Gestion de Portefeuille

TP-3: Modèle à un facteur et modèle de Treynor Black

UNG Théophile   POUPARD Paul   NANTAS Paul   SPRIET Thibault

Février-Mars 2020

Données

Séries de rendement mensuel pour 11 valeurs:

```
monthly.ret.file <- "./monthly.ret.rda"
load(monthly.ret.file)
index(monthly.ret) <- floor_date(index(monthly.ret), "month")
```

Matrice de covariance des rendements:

```
kable(cov(monthly.ret), "latex", booktabs=T) %>%
kable_styling(latex_options=c("scale_down", "HOLD_position"))
```

	AAPL	AMZN	MSFT	F	SPY	QQQ	XOM	MMM	HD	PG	KO
AAPL	0.0079015	0.0035933	0.0028724	0.0036506	0.0021193	0.0033242	0.0012183	0.0019158	0.0012159	0.0009073	0.0009576
AMZN	0.0035933	0.0097937	0.0026625	0.0025940	0.0020258	0.0030033	0.0011468	0.0016726	0.0016066	0.0003831	0.0013968
MSFT	0.0028724	0.0026625	0.0044949	0.0032132	0.0017774	0.0022969	0.0009976	0.0012898	0.0015753	0.0007414	0.0011363
F	0.0036506	0.0025940	0.0032132	0.0226257	0.0032869	0.0034954	0.0017697	0.0034663	0.0032642	0.0014660	0.0014993
SPY	0.0021193	0.0020258	0.0017774	0.0032869	0.0017549	0.0019207	0.0012159	0.0016906	0.0015105	0.0008284	0.0009008
QQQ	0.0033242	0.0030033	0.0022969	0.0034954	0.0019207	0.0025159	0.0010479	0.0016973	0.0016125	0.0007561	0.0008650
XOM	0.0012183	0.0011468	0.0009976	0.0017697	0.0012159	0.0010479	0.0025213	0.0015076	0.0008121	0.0006409	0.0007365
MMM	0.0019158	0.0016726	0.0012898	0.0034663	0.0016906	0.0016973	0.0015076	0.0032027	0.0016559	0.0009968	0.0008642
HD	0.0012159	0.0016066	0.0015753	0.0032642	0.0015105	0.0016125	0.0008121	0.0016559	0.0037458	0.0005615	0.0005566
PG	0.0009073	0.0003831	0.0007414	0.0014660	0.0008284	0.0007561	0.0006409	0.0009968	0.0005615	0.0018508	0.0009004
KO	0.0009576	0.0013968	0.0011363	0.0014993	0.0009008	0.0008650	0.0007365	0.0008642	0.0005566	0.0009004	0.0019550

Rendement moyen mensuel

```
kbl(colMeans(monthly.ret), format="latex", booktabs=T,
    col.names=c("Rendement"), caption="Rendement moyen mensuel") %>%
    kable_styling(latex_options="HOLD_position")
```

Table 1: Rendement moyen mensuel

	Rendement
AAPL	0.0254037
AMZN	0.0298355
MSFT	0.0151864
F	0.0115177
SPY	0.0075856
QQQ	0.0122593
XOM	0.0016595
MMM	0.0079299
HD	0.0151356
PG	0.0073821
KO	0.0100164

Taux sans risque

Le taux sans risque mensuel est obtenu de la Réserve Fédérale US. A diviser par 12 pour être cohérent avec les rendement des titres.

```
tmp <- read.csv("DP_LIVE_01032020211755676.csv", header=TRUE, sep=";")[, c("TIME", "Value")]
dt <- ymd(paste(tmp$TIME, "-01", sep=""))
rf_rate <- xts((tmp$Value/100.0)/12, dt)
colnames(rf_rate) <- "Rf"
monthly.ret.2 <- merge.xts(monthly.ret, rf_rate, join="inner")
```

Estimation d'un modèle à un facteur

- Utiliser l'indice SPY comme proxy pour le marché et estimer pour chaque titre le modèle:

$$R_i(t) - R_f(t) = \alpha + \beta(R_M(t) - R_f(t)) + \epsilon(t)$$

en utilisant la fonction `lm`.

- Placer chaque titre sur un diagramme rendement/beta et calculer par regression la droite de marché des titres risqués.

```
assets <- names(monthly.ret)[names(monthly.ret) != "SPY"]
get.ret.beta <- function(ret){
  res.mean <- apply(ret,2,mean)
  res.mean <- res.mean - mean(rf_rate)
  res.mean <- res.mean[assets]

  ret.minus.rf <- as.data.frame(lapply(ret, function(col) col-ret$Rf))
  ret.minus.rf <- ret.minus.rf[names(ret.minus.rf) != "Rf"]

  model <- lapply(ret.minus.rf, function(col) lm(col ~ ret.minus.rf$SPY))
```

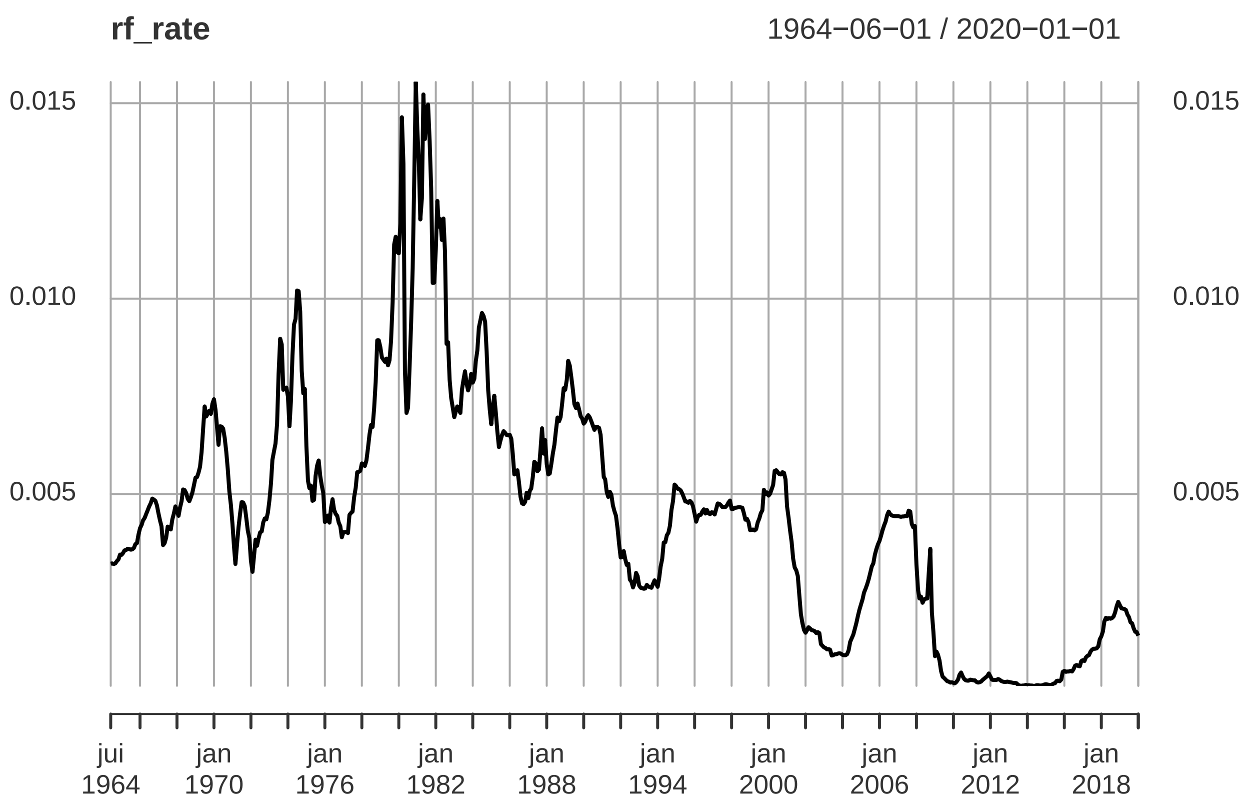


Figure 1: taux sans risque mensuel

```
  res.beta <- lapply(model, function(value) coefficients(value)[2])
  res.beta <- res.beta[names(res.beta) != "SPY"]

  return(as.data.frame(cbind(res.mean,res.beta)))

}
ret.beta.all <- get.ret.beta(monthly.ret.2)
```

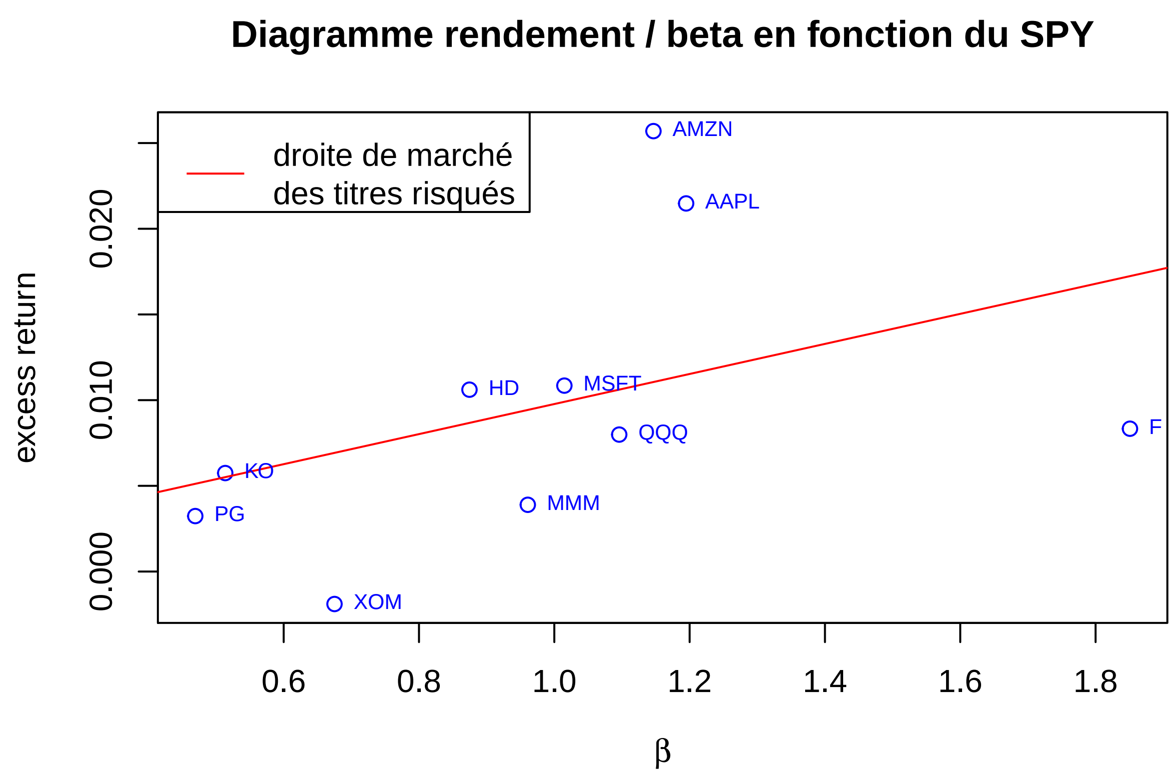


Figure 2: diagramme rendement béta de chaque titre

- En déduire les titres qui, selon ce modèle, *semblent* chers et ceux qui semblent sous-évalués.

Les titres se trouvant au-dessus de la droite de marché sont considérés comme sous-évalués tandis que les titres se trouvant en-dessous sont surévalués. Certains titres ne sont pas exactement sur cette droite, cependant ils ne s'en éloignent pas trop. On peut dire que :

sous-évalués :

- Apple (AAPL)
- Amazon (AMZN)

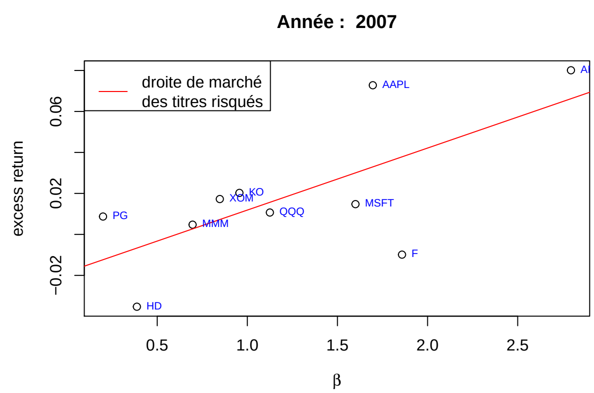
surévalués :

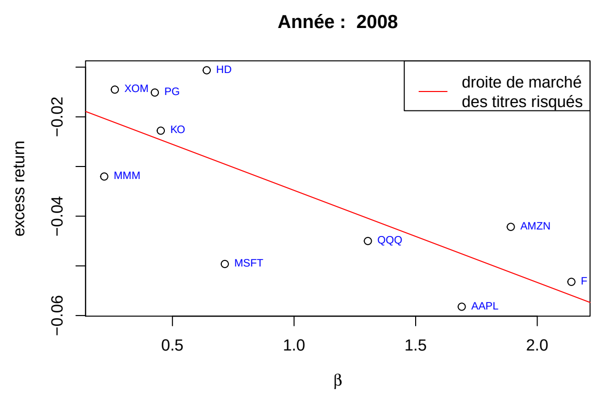
- XOM
- MMM
- F

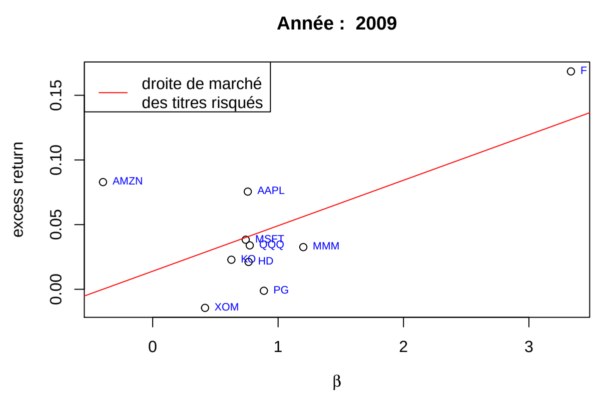
Est-ce que ces mesures de cherté relative vous semble correctes? Essayez de mesurer la robustesse de ce calcul en estimant le modèles sur des sous-intervalles de temps.

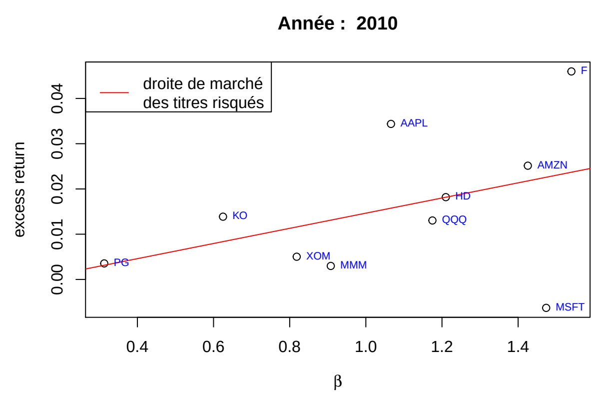
Présentez vos résultats de manière synthétique.

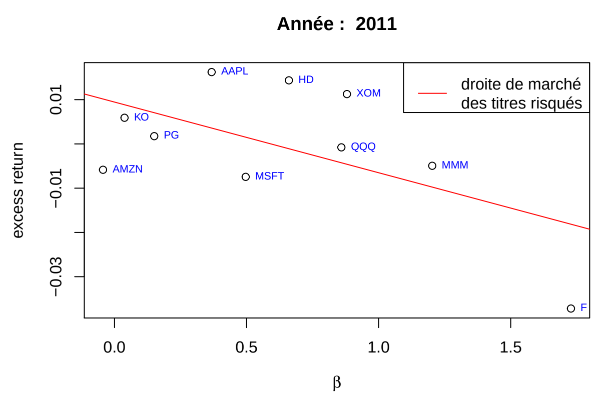
Dans un premier temps, nous avons réalisé la même modélisation pour chaque année.
Au lieu d'appliquer la regression sur toutes les données, nous les avons appliquer distinctement pour chaque année.

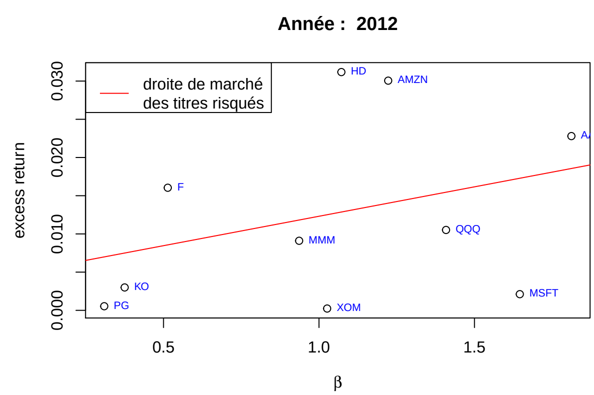


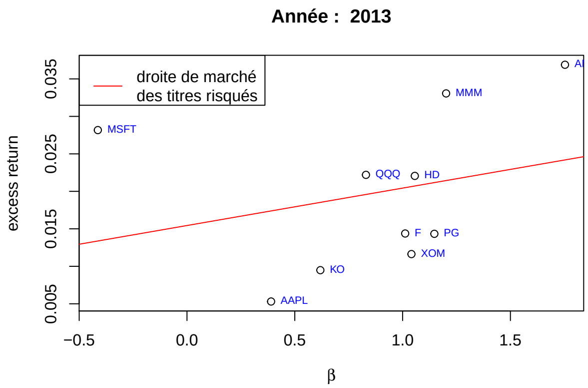


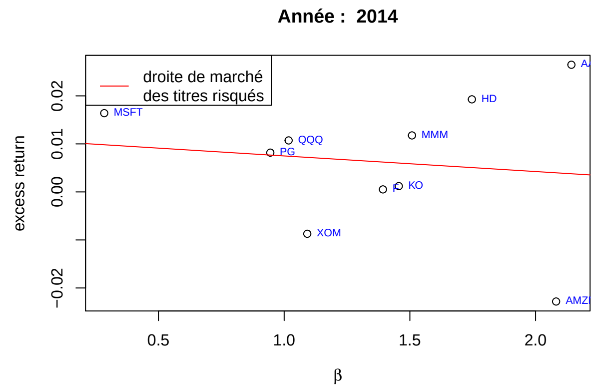


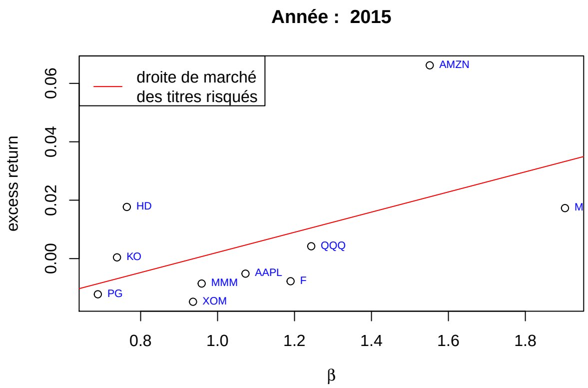


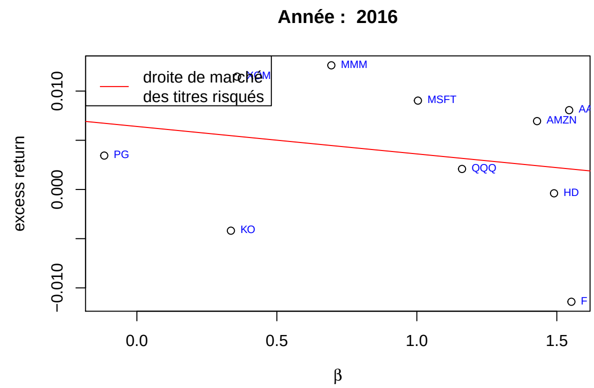


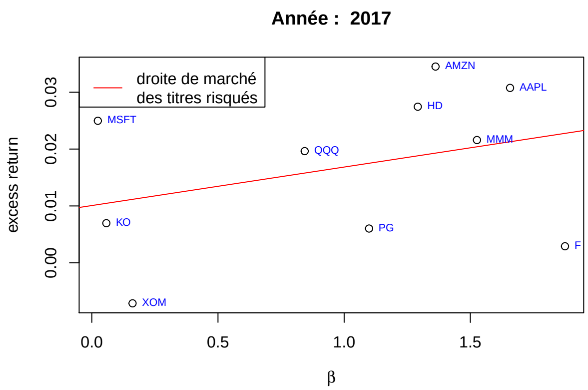


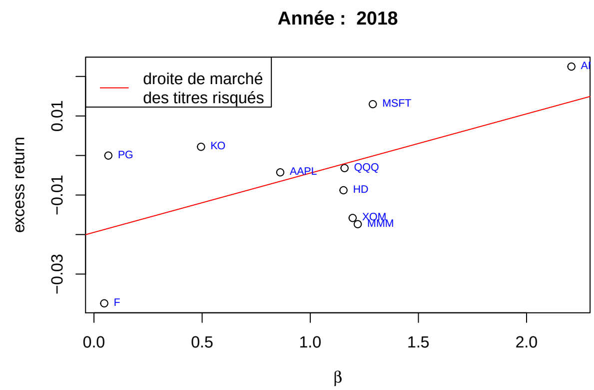

Année : 2013
droite de marché
des titres risqués
MSFT
MMM
QQQ
HD
F
PG
XOM
KO
AAPL
excess return
β

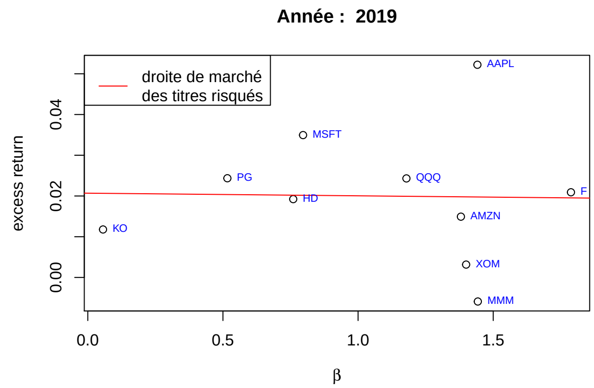

Année : 2014
droite de marché
des titres risqués
MSFT
HD
QQQ
PG
MMM
KO
XOM
excess return
β


Année : 2015
droite de marché
des titres risqués
AMZN
HD
KO
QQQ
AAPL
F
MMM
PG
XOM
excess return
β


Année : 2016
droite de marché
des titres risqués
MMM
MSFT
AMZN
PG
QQQ
HD
KO
F
excess return
β


Année : 2017
droite de marché
des titres risqués
AMZN
AAPL
HD
MSFT
QQQ
MMM
KO
PG
F
XOM
excess return
β


Année : 2018
droite de marché
des titres risqués
MSFT
PG
KO
AAPL
QQQ
HD
XOM
MMM
F
excess return
β



Nous avons tracé les diagrammes rendement / béta pour chaque année entre 2007 et 2020. On peut remarquer que Apple est sous-évalué dans les années 2007, 2009, 2010 alors qu'il est surévalué dans les années 2008, 2013, 2015. Ceci est un exemple mais on pourrait faire la même remarque pour chaque titre. Ceci nous ammène à remmettre en cause la robustesse de cette méthode. En effet selon les intervalles de temps nous obtenons des résultats contradictoires.

```
names_ <- names(get.ret.beta(monthly.ret.2)$res.mean)
beta.roll <- na.omit(rollapply(
  data=monthly.ret.2,
  FUN=function(data) as.numeric(get.ret.beta(data)$res.beta),
  width=36,
  by.column=FALSE))
alpha.roll <- na.omit(rollapply(
  data=monthly.ret.2,
  FUN=function(data) as.numeric(get.ret.beta(data)$res.mean),
  width=36,
  by.column=FALSE))
names(beta.roll) <- names_
names(alpha.roll) <- names_
```

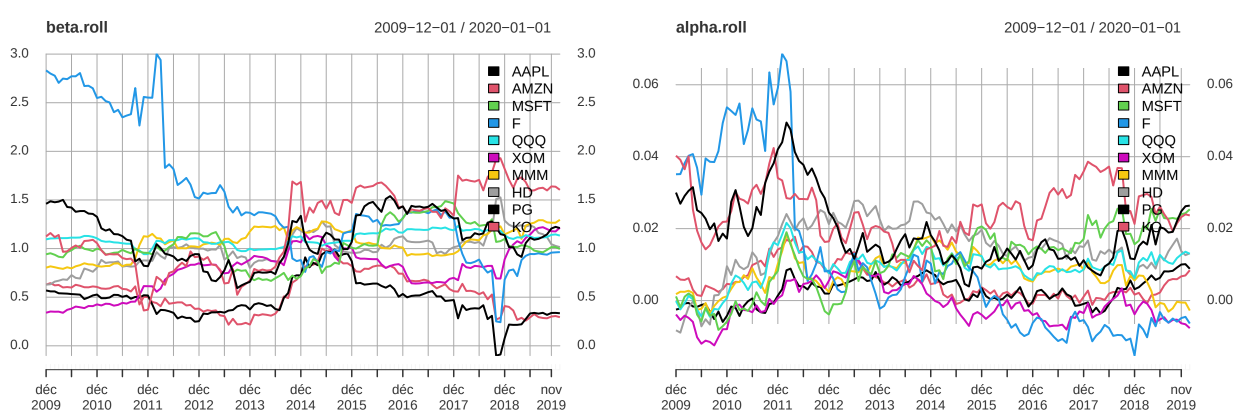


Figure 3: rolling beta / alpha

Afin d'avoir une analyse plus précise, nous avons calculé les β et α pour chaque titre sur des fenêtres glissantes (de taille 36). On remarque que les β varient dans un "range" assez important alors que les variations des

α sont moins importantes.

Le modèle utilisé montre des limites pour l'estimation des β

Modèle de Treynor-Black

Le modèle de Treynor-Black a pour objectif d'exploiter les informations calculées en première partie. L'idée étant de constituer un portefeuille "actif" avec les titres qui semblent mal valorisés par le marché, et allouer le reste de sa richesse au portefeuille de marché.

Selection des titres à inclure dans le portefeuille actif.

C'est l'étape délicate de la méthode de Treynor-Black. A partir de l'évaluation du modèle à un facteur, déterminez quels titres méritent de figurer dans le portefeuille actif. En théorie, on a envie d'acheter les titres sous-cotés ($\alpha_i > 0$) mais cette anomalie n'est peut être qu'apparente! Il faut également apprécier la qualité de l'estimation statistique.

En testant diverses combinaisons de titres à mettre dans le portefeuille actif, vous pourrez mesurer la sensibilité de modèle de Treynor-Black aux données.

```r
monthly.ret.minus.rf <- as.data.frame(monthly.ret - mean(rf_rate))
model <- lapply(monthly.ret.minus.rf, function(col) lm(col ~ monthly.ret.minus.rf$SPY))
model <- model[names(model) != "SPY"]
```

- Sélectionner les $\alpha_i > 0$

```r
titre.selected.simple <- names(
  model[lapply(model, function(titre) coefficients(titre)[1])
  > 0]
  )
```

```
## [1] "AAPL" "AMZN" "MSFT" "F"    "QQQ"  "MMM"  "HD"   "PG"   "KO"
```

- Test statistique, niveau de confiance à 95% / 99% $\alpha_i > 0$

```r
titre.selected.inter <- names(
  model[as.logical(lapply(model,
  function(titre) confint(titre)[1,1]>0 & confint(titre)[1,2]>0))]
  )
```

```
## [1] "AAPL" "AMZN" "QQQ"  "HD"
```

Détermination du portefeuille actif

Ayant choisi les titres à inclure dans le portefeuille actif, on rappelle que le poids de chaque titre dans le portefeuille actif est proportionnel au ratio $\alpha_i/\sigma^2(\epsilon_i)$:

$$w_i = \frac{\alpha_i/\sigma^2(\epsilon_i)}{\sum_i \alpha_i/\sigma^2(\epsilon_i)}$$

Calculer les poids des actifs dans le portefeuille actif. Justifier votre choix d'inclure ou d'exclure tel ou tel instrument.

```r
get.weight <- function(model) {
  alpha <- as.data.frame(lapply(model, function(model) {coefficients(model)[1]}))
  residual <- as.data.frame(lapply(model, function(model) {sigma(model)}))
  denominateur <- sum(alpha / residual)
  return(alpha / residual / denominateur)

}
simple.weight <- get.weight(model[names(model) %in% titre.selected.simple])
inter.weight <- get.weight(model[names(model) %in% titre.selected.inter])
```

Table 2: Poids (hypothèse simple)

AAPL	AMZN	MSFT	F	QQQ	MMM	HD	PG	KO
0.201	0.215	0.124	0.008	0.184	0.01	0.138	0.033	0.088

Table 3: Poids (interval confiance)

AAPL	AMZN	QQQ	HD
0.272	0.292	0.249	0.187

Calculez les valeurs suivantes concernant le portefeuille actif:

R_A Excess de rendement

α_A alpha du portefeuille actif

β_A beta du portefeuille actif

σ_A ecart-type du portefeuille actif

$\sigma^2(e_A)$ variance résiduelle du portefeuille actif

Table 4: Résumé des portefeuilles

	simple	interval
R_a	0.0191259	0.0219396
alpha_a	0.0113812	0.0136032
beta_a	1.0209686	1.0989694
sigma_a	0.1076089	0.1338812
sigma2_ea	0.0097504	0.0158047

Détermination de la pondération entre le portefeuille actif et le portefeuille de marché.

On rappelle l'allocation de richesse au portefeuille actif:

$$w_A = \frac{\alpha_A \sigma_M^2}{\alpha_A \sigma_M^2 (1 - \beta_A) + R_M \sigma^2(e_A)}$$

Avec:

$$\begin{aligned} R_A &= \alpha_A + \beta_A R_M \\ \sigma_A^2 &= \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma^2(e_A) \end{aligned}$$

Capital Allocation Line

Calculez l'espérance de rendement et le risque de quelques portefeuilles situés sur la "Capital Allocation Line" qui joint l'actif sans risque et le portefeuille tangent. Placez la solution du modèle de Treynor-Black, le portefeuille actif et le portefeuille de marché sur le graphique ci-dessous.

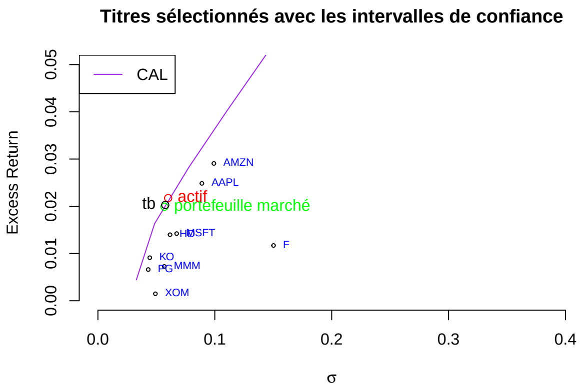
```
Assets <- c("AAPL", "AMZN", "MSFT", "F",  "XOM", "MMM",  "HD",   "PG",   "KO")
plot.data <- monthly.ret.2[, c(Assets, "Rf")]
for(a in Assets) {
  plot.data[, a] <- plot.data[, a] - plot.data$Rf
  }

res <- data.frame(Mean=apply(plot.data[, Assets],2,mean),
                  Sd = apply(plot.data[, Assets],2,sd))
rownames(res) <- Assets
```

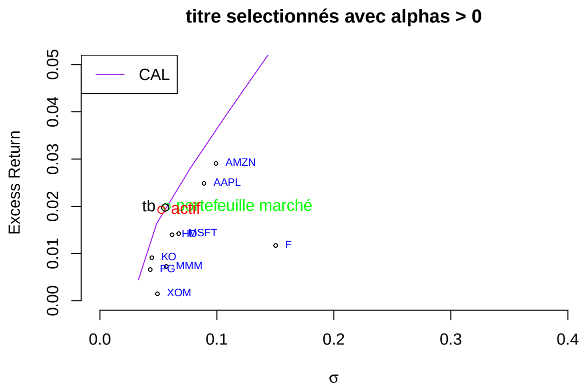
```
# Capital Market line
mu <- colMeans(monthly.ret[,Assets])
mu.free <- mean(rf_rate)
mu.star.v <- seq(from=mu.free,to=0.35,length.out=30)
n <- length(mu)
Sigma <- cov(monthly.ret[,Assets])

optim.with.rf <- function(mu.star){
  A.sum <- matrix(mu - mu.free, ncol=1)
  A.mat <- cbind(A.sum,rep(1,n))
  b <- c(mu.star,1)
  return(solve.QP(2*Sigma, rep(0,n),A.mat,b,meq=2))
}

sol.with.rf <- NULL
for(mu.star in mu.star.v) {
  qp <- optim.with.rf(mu.star)

  tmp <- matrix(c(mu.star,sqrt(qp$value)),nrow=1)

  if(is.null(sol.with.rf)){
    sol.with.rf <- tmp
  } else{
    sol.with.rf <- rbind(sol.with.rf,tmp)
  }
}
```

```r
# market portfolio
mu <- colMeans(monthly.ret.2)
sig2 <- cov(monthly.ret[,Assets])

w.t.nom <- solve(sig2,mu[Assets] - mu["Rf"])
w.t.den <- sum(w.t.nom)
w.t <- w.t.nom / w.t.den

mu.t <- t(mu[Assets] - mu.free) %*% w.t
sigma.t <- sqrt(t(w.t) %*% sig2 %*% w.t)
```

```r
# Active portfolio
get.active.port <- function(weight){
  titres <- names(weight)
  w.a <- as.numeric(weight)
  sig2.a <- cov(monthly.ret[,titres])
  mu.a <- t(w.a) %*% as.numeric(matrix(mu[titres]),ncol=1)
  sigma.a <- sqrt(t(w.a) %*% sig2.a %*% w.a)
  return(data.frame("mu.a" = mu.a,"sigma.a"=sigma.a))
}
active.inter <- get.active.port(inter.weight)
active.simple <- get.active.port(simple.weight)
```

```r
# Solution Treynor
get.w.A <- function(port.summary){
  benchmark.var <- var(monthly.ret$SPY)
  benchmark.ret <- mean(monthly.ret$SPY)
  w.a.num <- port.summary["alpha_a",] * benchmark.var
  w.a.den <- port.summary["alpha_a",] * benchmark.var * (1 - port.summary["beta_a",]) + benchmark.ret*po
  return(w.a.num / w.a.den)
}
get.TB.port <- function(active.weight,active.port){
  w.TB = c(active.weight,1-active.weight)
  mu.TB <- t(w.TB) %*% c(active.port$mu.a,mu.t)
  sigma.TB = t(w.TB) %*% c(active.port$sigma.a,sigma.t)
  return(data.frame("mu.TB"=mu.TB,"sigma.TB"=sigma.TB))
}

TB.inter <- get.TB.port(get.w.A(inter.summary),active.inter)
TB.simple <- get.TB.port(get.w.A(simple.summary),active.simple)
```


Titres sélectionnés avec les intervalles de confiance
CAL
Excess Return
σ
tb
actif
portefeuille marché
AMZN
AAPL
MSFT
F
KO
PG
MMM
XOM


titre selectionnés avec alphas > 0
CAL
Excess Return
σ
tb
actif
portefeuille marché
AMZN
AAPL
MSFT
F
KO
PG
MMM
XOM