

Generarea unor cuadraturi de tip Gauss

Radu T. Trîmbițaș

12 mai 2023

Formula

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f) \quad (1)$$

se numește *de tip Gauss* dacă coeficienții și nodurile sunt alese astfel încât gradul de exactitate să fie maxim. Nodurile x_k , $k = 1, \dots, n$ sunt rădăcinile polinomului

$$\pi_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k). \quad (2)$$

ortogonal pe $[a, b]$, în raport cu ponderea w .

Să considerăm relația de recurență pentru polinoamele ortogonale monice

$$\begin{aligned} \pi_{k+1}(x) &= (x - \alpha_k)\pi_k(x) - \beta_k\pi_{k-1}(x), & k &= 0, 1, 2, \dots \\ \pi_0(x) &= 1, & \pi_{-1}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

unde

$$\beta_0 = \int_a^b w(x)dx = \mu_0. \quad (4)$$

Coeficienții din relația de recurență (3) au expresia

$$\alpha_k = \frac{(x\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad \beta_k = \frac{(x\pi_k, \pi_{k-1})}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}. \quad (5)$$

Matricea Jacobi de ordinul n a funcției pondere w este o matrice tridia-

gonală simetrică, definită prin

$$J_n(w) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Nodurile x_k sunt valori proprii ale lui J_n

$$J_n v_k = x_k v_k, \quad v_k^T v_k = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

iar coeficienții A_k se pot exprima cu ajutorul primei componente $v_{k,1}$ a vectorilor proprii corespunzători normalizați:

$$A_k = \beta_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Dacă $f \in C^{2n}[a, b]$, pentru rest avem expresia

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \pi_n^2(x) dx.$$

Tabela 1 dă câteva dintre polinoamele ortogonale clasice și coeficienții din relațiile lor de recurență.

Cu datele din tabel se formează matricea J și se găsesc x_k și A_k . Polinoamele ortogonale se aleg în funcție de intervalul de definiție și de pondere. De exemplu, pentru $w = 1$ se lucrează cu polinoamele Legendre pe $[-1, 1]$ și se face apoi schimbarea de variabilă pentru a trece la $[a, b]$.

Observația 1 Pentru polinoamele Jacobi avem

$$\alpha_k = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta + 2)}$$

și

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \\ \beta_1 &= \frac{4(1+\alpha)(1+\beta)}{(2+\alpha+\beta)^2(3+\alpha+\beta)}, \\ \beta_k &= \frac{4k(k+\alpha)(k+\alpha+\beta)(k+\beta)}{(2k+\alpha+\beta-1)(2k+\alpha+\beta)^2(2k+\alpha+\beta+1)}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

Polinoamele	Notăție	Ponderea	interval	α_k	β_k
Legendre	$P_n(l_n)$	1	$[-1,1]$	0	$2 \ (k=0)$ $(4-k^{-2})^{-1} \ (k>0)$
Cebîșev #1	T_n	$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	$\pi \ (k=0)$ $\frac{1}{2} \ (k=1)$ $\frac{1}{4} \ (k>1)$
Cebîșev #2	$u_n(Q_n)$	$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	$\frac{1}{2}\pi \ (k=0)$ $\frac{1}{4} \ (k>0)$
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ $\alpha>-1, \beta>-1$	$[-1,1]$	vezi Obs. 1	vezi Obs. 1
Laguerre	$L_n^{(\alpha)}$	$t^\mu e^{-t} \ \mu>-1$	$[0,\infty)$	$2k+\mu+1$	$\Gamma(1+\mu) \ (k=0)$ $k(k+\mu) \ (k>0)$
Hermite	H_n	e^{-t^2}	\mathbb{R}	0	$\sqrt{\pi} \ (k=0)$ $\frac{1}{2}k \ (k>0)$

Tabela 1: Polinoame ortogonale

Probleme. Temă toate exercițiile.

1. Implementați funcții ce generează formule de cuadratură gaussiene pentru ponderile clasice date în tabela 1.
2. Să se calculeze integralele $\int_{-1}^1 \sin x^2 dx$ și $\int_{-1}^1 \cos x^2 dx$ cu precizia $\varepsilon = 10^{-7}$ folosind o cuadratură gaussiană. Câte noduri sunt necesare?
3. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^{10} A_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Să se aplice formula pentru a calcula $\int_{-1}^1 \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Verificare.

4. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^{10} A_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Să se aplice formula pentru a calcula $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} e^{-x^2} dx$. Cât este eroarea?

5. Calculați

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin(x) dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} \cos(x) dx,$$

cu 8 zecimale exacte folosind o cuadratură Gauss-Laguerre.

6. Calculați

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \sin x dx, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos x dx$$

utilizând o formulă de cuadratură Gauss-Hermite.

7. Aproximați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$ cu 9 zecimale exacte, folosind o cuadratură Gauss-Jacobi.