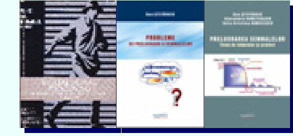
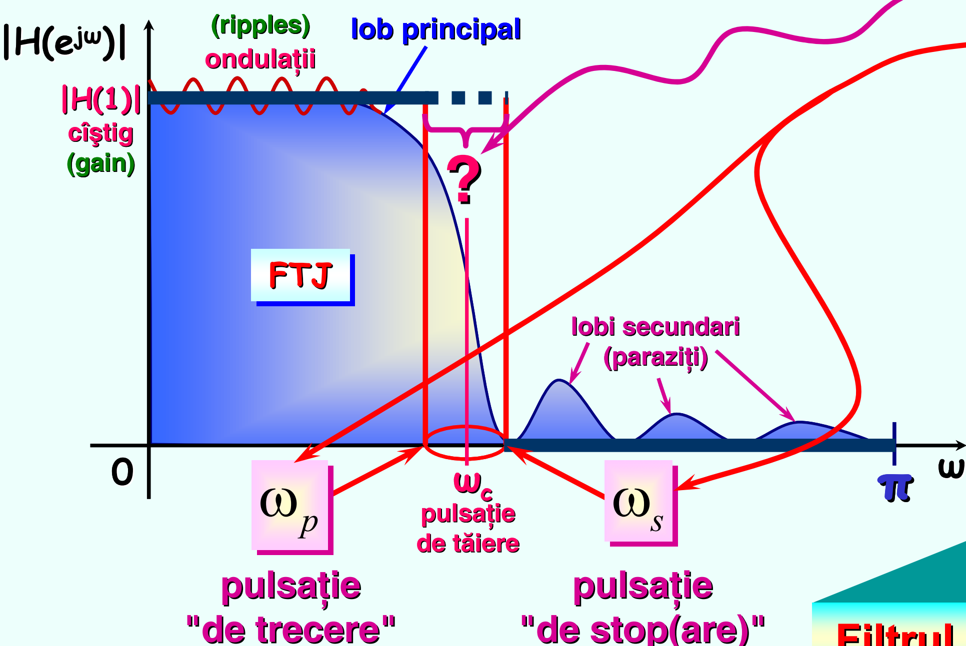
❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



Caracteristicile practice ale unui filtru numeric



- Ne propunem **să nu precizăm** cum se comportă filtrul în **zona tranzitorie**.
- Se precizează numai cele **două pulsații** care **mărginesc** zona tranzitorie.
- Se doreşte ca filtrul proiectat **să se "apropie" cît mai mult** de **filtrul ideal**, simultan în banda de trecere şi în banda de stop(are).

☝ **Nu se impun restricții în zona tranzitorie.**

Aşadar

Filtrul ideal (FTJ)

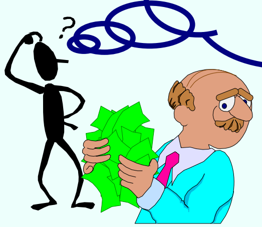
$$H_{id}\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} e^{-jK\omega} & , \ 0 \le \omega \le \omega_p \\ 0 & , \ \omega_s < \omega \le \pi \end{cases}$$

de fază liniară

Filtrul real (FIR, FTJ)

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} \quad \forall\, \omega \in [0,\pi]$$

Cum se poate exprima "apropierea" dintre cele două filtre?



Folosind **diferite norme** definite în spațiul semnalelor.

Două norme uzuale

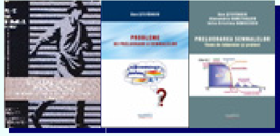
Norma Euclidiană

$$\|H\|^2 = \int_0^{+\pi} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

Norma infinit

$$\|H\|_\infty = \max_{\omega\in[0,\pi]} \left\{ \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \right\}$$

❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



® Reformulări ale problemelor de optimizare

Problema proiectării filtrelor pătratic optimale

PPFO²

- Plecînd de la perechea de pulsații $\{\omega_p, \omega_s\}$ şi răspunsul ideal H_{id}, se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență H este cel mai aproape de răspunsul H_{id}, în sensul normei pătratice. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare pătratică de mai jos:

$$\min_{h \in \mathcal{S}_{dM}} \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \left| H_{id}\left(e^{j\omega}\right) - H\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 d\omega \, .$$

Problema proiectării filtrelor asimptotic optimale

$\mathbf{PPFO_\infty}$

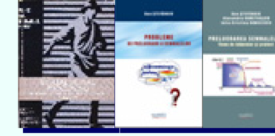
- Plecînd de la perechea de pulsații $\{\omega_p, \omega_s\}$ şi răspunsul ideal H_{id}, se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență H este cel mai aproape de răspunsul H_{id}, în sensul normei infinit. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare asimptotică de mai jos:

$$\min_{h \in \mathcal{S}_{dM}} \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \left\{ w(\omega) \left| H_{id}\left(e^{j\omega}\right) - H\left(e^{j\omega}\right) \right| \right\} .$$

☝ Aici este luată în considerare şi faza filtrului.

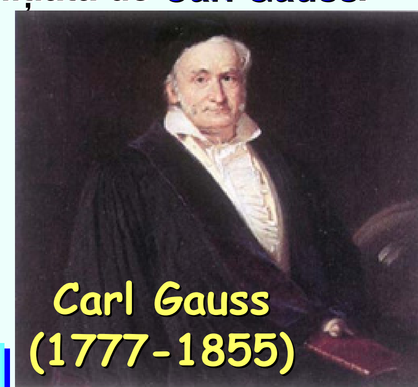
- PPFO² se rezolvă cu ajutorul Metodei Celor Mai Mici Pătrate (MCMMP).
- PPFO_∞ se rezolvă cu ajutorul unui raționament bazat pe o teoremă a lui Cebîşev şi algoritmul lui Remez (în implementarea lui Parks şi McClellan).

❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



Despre MCMMP

- **Metoda Celor Mai Mici Pătrate** (**MCMMP**) se bazează pe **Teoria regresiei liniare**, inițiată de **Carl Gauss**.
- Această metodă este extrem de utilizată în inginerie, pentru a **"(pseudo-)rezolva"** sisteme liniare **incompatibile**.
- Un astfel de sistem apare adesea cînd se încearcă modelarea matematică liniară a unui set de date, dar modelul are un număr de parametri necunoscuți **mult mai mic** decît numărul datelor.



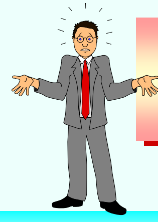
$$\mathbf{Y} = \Phi\theta$$

parametri necunoscuți ai modelului liniar

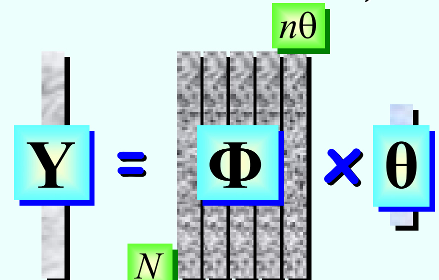
vector de date

matricea sistemului

☝ Monică.



Sistem incompatibil!



Totuşi Matricea sistemului este **monică**, deci **de rang maxim**.

Cum se poate rezolva problema de optimizare pătratică?

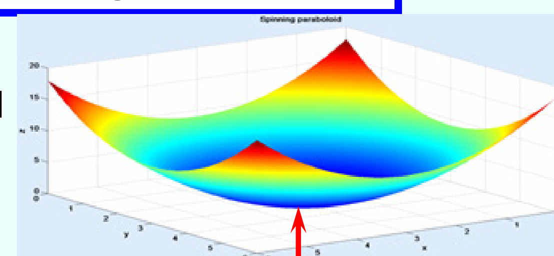
De exemplu, cu ajutorul **metodei gradientului**.

Ideea lui Gauss

Să încercăm să găsim modelul care **"trece cel mai bine printre date"**.

- În sensul minimizării următorului criteriu al **erorilor pătratice** dintre datele măsurate şi cele simulate cu ajutorul modelului liniar:

- Criteriul este un hiper-paraboloid de rotație.



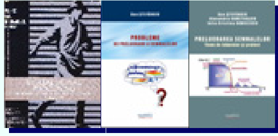
liniile matricii sistemului

$$\mathcal{V}(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^2[n,\theta] = \sum_{n=0}^{N-1}\left(y[n] - \boxed{\varphi^T[n]}\theta\right)^2$$

$$\hat{\theta} = \underset{\theta\in\mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}}\, \mathcal{V}(\theta)$$

☝ Minim unic.

❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



Despre MCMMP (continuare)

Exercițiu

- Arătați că: $\nabla \mathcal{V}(\theta) = 0$

parametrii estimați ai modelului liniar

produsul exterior al vectorilor

$$\hat{\theta} = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} \boxed{\varphi[n]\varphi^T[n]}\right)^{-1}}_{\mathbf{R}^{-1}} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} \varphi[n]y[n]\right)}_{\mathbf{r}}$$

Formula de implementare

Reguli de derivare

$$\nabla_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{b}^T\mathbf{x}\right) = \mathbf{b}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)\mathbf{x}$$

$$\hat{\theta} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{Y}\right) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$$

Formula matricială compactă

Este ca și cum s-ar opera **direct asupra sistemului incompatibil.**

$$\underset{n\theta \times N}{\boldsymbol{\Phi}^T} \times \mathbf{Y} = \underset{N \times n\theta}{\boldsymbol{\Phi}} \times \theta \quad\Rightarrow\quad \underset{n\theta \times N}{\boldsymbol{\Phi}^T} \times \mathbf{Y} = \underset{n\theta \times n\theta}{\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}} \times \theta$$

(înmulțire la stînga)

$\operatorname{rang}(\boldsymbol{\Phi}) = n\theta$

Nu sunt echivalente.

$\operatorname{rang}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right) = n\theta$

☹ Sistem incompatibil.

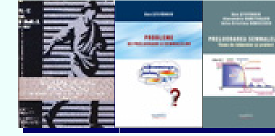
☺ Sistem compatibil si determinat.

Pseudo-inversa Moore-Penrose

$$\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T$$

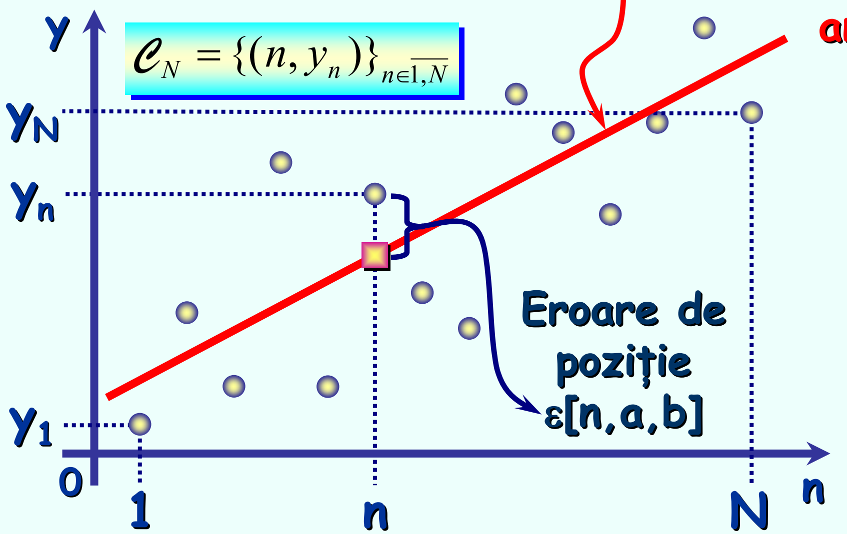
$$\hat{\theta} = \left[\underset{n\theta \times n\theta}{\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}}\right]^{-1} \times \underset{n\theta \times N}{\boldsymbol{\Phi}^T} \times \mathbf{Y}$$

❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP

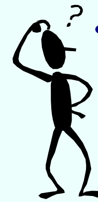


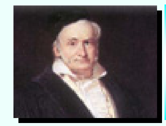
Despre MCMMP (final)

Exemplu Evaluarea dreptei de regresie liniară prin MCMMP



Cum pot fi determinați cei doi parametri ai dreptei?

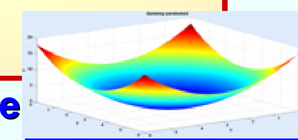




Prin minimizarea erorii pătratice totale.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) = \underset{a\in\mathbb{R}^*,\, b\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2[n,a,b] \right\} =$$

$$= \underset{a\in\mathbb{R}^*,\, b\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} (y_n - an - b)^2 \right\}$$



paraboloid de rotație

Soluția problemei de optimizare se găsește **anulînd valorile gradientului**.

$$\nabla\mathcal{V}(a,b) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\mathcal{V}(a,b) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial b}\mathcal{V}(a,b) = 0 \end{cases}$$

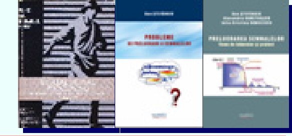
$$\begin{cases} -2\sum_{n=1}^{N} n(y_n - an - b) = 0 \\[2mm] -2\sum_{n=1}^{N} (y_n - an - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a} = \dfrac{6}{N(N^2-1)}\left[2\sum_{n=1}^{N} n y_n - (N+1)\sum_{n=1}^{N} y_n \right] \\[3mm] \hat{b} = \dfrac{2}{N(N-1)}\left[(2N+1)\sum_{n=1}^{N} y_n - 3\sum_{n=1}^{N} n y_n \right] \end{cases}$$

Exerciţiu

- Arătaţi cum se poate aproxima un set de N date cu o parabolă, apoi cu un polinom oarecare. **(curve fitting)**

❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



Cum se poate rezolva PPFO² cu ajutorul MCMMP?

După cum urmează.

PPFO²

$$\min_{h\in\mathcal{S}_{dM}} \int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\left|H_{id}\left(e^{j\omega}\right)-H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{h}) = \int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\Big|H_{id}\left(e^{j\omega}\right)-\underbrace{\boxed{\boldsymbol{\varphi}^T(\omega)}\,\mathbf{h}}_{H\left(e^{j\omega}\right)}\Big|^2 d\omega$$

$$\begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega} & \cdots & e^{j(1-M)\omega} \end{bmatrix}$$

☝ Necunoscute.

$$\mathcal{V}(\mathbf{h}) = \int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\underbrace{\left(H_{id}\left(e^{j\omega}\right)-\boldsymbol{\varphi}^T(\omega)\mathbf{h}\right)\left(\overline{H_{id}\left(e^{j\omega}\right)}-\overline{\boldsymbol{\varphi}^T(\omega)}\mathbf{h}\right)} d\omega$$

$$\left|H_{id}\left(e^{j\omega}\right)\right|^2-\underbrace{\left(H_{id}\left(e^{j\omega}\right)\overline{\boldsymbol{\varphi}^T(\omega)}+\overline{H_{id}\left(e^{j\omega}\right)}\boldsymbol{\varphi}^T(\omega)\right)}\mathbf{h}+\boxed{\mathbf{h}^T\boldsymbol{\varphi}(\omega)\overline{\boldsymbol{\varphi}^T(\omega)}\mathbf{h}}$$

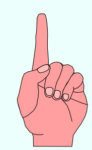
(formă pătratică)

Însă

☝ Are valori reale.

➔ Termenul liber nu influențează minimizarea.

➔ Partea imaginară trebuie să fie nulă.



$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{M-1}h[n]e^{-j\omega n}\quad \forall\,\omega\in[0,\pi]$$

$$2\underbrace{\left\{\mathrm{Re}\left[H_{id}\left(e^{j\omega}\right)\right]\boxed{\mathbf{c}^T(\omega)}-\mathrm{Im}\left[H_{id}\left(e^{j\omega}\right)\right]\boxed{\mathbf{s}^T(\omega)}\right\}}_{\mathbf{q}^T(\omega)}\in\mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega & \cdots & \cos((M-1)\omega) \end{bmatrix}$$

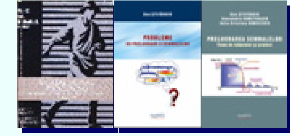
$$\begin{bmatrix} 1 & \sin\omega & \cdots & \sin((M-1)\omega) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}^T\underbrace{\left[\mathbf{c}(\omega)\mathbf{c}^T(\omega)+\mathbf{s}(\omega)\mathbf{s}^T(\omega)\right]}_{\mathbf{P}(\omega)}\mathbf{h}+j\cancel{\mathbf{h}^T\left[\mathbf{c}(\omega)\mathbf{s}^T(\omega)-\mathbf{s}(\omega)\mathbf{c}^T(\omega)\right]\mathbf{h}}$$

Astfel Se poate simplifica expresia criteriului pătratic.

$$\mathcal{V}(\mathbf{h}) \leftarrow \mathbf{h}^T\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\left(\underbrace{\mathbf{P}(\omega)}_{\text{(Toeplitz simetrică)}}\mathbf{h}-2\mathbf{q}(\omega)\right)d\omega$$

❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



Noul criteriu poate fi minimizat, pentru a găsi o pseudo-soluție nebanală.

Gradient nul

$$2\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\big(\mathbf{P}(\omega)\mathbf{h}-\mathbf{q}(\omega)\big)d\omega=0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\left(\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\mathbf{P}(\omega)d\omega\right)}_{\mathbf{R}\ \text{(simetrică)}}\mathbf{h}=\underbrace{\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\mathbf{q}(\omega)d\omega}_{\mathbf{r}}$$

☝ Expresia pseudo-soluției.

$$\hat{\mathbf{h}}=\left(\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\mathbf{P}(\omega)d\omega\right)^{-1}\left(\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\mathbf{q}(\omega)d\omega\right)=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$$

Detalii de implementare

➔ Valoarea minimă a criteriului pătratic poate fi utilizată pentru a alege o dimensiune convenabilă a secvenței pondere a FIR (M).

- Valoarea minimă a criteriului pătratic este:

$$\mathcal{V}(\hat{\mathbf{h}})=\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\left|H_{id}\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega-2\underbrace{\left(\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\mathbf{q}^T(\omega)d\omega\right)}_{\mathbf{r}^T}\hat{\mathbf{h}}+\hat{\mathbf{h}}^T\underbrace{\left(\int_{\omega\in\Omega_{ps}} w(\omega)\mathbf{P}(\omega)d\omega\right)}_{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{h}}=$$
$$=\mathcal{V}_{id}-\mathbf{r}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}=\mathcal{V}_{id}-\mathbf{r}^T\hat{\mathbf{h}}\geq 0$$

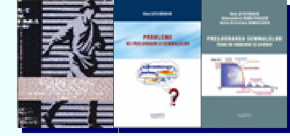
➔ În general, se operează cu două ferestre de ponderare diferite: una pentru banda de trecere şi alta pentru banda de stop.

$$\mathbf{R}=\int_0^{\omega_p} w_p(\omega)\mathbf{P}(\omega)d\omega+\int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega)\mathbf{P}(\omega)d\omega \qquad \mathbf{r}=\int_0^{\omega_p} w_p(\omega)\mathbf{q}(\omega)d\omega+\int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega)\mathbf{q}(\omega)d\omega$$

- Se poate opera cu ferestre dreptunghiulare (fără ponderare).
- Ferestrele pot fi utilizate şi pentru a asigura inversabilitatea matricii R.

Exercițiu

- Arătați cum se poate aplica metoda pseudo-inversei Moore-Penrose pentru a ajunge la expresia pseudo-soluției .



Detalii de implementare

➔ În general, ferestrele de ponderare şi răspunsul dorit în frecvenţă se aleg în aşa fel încît integralele să se poată evalua în formă completă.

☝ Dacă nu, se apelează la integrarea numerică.

Exerciţii

- Arătaţi că elementul generic al matricii P este: $P_{i,j}(\omega)=\cos\left[(i-j)\omega\right]$ $\forall\,\omega\in\Omega_{ps}$
- Arătaţi că elementul generic al vectorului q este: $q_i(\omega)=\cos\left[(K-i)\omega\right]$ $\forall\,\omega\in\left[0,\omega_p\right]$

$\forall\, i,j\in\overline{0,M-1}$

$H_{id}\left(e^{j\omega}\right)=0$ $\forall\,\omega\in\left[\omega_s,\pi\right]$

Rezultă

$$\begin{cases} R_{i,j}=\displaystyle\int_0^{\omega_p} w_p(\omega)\cos\left[(i-j)\omega\right]d\omega+\int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega)\cos\left[(i-j)\omega\right]d\omega \\ r_i=\displaystyle\int_0^{\omega_p} w_p(\omega)\cos\left[(K-i)\omega\right]d\omega \end{cases}\quad \forall\, i,j\in\overline{0,M-1}$$

Exemplu Cazul ferestrelor dreptunghiulare

$$\begin{cases} R_{i,j}=\omega_p\mathrm{Sc}\left[(i-j)\omega_p\right]-\omega_s\mathrm{Sc}\left[(i-j)\omega_s\right]+\pi\delta_0[i-j] \\ r_i=\omega_p\mathrm{Sc}\left[(K-i)\omega_p\right] \end{cases}\quad \forall\, i,j\in\overline{0,M-1}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos(n\omega)d\omega=\omega_2\mathrm{Sc}\left(n\omega_2\right)-\omega_1\mathrm{Sc}\left(n\omega_1\right)$$

☺ Era de aşteptat să se obţină un sinus cardinal.

$$\hat{h}[i]=\frac{\omega_p}{\pi}\mathrm{Sc}\left[(K-i)\omega_p\right]\quad \forall\, i\in\overline{0,M-1}$$

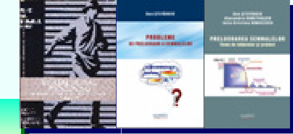
DAR $\mathbf{R}=\pi\mathbf{I}_M$

☹ Performanţa filtrului e modestă.

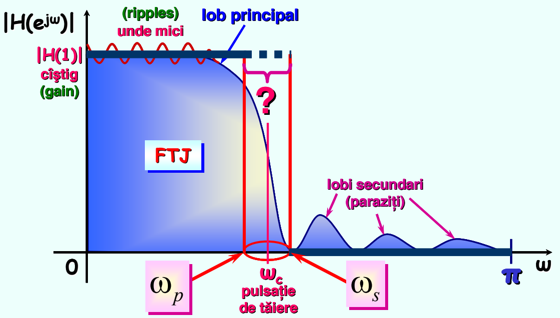
☝ Pentru ca matricea **R** să fie inversabilă nu este necesar ca pulsaţiile critice să fie diferite.

- Dacă se doreşte **suprimarea zonei tranzitorii**, atunci se recomandă utilizarea unor **ferestre de ponderare diferite de cea dreptunghiulară**.

❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Celor Mai Mici Pătrate



Date de intrare

- F_p [Hz] (frecvența de trecere a filtrului analogic corespunzător)
- F_s [Hz] (frecvența de stop a filtrului analogic corespunzător)
  - Implicit: $F_s = 1.1 \cdot F_p$
- T_s [s] (perioada de eșantionare)
  - Implicit: $T_s = \dfrac{2}{2.1 \cdot (F_p + F_s)}$
- w_p w_s (tipurile de ferestre dorite)
  - Implicit: ferestre dreptunghiulare
- M (ordinul maxim al filtrului – întreg pozitiv)
- K (coeficientul de fază liniară – întreg nenegativ)
  - Implicit: $K = \left\lfloor \dfrac{M}{2} \right\rfloor$
- $\varepsilon > 0$ (pragul de precizie pentru criteriul pătratic – subunitar)
  - Implicit: $\varepsilon = 10^{-7}$

Inițializare

1. Se calculează pulsațiile critice relative. $\omega_p = 2\pi F_p T_s$ [rad] $\omega_s = 2\pi F_s T_s$ [rad]
2. Se calculează valoarea maximă a criteriului pătratic.

$$\mathcal{V}_{id} = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \left| H_{id}\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 d\omega = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega) d\omega$$

Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Celor Mai Mici Pătrate

(continuare)

Inițializare

3. Se inițializează ordinul filtrului. $m = 1$

4. Se inițializează eroarea relativă. $\delta = 1$

Buclă iterativă

Cît timp $\delta > \varepsilon$ & $m \leq M$

1. Se construieşte matricea de inversat. $\mathbf{R}$

$$R_{i,j} = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega)\cos[(i-j)\omega]d\omega + \int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega)\cos[(i-j)\omega]d\omega \quad \forall i,j \in \overline{0,m-1}$$

☝ Eventual, prin integrare numerică.

2. Dacă matricea nu este inversabilă, se opreşte algoritmul şi se sare direct la datele de ieşire.

☝ În mod normal, cel puțin filtrul de ordin m=1 va fi disponibil.

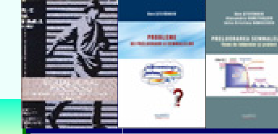
3. Se construieşte vectorul liber. $\mathbf{r}$

$$r_i = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega)\cos[(K-i)\omega]d\omega + \int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega)\cos[(K-i)\omega]d\omega \quad \forall i \in \overline{0,m-1}$$

☝ Eventual, prin integrare numerică.

4. Se proiectează filtrul optimal. $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$

5. Se evaluează performanța filtrului optimal. $\mathcal{V}\left(\hat{\mathbf{h}}\right) = \mathcal{V}_{id} - \mathbf{r}^T\hat{\mathbf{h}}$



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Celor Mai Mici Pătrate

(final)

Buclă iterativă

Cît timp $\delta > \varepsilon$ & $m \le M$

m>1?

DA

NU

6. Se evaluează eroarea relativă. $\delta = \dfrac{\left|\mathcal{V}_{\mathrm{M}} - \mathcal{V}\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\right|}{\mathcal{V}_{id}}$

7. Se memorează performanța filtrului curent. $\mathcal{V}_{\mathrm{M}} = \mathcal{V}\left(\hat{\mathbf{h}}\right)$

8. Se incrementează ordinul filtrului. $m \leftarrow m+1$

Date de ieșire

- $\mathbf{h}$ (vectorul secvenței pondere a filtrului optimal)
- $100 \cdot \mathcal{V}\left(\hat{\mathbf{h}}\right) / \mathcal{V}_{id}$ (performanța relativă a filtrului optimal – în procente)
- m (ordinul filtrului optimal)

Exerciții

- Particularizați algoritmul de mai sus pentru cazul ferestrelor triunghiulare și analizați condițiile de inversabilitate.
- Concepeți algoritmii aferenți pentru proiectarea filtrelor optimale FIR de tip **trece-bandă** (**FTB**), **trece-sus** (**FTS**) și **multi-bandă** (**FMB**).

☝ Similar, se pot proiecta FTB, FTS și chiar FMB.

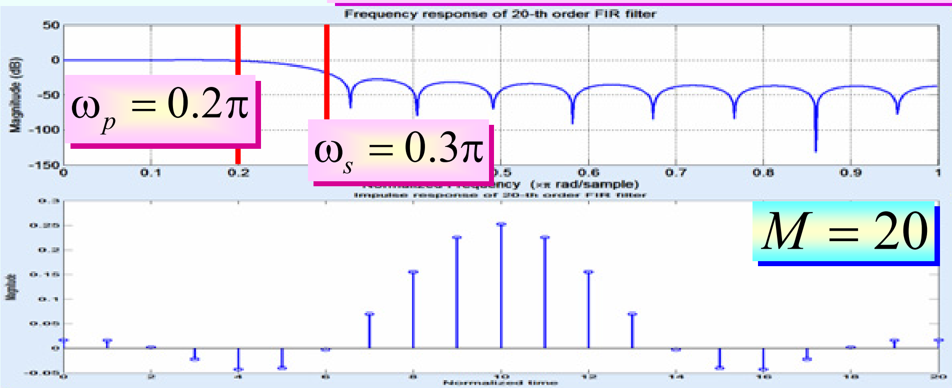
❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP

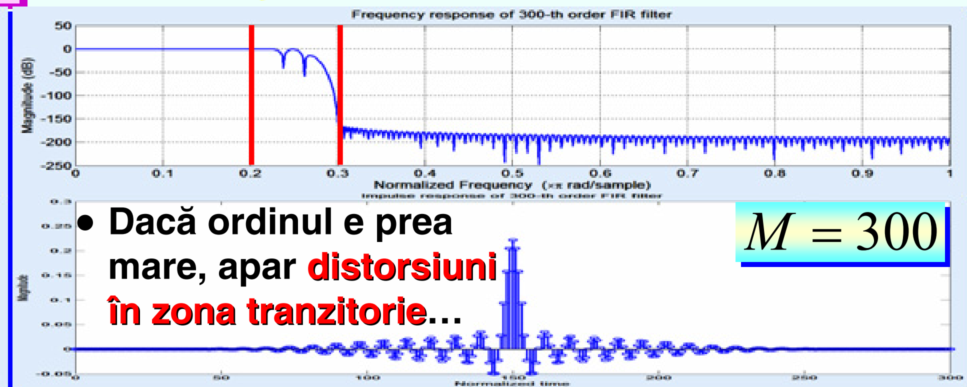
Exemple

Filtre FIR de tip FTJ, de diferite ordine, proiectate folosind MCMMP

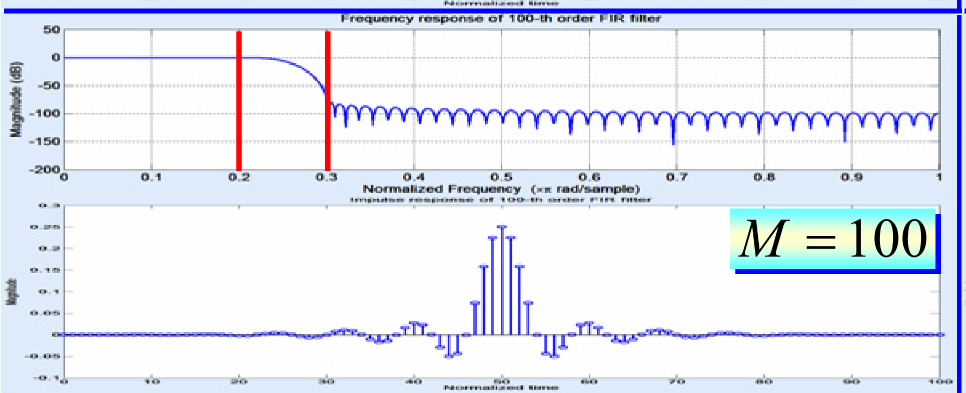
☝ **Cu fereastră dreptunghiulară.**

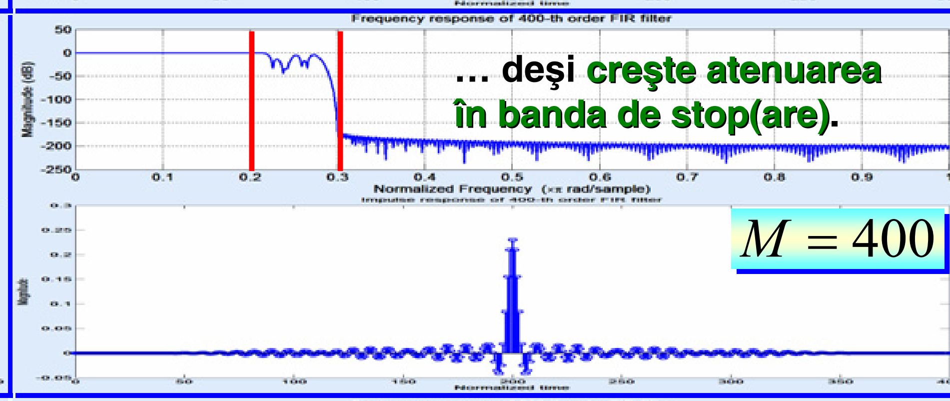
Funcţie utilă `firls`



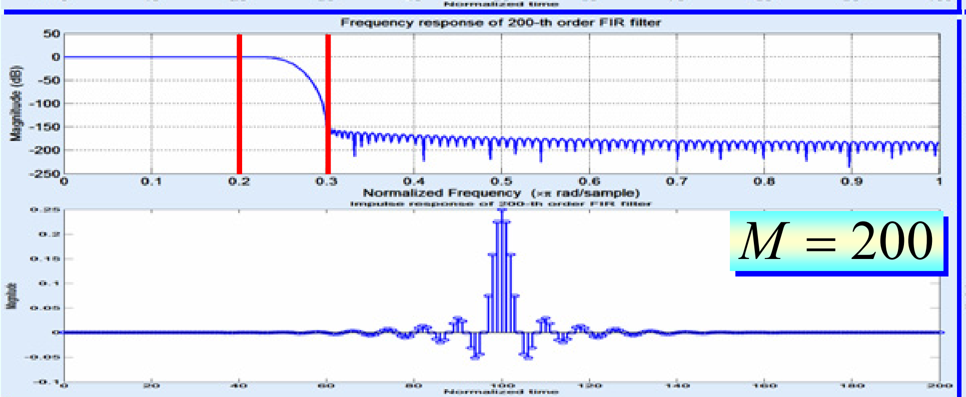


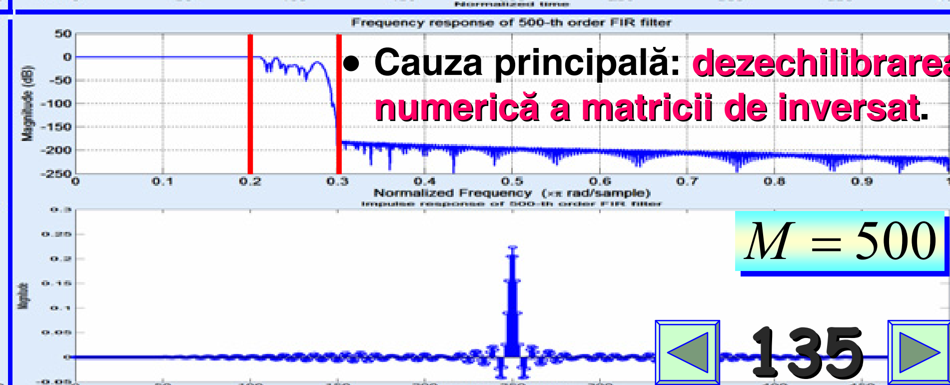
- Dacă ordinul e prea mare, apar **distorsiuni în zona tranzitorie**…



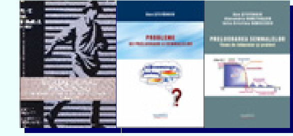


… deşi **creşte atenuarea în banda de stop(are)**.





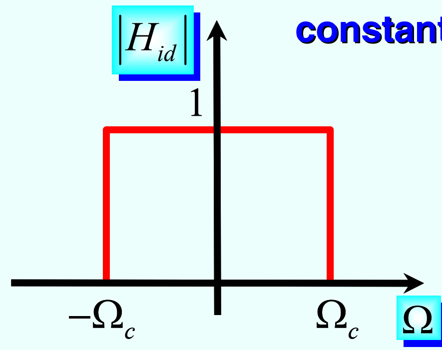
- Cauza principală: **dezechilibrarea numerică a matricii de inversat**.



Proiectarea filtrelor IIR prin MCMMP

• Se va dezvolta algoritmul de proiectare a **FTJ** (pentru celelalte categorii de filtre, algoritmul fiind similar).

Filtrul ideal continual



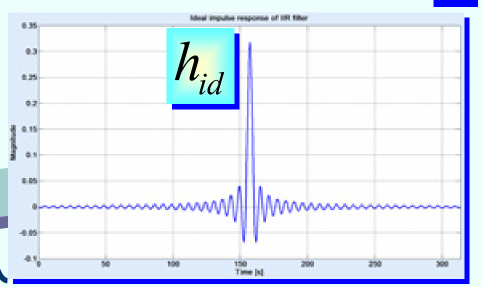
constanta întîrzierii de grup

unitatea de măsură a timpului (perioada de eşantionare)

$$H_{id}(j\Omega) = \begin{cases} e^{-jK\Omega T_s} &, \ |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 &, \ |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{T_s}$$

pulsaţia absolută de tăiere (determinată de cea relativă impusă)



Funcţia pondere?

Exerciţiu

O versiune eşantionată

$$h_d[n] = h_{id}(nT_s)$$

$\forall n \in \overline{K-N, K+N}$

parametru de control al numărului de eşantioane

☝ Cîteva zeci, cel puţin.

Care e legătura cu filtrul discret IIR?

Evident, funcţia de sistem a acestuia exprimă în manieră compactă o **ecuaţie cu diferenţe**, care **permite determinarea secvenţei pondere**.

vectorul regresorilor

Exerciţiu

• Deduceţi forma vectorului regresorilor.

Mai mult H_d

$$h_d[n] = \boxed{\varphi^T[n]} \cdot \theta$$

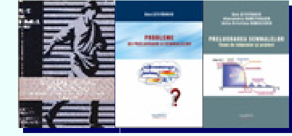
$\forall n \in \overline{K-N, K+N}$

forma de regresie liniară

$$\left[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{na} \,\middle|\, b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{nb} \right]^T$$

vectorul parametrilor necunoscuţi

➊➊.➋ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



Proiectarea filtrelor IIR prin MCMMP (continuare)

- Acum, se poate formula problema de optimizare caracteristică **MCMMP**.

Criteriul de optimizare

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=K-N}^{K+N}\left(h_d[n]-\boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}\right)^2 = \sum_{n=K-N}^{K+N}\left(h_{id}(nT_s)-\boldsymbol{\varphi}^T[n]\boldsymbol{\theta}\right)^2$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{na+nb+1}}{\operatorname{argmin}}\,\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta})$$

Soluția

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\sum_{n=K-N}^{K+N}\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)^{-1}\left(\sum_{n=K-N}^{K+N}\boldsymbol{\varphi}[n]h_{id}(nT_s)\right)$$

- Caracteristici ale soluției **MCMMP**:
  - ☺ Este relativ uşor de implementat.
  - ☺ Permite testarea mai multor filtre, prin varierea ordinelor acestora.
  - ☹ Pentru ordine prea mari, nu mai este garantată stabilitatea intrinsecă.

Detalii de implementare

- Există posibilitatea de a micşora dimensiunile sumelor de mai sus prin considerarea simetriei funcției pondere.

Exercițiu

- Arătați că simetria secvenței pondere a unui filtru IIR induce simetria polinoamelor sale.

Polinom simetric?

$$\alpha_0+\alpha_1 q^{-1}+\alpha_2 q^{-2}+\cdots+\alpha_{p-2}q^{2-p}+\alpha_{p-1}q^{1-p}+\alpha_p q^{-p}$$

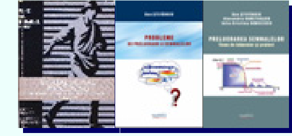
Exercițiu

- Reformulați problema de proiectare a filtrelor IIR prin **MCMMP** dacă se ia în considerare simetria secvenței pondere.

- O altă abordare, mai eficientă, este aceea de a considera doar a doua jumătate a funcției pondere ca sursă furnizoare de date.
- În acest caz, polinoamele nu mai sunt neaparat simetrice, dar se poate determina doar partea cauzală a secvenței pondere; partea anti-cauzală foloseste simetricele polinoamelor de la partea anti-cauzală.

Exercițiu

❶❶.❷ Proiectarea filtrelor optimale prin MCMMP



Proiectarea filtrelor IIR prin MCMMP (final)

Exemple — **Filtre IIR de tip FTJ, de diferite ordine, proiectate folosind MCMMP**