(a)

Metoda presupune construirea unui polinom de interpolare de gradul II folosind punctele date si apoi inversarea acestuia pentru a gasi solutia aproximativa a ecuatiei $f(x) = 0$.

Alegem trei puncte initiale (x_0, y_0), (x_1, y_1) și (x_2, y_2) unde $y_i = f(x_i)$.

Construim polinomul interpolant in forma Newton. Forma Newton a polinomului de interpolare pentru trei puncte este:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1),$$

unde $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$ și $f[x_0, x_1, x_2]$ sunt diferentele divizate calculate cu urmatoarele formule:

$$f[x_0] = y_0,$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

și

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right) - \left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)}{x_2 - x_0} = \frac{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) - \left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)}{x_2 - x_0}.$$

Construim interpolarea inversa. Vrem un polinom de interpolare inversa $Q(y)$ pentru a inversa relatia $y = P_2(x)$:

$$Q(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2.$$

Construim sistemul de 3 ecuatii, stiind ca y_0, y_1, y_2 reprezinta valorile functiei in punctele initiale x_0, x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_0 = a_0 + a_1 y_0 + a_2 y_0^2 \\ x_1 = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 \\ x_2 = a_0 + a_1 y_2 + a_2 y_2^2 \end{cases}$$

pentru a determina coeficientii a_0, a_1, a_2.

Se rezolva sistemul de 3 ecuatii, solutiile sale dandu-ne valorile coeficientilor a_0, a_1, a_2.

Determinam solutia: $x \approx Q(0) = a_0$.

(b)

Presupunem ca α este radacina exacta a ecuatiei $f(x) = 0$. Consideram trei puncte initiale x_0, x_1 si x_2 apropiate de radacina α astfel incat sa putem folosi interpolarea de gradul II pentru a aproxima radacina.

Fie eroarea la pasul n: $e_n = x_n - \alpha$

Construim un polinom de interpolare $P_2(x)$ de gradul II si apoi il inversam pentru a gasi solutia aproximativa a ecuatiei $f(x) = 0$.

Polinomul de interpolare $P_2(x)$ în forma Newton este:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Pentru interpolarea inversa, construim polinomul:

$$Q(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2,$$

unde coeficientii a_0, a_1 și a_2 sunt determinati prin interpolarea inversa a valorilor $y_i = f(x_i)$.

Pentru a analiza ordinul de convergenta, studiem comportamentul erorii in iteratiile succesive. e_n reprezinta eroarea la pasul n. La fiecare pas, interpolarea inversa de gradul II genereaza un polinom care aproximeaza radacina. Pentru ca metoda foloseste un polinom de gradul II, ordinul de convergenta al metodei este legat de comportamentul erorii de interpolare de gradul II.

$$x_{n+1} = x_n + c e_n^p,$$

unde p este ordinul de convergenta si c este o constanta.

Pentru interpolarea de gradul II, eroarea de interpolare este proportionala cu cubul distantei dintre punctele de interpolare, adica e_n^3. Aceasta inseamna ca metoda are un ordin de convergenta cubic.

$$e_{n+1} = C e_n^3,$$

unde C este o constanta ce depinde de funcția f si de punctele de interpolare.

Ordinul de convergență al metodei de rezolvare a ecuației neliniare folosind interpolarea inversă Lagrange de gradul II în forma Newton este cubic (de ordinul 3). Adica

$$e_{n+1} = C e_n^3$$