Statistiques et Analyse de Données

Paul Lehaut

December 16, 2025

Contents

1 Introduction

La théorie des jeux est une branche des mathématiques qui étudie les interactions stratégiques. Elle s'applique dans de nombreux domaines comme l'économie, les sciences politiques, la biologie...

Le rôle de la théorie des jeux est à la fois de modéliser et d'analyser les situations. Idéalement, les compertements purement individuels permettraient d'atteindre des objectifs collectifs.

2 Jeux Sous Forme Normale: Stratégies Pures

La forme normale est une manière standard de décrire formellement un jeu. On spécifie pour chaque joueur son ensemble de stratégies et sa fonction de paiement.

Dans ce chapitre (et le suivant), on supposera que les joueurs connaissent la description exacte du jeu.

On définit deux types de stratégies:

- stratégie pure: spécifie, pour chaque situation, une décision bien déterminée
- stratégie mixte: elle intègre des choix aléatoires

dans ce chapitre, on se restreindra à des stratégies pures (désignées dès lors par stratégie).

2.1 Description d'un Jeu Sous Forme Normale

Un jeu sous forme normale est défini pour un nombre fini N de joueurs par:

Définition: Jeu sous forme normale

Un ensemble de stratégies S_i pour chaque joueur i et une fonction de paiement $g_i : \prod_{j=1}^{N} S_j \to \mathbb{R}$.

L'interprétation est la suivante: chaque joueur joue une fois, indépendamment des autres joueurs, et reçoit ensuite un paiement.

Il est intuitif de considérer que chaque joueur cherche à maximiser son profit. On étudie donc la question suivante:

Si les joueurs sont rationnels, quelles stratégies vont-ils le plus probablement choisir ?

Dans ce chapitre, on se limite à des jeux statiques (les joueurs jouent une unique fois) et à information complète (les joueurs connaissent les paiements et stratégies des autres joueurs). On définit les classes de jeux particulièrement importantes suivantes:

- Jeux à intérêts communs: tous les joueurs ont les mêmes intérêts ou préférences.
- Jeux à somme nulle: jeux à deux joueurs dont les intérêts sont antagonistes ($g_1 = -g_2$).
- Jeux de la bataille des sexes: ces jeux font intervenir une part de coordination et de conflit entre les agents.
- Jeux de la fureur de vivre: deux adolescents en voiture foncent l'un vers l'autre, aucun d'entre eux ne veut sortir de la route, si les deux sortes le résultat est neutre.
- Le dilemme du prisonnier: ce jeux fait ressortir une tension entre l'intérêt collectif et individuel, de nombreuses situations possèdent une structure similaire à celle-ci.
- Compétition en quantités dite de Cournot: deux entreprises produisent en quantité q_i et à un coût $c_i(q_i)$, des biens identiques, le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est $p(q_1 + q_2)$, la situation se formalise alors par:
$$S_i = \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad g_i(q_i, q_j) = q_i p(q_i + q_j) - c_i(q_i).$$
- Compétition en prix dite de Bertrand: il s'agit d'un modèle de compétition par les prix, chaque entreprise décide d'un prix de vente du bien et les consommateurs d'une quantité à acheter à la firme au prix le plus bas.

2.2 Stratégies Dominantes et Dominées

Dans toute la suite on utilisera les notations suivantes:

$$S = \prod_{j=1}^{N} S_j, \quad S_{-i} = \prod_{j=1,\ j\neq i}^{N} S_j \ \text{ et} g = (g_i).$$

on considèrera par ailleurs un jeu sous forme normale $\Gamma(N, S, g)$.

<u>Définition:</u> Stratégie strictement dominée

Il s'agit d'une stratégie $s_i \in S_i$ telle qu'il existe $t_i \in S_i$ qui domine strictement s_i, c'est-à-dire:

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ g_i(t_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i}).$$

Un joueur 'rationnel' ne devrait jamais joué une stratégie strictement dominée.

Une stratégie strictement dominante est une stratégie qui domine strictement toutes les autres, une telle stratégie, si elle existe, est évidemment unique.

<u>Définition:</u> Equilibre en stratégies strictement dominantes

Il s'agit d'un profil de stratégies $s = (s_1, ..., s_N)$ tel que, pour tout i, s_i soit strictement dominante.

Si une telle stratégie existe, alors on peut considérer qu'il s'agit de la seule issue rationnelle du jeu. On peut, par ailleurs, considérer une jeu $\Gamma(N, S^*, g)$ dans lequel on ne conserve que les stratégies strictement dominantes (si elles existent). Ainsi, si, pour tout i, $S_i^* = \{s_i^*\}$, alors le profil de stratégies (s_i^*) ne dépend pas de l'ordre d'élimination des stratégies, on dit que le jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées.

Ainsi, lorsqu'un jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, on peut lui associer une prédiction unique des stratégies suivies par les joueurs: le profil (s_i^*).

Toutefois, il n'est pas rare de se retrouver dans une situation où il n'existe pas (ou plus) de stratégie absolument dominée, on introduit donc le concept de stratégie dominée:

<u>Définition:</u> Stratégie dominée

Il s'agit simplement d'une stratégie pour s_i telle qu'il existe t_i telle que:

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ g(s_i, s_{-i}) \leq g(t_i, s_{-i}).$$

Un stratégie dominante représente un choix raisonnable (on ne peut pas le regretter). On peut alors définir comme précédemment les profils de stratégies dominantes, lorsqu'un tel profil existe, il semble raisonnable que les joueurs le jouent.

On peut donc, comme précédemment, penser à supprimer les stratégies dominées de l'ensemble des stratégies, néanmoins, cette fois, l'ordre des suppressions influence le résultat.

2.3 Equilibre de Nash

Dans le cas général, un jeu n'a que peu de chance d'être résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées. Pour étudier ces jeux, on introduit le concept d'équilibre de Nash. Cette équilibre peut être interprété comme une convention sociale stable, on introduit les notations suivantes: si $s \in S$ et $i \in [|1, N|]$, on note s_{-i} le profil de stratégies où on a retiré la stratégie du joueur i. On peut alors définir l'équilibre de Nash:

<u>Définition:</u> Equilibre de Nash

Il s'agit d'un profil de stratégies s tel que:

$$\forall i,\ \forall t_i \in S_i,\ g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i}).$$

On notera $NE(\Gamma)$ l'ensemble des équilibres de Nash de Γ et $E(\Gamma)$ l'ensemble des paiements pour ces équilibres.

On peut reformuler la définition d'équilibre de Nash à l'aide de la notion de meilleure réponse:

Définition: Meilleure réponse

s_i est la meilleure réponse à s_{-i} si, pour tout t_i, $g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i})$.
L'ensemble des meilleures réponses à s_{-i} est noté $BR_i(s_{-i})$, on peut alors introduire la reformulation suivante:

Proposition:

Un profil de stratégie $s \in S$ est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout i, $s_i \in BR_i(s_{-i})$.

On peut alors se demander quel est le lien entre l'équilibre de Nash et les notions de solutions rationnelles vues précédemment ?

Proposition:

- Un équilibre en stratégies strictement dominantes est l'unique équilibre de Nash, le profil de stratégies obtenu est alors celui de l'équilibre de Nash.
- Soit $(\Gamma^k)_k$ la suite de jeux obtenus par élimination successive des stratégies strictement dominées, alors $NE(\Gamma^k) = NE(\Gamma)$ pour tout k.
- Un équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash.
- Soit $(\Gamma^k)_k$ la suite de jeux obtenus par une élimination successive des stratégies dominées, alors $NE(\Gamma^{k+1}) \subset NE(\Gamma^k)$ pour tout k.

3 Jeux Sous Forme Normale: Stratégies Mixtes

Un équilibre de Nash ne peut être atteint que si chaque joueur n'a pas d'intérêt à dissimuler sa stratégie. La théorie des stratégies mixtes permet alors d'étudier les cas pour lesquels les joueurs on intérêt à bluffer, voire joue aléatoirement.

3.1 Définitions

On supposera dans tout ce chapitre que chaque joueur ne possède qu'un nombre fini de stratégies.

Définition: Stratégies mixtes

Il s'agit, pour le joueur i, d'une distribution de probabilités sur S_i. On note Σ_i l'ensemble des stratégies mixtes, on appellera désormais les éléments de S_i 'stratégies pures'.

Un stratégie pure s_i peut-être vue comme une stratégie mixte avec probabilité 1 de joueur s_i, on peut donc écrire $S_i \subset \Sigma_i$, comme S_i est fini, alors on peut identifier:

$$\Sigma_i = \{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} | \ \forall k, \ p_k \geq 0 \ \text{ et } \sum_{k=1}^{|S_i|} p_k = 1\}.$$

Proposition:

Cet ensemble est convexe.

Cette propriété joueura un rôle essentielle dans le théorème d'existence de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Si chaque joueur joue la stratégie σ_i, la probabilité que la stratégie pure $s = (s_1, ..., s_N)$ soit le profil de stratégie effectivement joué est $\prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j)$, le paiement espéré du joueur i est alors:

$$\sum_{s \in S} (\prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j)) g_i(s).$$

Pour définir l'extension mixte d'un jeu, il reste finalement à dire que chaque joueur cherche désormais à maximiser son gain en moyenne (soit l'espérance de son paiement). La fonction $g_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ ainsi définie est alors multilinéaire, en particulier, pour tout i et σ, alors:

$$g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) g_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Définition: Equilibre de Nash en stratégies mixtes

Il s'agit d'un profil de stratégies mixtes σ tel que, pour tout i:

$$\forall \tau_i \in \Sigma_i,\ g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g_i(\tau_i, \sigma_{-i}).$$

Un tel équilibre peut s'interprété comme la satisfaction de chaque joueur vis-à-vis de sa probabilité, s'il connait les autres probabilités choisies. On notera $NE_{mix}(\Gamma)$ l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes.

Proposition:

σ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si:

$$\forall i,\ \forall s_i \in S_i,\ g(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g(s_i, \sigma_{-i}).$$

On en déduit alors que tout équilibre de Nash en stratégies pures en est également un en stratégies mixtes.

Théorème: Nash (considéré comme le théorème le plus important de la théorie des jeux)

Tout jeu fini (ie avec des ensembles de stratégies finis) admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

On peut ensuite réintroduire les concepts de stratégie strictement dominée, dominée. On retrouve alors les propositions précendentes de relation entre les équilibres.

On peut, comme précédemment, éliminer une stratégie mixte qui est strictement dominée par une autre stratégie mixte. Néanmoins, cela ne possède pas de grand intérêt puisque les stratégies mixtes sont infinies. Par contre, il peut être intéressant de supprimer une stratégie pure et donc, par conséquent, toute les stratégies mixtes qui accordaient un poids à cette stratégie pure.

On présente désormais une méthode générale pour calculer tous les équilibres de Nash mixtes d'un jeu. On commence par réintroduire le concept de meilleure réponse:

Définition: Meilleure réponse

$\sigma_i \in \Sigma_i$ est la meilleure réponse à $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ si, pour tout $\tau_i \in \Sigma_i$, $g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g_i(\tau_i, \sigma_{-i})$.

L'ensemble des meilleures réponses à σ_{-i} est $BR_i(\sigma_{-i})$.

On a alors la reformulation suivante:

Proposition:

Un profil de stratégie σ est un équilibre de Nash si et seulement si, pour tout i, $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$.

On présente désormais un méthode de calcul des meilleures réponses (et donc des équilibres de Nash).

Définition: Support

Dans un jeu fini, le support de σ_i est $supp(\sigma_i) = \{s_i \in S_i |\ \sigma_i(s_i) > 0\}$.

Proposition: Principe d'indifférence faible

Soient $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ et $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$, alors:

$$\forall s_i, t_i \in supp(\sigma_i),\ g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(t_i, \sigma_{-i}).$$

Cette propriété est, par linéarité, équivalent à: $\forall s_i \in supp(\sigma_i)$, $g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$.

On obtient alors une condition nécessaire pour être meilleure réponse. La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante:

Proposition: Principe d'indifférence fort

Soit σ_{-i}, alors $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$ si et seulement si:

$$\forall s_i, t_i \in supp(\sigma_i),\ g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(t_i, \sigma_{-i}) \text{ et } \forall s_i \notin supp(\sigma_i),\ g(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g(s_i, \sigma_{-i}).$$

Ainsi, σ est un équilibre de Nash en stratégie mixte si et seulement si, pour tout i, $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$.

Il suffit donc, pour trouver un équilibre de Nash, d'essayer tous les supports possibles, de résoudre les probabilités rendant chaque joueur indifférent sur son support, et de finalement vérifier que les stratégies hors du support ne donnent pas un paiement supérieur.

4 Jeux à Somme Nulle

Dans un jeu à somme nulle, deux joueurs aux intérêts stratégiques opposés s'affrontent. Dans le cas où les deux joueurs possèdent un nombre finis de stratégie, on parle de jeu matriciel.

4.1 Valeur et Stratégie Optimale

On se donnne dans toute cette partie un jeu à somme nulle $G = (I, J, g)$ et $w \in \bar{\mathbb{R}}$.

Nous introduisons tout d'abord le nouveau concept de valeur, pour ce faire on commence par introduire la notion de paiement garanti:

Définition:

Le joueur 1 peut garantir le paiement w s'il existe $i \in I$ tel que, pour tout $j \in J$, $g(i, j) \geq w$, l'égalité devient $g(i, j) \leq w$ pour le joueur 2.

Définition: Maxmim Le *maxmin* de G est le supremum des quantités garanties par le joueur 1, on le note $\underline{v}$.

On définit le *minmax* de façon analogue, on le note $\bar{v}$.

On peut alors introduire le concept clef de ce chapitre:

Définition: Valeur

Le jeu G a une valeur si $\underline{v} = \bar{v}$, cette quantité est notée $val(G)$.

Lorsque le jeu G a une valeur, alors le joueur 1 peut garantir au moins cette valeur, le joueur 2 peut garantir au moins $-val(G)$. L'issu rationnelle est alors que le joueur 1 gagne $val(G)$ (et le joueur 2 $-val(G)$).

Proposition:

Si les joueurs peuvent garantir la même quantité w, alors G a une valeur égale à w.

Définition:

Supposons que G est une valeur, soit $\epsilon > 0$, alors une stratégie du joueur 1 (2) est dite ϵ-optimale si elle garantit $val(G) - \epsilon$ $(val(G) + \epsilon)$.

On note I^* (J^*) les stratégies optimales du joueur 1 (2).

4.2 Lien Entre Valeur, Stratégie Optimale et Equilibre de Nash

Les concepts d'équilibre de Nash et de stratégie optimale sont essentiellement équivalents, comme le montre la proposition:

Proposition:

Soient $(i^*, j^*) \in I \times J$, alors on a l'équivalence: G a une valeur et (i^*, j^*) est un couple de stratégie optimale si et seulement si (i^*, j^*) est un équilibre de Nash de G:

$$\forall (i, j) \in I \times J,\ g(i, j^*) \leq g(i^*, j^*) \leq g(i^*, j).$$

Lorsque ces assertions sont vérifiées, l'ensemble des paiements d'équilibre de Nash est $E = \{val(G), -val(G)\}$.

4.3 Jeux Matriciels et Théorème du Minmax

Considérons un jeu $G = (g, I, J)$ avec I et J finis, on peut résoudre ce problème à l'aide de la méthode du chapitre 2 (avec l'extension mixte de G). Nous allons néanmoins procéder différement.

On note pour ce faire $\Delta(C)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur C.

Définition:

L'extension mixte de G est le jeu $\Gamma = (g^*, \Delta(I), \Delta(J))$ avec:

$$\gamma(\sigma, \tau) = \sum_{(i,j)\in I\times J} g(i,j)\sigma(i)\tau(j).$$

Dans la suie, on notera simplement g^* g.

Proposition: (Analogue de tout Nash en stratégies pures est un Nash en stratégies mixtes)

Si une stratégie garantit w dans G, alors cette stratégie garantit w dans Γ. En particulier, si G a une valeur, alors Γ a la même valeur, et toute stratégie optimale de G est une stratégie optimale de Γ.

Théorème: Von Neumann (corollaire du théorème de Nash)

Toute extension mixte d'un jeu matriciel admet une valeur, et chaque joueur a une stratégie optimale.

Ce théorème a été généralisé sous différentes formes, nous en donnons deux versions classiques à l'aide des notions suivantes:

Définition:

- f est quasi-concave si: $f(tx + (1-t)y) \geq min(f(x), f(y)),\ t \in [0,1]$,
- f est quasi-convexe si $-f$ est quasi-concave,
- f est semi-continue supérieurement (scs) si, pour tout x_0 et $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que: $\forall x \in U,\ f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$,
- f est sci si $-f$ est scs.

On constate par ailleurs que, pour f scs sur un compact, alors f atteint son maximum sur ce compact.

Théorème:

Si I et J (ici sous-espace-vectoriel) sont convexes, que l'un ou l'autre est compact, $g(\cdot, j)$ est quasi-concave et scs et $g(i, \cdot)$ est quasi-convexe et sci, alors G a une valeur. De plus si I (resp J) est compact, alors le joueur 1 (resp 2) a une stratégie optimale.