Transformări geometrice în spaţiu

Paul A. Blaga

Universitatea “Babeş-Bolyai”

1 mai 2022

În acest capitol ne vom ocupa de variantele tridimensionale ale transformărilor afine descrise în capitolul precedent. Filozofia va fi, în esenţă, aceeaşi: vom stabilim mai întâi, în limba vectorial, regula de transformare a vectorilor, apoi, în acelaşi limbaj, regula de transformare a punctelor, apoi vom deduce matricea transformării. Matricele (omogene) ale transformărilor spaţiului sunt matrici de tip 4×4.

Translaţia

Din punct de vedere vectorial, dacă nu folosim coordonate, nu există nici o diferenţă între translaţia în spaţiu şi translaţia în plan. De aceea, nu vom mai repeta raţionamentul din cazul plan, atunci când vorbim despre forma vectorială a transformării.

Translaţia

Forma vectorială

Fie **w** un vector constant. Atunci translaţia de vector **w** acţionează pe vectori astfel:

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \tag{1}$$

adică se reduce la transformarea identică. În cazul punctelor, avem

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w})(P) = P + \mathbf{w}. \tag{2}$$

Forma matricială

Ecuaţia (2) se transcrie matricial ca

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w})(P) = I_3 \cdot P + \mathbf{w},$$

de unde rezultă matricea omogenă a transformării:

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

sau, în forma extinsă,

Translaţia

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Translaţia

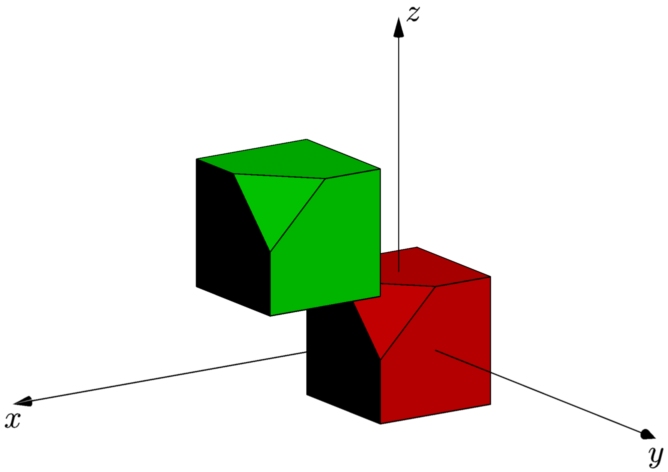

Figura: Translaţia unui cub (proiecţie ortografică)

Translaţia

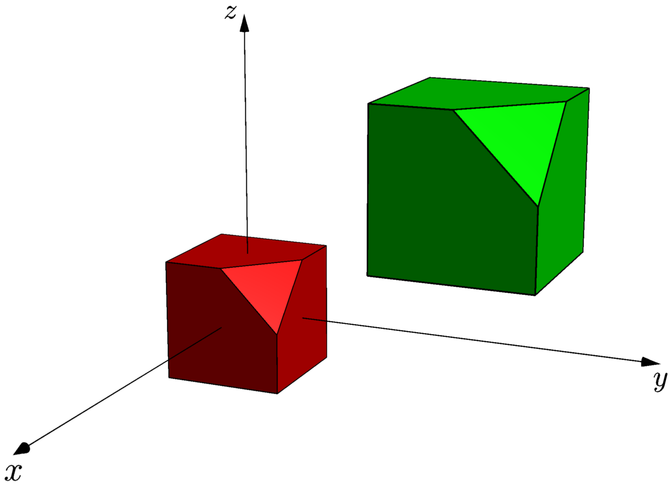

Figura: Translaţia unui cub (proiecţie perspectivă)

Rotaţia în jurul unei axe

Fie Q un punct din spaţiu şi $\mathbf{u}$ un versor. Vrem să determinăm expresia pentru rotaţia de unghi θ unui punct oarecare în jurul axei Δ determinate de punctul Q şi versorul $\mathbf{u}$.

Forma vectorială

Ca de obicei, vom stabili mai întâi formula de transformare pentru vectori. Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare. Folosind o tehnică ce am mai utilizat-o, descompunem vectorul ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \tag{5}$$

unde $\mathbf{v}_{\parallel}$ este componenta lui $\mathbf{v}$ paralelă cu $\mathbf{u}$, în timp ce $\mathbf{v}_{\perp}$ este componenta perpendiculară pe $\mathbf{u}$.

Dacă aplicăm rotaţia vectorului $\mathbf{v}$, componenta $\mathbf{v}_{\parallel}$ rămâne nemodificată, deci putem să ne concentrăm asupra componente $\mathbf{v}_{\perp}$.

Rotaţia în jurul unei axe

Această componentă poate fi fixată într-un plan perpendicular pe **u**, iar prin rotaţie, ea rămâne în acest plan. Prin urmare, rotaţia 3D a vectorului **v** în jurul axei Δ se reduce la o rotaţie plană a vectorului $\mathbf{v}_\perp$. Ne aducem aminte de formula pentru rotaţia de unghi θ a unui vector **w** situat într-un plan:

$$\mathbf{w}' = \cos\theta\mathbf{w} + \sin\theta\mathbf{w}^\perp.$$

Vectorul $\mathbf{w}^\perp$ este rotitul cu 90° al vectorului **w**. E suficient, prin urmare, să identificăm rotitul cu 90° al vectorului $\mathbf{v}_\perp$, în planul perpendicular pe **u** pe care l-am considerat. E uşor de constatat că acest vector este $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$. Într-adevăr, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$ este perpendicular atât pe **u**, cât şi pe $\mathbf{v}_\perp$, deci e situat în planul corespunzător. Cum **u** şi $\mathbf{v}_\perp$ sunt perpendiculari, unghiul dintre ei este 90°, iar, **u** fiind un versor, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp\| = \|\mathbf{v}_\perp\|$, ceea ce înseamnă că $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$ este, într-adevăr, rotitul cu 90° al lui $\mathbf{v}_\perp$.

Rotaţia în jurul unei axe

Prin urmare,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_\perp) = \cos\theta \cdot \mathbf{v}_\perp + \sin\theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp),$$

iar

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_\perp) = \mathbf{v}_\parallel + \cos\theta \cdot \mathbf{v}_\perp + \sin\theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp),$$

Pe de altă parte,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Aşadar,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \cos\theta\cdot(\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot[\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u})]$$

sau

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = \cos\theta \cdot \mathbf{v} + (1 - \cos\theta) \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \sin\theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \tag{6}$$

unde am folosit faptul că $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$.

Rotaţia în jurul unei axe

Fie, acum, P un punct oarecare din spaţiu. Ca de obicei, scriem $P = Q + (P - Q) = Q + \overrightarrow{QP}$. Atunci

$$\mathrm{Rot}(Q, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \mathrm{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\overrightarrow{QP}), \tag{7}$$

de unde, folosind (6), obţinem

$$\mathrm{Rot}(Q, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \cos\theta \cdot \overrightarrow{QP} + (1 - \cos\theta) \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \sin\theta \cdot (\mathbf{u} \times \overrightarrow{QP}). \tag{8}$$

Formula (8) se numeşte *formula lui Rodrigues*, după numele matematicianului francez care a descoperit-o.

Plecăm de la formula (6), pe care vrem să o scriem matricial. Singura parte care ne poate crea probleme este produsul vectorial $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Pentru un vector $\mathbf{u}$ fixat, definim operatorul liniar de matrice

$$\mathbf{u}\times - = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Un calcul simplu ne arată acum că

$$(\mathbf{u}\times -)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}. \tag{10}$$

Cu acest artificiu, obţinem

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = [\cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times -)]\cdot\mathbf{v},$$

de unde rezultă că matricea rotaţiei vectorilor este

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) = \cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times -). \tag{11}$$

Rotaţia în jurul unei axe

Forma matricială

Din formula (7) rezultă acum că

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)(P)=\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)\cdot\mathbf{P}+(I_3-\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta))\cdot\mathbf{Q}. \tag{12}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei este

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)=\begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) & (I_3-\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta))\cdot\mathbf{Q}\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Exemple

- O rotaţie relativ la origine va avea matricea

$$\mathrm{Rot}(\mathit{Origine},\mathbf{u},\theta)=\begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Exemple

- Rotaţia relativ la origine în jurul axei *Ox* este similară cu ceea ce se întîmplă în plan. Mai precis, în acest caz avem, înainte de toate,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta)=\cos\theta\cdot I_3+(1-\cos\theta)(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i})+\sin\theta\cdot(\mathbf{i}\times -). \tag{14}$$

Dar

$$\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{i}\times - =\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

Exemple

deci formula (14) se transformă în

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta)=\cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei *Ox* este:

$$\mathrm{Rot}(\mathit{Origine},\mathbf{i},\theta)=\begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta)&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta&0\\0&\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Rotaţia în jurul unei axe

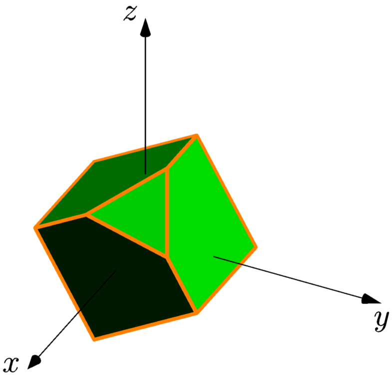

Figura: Imaginea cubului printr-o rotaţie în jurul axei Ox

Exemple

- **Rotaţia relativ la origine în jurul axei Oy.** Avem, mai întâi,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta) = \cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{j}\times -). \tag{16}$$

Dar

$$\mathbf{j}\otimes\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{j}\times - = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

deci formula (16) se transformă în

Rotaţia în jurul unei axe

Forma matricială

Exemple

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta)=\cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+(1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oy este:

$$\mathrm{Rot}(\mathit{Origine},\mathbf{j},\theta)=\begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Rotaţia în jurul unei axe

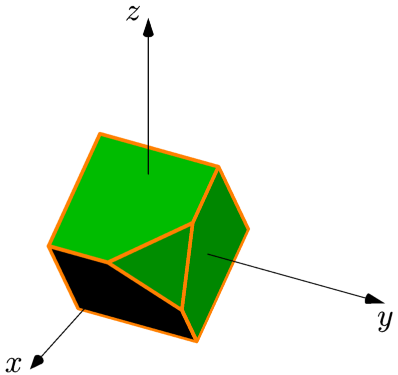

Figura: Imaginea cubului printr-o rotaţie în jurul axei Oy

Exemple

- **Rotaţia relativ la origine în jurul axei *Oz*.** Avem, mai întâi,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{k},\theta)=\cos\theta\cdot I_3+(1-\cos\theta)(\mathbf{k}\otimes\mathbf{k})+\sin\theta\cdot(\mathbf{k}\times -). \tag{18}$$

Dar

$$\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{k}\times - =\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

deci formula (18) se transformă în

Exemple

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta) = \cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei *Oz* este:

$$\mathrm{Rot}(\mathit{Origine},\mathbf{k},\theta) = \begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{k},\theta) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (19)$$

Rotaţia în jurul unei axe

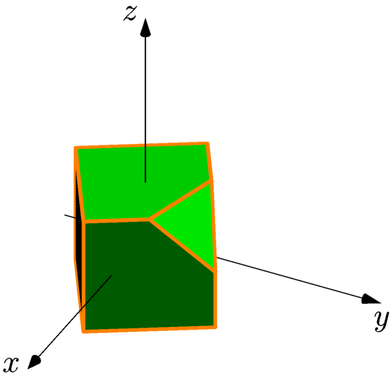

Figura: Imaginea cubului printr-o rotaţie în jurul axei Oz

Scalarea simplă uniformă

Ne interesează scalarea de factor s, relativ la punctul Q.

Forma vectorială

Scalarea vectorilor se face foarte simplu:

$$\mathrm{Scale}(s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \tag{20}$$

Cum, dacă P este un punct arbitrar din spaţiu, $P = Q + (Q - P) = Q + \overrightarrow{QP}$, avem

$$\mathrm{Scale}(Q, s)(P) = Q + \mathrm{Scale}(s)(\overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\mathrm{Scale}(Q, s) = Q + s \cdot \overrightarrow{QP}. \tag{21}$$

Scalarea simplă uniformă

Forma matricială

Determinăm, mai întâi, ca de obicei, forma matricială a scalării vectrilor şi obţinem, din (20),

$$\mathrm{Scale}(s)(v) = s \cdot I_3 \cdot \mathbf{v}.$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme a vectorilor, de factor s, este

$$\mathrm{Scale}(s) = s \cdot I_3. \tag{22}$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Scale}(Q, s)(P) = Q + \mathrm{Scale}(s) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\mathrm{Scale}(Q, s)(P) = \mathrm{Scale}(s) \cdot P + (I_3 - \mathrm{Scale}(s)) \cdot Q = s \cdot I_3 \cdot P + (1 - s) \cdot I_3 \cdot Q. \tag{23}$$

Scalarea uniformă

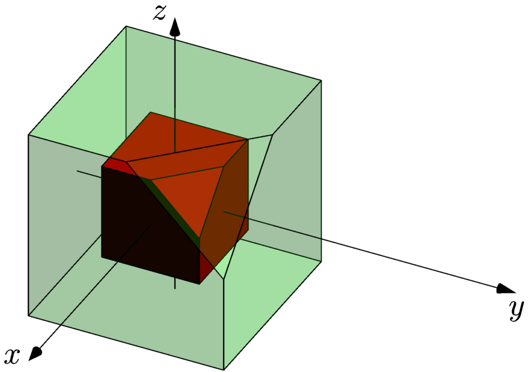

Figura: Scalarea uniformă a cubului

Scalarea simplă uniformă

Forma matricială

Aşadar, matricea omogenă a scalării simple uniforme relativ la punctul Q, de factor s, este

$$\mathrm{Scale}(Q,s)=\begin{pmatrix} s\cdot I_3 & (1-s)\cdot I_3\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

sau, explicit,

$$\mathrm{Scale}(Q,s)=\begin{pmatrix} s & 0 & 0 & (1-s)\cdot q_x \\ 0 & s & 0 & (1-s)\cdot q_y \\ 0 & 0 & s & (1-s)\cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Scalarea simplă neuniformă

Forma vectorială

Considerăm o scalare de factori s_x, s_y, s_z de-a lungul axelor de coordonate, relativ la un punct Q.
Fie $\mathbf{v}$ un vector din spaţiu. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}, \ \mathbf{v}_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}, \ \mathbf{v}_z = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}$. Atunci,

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}_x) + \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}_y) + \mathrm{Scale}(s_x, s$$

adică

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + s_z \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}. \quad (26)$$

Dacă P e un punct,

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = \mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

Scalarea simplă neuniformă
Forma vectorială

adică

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + s_z \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}. \tag{27}$$

Scalarea simplă neuniformă

Forma matricială

Din (26) obţinem forma matricială a transformării vectorilor

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = s_x\,(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i})\cdot\mathbf{v} + s_y\,(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j})\cdot\mathbf{v} + s_z\,(\mathbf{k}\otimes\mathbf{k})\cdot\mathbf{v},$$

de unde rezultă matricea transformării:

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z) = s_x\,(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}) + s_y\,(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}) + s_z\,(\mathbf{k}\otimes\mathbf{k})\,. \tag{28}$$

După cum am văzut mai devreme,

$$\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{j}\otimes\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{k}\otimes\mathbf{k} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

deci formula (28) se poate rescrie ca

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & s_z\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Ca să găsim matricea transformării punctelor, scriem $P = Q + (P - Q)$, deci

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P) = Q + \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P - Q)$$

sau

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z) \cdot P + \left(I_3 - \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)\right) \cdot Q, \tag{30}$$

prin urmare, matricea transformării va fi

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z) & \left(I_3 - \mathrm{Scale}(s_x, s_y, s_z)\right) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

sau, în forma completă,

Scalarea simplă neuniformă

Forma matricială

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & (1 - s_x)\cdot q_x \\ 0 & s_y & 0 & (1 - s_y)\cdot q_y \\ 0 & 0 & s_z & (1 - s_z)\cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Scalarea neuniformă

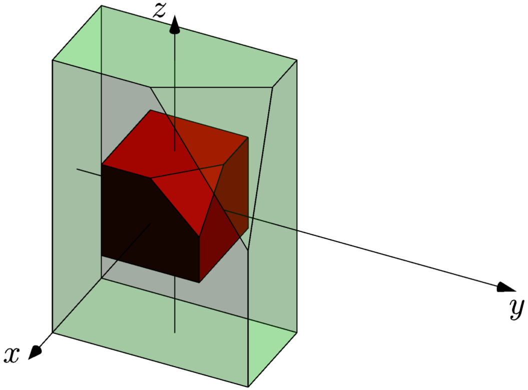

Figura: Scalarea neuniformă a cubului

Reflexia faţă de un plan

Forma vectorială

Reflexia faţă de un plan, în spaţiu, este perfect analogă cu reflexia faţă de o dreaptă în plan şi modalitateatea de a obţine expresia ei este similară. De data asta datele sunt: un punct Q şi un plan Π care trece prin el, descris prin intermediul versorului planului normal, $\mathbf{n}$.

Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din spaţiu. Descompunem vectorul

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}, \tag{33}$$

unde $\mathbf{v}_{\|}$ este un vector paralel cu vectorul $\mathbf{n}$ (adică perpendicular pe planul Π), în timp ce vectorul $\mathbf{v}_{\perp}$ este perpendicular pe vectorul $\mathbf{n}$ (adică este paralel cu planul Π).

Reflexia faţă de planul Π a vectorului $\mathbf{v}_{\perp}$ coincide, evident, cu vectorul însuşi:

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}.$$

Prin urmare, trebuie să de preocupăm doar de cealaltă componentă, perpendiculară pe plan. Dar, iarăşi în mod evident,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\parallel}) = -\mathbf{v}_{\parallel}.$$

Ca urmare,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{v}_{\parallel}.$$

Dar

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n},\ \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel},$$

deci, în final,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \tag{34}$$

Fie, acum, P un punct din spaţiu. Atunci $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + \mathrm{Mirror}(\mathbf{n})\left(\overrightarrow{QP}\right)$$

sau

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2\left(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{n}. \tag{35}$$

Reflexia faţă de un plan

Forma matricială

Scriem, mai întâi, matricial transformarea pentru vectori. Relaţia (34) se transformă, după cum se poate constata uşor, în

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v},$$

prin urmare, matricea transformării vectorilor este

$$\text{Mirror}(\mathbf{n}) = I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \tag{36}$$

Pentru a găsi matricea omogenă a transformării pentru puncte, scriem $P = Q + (P - Q)$ şi obţinem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + (P - Q) - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = (I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \cdot P + 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot Q.$$

Reflexia faţă de un plan

Forma matricială

Aşadar, matricea omogenă a reflexiei faţă de planul Π este:

$$\operatorname{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) & 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

sau, în forma extinsă,

$$\operatorname{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1 n_2 & -2n_1 n_3 & 2(n_1 n_3 q_3 + n_1 n_2 q_2 + n_1^2 q_1) \\ -2n_1 n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2 n_3 & 2(n_2 n_3 q_3 + n_2^2 q_2 + n_1 n_2 q_1) \\ -2n_1 n_3 & -2n_2 n_3 & 1 - 2n_3^2 & 2(n_3^2 q_3 + n_2 n_3 q_2 + n_1 n_3 q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Reflexia faţă de un plan

Exemple

- **Simetria faţă de planul** xOy**.** În acest caz, $Q = O(0,0,0), \mathbf{n} = \mathbf{k}$ şi obţinem:

$$R_{xy} = \text{Mirror}(O, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

- **Simetria faţă de planul** xOz**.** De data aceasta, $Q = O(0,0,0), \mathbf{n} = \mathbf{j}$ şi obţinem:

$$R_{xz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

- **Simetria faţă de planul *yOz*.** Acum, $Q = O(0,0,0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ şi obţinem:

$$R_{yz} = \mathrm{Mirror}(O, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Reflexia faţă de un plan

Plan în forma generală

Să presupunem că ecuaţia planului este

$$\Pi: \; ax + by + cz + d = 0.$$

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $a \neq 0$. Atunci planul Π este planul care are ca vector normal

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c),$$

şi putem lua

$$Q = (-d/a, 0, 0).$$

Dacă înlocuim în formula (38), obţinem

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n}) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} -a^2+b^2+c^2 & -2ab & -2ac & -2ad \\ -2ab & a^2-b^2+c^2 & -2bc & -2bd \\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2 & -2cd \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Reflexia faţă de un plan

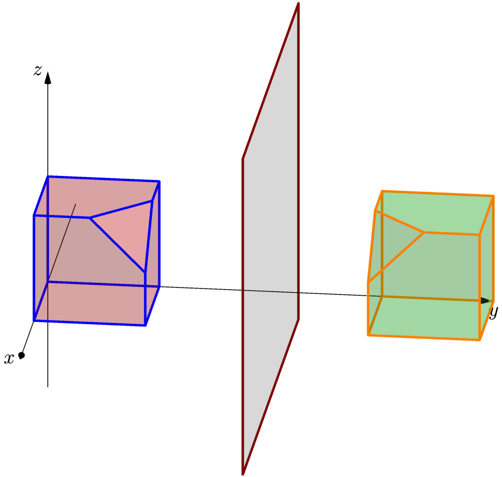

Figura: Reflexia faţă de un plan a cubului

Forfecarea în spaţiu

Fie Π un plan în spaţiu, $Q \in \Pi$ un punct dat, **u** – un versor paralel cu planul Π şi θ un unghi. Dacă P este un punct oarecare din spaţiu, îl proiectăm ortogonal pe planul Π într-un punct $P' \in S$. Acum mutăm punctul P paralel cu vectorul **u** într-un punct P^{new}, astfel încât $\angle P^{\text{new}} P' P = \theta$. Vom spune că punctul P^{new} a fost obţinut din punctul P printr-o *forfecare paralelă cu planul* Π*, relativ la punctul Q, în direcţia versorului* **u***, de unghi* θ. Vom scrie

$$P^{\text{new}} = \mathsf{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P),$$

unde **n** este versorul normal la planul Π (prin urmare, Q şi **n** determină în mod unic planul Π).

Fie **v** un vector oarecare din $\mathbb{R}^3$. Îl descompunem ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp},$$

unde $\mathbf{v}_{||}$ este un vector paralel cu **u**, în timp ce $\mathbf{v}_{\perp}$ este un vector perpendicular pe **u**, adică un vector paralel cu vectorul normal **n**. Atunci

$$\begin{aligned}\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) &= \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{||}) + \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \\ &= \mathbf{v}_{||} + \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}).\end{aligned}$$

Un raţionament simplu ne arată că

$$\begin{aligned}\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}) &= \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\left((\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right) = \\ &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\,(\mathbf{n}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,(\mathbf{n} + \mathrm{tg}\,\theta\cdot\mathbf{u})\,.\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{v}_{||} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}.$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}. \tag{43}$$

Dacă vrem să determinăm forma transformării pentru un punct P, scriem

$$\mathrm{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \mathrm{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\mathrm{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + \operatorname{tg}\theta \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}. \tag{44}$$

Pentru forma matricială a transformării pe vectori deducem imediat, cum am mai făcut-o înainte, că

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$$

sau

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = (I_3 + \operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}))\cdot\mathbf{v}, \tag{45}$$

ceea ce înseamnă că matricea părţii vectoriale a forfecării este

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) = I_3 + \operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}). \tag{46}$$

Pentru a determina matricea omogenă de transformare a punctelor, plecăm de la relaţia

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(P) = Q + \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\cdot(P-Q) = \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\cdot P + \\ + (I_3 - \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta))\cdot$$

sau, dacă explicităm,

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(P) = (I_3 + \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}))\cdot P - \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot Q. \quad (47)$$

De aici deducem că matricea omogenă a forfecării este

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} I_3 + \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}) & -\operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Matricea extinsă este

$$\operatorname{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)=$$
$$=\begin{pmatrix} 1+n_1u_1\operatorname{tg}\theta & n_2u_1\operatorname{tg}\theta & n_3u_1\operatorname{tg}\theta & \begin{matrix}-\operatorname{tg}\theta(n_3u_1q_3+\\ n_2u_1q_2+n_1u_1q_1)\end{matrix}\\ n_1u_2\operatorname{tg}\theta & 1+n_2u_2\operatorname{tg}\theta & n_3u_2\operatorname{tg}\theta & \begin{matrix}-\operatorname{tg}\theta(n_3u_2q_3+\\ n_2u_2q_2+n_1u_2q_1)\end{matrix}\\ n_1u_3\operatorname{tg}\theta & n_2u_3\operatorname{tg}\theta & 1+n_3u_3\operatorname{tg}\theta & \begin{matrix}-\operatorname{tg}\theta(n_3u_3q_3+\\ n_2u_3q_2+n_1u_3q_1)\end{matrix}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{49}$$

În particular, forfecarea de-a lungul axei *Ox*, paralel cu planul *xOy* este dată de matricea

$$\mathrm{Shear}(O, \mathbf{k}, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \operatorname{tg}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forfecarea de-a lungul axei *Oy*, paralel cu planul *xOy* este dată de matricea

$$\mathrm{Shear}(O, \mathbf{k}, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \operatorname{tg}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forfecarea cubului

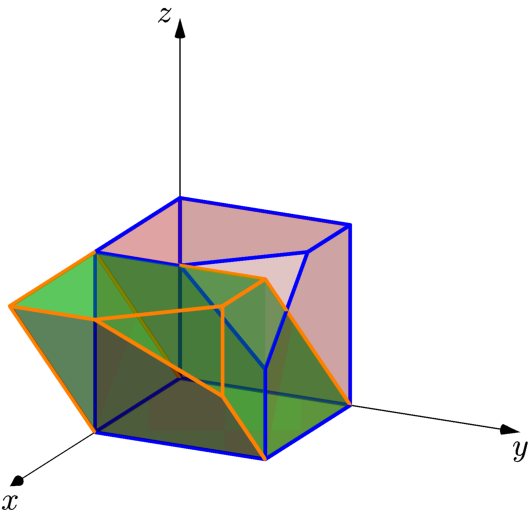

Figura: Forfecarea cubului