

Analyse Complexe

Paul Lehaut

November 18, 2025

Contents

1	Différentiabilité Complexe	3
1.1	Préliminaires	3
1.2	Dérivée et différentielle complexe	3
1.3	Équations de Cauchy-Riemann	3
2	Intégrale Linéaire et Primitive	4
2.1	Chemin	4
2.2	Intégrales de Ligne	4
2.3	Primitives	6
3	Espaces Connexes	6
3.1	Espaces Connexes (par Arcs)	6
3.2	Opérations Ensemblistes	7
3.3	Composantes	7
4	Théorème Intégral de Cauchy - Version Locale	7
4.1	Lemme d'Intégration sur les Chemins Polygonaux	8
4.2	Approximation de Chemin Rectifiable par des Polygones	8
4.3	Théorème Intégral de Cauchy	8

1 Différentiabilité Complexe

1.1 Préliminaires

Dans tout ce cours, Ω désigne un ouvert de \mathbb{C} .

Définition: Différentiabilité complexe

Soit $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f est \mathbb{C} -différentiable en un point intérieur a de A si:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe dans } \mathbb{C}.$$

f est \mathbb{C} -différentiable sur A si elle est dérivable en tout point de A , on dit alors qu'elle est holomorphe. Si $A = \mathbb{C}$, on dit que f est complète.

Théorème:

f holomorphe implique f continue et f' holomorphe.

1.2 Dérivée et différentielle complexe

On rappelle qu'un espace vectoriel est réel (resp complexe) si son champ de scalaire est l'axe des réels (resp le plan complexe).

Définition:

Soient E et F des espaces vectoriels normés complexes, soit $l : E \rightarrow F$, l est linéaire complexe si elle est additive et homogène complexe (ie $\forall \lambda \in \mathbb{C} l(\lambda z) = \lambda l(z)$).

Soient $f : A \subset E \rightarrow F$, z un point intérieur de A , la différentielle complexe de f en z est l'opérateur linéaire complexe (donc continu):

$$df_z : E \rightarrow F \text{ tel que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(z+h) - f(z) - df_z(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

On a alors: $f(z+h) = f(z) + df_z(h) + \epsilon(h)\|h\|$ où $\epsilon(h) \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$.

Théorème:

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ df_z existe si et seulement si $f'(z)$ existe et alors: $df_z(h) = f'(z)h$.

Proposition:

On a les résultats classiques d'addition, de produit, de quotient et de composition des fonctions \mathbb{C} -différentiable.

1.3 Équations de Cauchy-Riemann

On note dans cette section $f = u + iv$, une fonction de Ω dans \mathbb{C} .

Théorème:

f est \mathbb{C} -différentiable si et seulement si on a l'une des équivalences suivantes:

- f est \mathbb{R} -différentiable sur Ω et sa différentielle est \mathbb{C} -linéaire
- $df_z(i) = idf_z(1)$ (1)
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ (2)
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (3)

Les égalités (2) et (3) correspondent aux équations de Cauchy-Riemann.

Corrolaire :

f est \mathbb{C} -différentiable si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent, sont continues et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ ce qui équivaut également à $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent, sont continues et vérifient l'égalité de Cauchy-Riemann définie précédemment.

2 Intégrale Linéaire et Primitive

2.1 Chemin

L'objectif principal de cette session est d'obtenir la version complexe du théorème fondamental du calcul intégral qui donne, dans le cas réel:

Pour I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $a \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors g est la primitive de f si et seulement si:

$$\forall x \in I, g(x) = g(a) + \int_a^x f.$$

Définition: Chemin

Un chemin γ est une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} , si $A \subset \mathbb{C}$, γ est un chemin de A si son image est incluse dans A .

Un chemin est fermé si son point de départ est égal à son point d'arrivé ie: $\gamma(0) = \gamma(1)$. Des chemins sont consécutifs si le point de départ de l'un est le point final de l'autre.

Le chemin retour de γ est le chemin $\gamma^*(t) = \gamma(1 - t)$.

Définition: Ensembles ouverts (connexes par arcs)

Ω est connexe (par arcs) si pour chacun de ces points x, y il y a un chemin de Ω qui lie x à y .

Définition: Concaténation de chemins

Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ une partition de $[0, 1]$, la concaténation de chemins consécutifs associées à cette partition est le chemin γ défini par:

$$\gamma = \gamma_1|_{t_1} \dots |_{t_{n-1}} \gamma_n \text{ tel que } \forall k, \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} = \gamma_k \left(\frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \right).$$

Si la partition est uniforme (ie $t_k = k/n$), alors on notera: $\gamma = \gamma_1|...|\gamma_n$.

Définition: Chemin rectifiable

Un chemin γ est rectifiable s'il est continûment différentiable par morceaux, on peut alors écrire $\gamma = \gamma_1|_{t_1} \dots |_{t_{n-1}} \gamma_n$ où les γ_k sont continûments différentiables.

On peut donc introduire le lemme suivant pour renforcer la notion de connexité:

Lemme: Connexité et chemins rectifiables

Ω est connexe si et seulement si toute paire de points de Ω peut être reliée par un chemin rectifiable dans Ω .

2.2 Intégrales de Ligne

Pour étudier les intégrales de ligne on doit d'abord introduire la notion suivante:

Définition: Longueur d'un chemin rectifiable

La longueur d'un chemin γ continûment différentiable est:

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'| \geq 0.$$

Si γ est seulement un chemin rectifiable, alors:

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^n l(\gamma_k).$$

On peut alors définir:

Définition: Intégrale de ligne

L'intégrale de ligne le long d'un chemin continûment différentiable γ d'une fonction complexe f définie et continue sur l'image de γ est le nombre complexe défini par:

$$\int_{\gamma} f = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si γ est seulement un chemin rectifiable, alors:

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f.$$

Proposition:

L'intégrale de ligne est \mathbb{C} -linéaire.

Pour γ^* le chemin retour de γ , alors $l(\gamma) = l(\gamma^*)$ et $\int_{\gamma} f = -\int_{\gamma^*} f$.

Théorème: Inégalité M-L

Pour tout chemin rectifiable γ et toute fonction continue $f : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$|\int_{\gamma} f| \leq (\max_{z \in \gamma([0, 1])} |f(z)|)l(\gamma).$$

Corrolaire: Convergence dans les intégrales de ligne

Pour tout chemin rectifiable γ et toute suite de fonction continue $f_n : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ qui converge uniformément vers f , il vient:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f.$$

Théorème: Invariance par re-paramétrisation

Soit γ un chemin continûment différentiable, soit $\Phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un difféomorphisme de classe C^1 strictement croissant tel que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$, alors il vient:

- Le chemin $\mu = \gamma \circ \Phi$ est continûment différentiable, son image est la même que celle de γ ,
- Les longueurs de μ et de γ sont identiques,
- Pour toutes fonctions continues $f : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\mu} f.$$

Définition: Image d'un chemin par un fonction

Soit un chemin γ et une fonctions continues $f : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$, l'image de γ par f est le chemin $f \circ \gamma$.

Théorème: Changement de variable

Soit γ un chemin rectifiable sur Ω et f une fonction \mathbb{C} -différentiable, alors le chemin $f \circ \gamma$ est rectifiable et pour toute fonction continue $g : f \circ \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_{f \circ \gamma} g = \int_{\gamma} (g \circ f)(t)f'(t)dt.$$

2.3 Primitives

On va définir la primitive de façon analogue à la primitive de l'analyse réelle:

Définition: Primitive

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, une primitive (ou antiderivée) de f est une fonction holomorphe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g' = f$.

Théorème: Théorème fondamental du calcul intégral

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et soit a un point de Ω . Une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f si et seulement si pour tout $z \in \Omega$ et tout chemin rectifiable γ de Ω qui lie a et z , alors:

$$g(z) = g(a) + \int_{\gamma} f(w)dw.$$

Corollaire: Existence de primitives et ensemble de primitives

On suppose que Ω est connexe, la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive si et seulement si elle est continue et si pour tout chemin fermé rectifiable γ :

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Maintenant, si $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f , alors la fonction $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est également une primitive de f si et seulement si elle est égale à g à une constante près.

Corollaire: Intégration par parties

On suppose que Ω est connexe, soit γ un chemin rectifiable de Ω , pour toute paire de fonction holomorphe $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, alors:

$$\int_{\gamma} f'g = [fg(\gamma(1)) - fg(\gamma(0))] - \int_{\gamma} fg'.$$

3 Espaces Connexes

3.1 Espaces Connexes (par Arcs)

Ils existent deux définitions légèrement différentes qui caractérise le fait d'être en un seul morceau: la connexité et la connexité par arcs. La connexité est un peu plus faible que la connexité par arcs et donc un peu plus robuste et puissante. Néanmoins, dans la majorité des cas, et pour tous les ouverts, ces deux propriétés sont équivalentes.

Définition: Espace connexe par arcs

Un ensemble A est connexe par arcs si chacune de ces paires de points peut être reliée par un chemin de A .

Définition: Dilatation

B est une dilatation de A si on peut écrire : $B = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$ avec $r_a > 0$ pour tout a .

Définition: Espace connexe

Un espace est connexe si toutes ses dilatations sont connexes par arcs.

Théorème:

Tout ensemble connexe par arcs est connexe, de façon réciproque, tout ensemble ouvert connexe est connexe par arcs. Il est donc immédiat qu'un ensemble ouvert est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

3.2 Opérations Ensemblistes

De nombreuses propriétés sont communes aux espaces connexes et connexes par arcs, c'est le cas, sauf mention contraire de toutes les propriétés suivantes:

Théorème: Union d'ensemble d'intersection non-vide

Si \mathcal{A} est une collection d'ensemble connexe (par arcs) dont l'intersection est non vide, alors leur union est également connexe (par arcs).

On peut par ailleurs se convaincre facilement que l'union de deux ouverts d'intersection vide n'est pas connexe (par arcs).

Théorème: Fermeture d'espaces connexes La fermeture d'un espace connexe est connexe.

Attention, ce théorème ne s'applique en général pas aux espaces connexes par arcs, considérer par exemple l'ensemble connexe par arcs $A = \{(x, \sin(1/x)); x \in]0, 1]\}$ dont la fermeture est $A \cup \{(0, y); y \in [-1, 1]\}$.

3.3 Composantes

On introduit deux concepts de composantes selon le type de connexité:

Définition: Composante

Une composante (connexe (par arcs)) d'un ensemble non vide A est un sous-ensemble de A qui est connexe (par arcs) et maximal au sens de l'inclusion pour de tels ensembles.

Théorème: Partition en composantes

Les composantes d'un ensemble non vide forment une partition de A .

On en déduit immédiatement qu'un ensemble non vide est connexe (par arcs) si et seulement s'il possède une unique composante.

Théorème: Composantes d'un ensemble ouvert

Les partitions en composante connexe et en composante connexe par arcs d'un ensemble ouvert non vide sont identiques.

On peut finalement introduire le concept de fonction localement constante:

Définition: Fonction localement constante

Un fonction f sur A est localement constante si, pour tout point de A , il existe une boule ouverte non vide centrée sur ce point telle que f soit constante sur l'intersection de A et de cette boule.

Théorème: Fonction localement constante et ensemble connexe

Un ensemble est connexe si et seulement si toute fonction localement constante définie sur cet ensemble est en fait constante.

4 Théorème Intégral de Cauchy - Version Locale

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir une première version du théorème intégral de Cauchy:

Théorème: Intégrale de Cauchy (Version locale)

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{C} -différentiable, pour tout $a \in \Omega$, il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ et pour tout chemin rectifiable fermé γ de cette boule:

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

4.1 Lemme d'Intégration sur les Chemins Polygonaux

On considère dans ce chapitre une fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Lemme: Intégration de triangles

Si $\Delta \subset \Omega$ est un triangle dont les sommets sont a, b et c , ie $\Delta = \{\lambda a + \mu b + \nu c ; \lambda, \mu, \nu \geq 0 \text{ et } \lambda + \mu + \nu = 1\}$, et si $\gamma = [a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a]$ est un chemin 'en ligne droite' qui forme la frontière de Δ , alors:

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Définition: Ensemble en étoile

Un ensemble A est étoilé s'il existe $a \in A$ tel que pour tout point $z \in A$, le segment $[a, z]$ soit inclus dans A .

Lemme: Intégration sur les chemins polygonaux

Supposons que Ω soit étoilé, pour tout chemin polygonal fermé $\gamma = [a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow a_0]$ de Ω , alors:

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

4.2 Approximation de Chemin Rectifiable par des Polygones

L'objectif de cette partie est d'étendre le lemme précédent à des chemins plus généraux que les chemins polygonaux fermés.

Lemme: Approximation polynomiale de chemin rectifiable

Soit γ un chemin rectifiable, pour tout $\epsilon_l > 0$ et $\epsilon_{\infty} > 0$, il y a un chemin polygonale orienté μ avec les mêmes points de départs et d'arrivées que γ tel que:

$$l(\mu - \gamma) \leq \epsilon_l \text{ et } |(\mu - \gamma)(t)| \leq \epsilon_{\infty}.$$

4.3 Théorème Intégral de Cauchy

On peut alors énoncer un premier théorème:

Théorème: Intégrale de Cauchy (Version étoilée)

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{C} -différentiable où Ω est supposé étoilé, pour tout chemin rectifiable fermé γ , l'intégral de chemin de f selon γ est nulle.

On en déduit le théorème suivant:

Théorème: Intégrale de Cauchy pour les disques

On suppose désormais que γ forme un disque de rayon r et de centre c avec $B_F(c, r) \subset \Omega$, Ω est simplement un ouvert de \mathbb{C} , alors pour toute fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\forall z \in B(c, r), f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Un corollaire immédiat de ce résultat est que la dérivée d'une fonction holomorphe est encore holomorphe.

Théorème: Morera

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, f est holomorphe si et seulement si elle est continue et, localement, son intégrale de ligne selon des chemins rectifiables fermés est nulle ie:

$$\forall c \in \Omega, \exists r > 0 : B(c, r) \subset \Omega \text{ et } \forall \gamma \text{ chemin fermé rectifiable de } B(c, r), \int_{\gamma} f = 0.$$

Théorème: Limite de fonction holomorphique

Si une suite (f_n) de fonction holomorphe de Ω dans \mathbb{C} converge localement uniformément vers f , ie:

$$\forall c \in \Omega, \exists r > 0 : B(c, r) \subset \Omega \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(z) - f(z)\|_{\infty} = 0$$

alors f est holomorphe.

Théorème: Liouville

Toute fonction holomorphe sur \mathbb{C} bornée est constante.