

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 7

Студент
Саранча Павел Александрович
Р3109

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $3 < x_1x_2x_3 + x_4x_5 < 8$ и неопределенное значение при $x_3x_4 = 0$

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1x_2x_3$	x_4x_5	x_3x_4	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	d
1	0	0	0	0	1	0	1	0	d
2	0	0	0	1	0	0	2	1	0
3	0	0	0	1	1	0	3	1	0
4	0	0	1	0	0	1	0	2	0
5	0	0	1	0	1	1	1	2	0
6	0	0	1	1	0	1	2	3	0
7	0	0	1	1	1	1	3	3	1
8	0	1	0	0	0	2	0	0	d
9	0	1	0	0	1	2	1	0	d
10	0	1	0	1	0	2	2	1	1
11	0	1	0	1	1	2	3	1	1
12	0	1	1	0	0	3	0	2	0
13	0	1	1	0	1	3	1	2	1
14	0	1	1	1	0	3	2	3	1
15	0	1	1	1	1	3	3	3	1
16	1	0	0	0	0	4	0	0	d
17	1	0	0	0	1	4	1	0	d
18	1	0	0	1	0	4	2	1	1
19	1	0	0	1	1	4	3	1	1
20	1	0	1	0	0	5	0	2	1
21	1	0	1	0	1	5	1	2	1
22	1	0	1	1	0	5	2	3	1
23	1	0	1	1	1	5	3	3	0
24	1	1	0	0	0	6	0	0	d
25	1	1	0	0	1	6	1	0	d
26	1	1	0	1	0	6	2	1	0
27	1	1	0	1	1	6	3	1	0
28	1	1	1	0	0	7	0	2	1
29	1	1	1	0	1	7	1	2	0
30	1	1	1	1	0	7	2	3	0
31	1	1	1	1	1	7	3	3	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee \\ \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5}$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \\ (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		
m_0	00000	✓	m_0-m_1	0000X	✓	$m_0-m_1-m_8-m_9$	0X00X	✓
m_1	00001	✓	m_0-m_8	0X000	✓	$m_0-m_1-m_{16}-m_{17}$	X000X	✓
m_8	01000	✓	m_0-m_{16}	X0000	✓	$m_0-m_8-m_{16}-m_{24}$	XX000	✓
m_{16}	10000	✓	m_8-m_9	0100X	✓	$m_8-m_9-m_{10}-m_{11}$	010XX	
m_{10}	01010	✓	m_8-m_{10}	010X0	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{18}-m_{19}$	100XX	
m_{18}	10010	✓	m_1-m_9	0X001	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}$	10X0X	
m_{20}	10100	✓	$m_{16}-m_{17}$	1000X	✓	$m_{16}-m_{18}-m_{20}-m_{22}$	10XX0	
m_9	01001	✓	$m_{16}-m_{18}$	100X0	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}$	1X00X	✓
m_{17}	10001	✓	$m_{16}-m_{20}$	10X00	✓	$m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}$	1XX00	
m_{24}	11000	✓	$m_{16}-m_{24}$	1X000	✓	$m_8-m_9-m_{24}-m_{25}$	X100X	✓
m_7	00111	✓	m_1-m_{17}	X0001	✓	$m_1-m_9-m_{17}-m_{25}$	XX001	✓
m_{11}	01011	✓	m_8-m_{24}	X1000	✓	$m_{10}-m_{11}-m_{14}-m_{15}$	01X1X	
m_{13}	01101	✓	$m_{10}-m_{11}$	0101X	✓	$m_9-m_{11}-m_{13}-m_{15}$	01XX1	
m_{14}	01110	✓	m_9-m_{11}	010X1	✓			
m_{19}	10011	✓	m_9-m_{13}	01X01	✓			
m_{21}	10101	✓	$m_{10}-m_{14}$	01X10	✓			
m_{22}	10110	✓	$m_{18}-m_{19}$	1001X	✓			
m_{28}	11100	✓	$m_{17}-m_{19}$	100X1	✓			
m_{25}	11001	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓			
m_{15}	01111	✓	$m_{20}-m_{22}$	101X0	✓			
			$m_{17}-m_{21}$	10X01	✓			
			$m_{18}-m_{22}$	10X10	✓			
			$m_{24}-m_{25}$	1100X	✓			
			$m_{24}-m_{28}$	11X00	✓			
			$m_{17}-m_{25}$	1X001	✓			
			$m_{20}-m_{28}$	1X100	✓			
			m_9-m_{25}	X1001	✓			
			$m_{14}-m_{15}$	0111X	✓			
			$m_{13}-m_{15}$	011X1	✓			
			$m_{11}-m_{15}$	01X11	✓			
			m_7-m_{15}	0X111				
$K^3(f)$						$Z(f)$		
$m_0-m_1-m_8-m_9-m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}$						0X111		
						010XX		
						100XX		
						10X0X		
						10XX0		
						1XX00		
						01X1X		
						01XX1		
						XX00X		

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы											
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
		1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
		1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
		1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
		7	10	11	13	14	15	18	19	20	21	22	28
	0X111	X					X						
	010XX		X	X									
	100XX							X	X				
	10X0X									X	X		
	10XX0							X		X		X	
	1XX00									X			X
	01X1X		X	X		X	X						
	01XX1			X	X		X						
	XX00X												

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0X111 \\ 01XX1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 10X0X \\ 10XX0 \\ 1XX00 \end{array} \right\}$$

Вся таблица вычеркнулась, следовательно ядро покрытия является минимальным покрытием

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 0X111 \\ 01XX1 \\ 01X1X \\ 100XX \\ 10X0X \\ 10XX0 \\ 1XX00 \end{array} \right\}$$

$$S^a = 22$$

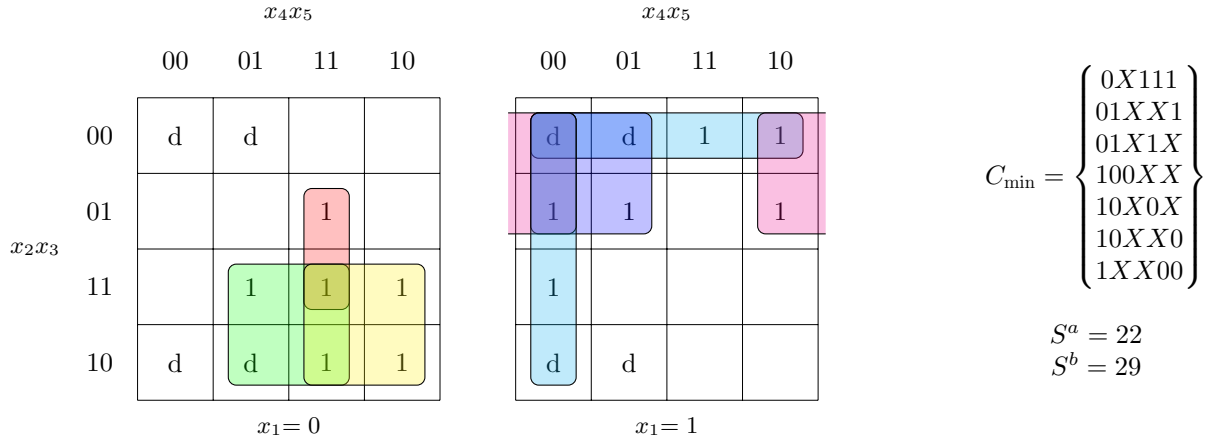
$$S^b = 29$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5}$$

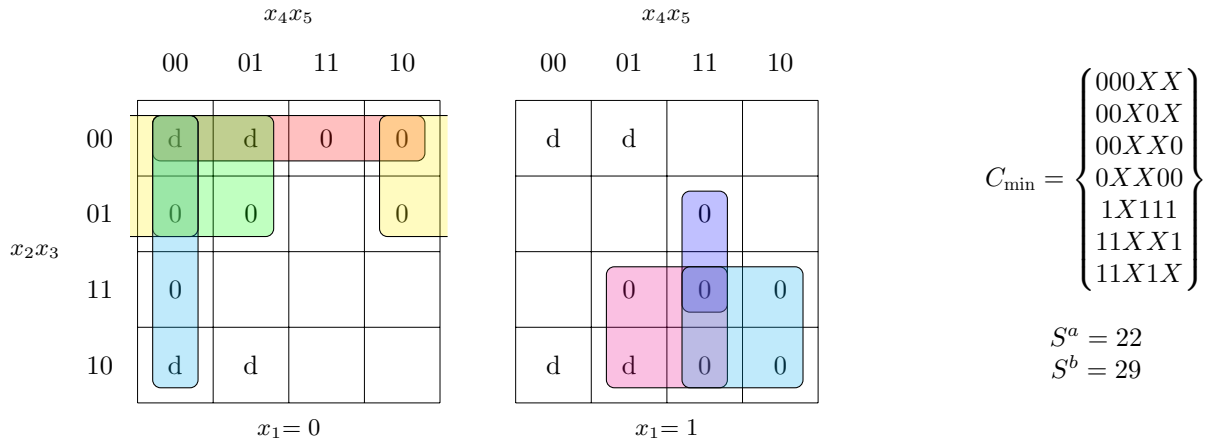
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5}$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_2 \vee x_5) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \quad S_Q = 29 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_2 (x_4 \vee x_5) \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \quad S_Q = 22 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = \overline{x_4} \overline{x_5}$$

$$\overline{\varphi} = x_4 \vee x_5$$

$$f = x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_2 \overline{\varphi} \vee \varphi x_1 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \quad S_Q = 22 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_2 (x_4 \vee x_5) \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \quad S_Q = 22 \quad \tau = 3$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_2 \vee x_5) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 29$$

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \overline{x_5}) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 22$$

$$\varphi = \overline{x_4} \overline{x_5}$$

$$\overline{\varphi} = x_4 \vee x_5$$

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee x_1) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 22$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \overline{x_5}) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 22$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_2 (x_4 \vee x_5) \vee x_1 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \quad (S_Q = 22, \tau = 3)$$

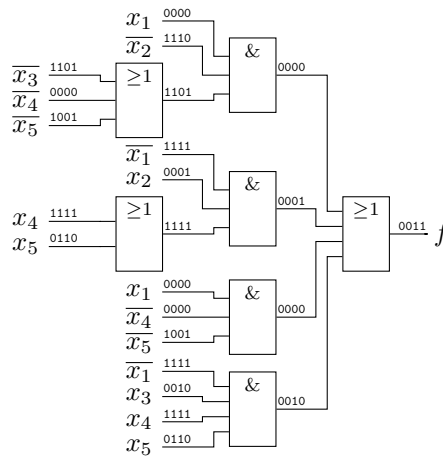
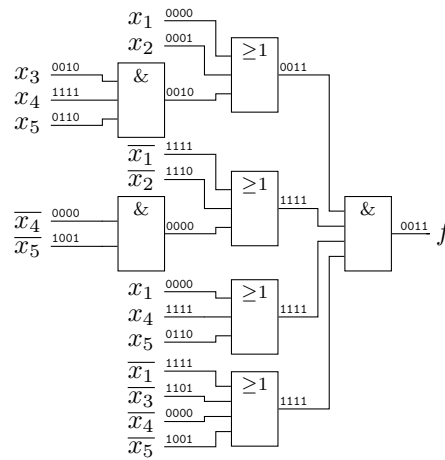


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \, x_4 \, x_5) \, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \, \overline{x_5}) \, (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \, (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad (S_Q = 22, \tau = 3)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1 \overline{x_2 x_3 x_4 x_5} \overline{x_1 x_2 \overline{\varphi} \varphi x_1 \overline{x_1 x_3 x_4 x_5}}}} \quad (S_Q = 28, \tau = 6)$$

$$\varphi = \overline{x_4} \overline{x_5}$$

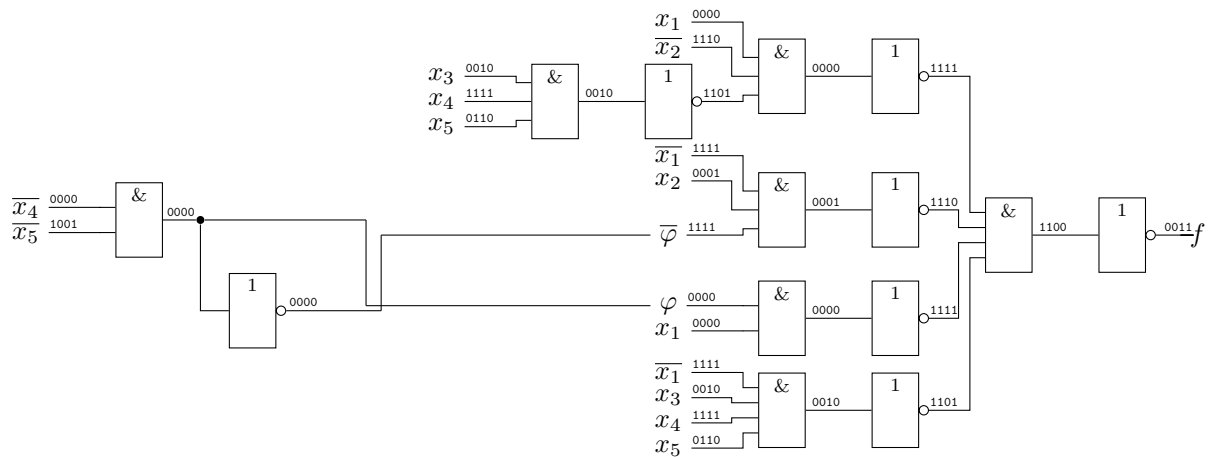
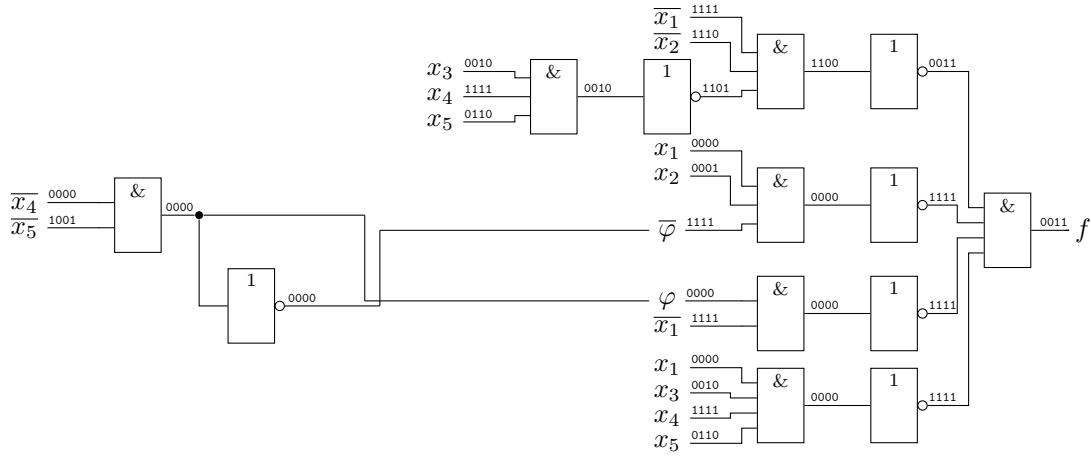


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} x_1 x_2 \varphi \varphi \overline{x_1} x_1 x_3 x_4 x_5} \quad (S_Q = 27, \tau = 5)$$

$$\varphi = \overline{x_4 x_5}$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1 \varphi \overline{x_5} x_2 x_4} x_1 \overline{x_5} \varphi \overline{x_2} x_4}} \quad (S_Q = 24, \tau = 6)$$

$$\varphi = \overline{\overline{x_2 x_3 x_4}}$$

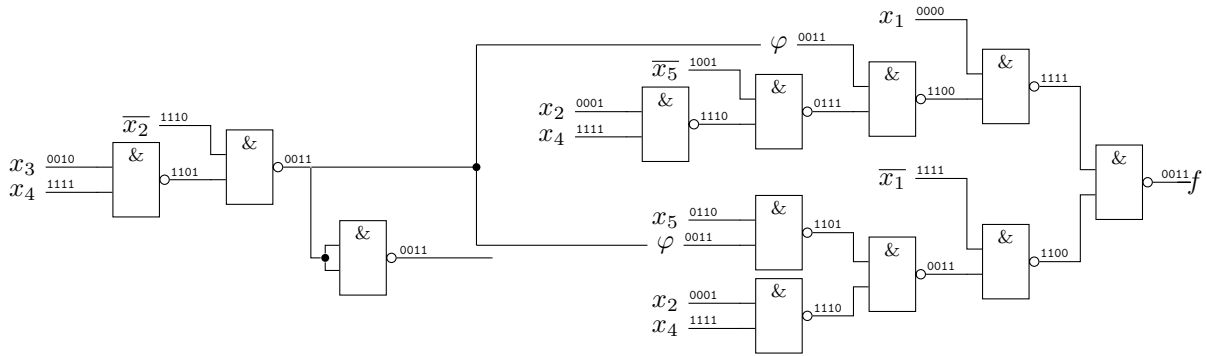


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_1 \varphi \overline{x_5} x_2 x_4} x_1 \overline{x_5} \varphi \overline{x_2} x_4}} \quad (S_Q = 26, \tau = 7)$$

$$\varphi = \overline{\overline{x_2 x_3 x_4}}$$

