

Dreapta în plan

Paul A. Blaga

Universitatea "Babeș-Bolyai"

13 martie 2022

Ecuatia dreptei scrisă cu ajutorul coeficientului unghiular (al pantei)

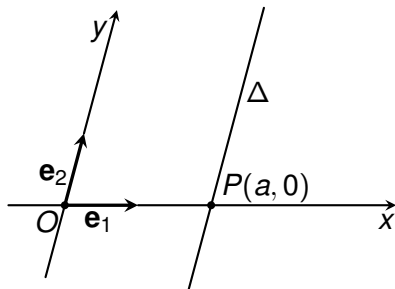
- Fie Δ o dreaptă situată într-un plan.
- *vector director* al dreptei = vector nenul a cărui direcție coincide cu direcția dreptei.
- O dreaptă are o infinitate de vectori directori, dar toți aceștia sunt coliniari între ei.
- Alegem un sistem de coordonate afin (nu neapărat ortonormat) Oxy . Presupunem, mai întâi, că dreapta este paralelă cu axa Oy și intersectează axa Ox într-un punct $P(a, 0)$.
- Atunci pentru toate punctele $M(x, y)$ de pe dreapta Δ și numai pentru ele avem

$$x = a. \tag{1}$$

- Deci (1) *este ecuația unei drepte paralele cu axa Oy și care intersectează axa Ox în punctul $P(a, 0)$.*

Ecuția dreptei scrisă cu ajutorul pantei

- Toate dreptele de acest tip au vectori directori de componente $(0, m)$, unde m este un număr real nenul oarecare.



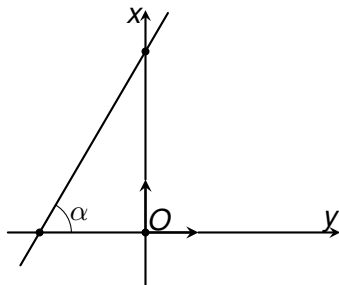
- Dacă dreapta Δ nu este paralelă cu axa Oy , atunci pentru orice vector director $\mathbf{v}(l, m)$ al acestei drepte avem $l \neq 0$, iar raportul $m : l$ are aceeași valoare constantă k , numită *coeficient unghiular* al dreptei Δ relativ la sistemul de coordonate ales.

Ecuția dreptei scrisă cu ajutorul pantei

Dacă, în particular, se consideră un sistem de coordonate ortogonal $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, atunci pentru coeficientul unghiular avem, în mod evident,

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

unde α este unghiul dintre \mathbf{i} și orice vector director al dreptei Δ .
Unghiul α se numește *unghiul de înclinare* sau *panta* dreptei Δ relativ la axa Ox .



Ecuția dreptei scrisă cu ajutorul pantei

- Fie Δ o dreaptă de coeficient unghiular k și $P(a, b)$ un punct de pe dreaptă.
- Fie, acum $M(x, y)$ un punct de pe dreaptă, diferit de punctul P .
- Atunci vectorul $\overrightarrow{PM}(x - a, y - b)$ este un vector director al dreptei Δ , prin urmare

$$\frac{y - b}{x - a} = k. \quad (2)$$

- De aici rezultă că

$$y - b = k(x - a). \quad (3)$$

Această ecuație este verificată de orice punct de pe dreaptă, inclusiv punctul P .

Ecuția dreptei scrisă cu ajutorul pantei

- Demonstrăm acum că, invers, dacă un punct verifică această ecuație, atunci el aparține dreptei.
- Fie $M_1(x_1, y_1) \neq P$ un punct care verifică ecuația (3), adică

$$y_1 - b = k(x_1 - a). \quad (4)$$

- Cum $M_1 \neq P$, $x_1 - a \neq 0$, prin urmare, din (2) și (4), obținem că

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}.$$

Așadar, vectorii directori ai dreptelor Δ și PM_1 sunt coliniari.

- Cum ambele drepte trec prin punctul P , ele coincid, deci $M_1 \in \Delta$. Astfel, ecuația (3) descrie o dreaptă care trece prin punctul P și are coeficientul unghiular Δ .

Ecuatia dreptei scrisă cu ajutorul pantei

Dacă, în particular, punctul P se află pe axa Oy (ceea ce este posibil, deoarece am presupus că dreapta noastră nu este paralelă cu această axă), adică dacă P are coordonatele $(0, b)$, atunci ecuația (3) capătă forma mai simplă:

$$y = kx + b.$$

Dacă dreapta este paralelă cu axa Oy , atunci panta sa este egală cu zero și, dacă trece prin punctul $P(0, b)$, atunci ecuația ei este

$$y = b.$$

Ecuția generală a dreptei. Ecuția dreptei prin tăieturi

Definiție

Se numește *ecuație de gradul întâi* sau *ecuație liniară* relativ la necunoscutele x și y o ecuație de forma

$$Ax + By + C = 0, \quad (5)$$

unde $A, B, C \in \mathbb{R}$, iar coeficienții A și B nu se anulează simultan.

Teorema

Orice dreaptă în plan poate fi descrisă printr-o ecuație de forma (5). Invers, orice ecuație de forma (5) reprezintă o dreaptă.

Ecuatia generală a dreptei. Ecuatia dreptei prin tăieturi

Demonstrație.

- Fie $\Delta \nparallel Oy$. Atunci

$$y - kx - b = 0. \quad (6)$$

- Dacă $\Delta \parallel Oy$, atunci

$$x - a = 0. \quad (7)$$

- Considerăm acum o ecuație de forma (5) oarecare. Dacă $B \neq 0$, atunci, folosind notațiile $k = -A/B$, $b = -C/B$, putem aduce ecuația la forma (6). Dar ecuația (6) reprezintă o dreaptă, de coeficient unghiular k și care trece prin punctul $P(0, b)$.
- Dacă în ecuația (5) $B = 0$, atunci această ecuație se poate aduce la forma (7) și, prin urmare, reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy .

Ecuția generală a dreptei. Ecuția dreptei prin tăieturi

Ecuția (5) se numește *ecuația generală a dreptei în plan*. Vom evidenția acum câteva cazuri particulare, în care unul sau doi coeficienți ai ecuației generale se anulează.

1. $C = 0$. În acest caz ecuația (5) se reduce la

$$Ax + By = 0 \quad (8)$$

și este ecuația unei drepte prin origine.

2. $B = 0, C \neq 0$. În acest caz, ecuația (5) capătă forma

$$Ax + C = 0. \quad (9)$$

Este ecuația unei drepte verticale, prin punctul $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

3. $B = 0, C = 0$. De data aceasta ecuația se reduce la

$$x = 0,$$

iar dreapta este chiar axa Oy .

Ecuatia generală a dreptei. Ecuatia dreptei prin tăieturi

- 4. $A = 0, C \neq 0$. Acest caz este analog cu cazul 2) și conduce la o dreaptă paralelă cu axa Ox , dar care nu coincide cu această axă.
- 5. $A = 0, C = 0$. Acest caz este analog cu cazul 3), iar dreapta în chestiune este axa Ox .

Fie Δ dreapta dată prin ecuația sa generală (5). Atunci vectorul $\mathbf{n}(A, B)$ este perpendicular pe dreaptă, în timp ce vectorul $\mathbf{a}(-B, A)$ este un vector director al dreptei.

Într-adevăr, să alegem pe dreapta Δ două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Avem, prin urmare,

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Scăzând aceste ecuații membru cu membru, obținem

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0.$$

Ecuatia generală a dreptei. Ecuatia dreptei prin tăieturi

Această egalitate înseamnă că vectorul $\mathbf{n}(A, B)$ este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, prin urmare este perpendicular și pe dreapta Δ . Cum vectorul $\mathbf{a}(-B, A)$ este, în mod evident, și el perpendicular pe vectorul \mathbf{n} , rezultă că \mathbf{a} este un vector director al dreptei Δ .

Observație

Fie \mathbf{r} vectorul de poziție al unui punct curent M de pe dreaptă, \mathbf{n} – vectorul normal la dreaptă și \mathbf{r}_0 vectorul de poziție al punctului dat, M_0 , prin care trece dreapta. Atunci

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (10)$$

Aceasta este o formă a ecuației dreptei pe care o vom folosi destul de mult, de fiecare dată când dreapta este dată printr-un punct prin care trece și un vector normal la dreaptă.

Ecuatia generală a dreptei. Ecuatia dreptei prin tăieturi

Să presupunem acum că în ecuația (5) toți coeficienții A, B, C sunt nenuli. Împărțim ecuația cu $-C$ și notăm $a = -C/A$ și $b = -C/B$. Atunci ecuația va deveni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (11)$$

În mod evident, a și b sunt lungimile cu semn ale segmentelor pe care dreapta Δ le taie pe axele de coordonate Ox și Oy (e vorba de segmentele cuprinse între originea coordonatelor și punctele de intersecție a dreptei cu axele). Aceste lungimi se numesc *tăieturi* ale dreptei pe axă, de aceea, ecuația (11) se numește *ecuația dreptei Δ prin tăieturi*.

Ecuatia vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei

- Orice punct M al planului este unic identificat prin vectorul său de poziție \overrightarrow{OM} , relativ la originea coordonatelor.
- Fie Δ o dreaptă din plan, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ vectorul de poziție al unui punct de pe dreaptă și \mathbf{a} vectorul director al dreptei.
- Notăm cu \mathbf{r} vectorul de poziție al unui punct M oarecare din plan.
- Dacă M aparține dreptei, atunci

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{M_0M},$$

deci $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ este un vector director al dreptei, așadar este coliniar cu vectorul \mathbf{a} . De aici rezultă că există un număr real t astfel încât să avem

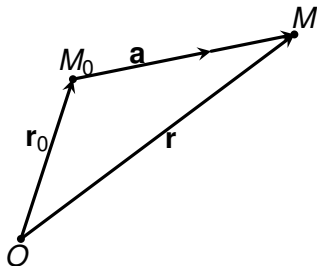
$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}. \quad (12)$$

Ecuția vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei

Invers, dacă t este un număr real oarecare, este clar că punctul M din plan, al cărui vector de poziție \mathbf{r} verifică ecuația (12) este un punct de pe dreaptă. Ecuația (12) sau ecuația echivalentă cu ea

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \quad (13)$$

se numește *ecuația vectorială a dreptei*.



Ecuția vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei

Să presupunem acum că vectorii sunt dați prin componentele lor, $\mathbf{a}(l, m)$, $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$ și $\mathbf{r}(x, y)$. Atunci ecuația vectorială (13) este echivalentă cu sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (14)$$

Ecuațiile (14) se numesc *ecuațiile parametrice ale dreptei* Δ . Dacă dreapta Δ nu este paralelă cu nici una dintre axele de coordonate, atunci avem, în mod evident, $l \neq 0$ și $m \neq 0$ și atunci sistemul (14) este echivalent cu ecuația

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad (15)$$

care se numește *ecuația canonică a dreptei în plan*.

Ecuția vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei

Facem următoarea convenție: *de fiecare dată când unul dintre numitorii din ecuația canonică a dreptei se anulează, se consideră că numărătorul acelei fracții este identic nul.*

Să presupunem, de exemplu, că avem ecuația:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{0}.$$

Atunci, conform convenției, această ecuație este, de fapt, echivalentă cu ecuația $y = 2$, adică reprezintă ecuația unei drepte paralele cu axa Ox .

Ecuatia dreptei prin două puncte

Fie acum două puncte $M_0(x_0, y_0)$ și $M_1(x_1, y_1)$ de pe dreapta Δ . Atunci $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ este un vector director al dreptei și, prin urmare,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad (16)$$

este *ecuația dreptei care trece prin punctele M_0 și M_1* . Precizăm că, în conformitate cu convenția făcută, punctele M_0 și M_1 pot să se afle și pe o dreaptă paralelă cu una dintre axele de coordonate (ceea ce are ca efect faptul că una dintre coordonatele celor două puncte va fi aceeași pentru ambele).

Poziția reciprocă a două drepte în plan

Considerăm două drepte Δ_1 și Δ_2 , date prin ecuațiile lor generale

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

A studia poziția reciprocă a acestor două drepte înseamnă să stabilim numărul punctelor comune ale celor două drepte. Este evident că ne putem afla, în exclusivitate, în una dintre următoarele trei situații:

- ❶ dreptele se intersectează într-un punct;
- ❷ dreptele coincid (ceea ce înseamnă că au o infinitate de puncte comune);
- ❸ dreptele sunt paralele (deci nu au nici un punct comun).

Este clar că a studia poziția reciprocă a dreptelor Δ_1 și Δ_2 revine la investigarea sistemului de ecuații liniare (17), alcătuit din ecuațiile generale ale dreptelor.

Poziția reciprocă a două drepte în plan

Astfel, cele trei cazuri de mai sus corespund (în aceeași ordine), următoarelor cazuri posibile în analiza sistemului de ecuații:

- (i) Sistemul de ecuații are soluție unică, adică

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (18)$$

- (ii) Sistemul de ecuații este compatibil, dar nedeterminat, adică

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

și

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad (20)$$

adică cele două ecuații (17) descriu aceeași dreaptă.

Poziția reciprocă a două drepte în plan

3. Sistemul de ecuații este incompatibil, ceea ce înseamnă că este verificată, din nou, ecuația (19) dar, de data aceasta,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad (21)$$

altfel spus, rangul matricii sistemului este egal cu 1, în timp ce rangul matricii extinse este egal cu 2. Egalitatea din (21) înseamnă că cele două drepte au vectori directori coliniari, în timp ce neegalitatea înseamnă că cele două drepte nu coincid, prin urmare ele sunt paralele.

Fascicole de drepte concurente

Definiție

Se numește *fascicol de drepte* mulțimea tuturor dreptelor dintr-un plan care trec printr-un punct S al planului, care se numește *centrul fascicolului*.

Pentru a specifica un fascicol de drepte în plan este suficient să specificăm centrul fascicolului sau două dintre dreptele sale.

Fie, prin urmare, în plan, două drepte distincte care trec prin punctul $S(x_0, y_0)$, date prin ecuațiile lor generale,

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (22)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (23)$$

Fascicule de drepte concurente

Considerăm acum ecuația

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (24)$$

unde α și β sunt numere reale oarecare, care nu se anulează simultan. Vom demonstra că această ecuație determină o dreaptă care trece prin punctul S . Rescriem ecuația sub forma

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \quad (25)$$

Aici coeficienții necunoscutelor nu se pot anula simultan. Într-adevăr, să presupunem că

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0 \quad (26)$$

și, de exemplu, $\alpha \neq 0$.

Fascicule de drepte concurente

Atunci și $A_2 \neq 0$, pentru că dacă A_2 ar fi zero ar trebui să avem și $A_1 = 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza că dreptele (22) și (23) se intersectează într-un punct. Analog se demonstrează că $B_2 \neq 0$, iar egalitățile (26) se pot scrie sub forma

$$A_1/A_2 = -\beta/\alpha, \quad B_1/B_2 = -\beta/\alpha \quad \Leftrightarrow \quad A_1/A_2 = B_1/B_2,$$

ceea ce nu este posibil, deoarece dreptele (22) și (23) nu sunt paralele, ci se intersectează într-un punct. Astfel, coeficienții necunoscutelor din ecuația (25) nu se pot anula simultan, de aceea, pentru orice α și β ce nu se anulează simultan, această ecuație reprezintă o dreaptă. Este evident că dreapta (24) trece, într-adevăr, prin punctul $S(x_0, y_0)$.

Fascicole de drepte concurente

Vom arăta acum, invers, că orice dreaptă din fascicol are o ecuație de forma (24), cu alte cuvinte, vom demonstra că oricum am alege o dreaptă din fascicolul de drepte din plan care trec prin punctul $S(x_0, y_0)$, putem alege două constante α și β , cel puțin una nenulă, astfel încât ecuația (24) să fie ecuația dreptei alese. Fie $M_1(x_1, y_1)$ un punct oarecare din plan, astfel încât $M_1 \neq S$. Este suficient să demonstrăm că putem alege constantele α, β astfel încât dreapta (24) să coincidă cu dreapta SM_1 . Această afirmație se reduce la cerința ca x_1 și y_1 , coordonatele lui M_1 , să verifice egalitatea

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \quad (27)$$

Fascicule de drepte concurente

Cum punctul M_1 nu coincide cu centrul fascicolului, cel puțin una dintre cantitățile din paranteze este diferită de zero. Dacă

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0,$$

atunci egalitatea (27) se poate rescrie sub forma:

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}\beta.$$

Dacă îi dăm lui β o valoare nenulă arbitrară, obținem valoarea corespunzătoare a lui α .

Prin urmare, pentru orice α și β care nu se anulează simultan, ecuația (24) reprezintă ecuația unei drepte din fascicolul determinat de dreptele (22) și (23) și, invers, orice dreaptă a fascicolului se poate scrie sub forma (24).

Fascicule de drepte concurente

Ecuatia (24) se numește *ecuația fascicolului de drepte* determinat de dreptele (22) și (23). Remarcăm că ecuația dreptei (22) se obține din ecuația (24) pentru $\beta = 0$ și un $\alpha \neq 0$ arbitrar, în timp ce ecuația dreptei (23) se obține din ecuația (24) pentru $\alpha = 0$ și un $\beta \neq 0$ arbitrar. Împărțind ambii membrii ai ecuației (24) la α și notând $\beta/\alpha = \lambda$, ecuația obținută se scrie

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (28)$$

Pentru orice λ , această ecuație corespunde unei drepte din fascicolul de drepte determinat de dreptele (22) și (23). Invers, orice dreaptă a acestui fascicol, cu excepția dreptei (23) se poate scrie sub forma (28) pentru un anumit λ .

Dacă se cunosc coordonatele centrului $S(x_0, y_0)$ al fascicolului, atunci ecuația fascicolului se poate scrie sub forma foarte simplă

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0. \quad (29)$$

Distanța de la un punct la o dreaptă

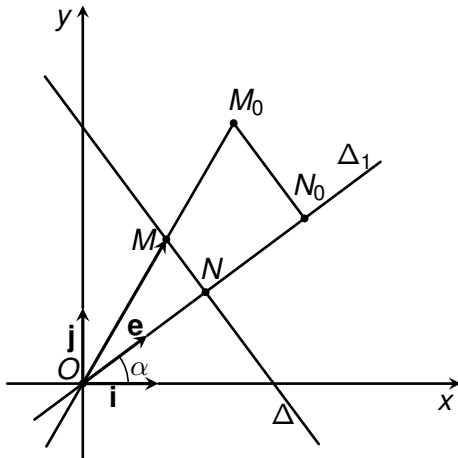
Fie Δ o dreaptă oarecare din plan.

Definiție

Se numește *distanță* de la un punct M_0 din plan până la dreapta Δ lungimea perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe dreapta Δ .

Considerăm acum un versor \mathbf{e} perpendicular pe dreapta Δ . Dacă Δ trece prin originea coordonatelor, atunci în calitate de \mathbf{e} putem lua oricare dintre cei doi versori (opuși) care sunt perpendiculari pe dreaptă. Dacă dreapta nu trece prin origine, atunci alegem acel versor \mathbf{e} , perpendicular pe dreapta Δ , care este orientat dinspre originea coordonatelor către dreaptă.

Distanța de la un punct la o dreaptă



Distanța de la un punct la o dreaptă

Notăm cu α unghiul dintre vectorii \mathbf{i} și \mathbf{e} . Atunci

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Fie Δ_1 dreapta care trece prin origine și care este perpendiculară pe dreapta Δ . Notăm cu N intersecția celor două drepte. Notăm, de asemenea, cu p distanța de la origine până la dreapta Δ , adică lungimea segmentului ON . Desigur, dacă dreapta Δ trece prin origine, atunci $N = O$ și $p = 0$.

Un punct $M(x, y)$ din plan aparține dreptei Δ dacă și numai dacă proiecția sa ortogonală pe dreapta Δ_1 coincide cu N . Această condiție este echivalentă cu condiția:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e} = p.$$

Distanța de la un punct la o dreaptă

Exprimând produsul scalar utilizând componentele vectorilor, obținem, prin urmare

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (30)$$

- Această ecuație se numește *ecuația normală* sau *ecuația normală Hesse* a drepte.
- Dreapta Δ împarte mulțimea tuturor punctelor din plan care nu îi aparțin în două submulțimi, numite *semiplane (deschise)*.
- Semiplanul care conține versorul \mathbf{e} , atunci când acesta este atașat punctului N , se numește *pozitiv*, iar celălalt semiplan se numește *negativ*.
- Originea coordonatelor se găsește totdeauna fie în semiplanul negativ, fie pe dreapta Δ .

Distanța de la un punct la o dreaptă

Definiție

Fie d distanța de la punctul M_0 până la dreapta Δ . Se numește *abatere* a punctului M_0 de la dreapta Δ numărul δ definit prin următoarele condiții:

- ① $\delta = d$ dacă punctul M_0 se află în semiplanul pozitiv;
- ② $\delta = -d$ dacă M_0 se află în semiplanul negativ;
- ③ $\delta = d = 0$ dacă M_0 se află pe dreapta Δ .

Distanța de la un punct la o dreaptă

Teorema

Să presupunem că în plan se dă o dreaptă Δ , prin ecuația ei normală (30). Atunci abaterea δ a unui punct oarecare $M_0(x_0, y_0)$ față de dreapta Δ și distanța d de la punct până la dreaptă sunt date de formulele:

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p, \quad (31)$$

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \quad (32)$$

Demonstrație.

Fie N_0 piciorul perpendicularei coborâte din M_0 pe dreapta Δ_1 . Din formula lui Chasles obținem că

$$\delta = (NN_0) = (ON_0) - (ON) = \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e} - p = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

Distanța de la un punct la o dreaptă

Demonstrație.

Formula (32) rezultă din formula (31), întrucât $d = |\delta|$. □

Formula (31) conduce la următoarea regulă: *pentru a obține abaterea unui punct oarecare M_0 față de o dreaptă, este suficient să înlocuim coordonatele punctului în membrul stâng al ecuației normale a dreptei. Numărul obținut pe această cale este abaterea căutată.*

Să presupunem acum că dreapta este dată prin ecuația sa generală,

$$Ax + By + C = 0, \quad (33)$$

și vrem să găsim ecuația sa normală (30). Cum ecuațiile (30) și (33) reprezintă aceeași dreaptă, coeficienții lor trebuie să fie proporționali, prin urmare:

$$\cos \alpha = \lambda A, \quad \sin \alpha = \lambda B, \quad -p = \lambda C. \quad (34)$$

Distanța de la un punct la o dreaptă

Din primele două relații din (34) obținem

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Potrivit celei de-a treia egalități din (34), rezultă că semnul lui λ trebuie să fie opus semnului termenului liber C din ecuația (33), dacă $C \neq 0$. Dacă $C = 0$, atunci λ poate să aibă orice semn. O schimbare de semn la λ aduce după sine schimbarea între ele a semiplanului pozitiv și a celui negativ. Numărul λ se numește *factor normalizator* pentru ecuația (33), pentru că, după înmulțirea cu el, ecuația devine normală. Pe baza celor remarcate, formulele pentru abaterea și distanța de la un punct $M_0(x_0, y_0)$ până la dreapta (33) se pot scrie

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (35)$$

Distanța de la un punct la o dreaptă

Să presupunem că se dă ecuația (33). Notăm

$$\delta' = \delta'(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Teorema

Pentru toate punctele din același semiplan determinat de dreapta (33), δ' are același semn, iar pentru punctele din semiplanul opus are semn contrar.

Demonstrație.

Afirmația acestei teoreme pentru ecuația normală

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax + By + C)$$

sau, cu alte cuvinte, pentru mărimea



Distanța de la un punct la o dreaptă

Demonstrație.

$$\delta(x_0, y_0) = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \delta'(x_0, y_0)$$

rezultă din teorema 2. Cum mărimile $\delta(x_0, y_0)$ și $\delta'(x_0, y_0)$ diferă doar printr-un factor constant, care nu depinde de punctul $M_0(x_0, y_0)$, rezultă că afirmația rămâne adevărată și pentru mărimea $\delta'(x_0, y_0)$. \square

Teorema precedentă permite stabilirea semnificației geometrice a inegalităților

$$Ax + By + C > 0, \quad (36)$$

$$Ax + By + C < 0, \quad (37)$$

care leagă variabilele x și y .

Distanța de la un punct la o dreaptă

Dacă x și y sunt coordonatele carteziane ale unui punct din plan, atunci inegalitatea (36) este verificată doar de coordonatele punctele planului situate într-unul dintre semiplanele deschise determinate de dreapta

$$Ax + By + C = 0.$$

Inegalitatea (37) este verificată de coordonatele punctelor situate în cel de-al doilea semiplan deschis și numai de ele. În mod corespunzător, inegalitățile

$$Ax + By + C \geq 0,$$

$$Ax + By + C \leq 0,$$

descriu câte un semiplan împreună cu semidreapta care îl mărginește (sau, cum se mai spune, câte un semiplan *închis*).

Distanța dintre două drepte paralele

Considerăm două drepte paralele, date prin ecuațiile lor generale

$$\Delta_1 : Ax + By + C_1 = 0 \quad (38)$$

și

$$\Delta_2 : Ax + By + C_2 = 0. \quad (39)$$

Am folosit faptul că, dreptele fiind paralele, putem presupune că ele au același vector normal, deci ecuațiile lor diferă doar prin termenul liber. Atunci *distanța dintre dreptele Δ_1 și Δ_2* este, prin definiție, distanța de la un punct al dreptei Δ_1 la dreapta Δ_2 . Dreptele fiind paralele, distanța nu depinde de alegerea punctului.

Distanța dintre două drepte paralele

Fie, prin urmare $M(x_M, y_M) \in \Delta_1$. Atunci coordonatele lui M verifică ecuația dreptei, deci trebuie să avem

$$Ax_M + By_M + C_1 = 0,$$

de unde deducem că $Ax_M + By_M = -C_1$. Atunci

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \Delta_2) = \frac{|Ax_M + By_M + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-C_1 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Astfel, *distanța dintre dreptele paralele (38) și (39) este dată de*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (40)$$

Distanța dintre două drepte paralele

Să presupunem, acum, că prima dreaptă este dată prin ecuația ei normală

$$\Delta_1 : x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0. \quad (41)$$

Atunci o dreaptă paralelă cu ea va avea ecuația e forma

$$\Delta_2 : x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_2 = 0, \quad (42)$$

dacă e situată de aceeași parte a originii sau

$$\Delta_2 : -x \cos \alpha - y \sin \alpha - p_2 = 0 \quad (43)$$

dacă originea se află între cele două drepte.

Distanța dintre două drepte paralele

Astfel, folosind formula (40) putem spune că *distanța dintre două drepte paralele, date prin ecuațiile lor normale, este dată de*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = |p_1 - p_2|, \quad (44)$$

dacă dreptele sunt situate de aceeași parte a originii sau

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = p_1 + p_2, \quad (45)$$

dacă originea este între cele două drepte.

Distanța dintre două drepte paralele

În sfârșit, să presupunem că cele două drepte sunt date prin ecuațiile lor explicite,

$$y = mx + n_1, \quad (46)$$

respectiv

$$y = mx + n_2. \quad (47)$$

Atunci, aducând aceste ecuații la forma generală, deducem imediat, folosind din nou formula (40), că *distanța dintre două drepte paralele, date prin ecuațiile lor explicite este*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|n_1 - n_2|}{\sqrt{1 + m^2}}. \quad (48)$$

Unghiul dintre două drepte

Să presupunem că se dau, în plan, două drepte, Δ_1 și Δ_2 , prin intermediul ecuațiilor lor generale:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (49)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (50)$$

După cum s-a văzut, în calitate de vectori directori ai acestor drepte pot fi luați vectorii $\mathbf{a}_1(-B_1, A_1)$ și $\mathbf{a}_2(-B_2, A_2)$. Prin urmare,

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (51)$$

Aici cu φ se notează unul dintre cele două unghiuri formate de cele două drepte. Dacă dreptele sunt paralele, atunci, prin convenție, se consideră că dreptele fac între ele un unghi egal cu zero.

Unghiul dintre două drepte

Din formula (48) rezultă, în particular, condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele (46) și (47) să fie perpendiculare:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (52)$$

Să presupunem acum că dreptele Δ_1 și Δ_2 sunt date nu prin ecuațiile generale ci cu ajutorul coeficienților unghiulari:

$$y = k_1 x + b_1, \quad (53)$$

$$y = k_2 x + b_2. \quad (54)$$

Notăm cu φ unghiul cu care trebuie rotită dreapta Δ_1 în jurul punctului de intersecție a dreptelor, pentru a se suprapune peste dreapta Δ_2 . Dacă dreptele sunt paralele, atunci vom considera că $\varphi = 0$.

Unghiul dintre două drepte

Fie α_1 și α_2 unghiurile pe care le fac cele două drepte cu axa Ox , adică avem $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Atunci $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ și avem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Astfel,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (55)$$

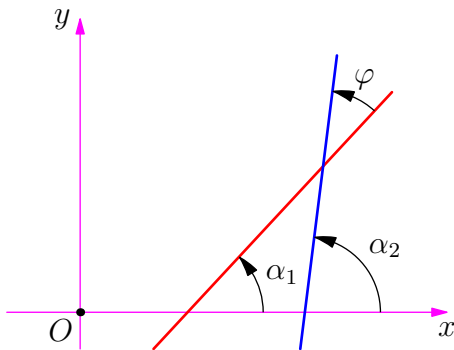
Din formula (52) se poate obține cu ușurință condiția de perpendicularitate a dreptelor (50) și (51). Ea corespunde cazului în care $\operatorname{tg} \varphi$ nu există, adică, în formula (52), se anulează numitorul:

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

Unghiul dintre două drepte

Astfel, condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele (50) și (51) să fie perpendiculare este ca

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (56)$$



Unghiul dintre două drepte

Unghiul ascuțit dintre două drepte

Cele două unghiuri pe care le fac două drepte sunt suplementare. Fie unul este ascuțit, iar celălalt este obtuz, fie ambele unghiuri sunt drepte.

Cum pentru orice unghi avem

$$\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi$$

este clar că formulele pentru determinarea unghiului ascuțit dintre două drepte sunt

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (57)$$

dacă dreptele se dau prin ecuațiile generale, respectiv

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad (58)$$

dacă dreptele se dau cu ajutorul pantelor

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuația generală

Considerăm două drepte, date prin ecuațiile

$$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad (59)$$

respectiv

$$L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0. \quad (60)$$

Presupunem că dreptele sunt concurente: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Bisectoare: *LG al punctelor din plan egal depărtate de cele două drepte*, deci

$$L_{\pm} : \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (61)$$

sau

$$L_{\pm} : \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \quad (62)$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuația generală

Dacă dreptele nu sunt perpendiculare, atunci ele formează un unghi ascuțit și unul obtuz. Cum determinăm care este bisectoarea unghiului ascuțit?

Să presupunem, de exemplu, că vrem să stabilim în ce condiții această bisectoare este L_+ . Dacă se întâmplă asta, atunci unghiul ascuțit θ pe care îl face L_1 cu L_+ trebuie să fie cel mult egal cu $\pi/4$. Ecuația dreptei L_+ este

$$L_+ : \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) x + \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) y + \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuația generală

Vectorul normal la L_+ este

$$\mathbf{n}_+ = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right),$$

iar vectorul normal la L_1 este $\mathbf{n}(a_1, b_1)$, deci cosinusul unghiului ascuțit dintre cele două drepte este

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_+|}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_+\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}. \quad (63)$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuația generală

L_+ este bisectoarea unghiului ascuțit dacă θ este mai mic de $\pi/4$. Cum pe intervalul $[0, 2\pi]$ funcția cosinus este descrescătoare, din formula (60) tragem următoarele concluzii:

- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 > 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuțit (deci L_- este bisectoarea unghiului obtuz).
- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, atunci dreptele sunt perpendiculare, deci bisectoarele joacă același rol.
- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 < 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz (deci L_- este bisectoarea unghiului ascuțit).

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuația normală

Să presupunem, din nou, că se dau două drepte neparalele, date prin ecuațiile lor normale:

$$L_1 : x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \quad (64)$$

$$L_2 : x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0. \quad (65)$$

Presupunem că $\alpha_1 \neq \alpha_2$, ca să ne asigurăm că dreptele nu sunt paralele. Atunci ecuațiile bisectoarelor sunt

$$L_{\pm} : |x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1| = |x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2| \quad (66)$$

sau

$$L_{\pm} : x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = \pm(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2). \quad (67)$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuația normală

Astfel, ecuațiile celor două bisectoare sunt:

$$L_+ : x(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) - p_1 + p_2 = 0, \quad (68)$$

respectiv

$$L_- : x(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) - p_1 - p_2 = 0. \quad (69)$$

Pentru a determina bisectoarea unghiului ascuțit, procedăm ca la punctul precedent, determinând unghiul ascuțit dintre L_1 și L_+ . Vectorii normali la cele două drepte sunt $\mathbf{n}_1(\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$ și

$$\mathbf{n}_+(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2, \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2).$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuația normală

De aceea, cosinusul unghiului ascuțit va fi dat de

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_+|}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_+\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Prin urmare,

- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ (adică unghiul $\alpha_1 - \alpha_2$ este ascuțit), atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuțit, deci L_- este bisectoarea unghiului obtuz.
- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, cele două drepte sunt perpendiculare și cele două bisectoare joacă același rol.
- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$ (adică unghiul $\alpha_1 - \alpha_2$ este obtuz), atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz, deci L_- este bisectoarea unghiului ascuțit.

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuații explicite

Considerăm dreptele

$$L_1 : y = m_1 x + n_1 \quad (70)$$

și

$$L_2 : y = m_2 x + n_2 \quad (71)$$

unde presupunem că $m_1 \neq m_2$, adică dreptele nu sunt paralele.

Vom reduce acest caz la cazul dreptelor date prin ecuațiile generale.

În acest scop, rescriem ecuațiile dreptelor sub forma

$$L_1 : m_1 x - y + n_1 = 0 \quad (72)$$

și

$$L_2 : m_2 x - y + n_2 = 0. \quad (73)$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuații explicite

Aplicăm discuția din cazul general, în care, de data aceasta, $a_1 = m_1$, $b_1 = -1$, $c_1 = n_1$, respectiv $a_2 = m_2$, $b_2 = -1$, $c_2 = n_2$. Atunci ecuațiile bisectoarelor vor fi

$$L_+ : \frac{m_1 x - y + n_1}{m_1^2 + 1} = \frac{m_2 x - y + n_2}{m_2^2 + 1}, \quad (74)$$

respectiv

$$L_- : \frac{m_1 x - y + n_1}{m_1^2 + 1} = -\frac{m_2 x - y + n_2}{m_2^2 + 1}, \quad (75)$$

iar

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = m_1 m_2 + 1. \quad (76)$$

Bisectoarele unghiurilor a două drepte

Drepte date prin ecuații explicite

Adaptând concluziile din cazul ecuațiilor generale, putem afirma următoarele:

- Dacă $m_1 m_2 + 1 > 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuțit, iar L_- este bisectoarea unghiului obtuz.
- Dacă $m_1 m_2 + 1 = 0$, atunci cele două drepte sunt perpendiculare, iar bisectoarele joacă același rol.
- Dacă $m_1 m_2 + 1 < 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz, iar L_- este bisectoarea unghiului ascuțit.

Simetricul unui punct față de o dreaptă

Definiție

Fie

$$L : ax + by + c = 0 \quad (77)$$

o dreaptă și $M(x_0, y_0)$ un punct din plan. *Simetricul* său față de dreapta L este fie punctul M însuși dacă $M \in L$, fie un punct $M'(x'_0, y'_0)$ din plan, astfel încât dreapta L să fie mediatoarea segmentului MM' . Mijlocul M_1 al segmentului MM' este *proiecția ortogonală* a lui M pe L .

- 1 Verificăm dacă $M \in L$. Dacă da, atunci $M' = M$.
- 2 Dacă $M \notin L$, atunci construim dreapta L' , care trece prin M și este perpendiculară pe L .
- 3 Determinăm punctul $M_1 = L \cap L'$.
- 4 Determinăm punctul M' astfel încât

$$M_1 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M'. \quad (78)$$

Simetricul unui punct față de o dreaptă

Presupunem că $M \notin L$. Vectorul director al dreptei L' , care trece prin M și este perpendiculară pe L este vectorul normal la dreapta L , $\mathbf{n}(a, b)$, ceea ce înseamnă că ecuația acestei drepte este

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \quad (79)$$

Coordonatele punctului M_1 se obțin rezolvând sistemul format din ecuațiile (74) și (76). Găsim

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b^2}{a^2 + b^2}x_0 - \frac{ab}{a^2 + b^2}y_0 - \frac{ac}{a^2 + b^2}, \\ y_1 = -\frac{ab}{a^2 + b^2}x_0 + \frac{a^2}{a^2 + b^2}y_0 - \frac{bc}{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (80)$$

Simetricul unui punct față de o dreaptă

Relația (75) înseamnă, când este scrisă în coordonate, că avem

$$(x_1, y_1) = \frac{1}{2}(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x'_0, y'_0),$$

de unde deducem, imediat, relațiile

$$\begin{cases} x'_0 = 2x_1 - x_0, \\ y'_0 = 2y_1 - y_0. \end{cases} \quad (81)$$

Dacă înlocuim relațiile (77) în (78), obținem coordonatele simetricului:

$$\begin{cases} x'_0 = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}x_0 - \frac{2ab}{a^2 + b^2}y_0 - \frac{2ac}{a^2 + b^2}, \\ y'_0 = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}x_0 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y_0 - \frac{2bc}{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (82)$$