Contrôle des systèmes dynamiques

Paul Lehaut

October 2, 2025

Contents

On s'intéresse à $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t))$ où $x(t)$ désigne l'état du système et $u(t)$ le contrôle. On s'intéressera tout d'abord à: $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, et $u \in L^{\infty}([0,T], \mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ désigne un sous-ensemble d'un espace-vectoriel.

Les trois questions pricipales sont:

-Question de contrôlabilité: pour $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, T fini, existe-t-il une fonction de contrôle u telle que: $x_u(T) = x_1$?

-Question de contrôle optimal: on suppose qu'il existe au moins un contrôle emmenant le système de x_0 à x_1 en un temps T, existe-t-il alors un contrôle qui permet de réaliser ce passage en minimisant un critère ?

-Question de stabilisation: un état $x*$ étant donné, peut-on construire un contrôle $u(t)$ de type $k(x(t))$ (contrôle en boucle fermée) qui permet de ramener le système de l'état x_0 à l'état $x*$ en un temps T ?

1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

1.1 Cas des systèmes linéaires autonomes

Un système linéaire autonome est un système de la forme:

$$(I)\ \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ \text{avec } x(0) = x_0,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{et } B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}).$$

La solution de ce système est explicite donnée par:

$$x(t) = e^{tA}x_0 \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds.$$

Le problème de contrôle en un temps T peut alors se réécrire, $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver $u \in L^{+\infty}([0,T], \mathbb{R}^k)$ telle que:

$$\int_0^T e^{(t-s)A} Bu(s)ds = \Phi_T(u) = x_1 - e^{TA}x_0$$

soit encore montrer que l'application linéaire:

$$\Phi_T : \begin{array}{ccc} L^{+\infty}([0,T], \mathbb{R}^k) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^T e^{(t-s)A} Bu(s)ds \end{array}$$

est surjective.

<u>Théorème:</u> Critère de Kalman
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, pour $T > 0$, le système (I) est contrôlable en un temps T si et seulement si la matrice $C = (B, AB, ..., A^{n-1}B)$ est de rang maximal n.

On constate par ailleurs que ce critère ne dépends pas du temps T.

<u>Théorème:</u>Le système (I) est contrôlable si et seulement si la matrice

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} BB^T e^{(T-s)A^T} ds$$

est inversible, un contrôle admissible est alors:

$$u(t) = B^T e^{(t-s)A^T} G_T^{-1} x(x_1 - e^{TA}x_0).$$

L'ensemble des contrôles admissibles réalisant le passage de x_0 à x_1 en temps T est:

$$\{u \in L^{+\infty}([0,T], \mathbb{R}^k) \mid \Phi_T(u) = x_1 - e^{TA}x_0\}.$$

1.2 Contrôle des systèmes non linéaires

On s'intéresse aux systèmes de la forme:

$$(II)\ \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ \text{avec } x(0) = x_0.$$

On peut tout d'abord se demander si, pour $u \in L^{+\infty}([0,T], \mathbb{R}^k)$ fixé, le problème de Cauchy (II) a-t-il une solution et une seule sur l'intervalle $[0,T]$? Autrement dit le problème de Cauchy qui consiste à chercher $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(t, x(t)),\ \text{avec } x(0) = x_0 \text{ et } F(t, x(t)) = f(t, x(t), u(t))$$

a-t-il une unique solution ?

Dans le cas standard, si F est continue et lipschitzienne en x alors l'équation admet une unique solution. Néanmoins en théorie du contrôle on peut tout à fait considérer des contrôles discontinus qui implique en général la discontinuité de F.

Définition:

On note $AC([0,T], \mathbb{R}^n) := \{x \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^n) \mid \frac{dx}{dt} \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)\}$, la dérivée est ici à prendre au sens des distributions.

Pour tout $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$, on a: $x(t) = \int_0^t \frac{dx}{dt}(s)ds + x_0$.

Théorème:Soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mesurable et vérifiant:

$$\exists c_T \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+) :\ ||F(t,x) - F(t,y)|| \leq c_T(t)||x - y|| \ \ \text{(Pseudo lipschitzianité)}$$

et:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists \beta_x \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+) :\ |F(t,x)| \leq \beta_x(t)$$

alors le problème (II) admet une unique solution $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ et $x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s))ds$.

En remplaçant l'hypothèse de pseudo lipschitzianité dans le théorème précédent par une pseudo lipschitzianité locale:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \exists r > 0 \text{ et } \exists C_{T,x_0} \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n) :\ \forall (x,y) \in B(x_0, r)^2,\ ||F(t,x) - F(t,y)|| \leq C_{t,x_0}(t)||x - y||$$

alors il existe $0 < T_0 \leq T$ tel qu'il existe une unique solution $x \in \mathcal{C}^0([0, T_0[, \mathbb{R}^n)$ et on a:

-ou bien $T_0 = T$ et $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$

-ou bien $|x(t)| \rightarrow_{t \rightarrow T_0} +\infty$.

Définition:

On dit que le système $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ (A) est contrôlable en temps T si pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in \mathcal{C}^+\infty([0,T], \mathbb{R}^k)$ tel que:

-(A) admet une unique solution dans $AC([0,T], \mathbb{R}^n)$

-$x(T) = x_1$.

Il est souvent pertinent de considérer une notion locale de la contrôlabilité.

Définition: Contrôlabilité autour d'une trajectoire

Soit $\bar{u} \in L^{+\infty}([0,T], \mathbb{R}^k)$ et $\bar{x} \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ la trajectoire associée à $\bar{u}$. (A) est contrôlable autour de $(\bar{u}, \bar{x})$ si ,pour tout $\epsilon > 0$, il existe ν strictement positif tel que:

$$\forall x_0 \in B(\bar{x}_0, \nu),\ \forall x_1 \in B(\bar{x}_1, \nu),\ \exists u \in L^{+\infty}([0,T], \mathbb{R}^k) :\ ||u - \bar{u}|| \leq \epsilon$$

et la trajectoire x engendrée par u à partir de x_0 vérifie $x(T) = x_1$.