УДК 004.056.55

П. С. Захаров, М. Г. Пискун

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Представления точек на эллиптических кривых

В современных информационных системах большое значение имеет криптография с открытым ключом. Подобные системы реализованы, к примеру на эллиптических кривых. Они используют проблему дискретного логарфима в применении к точкам на эллиптических кривых над конечными полями. Подобные системы нашли применение, к примеру, в ГОСТ Р 34.10-2012. В практических применениях важна не только защищенность системы, но и ее производительность. Различные представления точек на кривых позволяют оптимизировать процесс вычислений и ускорить производительность. В данной статье рассматриваются различные представления точек с точки зрения количества требуемых операций и используемой памяти на примере ECDSA - алгоритма для создания цифровой подписи.

Ключевые слова: Криптография с открытым ключом, эллиптические кривые, ЭЦП

1. Введение

В настоящее время распространены ассиметричные криптографические алгоритмы с открытым ключом. В таких алгоритмах существует два ключа - открытый, передаваемый по незащищенному каналу, и закрытый, держащийся в тайне и тяжело вычисляющийся из открытого. Такие системы используются для проверки цифровых подписей или обмена ключами от симметричных систем. К ним относятся широко известные алгоритмы Диффи-Хеллмана, Эль-Гамаля, шифр RSA и другие [3].

Реалии современного мира предъявляют высокие требования как к защищенности криптосистем, так и к их производительности. Первое требование, помимо прочего, обуславливает выбор больших параметров системы (к примеру, порядок используемого конечного поля), в особенности для ассиметричных криптосистем. В сочетании с большим количеством вычислений, требующихся для произведения одной итерации шифрования или создания одной подписи, это явно противоречит второму требованию. В связи с этим используются различные методики более быстрых вычислений.

В криптографии на эллиптических кривых основой вычислений являются операции над точками на кривой - сложение и умножение на число. Каждая из этих операций подразумевает определенное количество сложений, умножений и инверсий в конечном поле. Более сложные представления точек позволяют сократить число этих операций за счет хранения большего количества информации [1]. В данной работе сравниваются разные представления с точки зрения производительности и используемой памяти. В разделе 2 вводятся эллиптические кривые и описывается тестовый алгоритм - ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm), в разделе 3 рассматриваются различные представления точек, в разделе 4 описывается вычислительный эксперимент. В разделе 5 обсуждаются результаты.

2. Эллиптические кривые и ECDSA

Определение 1. *Эллиптической кривой на плоскости называется кривая в* $\mathbb{R}^2$*, описываемая выражением*

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \tag{1}$$

Практическое приложение имеют эллиптические кривые над конечными полями - в этом случае коэффициенты и координаты точек принадлежат соответсвующему полю. В случае, если характеристика поля не равна 2 или 3, кривая может быть приведена к виду [1]:

$$y^2 = x^3 + ax + b, a, b, x, y \in K \tag{2}$$

Если к множеству точек кривой добавить ∞, то на получившемся множестве E можно ввести операцию сложения (и, соответсвенно, умножения на целое) [2]. Нетрудно показать, что E с соотвествующим образом определенной операцией является группой. В данной группе имеет место проблема дискретного логарифма для точек на эллиптических кривых [2]:

Определение 2. *Пусть* E *- эллиптическая кривая над полем* K*, и* G *- точка на* E*. Задачей дискретного логарифмирования на* E *с основанием* B *называется задача нахождения для данной точки* $P \in E\, a \in K$*(если существует) такого, что* $P = aG$

Если кривая не является суперсингулярной, не существует субъэкспоненциального алгоритма для решения этой проблемы. На основе её и создан алгоритм цифровой подписи ECDSA.

Алгоритм ECDSA подразумевает, что Алиса и Боб договорились относительно используемых кривой и поля. При этом в группе точек на этой кривой должна быть циклическая подгруппа достаточно большого простого порядка q. Пусть P - порождающая точка в этой подгруппе, т.е. $qP = O$. Алиса выбирает случайное число $d \in [1, q-1]$ - это ее закрытый ключ. Точка $Q = dP$ - открытый ключ. (P также известна всем участникам. Проблема дискретного логарифма гарантирует сохранность закрытого ключа)

Пусть $m = h(M)$ - хэш сообщения (достаточно короткий), k - случайное число их $[1, q-1]$. Дальнейшие вычисления:

$$\begin{aligned} C = kP &= (x_c, y_c) \\ r &= x_c \ mod\ q \\ s &= k^{-1}(m + rd) \ mod\ q \end{aligned} \tag{3}$$

Пара (r, s) - подпись.

Для проверки подписи Бобу требуется проверить, что $0 \leq r, s \leq q-1$, а также провести вычисления:

$$\begin{aligned} v_1 &= s^{-1}h \ mod\ q \\ v_2 &= s^{-1}r \ mod\ q \\ v_1P + v_2Q &= (x_b, y_b) \\ \hat{r} &= x_b \ mod\ q \end{aligned} \tag{4}$$

Полученное в (4) $\hat{r}$ должно совпасть с r

3. Представления точек

Сложение, а тем более умножение точки на число является затратной операцией: в стандартных координатах в кривых над полями с характеристикой, отличной от 2 и 3, сложение точек выглядит следующим образом. Пусть $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \in E, P \neq \pm Q$. Тогда для $R = P + Q$

$$x_R = \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)^2 - x_P - x_Q, \quad y_R = \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)(x_P - x_R) - y_P \tag{5}$$

Видно, что для сложения точек требуется инверсия и умножение в поле. Первая является особенно дорогостоящей операцией, и от нее хотелось бы избавиться. Это позволяют сделать другие координатные системы [2], которые позволяют добиться лучшей производительности за счет дополнительной информации. Одним из таких представлений являются проективные координаты.

Определение 3. *Пусть c, d - положительные целые. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на $K^3 \setminus \{(0,0,0)\}$:*

$$(X_1, Y_1, Z_1) \sim (X_2, Y_2, Z_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K : X_1 = \lambda^c X_2, Y_1 = \lambda^d Y_2, Z_1 = \lambda Z_2 \tag{6}$$

Оно разбивает $K^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ на классы эквивалентности. Эти классы эквивалентности будем называть проективными точками.

Отметим, что при этом либо у всех представителей класса $Z = 0$, либо есть представитель с $Z = 1$. Сопоставим точке $P = (X, Y)$ на кривой класс с представителем $(X, Y, 1)$. Если подставить в 2 $x = \frac{X}{Z^c}, y = \frac{y}{Z^d}$ и избавиться от знаменателя, то можно получить уравнение кривой в проективных кординатах. Проективные точки с $Z = 0$, удовлетворяющие уравнению, будут считаться точками на бесконечности. Различный выбор c и d порождает разные виды проективных координат:

3.1. Стандартные проективные координаты: $c = 1$, $d = 1$

В данном случае проективной точке $(X : Y : Z), Z \neq 0$, сопоставляется афинная точка $\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$. При подстановке (2) переходит в

$$Y^2 Z = X^3 + aX^2 Z + bZ^3 \tag{7}$$

Этому уравнению удовлетворяет точка $(0 : 1 : 0)$ - ей будет соответствовать афинная точка ∞. Заменим в (5) афинные координаты на проективные, при этом в выражении для Y'_R учтя, что $x_P - x_R = 2 * x_P + x_Q - \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)^2$:

$$\begin{aligned}
\text{Пусть } M &= Y_Q Z_P - Y_P Z_Q, \quad N = X_Q Z_P - X_P Z_Q. \quad \text{Тогда} \\
X'_R &= \left(\frac{M}{N}\right)^2 - \frac{X_P Z_Q + X_Q Z_P}{Z_P Z_Q} = \frac{M^2 Z_P Z_Q - N^2 (X_P Z_Q + X_Q Z_P)}{N^2 Z_P Z_Q} \\
Y'_R &= \left(\frac{M}{N}\right)\left(2 * \frac{X_P}{Z_P} + \frac{X_Q}{Z_Q} - \left(\frac{M}{N}\right)^2\right) - \frac{Y_P}{Z_P} = \\
&= \frac{M\left(N^2 (2 * X_P Z_Q + X_Q Z_P) - M^2 Z_P Z_Q\right)}{N^3 Z_P Z_Q} - \frac{Y_P}{Z_P}
\end{aligned}$$

Пользуясь соотношением эквивалентности, избавимся от знаменателя, задав $Z_R = N^3 Z_P Z_Q$:

$$\begin{aligned}
X_R &= N M^2 Z_P Z_Q - N^3 (X_P Z_Q + X_Q Z_P) \\
Y_R &= M\left(N^2 (2 * X_P Z_Q + X_Q Z_P) - M^2 Z_P Z_Q\right) - Y_P Z_Q N^3 \\
Z_R &= N^3 Z_P Z_Q
\end{aligned} \tag{8}$$

Аналогичным образом выводятся формулы для удвоения точки:

$$\begin{aligned} X_R &= M^2N - 4N^2X_PY_P \\ Y_R &= 6X_PY_PMN - M^3 - 2N^2Y_P^2 \\ Z_R &= N^3, \end{aligned} \tag{9}$$

где $M = 3X_P^2 + aZ_P^2, N = 2Y_PZ_P$. Как видно, в случае выбора этих кординат нет нужды производить инверсию в поле - операцию гораздо более трудоемкую, нежели сложение или умножение.

3.2. Проективные координаты Якоби: $c = 2, d = 3$

Проективной точке $(X : Y : Z), Z \neq 0$, сопоставляется афинная точка $\left(\frac{X}{Z^2}, \frac{Y}{Z^3}\right)$. Уравнение кривой выглядит следующим образом:

$$Y^2 = X^3 + aXZ^4 + bZ^6 \tag{10}$$

Используя рассуждения, подобные использовавшимся в предыдущем пункте, получаем формулы для сложения

$$\begin{aligned} M &= Y_QZ_P^3 - Y_PZ_Q^3, \quad N = X_QZ_P^2 - X_PZ_Q^2 \\ X_R &= M^2 - N^2\left(X_PZ_Q^2 + X_QZ_P^2\right) \\ Y_R &= MN^2\left(2X_PZ_Q^2 + X_QZ_P^2\right) - M^3 - Y_PZ_Q^3N^3 \\ Z_R &= Z_PZ_QN \end{aligned} \tag{11}$$

и удвоения:

$$\begin{aligned} X_R &= \left(3X_P^2 + aZ_P^4\right)^2 - 8X_PY_P^2 \\ Y_R &= \left(3X_P^2 + aZ_P^4\right)\left(4X_PY_P^2 - X_R\right) - 8Y_P^4 \\ Z_R &= 2Y_PZ_P \end{aligned} \tag{12}$$

4. Вычислительный эксперимент

Для оценки ускорения произведения расчетов был поставлен вычислительный эксперимент. На языке программирования C++ был реализован ECDSA. При этом арифметика точек на кривой описывалась соответствующим классом; в зависимости от выбранного класса получась реализация с тем или иным представлением[1]. Использована арифметика в поле вычетов по простому модулю из библиотеки CryptoPP.

На 5 эллиптических кривых из набора "Standards for Efficient Cryptography 2 (SEC 2)" [4] были измерены времена сложения двух точек, удвоения точек (100000 операций), а также время создания и проверки подписи ECDSA (время 1000 циклов подпись-проверка подряд).

В эксперименте использовались следующие кривые:

Таблица 1.1. Кривые, используемые в эксперименте

Эллипт. кривая	Характеристика поля p	Длина p в битах
secp192r1	$2^{192} - 1$	192
secp224r1	$2^{224} - 2^{96} + 1$	224
secp256r1	$2^{224}\left(2^{32} - 1\right) + 2^{192} + 2^{96} - 1$	256
secp384r1	$2^{384} - 2^{128} - 2^{96} + 2^{32} - 1$	384
secp521r1	$2^{521} - 1$	521

Эксперимент производился на ПК с ЦП Intel© Core© i5-4210U, 5.7 ГиБ RAM, ОС Ubuntu 18.04.

5. Результаты эксперимента

Результаты сгруппированы по операциям в таблицах 1.2-1.4. Хорошо видно, что использование проективных координат (и стандартных, и координат Якоби) дает существенный прирост в скорости. К примеру, цифровая подпись вычисляется в проективных координатах до 3 раз быстрее при больших длинах характеристики.

Таблица 1.2. Время выполнения 100000 сложений точек, сек.

Кривая	Представление точек		
	Стандартное представление	Стандартные проективные координаты	Координаты Якоби
secp192r1	2.02538	1.19642	1.29833
secp224r1	2.33226	1.1659	1.31448
secp256r1	2.61107	1.45221	1.61168
secp384r1	4.41418	1.5437	1.75165
secp521r1	7.67348	2.74994	2.88035

Таблица 1.3. Время выполнения 100000 удвоений точек, сек.

Кривая	Представление точек		
	Стандартное представление	Стандартные проективные координаты	Координаты Якоби
secp192r1	2.03809	0.991167	1.19711
secp224r1	2.35125	1.03813	1.44132
secp256r1	2.7061	1.26499	1.93033
secp384r1	4.51443	1.34504	1.80447
secp521r1	7.7561	2.29591	3.68255

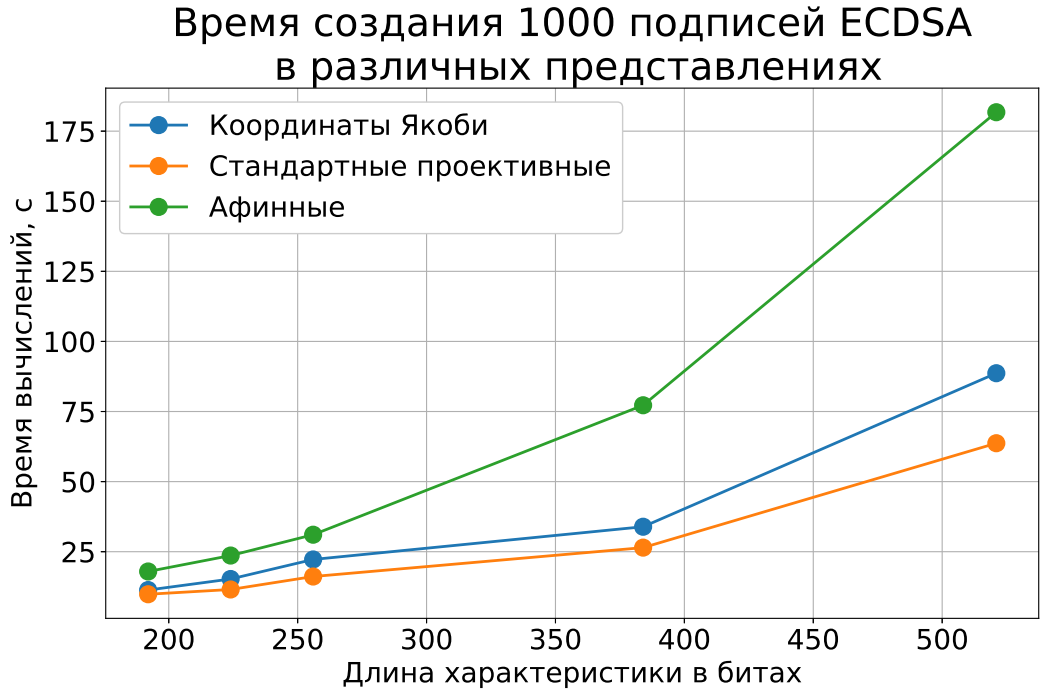
Полученные данные также изображены на графиках. На больших длинах наблюдается резкий прирост времени вычислений, однако, опять же, в проективных координатах он

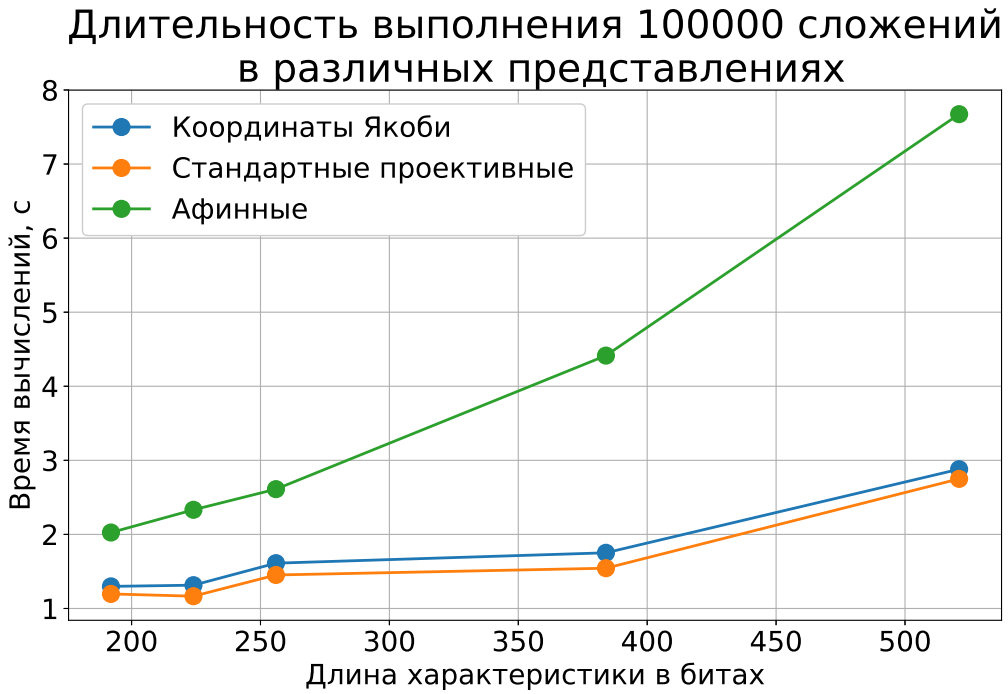
[1]Код см. `https://github.com/PaulZakharov/elcurves_2018`

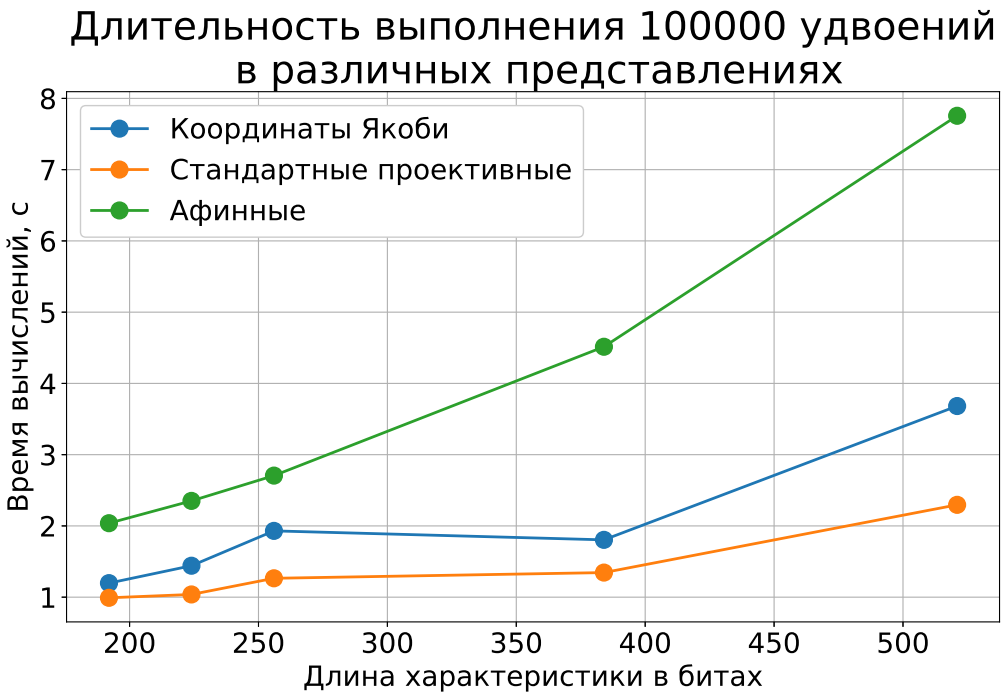
Таблица 1.4. Время выполнения 1000 циклов "создание-проверка подписи" , сек.

Кривая	Представление точек		
	Стандартное представление	Стандартные проективные координаты	Координаты Якоби
secp192r1	17.9406	9.82302	11.3276
secp224r1	23.6296	11.5241	15.2622
secp256r1	31.0576	16.1472	22.2321
secp384r1	77.2325	26.4536	33.9038
secp521r1	181.749	63.6901	88.6589

заметно меньше. Таким образом, при больших длинах характеристик поля использование проективных координат наиболее продуктивно.







6. Заключение

В работе произведено сравнение различных типов представления точек на эллиптических кривых, подтверждено ускорение вычислений в приложении к протоколам цифровой подписи. Дальнейшие работы могут быть посвящены дальнейшим оптимизациям вычислений в случае а)определенных классов кривых, б)определенных реализаций эллиптической криптографии.

Литература

1. *Hankerson D., Menezes A., Vanstone S.* - Guide to Elliptic Curve Cryptography. — New York: Springer-Verlag, 2004 — 311 P.
2. *Коблиц Н.* Курс теории чисел и криптографии. — М.: Научное издательство ТВП, 2001. — 254 С.
3. *Владимиров С.М. [и др.]* - Криптографические методы защиты информации. — М.: МФТИ, 2016. — 266 С.
4. *Certicom Research* - SEC 2: Recommended Elliptic Curve Domain Parameters. —Version 2.0, 2010 — 33 P.