

Statistiques et Analyse de Données

Paul Lehaut

September 28, 2025

Contents

1 Rappels	3
1.1 Espérance et (Co)Variance	3
1.2 Indépendance	3
1.3 Variables Aléatoires Discrètes	4
1.4 Variables Aléatoires à Densité	4
1.5 Somme de VAs indépendantes	4
1.6 Fonction de Répartition	4
1.7 Fonction Charactéristique	5
1.8 Vecteurs Gaussiens	5
1.9 Théorèmes de Convergence	5

1 Rappels

1.1 Espérance et (Co)Variance

On considère dans cette section des VAR.

Définition:

L'espérance de $X \sim \mathbb{P}$ est l'intégral de Lebesgue:

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{x \in \mathbb{R}} x d\mathbb{P}(x)$$

qui est bien définie si X est intégrable, c'est-à-dire si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.

Si par ailleurs $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$, alors la variance de X est bien définie par:

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

L'inégalité de Jensen donne alors, pour X une VAR d intégrable, soit f une fonction à valeurs réelles convexe définie sur \mathbb{R}^d , alors $\mathbb{E}(f(X))$ est bien définie et:

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Définition:

La covariance entre X et Y , telles que $\mathbb{E}(X) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y) < +\infty$, est définie par:

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

on a alors l'identité remarquable suivante:

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

Lorsque X est une VAR d de carré intégrable, on peut définir sa matrice de covariance qui est symétrique positive.

Définition: Le coefficient de corrélation de X et Y est définie par:

$$\rho_{X,Y} := \begin{cases} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1] & \text{si } \text{Var}(X) \text{Var}(Y) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.2 Indépendance

Définition: Une famille finie de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) définies sur (Ω, \mathcal{F}) est indépendante si pour toute famille de sous-ensembles mesurables (C_1, \dots, C_n) on a:

$$\mathbb{P}(X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n) = \mathbb{P}(X_1 \in C_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in C_n)$$

ou, de façon équivalente, si:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}.$$

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors, pour toutes fonctions mesurables f_1, \dots, f_n telles que $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ soient intégrables, on a:

$$\mathbb{E}(f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)) = \mathbb{E}(f_1(X_1)) \dots \mathbb{E}(f_n(X_n)).$$

1.3 Variables Aléatoires Discrètes

Si E est discret, toutes mesures de probabilités est caractérisée par la famille de nombres $(p(x), x \in E)$. Les variables aléatoires principales sont définies dans le polycopié.

1.4 Variables Aléatoires à Densité

Les intégrales sont ici à considérer au sens de Lebesgue.

Définition:

Une variable aléatoire X est dite à densité p si:

$$\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}(X \in C) = \int_{x \in C} p(x)dx$$

une fonction mesurable et positive p est une densité de probabilité si et seulement si:

$$\int_{x \in \mathbb{R}^d} p(x)dx = 1.$$

Des variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes si le vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) a pour densité $p = p_{X_1} \otimes \dots \otimes p_{X_n}$.

Théorème: Formule de transfert

Si X a une densité p , alors pour toutes fonctions mesurables f telle que $\mathbb{E}(|f(X)|) < +\infty$, alors:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)p(x)dx.$$

Les exemples principaux de variables aléatoires à densité se trouvent dans le polycopié.

1.5 Somme de VAs indépendantes

Soient X et Y deux VAs indépendantes, on note $Z := X + Y$.

Proposition:

La densité de Z est:

$$r(z) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} p_X(x)p_Y(z - x)dx$$

on l'appelle la convolution de p_X et p_Y .

1.6 Fonction de Répartition

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}$.

Définition:

La fonction de répartition d'un variable aléatoire X est définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

alors, pour tout réel $r \in (0, 1)$, un quantile d'ordre r pour X est un nombre q_r tel que:

$$\mathbb{P}(X \leq q_r) = F(q_r) = r.$$

En général un quantile n'existe pas toujours ou n'est pas unique, néanmoins, lorsque X possède une densité qui est positive alors le quantile existe et est unique.

1.7 Fonction Charactéristique

Soient X et Y des vecteurs aléatoires.

Définition: Fonction Charactéristique

La fonction caractéristique de X est la fonction $\Psi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ définie par:

$$\Psi_X(u) := \mathbb{E}(e^{i\langle u, X \rangle}) = \mathbb{E}(\cos(\langle u, X \rangle)) + i\mathbb{E}(\sin(\langle u, X \rangle)).$$

Proposition:

Si, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_X(u) = \Phi_Y(u)$, alors X et Y sont de même loi.

Proposition:

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ sont indépendantes, alors:

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2).$$

1.8 Vecteurs Gaussiens

Soit X un vecteur aléatoire.

Définition: Vecteur Gaussien

X est un vecteur Gaussien si, pour tout vecteur u , la variable aléatoire $\langle u, X \rangle$ est gaussienne.

De ce qui précède, on déduit que, en notant $\mathbb{E}(X) = m$ et $Cov(X) = K$, alors:

$$\langle u, X \rangle \sim \mathcal{N}(\langle u, m \rangle, \langle u, Ku \rangle) \text{ et } \Phi_X(u) = \exp(i\langle u, m \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Ku \rangle).$$

Par ailleurs, si K est inversible, alors X a la densité:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det K}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x - m, K^{-1}(x - m) \rangle\right)$$

sinon X n'a pas de densité.

1.9 Théorèmes de Convergence

Soient (X_n) et X des vecteurs aléatoires.

Définition:

(X_n) converge vers X presque sûrement si: $\mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1$.

(X_n) converge vers X en probabilité si, pour tout $\epsilon > 0$, $\lim \mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \epsilon) = 0$.

(X_n) converge vers X en distribution si, pour toute fonction continue et bornée $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f(X_n))$ converge vers $\mathbb{E}(f(X))$.

Théorème: Convergence Dominée

Supposons que (X_n) converge vers X presque sûrement et qu'il existe Y positive et intégrable telle que: $\|X_n\| \leq Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X_n)$ converge vers $\mathbb{E}(X)$.

Pour f une fonction continue, si (X_n) converge presque sûrement (respectivement en probabilité ou en distribution) vers X alors $f(X_n)$ converge presque sûrement vers $f(X)$ (respectivement en probabilité ou en distribution).

Proposition:

(X_n) converge en distribution vers X si et seulement si $\Psi_{X_n}(u)$ converge vers $\Psi_X(u)$ pour tout u .

La convergence presque sûre implique la converge en probabilité qui implique elle même la converge en distribution.

Si on se place dans le cadre réel, alors on a les équivalences suivantes:

- (X_n) converge vers X en distribution

- $\mathbb{P}(X_n \leq x) \rightarrow \mathbb{P}(X \leq x)$ pour tout x tel que $\mathbb{P}(X = x) = 0$

- $\mathbb{P}(X_n < x) \rightarrow \mathbb{P}(X < x)$ pour tout x tel que $\mathbb{P}(X = x) = 0$

On dit que la suite (X_n) est indépendante et indentiquement distribuée si ses variables sont indépendantes et de même loi. On note alors:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

la moyenne empirique de X_1, \dots, X_n .

Théorème: La Loi Forte des Grands Nombres

Soit (X_n) une suite de VAR^d iid telle que $\mathbb{E}(\|X_1\|) < +\infty$, alors:

$$\lim \bar{X}_n = \mathbb{E}(X_1) \text{ presque sûrement.}$$

Théorème: Théorème Central Limite Multivarié

Soit (X_n) une suite de VAR^d iid telle que $\mathbb{E}(\|X_1\|^2) < +\infty$, alors:

$$\lim \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)) = \mathcal{N}(0, \text{Cov}(X_1)) \text{ en distribution.}$$