Generarea unor cuadraturi de tip Gauss

Radu T. Trîmbiţaş

8 mai 2023

Formula

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f) \tag{1}$$

se numeşte *de tip Gauss* dacă coeficienţii şi nodurile sunt alese astfel încât gradul de exactitate să fie maxim. Nodurile x_k, $k = 1, ..., n$ sunt rădăcinile polinomului

$$\pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k). \tag{2}$$

ortogonal pe $[a, b]$, în raport cu ponderea w.

Să considerăm relaţia de recurenţă pentru polinoamele ortogonale monice

$$\begin{aligned} &\pi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\pi_k(x) - \beta_k \pi_{k-1}(x), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ &\quad \pi_0(x) = 1, \quad \pi_{-1}(x) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

unde

$$\beta_0 = \int_a^b w(x)f(x)dx = \mu_0. \tag{4}$$

Coeficienţii din relaţia de recurenţă (3) au expresia

$$\alpha_k = \frac{(x\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \qquad \beta_k = \frac{(x\pi_k, \pi_{k-1})}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}. \tag{5}$$

Matricea Jacobi de ordinul n a funcţiei pondere w este o matrice tridiagonală simetrică, definită prin

$$J_n(w) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Nodurile x_k sunt valori proprii ale lui J_n

$$J_n v_k = x_k v_k, \quad v_k^T v_k = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

iar coeficienţii A_k se pot exprima cu ajutorul primei componente $v_{k,1}$ a vectorilor proprii corespunzători normalizaţi:

$$A_k = \beta_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

Dacă $f \in C^{2n}[a, b]$, pentru rest avem expresia

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x)\pi_n^2(x)dx.$$

Tabela 1 dă câteva dintre polinoamele ortogonale clasice şi coeficienţii din relaţiile lor de recurenţă.

Cu datele din tabel se formează matricea J şi se găsesc x_k şi A_k. Polinoamele ortogonale se aleg în funcţie de intervalul de definiţie şi de pondere. De exemplu, pentru. $w = 1$ se lucrează cu polinoamele Legendre pe $[-1, 1]$ şi se face apoi schimbarea de variabilă pentru a trece la $[a, b]$.

Observaţia 1 *Pentru polinoamele Jacobi avem*

$$\alpha_k = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta + 2)}$$

şi

$$\begin{aligned}
\beta_0 =& 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}, \\
\beta_1 =& \frac{4(1 + \alpha)(1 + \beta)}{(2 + \alpha + \beta)^2(3 + \alpha + \beta)}, \\
\beta_k =& \frac{4k(k + \alpha)(k + \alpha + \beta)(k + \beta)}{(2k + \alpha + \beta - 1)(2k + \alpha + \beta)^2(2k + \alpha + \beta + 1)}, \quad k > 1.
\end{aligned}$$

Polinoamele	Notaţie	Ponderea	interval	α_k	β_k
Legendre	$P_n(l_n)$	1	[-1,1]	0	2 (k=0) $(4-k^{-2})^{-1}$ (k>0)
Cebîşev #1	T_n	$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	π (k=0) $\frac{1}{2}$ (k=1) $\frac{1}{4}$ (k>1)
Cebîşev #2	$u_n(Q_n)$	$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	$\frac{1}{2}\pi$ (k=0) $\frac{1}{4}$ (k>0)
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ $\alpha>-1,\ \beta>-1$	$[-1,1]$	vezi Obs. 1	vezi Obs. 1
Laguerre	$L_n^{(\alpha)}$	$t^\mu e^{-t}$ $\mu>-1$	$[0,\infty)$	$2k+\mu+1$	$\Gamma(1+\mu)$ (k=0) $k(k+\mu)$ (k>0)
Hermite	H_n	e^{-t^2}	$\mathbb{R}$	0	$\sqrt{\pi}$ (k=0) $\frac{1}{2}k$ (k>0)

Tabela 1: Polinoame ortogonale

Probleme.

1. Implementaţi funcţii ce generează formule de cuadratură gaussiene pentru ponderile clasice date în tabela 1.

2. Să se calculeze integralele $\int_{-1}^{1}\sin x^2\,\mathrm{d}x$ și $\int_{-1}^{1}\cos x^2\,\mathrm{d}x$ cu precizia $\varepsilon = 10^{-7}$ folosind o cuadratură gaussiană. Câte noduri sunt necesare?

3. Determinați o formulă de cuadratură de forma
$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{10}A_k f(x_k) + R(f)$$
care să aibă grad maxim de exactitate. Să se aplice formula pentru a calcula $\int_{-1}^{1}\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$. Verificare.

4. Determinați o formulă de cuadratură de forma
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{10}A_k f(x_k) + R(f)$$
care să aibă grad maxim de exactitate. Să se aplice formula pentru a calcula $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Cât este eroarea?

5. Calculaţi

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)dx,\ \int_0^\infty e^{-x}\cos(x)dx,$$

cu 8 zecimale exacte folosing o cuadratură Gauss-Laguerre.

6. Calculaţi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\sin x dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\cos x dx$$

utilizând o formulă de cuadratură Gauss-Hermite.

7. Aproximați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$ cu 9 zecimale exacte, folosind o cuadratură Gauss-Jacobi.