

# Contrôle des systèmes dynamiques

Paul Lehaut

September 27, 2025

# Contents

<b>1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques</b>	<b>3</b>
1.1 Cas des systèmes linéaires autonomes . . . . .	3
1.2 Contrôle des systèmes non linéaires . . . . .	4

On s'intéresse à  $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t))$  où  $x(t)$  désigne l'état du système et  $u(t)$  le contrôle. On s'intéressera tout d'abord à:  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et  $u \in L^\infty([0, T], \mathcal{U})$  où  $\mathcal{U}$  désigne un sous-ensemble d'un espace-vectoriel.

Les trois questions principales sont:

-Question de contrôlabilité: pour  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $T$  fini, existe-t-il une fonction de contrôle  $u$  telle que:  $x_u(T) = x_1$ ?

-Question de contrôle optimal: on suppose qu'il existe au moins un contrôle emmenant le système de  $x_0$  à  $x_1$  en un temps  $T$ , existe-t-il alors un contrôle qui permet de réaliser ce passage en minimisant un critère ?

-Question de stabilisation: un état  $x^*$  étant donné, peut-on construire un contrôle  $u(t)$  de type  $k(x(t))$  (contrôle en boucle fermée) qui permet de ramener le système de l'état  $x_0$  à l'état  $x^*$  en un temps  $T$  ?

## 1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

### 1.1 Cas des systèmes linéaires autonomes

Un système linéaire autonome est un système de la forme:

$$(I) \quad \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t), \text{ avec } x(0) = x_0, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ et } B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}).$$

La solution de ce système est explicite donnée par:

$$x(t) = e^{tA}x_0 \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Le problème de contrôle en un temps  $T$  peut alors se réécrire,  $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , trouver  $u \in L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k)$  telle que:

$$\int_0^T e^{(t-s)A}Bu(s)ds = \Phi_T(u) = x_1 - e^{TA}x_0$$

soit encore montrer que l'application linéaire:

$$\begin{aligned} L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \Phi_T : \quad u &\longmapsto \int_0^T e^{(t-s)A}Bu(s)ds \end{aligned}$$

est surjective.

Théorème: Critère de Kalman

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , soit  $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ , pour  $T > 0$ , le système (I) est contrôlable en un temps  $T$  si et seulement si la matrice  $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  est de rang maximal  $n$ .

On constate par ailleurs que ce critère ne dépend pas du temps  $T$ .

Théorème: Le système (I) est contrôlable si et seulement si la matrice

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A}BB^Te^{(T-s)A^T}ds$$

est inversible, un contrôle admissible est alors:

$$u(t) = B^Te^{(t-s)A^T}G_T^{-1}x(x_1 - e^{TA}x_0).$$

L'ensemble des contrôles admissibles réalisant le passage de  $x_0$  à  $x_1$  en temps  $T$  est:

$$\{u \in L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k) \mid \Phi_T(u) = x_1 - e^{TA}x_0\}.$$

## 1.2 Contrôle des systèmes non linéaires

On s'intéresse aux systèmes de la forme:

$$(II) \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), u(t)), \text{ avec } x(0) = x_0.$$

On peut tout d'abord se demander si, pour  $u \in L^{+\infty}([0, T], \mathbb{R}^k)$  fixé, le problème de Cauchy (II) a-t-il une solution et une seule sur l'intervalle  $[0, T]$ ? Autrement dit le problème de Cauchy qui consiste à chercher  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(t, x(t)), \text{ avec } x(0) = x_0 \text{ et } F(t, x(t)) = f(t, x(t), u(t))$$

a-t-il une unique solution?

Dans le cas standard, si  $F$  est continue et lipschitzienne en  $x$  alors l'équation admet une unique solution. Néanmoins en théorie du contrôle on peut tout à fait considérer des contrôles discontinus qui implique en général la discontinuité de  $F$ .

Définition: On note  $AC([0, T], \mathbb{R}^n) := \{x \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \mid \frac{dx}{dt} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n)\}$ , la dérivée est ici à prendre au sens des distributions.

Pour tout  $x \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ , on a:  $x(t) = \int_0^t \frac{dx}{dt}(s) ds + x_0$ .

Théorème: Soit  $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mesurable et vérifiant:

$$\exists c_T \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+) : \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq c_T(t) \|x - y\| \quad (\text{Pseudo lipschitzianité})$$

et:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \beta_x \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+) : |F(t, x)| \leq \beta_x(t)$$

alors le problème (II) admet une unique solution  $x \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$  et  $x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s)) ds$ .

En remplaçant l'hypothèse de pseudo lipschitzianité dans le théorème précédent par une pseudo lipschitzianité locale:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0 \text{ et } \exists C_{T, x_0} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n) : \forall (x, y) \in B(x_0, r)^2, \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq C_{T, x_0}(t) \|x - y\|$$

alors il existe  $0 < T_0 \leq T$  tel qu'il existe une unique solution  $x \in C^0([0, T_0], \mathbb{R}^n)$  et on a:

- ou bien  $T_0 = T$  et  $x \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$
- ou bien  $|x(t)| \rightarrow_{t \rightarrow T_0} +\infty$ .