SEMINARUL 3

Produsul vectorial şi produsul mixt

Problema 3.1. Determinaţi $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dacă $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ şi $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

Problema 3.2. Se dau vectorii $\mathbf{a}(3, -1, -2)$ şi $\mathbf{b}(1, 2, -1)$. Să se calculeze:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b},\ (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b},\ (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Problema 3.3. Determinaţi distanţele dintre laturile paralele ale paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{AB}(6, 0, 2)$ şi $\overrightarrow{AC}(1.5, 2, 1)$.

Problema 3.4. Determinaţi vectorul $\mathbf{p}$, ştiind că el este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a}(2, 3, -1)$ şi $\mathbf{b}(1, -1, 3)$ şi verifică ecuaţia

$$\mathbf{p} \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 51.$$

Problema 3.5. Se dau punctele $A(1, 2, 0), B(3, 0, -3)$ şi $C(5, 2, 6)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Problema 3.6. Se dau punctele $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2)$ şi $C(1, 3, -1)$. Determinaţi lungimea înălţimii triunghiului ABC, coborâte din vârful B pe latura AC a triunghiului.

Problema 3.7. Se dau vectorii $\mathbf{a}(2, -3, 1)$, $\mathbf{b}(-3, 1, 2)$ şi $\mathbf{c}(1, 2, 3)$. Să se calculeze $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ şi $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Problema 3.8. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Demonstraţi că dacă diagonala AC înjumătăţeşte diagonala BD, atunci triunghiurile ACB şi ACD au arii egale.

Problema 3.9. Fie P şi Q mijloacele laturilor neparalele BC şi AD ale unui trapez $ABCD$. Demonstraţi că triunghiurile APD şi CQB au aceeaşi arie.

Problema 3.10. Vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt vectorii de poziţie ai vârfurilor unui triunghi ABC relativ la un punct O. Determinaţi aria triunghiului ABC în funcţie de aceşti vectori.

Problema 3.11. Stabiliţi dacă tripletul de vectori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept sau stâng, dacă

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j},\ \mathbf{c} = \mathbf{k}.$$

Problema 3.12. Demonstraţi că punctele $A(1, 2, -1), B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ şi $D(2, 1, 3)$ sunt situate într-un acelaşi plan.

Problema 3.13. Determinaţi volumul tetraedrului care are vârfurile în punctele $A(2,-1,1), B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ şi $D(4,1,3)$.

Problema 3.14. Un tetraedru de volum 5 are ca trei dintre vârfuri punctele $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ şi $C(2,-1,3)$. Al patrulea vârf, D, este situat pe axa Oy. Determinaţi coordonatele punctului D.

Problema 3.15. Se dau trei vectori $\mathbf{a}(8,4,1)$, $\mathbf{b}(2,2,1)$ şi $\mathbf{c}(1,1,1)$. Să se determine vectorul $\mathbf{d}$, de lungime 1, care formează cu vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ unghiuri egale, este perpendicular pe vectorul $\mathbf{c}$ şi este orientat în aşa fel încât tripletele de vectori $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ şi $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}$ au aceeaşi orientare (sunt ambele drepte sau ambele stângi).

Problema 3.16. Se dau doi vectori $\mathbf{a}(11,10,2)$ şi $\mathbf{b}(4,0,3)$. Să se găsească un vector unitar $\mathbf{c}$, ortogonal la vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, astfel încât tripletul de vectori $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ să fie drept.

Problema 3.17. Fie ABC un triunghi şi fie E şi F mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Prin C se duce o paralelă la AB care întâlneşte BE în P. Demonstraţi că

$$\text{Aria}\,\triangle FEP = \text{Aria}\,\triangle FCE = \frac{1}{4}\triangle ABC.$$

Problema 3.18. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan. Demonstraţi că

$$\text{Aria}\,ABCD = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right\|.$$

Problema 3.19. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan astfel încât

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{AD}=\mathbf{d},\ \overrightarrow{AC}=m\mathbf{b}+p\mathbf{d},$$

unde m şi p sunt două numere reale. Demonstraţi că aria patrulaterului este dată de formula

$$\text{Aria}\,ABCD = \frac{1}{2}|m+p|\cdot\|\mathbf{b}\times\mathbf{d}\|.$$

Problema 3.20. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan astfel încât $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ şi $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$, atunci aria patrulaterului este dată de formula

$$\text{Aria}\,ABCD = \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\mathbf{a}\|.$$

Problema 3.21. Determinaţi ariile triunghiurilor cu vârfurile în punctele de coordonate:

(a) $(0,0,0),(1,2,3)$ şi $(2,-1,4)$;

(b) $(1,0,0),(0,1,0)$ şi $(1,1,1)$;

(c) $(-1,2,3),(2,-1,-1)$ şi $(1,1,-1)$;

(d) $(a,0,0),(0,b,0)$ şi $(0,0,c)$.

Problema 3.22. Determinaţi volumele tetraedrelor cu vârfurile în punctele de coordonate:

(a) $(0,0,0),(1,1,-1),(1,-1,1)$ şi $(-1,1,1)$;

(b) $(-1,0,1),(2,-1,0),(3,2,5)$ şi $(1,2,1)$.

Problema 3.23. Demonstraţi că volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele de coordonate (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_2) şi (x_4,y_4,z_4) este egal cu valoarea absolută a numărului

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}.$$

Problema 3.24. Demonstraţi că volumul tetraedrului ale căror vârfuri au vectorii de poziţie $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$ este dat de formula

$$\mathrm{Vol} = \frac{1}{6}\left|(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}.\mathbf{b}, \mathbf{c})\right|.$$

Deduceţi, de aici, un criteriu pentru coplanaritatea punctelor cu vectorii de poziţie $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$.