

# Contrôle des systèmes dynamiques

Paul Lehaut

October 2, 2025

# Contents

<b>1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques</b>	<b>3</b>
1.1 Cas des systèmes linéaires autonomes . . . . .	3
1.2 Contrôle des systèmes non linéaires . . . . .	4
<b>2 Stabilité et Stabilisation des Systèmes Dynamiques</b>	<b>6</b>
2.1 Trois Notions de Stabilité . . . . .	6
2.2 Stabilité des Systèmes Linéaires . . . . .	6
2.2.1 Cas des matrices diagonalisables . . . . .	6
2.2.2 Cas des matrices non diagonalisables . . . . .	6
2.3 Stabilité des Systèmes Non Linéaires . . . . .	7

On s'intéresse à  $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t))$  où  $x(t)$  désigne l'état du système et  $u(t)$  le contrôle. On s'intéressera tout d'abord à:  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et  $u \in L^\infty([0, T], \mathcal{U})$  où  $\mathcal{U}$  désigne un sous-ensemble d'un espace-vectoriel.

Les trois questions principales sont:

-Question de contrôlabilité: pour  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $T$  fini, existe-t-il une fonction de contrôle  $u$  telle que:  $x_u(T) = x_1$ ?

-Question de contrôle optimal: on suppose qu'il existe au moins un contrôle emmenant le système de  $x_0$  à  $x_1$  en un temps  $T$ , existe-t-il alors un contrôle qui permet de réaliser ce passage en minimisant un critère ?

-Question de stabilisation: un état  $x^*$  étant donné, peut-on construire un contrôle  $u(t)$  de type  $k(x(t))$  (contrôle en boucle fermée) qui permet de ramener le système de l'état  $x_0$  à l'état  $x^*$  en un temps  $T$  ?

## 1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

### 1.1 Cas des systèmes linéaires autonomes

Un système linéaire autonome est un système de la forme:

$$(I) \quad \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t), \text{ avec } x(0) = x_0, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ et } B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}).$$

La solution de ce système est explicite donnée par:

$$x(t) = e^{tA}x_0 \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Le problème de contrôle en un temps  $T$  peut alors se réécrire,  $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , trouver  $u \in L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k)$  telle que:

$$\int_0^T e^{(t-s)A}Bu(s)ds = \Phi_T(u) = x_1 - e^{TA}x_0$$

soit encore montrer que l'application linéaire:

$$\begin{aligned} L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \Phi_T : \quad u &\longmapsto \int_0^T e^{(t-s)A}Bu(s)ds \end{aligned}$$

est surjective.

#### Théorème: Critère de Kalman

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , soit  $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ , pour  $T > 0$ , le système (I) est contrôlable en un temps  $T$  si et seulement si la matrice  $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  est de rang maximal n.

#### Démonstration:

Montrons tout d'abord que  $\Phi_T$  n'est pas surjective si la matrice C n'est pas de rang maximal.

En effet, si C n'est pas de rang maximal, alors il existe  $y \in \mathbb{R}^n$  non nul tel que  $y^T C = 0$  donc  $y^T A^j B = 0$  pour tout  $j \in [|0, n-1|]$ .

Or, le théorème de Cailey-Hamilton donne:  $A^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$  donc  $y^T A^n B = 0$  et donc, par récurrence:  $y^T A^j B = 0$  pour tout  $j$ .

On calcule alors:

$$y^T \Phi_T(u) = y^T \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds = \int_0^T y^T \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(T-s)^k}{k!} A^k Bu(s)ds = 0$$

donc, pour tout contrôle  $u$ ,  $\Phi_T(u)$  appartient à l'espace orthogonal à  $y^T$  qui est un vecteur non nul, donc  $\Phi_T$  n'est pas surjective.

Montrons désoramas que, si  $\Phi_T$  n'est pas surjective, alors la matrice  $C$  n'est pas de rang maximal.

Comme  $\Phi_T$  n'est pas surjective, alors il existe  $y$  non nul appartenant à l'espace orthogonal à  $Im\Phi_T$ . On s'intéresse alors à la fonction  $u$  définie par:

$$u(s) = B^T e^{(T-s)A} y$$

qui est clairement une fonction de  $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^k)$ , il vient alors:

$$y^T \Phi_T(u) = \int_0^T y^T e^{A(T-s)} B B^T e^{(T-s)A^T} y ds = \int_0^T \langle y^T e^{(T-s)A} B, y^T e^{(T-s)A} B \rangle ds = 0$$

on constate donc que, pour tout  $s \in [0, T]$ , on a:  $y^T e^{(T-s)A} B = 0$ , donc, en particulier, en notant  $f : s \mapsto y^T e^{(T-s)A} B$ , alors:

$$f(T) = y^T B = 0, \quad f'(T) = -y^T A B = 0, \dots \text{ et } f^{(n-1)}(T) = (-1)^{n-1} y^T A^{n-1} B = 0$$

donc  $y^T$  appartient au noyau de  $C$  qui n'est donc pas de rang maximal.

D'où le résultat.

On constate par ailleurs que ce critère ne dépend pas du temps  $T$ .

#### Théorème:

Le système (I) est contrôlable si et seulement si la matrice

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} B B^T e^{(T-s)A^T} ds$$

est inversible, un contrôle admissible est alors:

$$u(t) = B^T e^{(t-s)A^T} G_T^{-1} x(x_1 - e^{TA} x_0).$$

L'ensemble des contrôles admissibles réalisant le passage de  $x_0$  à  $x_1$  en temps  $T$  est:

$$\{u \in L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k) \mid \Phi_T(u) = x_1 - e^{TA} x_0\}.$$

## 1.2 Contrôle des systèmes non linéaires

On s'intéresse aux systèmes de la forme:

$$(II) \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \text{avec } x(0) = x_0.$$

On peut tout d'abord se demander si, pour  $u \in L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k)$  fixé, le problème de Cauchy (II) a-t-il une solution et une seule sur l'intervalle  $[0, T]$ ? Autrement dit le problème de Cauchy qui consiste à chercher  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{avec } x(0) = x_0 \text{ et } F(t, x(t)) = f(t, x(t), u(t))$$

a-t-il une unique solution?

Dans le cas standard, si  $F$  est continue et lipschitzienne en  $x$  alors l'équation admet une unique solution. Néanmoins en théorie du contrôle on peut tout à fait considérer des contrôles discontinus qui implique en général la discontinuité de  $F$ .

Définition:

On note  $AC([0, T], \mathbb{R}^n) := \{x \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n) \mid \frac{dx}{dt} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n)\}$ , la dérivée est ici à prendre au sens des distributions.

Pour tout  $x \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ , on a:  $x(t) = \int_0^t \frac{dx}{dt}(s)ds + x_0$ .

Théorème:

Soit  $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mesurable et vérifiant:

$$\exists c_T \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+) : \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq c_T(t) \|x - y\| \quad (\text{Pseudo lipschitzianité})$$

et:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \beta_x \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+) : |F(t, x)| \leq \beta_x(t)$$

alors le problème (II) admet une unique solution  $x \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$  et  $x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s))ds$ .

En remplaçant l'hypothèse de pseudo lipschitzianité dans le théorème précédent par une pseudo lipschitzianité locale:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0 \text{ et } \exists C_{T, x_0} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n) : \forall (x, y) \in B(x_0, r)^2, \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq C_{T, x_0}(t) \|x - y\|$$

alors il existe  $0 < T_0 \leq T$  tel qu'il existe une unique solution  $x \in \mathcal{C}^0([0, T_0], \mathbb{R}^n)$  et on a:

- ou bien  $T_0 = T$  et  $x \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$
- ou bien  $|x(t)| \rightarrow_{t \rightarrow T_0} +\infty$ .

Définition:

On dit que le système  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$  (A) est contrôlable en temps T si pour tout  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $u \in \mathcal{C}^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k)$  tel que:

- (A) admet une unique solution dans  $AC([0, T], \mathbb{R}^n)$
- $x(T) = x_1$ .

Il est souvent pertinent de considérer une notion locale de la contrôlabilité.

Définition: Contrôlabilité autour d'une trajectoire

Soit  $\bar{u} \in L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k)$  et  $\bar{x} \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$  la trajectoire associée à  $\bar{u}$ . (A) est contrôlable autour de  $(\bar{u}, \bar{x})$  si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\nu$  strictement positif tel que:

$$\forall x_0 \in B(\bar{x}_0, \nu), \forall x_1 \in B(\bar{x}_1, \nu), \exists u \in L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k) : \|u - \bar{u}\| \leq \epsilon$$

et la trajectoire  $x$  engendrée par  $u$  à partir de  $x_0$  vérifie  $x(T) = x_1$ .

Si  $\|u - \bar{u}\| << 1$  et sous les bonnes conditions sur  $f$ , alors:  $\|x - \bar{x}\| << 1$ .

En posant  $u := \bar{u} + v$  et  $x := \bar{x} + y$ , la dynamique  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$  peut être approché par la dynamique linéarisé:

$$\dot{y} \approx \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))y(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))v(t) \quad (B).$$

Définition:

Le système (B) est appelé le linéarisé de (A) autour de la trajectoire  $(\bar{x}, \bar{u})$ .

Si  $(\bar{x}, \bar{u})$  est stationnaire (point d'équilibre de la dynamique) alors le système linéarisé est autonome.

Théorème: Test linéaire

Si le système linéarisé autour d'un point stationnaire  $(\bar{x}, \bar{u})$  est contrôlable, alors le système non-linéaire de départ est localement contrôlable autour de ce point d'équilibre.

Il s'agit d'une condition suffisante mais non nécessaire.

## 2 Stabilité et Stabilisation des Systèmes Dynamiques

### 2.1 Trois Notions de Stabilité

On considère un système dynamique autonome  $\dot{x} = F(x(t))$  avec  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et localement lipschitzienne (ces hypothèses sont conservées sur  $F$  dans toute cette section sauf indications contraires).

#### Définition:

Un point  $x_*$  est appelé un point d'équilibre de la dynamique si  $F(x_*) = 0$ , il est dit:

- Stable si:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - x_*\| < \delta \implies \|x(t) - x_*\| \leq \epsilon$ .
- Asymptotiquement stable si:  $x_*$  est stable et si  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \|x(t) - x_*\| \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$ .
- Exponentiellement stable si:  $x_*$  est stable et s'il existe  $\delta > 0$  et  $c \geq 0$  tels que:  $\|x(t) - x_*\| \leq Ce^{-\delta t}\|x_0 - x_*\|$ .

On a évidemment exponentiellement stable qui implique asymptotiquement stable qui implique ensuite stable.

### 2.2 Stabilité des Systèmes Linéaires

On considère le cas particulier d'un système linéaire  $\dot{x} = Ax$  avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible. Le seul point d'équilibre de la dynamique est donc le point 0. Par ailleurs ce système a pour solution:

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

l'étude de la stabilité se ramène donc à l'étude de  $(e^{tA}, t \geq 0)$ .

#### 2.2.1 Cas des matrices diagonalisables

On suppose que  $A$  est diagonalisable, on peut alors écrire:

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

le système est donc stable si  $Re(\lambda_j) \leq 0$ , pour tout  $j$ . Il est exponentiellement stable si et seulement si  $Re(\lambda_j) < 0$ , pour tout  $j$ .

#### 2.2.2 Cas des matrices non diagonalisables

On appelle bloc de Jordan une matrice du type:

$$J_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_j + N_j \quad \text{avec} \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

on remarque donc que:

$$e^{tJ_j(\lambda)} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème: Décomposition de Jordan

Toute matrice carré  $A$  peut s'écrire sous la forme:

$$A = P \begin{pmatrix} J_{j_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{j_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ce théorème permet d'écrire l'égalité suivante:

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r(\lambda_r)} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Proposition:

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec leur multiplicité algébrique.

Si  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$  pour tout  $j$ , le système est exponentiellement stable. Si  $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$  et  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$  pour tout  $j \in [|2, r|]$  le système est simplement stable.

## 2.3 Stabilité des Systèmes Non Linéaires

Soit  $x^*$  un état d'équilibre de  $\dot{x} = F(x)$ .

Définition:

$x^*$  est dit:

- localement asymptotiquement stable si: il est stable et s'il existe  $\delta > 0$  telle que

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \implies \|x(t) - x^*\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

- localement exponentiellement stable si: il est stable et s'il existe  $\delta, \mu > 0$  telles qu'il existe  $C \geq 0$  telle que:

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \implies \|x(t) - x^*\| \leq Ce^{-\gamma t} \|x_0 - x^*\|.$$

Comme précédemment un point localement exponentiellement stable est localement asymptotiquement stable.

Théorème: Test linéaire

Soit  $x^*$  un point d'équilibre du système non-linéaire  $\dot{x} = F(x)$  avec  $F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\dot{y} = Ay$  le système linéarisé autour de  $x^*$  (avec  $A = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)$  la jacobienne de  $F$  en  $x^*$ ).

Si le système  $\dot{y} = Ay$  est asymptotiquement/exponentiellement stable, alors le système non-linéaire est localement asymptotiquement/exponentiellement stable autour de  $x^*$ .