Analyse Complexe

Paul Lehaut

November 20, 2025

Contents

1 Différentiabilité Complexe

1.1 Préliminaires

Dans tout ce cours, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition: Différentiabilité complexe

Soit $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, f est $\mathbb{C}$-différentiable en un point intérieur a de A si:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe dans } \mathbb{C}.$$

f est $\mathbb{C}$-différentiable sur A si elle est dérivable en tout point de A, on dit alors qu'elle est holomorphe. Si $A = \mathbb{C}$, on dit que f est complète.

Théorème:

f holomorphe implique f continue et f' holomorphe.

1.2 Dérivée et différentielle complexe

On rappelle qu'un espace vectoriel est réel (resp complexe) si son champ de scalaire est l'axe des réels (resp le plan complexe).

Définition:

Soient E et F des espace-vectoriel normés complexes, soit $l : E \longrightarrow F$, l est linéaire complexe si elle est additive est homogène complexe (ie $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ l(\lambda z) = \lambda l(z)$).

Soientt $f : A \subset E \longrightarrow F$, z un point intérieur de A, la différentielle complexe de f en z est l'opérateur linéaire complexe (donc continu):

$$df_z : E \longrightarrow F \quad \text{tel que} \quad \lim_{h \to 0} \frac{||f(z+h) - f(z) - df_z(h)||}{||h||} = 0.$$

On a alors: $f(z+h) = f(z) + df_z(h) + \epsilon(h)||h||$ où $\epsilon(h) \to_{h \to 0} 0$.

Théorème:

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ df_z existe si et seulement si $f'(z)$ existe et alors: $df_z(h) = f'(z)h$.

Proposition:

On a les résultats classiques d'addition, de produit, de quotient et de composition des fonctions $\mathbb{C}$-différentiable.

1.3 Equations de Cauchy-Riemann

On note dans cette section $f = u + iv$, une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.

Théorème:

f est $\mathbb{C}$-différentiable si et seulement si on a l'une des équivalences suivantes:

- f est $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω et sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire
- $df_z(i) = idf_z(1)$ (1)
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{i\partial y}$ (2)
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (3)

Les égalités (2) et (3) correspondent aux équations de Cauchy-Riemann.

Corrolaire :

f est $\mathbb{C}$-différentiable si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent, sont continues et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{i\partial y}$ ce qui équivaut également à $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent, sont continues et vérifient l'égalité de Cauchy-Riemann définie précédemment.

2 Intégrale Linéaire et Primitive

2.1 Chemin

L'objectif principal de cette session est d'obtenir la version complexe du théorème fondamentale du calcul intégral qui donne, dans le cas réel:

Pour I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors g est la primitive de f si et seulement si:

$$\forall x \in I,\ g(x) = g(a) + \int_a^x f.$$

Définition: Chemin

Un chemin γ est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, si $A \subset \mathbb{C}$, γ est un chemin de A si son image est incluse dans A.

Un chemin est fermé si son point de départ est égal à son point d'arrivé ie: $\gamma(0) = \gamma(1)$. Des chemins sont consécutifs si le point de départ de l'un est le point final de l'autre.

Le chemin retour de γ est le chemin $\gamma^*(t) = \gamma(1-t)$.

Définition: Ensembles ouverts (connexes par arcs)

Ω est connexe (par arcs) si pour chacun de ces points x, y il y a un chemin de Ω qui lie x à y.

Définition: Concaténation de chemins

Soit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ une partition de $[0,1]$, la concaténation de chemins consécutifs associées à cette partition est le chemin γ défini par:

$$\gamma = \gamma_1|_{t_1}...|_{t_{n-1}}\gamma_n \quad \text{tel que } \forall k, \gamma|_{[t_{k-1},t_k]} = \gamma_k(\frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}).$$

Si la partition est uniforme (ie $t_k = k/n$), alors on notera: $\gamma = \gamma_1|...|\gamma_n$.

Définition: Chemin rectifiable

Un chemin γ est rectifiable s'il est continûment différentiable par morceaux, on peut alors écrire $\gamma = \gamma_1|_{t_1}...|_{t_{n-1}}\gamma_n$ où les γ_k sont continûments différentiables.

On peut donc introduire le lemme suivant pour renforcer la notion de connexité:

Lemme: Connexité et chemins rectifiables

Ω est connexe si et seulement si toute paire de points de Ω peut être reliée par un chemin rectifiable dans Ω.

2.2 Intégrales de Ligne

Pour étudier les intégrales de ligne on doit d'abord introduire la notion suivante:

Définition: Longueur d'un chemin rectifiable

La longueur d'un chemin γ continûment différentiable est:

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'| \geq 0.$$

Si γ est seulement un chemin rectifiable, alors:

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\gamma_k).$$

On peut alors définir:

Définition: Intégrale de ligne

L'intégrale de ligne le long d'un chemin continûment différentiable γ d'une fonction complexe f définie et continue sur l'image de γ est le nombre complexe défini par:

$$\int_\gamma f = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si γ est seulement un chemin rectifiable, alors:

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f.$$

Proposition:

L'intégrale de ligne est $\mathbb{C}$-linéaire.

Pour γ^* le chemin retour de γ, alors $l(\gamma) = l(\gamma^*)$ et $\int_\gamma f = -\int_{\gamma^*} f$.

Théorème: Inégalité M-L

Pour tout chemin rectifiable γ et toute fonction continue $f : \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$|\int_\gamma f| \leq (\max_{z\gamma([0,1])} |f(z)|)l(\gamma).$$

Corrolaire: Convergence dans les intégrales de ligne

Pour tout chemin rectifiable γ et toute suite de fonction continue $f_n : \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui converge uniformément vers f, il vient:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

Théorème: Invariance par re-paramétrisation

Soit γ un chemin continûment différentiable, soit $\Phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant tel que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$, alors il vient:

- Le chemin $\mu = \gamma \circ \Phi$ est continûment différentiable, son image est la même que celle de γ,
- Les longueurs de μ et de γ sont identiques,
- Pour toutes fonctions continues $f : \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_\gamma f = \int_\mu f.$$

Définition: Image d'un chemin par un fonction

Soit un chemin γ et une fonctions continues $f : \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$, l'image de γ par f est le chemin $f \circ \gamma$.

Théorème: Changement de variable

Soit γ un chemin rectifiable sur Ω et f une fonction $\mathbb{C}$-différentiable, alors le chemin $f \circ \gamma$ est rectifiable et pour toute fonction continue $g : f \circ \gamma([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_{f\circ\gamma} g = \int_\gamma (g \circ f)(t)f'(t)dt.$$

2.3 Primitives

On va définir la primitive de façon analogue à la primitive de l'analyse réelle:

Définition: Primitive

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, une primitive (ou antidérivée) de f est une fonction holomorphique $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $g' = f$.

Théorème: Théorème fondamental du calcul intégral

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et soit a un point de de Ω. Une fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f si et seulement si pour tout $z \in \Omega$ et tout chemin rectifiable γ de Ω qui lient a et z, alors:

$$g(z) = g(a) + \int_\gamma f(w)dw.$$

Corrolaire: Existence de primitives et ensemble de primitives

On suppose que Ω est connexe, la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive si et seulement si elle est continue et si pour tout chemin fermé rectifiable γ:

$$\int_\gamma f = 0.$$

Maintenant, si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f, alors la fonction $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est également une primitive de f si et seulement si elle est égale à g à une constant près.

Corrolaire: Intégration par parties

On suppose que Ω est connexe, soit γ un chemin rectifiable de Ω, pour toute paire de fonction holomorphe $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, alors:

$$\int_\gamma f'g = [fg(\gamma(1)) - fg(\gamma(0))] - \int_\gamma fg'.$$

3 Espaces Connexes

3.1 Espaces Connexes (par Arcs)

Ils existent deux définitions légèrements différentes qui caractérise le fait d'être en un seul morceau: la connexité et la connexité par arcs. La connexité est un peu plus faible que la connexité par arcs et donc un peu plus robuste et puissante. Néanmoins, dans la majorité des cas, et pour tous les ouverts, ces deux propriétés sont équivalentes.

Définition: Espace connexe par arcs

Un ensemble A est connexe par arcs si chacune de ces paires de points peut être reliée par un chemin de A.

Définition: Dilatation

B est une dilatation de A si on peut écrire : $B = \cup_{a \in A} B(a, r_a)$ avec $r_a > 0$ pour tout a.

Définition: Espace connexe

Un espace est connexe si toute ses dilatations sont connexes par arcs.

Théorème:

Tout ensemble connexe par arcs est connexe, de façon réciproque, tout ensemble ouvert connexe est connexe par arcs. Il est donc immédiat qu'un ensemble ouvert est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

3.2 Opérations Ensemblistes

De nombreuses propriétés sont communes aux espaces connexes et connexes par arcs, c'est le cas, sauf mention contraire de toutes les propriétés suivantes:

Théorème: Union d'ensemble d'intersection non-vide

Si $\mathcal{A}$ est une collection d'ensemble connexe (par arcs) dont l'intersection est non vide, alors leur union est également connexe (par arcs).

On peut par ailleurs se convaincre facilement que l'union de deux ouverts d'intersection vide n'est pas connexe (par arcs).

Théorème: Fermeture d'espaces connexes

La fermeture d'un espace connexe est connexe.

Attention, ce théorème ne s'applique en général pas aux espaces connexes par arcs, considérer par exemple l'ensemble connexe par arcs $A = \{(x, \sin(1/x));\ x \in]0, 1]\}$ dont la fermeture est $A \cup \{(0, y);\ y \in [-1, 1]\}$.

3.3 Composantes

On introduit deux concepts de composantes selon le type de connexité:

Définition: Composante

Une composante (connexe (par arcs)) d'un ensemble non vide A est un sous-ensemble de A qui est connexe (par arcs) et maximal au sens de l'inclusion pour de tels ensembles.

Théorème: Partition en composantes

Les composantes d'un ensemble non vide forment une partition de A.

On en déduit immédiatement qu'un ensemble non vide est connexe (par arcs) si et seulement s'il possède une unique composante.

Théorème: Composantes d'un ensemble ouvert

Les partitions en composante connexe et en composante connex par arcs d'un ensemble ouvert non vide sont indentiques.

On peut finalement introduire le concept de fonction localement constante:

Définition: Fonction localement constante

Un fonction f sur A est localement constante si, pour tout point de A, il existe une boule ouverte non vide centrée sur ce point telle que f soit constante sur l'intersection de A et de cette boule.

Théorème: Fonction localement constante et ensemble connexe

Un ensemble est connexe si et seulement si toute fonction localement constante définie sur cet ensemble est en fait constante.

4 Théorème Intégral de Cauchy - Version Locale

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir une première version du théorème intégral de Cauchy:

Théorème: Intégrale de Cauchy (Version locale)

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-différentiable, pour tout $a \in \Omega$, il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ et pour tout chemin rectifiable fermé γ de cette boule:

$$\int_\gamma f = 0.$$

4.1 Lemme d'Intégration sur les Chemins Polygonaux

On considère dans ce chapitre une fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

Lemme: Intégration de triangles

Si $\Delta \subset \Omega$ est un triangle dont les sommets sont a, b et c, ie $\Delta = \{\lambda a + \mu b + \nu c \; ; \; \lambda, \mu, \nu \geq 0 \;$ et $\lambda + \mu + \nu = 1\}$, et si $\gamma = [a \to b \to c \to a]$ est un chemin 'en ligne droite' qui forme la frontière de Δ, alors:

$$\int_\gamma f = 0.$$

Définition: Ensemble en étoile

Un ensemble A est étoilé s'il existe $a \in A$ tel que pour tout point $z \in A$, le segment $[a, z]$ soit inclus dans A.

Lemme: Intégration sur les chemins polygonaux

Supposons que Ω soit étoilé, pour tout chemin polygonal fermé $\gamma = [a_0 \to ... \to a_{n-1} \to a_0]$ de Ω, alors:

$$\int_\gamma f = 0.$$

4.2 Approximation de Chemin Rectifiable par des Polygones

L'objectif de cette partie est d'étendre le lemme précédent à des chemins plus généraux que les chemins polygonaux fermés.

Lemme: Approximation polynomiale de chemin rectifiable

Soit γ un chemin rectifiable, pour tout $\epsilon_l > 0$ et $\epsilon_\infty > 0$, il y a un chemin polygonale orienté μ avec les mêmes points de départs et d'arrivés que γ tel que:

$$l(\mu - \gamma) \leq \epsilon_l \;\text{ et }\; |(\mu - \gamma)(t)| \leq \epsilon_\infty.$$

4.3 Théorème Intégral de Cauchy

On peut alors énoncer un premier théorème:

Théorème: Intégrale de Cauchy (Version étoilée)

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-différentiable où Ω est supposé étoilé, pour tout chemin rectifiable fermé γ, l'intégral de chemin de f selon γ est nulle.

On en déduit le théorème suivant:

Théorème: Intégrale de Cauchy pour les disques

On suppose désormais que γ forme un disque de rayon r et de centre c avec $B_F(c, r) \subset \Omega$, Ω est simplement un ouvert de $\mathbb{C}$, alors pour toute fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\forall z \in B(c, r), \; f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Un corrolaire immédiat de ce résultat est que la dérivée d'une fonction holomorphe est encore holomorphe.

Théorème: Morera

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, f est holomorphe si et seulement si elle est continue et, localement, son intégrale de ligne selon des chemins rectifiables fermés est nulle ie:

$$\forall c \in \Omega,\ \exists r > 0 :\ B(c,r) \subset \Omega \ \text{ et } \forall \gamma \ \text{ chemin fermé rectifiable de } B(c,r),\ \int_\gamma f = 0.$$

Théorème: Limite de fonction holomorphique

Si une suite (f_n) de fonction holomorphique de Ω dans $\mathbb{C}$ converge localement uniformément vers f, ie:

$$\forall c \in \Omega,\ \exists r > 0 :\ B(c,r) \subset \Omega \ \text{ et } \lim_{n\to\infty} ||f_n(z) - f(z)||_\infty = 0$$

alors f est holomorphe.

Théorème: Liouville

Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ bornée est constante.

5 Indice

On rappelle la définition de l'argument d'un nombre complexe:

$$\arg(x+iy) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} & \text{si } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Théorème: Choix continu de l'argument

Soit a un point du plan complex et γ un chemin ne passant pas par a, soit $\theta_0 \in Arg(\gamma(0) - a)$, il y a une unique fonction continue $\theta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\theta(0) = \theta_0 \ \text{ et } \ \forall t,\ \theta(t) \in Arg(\gamma(t) - a)$$

La variation de l'argument $z \mapsto Arg(z-a)$ selon γ s'écrit alors: $[z \mapsto Arg(z-a)]_\gamma = \theta(1) - \theta(0)$.

Définition: Indice

Soit a un point du plan complex et γ un chemin ne passant pas par a, l'indice de γ autour de a est:

$$ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi}[z \mapsto Arg(z-a)]_\gamma.$$

On peut alors définir l'ensemble des points à l'extérieur de γ:

$$Ext(\gamma) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\gamma([0,1])|\ ind(\gamma, z) = 0\}$$

et son intérieur:

$$Int(\gamma) = \{z \in \mathbb{C}\backslash(\gamma([0,1]) \cup Ext(\gamma))\}.$$

5.1 Propriétés

On s'intéresse dans cette partie à a un point du plan complex et γ un chemin ne passant pas par a.

Théorème: L'indice est localement constant

Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout point b et tout chemin fermé β, si $|b - a| < \epsilon$ et $|\beta - \gamma| < \epsilon$, alors β ne passe pas par b et: $ind(\gamma, a) = ind(\beta, b)$.

On en déduit que l'indice est invariant au sein d'une composante de $\mathbb{C}\backslash\gamma$, par ailleurs si la composante est non bornée, son indice est nulle.

5.2 Ensemble Simplement Connexe

Un trou dans une composante de Ω est, comme on s'y attend intuitivement, une composante bornée de $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

Définition: Ensemble simplement connexe

Ω est simplement connexe s'il ne possède pas de trou, sinon il est multiplement connexe.

Théorème: Ensemble simplement connexe et indice

Ω est simplement connexe si et seulement si pour tout chemin fermé de Ω, l'intérieur de ce chemin est inclus dans Ω.

5.3 Approche d'Analyse Complexe

Si un chemin fermé est rectifiable, on peut calculer son indice comme un intégrale de ligne, pour ça on a besoin du lemme suivant:

Lemme: Soit $a \in \mathbb{C}$ et γ un chemin rectifiable de $\mathbb{C}$ ne passant pas par a, on note: $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$, alors la fonction:

$$\mu(t) = \int_{\gamma_t} \frac{dz}{z-a}$$

vérifie: $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \ \forall t, e^{\mu(t)} = \lambda(\gamma(t) - a)$.

Théorème:

Soit $a \in \mathbb{C}$ et γ un chemin rectifiable de $\mathbb{C}$ ne passant pas par a, alors:

$$[z \mapsto Arg(z-a)]_\gamma = Im(\int_\gamma \frac{dz}{z-a}).$$

6 Théorème Intégral de Cauchy - Version Globale

6.1 Suite de Chemins

Une suite de chemins est simplement définie comme la concaténation de plusieurs chemin, tous les calculs sur le chemin total se font intuitivement en passant par les chemins individuels.

6.2 Théorème de Cauchy et Corrolaires

Pour la version gloabale de ce théorème, l'hypothèse de forme étoilée est remplacée par un critère géométrique plus faible:

Théorème: Intégrale de Cauchy

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, soit γ une suite de chemin rectifiable fermé de Ω, si l'intérieur de γ est inclus dans Ω, alors:

$$\int_\gamma f = 0.$$

On constate par ailleurs que si Ω est simplement connexe, alors ce théorème est applicable à toute suite de chemin fermé rectifiable sur Ω.

Définition: Singularité

Une singularité d'une fonction f est un point hors de son domaine de définition. Cette singularité est distante, ou isolée, si:

$$\exists \epsilon > 0 : \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}, (|z-a| < \epsilon) \implies z \in \Omega.$$

Définition: Résidu
Soit a une singularité isolée de $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-différentiable. On note d la distance de a aux autres singularités. L'intégrale de f selon $\gamma = a + re^{2i\pi\cdot}$ est définie indépendante de r tant que $0 < r < d$. On peut alors définir le résidu de f en a par:

$$res(f,a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f,\ \forall 0 < r < d.$$

Théorème: Résidu de Cauchy
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, soit γ une suite de chemin fermé rectifiable sur Ω. Si A est un ensemble fini de singularité isolée de f tel que $Int(\gamma) \subset \Omega \cup A$, alors:

$$\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{a\in A} ind(\gamma,a)res(f,a).$$

Théorème: Formule de l'intégrale de Cauchy
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, soit γ une suite de chemin fermé rectifiable sur Ω. Soit a un point de Ω hors du tracé de γ. Si l'intérieur de γ est inclus dans Ω, alors:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = 2i\pi ind(\gamma,a)f(a).$$

7 Fonctions Analytiques

7.1 Convergence de Séries de Fonctions

Cette section rappelle des résultats classiques sur les séries de fonctions.

Définition: Série entière
Soient $c \in \mathbb{C}$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on peut définir la série entière:

$$\sum_n a_n(z-c)^n$$

le rayon de convergence R de cette série définit le disque $B(c,R)$ sur lequel cette série est absolument convergente.

Théorème: Calcul du rayon de convergence
On définit le rayon de convergence comme: $r = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}$.

On peut également calculer R à l'aide de la méthode suivante:

On s'intéresse à la borne de croissance de la suite (a_n) définie par: $\sigma_0 = \inf\{\sigma \in [0,+\infty] | \ |a_n| \leq \sigma^n \text{ APCR}\}$, alors $R = 1/\sigma_0$.

Théorème: Dérivation terme à terme
On s'intéresse à f définie sur $B(c,R)$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n$, alors cette fonction est continue et dérivable et sa dérivée est:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)(z-c)^n$$

définie avec le même rayon de convergence R.

Théorème: Intégration terme à terme
La somme $\sum_n a_n(z-c)^n$ définie sur $B(c,R)$ est intégrable et son intégrale se calcule terme à terme:

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(w-c)^n dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\gamma a_n(w-c)^n dw.$$

7.2 Fonction Holomorphique et Série Entière

On commence par rappeler le résultat suivant:

Définition: Série de Taylor

La série de Taylor d'une fonction f est, sous réserve d'existence, définie par:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n$$

Théorème:

Si une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $B(c, R) \subset \Omega$, alors cette série est sa série de Taylor.

Une fonction développable en série entière au voisinage de chacun des points de son domaine de définition est appelée une fonction analytique.

Théorème: Fonction analytique et holomorphe

Une fonction est analytique si et seulement si elle est holomorphe.

7.3 Séries de Laurent

On appelle anneau de centre c, de rayon intérieur r_1 et extérieur r_2 l'ensemble:

$$A(c, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} |\ r_1 < |z-c| < r_2\}.$$

Définition: Série de Laurent

La série de Laurent centrée en c est définie par:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-c)^n.$$

Cette série est convergente pour $z \in \mathbb{C}$ si les séries $\sum_n a_n(z-c)^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_{-n}(z-c)^{-n}$ le sont. Dans le cas de convergence, sa somme est définie comme la somme des deux séries précédentes.

Théorème: Convergence des séries de Laurent

Les rayons de convergence intérieur r_1 et extérieur r_2 définis par:

$$r_1 = \limsup_n |a_{-n}|^{1/n} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{\limsup_n |a_{-n}|^{1/n}}$$

sont tels que la série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-c)^n$ converge uniquement dans $A(c, r_1, r_2)$, dans cette anneaux, la convergence est localement normale.

Théorème: Série de Laurent et fonction holomorphique

Pour toute fonction holomorphe f définie sur Ω, pour tout anneau $A(c, r_1, r_2) \subset \Omega$, f est développable en série de Laurent sur cet anneau. On alors:

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz.$$

8 Zeros et Pôles

On introduit le concept de point distant, un point $a \in Z \subset \mathbb{C}$ est distant s'il est au moins à une distance d des autres points de Z.

8.1 Zeros

On considère $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphique.

Définition:

Un point $a \in \Omega$ est un zéro de f si $f(a) = 0$.Le point a est de multiplicité p si:

$$\exists a^* \in \mathbb{C}^* : \; f(z) \sim_{z \to a} a^*(z-a)^p.$$

Théorème:

Un zéro de f est de multiplicité p si et seulement si:

$$f'(a) = f^{(2)}(a) = ... = f^{(p-1)} = 0 \;\text{ et }\; f^{(p)} \neq 0.$$

On peut alors écrire la série de Taylor de f en a:

$$f(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

avec $a_p \neq 0$.

Théorème: Si a est un zéro d'ordre p de f, alors il existe $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-différentiable telle que:

$$\forall z \in \Omega, \; f(z) = h(z)(z-a)^p \;\text{ et }\; h(a) \neq 0.$$

Lemme:

Si a est un zéro de f de multiplicité infinie, alors f est nulle sur Ω si Ω est connexe.

Lemme: Soit a un zéro de f de multiplicité p finie, alors a est isolé ie:

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \; \forall z \in B(a,r), \; f(z) = 0 \implies z = a.$$

Théorème: Zéros isolés

Si f n'est pas constante nulle, alors ces zéros sont isolés.

8.2 Pôles et singularités

Soit c un singularité distante de f.

Définition: Singularité supprimable

c est supprimable s'il existe $h : \Omega \cup \{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-différentiable telle que $h(z) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Définition: Pôle de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$

Il s'agit d'une singularité telle qu'il existe $a^* \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(z) \sim_{z \to c} \frac{a^*}{(z-c)^p}$.

Les autres singularités sont dites essentielles.

Théorème: Caractérisation des singularités supprimables

Une singularité distante c est supprimable si et seulement si:

- $f(z) \longrightarrow_{z \to c} a^* \in \mathbb{C}$
- f est bornée sur $A(c, 0, r)$
- La série de Laurent de f en c est une série entière.

Théorème: Caractérisation de la multiplicité d'un pôle
Une singularité distante c est un pôle de multiplicié p si et seulement si:

- La série de Laurent de f sur $A(c, 0, r)$ est $f(z) = \sum_{-p}^{+\infty} a_n z^n$
- il existe $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h(c) \neq 0$ et $f(z) = \frac{h(z)}{(z-c)^p}$ pour tout $z \in \Omega$

8.3 Calcul des Résidus

On considère toujours c une singularité isolée de f.

Théorème:
Si la série de Laurent de f sur $A(c, 0, r)$ est:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - c)^n$$

alors $res(f, c) = a_{-1}$.

Corrolaires

- Si c est un pôle de multiplicité p, alors:

$$res(f, c) = \lim_{z \to c} \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}(f(z)(z-c)^p)}{dz^{p-1}}$$

- c est un pôle simple de f si et seulement si $f(z)(z - c) \longrightarrow_{z \to c} a$, alors: $res(f, c) = \lim_{z \to c} f(z)(z - c)$
- pour $g, h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-différentiable, si $f = \frac{g}{h}$, supposons que $g(c) \neq 0$, $h(c) = 0$ et $h'(c) \neq 0$, alors $res(f, c) = \frac{g(c)}{h'(c)}$