EDP

Doctor Manuel Bustos
Rodolfo Lobo C.

30 de Julho de 2020

Motivación

La idea principal de esta digitalización es preservar el trabajo del profesor Doctor Manuel Bustos y adicionar algunos conocimientos extras sobre implementación, análisis numérico y método de los elementos finitos adquiridos en mis estudios de doctorado. Esto permitirá un conocimiento acabado de este tipo de problemas, para aquellas personas que quieran contrastar el conocimiento teórico y aplicaciones en este tipo de problemas, aprendiendo a utilizar principalmente `octave`.

Nomenclatura

Simbolos

Ω	Borde del Domino
$\overline{\Omega}$	Dominio Completo

Abreviaciones

`c.d.b`	Condiciones de Borde
`e.d.p`	Ecuación en Derivadas Parciales

Siglas

PD	Problema Diferencial

Capítulo 1

Preámbulo: Algunos conceptos claves

1. **Derivabilidad y diferencialbilidad**: una función de dos variables puede ser derivable en todas las direcciones y no ser continua; si es diferenciable sí es continua (condición necesaria anterior) y existen derivadas direccionales en todas las direcciones.

2. **Campo Vectorial**: **Video Aquí**

3. **Función continuamente diferenciable**: Recuerde que cuando una función $f : I \to \mathbb{R}$ posee derivada en todos los puntos del intervalo I, entonces la función $f' : I \to \mathbb{R}$ en $I(t) \times \mathbb{R}$ es la función derivada, que asocia a cada $x \in I$ la derivada $f'(x)$. Cuando f' es continua, entonces se dice que f es una función continuamente derivable en el intervalo I, o una función de clase C^1. Esto no siempre ocurre, la función derivada no precisa ser continua

4. **Divergencia**: La divergencia de un campo vectorial en un punto es un campo escalar, y se define como el flujo del campo vectorial por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero. Algunas propiedades fundamentales son:

   -
   -
   - Teorema de la Divergencia **Video Aquí**

5. **Funciones Armónicas**: **Video Aquí**

6. **Funciones Armónicas Conjugadas**: Un par de funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de variables reales x, y que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann se dice que son conjugadas. Las condiciones de Cauchy-Riemann

están dadas por:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

éstas son ecuaciones diferenciales parciales que son básicas en el análisis de funciones complejas de variable compleja, debido a que su verificación constituye una condición necesaria (aunque no suficiente) para la derivabilidad de este tipo de funciones.

Capítulo 2

Modelos Físicos con Ecuaciones Diferenciales

2.1 Un lema matemático

Consideremos en $\mathbb{R}$ un intervalo $I(t) = [0, a(t)]$ donde el límite superior es variable en la función "a"que suponemos continuamente derivable. Calculamos la velocidad con que su punto $x \in I(t)$ se mueve con t, $x(t) \in I(t)$ tendrá la posición $\dfrac{a(t+\Delta t)}{a(t)}$ en $I(t+\Delta t)$ (se supone **no entiendo** lineal del intervalo) y por lo tanto su velocidad será:

$$v(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{a(t+\Delta t)}{a(t)} x - x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x}{a(t)} \frac{a(t+\Delta t)}{\Delta t} \tag{2.1}$$

luego,

$$v(x,t) = x \frac{a'(t)}{a(t)}. \tag{2.2}$$

Consideremos ahora la función definida por la integral:

$$k(t) = \int_0^{a(t)} y(x,t)dx \tag{2.3}$$

en que $y(x,t)$ es continuamente derivable y calculamos $k'(t)$,

$$\frac{dk(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_0^{a(t+\Delta t)} y(x, t+\Delta t)dx - \int_0^{a(t)} y(x,t)dx \right] \tag{2.4}$$

analogamente,

$$\frac{dk(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_0^{a(t)} (y(x,t+\Delta t) - y(x,t))dx + \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} y(x,t)dx \right] \tag{2.5}$$

por el teorema del valor medio para integrales tenemos:

$$\int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} y(x,t+\Delta t)dx = (a(t+\Delta t)-a(t))y(a(\theta),t+\Delta t) \quad \theta \in [t,t+\delta t] \tag{2.6}$$

por lo tanto

$$\frac{dk(t)}{dt} = \int_0^{a(t)} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}dx + a'(t)y(a(t),t) \tag{2.7}$$

o bien,

$$\frac{dk(t)}{dt} = \int_0^{a(t)} \left(\frac{\partial y}{\partial t}dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(y(x,t)\cdot\frac{a'(t)}{a(t)}\right)\right)dx \tag{2.8}$$

es decir

$$\frac{dk(t)}{dt} = \int_{I(t)} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \operatorname{div}(y \bullet v)\right)dx \tag{2.9}$$

Teorema 1. *Sea $k(t)$ la función definida por la integral de volumen:*

$$k(t) = \int_{\Omega(t)} y(x_1,x_2,x_3,t)dx \quad dx = dx_1dx_2dx_3 \tag{2.10}$$

donde $\Omega(t)$ es un dominio abierto y convexo, de frontera regular (diferenciable por tramos) que seguiremos en su movimiento con velocidad $\overrightarrow{v}(x,t)$ continuamente diferenciable e $y(x,t)$ una función real continuamente derivable en $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, entonces:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial y}{\partial t}dx + div(y\cdot\vec{v})\right)dx \tag{2.11}$$

y por el teorema de la divergencia:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial y}{\partial t}dx + \int_{\partial\Omega(t)} y\ \vec{v}\bullet\vec{n}\ dS \quad (\vec{n}\text{: normal exterior}) \tag{2.12}$$

Observación 1. Nota:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \operatorname{div}(y\cdot\vec{v})\right)dx &= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \operatorname{grad}(y)\bullet\vec{v} + y\operatorname{div}(\vec{v})\right)dx \\ &= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{dy}{dt} + y\operatorname{div}(\vec{v})\right)dx\end{aligned}$$

Ejemplo 1. $y(x,t)=1$ entonces, $k(t)=\int_{\Omega(t)} dx$, representa el volumen de Ω y $k'(t)$ será la tasa de dilatación volumétrica que es:

$$k'(t) = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\vec{v})\,dx$$

2.2 Definición de Problema Diferencial

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$) de frontera Γ regular entonces mi problema diferencial (PD) es *encontrar una función u definida sobre* Ω tal que:

$$\begin{cases} (1)\ F\left(x, u(x), \ldots, \dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}, \ldots\right) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \\ \\ (2)\ F_\Gamma\left(x, u(x), \ldots, \dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}, \ldots\right) = g(x) \quad \forall x \in \Gamma \end{cases} \tag{2.13}$$

donde $\begin{cases} F : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l & , f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^l \\ \\ F_\Gamma : \Gamma \times \mathbb{R}^{k'} \longrightarrow \mathbb{R}^{l'} & , f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^{l'} \end{cases}$

(1) se denomina ecuación diferencial con derivadas parciales.

(2) se denomina condiciones de borde.

- El mayor orden de derivación que aparece en (1) se denomina el orden del problema diferencial y que supondremos mayor al que aparece en (2).
- Si F y F_Γ son lineales se dice que (PD) es lineal.
- Si (PD) es lineal entonces se llama problema lineal homogeneo asociado a (PD) al problema (PD) con f y g nulas.

Ejemplo 2. Encontrar u tal que $u : \overline{\Omega} = (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0 \quad (x,y) \in \Omega \\ \\ u(x,y) = g(x,y) \quad (x,y) \in \Gamma \end{cases} \tag{2.14}$$

- La (PD) es lineal de primer orden.
- La ecuación es homogenea y la condición de borde no lo es.

Nótese que $u(x,y) = u(y)$ es una solución de la ecuación en derivadas parciales (`e.d.p`). y de estas posibles debe buscarse aquella(s) que satisfaga la condición de borde (`c.d.b`).

Ejemplo 3. Encontrar u tal que $u : \{(x,y)/y \geq 0\} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$(PD) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \quad \text{en} \quad \Omega \\ \\ u(x,y) = y(x,y) \quad \text{en} \quad \Gamma \end{cases} \tag{2.15}$$

- (PD) es lineal de 2^{do} orden no homogeneo. Por integración directa obtenemos que:

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(t,r)dtdr + v(x) + w(y) \quad (x_0,y_0)\in\Omega \tag{2.16}$$

que corresponde a una solución para la `e.d.p.`

Ejemplo 4. Encontrar $(u,v) : \overline{\Omega} = \{(x,y)/x^2+y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$(PD) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = \quad 0 & \\ & (x,y)\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \quad 0 & \\ & \\ (u,v) = (g,g_2) & \text{sobre} \quad \Gamma \end{cases} \tag{2.17}$$

- El sistema es lineal de primer orden. Es fácil ver que las funciones u y v son armónicas conjugadas y satisfacen:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \Delta v = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Δ se denomina "operador Laplaciano"y es lineal de 2^{do} orden.

2.3 Ecuación de vibración de una cuerda

Consideremos una cuerda estirada entre 2 puntos. Por cuerda entenderemos un cuerpo rígido (no deformable) donde 2 de sus dimensiones se deprecian frente a su longitud. Supondremos, además, que la tensión sobre la cuerda es considerable de maneras que, la resistencia de la cuerda a la flexión se desprecia.

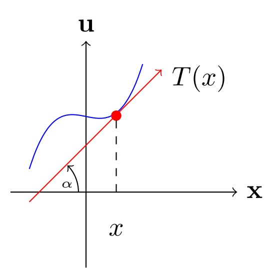

Figura 2.1: Ejemplo gráfico de una cuerda.

Nos interesa conocer la forma de la cuerda (desplazamiento), $u(x,t)$ cuando ella es sometida a una fuerza transversal $p(x)$ dada, según el eje u. Suponemos que el eje x coincide con la posición de equilibrio inicial. Consideremos la cuerda en estado de equilibrio sometida a la fuerza $p(x)$ y aislemos un pedazo definido por: $x_1 \leq x \leq x_2$. Sobre este trazo y según el eje u actúa como una fuerza igual a:

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x)dx \tag{2.19}$$

Sea $\alpha(x)$ el ángulo formado por el eje x y la tangente a u en x. La fuerza que ejerce el resto de la cuerda (tensión), $T\vec{(x)}$ sobre el pedazo aislado tiene dirección tangencial, luego su componente según el eje u en x_2 es:

$$|\vec{T}(x_2)|\mathrm{sen}(\alpha(x_2)) = T(x_2)\mathrm{sen}(\alpha(x_2)) \tag{2.20}$$

y en x_1:

$$-|\vec{T}(x_1)|\mathrm{sen}(\alpha(x_1)) = T(x_1)\mathrm{sen}(\alpha(x_1)) \tag{2.21}$$

pero:

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \qquad \left(\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{2.22}$$

luego, suponiendo desplazamientos pequeños podemos despreciar el término $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ con lo cual sen$\alpha \approx \dfrac{\partial u}{\partial x}$. La ecuación de equilibrio sobre el eje y se escribe

$$\left[T\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_1} - \left[T\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = 0, \tag{2.23}$$

pero

$$\left[T\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_1} - \left[T\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx, \tag{2.24}$$

(lea la nota en relación a esta última observación[1]), luego

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) + p(x)\right] dx = 0, \tag{2.25}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) + p(x) = 0. \tag{2.26}$$

[1]Como ejemplo, si x e y son variables independientes (lo que implica que y permanece constante durante la integración), entonces es verdad que: $\int \dfrac{\partial f}{\partial x}dx = f(x,y) + C(y)$. Cómo estamos tratando variables independientes y funciones derivables, que a su vez son Riemann integrables no existe problema en afirmar la relación (2.24). Como contraejemplo si tuviéramos el caso $y = y(x)$ para $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ e integramos en la linea $y = 2x$ entonces $\int \dfrac{\partial f}{\partial x}dx = \int(2x-y)dx = \int 0dx = 0$. Esto implica que para variables dependientes no es tan simple afirmar la relación en cuestión.

Ahora si pasamos del análisis estático al dinámico e introducimos en la ecuación de fuerzas el término de aceleración se tiene:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+p(x)\right]dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho(x)dx \quad \rho(x):\text{densidad lineal de la cuerda} \tag{2.27}$$

recordando que

$$m=\rho(x)\Delta x \quad \text{(masa asociada al trozo de cuerda)}$$

con lo cual obtenemos[2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x)=0 \tag{2.28}$$

Suponiendo que las vibraciones de la cuerda son transversales, las componentes de fuerzas sobre el eje x deben sumar cero y por lo tanto:

$$[T\cos(\alpha)]_{x_2}-[T\cos(\alpha)]_{x_1}=0 \quad \forall x_1,x_2$$

luego, despreciando los terminos en α^2 se obtiene:

$$T(x_2)=T(x_1) \quad \forall x_1,x_2$$

con lo cual T es independiente de x y si suponemos que además la cuerda es homogenea, es decir, $\rho(x)=\texttt{cte}$ entonces (2.28) toma la forma:

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-p(x)\frac{1}{T} \tag{2.29}$$

suponiendo que $p(x)\equiv 0$ (solo un impulso) entonces se obtiene la ecuación:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad a^2=\frac{T}{\rho}}$$

Esta ecuación fue descubierta por Daniel Bernoulli, D'Alambert y Euler en el siglo XVIII.

2.4 Observación Numérica

Antes de continuar con otros ejemplos de la física y la forma de resolver este tipo de ejercicios, veamos como la solución de la ecuación de la cuerda vibrante puede ser obsevada utilizando `octave`. Supongamos que ya hemos calculado la

[2]En el siguiente link puedes encontrar una construcción diferente de esta ecuación, teniendo en cuenta variaciones pequeñas de los ángulos que permiten despreciar los términos de segundo orden **Aqui**.

solución de una ecuación en derivadas parciales que involucra el movimiento de una cuerda. Se la solución de esta ecuación dada por

$$y_n(x,t) = A\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot \text{sen}\,(n\omega_0 t)$$

para $A = 2$, $l = 10$, $T = 1$, $\rho = 1$, $n = 1$ y $\omega_0 = \dfrac{\pi}{l}\left(\dfrac{T}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$

Listing 2.1: Código: cuerda en movimiento

```
% Defino los dominios : largo de la cuerda
% y cantidad de tiempo
x = 0:0.1:10
t = 0:0.1:10

% Parametros de la funcion
A = 2;
l = 10;
T = 1;
rho = 1;
n =1;
w0 = (pi/l)*(T/rho)^0.5;
n = 1

% Ciclo para observar la funcion
% en movimiento
for i=1:length(t)
   f = A*sin(n*pi*x/l)*sin(n*w0*t(i))
   plot(t,f,'linewidth',2)
   ylim([0,2])
   xlim([0,10])
   pause(0.1)
endfor
```

El ciclo `for` permite recorrer el vector de tiempo, para el modo de vibración $n = 1$, para todo x en el dominio. La función plot muestra el gráfico, mientras que las funciones `ylim` e `xlim` fijan los ejes cartesianos entre los valores dados en el argumento. Finalmente, la función `pause` ralentiza la visualización de los plots generados en cada ciclo, con la finalidad de generar una imagen en movimiento, dada por las sucesivos plots.

Observación 2. Las ecuaciones (2.21) y (2.22) son entendidas a partir del sistema de referencia elegido. La tensión en el extremo izquierdo inferior de la cuerda apunta en sentido negativo y debe ser equilibrar con aquella del lado derecho en sentido positivo (x_1, x_2 son izquierda y derecha respectivamente). En relación al $\text{sen}(\alpha)$ primero es necesario trabajar con Δx y Δu, recordando que la ecuación (2.22) ocurre en el $\lim \Delta x \to 0$.

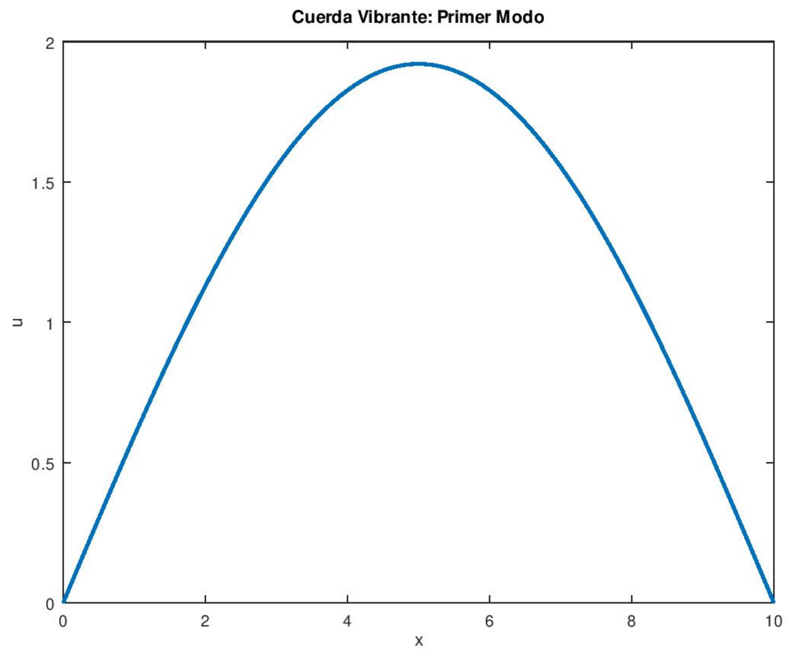

Figura 2.2: Primer modo de vibración de una cuerda.

2.5 Ecuación del Movimiento de un Fluido

Consideremos un fluido que se mueve en una región de $\mathbb{R}^3$ y consideremos conocida su velocidad en cada uno de sus ejes, es decir, conocemos V_x, V_y, V_z (x, y, z, t). Además, consideremos una superficie $S(t)$ que consiste siempre de las mismas partículas y que encierra un volumen variable $\Omega(t)$ que seguiremos en su movimiento. La masa encerrada por $\Omega(t)$ es:

$$Q(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(x, y, z, t) dxdydz$$

donde $\rho(x, y, z, t)$: densidad volúmica del fluido. La masa de fluido encerrada en $\Omega(t)$ debe permanecer constante en el tiempo debido a que no hay intercambio con el exterior de $\Omega(t)$, el cual seguiremos en su movimiento. Luego:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0$$

pero aplicando el Teorema 1 se tendrá:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz + \int_{\partial\Omega(t)} \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v})\, dxdydz = 0 \quad (\vec{n}\text{: } \textit{normal exterior})$$

Como esta ecuación es válida para un volumen $\Omega(t)$ cualquiera contenido en el fluido, se tendrá que:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad \text{(Ecuación de continuidad en un medio continuo)}}$$

Si aplicamos esta ecuación en el caso de un fluido incompresible homogeneo (densidad constante) entonces la ecuación se reduce a :

$$\boxed{\rho \cdot \operatorname{div}(\vec{v}) = 0}$$

Asíel problema del movimiento de un fluido incompresible homogeneo es equivalente a encontrar una función ϕ (potencial de velocidades) tal que:

$$\vec{v} = \operatorname{grad}(\phi), \quad V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

y que satisfaga, entonces, la ecuación:

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace} \tag{2.30}$$

2.6 Ecuación de Conducción de Calor

Consideremos un cuerpo conductor (capaz de conducir calor) que ocupa una región Ω de $\mathbb{R}^3$. La cantidad de calor Q del cuerpo (energía calórica) viene dada por:

$$Q = \int_\Omega c\rho T \quad dxdydz$$

ρ: Densidad volumica del cuerpo

c: Capacidad calórica

T: Temperatura absoluta

La transmisión de calor de un cuerpo a otro puede tomar lugar de varias maneras (radiaciones, procesos químicos etc) sin embargo, nos encontraremos en la transmisión de calor por efecto de la transmisión de energía cinética entre las partículas. Consideremos D un dominio en Ω de superficie S al intercambio de calor entre D y el exterior que notaremos por $\Delta_s Q$, supondremos que se puede expresar en la forma:

$$\Delta_s Q = \int_S x(S,t) dS$$

donde,

$$x(S,t) = f(x,y,z,n,t)$$

Esta fórmula equivale a decir que la cantidad de energía térmica pasando a través de un elemento de superficie y por unidad de tiempo depende solo de la posición y de la normal. El flujo de calor es considerado positivo en la dirección de la normal interior. Supongamos además que en Ω existe una distribución continua de fuentes de calor de intensidad $q(x,y,z,t)$ exterior. Luego, la ecuación de balance de energía calórica en D será:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_D \frac{\partial(c\rho T)}{\partial t} \quad dxdydz = \int_D q \quad dxdydz - \int_S f(x,y,z,n,t)dS \quad n\text{: normal exterior}$$

Ahora, si el medio es isótropo (mismas propiedades en todas las direcciones) se muestra experimentalmente que:

$$f(x,y,z,n,t) = -k \cdot \operatorname{grad}(T \cdot \vec{n}) \quad \text{Ley de Fourier}$$

(El signo $(-)$ se interpreta a partir del hecho que los flujos de calor ocurren desde zonas de mayor temperatura a menor temperatura). Luego, el balance de energía calórica queda:

$$\int_D \frac{\partial(c\rho T)}{\partial t} \quad dxdydz = \int_D q \quad dxdydz + \int_S k \cdot \operatorname{grad}(T \cdot \vec{n})\, dS$$

y por el Teorema de la divergencia:

$$\int_D \frac{\partial(c\rho T)}{\partial t} \quad dxdydz = \int_D q \quad dxdydz + \int_D k \cdot \mathrm{divgrad} T dS$$