (f_n) converge simplement, alors sa limite est mesurable.

Définition: Variable Aléatoire
Une variable aléatoire X définie de Ω dans E est une fonction mesurable définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.
X est dite indépendante de la σ-algèbre $\mathcal{H}$ si, pour tout $(A,B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{H}$, les événements $\{X \in A\}$ et B sont indépendants.

1.3 Théorème de convergence pour l'intégration

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles. Cette suite converge presque partout si

$$\liminf f_n = \limsup f_n \text{ presque partout.}$$

On rappelle que la limite de cette suite de fonction est alors mesurable.

Théorème: Convergence monotone
Soit $(f_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ presque partout, alors il vient:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Théorème: Convergence dominée de Lebesgue
Soient $f,\ g$ deux fonctions à valeurs réelles mesurables, soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles mesurables. On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, on a presque partout $|f_n| \leq g$, que f désigne la limite de (f_n) et que g est intégrable, alors:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

1.4 Espace L^p

On commence par rappeler les inégalités suivantes pour f et g des fonctions mesurables à valeurs réelles:

Inégalité de Hölder: Soient $p, g \in (1, +\infty)$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, supposons que $|f|^p$ et $|g|^q$ soient intégrables, alors fg est intégrable et on a:

$$\int |fg| d\mu \leq (\int |f|^p d\mu)^{1/p} (\int |g|^q d\mu)^{1/q}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz: Supposons que f et g soient de carré intégrable, alors fg est intégrable et on a:

$$\int |fg| d\mu \leq (\int f^2 d\mu)^{1/2} (\int g^2 d\mu)^{1/2}$$

on a égalité si et seulement si f et g sont propotionnelles presque partout.

Inégalité de Minkowski: Soit $p \in [1, +\infty)$, supposons que $|f|^p$ et $|g|^p$ soient intégrables, alors on a:

$$(\int |f+g|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int |g|^p d\mu)^{1/p}.$$

Proposition:
Soit $p \in [1, +\infty)$, l'espace-vectoriel normé $(L^p, ||\cdot||_p)$ est complet.

Théorème: Fubini

Soient ν et μ deux mesures σ-finies respectivement sur $(E, \mathcal{E})$ et $(S, \mathcal{S})$, alors:

-il existe une unique mesure sur $(E \times S, \mathcal{E} \otimes \mathcal{S})$, notée $\nu \otimes \mu$, telle que:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{S},\ \nu \otimes \mu(A \times B) = \nu(A)\mu(B)$$

c'est la mesure produit

-Soit f une fonction à valeurs réelles défnie sur $E \times S$, alors:

$$\int f(x,y)\nu \otimes \mu(dx, dy) = \int \int f(x,y)\mu(dy)\nu(dx) = \int \int f(x,y)\nu(dx)\mu(dy).$$

1.5 Espérance, Variance et Inégalités

Soit X une variable aléatoire, soit f une fonction à valeurs réelles, si $\mathbb{E}(f(X))$ est bien définie, alors on a:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int f(x)\mathbb{P}_X(dx).$$

Inégalité de Tchebychev: Soit X une VA$\mathbb{R}$, soit, $a > 0$, alors:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2}.$$

Inégalité de Jensen: Soit X une VA$\mathbb{R}^d$ intégrable, soit f une fonction à valeurs réelles convexe définie sur $\mathbb{R}^d$, alors $\mathbb{E}(f(X))$ est bien définie et:

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

testv2