Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№3**
«Численное интегрирование»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **13**

Преподаватель:
Наумова Надежда Александровна

Выполнил:
Саранча Павел Александрович
Группа: P3209

Санкт-Петербург, 2025 г.

<u>Цель работы</u>: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

1. Вычислительная реализация задачи

1. **Вычислить интеграл**, приведенный в таблице 1, **точно:**

$$\int_1^3 (-2x^3 - 5x^2 + 7x - 13)\,dx$$

$$\mathrm{F(x)} = -\frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 13\mathrm{x};\ F(3) = -93;\ F(1) = -\frac{35}{3}$$

$$I_{\text{точн}} = F(x) = F(3) - F(1) = -93 + \frac{35}{3} = -\frac{244}{3} \approx \mathbf{-81.(3)}$$

2. **Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса** при $n = 6$:

$$h = \frac{b-a}{6} = \frac{(3)-(1)}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a+h) + c_6^2 f(a+2h) + c_6^3 f(a+3h) + c_6^4 f(a+4h) + c_6^5 f(a+5h) + c_6^6 f(b)$$

$$I_{cotes} = \big((3)-(1)\big) \times \left(\frac{41}{840}f(1) + \frac{216}{840}f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{27}{840}f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{272}{840}f(2) + \frac{27}{840}f\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{216}{840}f\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{41}{840}f(3)\right) = \frac{-244}{3} = \mathbf{-81.(3)}$$

[Решение с помощью WolframAlpha]

3. **Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона** при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{(3)-(1)}{10} = \frac{1}{5}$$

- **Метод средних прямоугольников**:

$$I_{\text{ср.прям}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} = h \cdot \left(f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f\left(a+\frac{5h}{2}\right) + f\left(a+\frac{7h}{2}\right) + f\left(a+\frac{9h}{2}\right) + f\left(a+\frac{11h}{2}\right) + f\left(a+\frac{13h}{2}\right) + f\left(a+\frac{15h}{2}\right) + f\left(a+\frac{17h}{2}\right) + f\left(a+\frac{19h}{2}\right)\right) =$$

$$= 0.2\big(f(1+0.1) + f(1+0.3) + f(1+0.5) + f(1+0.7) + f(1+0.9) + f(1+1.1) + f(1+1.3) + f(1+1.5) + f(1+1.7) + f(1+1.9)\big) = \mathbf{-81.22}$$

Решение с помощью WolframAlpha

- **Метод трапеций**:

$$I_{\text{трапеция}} = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$I_{\text{трапеция}} = 0.2\left(\frac{f(1)+f(3)}{2} + f(1+0.2) + f(1+0.4) + f(1+0.6) + f(1+0.8) + f(1+1) + f(1+1.2) + f(1+1.4) + f(1+1.6) + f(1+1.8)\right) = \mathbf{-81.56}$$

Решение с помощью WolframAlpha

- **Метод Симпсона**:

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + 4\sum_{i=1}^{n-1} y_{\text{нечёт}} + 2\sum_{i=2}^{n-2} y_{\text{чёт}} + y_n\right)$$

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{0.2}{3}\big(f(1) + 4 * \big(f(1+0.2) + f(1+0.6) + f(1+1) + f(1+1.4) + f(1+1.8)\big) + 2 * (f(1+0.4) + f(1+0.8) + f(1+1.2) + f(1+1.6)) + f(3)\big) = \mathbf{= -81.(3)}$$

Решение с помощью WolframAlpha

4. Сравнить результаты с точным значением интеграла:

Точное значение интеграла на интервале вычислено как $-\frac{244}{3} \approx -81.(3)$

1. Для метода **Ньютона–Котеса** при $n = 6$: $I_{\text{точн}} = I_{cotes} = -81.(3)$, **значения совпадают**.

   $$R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = \left|-\frac{244}{3} - (-81.33333\ldots)\right| = 0$$

2. Для метода **средних прямоугольников** при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} = -81.22$.

   $$R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}}| = \left|-\frac{244}{3} - (-81.22)\right| = 0.11(3)$$

3. Для метода **трапеций** при $n = 10$: $I_{\text{трапеция}} = -81.56$.

   $$R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{трапеция}}| = \left|-\frac{244}{3} - (-81.56)\right| = 0.22(6)$$

4. Для метода **Симпсона** при $n = 10$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{Симпсона}} = -81.(3)$, **значения совпадают**.

   $$R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = \left|-\frac{244}{3} - (-81.33333\ldots)\right| = 0$$

5. **Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.**

    1. Для метода **Ньютона–Котеса**: $R = 0 \rightarrow$ **погрешности нет.**
    2. Для метода **средних прямоугольников**: $\Delta = \frac{|-81.(3)-(-81.22)|}{|-81.(3)|} * 100\% \approx 0.1\%$
    3. Для метода **трапеций**: $\Delta = \frac{|-81.(3)-(-81.56)|}{|-81.(3)|} * 100\% \approx 0.3\%$
    4. Для метода **Симпсона**: $R = 0 \rightarrow$ **погрешности нет.**

    Как видно из результатов, все методы дали относительно малую погрешность, особенно при использовании формулы Ньютона–Котеса и Симпсона. Наилучший результат был получен при использовании формулы Ньютона–Котеса с $n = 6$ и формулы Симпсона с $n = 10$, при которых значения интеграла полностью совпали.

2. Программная реализация задачи

https://github.com/PaulLocust/comp_math_lab3

Листинг методов:

```
def rectangle_left(func, a, b, n):
    """
    Метод левых прямоугольников для численного интегрирования.

    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать
    :param a: нижний предел
    :param b: верхний предел
    :param n: количество разбиений
    :return: приближенное значение интеграла
    """
    h = (b - a) / n
    result = 0
    for i in range(n):
        x = a + i * h
        result += func(x)
    return result * h


def rectangle_right(func, a, b, n):
    """
    Метод правых прямоугольников для численного интегрирования.

    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать
    :param a: нижний предел
    :param b: верхний предел
    :param n: количество разбиений
    :return: приближенное значение интеграла
    """
    h = (b - a) / n
    result = 0
    for i in range(1, n + 1):
        x = a + i * h
        result += func(x)
    return result * h


def rectangle_middle(func, a, b, n):
    """
    Метод средних прямоугольников для численного интегрирования.

    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать
    :param a: нижний предел
    :param b: верхний предел
    :param n: количество разбиений
    :return: приближенное значение интеграла
    """
    h = (b - a) / n
    result = 0
    for i in range(n):
        x = a + (i + 0.5) * h
        result += func(x)
    return result * h
```

```python
def simpson_rule(func, a, b, n):
    """
    Метод Симпсона для численного интегрирования.

    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать
    :param a: нижний предел
    :param b: верхний предел
    :param n: количество разбиений (должно быть чётным)
    :return: приближенное значение интеграла
    """
    if n % 2 != 0:
        raise ValueError("Количество разбиений n должно быть чётным для метода Симпсона.")

    h = (b - a) / n
    result = func(a) + func(b)

    # Суммируем все элементы с коэффициентами
    for i in range(1, n):
        coef = 3 + (-1) ** (i + 1)
        x = a + i * h
        result += coef * func(x)

    return result * h / 3

```

```python
def trapezoid_rule(func, a, b, n):
    """
    Метод трапеций для численного интегрирования.

    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать
    :param a: нижний предел
    :param b: верхний предел
    :param n: количество разбиений
    :return: приближенное значение интеграла
    """
    h = (b - a) / n
    result = (func(a) + func(b)) / 2  # Начальные значения на концах отрезка

    # Суммируем значения функции в серединах трапеций
    for i in range(1, n):
        x = a + i * h
        result += func(x)

    return result * h
```

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

```
Выберите функцию для интегрирования:
1. x^2
2. sin(x)
3. e^x
4. 1/x^2
5. 1/x
6. 1/sqrt(x)
7. -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13
8. 10
9. 1 / sqrt(2x - x^2)
Ваш выбор: 7
Введите начальный предел интегрирования (a): 1
Введите конечный предел интегрирования (b): 3
Введите требуемую точность вычислений: 0.0001

Выберите метод интегрирования:
1. Метод левых прямоугольников
2. Метод правых прямоугольников
3. Метод средних прямоугольников
4. Метод трапеций
5. Метод Симпсона
Ваш выбор: 5

Метод: simpson
Значение интеграла: -81.33333333333333
Число разбиений для достижения требуемой точности: n = 8

Хотите попробовать ещё раз? [y/n]:
```

```
Выберите функцию для интегрирования:
1. x^2
2. sin(x)
3. e^x
4. 1/x^2
5. 1/x
6. 1/sqrt(x)
7. -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13
8. 10
9. 1 / sqrt(2x - x^2)
Ваш выбор: 5
Введите начальный предел интегрирования (a): -1
Введите конечный предел интегрирования (b): 1
Обнаружены точки разрыва: [0.0].
- Интеграл не существует: функция не сходится на разрывах.

Хотите попробовать ещё раз? [y/n]:
```

```
Выберите функцию для интегрирования:
1. x^2
2. sin(x)
3. e^x
4. 1/x^2
5. 1/x
6. 1/sqrt(x)
7. -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13
8. 10
9. 1 / sqrt(2x - x^2)
Ваш выбор: 5
Введите начальный предел интегрирования (a): 1
Введите конечный предел интегрирования (b): 2
Введите требуемую точность вычислений: 0.001

Выберите метод интегрирования:
1. Метод левых прямоугольников
2. Метод правых прямоугольников
3. Метод средних прямоугольников
4. Метод трапеций
5. Метод Симпсона
Ваш выбор: 1

Метод: rectangle_left
Значение интеграла: 0.694124696732443
Число разбиений для достижения требуемой точности n = 256
Хотите попробовать ещё раз? [y/n]:
```

```
Выберите функцию для интегрирования:
1. x^2
2. sin(x)
3. e^x
4. 1/x^2
5. 1/x
6. 1/sqrt(x)
7. -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13
8. 10
9. 1 / sqrt(2x - x^2)
Ваш выбор: 9
Введите начальный предел интегрирования (a): 0
Введите конечный предел интегрирования (b): 2
Обнаружены точки разрыва: [0.0, 2.0].
+ Интеграл существует: функция сходится на разрывах.
Введите требуемую точность вычислений: 0.01

Выберите метод интегрирования:
1. Метод левых прямоугольников
2. Метод правых прямоугольников
3. Метод средних прямоугольников
4. Метод трапеций
5. Метод Симпсона
Ваш выбор: 5

Метод: simpson
Значение интеграла: 3.230894059122111
Число разбиений для достижения требуемой точности: n = 2048
Хотите попробовать ещё раз? [y/n]:
```

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы интегрирования с использованием Python. В результате работы были рассмотрены различные численные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона.

Была реализована программа, позволяющая выбрать одну из предложенных функций, задать пределы интегрирования, точность и начальное значение числа разбиения интервала интегрирования.

Были рассчитаны интегралы различными методами.

Выполнена дополнительная задача по установлению сходимости рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода и их вычислению заданными численными методами в случаях, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке a, в точке b или на отрезке интегрирования.