Pontificia Universidad Javeriana

Departamento de Matemática

Análisis Numérico

Taller 1

Marco Antonio Valencia Dueñas
ma_valencia@javeriana.edu.co

Nicolás David Gil Hernandez
nicolas_gil@javeriana.edu.co

Paula Catalina Piñeros Pardo
pineros.paula@javeriana.edu.co

Profesora: Eddy Herrera Daza

Bogotá D.C., 14 de Febrero del 2020

1. Error de redondeo

Suponga que un dispositivo solo puede almacenar únicamente los cuatro primeros dígitos decimales de cada número real, y trunca los restantes(esto es redondeo inferior). Calcule el error de redondeo si quiere almacenar el número 536.78

1.1. Desarrollo:

Se crean dos variables auxiliares (numeroAux y numeroFloor), siendo el valor de la primera el mismo que el número original dado y siendo la segunda el número dado despues de la función floor(función que retorna el número redondeado hacía abajo). También se crearon dos variables, una que representa el número de cifras actuales del número que será retornado al final, lo que facilitará en el algoritmo el saber cuando finalizar. Mediante un ciclo se obtiene el número de cifras que tiene el número retornado por la función floor. Luego se comparará con el número de cifras requeridos en los parámetros de la función, en caso de ser mayor se dividirá en dos hasta que se cumpla la condición. En caso de ser menor se multiplicar por 10 n veces, siendo n el número negativo de la diferencia entre las cifras requeridas y las obtenidas, luego se usará de nuevo la función floor. Para finalizar el número obtenido anteriormente se divide en 10 n veces para que quede con los decimales correctos. Luego se creo otra función que halla el error entre el número original y el número truncado.

El error dado es de: 0.01490368

2. Raíz cuadrada

Implemetnte en cualquier lenguaje el siguiente algortimo que sirve para calcular la raíz cuadrad. Aplíquelo para evaluar la raíz cuadrada de 7, analice su precisión, como podría evaluar la convergencia y validez del algoritmo.

Algoritmo

```
Algoritmo: Raíz cuadrada
Entra:      n     Dato
            E     Error permitido
            x     Valor inicial
Sale:       y     Respuesta calculada con error E
y ← 1/2(x + n/x)
Repetir mientras  |x - y|  >  E
      x ← y
      y ← 1/2(x + n/x)
Fin
```

2.1. Desarrollo:

Primero se ahce un ciclo en el que se identfica entre que numeros cuadrados se encuentra, para así poder determinar entre que valores se encuentra la raiz. Al hallar entre que valores se encuentra, se prosigue con hallar el promedio entre ambos valores. Para así con este valor, poder aplicar la fórmula ya planteada por el ejercicio para hallar la raíz cuadrada. Esta formula se aplica tantas veces como sea necesario hasta que el error calculado sea menor que el error establecido al momento de llamar a la función.

La raiz cuadrada de 7 dió como resultado = 2.645755

3. Teorema de Taylor

Utilizando el teorema de Taylor hallar la aproximación de

$$e^{0,5}$$

Con 5 cifras significativas.

3.1. Desarrollo:

Se declara una variable igual a 1 y se crea un ciclo cuya condición es es que el grado establecido en los parámetros Dentro de ese ciclo se hace otro ciclo que permite calcular el factorial del grado. Al salir del segundo ciclo se usa la función de taylor

$$taylor = taylo + (1/factorial) * (dato^{grado})$$

Luego se resta 1 al grado, para así hallar la aproximación. Al ya haber obtenido dicha aproximación se asegura que su usen solo 5 cifras significativas. La aproximación fue = 1.6487

4. Errores de la distancia

Calcule el tamaño del error dado por las operaciones aritméticas, para la solución del siguiente problema: La velocidad de una partícula es constante e igual a 4 m/s, medida con un error de 0.1 m/s durante un tiempo recorrido de 5 seg medido con error de 0.1 seg. Determine el error absoluto y el error relativo en el valor de la distancia recorrida.

$$v = 4, E = 0{,}1(velocidad)$$

$$t = 5, E = 0{,}1(tiempo)$$

$$d = vt(distanciarecorrida)$$

4.1. Desarrollo:

Primero se calcula el valor de la distancia. Para calcular el error absoluto se multiplicaron las medidas con los errores respectivos de las medidas. Y por último, para calcular el error relativo se dividio el error medido en la velocidad sobre la velocidad, a lo cual se le sumó el error medido del tiempo dividido en el valor tomado del tiempo; esto mutiplicado por 100.

Se obtuvo un error absoluto de: 0.9 Se obtuvo un error relativo de: 4.5 %

5. Polinomio

Evaluar el valor de un polinomio es una tarea que involucra para la máquina un npumero de operaciones la cuales deben ser mínimas. Como se puede evaluar el siguiente polinomio con el número mínimo de multiplicaciones.

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$$

$$x_0 = -2$$

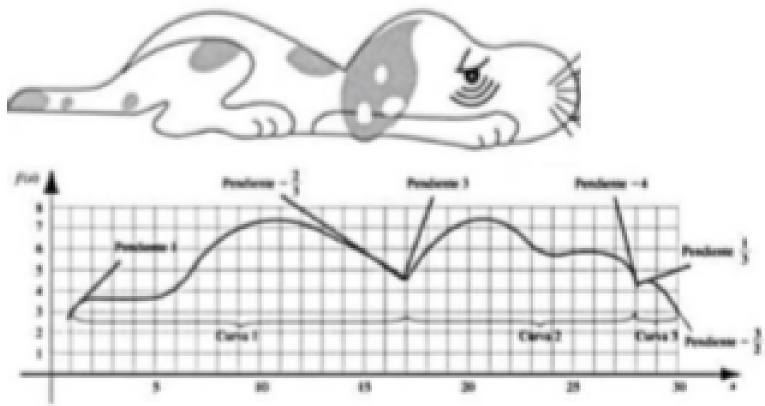
5.1. Desarrollo:

Se aplicó el teorema de Horner, que consiste en evaluar un polinomio de grado n usando el menor número de productos, siendo este el mismo número que el grado del polinomio. En la sgunda parte del taller se profundizará sobre este teorema.

El valor del polinomio es = 10.
Se sumo 4 veces.
Se multiplico 4 veces.

6. Perro

Reconstruir la silueta del perrito utilizando la menor cantidad de puntos para reproducir el dibujo del contorno completo del perrito sin bigotes, con la nformación dada: Coordenadas: y = c(3, 3.7, 3.9, 4.5, 5.7, 6.69, 7.12, 6.7, 4.45, 7, 6.1, 5.6, 5.87, 5.15, 4.1, 4.3, 4.1, 3)
x = c(1, 2, 5, 6, 7.5, 8.1, 10, 13, 17.6, 20, 23.5, 24.5, 25, 26.5, 27.5, 28, 29, 30)

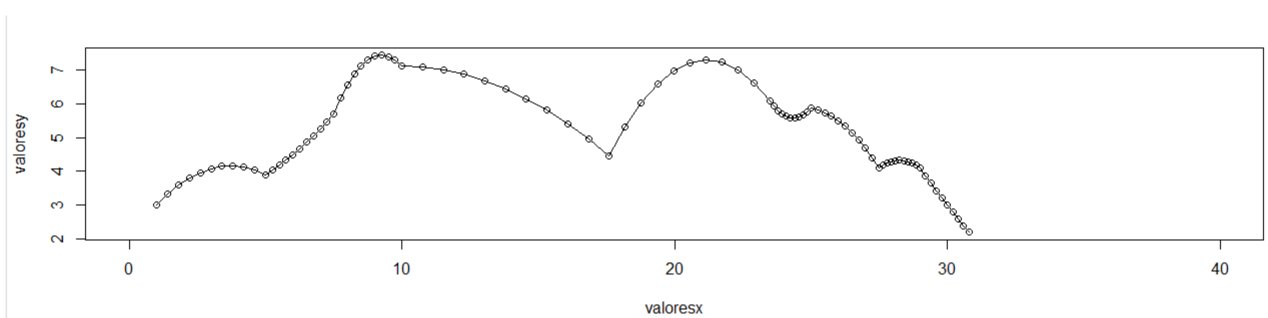


6.1. Desarrollo:

Se intenta aproximar la grafica mediante el uso de polinomios de maximo orden dos, que se generan a partir de 3 puntos y un sistema de ecuaciones lineales de 3x3. Lo primero que se hace es usar la funcion crearCoeficientes que recibe 3 puntos coordenados (x,y) y los transforma en tres coeficientes c1,c2 y c3 para crear una funcion de maximo segundo orden :

$$c_1x^2 + c_2x + c_3$$

El programa coje grupos de tres puntos y saca los coeficientes que se guardan en una matriz çoeficientes". Luego para agregar mas valores de x aparte de los valores de los puntos se usa la funcion crearIntervalos que define cuantos puntos mas agregar dependiendo de una variable dx. Se creean los nuevos valores de x y se almacenan en una matriz para posteriormente usarlos para hallar los valores de y dependiendo de los coefecientes previamente sacados. Estos tambien se almacenan en una matriz. Luego se grafican las dos matrizaaes de x y y. La grafica termina siendo una combinacion de muchas funciones cuadraticas que se generan con tres puntos. Por ejemplo la primera funcion se generaria con los puntos P1,P2 y P3 y la segunda con los puntos P3, P4 y P5 para que asi sea continua.



7. Método de Horner

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar el resultado del método 2 (cuyo número de multiplicaciones es 2n -1) 2. Implemente en R para verificar los resultados del método

de Horner. 3. Evaluar en x = 1.0001 con

$$P(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{50}$$

Encuentre el error de cálculo al compararlo con la expresión equivalente

$$Q(x) = (x^{51} - 1)/(x - 1)$$

7.1. Desarrollo:

7.1.1. Inducción matemática:

Primera paso: Probar para n = 1

$$P_1(x_0 = (a_1 * x_0) + a_0$$

Una multiplicación

$$(n = 1; 2(1) - 1)$$

Segundo paso: Hipótesis de inducción (suponga que vale para n)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

$$P_n(x_0); hay (2n - 1) multiplicaciones.H.I.$$

Tercer paso: *

$$2(n + 1) - 1$$

$$2n + 2 - 1$$

$$2n + 1$$

$$n >= 2$$

*

$$P_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$
$$P_{n+1}(x) = x(a_{n+1} x^n + a_n x^{n-1} + ... + a_1) + a_0 = q_n(x)$$
$$P_{n+1}(x_0) = x_0(q_n(x_0) + a_1) + a_0$$

Hay (2n -1) multiplicaciones

$$P_{n+1}(x_0) = x_0 q_n(x_0) + x_0 * a_1 + a_n$$

$$x_0 q_n(x_0) = (2n - 1), x_0 * a_1 = 1, a_n = 1$$
$$(2n - 1) + 1 + 1 = 2n + 1$$

7.1.2. Código:

Es el mismo código descrito anteriormente en el punto 5 del polinomio. Pues al en ese punto querer disminuir el número de multiplicaciones realizadas para evaluar un polinomio es efectivo usar este método. Pues reduce a n (grado del polinomio) las veces que se multiplican. El código consiste en primero crear una variable 'resultado' cuyo valor es el de la primera posición del arreglo del polinomio, luego hacer un ciclo que se repita por el tamaño del polinomio; en este ciclo el resultado se igual a el mismo multiplicado por el valor del número a evaluar, esto sumado al indice del cilo. En ese mismo ciclo se mantiene en funcionamiento un contador que nos permite saber cuantas veces se realizaron sumas y cuantas veces se realizaron multiplicaciones. Como en el ciclo solo hay una suma y una multiplicación, dichos contadores aumentarán solo en 1. Al final se imprimen los resultados de ambos contadores y el valor resultante del polinomio.

7.1.3. Error de cálculo:

Se creo un arreglo que se llenó con la función rep, se indicó que se llenara con '1', 50 veces. Ya con este arreglo se llamó a la función de método de Horner con el arreglo hecho anteriormente y el valor 1.0001. Luego se asignó a Q la función

$$Q = (1{,}0001^{51} - 1)/(1{,}0001 - 1)$$

Al final se imprimen los errores absolutos y los relativos.
Error absoluto dado: 1.005012
Error relativo dado: 1.96569

8. Números binarios:

1. Encuentre los primero 15 bits en la representación binaria de pi
2. Convertir los siguiente números binarios a base 10: 1010101; 1011.101;10111.010101...;111.1111...
3. Convierta los siguientes números de base 10 a binaria: 11.25;2/2;30.6;99.9

8.1. Desarrollo:

8.1.1. Primeros 15 bits de pi

$$\pi\ enbinario:$$

$$110010010000111$$

Primero se separó la parte entera de la decimal. Luego se hizo un ciclo en el que se obtuvo el valor de cada bit al sacar el moódulo en 2, cambiando los valores necesarios para que el ciclo funcione bien.

8.1.2. Conversión de números

1010101: 341 1011.101: 11.625 10111.010101...: 23.65625 111.1111...: 7.9375

8.1.3. Conversión de base 10 a binarios

Se hicieron dos funciones principlaes, una que convierte números enteros a binarios, y la otra convierte los decimales de un número a binarios. Siendo así se llaman ambas funciones para así obtente todo el número binario.

$$11{,}25 : 1011{,}0100000000$$

$$2/3 : 0{,}1010101010$$

$$30{,}06 : 11110{,}1001100110$$

$$99{,}09 : 1100011{,}1110011001$$

9. Punto flotante:

1. ¿ Cómo se ajusta un número binario infinito en un número finito de bits?

Hay dos maneras de poder ajustar un número binario en un número finito de bits, una es recortar los números que sobrepasan la capacidad, lo cual generará cierto error. De por si, el error no será grande debido a la alta capacidad de uso de bits. Aunque el error de recorte podrá ser mayor al error que si el número se redondea, debido a que en este segundo caso el número que se representará al final será lo más cercano al número requerido.

2. ¿Cuál es la diferencia entre redondeo y recorte?

En el recorte simplmente se eliminan los últimos números sin importar a que aproximan números que le siguen. Mientras que en el proceso de redondeo se usa el valor de la siguiente para obtener un resultado más aproximado del valor. Se puede decir que el redondeo es más exacto en el valor decimal final, sin embargo, un redondeo a n decimales y corte a n decimales podrán ser los mismos dependiendo de la regla usada para el redondeo.

3. Indique el número de punto flotante (IEEE) de precisión doble asociado a x, el cual se denota como fl(x); para x(0.4).

Para que sea una precisión doble asociada a x, se deben usar 64 bits. Para calcular ese valor binario se usó el siguiente código:

{precisionD = function(numero) x = numero bin = c() y = 0 for(i in 1:64) x = x*2 y = floor(x) bin = c(bin, y) if (y >0) x = x -1 return (bin) }

El valor de precisión es: 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

4. Error de redondeo En el modelo de la aritmética de computadora IEEE, el error de redondeo relativo no es más de la mitad del épsilon de máquina:

$$|(fl(x) - x|)/|x| <= 1/2$$

Teniendo en cuenta lo anterior, encuentre el error de redondeo para x = 0.4

5. Verificar si el tipo de datos básico de R y Python es de precisión doble IEEE y revisa en R y Python el format long

En R se maneja en todos los casos la doble precisión, a diferencia de Phyton que dependiendo de las variables hay doble precisión o no.

6. Encuentre la representación en número de máquina hexadecimal del número real 9.4

7.Encuentre las dos raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 + 9^{12}x = 3$$

Intente resolver el problemas usando la aritmética de precisión doble, tenga en cuenta la pérdida de significancia y debe contrarestarla.

8. Explique cómo calcular con mayor exactitud las raíces de la ecuación:

$$x^2 + bx - 10^{-12} = 0$$

Donde b es un número mayor que 100

10. Raíces de una ecuación

1. Implemente en R un algoritmo que le permita sumar únicamente los elementos de la sub matriz triangular superior o triangular inferior, dada la matriz cuadrada An. Imprima varias pruebas, para diferentes valores de n y exprese f(n) en notación O() con una gráfica que muestre su ordend de convergencia.

2. Implemente en R un algoritmo que le permita sumar los n2 primero números naturales al cuadrado. Imprima varias pruebas, para diferentes valores de n y exprese f(n) en notación O() con una gráfica que muestra su orden de convergencia.

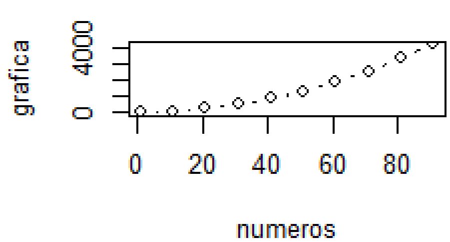
3. Para describir la trayectoria de un cohete se tiene el módelo:

$$y(t) = 6 + 2,13t^2 - 0{,}0013t^4$$

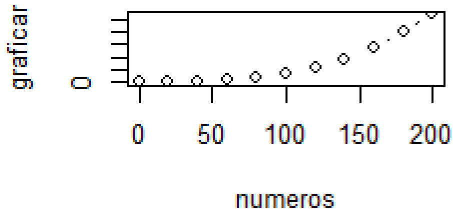
Donde, y es la altura en [m] y t tiempo en [s]. El cohete está colocado verticalmente sobre la tierra. Utilizando dos métodos de solución de ecuación no lineal, encuentre la altura máxima que alcanza el cohete.

10.1. Desarrollo:

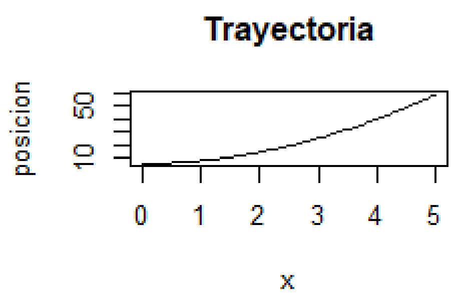
10.1.1. Suma elementos de la submatriz



10.1.2. Código sumar los n2 naturales al cuadrado



10.1.3. Trayectoria cohete:



11. Convergencia de métodos iterativos

1. Sean f(x) = ln(x + 2) y g(x) = sin (x) dos funciones de valor real. a. Utilice la siguiente fórmula recursiva con

$$E = 10^{-8}$$

para el punto de intersección

$$x_n = x_{n-1} - (f(xn-1)(x_{n-2}))/(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))$$

b. Aplicar el método iterativo siguiente con

$$E = 10^{-8}$$

para el punto de intersección:

$$x_{n+1} = x_n - f(xn)((x_n - x_{n-1}))/(f(x_n) - f(x_{n-1}))$$

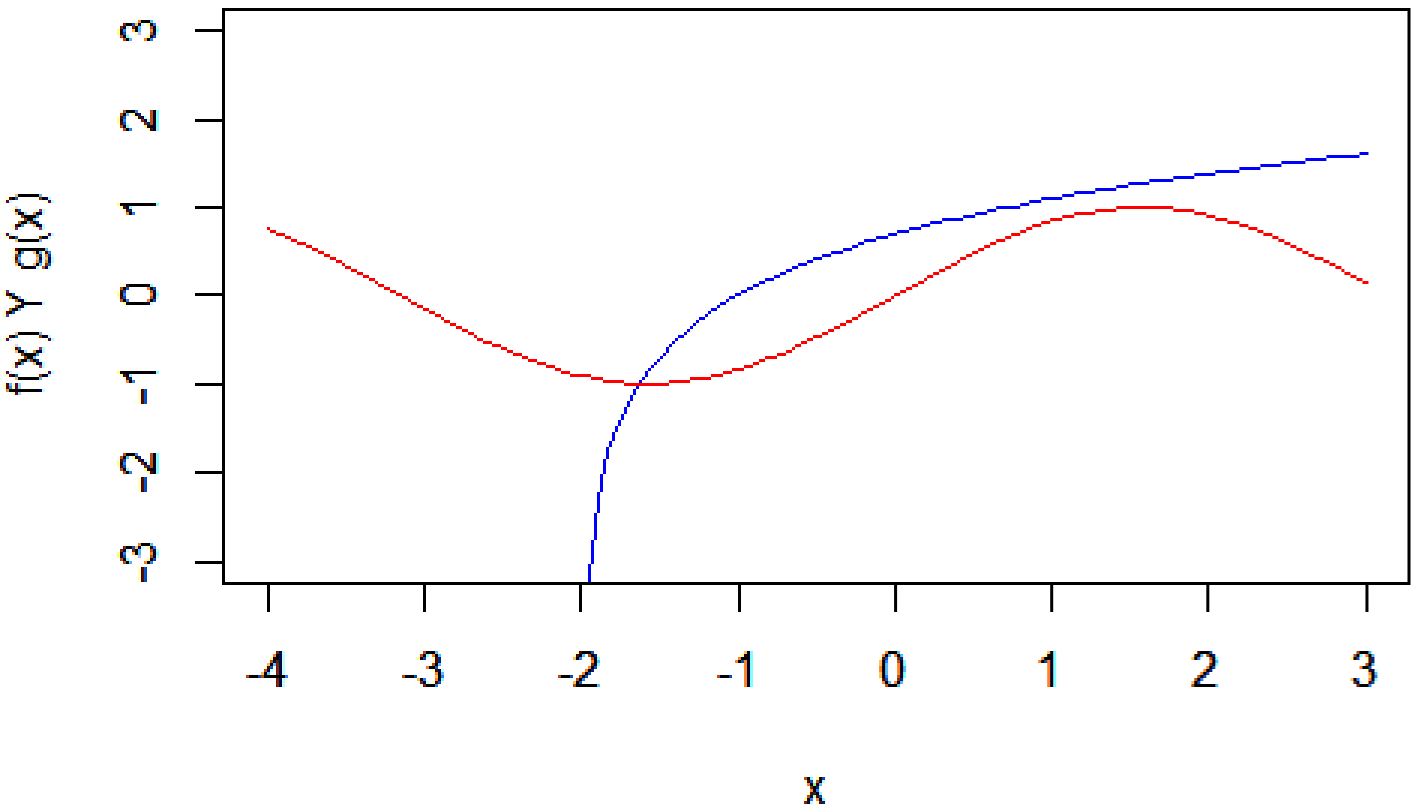
2. Newton: Determine el valor de los coeficientes a y b tal que f(1) = 3 y f(2) =4 con

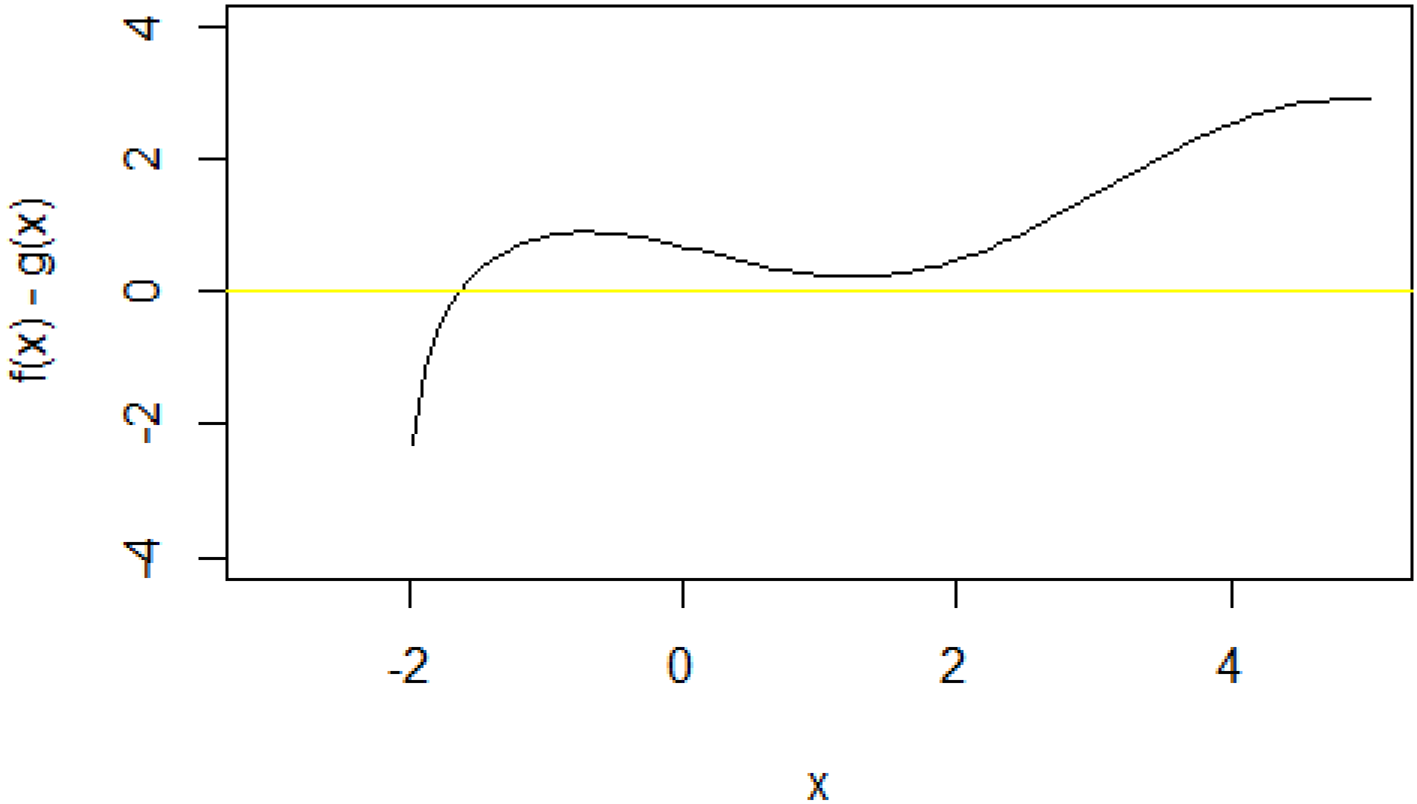
$$f(x) = a + (ax + b)e^{ax+b}$$

Obtenga la respuesta con

$$E = 10^{-6}$$

11.1. Desarrollo:





12. Multiples soluciones

Sea

$$f(x) = e^x - x - 1$$

1. Demuestre que tiene un cero de multiplicidad 2 en x = 0 2. Utilizando el método de Newton con

$$p_0 = 1$$

verifique que converge a cero pero no de forma cuadrática. 3. Utilizando el método de Newton generalizado, mejora la tasa de rendimiento.

12.1. Desarrollo:

12.1.1. Multiplicdad 2 en x = 0

12.1.2. Verificación converge a 0

12.1.3. Tasa de rendimiento

13. Convergencia acelerada

Dada la sucesión

$$x_{n_{n=0}}^{\infty} con x_n = cons(1/n)$$

1. Verifique el tipo de convergencia en x = 1 independiente del orgien 2. Compare los primeros términos con la sucesión

$$x_{n_{n=0}}^{\infty}$$

3. Sean

$$f(t) = 3sin^3(t) - 1yg(t) = 4sin(t)cos(t)parat >= 0$$

las ecuaciones paramétricas que describe el movimiento en una partícula. Utilice un método numperico con error de

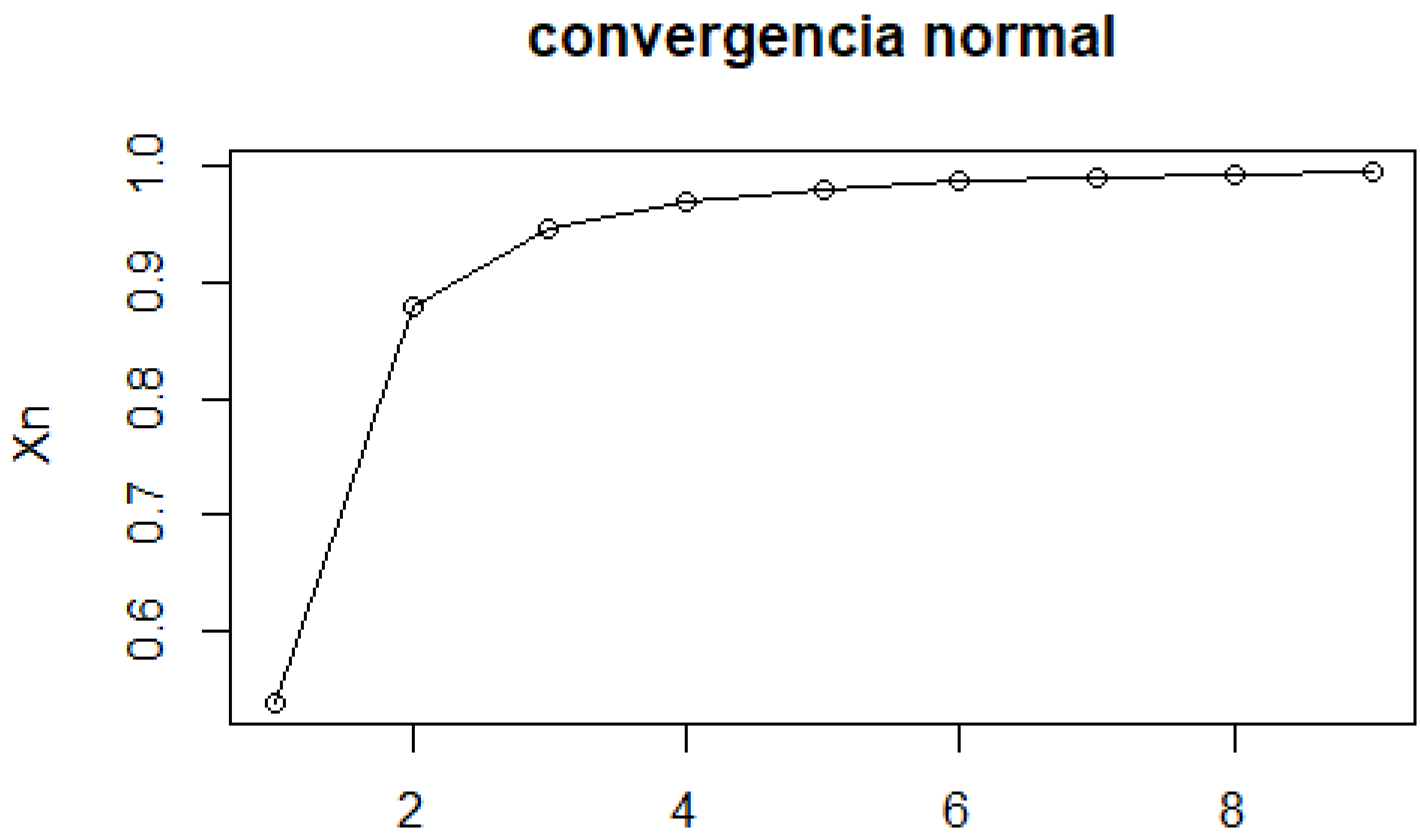
$$10-6$$

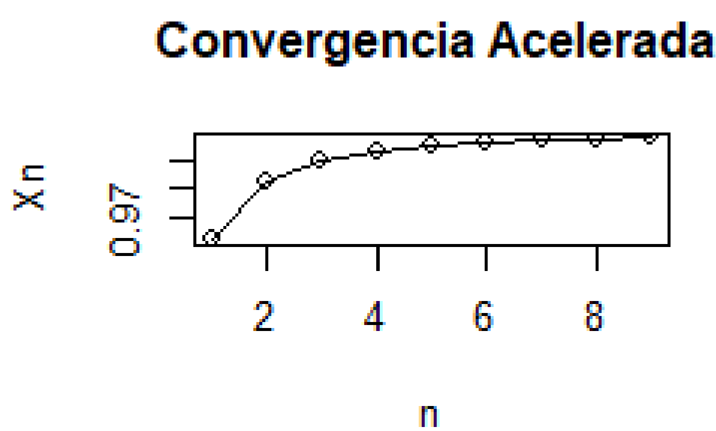
para determinar donde las coordenadas coinciden.

13.1. Desarrollo:

Es una convergencia de orden dos, se acerca de manera cuadratica a 1. Se acerca mucho más rapido con el método de aiken pues solo en el primer paso la diferencia es avismal, siendo en la serie normal de 0,5403 y con el metodo de Aitken es de 0.9617 que es una convergencia mucho más rápida a uno.

Se hicieron dos funciones de r , cada una recibe un valor de x y lo transforma mediante su respectiva funcion trigonométrica. Se hizo una serie de valores de x que se almacenaron en un vector, luego se procedió a usar estos valores para hallar su imagen en cada una de las dos funciones. Estas imagenes se guardaron en otros dos vectores. Luego se conpararon estos dos vectores de las imagenes para encontrar un punto donde las dos funciones se intersectaran.


convergencia normal
Xn
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
2
4
6
8


Convergencia Acelerada
Xn
0.97
2
4
6
8
n