Analyse Complexe

Paul Lehaut

November 17, 2025

Contents

1 Différentiabilité Complexe

1.1 Préliminaires

Dans tout ce cours, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition: Différentiabilité complexe

Soit $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, f est $\mathbb{C}$-différentiable en un point intérieur a de A si:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe dans } \mathbb{C}.$$

f est $\mathbb{C}$-différentiable sur A si elle est dérivable en tout point de A, on dit alors qu'elle est holomorphe. Si $A = \mathbb{C}$, on dit que f est complète.

Théorème:

f holomorphe implique f continue et f' holomorphe.

1.2 Dérivée et différentielle complexe

On rappelle qu'un espace vectoriel est réel (resp complexe) si son champ de scalaire est l'axe des réels (resp le plan complexe).

Définition:

Soient E et F des espace-vectoriel normés complexes, soit $l : E \longrightarrow F$, l est linéaire complexe si elle est additive est homogène complexe (ie $\forall \lambda \in \mathbb{C} l(\lambda z) = \lambda l(z)$).

Soientt $f : A \subset E \longrightarrow F$, z un point intérieur de A, la différentielle complexe de f en z est l'opérateur linéaire complexe (donc continu):

$$df_z : E \longrightarrow F \quad \text{tel que} \quad \lim_{h \to 0} \frac{||f(z+h) - f(z) - df_z(h)||}{||h||} = 0.$$

On a alors: $f(z+h) = f(z) + df_z(h) + \epsilon(h)||h||$ où $\epsilon(h) \to_{h \to 0} 0$.

Théorème:

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ df_z existe si et seulement si $f'(z)$ existe et alors: $df_z(h) = f'(z)h$.

Proposition:

On a les résultats classiques d'addition, de produit, de quotient et de composition des fonctions $\mathbb{C}$-différentiable.

1.3 Equations de Cauchy-Riemann

On note dans cette section $f = u + iv$, une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.

Théorème:

f est $\mathbb{C}$-différentiable si et seulement si on a l'une des équivalences suivantes:

- f est $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω et sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire
- $df_z(i) = i df_z(1)$ (1)
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{i \partial y}$ (2)
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (3)

Les égalités (2) et (3) correspondent aux équations de Cauchy-Riemann.

Corrolaire :

f est $\mathbb{C}$-différentiable si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent, sont continues et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{i\partial y}$ ce qui équivaut également à $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent, sont continues et vérifient l'égalité de Cauchy-Riemann définie précédemment.

2 Intégrale Linéaire et Primitive

2.1 Chemin

L'objectif principal de cette session est d'obtenir la version complexe du théorème fondamentale du calcul intégral qui donne, dans le cas réel:

Pour I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors g est la primitive de f si et seulement si:

$$\forall x \in I,\ g(x) = g(a) + \int_a^x f.$$

Définition: Chemin

Un chemin γ est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, si $A \subset \mathbb{C}$, γ est un chemin de A si son image est incluse dans A.

Un chemin est fermé si son point de départ est égal à son point d'arrivé ie: $\gamma(0) = \gamma(1)$. Des chemins sont consécutifs si le point de départ de l'un est le point final de l'autre.

Le chemin retour de γ est le chemin $\gamma^*(t) = \gamma(1-t)$.

Définition: Ensembles ouverts (connexes par arcs)

Ω est connexe (par arcs) si pour chacun de ces points x, y il y a un chemin de Ω qui lie x à y.

Définition: Concaténation de chemins

Soit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ une partition de $[0,1]$, la concaténation de chemins consécutifs associées à cette partition est le chemin γ défini par:

$$\gamma = \gamma_1|_{t_1}...|_{t_{n-1}}\gamma_n \quad \text{tel que } \forall k, \gamma|_{[t_{k-1},t_k]} = \gamma_k(\frac{t-t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}).$$

Si la partition est uniforme (ie $t_k = k/n$), alors on notera: $\gamma = \gamma_1|...|\gamma_n$.

Définition: Chemin rectifiable

Un chemin γ est rectifiable s'il est continûment différentiable par morceaux, on peut alors écrire $\gamma = \gamma_1|_{t_1}...|_{t_{n-1}}\gamma_n$ où les γ_k sont continûments différentiables.

On peut donc introduire le lemme suivant pour renforcer la notion de connexité:

Lemme: Connexité et chemins rectifiables

Ω est connexe si et seulement si toute paire de points de Ω peut être reliée par un chemin rectifiable dans Ω.

2.2 Intégrales de Ligne

Pour étudier les intégrales de ligne on doit d'abord introduire la notion suivante:

Définition: Longueur d'un chemin rectifiable

La longueur d'un chemin γ continûment différentiable est:

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'| \geq 0.$$

Si γ est seulement un chemin rectifiable, alors:

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\gamma_k).$$

On peut alors définir:

Définition: Intégrale de ligne

L'intégrale de ligne le long d'un chemin continûment différentiable γ d'une fonction complexe f définie et continue sur l'image de γ est le nombre complexe défini par:

$$\int_{\gamma} f = \int_{0}^{1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si γ est seulement un chemin rectifiable, alors:

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f.$$

Théorème: Inégalité M-L

Pour tout chemin rectifiable γ et toute fonction continue $f : \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$|\int_{\gamma} f| \leq (\max_{z\gamma([0,1])} |f(z)|)l(\gamma).$$

Corrolaire: Convergence dans les intégrales de ligne

Pour tout chemin rectifiable γ et toute suite de fonction continue $f_n : \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui converge uniformément vers f, il vient:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f.$$

Théorème: Invariance par re-paramétrisation

Soit γ un chemin continûment différentiable, soit $\Phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant tel que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$, alors il vient:

- Le chemin $\mu = \gamma \circ \Phi$ est continûment différentiable, son image est la même que celle de γ,
- Les longueurs de μ et de γ sont identiques,
- Pour toutes fonctions continues $f : \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\mu} f.$$

Définition: Image d'un chemin par un fonction

Soit un chemin γ et une fonctions continues $f : \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$, l'image de γ par f est le chemin $f \circ \gamma$.

Théorème: Changement de variable

Soit γ un chemin rectifiable sur Ω et f une fonction $\mathbb{C}$-différentiable, alors le chemin $f \circ \gamma$ est rectifiable et pour toute fonction continue $g : f \circ \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_{f\circ\gamma} g = \int_{\gamma} (g \circ f)(t)f'(t)dt.$$

2.3 Primitives

On va définir la primitive de façon analogue à la primitive de l'analyse réelle:

Définition:Primitive Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, une primitive (ou antidérivée) de f est une fonction holomorphique $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $g' = f$.

Théorème:Théorème fondamental du calcul intégral

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et soit a un point de de Ω. Une fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f si et seulement si pour tout $z \in \Omega$ et tout chemin rectifiable γ de Ω qui lient a et z, alors:

$$g(z) = g(a) + \int_\gamma f(w)dw.$$

Corrolaire: Existence de primitives et ensemble de primitives

On suppose que Ω est connexe, la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive si et seulement si elle est continue si pour tout chemin fermé rectifiable γ:

$$\int_\gamma f = 0.$$

Maintenant, si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f, alors la fonction $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est également une primitive de f si et seulement si elle est égale à g à une constant près.

Corrolaire: Intégration par parties

On suppose que Ω est connexe, soit γ un chemin rectifiable de Ω, pour toute paire de fonction holomorphe $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, alors:

$$\int_\gamma f'g = [fg(\gamma(1)) - fg(\gamma(0))] - \int_\gamma fg'.$$