Contrôle des systèmes dynamiques

Paul Lehaut

October 13, 2025

Contents

On s'intéresse à $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t))$ où $x(t)$ désigne l'état du système et $u(t)$ le contrôle. On s'intéressera tout d'abord à: $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$ et $u \in L^\infty([0,T], \mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ désigne un sous-ensemble d'un espace-vectoriel.

Les trois questions pricipales sont:

-Question de contrôlabilité: pour $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, T fini, existe-t-il une fonction de contrôle u telle que: $x_u(T) = x_1$?

-Question de contrôle optimal: on suppose qu'il existe au moins un contrôle emmenant le système de x_0 à x_1 en un temps T, existe-t-il alors un contrôle qui permet de réaliser ce passage en minimisant un critère ?

-Question de stabilisation: un état $x*$ étant donné, peut-on construire un contrôle $u(t)$ de type $k(x(t))$ (contrôle en boucle fermée) qui permet de ramener le système de l'état x_0 à l'état $x*$ en un temps T ?

1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

1.1 Cas des systèmes linéaires autonomes

Un système linéaire autonome est un système de la forme:

$$(I)\ \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ \text{avec}\ x(0) = x_0,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{et}\ B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}).$$

La solution de ce système est explicite donnée par:

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Le problème de contrôle en un temps T peut alors se réécrire, $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver $u \in L^{+\infty}([0,T], \mathbb{R}^k)$ telle que:

$$\int_0^T e^{(t-s)A}Bu(s)ds = \Phi_T(u) = x_1 - e^{TA}x_0$$

soit encore montrer que l'application linéaire:

$$\Phi_T : \begin{array}{ccc} L^{+\infty}([0,T], \mathbb{R}^k) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^T e^{(t-s)A}Bu(s)ds \end{array}$$

est surjective.

<u>Théorème:</u> Critère de Kalman

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, pour $T > 0$, le système (I) est contrôlable en un temps T si et seulement si la matrice $C = (B, AB, ..., A^{n-1}B)$ est de rang maximal n.

<u>Démonstration:</u>

Montrons tout d'abord que Φ_T n'est pas surjective si la matrice C n'est pas de rang maximal.
En effet, si C n'est pas de rang maximal, alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $y^T C = 0$ donc $y^T A^j B = 0$ pour tout $j \in [|0, n-1|]$.
Or, le théorème de Cailey-Hamilton donne: $A^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$ donc $y^T A^n B = 0$ et donc, par récurrence: $y^T A^j B = 0$ pour tout j.
On calcule alors:

$$y^T \Phi_T(u) = y^T \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds = \int_0^T y^T \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(T-s)^k}{k!} A^k Bu(s)ds = 0$$

donc, pout tout contrôle u, $\Phi_T(u)$ appartient à l'espace orthogonal à y^T qui est un vecteur non nul, donc Φ_T n'est pas surjective.

Montrons désoramais que, si Φ_T n'est pas surjective, alors la matrice C n'est pas de rang maximal. Comme Φ_T n'est pas surjective, alors il existe y non nul appartenant à l'espace orthogonal à $Im\Phi_T$. On s'intéresse alors à la fonction u définie par:

$$u(s) = B^T e^(T-s) A^T y$$

qui est clairement une fonction de $L^\infty([0,T],\mathbb{R}^k)$, il vient alors:

$$y^T \Phi_T(u) = \int_0^T y^T e^{A(T-s)} B B^T e^{(T-s)A^T} y ds = \int_0^T < y^T e^{(T-s)A} B, y^T e^{(T-s)A} B > ds = 0$$

on constate donc que, pour tout $s \in [0,T]$, on a: $y^T e^{(T-s)A} B = 0$, donc, en particulier, en notant $f : s \mapsto y^T e^{(T-s)A} B$, alors:

$$f(T) = y^T B = 0,\ f'(T) = -y^T AB = 0, ... \text{ et } f^{(n-1)}(T) = (-1)^{n-1} y^T A^{n-1} B = 0$$

donc y^T appartient au noyau de C qui n'est donc pas de rang maximal.

D'où le résultat.

On constate par ailleurs que ce critère ne dépends pas du temps T.

<u>Théorème:</u>
Le système (I) est contrôlable si et seulement si la matrice

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} B B^T e^{(T-s)A^T} ds$$

est inversible, un contrôle admissible est alors:

$$u(t) = B^T e^{(t-s)A^T} G_T^{-1} x(x_1 - e^{TA} x_0).$$

L'ensemble des contrôles admissibles réalisant le passage de x_0 à x_1 en temps T est:

$$\{u \in L^{+\infty}([0,T],\mathbb{R}^k) \mid \Phi_T(u) = x_1 - e^{TA} x_0\}.$$

1.2 Contrôle des systèmes non linéaires

On s'intéresse aux systèmes de la forme:

$$(II)\ \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ \text{avec } x(0) = x_0.$$

On peut tout d'abord se demander si, pour $u \in L^{+\infty}([0,T],\mathbb{R}^k)$ fixé, le problème de Cauchy (II) a-t-il une solution et une seule sur l'intervalle $[0,T]$? Autrement dit le problème de Cauchy qui consiste à chercher $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(t, x(t)),\ \text{avec } x(0) = x_0 \text{ et } F(t, x(t)) = f(t, x(t), u(t))$$

a-t-il une unique solution ?

Dans le cas standard, si F est continue et lipschitzienne en x alors l'équation admet une unique solution. Néanmoins en théorie du contrôle on peut tout à fait considérer des contrôles discontinus qui implique en général la discontinuité de F.

Définition:
On note $AC([0,T],\mathbb{R}^n) := \{x \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^n) \mid \frac{dx}{dt} \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)\}$, la dérivée est ici à prendre au sens des distributions.

Pour tout $x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$, on a: $x(t) = \int_0^t \frac{dx}{dt}(s)ds + x_0$.

Théorème:
Soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mesurable et vérifiant:

$$\exists c_T \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+) : \ ||F(t,x) - F(t,y)|| \leq c_T(t)||x-y|| \ \text{ (Pseudo lipschitzianité)}$$

et:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \exists \beta_x \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+) : \ |F(t,x)| \leq \beta_x(t)$$

alors le problème (II) admet une unique solution $x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ et $x(t) = x_0 + \int_0^t F(s,x(s))ds$.
En remplaçant l'hypothèse de pseudo lipschitzianité dans le théorème précédent par une pseudo lipschitzianité locale:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \ \exists r > 0 \text{ et } \exists C_{T,x_0} \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) : \ \forall (x,y) \in B(x_0,r)^2, \ ||F(t,x) - F(t,y)|| \leq C_{t,x_0}(t)||x-y||$$

alors il existe $0 < T_0 \leq T$ tel qu'il existe une unique solution $x \in \mathcal{C}^0([0,T_0[,\mathbb{R}^n)$ et on a:
-ou bien $T_0 = T$ et $x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$
-ou bien $|x(t)| \rightarrow_{t \rightarrow T_0} +\infty$.

Définition:
On dit que le système $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$ (A) est contrôlable en temps T si pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty([0,T],\mathbb{R}^k)$ tel que:
-(A) admet une unique solution dans $AC([0,T],\mathbb{R}^n)$
-$x(T) = x_1$.

Il est souvent pertinent de considérer une notion locale de la contrôlabilité.

Définition: Contrôlabilité autour d'une trajectoire
Soit $\bar{u} \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^k)$ et $\bar{x} \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ la trajectoire associée à $\bar{u}$. (A) est contrôlable autour de $(\bar{u},\bar{x})$ si ,pour tout $\epsilon > 0$, il existe ν strictement positif tel que:

$$\forall x_0 \in B(\bar{x}_0,\nu), \ \forall x_1 \in B(\bar{x}_1,\nu), \ \exists u \in L^{+\infty}([0,T],\mathbb{R}^k) : \ ||u - \bar{u}|| \leq \epsilon$$

et la trajectoire x engendrée par u à partir de x_0 vérifie $x(T) = x_1$.

Si $||u - \bar{u}|| << 1$ et sous les bonnes conditions sur f, alors: $||x - \bar{x}|| << 1$.

En posant $u := \bar{u} + v$ et $x := \bar{x} + y$, la dynamique $\dot{x} = f(t,x(t),u(t))$ peut être approché par la dynamique linéarisé:

$$\dot{y} \approx \frac{\partial f}{\partial x}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))y(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))v(t) \ \ (B).$$

Définition:
Le système (B) est appelé le linéarisé de (A) autour de la trajectoire $(\bar{x},\bar{u})$.

Si $(\bar{x},\bar{u})$ est stationnaire (point d'équilibre de la dynamique) alors le système linéarisé est autonome.

Théorème: Test linéaire
Si le système linéarisé autour d'un point stationnaire $(\bar{x},\bar{u})$ est contrôlable, alors le système non-linéaire de départ est localement contrôlable autour de ce point d'équilibre.

Il s'agit d'une condition suffisante mais non nécessaire.

2 Stabilité et Stabilisation des Systèmes Dynamiques

2.1 Trois Notions de Stabilité

On considère un système dynamique autonome $\dot{x} = F(x(t))$ avec $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne (ces hypothèses sont conservées sur F dans toute cette section sauf indications contraires).

Définition:

Un point x_* est appelé un point d'équilibre de la dynamique si $F(x_*) = 0$, il est dit:

- Stable si: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x_0 - x_*|| < \delta \implies ||x(t) - x_*|| \leq \epsilon$.
- Asymptotiquement stable si: x_* est stable et si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, ||x(t) - x_*|| \longrightarrow_{t \to +\infty} 0$.
- Exponentiellement stable si: x_* est stable et s'il existe $\delta > 0$ et $c \geq 0$ tels que: $||x(t) - x_*|| \leq Ce^{-\delta t}||x_0 - x_*||$.

On a évidemment exponentiellement stable qui implique asymptotiquement stable qui implique ensuite stable.

2.2 Stabilité des Systèmes Linéaires

On considère le cas particulier d'un système linéaire $\dot{x} = Ax$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Le seul point d'équilibre de la dynamique est donc le point 0. Par ailleurs ce système a pour solution:

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

l'étude de la stabilité se ramène donc à l'étude de $(e^{tA},\ t \geq 0)$.

2.2.1 Cas des matrices diagonalisables

On suppose que A est diagonalisable, on peut alors écrire:

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

le système est donc stable si $Re(\lambda_j) \leq 0$, pour tout j. Il est exponentiellement stable si et seulement si $Re(\lambda_j) < 0$, pour tout j.

2.2.2 Cas des matrices non diagonalisables

On appelle bloc de Jordan une matrice du type:

$$J_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_j + N_j \quad \text{avec} \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

on remarque donc que:

$$e^{tJ_j(\lambda)} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème: Décomposition de Jordan
Toute matrice carré A peut s'écrire sous la forme:

$$A = P \begin{pmatrix} J_{j_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{j_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ce théorème permet d'écrire l'égalité suivante:

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r(\lambda_r)} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Proposition:
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité algébrique.
Si $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout j, le système est exponentiellement stable. Si $Re(\lambda_1) = 0$ et $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout $j \in [|2, r|]$ le système est simplement stable.

Démonstration:
Si $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout j, alors, comme:

$$||e^{tJ_j(\lambda)}||_1 = e^{tRe(\lambda)}(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!})$$

converge exponentiellement vite vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, il en est donc de même pour $||e^{tA}||_1$.
Si $Re(\lambda_1) = 0$ et $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout $j \in [|2, r|]$ alors:

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{tJ_2(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{tJ_r(\lambda_r)} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc le sytème 'tourne' asymptotiquement et est donc simplement stable.

2.3 Stabilité des Systèmes Non Linéaires

Soit $x*$ un état d'équilibre de $\dot{x} = F(x)$.

Définition:
$x*$ est dit:

- localement asymptotiquement stable si: il est stable et s'il existe $\delta > 0$ telle que

$$||x_0 - x*|| \leq \delta \implies ||x(t) - x*|| \longrightarrow_{t \to +\infty} 0.$$

- localement exponentiellement stable si: il est stable et s'il existe $\delta, \mu > 0$ telles qu'il existe $C \geq 0$ telle que:

$$||x_0 - x*|| \leq \delta \implies ||x(t) - x*|| \leq Ce^{-\gamma t}||x_0 - x*||.$$

Comme précédement un point localement exponentiellement stable est localement asymptotiquement stable.

Théorème: Test linéaire
Soit $x*$ un point d'équilibre du système non-linéaire $\dot{x} = F(x)$ avec F de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dot{y} = Ay$ le système linéarisé autour de $x*$ (avec $A = \frac{\partial F}{\partial x}(x*)$ la jacobienne de F en $x*$).
Si le système $\dot{y} = Ay$ est asymptotiquement/exponentiellement stable, alors le système non-linéaire est localement asymptotiquement/exponentiellement stable autour de $x*$.

3 Fonctions de Lyapunov

On s'intéresse au problème $\dot{x} = F(x(t))$ (I) avec $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et x^* tel que $F(x^*) = 0$.
On cherche à savoir si x^* est stable (voire asymptotiquement ou exponentiellement stable).

<u>Définition:</u> Fonction de Lyapunov
On appelle V une fonction de Lyapunov pour le système (I) (et l'équilibre x^*) si:

- $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{x^*\},\ V(x) > V(x^*)$
- $\lim_{||x|| \to +\infty} V(x) = +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla V(x) \cdot F(x) \leq 0$

Soit $x \in \mathcal{C}^1([0,T])$ une solution de (I), alors:

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dt}(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla V(x(t)) \cdot F(x(t)) \leq 0$$

<u>Théorème:</u> Lyapunov
S'il existe une fonction de Lyapunov pour le système (I) alors x^* est un équilibre stable.

<u>Définition:</u> Fonction de Lyapunov stricte
Si V est une fonction de Lyapunov pour (I) et que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{x^*\},\ \nabla V(x) \cdot F(x) < 0$$

alors V est dite stricte.

<u>Théorème:</u>
S'il existe une fonction de Lyapunov stricte pour le système (I) alors x^* est un équilibre asymptotiquement stable.

<u>Définition:</u>
On dit que V est une fonction de Lyapunov exponentielle si:

- $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$
- $\exists \alpha, C, c > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ c||x - x*|| \leq V(x) \leq C||x - x^*||^\alpha$
- $\exists \alpha > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla V(x) \cdot F(x) \leq -\alpha V(x)$

<u>Théorème:</u>
S'il existe une fonction de Lyapunov exponentielle pour (I) alors x^* est exponentiellement stable.

<u>Théorème:</u> La Salle
Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov V pour (I), si on a x une solution de (I) telle que: $\nabla V(x(t)) \cdot F(x(t)) = 0$ pour tout $t \geq 0$, alors: $x(t) = x^*$ pour tout $t \geq 0$ et le système est asymptotiquement stable.

4 Stabilisation des Systèmes Dynamiques

On s'intéresse au système $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ (I). On cherche à déterminer l'existence d'une fonction g telle que, avec $u(t) = g(x(t))$ (contrôle feedback), le système $\dot{x} = f(x(t), g(t))$ (II) soit stable (voire asymptotiquement ou exponentiellement stable).

On note $F : x \mapsto f(x, g(x))$.

4.1 Systèmes Linéaires

On considère $\dot{x} = Ax + BKx$ (III) (avec donc $K \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$), on cherche à établir l'existence de K telle que $A + BK$ a des valeurs propres de partie réelle strictement négative uniquement.

Théorème: Placement des pôles

Si (A, B) est contrôlable pour tout P un polynôme de degré n, il existe K tel que $A + BK$ a pour valeurs propres les racines de P.

Corollaire:

Si (A, B) est contrôlable, alors, pour tout $\gamma > 0$, il existe K_γ telle que le système (III) est exponentiellement stable avec un taux de décroissance γ.

5 Systèmes Non-Linéaires

On cherche simplement à savoir s'il existe g tel qu'il existe une fonction de Lyapunov pour le système (II).

6 Contrôle Opitmal des systèmes dynamiques

On s'intéresse à $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ avec $x_0 = x(0)$, on note $J(u) = \int_0^T g(t, x(t), u(t))dt + h(x(T))$, on cherche à trouver un contrôle optimal c'est à dire qui minimise J.

6.1 Principe de Minimum de Pontryagin

Pour tout $t \in [0, T]$, $u(t) = \arg\min_{v \in \mathcal{U}} H(t, x(t), p_u(t), v(\in \mathbb{R}^k))$.