

Stochastic Process and Applications

Paul Lehaut

October 1, 2025

Contents

1	Chapitre 1: Rappels	3
1.1	Mesure	3
1.2	Fonctions Mesurables	3
1.3	Théorème de convergence pour l'intégration	4
1.4	Espace L^p	4
1.5	Espérance, Variance et Inégalités	5
2	Espérance Conditionnelle	5
2.1	Espérance Conditionnelle	5
2.2	Expérience Conditionnée par une VA	7

1 Chapitre 1: Rappels

1.1 Mesure

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable.

Définition:

Une fonction $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ est dite σ -additive si pour toute collection dénombrable $(A_i, i \in I)$ d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, on a:

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Une mesure μ sur (Ω, \mathcal{F}) est σ -additive, à valeur dans $[0, +\infty]$, définie sur \mathcal{F} telle que: $\mu(\emptyset) = 0$. On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré, $A \in \mathcal{F}$ est de mesure nulle si $\mu(A) = 0$.

μ est dite σ -finie si il existe $(\Omega_n, n \in \mathbb{N})$ telle que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \mu(\Omega_n) < +\infty.$$

Une mesure de probabilité \mathbb{P} est une mesure telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Soit donc μ une mesure sur (Ω, \mathcal{F}) .

Proposition:

On a les propriétés suivantes:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$$

Convergence monotone: pour $(A_n, n \in \mathbb{N})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, alors $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$

Si $(A_i, i \in I)$ est une collection dénombrable d'ensembles mesurables, alors il vient: $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.

Définition:

Les événements $(A_i, i \in I)$ sont indépendants si, pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, on a:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

1.2 Fonctions Mesurables

Soient (S, \mathcal{S}) et (E, \mathcal{E}) deux espaces mesurables. Soit f une fonction de S dans E , alors:

$$\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{E}\} = \sigma(f)$$

est une σ -algèbre.

Définition: Fonction mesurable

La fonction f est dite mesurable si $\sigma(f) \subset \mathcal{S}$.

Si μ est une mesure sur (E, \mathcal{E}) et que f est mesurable, alors $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ est une mesure sur (S, \mathcal{S}) .

Une fonction continue définie sur un espace topologique et prenant ses valeurs dans un espace topologique est mesurable au sens de la σ -algèbre borélienne.

Pour f et g des fonctions mesurables à valeurs réelles définies sur le même espace mesurable, alors les fonction fg

et $\max(f, g)$ sont mesurables. Si par ailleurs ses fonctions ne prennent pas de valeurs infinies, alors la fonction $f + g$ est mesurable.

La composition de fonctions mesurables est également mesurable.

Proposition:

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles mesurables, alors les fonctions $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont mesurables, en particulier, si (f_n) converge simplement, alors sa limite est mesurable.

Définition: Variable Aléatoire

Une variable aléatoire X définie de Ω dans E est une fonction mesurable définie sur (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . X est dite indépendante de la σ -algèbre \mathcal{H} si, pour tout $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{H}$, les événements $\{X \in A\}$ et B sont indépendants.

1.3 Théorème de convergence pour l'intégration

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles. Cette suite converge presque partout si

$$\liminf f_n = \limsup f_n \text{ presque partout.}$$

On rappelle que la limite de cette suite de fonction est alors mesurable.

Théorème: Convergence monotone

Soit $(f_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ presque partout, alors il vient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Le lemme de Fatou donne, pour (f_n, n) une suite de fonctions mesurables et positives presque partout, alors il vient:

$$\liminf \int f_n d\mu \geq \int \liminf f_n d\mu.$$

Théorème: Convergence dominée de Lebesgue

Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles mesurables, soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles mesurables. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a presque partout $|f_n| \leq g$, que f désigne la limite de (f_n) et que g est intégrable, alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

1.4 Espace L^p

On commence par rappeler les inégalités suivantes pour f et g des fonctions mesurables à valeurs réelles:

Inégalité de Hölder: Soient $p, q \in (1, +\infty)$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, supposons que $|f|^p$ et $|g|^q$ soient intégrables, alors fg est intégrable et on a:

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz: Supposons que f et g soient de carré intégrable, alors fg est intégrable et on a:

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int f^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int g^2 d\mu \right)^{1/2}$$

on a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles presque partout.

Inégalité de Minkowski: Soit $p \in [1, +\infty)$, supposons que $|f|^p$ et $|g|^p$ soient intégrables, alors on a:

$$(\int |f + g|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int |g|^p d\mu)^{1/p}.$$

Proposition:

Soit $p \in [1, +\infty)$, l'espace-vectoriel normé $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet.

Théorème: Fubini

Soient ν et μ deux mesures σ -finies respectivement sur (E, \mathcal{E}) et (S, \mathcal{S}) , alors:

-il existe une unique mesure sur $(E \times S, \mathcal{E} \otimes \mathcal{S})$, notée $\nu \otimes \mu$, telle que:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{S}, \nu \otimes \mu(A \times B) = \nu(A)\mu(B)$$

c'est la mesure produit

-Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $E \times S$, alors:

$$\int f(x, y) \nu \otimes \mu(dx, dy) = \int \int f(x, y) \mu(dy) \nu(dx) = \int \int f(x, y) \nu(dx) \mu(dy).$$

1.5 Espérance, Variance et Inégalités

Soit X une variable aléatoire, soit f une fonction à valeurs réelles, si $\mathbb{E}(f(X))$ est bien définie, alors on a:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int f(x) \mathbb{P}_X(dx).$$

Inégalité de Tchebychev: Soit X une $VA_{\mathbb{R}}$, soit, $a > 0$, alors:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

Inégalité de Jensen: Soit X une $VA_{\mathbb{R}^d}$ intégrable, soit f une fonction à valeurs réelles convexe définie sur \mathbb{R}^d , alors $\mathbb{E}(f(X))$ est bien définie et:

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

2 Espérance Conditionnelle

2.1 Espérance Conditionnelle

On s'intéresse à une $VA_{\mathbb{R}}$ définie sur (E, \mathcal{F}) dont l'espérance est bien définie ainsi qu'à $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ une σ -algèbre.

Définition: Espérance conditionnelle

On dit qu'une variable aléatoire Z , mesurable pour \mathcal{H} telle que $\mathbb{E}(Z)$ soit bien définie, est l'espérance conditionnelle de X par rapport à \mathcal{H} si:

$$\mathbb{E}(X1_A) = \mathbb{E}(Z1_A), \forall A \in \mathcal{H}.$$

Pour Z et Z' deux variables aléatoires \mathcal{H} mesurables telles que leurs espérances soient bien définies et que:

$$\mathbb{E}(Z1_A) = \mathbb{E}(Z'1_A), \forall A \in \mathcal{H}$$

alors $Z = Z'$ presque partout.

Théorème: Radon-Nikodym

Soient μ et ν deux mesures σ -finie sur (Ω, \mathcal{H}) telles que: $\nu(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$, alors il existe une fonction mesurable f positive telle que:

$$\int_A f d\nu = \mu(A)$$

on note alors: $f \frac{d\mu}{d\nu}$ et on l'appelle dérivée de Radon-Nikodym.

Proposition:

Pour X et Y des VAR de carré intégrable alors:

-Si X est positive presque partout, alors l'espérance conditionnelle de X est positive presque partout.

-On a presque partout: $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{H}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$.

-Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de VAR positives de carré intégrable alors on a presque partout:

$$\lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\lim X_n|\mathcal{H}).$$

Proposition:

L'espérance conditionnelle de X par rapport à \mathcal{H} existe toujours, par ailleurs on a:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})) = \mathbb{E}(X)$$

donc l'intégrabilité de X entraîne celle de $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$.

Proposition:

-Si X est positive presque partout alors son espérance conditionnelle l'est également.

-Si X et Y sont intégrables, alors, pour tout réels a et b , on a :

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{H}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$$

et, si $X \leq Y$ presque partout, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$ presque partout.

-Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de VAR positives presque partout, alors on a presque partout:

$$\lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\lim X_n|\mathcal{H}).$$

-Le lemme de Fatou s'écrit: Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de VAR positives presque partout, alors on a presque partout:

$$\mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{H}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}).$$

-La convergence dominée de Lebesgue s'écrit: Soient $X, Y, (X_n)$ des VAR telles que (X_n) converge vers X presque partout et $|X_n| \leq Y$ avec Y intégrable, alors on a :

$$\lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

Par ailleurs, les inégalités de Hölder, Cauchy-Schwarz, Minkowski et Jensen restent valables pour l'espérance conditionnelle.

De plus, pour X et Y deux VAR telles que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(XY)$ soient bien définies et que Y soit \mathcal{H} mesurable, alors on a:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})Y).$$

Proposition:

On suppose X intégrable, alors:

-Si X est \mathcal{H} mesurable, alors: $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = X$.

-Si X est indépendante de \mathcal{H} alors: $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X)$.

-Si Y est une VA \mathcal{H} mesurable telle que $\mathbb{E}(XY)$ soit bien définie, alors: $\mathbb{E}(YX|\mathcal{H}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$.

-Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ est une σ -algèbre, alors: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

2.2 Expérience Conditionnée par une VA

Soit V une variable aléatoire définie sur (E, \mathcal{E}) , on note $\mathbb{E}(X|V) = \mathbb{E}(X|\sigma(V))$, si $\mathbb{E}(X)$ est bien définie, alors il existe une fonction mesurable g définie sur E telle que: $\mathbb{E}(X|V) = g(V)$.

Si V est discrète, alors:

$$g(v) = \frac{\mathbb{E}(X1_{V=v})}{\mathbb{P}(V=v)} = \mathbb{E}(X|V=v) \text{ si } \mathbb{P}(V=v) > 0, \text{ et } g(v) = 0 \text{ sinon.}$$