Interpolare spline

Interpolare polinomială pe porțiuni

Radu Trîmbițaș

UBB

4 aprilie 2022

Convergența interpolării polinomiale I

- Să definim ce înțelegem prin convergență.
- Presupunem că se dă un tablou triunghiular de noduri de interpolare $x_i = x_i^{(m)}$, având exact $m+1$ noduri distincte pentru orice $m = 0, 1, 2, \dots$.

$$\begin{array}{ccccc}
x_0^{(0)} & & & & \\
x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & & \\
x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_0^{(m)} & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \dots & x_m^{(m)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array} \tag{1}$$

- Presupunem că toate nodurile sunt conținute într-un interval finit $[a, b]$.

Convergența interpolării polinomiale II

- Atunci pentru orice m definim

$$p_m(x) = (L_m f)\left(x; x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\right), \quad x \in [a, b]. \tag{2}$$

- Spunem că interpolarea Lagrange bazată pe tabelul de noduri (1) converge dacă

$$p_m(x) \rightrightarrows f(x), \text{ când } n \to \infty \text{ pe } [a, b]. \tag{3}$$

- În general, procedeul interpolarii Lagrange diverge.

Exemplul 1 (Contraexemplul lui Runge)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5],$$
$$x_k^{(m)} = -5 + 10\frac{k}{m}, \quad k = \overline{0, m}. \tag{4}$$

Nodurile sunt echidistante pe $[-5, 5]$*, deci asimptotic uniform distribuite. Observăm că* f *are doi poli în* $z = \pm i$*. Se poate demonstra că*

$$\lim_{m\to\infty} |f(x) - p_m(f; x)| = \begin{cases} 0 & \textit{dacă} \quad |x| < 3.633\ldots \\ \infty & \textit{dacă} \quad |x| > 3.633\ldots \end{cases} \tag{5}$$

Graficul pentru $m = 10, 13, 16$ *apare în figura 1.*

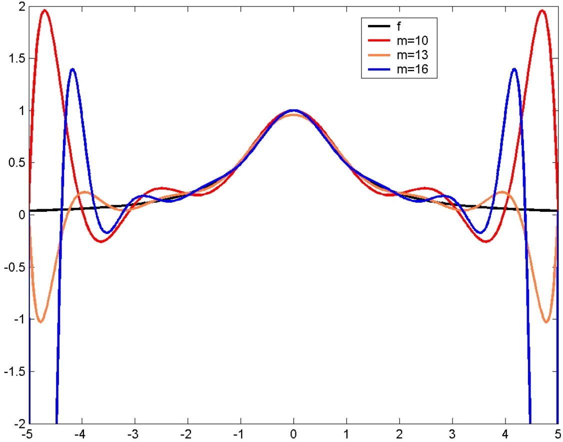


Figura: O ilustrare grafică a contraexemplului lui Runge

Exemplul 2 (Contraexemplul lui Bernstein)

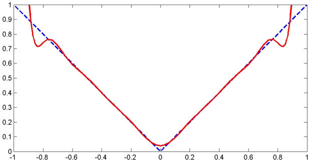
$$f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]$$

$$x_k^{(m)} = -1 + \frac{2k}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{6}$$

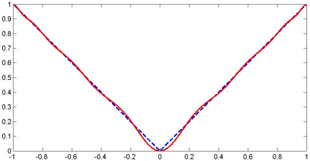
Problema analiticității nu se pune, deoarece f nu este derivabilă în $x = 0$. Se obține că

$$\lim_{m \to \infty} |f(x) - L_m(f; x)| = \infty \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

exceptând punctele $x = -1$, $x = 0$ și $x = 1$. Vezi figura 7, pentru $m = 20$. Convergența în $x = \pm 1$ este trivială deoarece acestea sunt noduri de interpolare și deci eroarea în aceste puncte este 0. Același lucru este adevărat pentru $x = 0$, când n este impar, dar nu și când n este par. Eșecul convergenței pentru aceste noduri se explică doar parțial prin insuficiența regularității a lui f. Un alt motiv este distribuția uniformă a nodurilor. Există exemple mai bune de distribuții ale nodurilor (noduri Cebîșev). În figura 7 se dă graficul pentru $m = 17$.



Noduri echidistante



Noduri Cebîșev

Introducere

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$

$$\Delta: \ a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{7}$$

Vom utiliza un polinom de grad mic pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$. Motivul este acela că pe intervale suficient de mici funcțiile pot fi aproximate arbitrar de bine prin polinoame de grad mic, chiar 0 sau 1. Am introdus deja spațiul

$$\mathbb{S}_m^k(\Delta) = \{s: \ s \in C^k[a, b], \ s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i = 1, 2, \dots, n-1\} \tag{8}$$

$m \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, numit spațiul funcțiilor spline polinomiale de grad m și clasă de netezime k. Dacă $k = m$, atunci funcțiile $s \in \mathbb{S}_m^m(\Delta)$ sunt polinoame de grad m.

Spline liniare I

Pentru $m = 1$ și $k = 0$ se obțin spline liniare.
Dorim să găsim $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f_i, \text{ unde } f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Soluția este trivială, vezi figura 2. Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$

$$s(f; x) = f_i + (x - x_i) f[x_i, x_{i+1}], \tag{9}$$

iar

$$|f(x) - s(f(x))| \leq \frac{(\Delta x_i)^2}{8} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|. \tag{10}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Rezultă că

$$\|f(\cdot) - s(f, \cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{8} |\Delta|^2 \|f''\|_\infty. \tag{11}$$

Spline liniare II

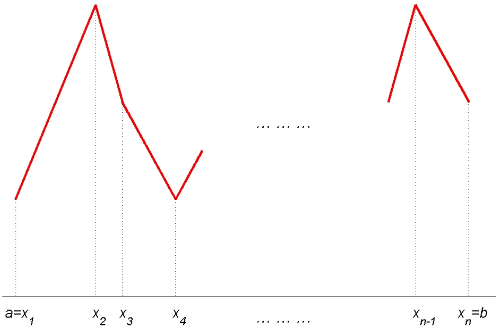


Figura: Spline liniare

Spline liniare III

Dimensiunea lui $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$ se calculează astfel: deoarece avem $n-1$ porțiuni și pe fiecare 2 coeficienți (2 grade de libertate) și fiecare condiție reduce numărul de grade de libertate cu 1, avem în final

$$\dim \mathbb{S}_1^0(\Delta) = 2n - 2 - (n-2) = n.$$

O bază a spațiului este dată de așa-numitele funcții *B-spline*:
Punem $x_0 = x_1,\ x_{n+1} = x_n$, pentru $i = \overline{1, n}$

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{pentru } x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{pentru } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \tag{12}$$

Pentru $i = 1$ prima și pentru $i = n$ a doua ecuație se ignoră.
Funcția B_i se numește *pălărie chinezească.* Graficul funcțiilor B_i apare în figura 3.

Spline liniare IV

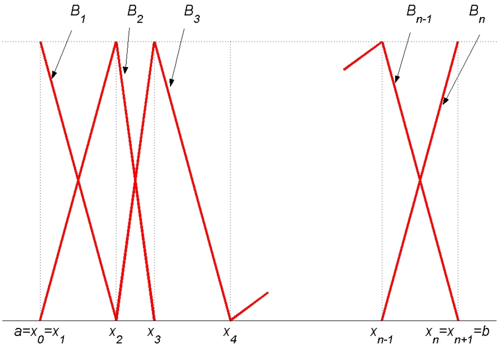


Figura: Funcții B-spline de grad 1

Spline liniare V

Ele au proprietatea

$$B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

sunt liniar independente, deoarece

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_i(x) = 0 \wedge x \neq x_j \Rightarrow c_j = 0.$$

și

$$\langle B_i \rangle_{i=\overline{1,n}} = S_1^0(\Delta),$$

B_i joacă același rol ca polinoamele fundamentale Lagrange ℓ_i.

Interpolare cu spline cubice I

Funcțiile spline cubice sunt cele mai utilizate.
Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$. Continuitatea derivatei de ordinul I pentru $s_3(f;\cdot)$ se poate realiza impunând valorile primei derivate în fiecare punct x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Astfel fie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ numere arbitrare date și notăm

$$s_3(f;\cdot)\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{13}$$

Realizăm $s_3'(f;x_i) = m_i$, $i = \overline{1,n}$, luând fiecare bucată ca soluție unică a problemei de interpolare Hermite, și anume

$$\begin{aligned} &p_i(x_i) = f_i, \quad p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ &p_i'(x_i) = m_i, \quad p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1} \end{aligned} \tag{14}$$

Vom rezolva problema folosind interpolarea Newton. Diferențele divizate sunt

$$
\begin{array}{ccccc}
x_i & f_i & m_i & \frac{f[x_i,x_{i+1}]-m_i}{\Delta x_i} & \frac{m_{i+1}+m_i-2f[x_i,x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \\
x_i & f_i & f[x_i, x_{i+1}] & \frac{m_{i+1}-f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i} & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & m_{i+1} & & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & & &
\end{array}
$$

și deci forma Newton a polinomului de interpolare Hermite este

$$
\begin{aligned}
p_i(x) = f_i + (x - x_i)m_i + (x - x_i)^2 \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} \\
+ (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}.
\end{aligned}
$$

Interpolare cu spline cubice III

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \tag{15}$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned}
c_{i,0} &= f_i \\
c_{i,1} &= m_i \\
c_{i,2} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i = \frac{3f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i - m_{i+1}}{\Delta x_i} \\
c_{i,3} &= \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}
\end{aligned} \tag{16}$$

Deci, pentru a calcula $s_3(f; x)$ într-un punct care nu este nod, trebuie în prealabil să localizăm intervalul $[x_i, x_{i+1}] \ni x$, să calculăm coeficienții cu (16) și să evaluăm spline-ul cu (15).

Vom discuta câteva alegeri posibile pentru $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Interpolare Hermite cubică pe porțiuni

Se alege $m_i = f'(x_i)$ (presupunând că aceste derivate sunt cunoscute). Se ajunge la o schemă strict locală, în care fiecare bucată poate fi determinată independent de cealaltă. Mai mult, eroarea este

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\Delta x_i\right)^4 \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \quad (17)$$

Deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f;\cdot)\|_\infty \leq \frac{1}{384}|\Delta|^4\|f^{(4)}\|_\infty. \quad (18)$$

Pentru puncte echidistante

$$|\Delta| = (b-a)/(n-1)$$

și deci

$$\|f(\cdot) - s_3(f;\cdot)\|_\infty = O(n^{-4}), \quad n \to \infty. \quad (19)$$

Cerem ca $s_3(f;\cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă, cu notația (13)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{20}$$

care convertită în coeficienți Taylor (15) dă

$$2c_{i-1,2} + 6c_{i-1,3}\Delta x_{i-1} = 2c_{i,2}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Înlocuind cu valorile explicite (16) pentru coeficienți se ajunge la sistemul liniar

$$\Delta x_i m_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)m_i + (\Delta x_{i-1})m_{i+1} = b_i, \quad i = \overline{2, n-1} \tag{21}$$

unde

$$b_i = 3\{\Delta x_i f[x_{i-1}, x_i] + \Delta x_{i-1} f[x_i, x_{i+1}]\} \tag{22}$$

Spline cubice de clasă C^2 II

Avem un sistem de $n-2$ ecuații liniare cu n necunoscute $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Odată alese m_1 și m_n, sistemul devine tridiagonal și se poate rezolva eficient prin eliminare gaussiană, prin factorizare sau cu o metodă iterativă. Se dau în continuare câteva alegeri posibile pentru m_1 și m_n.

Luăm $m_1 = f'(a)$, $m_n = f'(b)$. Se știe că pentru acest tip de spline, dacă $f \in C^4[a,b]$

$$\|f^{(r)}(\cdot) - s^{(r)}(f;\cdot)\|_\infty \leq c_r |\Delta|^{4-r} \|f^{(n)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,3 \tag{23}$$

unde $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, iar c_3 depinde de raportul $\frac{|\Delta|}{\min_i \Delta x_i}$.

Spline care utilizează derivatele secunde

Impunem condițiile $s_3''(f;a) = f''(a);\ s_3''(f;b) = f''(b)$. Aceste condiții conduc la două ecuații suplimentare

$$\begin{array}{l} 2m_1 + m_2 = 3f[x_1, x_2] - \frac{1}{2} f''(a)\Delta x_1 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{1}{2} f''(b)\Delta x_{n-1} \end{array} \tag{24}$$

Prima ecuație se pune la începutul sistemului (21), iar a doua la sfârșitul lui, păstrându-se astfel structura tridiagonală a sistemului.

Spline cubice naturale

Impunând $s''(f; a) = s''(f; b) = 0$, se obțin două ecuații noi din (24) luând $f''(a) = f''(b) = 0$.
Avantajul – este nevoie numai de valori ale lui f, nu și ale derivatelor, dar prețul plătit este degradarea preciziei la $O(|\Delta|^2)$ în vecinătatea capetelor (în afară de cazul când $f''(a) = f''(b) = 0$).

"Not-a-knot spline"(C. deBoor) I

Cerem ca $p_1(x) \equiv p_2(x)$ și $p_{n-2}(x) \equiv p_{n-1}(x)$; adică primele două părți și respectiv ultimele două trebuie să coincidă. Într-adevăr, asta înseamnă că primul punct interior x_2 și ultimul x_{n-1} sunt ambele inactive. Se obțin încă două ecuații suplimentare exprimând continuitatea lui $s_3'''(f;x)$ în $x = x_2$ și $x = x_{n-1}$. Condiția de continuitate a lui $s_3(f,.)$ în x_2 și x_{n-1} revine la egalitatea coeficienților dominanți $c_{1,3} = c_{2,3}$ și $c_{n-2,3} = c_{n-1,3}$. De aici se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned}
(\Delta x_2)^2 m_1 + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_2 - (\Delta x_1)^2 m_3 &= \beta_1 \\
(\Delta x_2)^2 m_{n-2} + [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2] m_{n-1} - (\Delta x_1)^2 m_n &= \beta_2,
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 2\{(\Delta x_2)^2 f[x_1, x_2] - (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3]\} \\
\beta_2 &= 2\{(\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] - (\Delta x_{n-2})^2 f[x_{n-1}, x_n]\}.
\end{aligned}$$

"Not-a-knot spline"(C. deBoor) II

Prima ecuație se adaugă pe prima poziție iar a doua pe ultima poziție a sistemului format din cele $n-2$ ecuații date de (21) și (22).
Sistemul obținut nu mai este tridiagonal, dar el se poate transforma în unul tridiagonal combinând ecuațiile 1 cu 2 și $n-1$ cu n. După aceste transformări prima și ultima ecuație devin

$$\begin{aligned} \Delta x_2 m_1 + (\Delta x_2 + \Delta x_1) m_2 &= \gamma_1 \qquad (25)\\ (\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) m_{n-1} + \Delta x_{n-2} m_n &= \gamma_2, \qquad (26) \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{\Delta x_2 + \Delta x_1} \left\{ f[x_1, x_2] \Delta x_2 [\Delta x_1 + 2(\Delta x_1 + \Delta x_2)] + (\Delta x_1)^2 f[x_2, x_3] \right\} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}} \left\{ (\Delta x_{n-1})^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}] + \right. \\ &\left. [2(\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) + \Delta x_{n-1}] \Delta x_{n-2} f[x_{n-1}, x_n] \right\}. \end{aligned}$$

Figura: Carl-Wilhelm Reinhold de Boor

Figura: Isaac Schoenberg (1903-1990)

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice I

Funcțiile spline cubice complete și naturale au proprietăți interesante de optimalitate. Pentru a le formula, este convenabil să considerăm nu numai subdiviziunea Δ ci și

$$\Delta' : \; a = x_0 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = b, \qquad (27)$$

în care capetele sunt noduri duble. Aceasta înseamnă că ori de câte ori interpolăm pe Δ', interpolăm valorile funcției pe punctele interioare, iar la capete valorile funcției și ale derivatei. Prima teoremă se referă la funcții spline cubice complete $s_{compl}(f;\cdot)$.

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice II

Teorema 3

Pentru orice funcție $g \in C^2[a, b]$ *care interpolează* f *pe* Δ'*, are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{compl}(f; x)]^2 dx, \tag{28}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $g(\cdot) = s_{compl}(f; \cdot)$.

Observația 4

$s_{compl}(f; \cdot)$ *din teorema 3 interpolează* f *pe* Δ' *și dintre toți interpolanții de acest tip, derivata sa de ordinul II are norma minimă.*

Demonstrație. Folosim notația prescurtată $s_{compl} = s$. Teorema rezultă imediat, dacă arătăm că

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx + \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \tag{29}$$

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice III

Aceasta implică imediat (28) și faptul că egalitatea în (28) are loc dacă și numai dacă $g''(x) - s''(x) \equiv 0$, din care integrând de două ori de la a la x și utilizând proprietățile de interpolare ale lui s și g în $x = a$ se obține $g(x) = s(x)$. Relația (29) este echivalentă cu

$$\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = 0. \tag{30}$$

Integrând prin părți și ținând cont că $s'(b) = g'(b) = f'(b)$ și $s'(a) = g'(a) = f'(a)$ se obține

$$\begin{aligned} &\int_a^b s''(x)[g''(x) - s''(x)]dx = \\ &= s''(x)[g'(x) - s'(x)]\Big|_a^b - \int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx = \\ &= -\int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx. \end{aligned} \tag{31}$$

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice IV

Deoarece s''' este constantă pe porțiuni

$$\int_a^b s'''(x)[g'(x) - s'(x)]dx = \sum_{\nu-1}^{n-1} s'''(x_\nu + 0) \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} [g'(x) - s'(x)]dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} s'''(x_{\nu+0})[g(x_{\nu+1}) - s(x_{\nu+1}) - (g(x_\nu) - s(x_\nu))] = 0$$

căci atât s cât și g interpolează f pe Δ. Aceasta demonstrează (30) și deci și teorema. ■

Pentru interpolarea pe Δ, calitatea de a fi optimal revine funcțiilor spline naturale de interpolare $s_{nat}(f; \cdot)$.

Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice V

Teorema 5

Pentru orice funcție $g \in C^2[a,b]$ *ce interpolează* f *pe* Δ, *are loc*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx \tag{32}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $g(\cdot) = s_{nat}(f;\cdot)$.

Demonstrația este analoagă cu a teoremei 3, deoarece (29) are loc din nou căci $s''(b) = s''(a) = 0$.
Punând $g(\cdot) = s_{compl}(f;\cdot)$ în teorema 5 se obține

$$\int_a^b [s''_{compl}(f;x)]^2 dx \geq \int_a^b [s''_{nat}(f;x)]^2 dx. \tag{33}$$

Deci, într-un anumit sens, spline-ul cubic natural este cel mai neted interpolant.

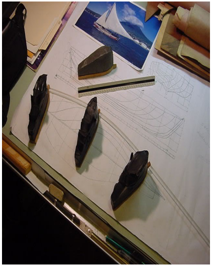
Proprietatea de minimalitate a funcțiilor spline cubice VI

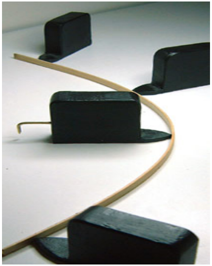
Proprietatea exprimată în teorema 5 stă la originea numelui de spline. Un spline este o vergea flexibilă folosită pentru a desena curbe. Dacă forma sa este dată de ecuația $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ și dacă spline-ul trebuie să treacă prin punctele (x_i, g_i), atunci se presupune că spline-ul are o formă ce minimizează energia potențială

$$\int_a^b \frac{[g''(x)]^2 dx}{(1 + [g'(x)]^2)^3},$$

pentru toate funcțiile g supuse acelorași restricții. Pentru variații lente ale lui g ($\|g'\|_\infty \ll 1$) aceasta aproximează bine proprietatea de minim din teorema 5.

Instrumentul spline





spline

spline

florar