

Statistiques et Analyse de Données

Paul Lehaut

December 15, 2025

Contents

1	Introduction	3
2	Jeux Sous Forme Normale: Stratégies Pures	3
2.1	Description d'un Jeu Sous Forme Normale	3
2.2	Stratégies Dominantes et Dominées	4

1 Introduction

La théorie des jeux est une branche des mathématiques qui étudie les interactions stratégiques. Elle s'applique dans de nombreux domaines comme l'économie, les sciences politiques, la biologie...

Le rôle de la théorie des jeux est à la fois de modéliser et d'analyser les situations. Idéalement, les comportements purement individuels permettraient d'atteindre des objectifs collectifs.

2 Jeux Sous Forme Normale: Stratégies Pures

La forme normale est une manière standard de décrire formellement un jeu. On spécifie pour chaque joueur son ensemble de stratégies et sa fonction de paiement.

Dans ce chapitre (et le suivant), on supposera que les joueurs connaissent la description exacte du jeu.

On définit deux types de stratégies:

- stratégie pure: spécifie, pour chaque situation, une décision bien déterminée
- stratégie mixte: elle intègre des choix aléatoires

dans ce chapitre, on se restreindra à des stratégies pures (désignées dès lors par stratégie).

2.1 Description d'un Jeu Sous Forme Normale

Un jeu sous forme normale est défini pour un nombre fini N de joueurs par:

Définition: Jeu sous forme normale

Un ensemble de stratégies S_i pour chaque joueur i et une fonction de paiement $g_i : \prod_{j=1}^N S_j \rightarrow \mathbb{R}$.

L'interprétation est la suivante: chaque joueur joue une fois, indépendamment des autres joueurs, et reçoit ensuite un paiement.

Il est intuitif de considérer que chaque joueur cherche à maximiser son profit. On étudie donc la question suivante:
Si les joueurs sont rationnels, quelles stratégies vont-ils le plus probablement choisir ?

Dans ce chapitre, on se limite à des jeux statiques (les joueurs jouent une unique fois) et à information complète (les joueurs connaissent les paiements et stratégies des autres joueurs). On définit les classes de jeux particulièrement importantes suivantes:

- Jeux à intérêts communs: tous les joueurs ont les mêmes intérêts ou préférences.
- Jeux à somme nulle: jeux à deux joueurs dont les intérêts sont antagonistes ($g_1 = -g_2$).
- Jeux de la bataille des sexes: ces jeux font intervenir une part de coordination et de conflit entre les agents.
- Jeux de la fureur de vivre: deux adolescents en voiture foncent l'un vers l'autre, aucun d'entre eux ne veut sortir de la route, si les deux sortes le résultat est neutre.
- Le dilemme du prisonnier: ce jeu fait ressortir une tension entre l'intérêt collectif et individuel, de nombreuses situations possèdent une structure similaire à celle-ci.
- Compétition en quantités dite de Cournot: deux entreprises produisent en quantité q_i et à un coût $c_i(q_i)$, des biens identiques, le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est $p(q_1 + q_2)$, la situation se formalise alors par:

$$S_i = \mathbb{R}_+ \text{ et } g_i(q_i, q_j) = q_i p(q_i + q_j) - c_i(q_i).$$

- Compétition en prix dite de Bertrand: il s'agit d'un modèle de compétition par les prix, chaque entreprise décide d'un prix de vente du bien et les consommateurs d'une quantité à acheter à la firme au prix le plus bas.

2.2 Stratégies Dominantes et Dominées

Dans toute la suite on utilisera les notations suivantes:

$$S = \prod_{j=1}^N S_j, \quad S_{-i} = \prod_{j=1, j \neq i}^N S_j \text{ et } g = (g_i).$$

on considèrera par ailleurs un jeu sous forme normale $\Gamma(N, S, g)$.

Définition: Stratégie strictement dominée

Il s'agit d'une stratégie $s_i \in S_i$ telle qu'il existe $t_i \in S_i$ qui domine strictement s_i , c'est-à-dire:

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad g_i(t_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i}).$$

Un joueur 'rationnel' ne devrait jamais joué une stratégie strictement dominée.

Une stratégie strictement dominante est une stratégie qui domine strictement toutes les autres, une telle stratégie, si elle existe, est évidemment unique.

Définition: Equilibre en stratégies strictement dominantes

Il s'agit d'un profil de stratégies $s = (s_1, \dots, s_N)$ tel que, pour tout i , s_i soit strictement dominante.

Si une telle stratégie existe, alors on peut considérer qu'il s'agit de la seule issue rationnelle du jeu. On peut, par ailleurs, considérer une jeu $\Gamma(N, S^*, g)$ dans lequel on ne conserve que les stratégies strictement dominantes (si elles existent).