

# Statistiques et Analyse de Données

Paul Lehaut

November 28, 2025

# Contents

<b>1 Rappels</b>	<b>3</b>
1.1 Espérance et (Co)Variance . . . . .	3
1.2 Indépendance . . . . .	3
1.3 Variables Aléatoires Discrètes . . . . .	4
1.4 Variables Aléatoires à Densité . . . . .	4
1.5 Somme de VAs indépendantes . . . . .	4
1.6 Fonction de Répartition . . . . .	4
1.7 Fonction Charactéristique . . . . .	5
1.8 Vecteurs Gaussiens . . . . .	5
1.9 Théorèmes de Convergence . . . . .	6
<b>2 Estimateur dans un Modèle Paramétrique</b>	<b>7</b>
2.1 Estimateurs . . . . .	7
2.2 Biais et Risque Quadratique . . . . .	7
2.3 Modèle Paramétrique et Estimation du Moment . . . . .	8
2.4 Convergence Normale . . . . .	9
<b>3 Statistiques dans des Modèles Gaussiens</b>	<b>9</b>
3.1 Statistiques d'Echantillons Gaussiens . . . . .	10
3.2 La Distribution de Student . . . . .	10
3.3 Régression Linéaire avec Erreurs Gaussiennes . . . . .	10
<b>4 Intervalles de Confiance</b>	<b>11</b>
4.1 Définitions Générales . . . . .	11
4.2 Construction d'Intervalles de Confiance Exact . . . . .	11
4.2.1 Fonction Pivot . . . . .	11
4.2.2 Exemple dans le Modèle Gaussien . . . . .	11
4.2.3 Résumé de la Méthode . . . . .	12
4.3 Construction d'Intervalle de Confiance Asymptotique . . . . .	12
4.4 Construction d'Intervalle de Confiance par Excès . . . . .	13
4.4.1 L'Inégalité de Bienaymé-Chebychev . . . . .	13
4.4.2 Inégalité de Hoeffding . . . . .	13
<b>5 Estimateur du Maximum de Vraisemblance</b>	<b>13</b>
5.1 Vraisemblance d'un Echantillon et Estimateur . . . . .	14
5.2 Exemples . . . . .	14
5.2.1 Modèle de Bernoulli . . . . .	14
5.2.2 Cas du Modèle Gaussien . . . . .	15
5.3 Optimalité du MLE . . . . .	15
5.3.1 Modèle Régulier et Information de Fisher . . . . .	15
5.3.2 Estimateur Efficace . . . . .	15
<b>6 Estimation Bayésienne</b>	<b>16</b>
6.1 Formalisation de l'Estimation Bayésienne . . . . .	16
6.2 Estimateur Bayesien . . . . .	17
<b>7 Formalisme des Tests d'Hypothèses Statistiques</b>	<b>17</b>
7.1 Formalisme Général . . . . .	17
7.1.1 Erreurs de Type I et II . . . . .	18
7.1.2 Procédure Générale Pour Construire un Test . . . . .	18
7.1.3 p-Value . . . . .	19
7.1.4 Dualité entre Tests et Régions de Confiance . . . . .	20
7.2 Comparaisons Multiples . . . . .	20

# 1 Rappels

## 1.1 Espérance et (Co)Variance

On considère dans cette section des VAR.

Définition:

L'espérance de  $X \sim \mathbb{P}$  est l'intégral de Lebesgue:

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{x \in \mathbb{R}} x d\mathbb{P}(x)$$

qui est bien définie si  $X$  est intégrable, c'est-à-dire si  $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ .

Si par ailleurs  $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ , alors la variance de  $X$  est bien définie par:

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

L'inégalité de Jensen donne alors, pour  $X$  une VAR $^d$  intégrable, soit  $f$  une fonction à valeurs réelles convexe définie sur  $\mathbb{R}^d$ , alors  $\mathbb{E}(f(X))$  est bien définie et:

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Définition:

La covariance entre  $X$  et  $Y$ , telles que  $\mathbb{E}(X) < +\infty$  et  $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ , est définie par:

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

on a alors l'identité remarquable suivante:

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

Lorsque  $X$  est une VAR $^d$  de carré intégrable, on peut définir sa matrice de covariance qui est symétrique positive.

Définition: Le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$  est définie par:

$$\rho_{X,Y} := \begin{cases} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1] & \text{si } \text{Var}(X) \text{Var}(Y) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 1.2 Indépendance

Définition: Une famille finie de variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_n)$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est indépendante si pour toute famille de sous-ensembles mesurables  $(C_1, \dots, C_n)$  on a:

$$\mathbb{P}(X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n) = \mathbb{P}(X_1 \in C_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in C_n)$$

ou, de façon équivalente, si:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}.$$

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes alors, pour toutes fonctions mesurables  $f_1, \dots, f_n$  telles que  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  soient intégrables, on a:

$$\mathbb{E}(f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)) = \mathbb{E}(f_1(X_1)) \dots \mathbb{E}(f_n(X_n)).$$

### 1.3 Variables Aléatoires Discrètes

Si  $E$  est discret, toutes mesures de probabilités est caractérisée par la famille de nombres  $(p(x), x \in E)$ . Les variables aléatoires principales sont définies dans le polycopié.

### 1.4 Variables Aléatoires à Densité

Les intégrales sont ici à considérer au sens de Lebesgue.

Définition:

Une variable aléatoire  $X$  est dite à densité  $p$  si:

$$\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}(X \in C) = \int_{x \in C} p(x)dx$$

une fonction mesurable et positive  $p$  est une densité de probabilité si et seulement si:

$$\int_{x \in \mathbb{R}^d} p(x)dx = 1.$$

Des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes si le vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  a pour densité  $p = p_{X_1} \otimes \dots \otimes p_{X_n}$ .

Théorème: Formule de transfert

Si  $X$  a une densité  $p$ , alors pour toutes fonctions mesurables  $f$  telle que  $\mathbb{E}(|f(X)|) < +\infty$ , alors:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)p(x)dx.$$

Les exemples principaux de variables aléatoires à densité se trouvent dans le polycopié.

### 1.5 Somme de VAs indépendantes

Soient  $X$  et  $Y$  deux VAs indépendantes, on note  $Z := X + Y$ .

Proposition:

La densité de  $Z$  est:

$$r(z) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} p_X(x)p_Y(z - x)dx$$

on l'appelle la convolution de  $p_X$  et  $p_Y$ .

### 1.6 Fonction de Répartition

On se place dans le cas où  $E = \mathbb{R}$ .

Définition:

La fonction de répartition d'un variable aléatoire  $X$  est définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

alors, pour tout réel  $r \in (0, 1)$ , un quantile d'ordre  $r$  pour  $X$  est un nombre  $q_r$  tel que:

$$\mathbb{P}(X \leq q_r) = F(q_r) = r.$$

En général un quantile n'existe pas toujours ou n'est pas unique, néanmoins, lorsque  $X$  possède une densité qui est positive alors le quantile existe et est unique.

Proposition:

Si  $X$  est une VAR à densité  $p$ , alors sa fonction de répartition est continue et dérivable presque partout, sa dérivée est presque partout égale à sa fonction de densité.

## 1.7 Fonction Charactéristique

Soient  $X$  et  $Y$  des vecteurs aléatoires.

Définition: Fonction Charactéristique

La fonction caractéristique de  $X$  est la fonction  $\Psi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  définie par:

$$\Psi_X(u) := \mathbb{E}(e^{i\langle u, X \rangle}) = \mathbb{E}(\cos(\langle u, X \rangle)) + i\mathbb{E}(\sin(\langle u, X \rangle)).$$

Proposition:

Si, pour tout  $u \in \mathbb{R}^d$ ,  $\Phi_X(u) = \Phi_Y(u)$ , alors  $X$  et  $Y$  sont de même loi.

Proposition:

Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$  sont indépendantes, alors:

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2).$$

## 1.8 Vecteurs Gaussiens

Soit  $X$  un vecteur aléatoire.

Définition: Vecteur Gaussien

$X$  est un vecteur Gaussien si, pour tout vecteur  $u$ , la variable aléatoire  $\langle u, X \rangle$  est gaussienne.

De ce qui précède, on déduit que, en notant  $\mathbb{E}(X) = m$  et  $Cov(X) = K$ , alors:

$$\langle u, X \rangle \sim \mathcal{N}(\langle u, m \rangle, \langle u, Ku \rangle) \text{ et } \Phi_X(u) = \exp(i\langle u, m \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Ku \rangle).$$

Par ailleurs, si  $K$  est inversible, alors  $X$  a la densité:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det K}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x - m, K^{-1}(x - m) \rangle\right)$$

sinon  $X$  n'a pas de densité.

## 1.9 Théorèmes de Convergence

Soient  $(X_n)$  et  $X$  des vecteurs aléatoires.

Définition:

$(X_n)$  converge vers  $X$  presque sûrement si:  $\mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1$ .

$(X_n)$  converge vers  $X$  en probabilité si, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\lim \mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \epsilon) = 0$ .

$(X_n)$  converge vers  $X$  en distribution si, pour toute fonction continue et bornée  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E}(f(X_n))$  converge vers  $\mathbb{E}(f(X))$ .

Théorème: Convergence Dominée

Supposons que  $(X_n)$  converge vers  $X$  presque sûrement et qu'il existe  $Y$  positive et intégrable telle que:  $\|X_n\| \leq Y$  presque sûrement, alors  $\mathbb{E}(X_n)$  converge vers  $\mathbb{E}(X)$ .

Pour  $f$  une fonction continue, si  $(X_n)$  converge presque sûrement (respectivement en probabilité ou en distribution) vers  $X$  alors  $f(X_n)$  converge presque sûrement vers  $f(X)$  (respectivement en probabilité ou en distribution).

Proposition:

$(X_n)$  converge en distribution (c'est-à-dire en loi) vers  $X$  si et seulement si  $\Psi_{X_n}(u)$  converge vers  $\Psi_X(u)$  pour tout  $u$ .

La convergence presque sûre implique la converge en probabilité qui implique elle même la converge en distribution.

Si on se place dans le cadre réel, alors on a les équivalences suivantes:

- $(X_n)$  converge vers  $X$  en distribution

- $\mathbb{P}(X_n \leq x) \rightarrow \mathbb{P}(X \leq x)$  pour tout  $x$  tel que  $\mathbb{P}(X = x) = 0$

- $\mathbb{P}(X_n < x) \rightarrow \mathbb{P}(X < x)$  pour tout  $x$  tel que  $\mathbb{P}(X = x) = 0$

On dit que la suite  $(X_n)$  est indépendante et indentiquement distribuée si ses variables sont indépendantes et de même loi. On note alors:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

la moyenne empirique de  $X_1, \dots, X_n$ .

Théorème: La Loi Forte des Grands Nombres

Soit  $(X_n)$  une suite de  $\text{VAR}^d$  iid telle que  $\mathbb{E}(\|X_1\|) < +\infty$ , alors:

$$\lim \bar{X}_n = \mathbb{E}(X_1) \text{ presque sûrement.}$$

Théorème: Théorème Central Limite Multivarié

Soit  $(X_n)$  une suite de  $\text{VAR}^d$  iid telle que  $\mathbb{E}(\|X_1\|^2) < +\infty$ , alors:

$$\lim \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)) = \mathcal{N}(0, \text{Cov}(X_1)) \text{ en distribution.}$$

## 2 Estimateur dans un Modèle Paramétrique

On considère un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  de VA iid dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  de loi  $\mathbb{P}$  inconnue qu'on cherche à éclaircir. On cherche par exemple à estimer  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_1)$ ,  $V_{\mathbb{P}}(X_1)$  l'histogramme de  $\mathbb{P}$  ou encore d'autre quantité d'intérêt (QI).

On se restreint à des lois d'une certaine forme caractérisées par un ou certains paramètres. Formellement, on considère une famille de lois:  $\{\mathbb{P}_{\theta}; \theta \in \Theta\}$ .

### 2.1 Estimateurs

On cherche donc à estimer une QI à l'aide de notre échantillon de VA, pour ce faire on va chercher à approcher QI par une fonction de l'échantillon appelée statistique.

Définition:

Une statistique  $T_n$  est une VA de la forme  $T_n = t_n(X_1, \dots, X_n)$  avec  $t_n$  déterministe et qui ne dépend pas de  $\mathbb{P}$ .

On appelle un estimateur une statistique qui vise à approcher une certaine QI.

Définition:

Un estimateur  $Z_n$  d'une QI est dit constant si  $Z_n$  converge en probabilité vers QI, il est fortement constant s'il converge vers QI presque sûrement.

Par exemple, dans le cas où  $E = \mathbb{R}$ , alors la moyenne empirique  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  est un estimateur fortement constant de  $\mathbb{E}(X_1)$ .

### 2.2 Biais et Risque Quadratique

Le biais et la MSE permettent de quantifier la distance d'un estimateur à sa QI dans un régime non asymptotique (ie n est fini).

Définition:

Soit un estimateur intégrable  $Z_n$ , le biais de  $Z_n$  est:

$$b(Z_n) = \mathbb{E}(Z_n) - QI, \text{ il s'agit de la distance moyenne de l'estimateur à la QI}$$

si ce biais est nul, on dit que l'estimateur est non biaisé.

Il est intéressant de remarquer que la variance empirique est biaisée ce qui motive la définition suivante:

Définition:

Si  $E = \mathbb{R}$ , l'estimateur non-biaisé de la variance est:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_i)^2.$$

Une mesure plus précise de la distance de l'estimateur à la QI peut être donnée par la MSE.

Définition:

Soit  $Z_n$  un estimateur de carré intégrable, la MSE de  $Z_n$  est définie par:

$$MSE(Z_n) = E(\|Z_n - QI\|^2).$$

Proposition:

On peut a l'égalité suivante:

$$MSE(Z_n) = ||b(Z_n)||^2 + V(Z_n).$$

En général on ne peut pas minimiser à la fois la variance et le biais. En data science il peut être intéressant d'introduire un biais pour réduire la variance du modèle et donc le risque d'overfitting.

### 2.3 Modèle Paramétrique et Estimation du Moment

On s'intéresse ici à l'estimation de la distribution complète  $\mathbb{P}$  de  $X_1$ . Il y a deux approches principales: la méthode non paramétrique (par histogramme) et la méthode paramétrique qui repose sur la supposition que  $\mathbb{P}$  a une certaine forme (comme exponentielle ou gaussienne).

Définition:

Un modèle paramétrique sur  $E$  est un ensemble de mesures de probabilités:

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta; \theta \in \Theta\}$$

sur l'espace  $E$ , indexé par un ensemble de paramètres  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ .

Il est important de constater que si, pour deux valeurs distinctes  $\theta$  et  $\theta'$ , on a  $\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}_{\theta'}$  alors il n'est pas possible de distinguer  $\theta$  de  $\theta'$  par simple observation de  $X_1, \dots, X_n$ . On travaillera donc toujours en supposant que la fonction  $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta$  est injective, on dira alors que  $\mathcal{P}$  est identifiable.

On fixe désormais un modèle paramétrique  $\mathcal{P}$ . Pour tout  $\theta$  il est pratique de dénoté par  $\mathbb{P}_\theta$  la mesure de probabilité pour laquelle, pour tout  $n \geq 1$ , les VAs  $X_1, \dots, X_n$  sont iid selon  $\mathbb{P}_\theta$ . On définit de façon similaire  $\mathbb{E}_\theta$ ,  $V_\theta$  etc.

Proposition:

Soit  $X$  une VA $\mathbb{R}$  non déterministe intégrable et qui prend ses valeurs dans un intervalle  $I$ . Soit  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement convexe, alors:  $\Phi(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(\Phi(X))$ .

La méthode des moments est une procédure naturelle pour construire des estimateurs, on détaille ici l'exemple pour le modèle exponentielle:  $\{\epsilon(\lambda); \lambda > 0\}$  dans lequel on cherche un estimateur de  $\lambda$ :

- La loi forte des grands nombres donne, pour tout  $\lambda > 0$ :  $\bar{X}_n \rightarrow \mathbb{E}_\lambda(X_1) = \frac{1}{\lambda}$  presque sûrement, donc  $\frac{1}{\bar{X}_n} \rightarrow \lambda$  presque sûrement.  
La continuité de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  assure donc que  $\bar{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$  est un estimateur fortement consistant de  $\lambda$ .

La généralisation abstraite de cette méthode s'énonce de la façon suivante:

- Pour l'estimation de  $g(\theta) \in \mathbb{R}^d$ , cela consiste à trouver  $\phi$  et  $m$  des fonctions telles que:

$$\forall \theta \in \Theta, \mathbb{E}_\theta(\phi(X_1)) = m(g(\theta)).$$

Pour le modèle exponentielle on a pris:  $\phi(x) = x$ ,  $g(\lambda) = \lambda$  et  $m(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ .

Alors, la loi forte des grands nombres nous permet donc d'approximer  $m(g(\theta))$  par:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(X_i)$  de sorte que, si  $m$  possède une fonction réciproque continue  $m^{-1}$ , alors:

$$Z_n = m^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(X_i)\right)$$

est un estimateur fortement consistant de  $g(\theta)$ .

## 2.4 Convergence Normale

La construction d'un estimateur par la méthode des moments dépend du choix arbitraire de la fonction  $\phi$ , donc différents choix de  $\phi$  peuvent donner différents estimateurs qui sont tous, par construction, fortement consistant. Pour déterminer l'estimateur le plus intéressant en pratique, on peut s'intéresser à celui qui converge 'le plus vite' vers la QI. Cette vitesse de convergence peut être mesurée à l'aide de la notion de variance asymptotique.

### Définition:

Un estimateur consistant  $Z_n$  de  $g(\theta)$  est asymptotiquement normal si, pour tout  $\theta$ , il existe une matrice symétrique positive  $K(\theta) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  telle que:  $\sqrt{n}(Z_n - g(\theta))$  converge en distribution vers  $\mathcal{N}_d(0, K(\theta))$ .

La fonction  $\theta \mapsto K(\theta)$  est appelé la covariance asymptotique de  $Z_n$ .

### Théorème: Méthode delta

Soit  $(\zeta_n)$  une suite de VA à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$  et  $a \in \mathbb{R}^k$  telles que  $\zeta_n \rightarrow a$  en probabilité et  $\sqrt{n}(\zeta_n - a)$  converge en distribution vers un vecteur aléatoire  $Y \in \mathbb{R}^k$ . Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^k$  qui contient  $a$ , soit  $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(\Phi(\zeta_n) - \Phi(a)) = \nabla \Phi(a)Y$$

en distribution.

### Théorème: Slutsky

Soit  $((X_n, Y_n))$  une suite de couples de VAs telle que  $(X_n)$  converge en probabilité vers une variable déterministe  $a$  et que  $(Y_n)$  converge en distribution vers une variable aléatoire  $Y$ . Alors  $((X_n, Y_n))$  converge en distribution vers  $(a, Y)$ , et, par conséquent, pour toute fonction continue  $\Psi$ ,  $(\Psi(X_n, Y_n))$  converge en distribution vers  $\Psi(a, Y)$ .

## 3 Statistiques dans des Modèles Gaussiens

On commence par quelques rappels.

### Définition:

Un vecteur aléatoire  $G \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur gaussien standard si chacune de ces composantes est de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et si elles sont indépendantes.

La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien standard est:  $\psi_G(u) = e^{-\frac{\|u\|^2}{2}}$  (il s'agit du cas particulier de la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien:  $\phi_X(x) = \exp(it^T m - \frac{1}{2}t^T \Sigma t)$ ).

### Théorème: Cochran

Soit  $G \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$ , pour tout sous-espace-vectoriel  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ , les coordonnées de  $G$  dans toutes base orthonormée de  $E$  forment un vecteur gaussien standard.

### Définition:

Pour  $n \geq 1$ , la distribution  $\chi$ -carré avec  $n$  degrés de liberté, notée  $\chi_2(n)$ , est la loi de la VA:

$$Z_n = \sum_{i=1}^n G_i^2 = \|G\|^2 \text{ avec } G \sim \mathcal{N}_n(0, I_n).$$

Son espérance est  $n$ , sa variance  $2n$ .

### 3.1 Statistiques d'Echantillons Gaussiens

On note  $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_i)^2$  l'estimateur non biaisé de la variance.

Proposition:

En considérant  $\mathbb{P}_{\mu, \sigma^2}$ , alors les estimateurs  $\bar{X}_n$  et  $S_n^2$  sont indépendants et:

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \text{ et } (n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_2(n-1).$$

On introduit pour la suite la variable aléatoire réduite  $X'_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et on définit comme on s'y attend  $\bar{X}'_n$  et  $S'^2_n$  telles que:

$$\bar{X}_n = \mu + \sigma \bar{X}'_n \text{ et } S_n^2 = \sigma^2 S'^2_n$$

alors, en notant  $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $E_2 = E_1^\perp$  et  $e = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , il vient:

$$G_{E_1} = \langle G, e \rangle e = \bar{X}'_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \|G_{E_2}\|^2 = (n-1)(S'_n)^2.$$

### 3.2 La Distribution de Student

Soit  $n \geq 1$ , alors:

Définition:

La distribution de Student avec  $n$  degrés de liberté, notée  $t(n)$ , est la loi de la VA:  $T_n = Y \sqrt{\frac{n}{Z_n}}$  avec  $Z_n \sim \chi_2(n)$  indépendante de  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Proposition:

Pour  $\mathbb{P}_{\mu, \sigma^2}$ , alors:  $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}} \sim t(n-1)$ .

### 3.3 Régression Linéaire avec Erreurs Gaussiennes

On s'intéresse ici à  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$  et on suppose qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}^{p+1}$  et des VAs  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  telles que:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \dots + \beta_p x_i^p + \epsilon_i.$$

On peut alors réécrire:  $Y_n = X_n \beta + \epsilon_n$ . L'estimateur de carré minimal (OLS) de  $\beta$  est donné par:  $\min_{\beta} \|Y_n - X_n \beta\|^2$ .

Si on suppose par ailleurs que  $\mathbb{E}(\epsilon_n) = 0$  et  $Cov(\epsilon_n) = \sigma^2 I_n$ , alors l'OLS est non biaisé et  $Cov(\beta) = \sigma^2 (X_n^T X_n)^{-1}$  et, si  $n > p + 1$ , alors un estimateur de  $\sigma^2$  est donné par:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y_n - X_n \hat{\beta}\|^2}{n - p - 1}$$

avec  $\hat{\beta} = (X_n^T X_n)^{-1} X_n^T Y_n$  qui défini alors l'OLS.

Ensuite, si on suppose que  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  sont des VAs gaussiennes indépendantes centrées de variance  $\sigma^2$ , alors:

Proposition: Les estimateurs  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\sigma}^2$  sont indépendants et:

$$\hat{\beta} \sim \mathcal{N}_{p+1}(\beta, \sigma^2 (X_n^T X_n)^{-1}) \text{ et } (n-p-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_2(n-p-1).$$

## 4 Intervalles de Confiance

### 4.1 Définitions Générales

Soit  $\alpha \in (0, 1/2)$  la précision désirée pour notre intervalle de confiance.

Définition: Intervalle de confiance

Un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour la QI  $g(\theta)$  est un intervalle  $I_n = [I_n^-, I_n^+]$  tel que  $I_n^-$  et  $I_n^+$  soient des statistiques et, pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $\mathbb{P}_\theta(g(\theta) \in I_n) = 1 - \alpha$ .

Il peut être assez difficile, voire impossible, de construire des intervalles de confiance comme définis précédemment (on dit qu'ils sont exacts), on introduit donc les définitions suivantes:

Définition:

Soit un intervalle  $I_n$  tel que  $I_n^-$  et  $I_n^+$  soient des statistiques, alors cet intervalle est dit:

- de confiance asymptotique si, pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $\lim_n \mathbb{P}_\theta(g(\theta) \in I_n) = 1 - \alpha$
- de confiance par excès si, pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $\lim_n \mathbb{P}_\theta(g(\theta) \in I_n) \geq 1 - \alpha$ .

Lorsque  $g(\theta) \in \mathbb{R}^d$ , on peut alors généraliser la notion d'intervalle de confiance à celle de région de confiance définie, pour un niveau  $1 - \alpha$ , par une fonction  $C_n$  de  $E^n$  dans l'espace des sous-ensembles mesurables de  $\mathbb{R}^d$  telle que:

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, 1_{z \in C_n(X_n)} \text{ est une statistique et } \forall \theta \in \Theta, \mathbb{P}_\theta(g(\theta) \in C_n(X_n)) = 1 - \alpha.$$

### 4.2 Construction d'Intervalles de Confiance Exact

#### 4.2.1 Fonction Pivot

On commence par une définition générale:

Définition: VA libre

Un VA  $Q$  est dite libre selon  $\mathbb{P}_\theta$  si sa loi ne dépend pas de  $\theta$ .

Définition: Fonction pivot

Un fonction pivot pour  $g(\theta)$  est une fonction  $\pi_n : E^n \times g(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\pi_n(X_n, g(\theta))$  est libre.

#### 4.2.2 Exemple dans le Modèle Gaussien

On s'intéresse à la moyenne  $\mu$  dans un modèle Gaussien qu'on estime classiquement avec  $\bar{X}_n$ . La loi de  $\bar{X}_n$  selon  $\mathbb{P}_{\mu, \sigma^2}$  est  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ . Il vient alors:

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ est libre.}$$

Néanmoins, la fonction:

$$\pi_n(x_n, \mu) = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

n'est pas une fonction pivot puisqu'elle dépend de  $(\mu, \sigma^2)$  à travers  $\mu$  et  $\sigma$  et non uniquement de  $\mu$ .

Supposons donc momentanément que  $\sigma^2$  soit connu, alors  $\pi_n$  devient une fonction pivot. Il vient alors, pour tout réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ :

$$\mathbb{P}_{\mu, \sigma^2}(Y_n \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp(-x^2/2) dx$$

donc, pour tout choix de  $a$  et  $b$  tels que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp(-x^2/2) dx = 1 - \alpha$$

alors l'intervalle  $[\bar{X}_n - b\sqrt{\sigma^2/n}, \bar{X}_n - a\sqrt{\sigma^2/n}]$  est un intervalle de confiance exact de précision  $1 - \alpha$  pour  $\mu$ .

Rappelons par ailleurs que l'on définit par  $\phi_r$  le quantile d'ordre  $r$  de la distribution gaussienne standard, alors  $a$  et  $b$  permettent de satisfaire l'égalité attendue si et seulement si:

$$\exists r \in [0, \alpha] : a = \phi_r, b = \phi_{r+1-\alpha}.$$

Pour une telle paire  $(a, b)$  et l'intervalle de confiance exact  $[\bar{X}_n - b\sqrt{\sigma^2/n}, \bar{X}_n - a\sqrt{\sigma^2/n}]$ , la probabilité de sous-estimer  $\mu$  est  $r$ , celle de la sur-estimer est  $\alpha - r$ .

Supposons désormais que  $\sigma^2$  ne soit pas connu. Une idée classique consiste alors à remplacer  $\sigma^2$  par l'estimateur non-biaisé de la variance  $S_n^2$  et on considère:

$$Y'_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2/n}} \sim t(n-1) \text{ est libre.}$$

Il vient alors que:

$$\pi_n(x_n, \mu) = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sqrt{s_n^2/n}} \text{ avec } s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2$$

est une fonction pivot.

En conséquence, pour tout réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ , il vient:

$$\mathbb{P}_{\mu, \sigma^2}(Y'_n \in [a, b]) = \int_a^b p_{n-1}(x) dx \text{ avec } p_{n-1} \text{ la densité de la loi } t(n-1).$$

Une nouvelle fois, dès que le couple  $(a, b)$  vérifie:

$$\int_a^b p_{n-1}(x) dx = 1 - \alpha$$

on obtient un intervalle de confiance de précision  $1 - \alpha$  pour  $\mu$ .

#### 4.2.3 Résumé de la Méthode

On commence par trouver une fonction pivot  $Q_n = \pi_n(x_n, g(\theta))$ , on réécrit la condition  $Q_n \in [a, b]$  comme  $g(\theta) \in I_n$  où les extrémités de  $I_n$  sont des statistiques. Enfin on choisit un couple  $(a, b)$  qui satisfait:  $\mathbb{P}(Q_n \in [a, b]) = 1 - \alpha$ , ce qui revient à choisir  $a = q_{n,r}$  et  $b = q_{n,r+1-\alpha}$  avec  $0 \leq r \leq \alpha$  et  $q_{n,r}$  le quantile d'ordre  $r$  de  $Q_n$ .

### 4.3 Construction d'Intervalle de Confiance Asymptotique

On rappelle que  $\phi_r$  définit le quantile d'ordre  $r$  de la distribution gaussienne standard.

Proposition: Intervalle de confiance asymptotique

Soit  $Z_n$  un estimateur consistant et convergent normalement de  $g(\theta)$ , on note  $V(\theta)$  sa variance asymptotique. On suppose qu'un estimateur consistant  $\hat{V}_n$  de  $V(\theta)$  est connu, alors:

$$\forall \alpha \in (0, 1/2), I_n = [Z_n - \phi_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{V}_n}{n}}, Z_n + \phi_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{V}_n}{n}}]$$

est un intervalle de confiance asymptotique avec une précision de  $1 - \alpha$  pour  $g(\theta)$ .

En général il n'est pas difficile de trouver un estimateur consistant de  $V(\theta)$ , dès que  $V$  est continue et que  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur consistant de  $\theta$ , alors on a simplement:  $\hat{V}_n = V(\hat{\theta}_n)$ .

## 4.4 Construction d'Intervalle de Confiance par Excès

On s'intéresse au cas où on ne possède pas de fonction pivot, comme dans le cas d'une loi de Bernoulli. On va alors construire des intervalles de confiance par excès à l'aide des inégalités de concentration.

Définition: Inégalité de concentration

Une inégalité de concentration pour une variable aléatoire  $Y$  est une inégalité de la forme:  $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq r) \leq c_Y(r)$  pour une fonction de concentration  $c_Y$  convergente asymptotiquement vers 0.

Si  $Z_n$  est un estimateur non-biaisé de  $g(\theta)$  et qui vérifie une inégalité de concentration telle que:

$$\forall r > 0, \sup_{\theta} \mathbb{P}_{\theta}(|Z_n - g(\theta)| \geq r) \leq c_{Z_n}(r)$$

alors tout  $r_{n,\alpha} > 0$  tel que  $c_{Z_n}(r_{n,\alpha}) \leq \alpha$  produit l'intervalle de confiance par excès:  $[Z_n - r_{n,\alpha}, Z_n + r_{n,\alpha}]$  pour  $g(\theta)$ .

### 4.4.1 L'Inégalité de Bienaymé-Chebychev

C'est l'inégalité classique:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq a) \leq \frac{V(Y)}{a^2}.$$

Pour un modèle de Benoulli dans lequel on utilise  $\bar{X}_n$  comme estimateur de  $p$ , alors, pour tout  $a > 0$ , il vient:

$$\mathbb{P}_p(|\bar{X}_n - p| \geq a) \leq \frac{p(1-p)}{a^2}$$

donc, pour  $a$  tel que:  $\frac{p(1-p)}{a^2} \leq \alpha$ , il vient:

$$\mathbb{P}_p(p \in [\bar{X}_n - a/\sqrt{n}, \bar{X}_n + a/\sqrt{n}]) \leq 1 - \alpha.$$

Il reste à trouver une telle valeur de  $a$  qui ne dépende pas de  $p$ , pour les VAs bornées, on peut utiliser le lemme suivant:

Lemme: Borne universelle de la variance

Soit  $Y$  une VA à valeurs dans  $[0, 1]$ , alors:  $V(Y) \leq \frac{1}{4}$ .

Il suffit alors de prendre  $a = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ .

### 4.4.2 Inégalité de Hoeffding

On commence par introduire le lemme suivant:

Lemme: Inégalité de Hoeffding

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des VAs iid à valeurs dans  $[0, 1]$ , alors, pour tout  $n \geq 1$  et  $r > 0$ , il vient:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \geq r\sqrt{n}\right) \leq \exp(-2r^2).$$

Il vient alors:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| \geq r/\sqrt{n}) \leq 2 \exp(-2r^2).$$

## 5 Estimateur du Maximum de Vraisemblance

Jusqu'à présent, on a vu des méthodes d'estimation, de calcul d'intervalle de confiance qui reposent sur le choix de fonctions particulières. A l'inverse l'estimateur du maximum de vraisemblance permet d'estimer les paramètres d'un modèle de façon plus générale.

## 5.1 Vraisemblance d'un Echantillon et Estimateur

On s'intéresse à  $(X_1, \dots, X_n)$  des VAs iid dans  $\mathbb{R}^n$ .

Définition: Vraisemblance d'une observation

Soit  $x_n^* = (x_1, \dots, x_n)$  une valeur possible de  $X_n^* = (X_1, \dots, X_n)$ , la vraisemblance de cette observation est donnée par la fonction:

$$L_n(x_n^*, \cdot) = \theta \mapsto \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) \text{ avec } p(x_i, \theta) = \mathbb{P}_\theta(X_i = x_i).$$

Dans le cas discret, alors:  $L_n(x_n^*, \theta) = \mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ , si  $\mathbb{P}_\theta$  admet une densité selon la mesure de Lebesgue, alors elle est donnée par:  $x_n^* \mapsto L_n(x_n^*, \theta)$ .

L'estimation du maximum de vraisemblance consiste à chercher le paramètre  $\theta^*$  qui rend les valeurs observées les plus probables.

Définition: Estimateur du maximum de vraisemblance

Supposons que, pour tout  $x_n^*, \theta \mapsto L_n(x_n^*, \theta)$  atteigne un maximum global en  $\theta^* = \theta_n(x_n^*)$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) de  $\theta$  est la statistique:

$$\hat{\theta}_n = \theta_n(x_n^*).$$

Dans le cas où il y a plusieurs maximum, on peut simplement prendre  $\hat{\theta}_n \in \arg \max_\theta L_n(x_n^*, \theta)$ .

Si la fonction de vraisemblance est différentiable, on peut alors calculer  $\hat{\theta}_n$  en cherchant les zéros du gradient. Dans cette perspective, il peut être intéressant de considérer la dérivée du logarithme de la vraisemblance:

$$l_n(x_n^*, \theta) = \log(L_n(x_n^*, \theta)).$$

## 5.2 Exemples

### 5.2.1 Modèle de Bernoulli

On a alors:

$$L_n(x_n^*, p) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_p(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

donc:

$$l_n(x_n^*, p) = \sum_{i=1}^n (x_i \log(p) + (1-x_i) \log(1-p)) = n\bar{X}_n \log(p) + n(1-\bar{X}_n) \log(1-p).$$

On peut alors calculer:

$$\frac{\partial l}{\partial p}(x_n^*, p^*) = 0 \iff (1-p^*)\bar{X}_n - p^*(1-\bar{X}_n) = 0 \iff p^* = \bar{X}_n.$$

Il reste alors à s'assurer que  $p^*$  correspond bien à un maximum, dans le cas du modèle de Bernoulli c'est bien le cas.

### 5.2.2 Cas du Modèle Gaussien

On a alors:

$$L_n(x_n^*, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

donc:

$$\frac{\partial l_n}{\partial \mu}(x_n^*, \mu^*, \sigma^{2*}) = \frac{1}{\sigma^{2*}} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu^*) \quad \text{et} \quad \frac{\partial l_n}{\partial \sigma^2}(x_n^*, \mu^*, \sigma^{2*}) = -\frac{n}{2\pi\sigma^*} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu^*)^2}{\sigma^{3*}}.$$

On trouve alors :  $\mu^* = \bar{X}_n$  et  $\sigma^{2*} = S_n^2$  qui sont les estimateurs qu'on trouve également avec la méthode des moments.

## 5.3 Optimalité du MLE

Lorsqu'on a plusieurs estimateurs du même paramètre on peut comparer leur MSE, voire leur variance asymptotique s'ils sont asymptotiquement normaux. Le MLE est asymptotiquement normal, sa variance asymptotique est par ailleurs optimale dans les modèles réguliers.

### 5.3.1 Modèle Régulier et Information de Fisher

On rappelle que  $\nabla \phi_\theta = (\frac{\partial \phi}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial \theta_d})$ .

Définition: Modèle régulier

Un modèle paramétrique est régulier si:  $\Theta$  est ouvert et:

- $\forall x_1, \forall \theta \in \Theta, L_1(x_1, \theta) > 0$
- $\forall x_1, \theta \mapsto l_1(x_1, \theta) \in C^1(\Theta)$
- $\forall \theta \in \Theta, \mathbb{E}_\theta(||\nabla_\theta l_1(X_1, \theta)||^2) < +\infty$ .

Définition: Score dans un modèle régulier

Dans un modèle régulier, on appelle score le vecteur aléatoire  $\nabla_\theta l_1(X_1, \theta) = (\frac{1}{p(X_1, \theta)} \frac{\partial p}{\partial \theta_i}(X_1, \theta))_i$ .

L'information de Fisher  $I(\theta)$  d'un modèle régulier est:

$$I(\theta) = Cov_\theta(\nabla_\theta l_1(X_1, \theta)).$$

Proposition:

On a, pour tout  $\theta$ ,  $\mathbb{E}_\theta(\nabla_\theta l_1(X_1, \theta)) = 0$  et les coefficients de  $I(\theta)$  sont:

$$I_{i,j}(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_i}(X_1, \theta) \frac{\partial l_1}{\partial \theta_j}(X_1, \theta)\right) = -\mathbb{E}_\theta\left(\frac{\partial^2 l_1}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(X_1, \theta)\right).$$

### 5.3.2 Estimateur Efficace

On peut utiliser l'information de Fisher pour définir une notion d'efficacité pour les modèles non-biaisés.

Théorème: Borne de Cramér-Rao

Pour un modèle régulier tel que  $I(\theta) > 0$  pour tout  $\theta$ , on note  $\tilde{\theta}_n = t_n(X_n)$  un estimateur non-biaisé de  $\theta$  avec la matrice de covariance  $K_n(\theta) = Cov_\theta(\tilde{\theta}_n)$ ; alors:

$$K_n(\theta) \succeq \frac{I^{-1}(\theta)}{n}.$$

Définition: Estimateur efficace

Un estimateur est dit efficace s'il est non-biaisé et si sa matrice de covariance vérifie  $K_n(\theta) = \frac{I^{-1}(\theta)}{n}$ .

On rappelle que si  $\tilde{\theta}_n$  est un estimateur non-biaisé, alors:  $MSE(\tilde{\theta}_n, \theta) = \mathbb{V}_\theta(\tilde{\theta}_n) = tr(K_n(\theta)) \geq \frac{tr(I^{-1}(\theta))}{n}$ . En conséquences, dans un modèle régulier, les estimateurs efficaces minimisent la MSE pour les estimateurs non-biaisés.

## 6 Estimation Bayésienne

Les techniques utilisées jusqu'à présent sont essentiellement motivées par le fait que les estimateurs sont constants. Ainsi, si suffisamment de données sont relevées, on peut retrouver la valeur réelle de la quantité d'intérêt, c'est l'approche fréquentiste.

Néanmoins, dans certains cas, comme lorsque les données sont manquantes, il peut être intéressant d'avoir des connaissances, indépendantes des données observées, a priori sur la valeur de la quantité d'intérêt. C'est le principe des l'inférence bayésienne.

### 6.1 Formalisation de l'Estimation Bayésienne

On travaille toujours dans le cadre d'un modèle paramétrique  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta; \theta \in \Theta\}$  où  $\Theta$  est fini ou un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^q$ .

La distribution a priori est une mesure de probabilité sur  $\Theta$  qui évalue la crédibilité de chaque valeur de  $\theta$  avant d'observer les données.

Définition: Distribution a posteriori

Pour une distribution a priori  $Q$ , la distribution a posteriori est la mesure de probabilité  $Q(\cdot|x_n^*)$  définie sur  $\Theta$  par:

$$Q(d\theta|x_n^*) = \frac{L_n(x_n^*, \theta)Q(d\theta)}{\int_{\omega \in \Theta} L_n(x_n^*, \omega)Q(d\omega)},$$

où  $L_n(x_n^*, \theta)$  est la vraisemblance de l'observation  $x_n^*$ .

Ainsi, pour tout sous-ensemble  $B \subset \Theta$  mesurable, il vient:

$$Q(B|x_n^*) = \frac{\int_{\theta \in B} L_n(x_n^*, \theta)Q(d\theta)}{\int_{\omega \in \Theta} L_n(x_n^*, \omega)Q(d\omega)}.$$

Plus généralement, si  $\Theta$  est dénombrable, alors:

$$Q(d\theta|x_n^*) = \frac{L_n(x_n^*, \theta)Q(\theta)}{\sum_{\omega \in \Theta} L_n(x_n^*, \omega)Q(\omega)},$$

si  $Q$  a une densité  $q$ , alors  $Q(\cdot, x_n^*)$  a la densité:

$$q(\theta|x_n^*) = \frac{L_n(x_n^*, \theta)q(\theta)}{\int_{\omega \in \Theta} L_n(x_n^*, \omega)q(\omega)d\omega}.$$

La distribution a posteriori doit être interprétée comme la crédibilité de  $\theta$  étant donnée l'observation de  $x_n^*$ .

## 6.2 Estimateur Bayesien

La distribution a posteriori possède toutes les informations nécessaires pour l'étude de  $\theta$ . Toutefois, en tant que mesure de distribution de probabilité, elle n'est pas évidente à manipuler, il est donc intéressant d'introduire les notions d'estimateur (Bayesien) ou d'intervalle de confiance.

Définition: Moyenne postérieure (Sous l'hypothèse  $\Theta \subset \mathbb{R}^q$  convexe)

La moyenne postérieure (PM) est la moyenne de la distribution a posteriori:

$$\widehat{\theta_n^{PM}} = \theta_n^{PM}(X_n), \quad \text{avec } \theta_n^{PM}(x_n^*) = \int_{\theta \in \Theta} \theta Q(d\theta | x_n^*).$$

La VA  $\widehat{\theta_n^{PM}}$  est une statistique et donc un estimateur de  $\theta$  dans le sens fréquentiste.

Dans la définition suivante, on suppose que ou bien  $\Theta$  est discret et on pose  $q(\theta) = Q(\{\theta\})$  ou bien  $Q$  a une densité  $q$ .

Définition: Maximum a posteriori (MAP)

Supposons que, pour tout  $x_n^* \in E^n$ , la fonction  $\theta \mapsto q(\theta | x_n^*)$  possède un maximum unique atteint en  $\theta = \theta_n^{MAP}(x_n^*)$ , alors le MAP est défini par :  $\widehat{\theta_n^{MAP}} = \theta_n^{MAP}(X_n)$ . Comme la PM, le MAP est un estimateur de  $\theta$  dans le sens fréquentiel.

Il est généralement attendu que la distribution a posteriori se concentre autour de  $\theta$  de façon asymptotique. Quand  $\Theta$  est discrète, la définition de ce phénomène est immédiate:

Définition: Consistance de la distribution a posteriori (cas discret)

L'estimateur Bayesien de  $\theta$  avec la distribution a priori  $Q$  est consistant si:

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\theta | X_n) = 1, \quad \text{C } \mathbb{P}_\theta.$$

Pour le cas général, la définition est un peu plus technique:

Définition: Consistance de la distribution a posteriori (cas  $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ )

L'estimateur Bayesien de  $\theta$  avec la distribution a priori  $Q$  est consistant si:

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\{\omega \in \Theta \mid \|\omega - \theta\| \geq \epsilon\} | X_n) = 0, \quad \text{presque sûrement selon } \mathbb{P}_\theta.$$

Proposition: Condition suffisante de consistance

Pour tout  $x_n^* \in E^n$ , on définit la variance de la distribution a posteriori par:

$$V_n(x_n^*) = \int_{\theta \in \Theta} \|\theta - \theta_n^{PM}(x_n^*)\|^2 Q(d\theta | x_n^*).$$

On peut alors vérifier que, si la PM  $\widehat{\theta_n^{PM}}$  est fortement consistante et si  $V_n(X_n) \rightarrow 0$  presque sûrement selon  $\mathbb{P}_\theta$ , pour tout  $\theta$ , alors l'estimateur bayésien de  $\theta$ , pour la distribution a priori  $Q$ , est consistant. Dans le cas où  $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ , on peut alors introduire le concept d'intervalle de crédibilité de niveau  $1 - \alpha$  qui définit un intervalle  $I$  dont les bornes sont des statistiques telles que:

$$Q(I | X_n) = 1 - \alpha.$$

Ces intervalles sont l'équivalent Bayesien des intervalles de confiances.

## 7 Formalisme des Tests d'Hypothèses Statistiques

### 7.1 Formalisme Général

On se donne ici  $\Theta \subset \mathbb{R}^q$  et  $H_0, H_1$  une partition de  $\Theta$ .  $H_0$  est l'hypothèse nulle qui correspond à une absence d'effet.  $H_1$  est l'hypothèse alternative, elle correspond à la présence d'un effet et on cherchera en général à prouver que  $\theta \in H_1$ .

### Définition: Test

Un test de  $H_0$  contre  $H_1$  est une règle de décision déterminant, pour une observation, si  $\theta \in H_0$  ou  $\theta \in H_1$ . Il s'agit d'une fonction déterministe de  $E^n$  dans  $\{H_0, H_1\}$ .

### Définition: Région de rejet

Il s'agit de l'ensemble de test  $W_n$  pour lesquels l'hypothèse  $H_0$  est rejetée.

Dans le cadre d'un modèle de Bernoulli où l'on chercherait à savoir si une pièce est truquée ou non, alors on aurait:

$$H_0 = \{1/2\} \text{ et } H_1 = [0, 1] \setminus \{1/2\}.$$

#### 7.1.1 Erreurs de Type I et II

Néanmoins, comme le test  $x_n^*$  n'est que la réalisation d'une VA  $X_n$ , il se peut qu'il donne un résultat incorrect. On distingue alors deux types d'erreurs.

##### Définition: Erreurs de type I et II

Une erreur de type I est une rejection incorrecte de l'hypothèse nulle, elle est mesurée par le risque de type I:

$$\theta \in H_0 \mapsto \mathbb{P}_\theta(X_n \in W_n).$$

Une erreur de type II est la validation incorrecte de l'hypothèse nulle, elle est mesurée par le risque de type II:

$$\theta \in H_1 \mapsto \mathbb{P}_\theta(X_n \notin W_n).$$

##### Définition: Puissance statistique d'un test

La puissance statistique d'un test est définie par la fonction:

$$\theta \in H_1 \mapsto \mathbb{P}_\theta(X_n \in W_n) = \mathbb{P}_\theta(W_n) = 1 - \text{erreur de type II}.$$

##### Définition: Propriétés asymptotiques

Un test est dit consistant si:  $\forall \theta \in H_1, \lim_n \mathbb{P}_\theta(X_n \in W_n) = 1$ . Le test est de niveau asymptotique  $\alpha$  si:

$$\alpha = \sup_{\theta \in H_0} \limsup_n \mathbb{P}_\theta(X_n \in W_n).$$

Une question naturelle se pose alors: comment choisir un test pertinent ? D'après les définitions précédentes, il est tout d'abord notable que:

- seuls les tests de même niveau  $\alpha$  peuvent être comparés
- un test est alors préférable à un autre s'il est plus puissant, c'est-à-dire que son erreur de type II est plus faible.

#### 7.1.2 Procédure Générale Pour Construire un Test

On commence par définir les ensembles  $H_0$  et  $H_1$  (il est souvent judicieux de construire  $H_1$  en premier).

On définit alors la région de rejet  $W_n$ , on préfère les cas où on peut écrire, avec  $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g_0 \in \mathbb{R}$ :

- $H_1 = \{g(\theta) > g_0\}$  ou  $H_1 = \{g(\theta) < g_0\}$  on dit alors que le test est one-sided
- $H_1 = \{g(\theta) \neq g_0\}$  on dit alors que le test est two-sided.

Supposons par ailleurs qu'on possède un estimateur  $Z_n$  de  $g(\theta)$ , on peut alors réécrire  $W_n$  comme:

- $\{Z_n \geq g_0 + a_n\}$  si  $H_1 = \{g(\theta) > g_0\}$
- $\{Z_n \leq g_0 - a_n\}$  si  $H_1 = \{g(\theta) < g_0\}$
- $\{Z_n \notin (g_0 - a_n, g_0 + b_n)\}$  sinon

pour  $a_n, b_n \geq 0$ .

On se place pour l'instant dans le cadre d'un test one-sided de la forme  $H_1 = \{g(\theta) > g_0\}$ . Pour tout  $a_n \geq 0$ , l'erreur de type I est de la forme:

$$\mathbb{P}_\theta(W_n) = \mathbb{P}_\theta(Z_n \geq g_0 + a_n), \quad \theta \in H_0.$$

Supposons par ailleurs qu'il existe  $\theta_0 \in H_0$  tel que:

$$\forall a_n \geq 0, \quad \sup_{\theta \in H_0} \mathbb{P}_\theta(Z_n \geq g_0 + a_n) = \mathbb{P}_{\theta_0}(Z_n \geq g_0 + a_n).$$

Alors, en notant  $z_{\theta_0, n, r}$  le quantile d'ordre  $r$  de la loi de  $Z_n$  selon  $\mathbb{P}_{\theta_0}$ , on obtient:

$$\sup_{\theta \in H_0} \mathbb{P}_\theta(W_n) < \alpha \quad \text{si et seulement si } g_0 + a_n \geq z_{\theta_0, n, 1-\alpha}.$$

De plus, pour tout  $\theta \in H_1$ , le risque de type II  $P_\theta(Z_n < g_0 + a_n)$  est une fonction croissante de  $g_0 + a_n$  qui est donc minimum en  $z_{\theta_0, n, 1-\alpha}$ . La région de rejet finale de puissance statistique maximum sous la contrainte d'un niveau inférieur à  $\alpha$  est:

$$W_n = \{Z_n \geq z_{\theta_0, n, 1-\alpha}\}.$$

Si  $H_1 = \{g(\theta) < g_0\}$ , alors on peut écrire symétriquement:  $W_n = \{Z_n \leq z_{\theta_0, n, \alpha}\}$  comme région de rejet finale.

Considérons désormais le cas d'un test two-sided. On suppose de nouveau qu'il existe  $\theta_0 \in H_0$  tel que:

$$\forall a_n, b_n, \quad \sup_{\theta \in H_0} \mathbb{P}_\theta(Z_n \notin (g_0 - a_n, g_0 + b_n)) = \mathbb{P}_{\theta_0}(Z_n \notin (g_0 - a_n, g_0 + b_n)).$$

Il est alors clair que le risque de type I est borné supérieurement par  $\alpha$  dès qu'on choisit  $a_n, b_n$  tels que:

$$\exists r \in [0, \alpha] : g_0 - a_n \leq z_{\theta_0, n, r} \quad \text{et} \quad g_0 + b_n \geq z_{\theta_0, n, 1-\alpha+r}.$$

De plus le risque de type II est nécessairement réduit si ces inégalités sont transformées en égalités, mais la valeur de  $r$  qui minimise le risque de type II risque, en général, de dépendre de  $\theta$ , ce qui n'était pas le cas pour l'étude one-sided. Il est alors courant de choisir  $r = \alpha/2$  de sorte que:

$$W_n = \{Z_n \leq z_{\theta_0, n, \alpha/2} \quad \text{ou} \quad Z_n \geq z_{\theta_0, n, 1-\alpha/2}\}.$$

Il arrive parfois que la loi de  $Z_n - g_0$  soit symétrique pour  $\mathbb{P}_{\theta_0}$ , donc:

$$z_{\theta_0, n, \alpha/2} = g_0 - z_{n, 1-\alpha/2}, \quad z_{\theta_0, n, 1-\alpha/2} = g_0 + z_{n, \alpha/2}$$

avec  $z_{n, 1-\alpha/2}$  le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi de  $Z_n - g_0$ , on peut alors réécrire:

$$W_n = \{|Z_n - g_0| \geq z_{n, 1-\alpha/2}\}.$$

Pour les deux cas, la consistance se déduit de la consistance de  $Z_n$ .

Proposition: Consistance

Soit  $W_n$  une région de rejet dont la forme est l'une de celle décrite précédemment, alors si  $Z_n$  est un estimateur consistant de  $g(\theta)$ , alors le test est consistant.

### 7.1.3 p-Value

On traite tout d'abord le cas particulier dans lequel il existe une statistique  $\zeta_n(X_n)$  et  $\theta_0 \in H_0$  tel que  $W_n = \{\zeta_n(X_n) \geq \zeta_{\theta_0, n, 1-\alpha}\}$  où  $\zeta_{\theta_0, n, 1-\alpha}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de  $\zeta_n(X_n)$  pour  $\mathbb{P}_{\theta_0}$ .

Ces hypothèses couvrent les cas suivants:

- les test one-sided de la rubrique précédente avec  $\zeta_n(X_n) = Z_n$  si  $H_1 = \{g(\theta) > g_0\}$ ,  $\zeta_n(X_n) = -Z_n$  dans l'autre cas
- les test one-sided de la rubrique précédente dans le cas spécifique de symétrie avec  $\zeta_n(X_n) = |Z_n - g_0|$ .

#### Définition: p-value

Dans les cas précis cités précédemment, pour tout  $x_n^* \in E^n$  la p-value de l'observation  $x_n^*$  est:

$$p-value = \mathbb{P}_{\theta_0}(\zeta(X_n) \geq \zeta(x_n^*)).$$

La p-value doit être comprise comme la probabilité selon  $H_0$  que la statistique du test prenne des valeurs plus défavorables à la validation de  $H_0$  que les valeurs observées dans les données.

#### Proposition: p-value et niveau

Sous les hypothèses précédentes, il vient que  $H_0$  est rejetée si et seulement si  $p-value \leq \alpha$ .

#### 7.1.4 Dualité entre Tests et Régions de Confiance

Considérons des hypothèses nulles et alternatives de la forme:

$$H_0 = \{g(\theta) = g_0\}, \quad H_1 = \{g(\theta) \neq g_0\}$$

pour  $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g_0 \in g(\Theta)$ . Supposons de plus qu'une région de confiance  $C_n$  de niveau  $1 - \alpha$  soit disponible pour  $g(\theta)$ , alors, par définition :

$$\forall \theta \in H_0, \quad \mathbb{P}_\theta(g_0 \notin C_n) = \mathbb{P}_\theta(g(\theta) \notin C_n) = \alpha,$$

de sorte que le test avec la région de rejet  $W_n = \{g_0 \notin C_n\}$  soit de niveau  $\alpha$ .

## 7.2 Comparaisons Multiples

Supposons qu'on est construit un test avec la région de rejet  $W_n$  et le niveau  $\alpha$  pour des hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ . On suppose de plus que  $H_0 = \{\theta_0\}$ , si on observe  $X_n$  distribuée selon  $H_0$ , alors la probabilité d'un faux positif est, par construction,  $\alpha$ . Ainsi, pour  $m$  observations indépendantes, la probabilité d'avoir au moins un faux positif devient:

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\bigcup_{k=1}^m \{X_{k,n} \in W_n\}) = 1 - \prod_{k=1}^m \mathbb{P}_{\theta_0}(X_{k,n} \notin W_n) = 1 - (1 - \alpha)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, en répétant suffisamment de fois l'expérience, alors on peut conclure que l'effet qu'on cherche est présent alors même que dans les faits il ne l'est pas.