

Seminarul 6

1. Un jucător de darts ochește discul roșu (denumit “bullseye”) cu centrul în centrul țintei și diametru 1 cm. La o aruncare, distanța dintre centrul țintei și punctul nimerit de săgeata jucătorului urmează distribuția uniformă pe intervalul $[a, b]$, unde $0 \leq a < b$, cu valoarea medie $\frac{3}{2}$ cm și deviația standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinați:

- a) probabilitatea ca jucătorul să nimerească discul roșu;
b) probabilitatea ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roșu din 10 aruncări.

Funcția de densitate pentru distribuția uniformă $Unif[a, b]$ este $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$.

R: a) X =distanța de la săgeată la centru $\implies f_X = f$ este funcție de densitate pentru $X \implies E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}, V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{3}{4}$. Avem: $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=0 \end{cases} \implies$

$a=0, b=3$. p =probabilitatea de a nimeri discul roșu $\implies p = P(X \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{6}$.

b) Z =numărul de reușite din 10 aruncări $\implies Z \sim Bino(10, p) \implies P(Z=2) = C_{10}^2 p^2 (1-p)^8 = 45 \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 29\%$.

2. a) Fie datele statistice $(x_i)_{i=1,10}$: 2, 1, 3, 1, 5, 2, 3, 5, 1, 1. Să se calculeze expresia funcției de repartiție empirice corespunzătoare acestor date

$\mathcal{F}_{10} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definită prin $\mathcal{F}_{10}(x) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, 10\} : x_i \leq x\}}{10}$.

$$\text{R.: } \mathcal{F}_{10} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad \mathcal{F}_{10}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 1 \\ 0,4 & \text{dacă } 1 \leq x < 2 \\ 0,4 + 0,2 & \text{dacă } 2 \leq x < 3 \\ 0,4 + 0,2 + 0,2, & \text{dacă } 3 \leq x < 5 \\ 1, & \text{dacă } 5 \leq x. \end{cases}$$

b) Fie $(X_n)_n$ un șir de variabile aleatoare independente care au aceeași distribuție. Notăm cu F funcția de repartiție comună.

b₁) Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat și se consideră pentru $n \in \mathbb{N}^*$ v.a. $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_n(\omega) \leq x \\ 0, & \text{dacă } X_n(\omega) > x. \end{cases}$

Ce distribuție au Y_n , respectiv $Y_1 + \dots + Y_n$?

R.: $Y_n \sim Bernoulli(F(x)), Y_1 + \dots + Y_n \sim Bino(n, F(x))$.

b₂) Spre ce valoare converge a.s. șirul $(\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n))_n$?

R.: $\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n) \xrightarrow{a.s.} F(x)$, folosind LTNM, pentru șirul $(Y_n)_n$, care este un șir de v.a. independente și $E(Y_n) = P(X_n \leq x) = F(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b₃) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fie

$$\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \mathcal{F}_n(x, \omega) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i(\omega) \leq x\}}{n},$$

funcția de repartiție empirică calculată în punctul $x \in \mathbb{R}$.

Ce relație există între cele două v.a. $\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)$ și $\mathcal{F}_n(x, \cdot)$?

R.: $\frac{1}{n}(Y_1(\omega) + \dots + Y_n(\omega)) = \mathcal{F}_n(x, \omega) \quad \forall \omega \in \Omega$.

b₄) Este $\mathcal{F}_n(x, \cdot)$ un estimator nedepășat și consistent pentru $F(x)$?

R.: Da, pentru că $E(\mathcal{F}_n(x, \cdot)) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Y_i) = F(x)$ și b₂) implică $\mathcal{F}_n(x, \cdot) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{a.s.} F(x)$.

3. Durata (în minute) a unei plăți pentru o factură la un ghișeu într-o bancă urmează distribuția continuă $Unif[1, 3]$. Știind că duratele oricăror plăți sunt independente, demonstrați că:

i) media aritmetică a duratelor plăților a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \rightarrow \infty$.

ii) media geometrică a duratelor plăților a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \rightarrow \infty$.

iii) media armonică a duratelor plăților a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \rightarrow \infty$.

R: Fie X_n durata plății celei de a n -a facturi. $(X_n)_n$ este un șir de variabile aleatoare independente care urmează distribuția $Unif[1, 3]$.

i) LTNM implică $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} E(X_1) = \int_1^3 \frac{x}{2} dx = 2$.

ii) LTNM implică $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i} = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i} \xrightarrow{a.s.} e^{E(\ln X_1)} = e^{\int_1^3 \frac{\ln x}{2} dx} = \frac{3\sqrt{3}}{e} \approx 1,91$.

iii) LTNM implică $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{E(\frac{1}{X_1})} = \frac{1}{\int_1^3 \frac{1}{2x} dx} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1,82$.

4. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 and I_2 . Computerul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. Știind că a fost aleasă imprimanta I_1 , un poster A2 este printat în T_1 secunde, unde T_1 are distribuția $Exp(\frac{1}{5})$. Știind că a fost aleasă imprimanta I_2 , un poster A2 este printat în T_2 secunde, unde T_2 are distribuția uniformă $Unif[4, 6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer. Calculați valoarea medie pentru timpul (în secunde) de printare a posterului.

R.: T =timpul de printare a posterului; F_T =funcția de repartiție a lui T ; fie evenimentele A : computerul este conectat la imprimanta I_1 ; \bar{A} : computerul este conectat la imprimanta I_2 . Formula probabilității totale \implies

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(T \leq t|A)P(A) + P(T \leq t|\bar{A})P(\bar{A}) \\ = 0,4 \cdot P(T_1 \leq t) + 0,6 \cdot P(T_2 \leq t) = 0,4 \int_{-\infty}^t f_{T_1}(\tau) d\tau + 0,6 \int_{-\infty}^t f_{T_2}(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde f_{T_i} este funcție de densitate pentru T_i , $i = 1, 2 \implies f_T(t) = F'_T(t) = 0,4f_{T_1}(t) + 0,6f_{T_2}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, este funcție de densitate pentru $T \implies E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt = 0,4 \int_0^{\infty} \frac{1}{5} t e^{-\frac{t}{5}} dt + 0,6 \int_4^6 \frac{t}{2} dt = 0,4 \cdot 5 + 0,6 \cdot 5 = 5$ (secunde).

5. Fie v.a. $U \sim Unif[1, 3]$. Să se calculeze $E(U^2)$. Folosind rezultatul obținut, să se justifice de ce U^2 nu urmează distribuția $Unif[1, 9]$!

R.: Fie $Y \sim Unif[1, 9]$. Folosind calculele de la Problema 1-Seminar 6 și faptul că $U \sim Unif[1, 3]$, avem $E(U) = \frac{1+3}{2} = 2$, $E(Y) = \frac{1+9}{2} = 5$. Dar,

$$E(U^2) = \int_1^3 t^2 \frac{1}{3-1} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{13}{3} \implies E(U^2) \neq E(Y)$$

$\implies U^2$ și Y nu pot avea aceeași distribuție.

6. Fie v.a. independente $U_1, U_2 \sim Unif[0, 3]$. Să se calculeze $V(U_1 + U_2)$. Folosind rezultatul obținut, să se justifice de ce $U_1 + U_2$ nu urmează distribuția $Unif[0, 6]$!

R.: Fie $Z \sim Unif[0, 6]$. Folosind calculele de la Problema 1-Seminar 6 și faptul că $U_1, U_2 \sim Unif[0, 3]$, avem $V(U_1) = V(U_2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, $V(Z) = \frac{36}{12} = 3$. Dar,

$$V(U_1 + U_2) = V(U_1) + V(U_2) \quad (U_1, U_2 \text{ sunt independente}) \implies V(U_1 + U_2) \neq V(Z)$$

$\implies U_1 + U_2$ și Z nu pot avea aceeași distribuție.

7. Timpii de funcționare (în ore) a două baterii sunt două variabile aleatoare independente $X \sim Unif[0, 2]$ și $Y \sim Exp(1)$. Fie $T = \min\{X, Y\}$ timpul de funcționare a bateriilor legate în serie. Calculați: $P(X < 0,5)$, $P(T > 1)$, $P(T < 1|X \geq 1)$.

$$\text{R.: } P(X < 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

$$P(T > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = \int_1^2 \frac{1}{2} dx \cdot \int_1^\infty e^{-x} dx = \frac{e^{-1}}{2}.$$

$$P(T < 1 | X \geq 1) = \frac{P(\{T < 1\} \cap \{X \geq 1\})}{P(X \geq 1)} = \frac{P(Y < 1)P(\{X \geq 1\})}{\frac{1}{2}} = 1 - e^{-1}.$$