Complément d'Analyse Fonctionnelle

Paul Lehaut

December 3, 2025

Contents

1 Convergence Faible dans les Espaces de Hilbert **3**

1.1 Notions de Topologie Générales 3

1.2 Convergence Faible et Topologie Faible 4

1.3 Compacité Faible des Suites Bornées 4

1.4 Quelques Résultats Essentiels 5

1.5 Convergence Faible dans L^2 et H^1 5

2 Espace de Sobolev **6**

2.1 Espace de Sobolev d'Ordre Entier 6

2.2 IPP en Dimension d et Formule de Stokes 7

2.3 Théorèmes de Traces 7

2.4 Injections Continues de Sobolev 8

1 Convergence Faible dans les Espaces de Hilbert

Dans tout ce chapitre $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert.

Définition: Convergence faible dans un espace de Hilbert
Soient $(u_n) \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ et $u \in \mathcal{H}$, on dit que:

- (u_n) converge fortement vers u dans $\mathcal{H}$, ce qu'on note $u_n \to u$ si et seulement si $\lim ||u_n - u||_{\mathcal{H}} = 0$
- (u_n) converge faiblement vers u dans $\mathcal{H}$, ce qu'on note $u_n \rightharpoonup u$ si et seulement si:

$$\forall v \in \mathcal{H},\ \lim(v, u_n)_{\mathcal{H}} = (v, u)_{\mathcal{H}}.$$

1.1 Notions de Topologie Générales

On définit tout d'abord le concept même d'une topologie et des concepts fonadamentaux:
Définition:
Soit X un ensemble, un ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ est appelé une topologie si:

- $\mathcal{O}$ contient X et $\emptyset$
- $\mathcal{O}$ est stable par union queclconque
- $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie.

Un élément de $\mathcal{O}$ est alors appelé un ouvert, son complémentaire est un fermé.
Pour deux topologie $\mathcal{O}_1,\ \mathcal{O}_2$, on dit que $\mathcal{O}_1$ est la plus fine si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.
Soit $x \in X$, un ensemble V_x est appelé un voisinage de x s'il contient un ouvert contenant x.
Une topologie est dite séparée si elle vérifie l'axiome de Hausdorff: pour tout élément distinct x et y il existe deux voisinages de x et y disjoints.

Différentes topologies permettent de définir différentes notions de continuité et de convergence.
Définition: Convergence dans un espace topologique
On dit qu'une suite (x_n) converge vers x pour la topologie $\mathcal{O}$ si et seulement si: pour tout voisinage de x, il existe un certain range de (x_n) à partir duquel (x_n) est incluse dans ce voisinage.

Il est intéressant de noter que, dans un espace topologique non séparé, une suite peut avoir plusieurs limites.

Définition: Continuité
Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques, la fonction $f : X \to Y$ est dite continue en $x \in X$ si, pour tout voisinage $V_{f(x)}$ de $f(x)$, il existe U_x un voisinage de x tel que:

$$f(U_x) \subset V_{f(x)}$$

on dit que f est continue si elle est continue en tout point x de X.

Définition: Espace métrique et topologie métrique
X est un espace métrique si on peut le munir d'une distance $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ symétrique telle que: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
On peut alors définir la topologie métrique qui est la topologie séparée définie par:

$$\mathcal{O}_d = \{\Omega \subset X \mid \forall x \in \Omega,\ \exists \epsilon > 0 :\ \mathcal{B}(x, \epsilon) \subset \Omega\}.$$

Définition: Topologie forte d'un espace-vectoriel normé

Soit X un espace-vectoriel normé et d la distance associée à la norme, la topologie métrique de X est appelée la topologie forte de X.

Définition: Ensemble compact selon Borel-Lebesgue

Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé et $K \subset X$, on dit que K est un compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue c'est-à-dire que de tout recouvrement d'ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Théorème: Ensemble compact selon Bolzano-Weiestrass

On considère le cas particulier où X est un espace métrique, alors $K \subset X$ est compact si et seulement si il vérifie la propriété de Bolzano-Weiestrass c'est-à-dire que de toute suite d'élément de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

1.2 Convergence Faible et Topologie Faible

Soit $\mathcal{Z}$ un ensemble de cardinal fini d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, pour $r > 0$ on pose:

$$V_{u,r,\mathcal{Z}} = \{v \in \mathcal{H} \mid \forall w \in \mathcal{Z},\ |(w, v - u)_{\mathcal{H}}| < r\}$$

et:

$$\mathcal{O}_{\text{faible}} = \{\Omega \subset \mathcal{H} \mid \forall u \in \Omega,\ \exists r > 0 \text{ et } \exists \mathcal{Z} \subset \mathcal{H} \text{ fini: } V_{u,r\mathcal{Z}} \subset \Omega\}.$$

Alors on a les résultats suivants:

- $\mathcal{O}_{\text{faible}}$ est une topologie sur $\mathcal{H}$, $V_{u,r,\mathcal{Z}}$ est un voisinage ouvert de u pour la topologie faible
- $\mathcal{O}_{\text{faible}}$ est séparée et moins fine que la topologie forte, c'est en fait la topologie la moins fine assurant la continuité de toutes les formes linéaires (fortement) continues sur $\mathcal{H}$
- Une suite de $\mathcal{H}$ converge au sens de la topologie faible si et seulement si elle converge faiblement
- Si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, alors $\mathcal{O}_{\text{faible}} = \mathcal{O}_{\text{forte}}$.

Intuitivement, l'ensemble $\mathcal{Z}$ correspond à un ensemble d'observateurs par rapport auxquels on considère les distances. Le point u correspond alors au centre du voisinage, prenons par exemple $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$, $u = 0$, $r = 1$ et $\mathcal{Z} = \{(1, 0, 0)\}$, alors $V_{u,r,\mathcal{Z}}$ est la plaque infinie selon y, z avec $x \in (-1, 1)$.

1.3 Compacité Faible des Suites Bornées

On commence par rappeler un théorème fondamental:

Théorème: Existence de bases hilbertiennes dans un espace de Hilbert séparable

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, alors il existe une famille (e_k) d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que:

- Pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $(e_k, e_l) = \delta_{k,l}$
- $\overline{Vect((e_k)_k)} = \mathcal{H}$.

Une telle famille est appelée une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. On a alors, pour tout $u \in \mathcal{H}$:

- $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} (e_n, u) e_n$
- $||u||_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(e_n, u)_{\mathcal{H}}|^2$, il s'agit de la formule de Perseval.

Théorème: Compacité faible des suites bornées

De toute suite bornée d'éléments de $\mathcal{H}$ on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) qui converge faiblement vers $u \in \mathcal{H}$.

Démonstration:

Soit (u_n) une suite bornée de $\mathcal{H}$, on note C sa borne supérieure. On considère (e_n) une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (si $\mathcal{H}$ n'est pas séparable on peut simplement étudier $\overline{Vect((u_n)_n)}$ qui, muni du produit scalaire de $\mathcal{H}$, est un espace

de Hilbert séparable).
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} (e_k, u_n)_{\mathcal{H}} e_k \quad \text{avec} \quad ||u_n||^2_{\mathcal{H}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |(e_k, u_n)|^2 \leq C^2.$$

Pour tout entier naturel k, la suite $((e_k, u_n))_n$ est donc une suite bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par procédé diagonal, on peut donc extraire de (u_n) une sous-suite (u_{n_j}) telle que, pour tout k, $((e_k, u_{n_j})_j)$ converge vers w_k.
Il vient alors:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |w_k|^2 \leq C^2.$$

On peut donc définir $w = \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k e_k$.
Soit maintenant $v \in \mathcal{H}$, alors:

$$(v, u_{n_j})_{\mathcal{H}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} (e_j, u_{n_j})_{\mathcal{H}} (v, e_k)_{\mathcal{H}} \longrightarrow_{j\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k (v, e_k) = (v, w)_{\mathcal{H}}$$

donc $(u_{n_j})_j$ converge faiblement vers w.

1.4 Quelques Résultats Essentiels

On introduit les résultats suivants:
Théorème:

- Toute suite faiblement convergente dans $\mathcal{H}$ est bornée.
- Si (u_n) converge faiblement vers u, alors: $||u||_{\mathcal{H}} \leq \liminf_n ||u_n||_{\mathcal{H}}$.
- Si (u_n) converge faiblement vers u et si (v_n) converge fortement vers v, alors: $\lim(v_n, u_n)_{\mathcal{H}} = (v, u)_{\mathcal{H}}$.

Théorème: Mazur
Soit K un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ convexe et fermé pour la topologie forte, alors K est fermé pour la topologie faible. En particulier si une suite d'éléments de K converge faiblement dans $\mathcal{H}$, alors sa limite est dans K.

Théorème:
Soit $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ un fonctionnelle continue et convexe telle que: $\lim_{||u||_{\mathcal{H}}\to+\infty} J(u) = +\infty$. Soit K un sous-ensemble fermé convexe et non-vide de $\mathcal{H}$, alors J admet un minimiseur global sur K. De plus, tout minimiseur local de J sur K est global.
L'ensemble des minimiseurs de J sur K est un sous-ensemble convexe et fermé de K.

1.5 Convergence Faible dans L^2 et H^1

Tout d'abord, il est claire que si $(u_n) \in (L^2)^{\mathbb{N}}$ converge failbement vers u dans L^2 vers u, alors la convergence a également lieux dans $\mathcal{D}'$.
En effet, si $\Phi \in \mathcal{D}$, alors $\Phi \in L^2$ et il vient:

$$< u_n, \Phi >= (u_n, \Phi)_{L^2} \to (u, \Phi)_{L^2} =< u, \Phi > .$$

On introduit alors le lemme suivant:
Lemme:
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $(u_n) \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers u. Alors (u_n) converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration: Soient $\Phi \in L^2(\Omega)$, $w_\Phi \in H^1(\Omega)$ le représentant de Riesz de la forme linéaire continue L_Φ sur H^1 définie par:

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ L_\Phi(v) = (v, \Phi)_{L^2(\Omega)}$$

on a donc: $\forall v \in H^1(\Omega),\ (w_\Phi, v)_{H^1} = L_\Phi(v) = (v, \Phi)_{L^2}$,
et donc: $(u_n, \Phi)_{L^2} = (w_\Phi, u_n)_{H^1} \to (w_\Phi, u)_{H^1} = (u, \Phi)_{L^2}$.

2 Espace de Sobolev

On utilisera également dans ce chapitre les espaces de Hölder définis par, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert:

$$\forall 0 < \alpha \leq 1,\ \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) | ||u||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} = ||u||_{\mathcal{C}^0} + \sup_{x \neq y} \frac{||u(x) - u(y)||}{|x-y|^\alpha} < +\infty\}$$

$$\text{avec } \ ||u||_{\mathcal{C}^0} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} ||u(x)||$$

et:

$$\forall 0 < \alpha \leq 1,\ m \in \mathbb{N},\ \mathcal{C}^{m,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega}) | ||u||_{\mathcal{C}^{m,\alpha}} = \max_{|\beta| \leq m} ||\partial^\beta u||_{\mathcal{C}^0} + \max_{|\beta| = m} ||\partial^\beta u||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} < +\infty\}.$$

On notera que l'espace-vectoriel des fonctions de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω ou bien $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ou bien $\mathcal{D}(\Omega)$ selon qu'on l'interprète comme l'ensemble des fonctions test ou non.

2.1 Espace de Sobolev d'Ordre Entier

Il s'agit d'une généralisation naturelle des espaces de Sobolev H^k vus en première année.

Théorème:

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq +\infty$. On note $W^{k,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev:

$$Wk,p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) |\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

on le muni de la norme:

$$||u||_{W^{k,p}} = (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k} = ||\partial^\alpha u||_{L^p}^p)^{1/p} \ \text{ si } \ p < +\infty, \quad ||u||_{W^{k,\infty}} = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha u||_{L^\infty} \ \text{ sinon}$$

alors il s'agit d'un espace de Banach.

Définition:

Pour $p = 2$, on note $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, on munit cette espace du produit scalaire:

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}$$

on remarque en particulier que: $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) |\ \nabla u \in L^2(\Omega)\}$.

Proposition:

Pour $u \in H^1$, alors: $||u||_{H^1}^2 = ||u||_{L^2}^2 + ||\nabla u||_{L^2}^2$.

Théorème:

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Démonstration: Pour H^1

Soit (u_n) une suite de Cauchy dans H^1, alors, comme:

$$||u_{n+p} - u_n||_{L^2} \leq ||u_{n+p} - u_n||_{H^1} \ \text{ et } \ ||\nabla u_{n+p} - \nabla u_n||_{L^2} \leq ||u_{n+p} - u_n||_{H^1}$$

on en déduit que les suites (u_n) et $(\partial^j u_n)$ sont des suites de Cauchy dans L^2, or L^2 est Complet, il existe donc u et v_j telles que:

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ et } \ \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \longrightarrow v_j.$$

Or, la convergence dans L^2 implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ implique:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

donc, comme $D'(\Omega)$ est séparé, alors la limite est imite et $v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, donc $\nabla u = (v_1, ..., v_n)^T \in L^2(\Omega)$. On en déduit donc que $u \in H^1(\Omega)$ et:

$$||u_n - u||_{H^1} = ||u_n - u||_{L^2} + ||\nabla u_n - \nabla u||_{L^2} \text{ donc } u_n \longrightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Définition:

On note $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}}$. Il s'agit d'un sous-espace-vectoriel fermé de l'espace de Banach $W^{k,p}(\Omega)$, c'est donc également un espace de Banach (pour la norme $||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}$).

2.2 IPP en Dimension d et Formule de Stokes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition:

Ω est lipschitzien si, pour tout x de sa frontière, il existe un voisinage V_x de x et un homémorphisme $\Phi_x : (-1,1)^d \to V_x$ tel que Φ_x et Φ_x^{-1} soient lipschitziennes avec $\Phi_x(0) = x$ et $\Phi_x((-1,1)^{d-1} \times (-1,0)) = V_x \cap \Omega$.

On dit que Ω est uniformément lipschitzien si les constantes de lipschitz de Φ_x et Φ_x^{-1} peuvent être choisies uniformément bornées.

On dit que Ω est de classe $\mathcal{C}^k$ si Φ_x et son inverse peuvent être choisies de classe $\mathcal{C}^k$.

On dit que Ω est régulier si il est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème: Stokes

Si Ω est lipschitzien, on peut définir σ une mesure de surface sur sa frontière et une normale sortante $n(x)$ presque partout (pour la mesure σ) telles que:

$$\forall X \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d), \int_\Omega \mathrm{div} X = \int_{\partial\Omega} X \cdot n d\sigma.$$

2.3 Théorèmes de Traces

La théorie des distributions est idéale pour traiter des problèmes linéaires posés dans tout l'espace, elle se révèle par contre inadaptée pour les études aux limites ou pour les problèmes non linéaires. L'objectif des espaces de Sobolev est de lever ces contraintes.

Une fonction de $L^2(\Omega)$ n'a pas forcément de valeur bien définie sur le bord de Ω.

En dimension 1, une fonction de $H^1((a,b))$ admet un unique représentant continue dans $\mathcal{C}^0([a,b])$. On peut donc donner un sens à ses valeurs aux bords.

Dans des dimensions supérieures néanmoins, les fonctions de $H^1(\Omega)$ n'ont en général pas de représentant continu. Si Ω est uniformément lipschitzien, on peut toutefois donner un sens aux valeurs aux bords de ces fonctions.

Théorème: De la trace

On suppose donc Ω uniformément lipschitzien dans $\mathbb{R}^d$, alors l'application linéaire de $H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_c^p(\bar{\Omega})$ dans $L^2(\partial\Omega)$ définie par

$$u \mapsto u_{|\partial\Omega}$$

admet un unique prolongement par continuité $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, son noyau est $H_0^1(\Omega)$.

Enfin, on a:

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)(n \cdot e_i) d - \frac{\partial v}{\partial x_i} u.$$

Théorème: Dérivé normale sortante

Sous la même hypothèse sur Ω, l'application de $H^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_c^1(\bar{\Omega})$ dans $L^2(\partial\Omega)$ définie par:

$$u \mapsto \frac{\partial u}{\partial x} = \nabla u \cdot x$$

admet également un unique prolongement continu : γ_n de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.
De plus:

$$\forall u \in H^2(\Omega),\ v \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega (-\Delta u)v = -\int_{\partial\Omega} \gamma_n(u)\gamma_0(v) + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Définition:

On suppose que Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$, alors: $H_{div}(\Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^d |\ \mathrm{div} v \in L^2(\Omega)\}$, on munit cette espace du produit scalaire:

$$(v, w)_{H_{div}(\Omega)} = \int_\Omega v \cdot w + \int_\Omega \mathrm{div} v \cdot \mathrm{div} w$$

alors $H_{div}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème: Flux normal sortant

L'application linéaire de $H_{div}(\Omega) \cap \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)^*$ (dual de $H^{1/2}(\Omega)$) définie par:

$$v \mapsto v \cdot n$$

se prolonge en une unique application linéaire continue $\gamma_\phi : H_{\mathrm{div}}(\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$.
On a alors la formule:

$$\forall v \in H_{div}(\Omega),\ \forall u \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega \mathrm{div} v\ u = < \gamma_\phi, \gamma_0(u) >_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} - \int_\gamma v \cdot \nabla u.$$

2.4 Injections Continues de Sobolev

On rappelle que pour V et W des espaces-vectoriels normés, la notation $V \hookrightarrow W$ s'injecte de façon naturelle dans W et qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que: $\forall u \in V$, $||u||_W \leq C||u||_V$.

Théorème: Sobolev - Gagliadov - Niremberg

Soit un entier d et $1 \leq p < d$, on a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème:

$$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d),\ 2 \leq q < +\infty.$$

Théorème: Money

Soit $\alpha = 1 - \frac{d}{p} \in (0, 1)$ pour $d < p \leq +\infty$, alors:

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d) \text{ avec } C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d) |\ \sup_{x,y \in \mathbb{R}^d} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty\}.$$

Théorème: Interpolation

On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors, pour tout $p \leq r \leq q$, $f \in L^r(\Omega)$ et:

$$||f||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}^\alpha ||f||_{L^q}^{1-\alpha}, \text{ avec } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1 - \alpha}{q}.$$